انتگرال چندگانه (Multiple Integral)

created: 2025-05-12 13:15

انتگرال دوگانه

تابع پیوسته $f(x,y)$ مفروض است. فرض کنید که بخواهیم این تابع را روی ناحیه R انتگرال بگیریم. به این منظور ناحیه R را به n ناحیه مربعی کوچک تر ΔA_i افراز میکنیم. اگر از هر افراز یک نقطه (x_i,y_i) انتخاب کنیم آنگاه حاصل این تخمینی این انتگرال به صورت زیر است:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta A_i$$

اگر اندازه بزرگ ترین ΔA_i را $||P||$ یا نورم افراز در نظر بگیریم با $||P||\to 0$ این تخمین دقیق و دقیق تر میشود تا به مقدار معین انتگرال ما روی این ناحیه برسد:

$$\lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta A_i$$

این عبارت را انتگرال دوگانه تابع f روی ناحیه R می نامیم و به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\iint_R f(x,y)\;dA$$

قضیه فوبینی در انتگرال دوگانه

حالت پایه

اگر $f(x,y)$ یک تابع پیوسته در ناحیه مستطیلی $R: a\le x\le b,\;\; c\le y\le d$ باشد، آنگاه انتگرال دوگانه تابع f روی ناحیه R به صورت زیر بدست می آید:

$$\iint_R f(x,y)\;dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

حالت کلی

فرض کنید که $f(x,y)$ یک تابع پیوسته باشد.

1. اگر R ناحیه ای باشد که به صورت $a\le x\le b$ و $g_1(x)\le y\le g_2(x)$ نشان داده شده باشد به صورتی که g_1,g_2 توابعی پیوسته باشند آنگاه:

$$\iint_R f(x,y)\;dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

2. اگر R ناحیه ای باشد که به صورت $c\le y\le d$ و $h_1(y)\le x\le h_2(y)$ نشان داده شده باشد به صورتی که h_1,h_2 توابعی پیوسته باشند آنگاه:

$$\iint_R f(x,y)\;dA=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

خواص انتگرال دوگانه

انتگرال دوگانه دارای خواص زیر است:

1. $$\iint_R cf(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$$
2. $$\iint_R (f(x,y) \pm g(x,y))\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA \pm \iint_R g(x,y)\,dA$$
3. $$f(x,y) \geq g(x,y) \quad \text{(on the region R)} \implies \iint_R f(x,y)\,dA \geq \iint_R g(x,y)\,dA$$
4. $$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA \quad (\text{if } R = R_1 \cup R_2 \text{ and } R_1 \cap R_2 \text{ has 0 area})$$

مساحت S ناحیه بسته R نیز برابر با انتگرال زیر است:

$$S = \iint_R dA$$

انتگرال سه گانه

فرض کنید که $f(x,y,z)$ یک تابع سه متغیره در ناحیه D در فضا تعریف شده است. برای انتگرال گرفتن از f روی این ناحیه کافیست که ناحیه را به مکعب های ΔV_i با طول، عرض و ارتفاع $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ افراز کنیم و مجموع ریمانی را تشکیل دهیم:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

با حد کردن $n \to \infty$ یا $||P|| \to 0$ مقدار بدست آمده از این مجموع ریمانی انتگرال سه گانه نام دارد که به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\lim_{||P||\to 0} S_n = \iiint_D f(x,y,z)\,dV$$

قضیه فوبینی برای انتگرال سه گانه

تابع پیوسته $f(x,y,z)$ موجود است. اگر یک ناحیه D در فضا داشته باشیم و بخواهیم انتگرال f در آن ناحیه را محاسبه کنیم، ابتدا D را بر صفحه xy تصویر میکنیم و نام آن را S میگذاریم. سپس حدود z را بر حسب رویه های $h_1(x,y)$ و $h_2(x,y)$ بدست می آوریم. آنگاه:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_S \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dS$$

خواص انتگرال سه گانه

انتگرال سه گانه دارای خواص زیر است:

1. $$\iiint_D cf(x,y,z)\,dV = c\iiint_D f(x,y,z)\,dV$$
2. $$\iiint_D (f(x,y,z) \pm g(x,y,z))\,dV = \iiint_D f(x,y,z)\,dV \pm \iiint_D g(x,y,z)\,dV$$
3. $$f(x,y,z) \geq g(x,y,z) \quad \text{(on the region D)} \implies \iiint_D f(x,y,z)\,dV \geq \iiint_D g(x,y,z)\,dV$$
4. $$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dV \quad (\text{if } D = D_1 \cup D_2 \text{ and } D_1 \cap D_2 \text{ has 0 volume})$$

حجم ناحیه بسته D در فضا برابر است با:

$$V = \iiint_D dV$$

تغییر متغیر در انتگرال های چندگانه

انتگرال دوگانه $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ مفروض است. فرض کنید بخواهیم با تبدیل $x = g(u,v)$ و $y = h(u,v)$ انتگرال را از ناحیه R در دستگاه xy به ناحیه G در دستگاه uv ببریم. در این صورت دیفرانسیل های $dx\,dy$ به صورت زیر تبدیل به $du\,dv$ می شوند:

$$dx\,dy = |J(u,v)|\,du\,dv = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

در اینجا $J(u,v)$ دترمینان ژاکوبیان f که به صورت $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ نیز نشان داده می شود:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

بنابرین انتگرال بالا با تغییر متغیر uv به صورت زیر تبدیل میشود:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(g(u,v),h(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

- ژاکوبیان تبدیل دکارتی به قطبی یا استوانه ای ($x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$) برابر با r است.
- ژاکوبیان تبدیل دکارتی به کروی ($x = \rho\sin\varphi\cos\theta$، $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$ و $z = \rho\cos\varphi$) برابر با $\rho^2\sin\varphi$ است.

Tags

#studynote #calculus #math

Subjects

1. Calculus 2

References

1. Thomas' Calculus-Pearson (2017), 15. Multiple Integrals