

# correlation function of XXX spin chain: different paths

Arashi 2026.1

1	Bosonization and CFT method	1
2	EFP method	30
3	Numerical method	33
4	Appendix	33
4.1	Appendix B.1	33
4.2	Appendix B.2	36
4.3	Appendix B.3	36
4.4	Appendix B.4	38

## 1 Bosonization and CFT method

### Introduction to Bosonization

在求解 *Lieb – Liniger* 模型和 *XXZ* 链的过程中，我们研究了低能激发，并注意到它们常常表现出与系统的微观组成粒子截然不同的性质。它反映了这样一个事实：在低维情况下，由于散射不可避免，微扰会影响整个系统，因此激发具有集体特性。

简单的（即单分量的）临界的（即无能隙的）一维系统由 *Luttinger* 液体普适类描述：其低能行为可以通过一个自由的玻色理论来刻画，这形式化了低能自由度具有声波（声子）特性的观察，其特征为：低能激发不是粒子，而是密度波，这些激发表现为声子型的线性色散，可以用自由玻色场理论描述。从共形场论的观点来看，*Luttinger* 液体是一个  $c = 1$  的理论，因此需要更多的信息来唯一地确定其操作内容。 $c$  为中心荷，一个自由实玻色子  $c = 1$ ，一个自由马约拉纳费米子  $c = 1/2$ ，两个独立玻色子  $c = 2$ 。本质上衡量的是有效无质量模式的数目。玻色化程序，原则上是从微观描述中提取集体行为的方法。更复杂的系统可能具有分数中心荷或者  $c > 1$ ，因此是 *Luttinger* 液体的推广，它们仍然由共形场论描述，可能还需要补充一个 *Kac – Moody* 代数。在所有情况下 *Bethe* 假设在提供非微扰结果方面是有用的，用以确定可积模型在标度极限下的正确共形场论表示。

我们从玻色化描述的推导开始，这能提供关于此方法的一些物理直观。我们将使用一个费米子系统的例子，但事实上玻色系统也可以被玻色化。玻色化是一种通过玻色场、以集体行为来描述临界系统动力学的方法。这在一维是可能的，因为系统受到很大约束：即使我们试图激发单个粒子，所有其他粒子也必须重新排列以容纳它，因为粒子之间无法在不相互作用的情况下互相绕过。我们从利用 *Bethe* 假设分析可积模型的激发中已经熟悉了这类现象。由

于这种集体性，只要密度场

$$\rho(x) \equiv \sum_j \delta(x - x_j),$$

(其中  $x_j$  是第  $j$  个粒子的位置) 可以近似为一个平滑函数，那么基于粒子密度来描述系统就可以有效地捕获整个动力学。这相当于系统的流体动力学描述，其中与密度共轭的场是速度  $v(x)$ :

$$[\rho(x), v(y)] = -i\delta'(x - y).$$

此类系统演化方程的一般结构给出

$$\dot{\rho} - \partial_x(\rho v) = 0, \quad \dot{v} - v\partial_x v + \partial_x F(\rho) = 0,$$

其中第一个是连续性方程，第二个是适当的动力学欧拉方程。一般来说，这些方程是非线性的，并且在量子水平上很难处理（此外，没有一个对所有时间都有效的小耦合展开）。但它们可以在经典解附近线性化，线性流体力学本质上给出一个波动方程。也就是说，一维系统的基本（普适）激发是声子。

在一维里，粒子运动被强烈约束，低能动力学本质上是“密度波”的动力学。把这个由  $\delta$  函数组成的密度，视为一个平滑函数，这意味着我们只关心波长远大于粒子间距的涨落，忽略微观结构，这就是连续极限。密度场正比于玻色场的导数，利用正则对易关系可以推导出二者的对易关系。一维低能物理可以借用流体力学方法进行研究，所以可以通过流体力学方程推导出声子激发。

因此，在这些一般性考虑下，我们期望能够用一个玻色算符和二次哈密顿量来描述一个一维系统。这种描述称为 **Bosonization**，我们再次强调，即使是玻色理论也可以被玻色化，因为这仅仅意味着给出一个线性流体动力学表述。让我们描述如何将一个自由费米子理论玻色化，其微观哈密顿量为：

$$H = -\frac{1}{2m} \Psi^\dagger(x) \partial_x^2 \Psi(x) = \frac{k^2}{2m} \tilde{\Psi}^\dagger(k) \tilde{\Psi}(k),$$

其中  $\partial_x \equiv \partial/\partial x$ ，最后一个表达式显示了傅里叶空间表示。共形场论是一个手征理论，也就是说，自然的自由度要么是右行的，要么是左行的。因此，我们需要将费米子按手征性分开，并应用基本的玻色化恒等式

$$\psi_\pm(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} : e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_\pm(x)} :,$$

其中  $\phi_\pm(x)$  是集体玻色场， $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O} - \langle 0|\mathcal{O}|0 \rangle$  代表正规排序， $+$ ( $-$ ) 指右（左）手征性。注意指数映射是周期性的： $\sqrt{4\pi}$  因子决定了场  $\phi_\pm$  的周期性（也称为紧致化半径），并且对于自由费米子，两个手征场是相等的。选择  $\sqrt{4\pi}$  是为了方便确保费米子场的反对易关系转化为玻色子场的正则对易关系。我们将看到相互作用会改变两个手征场的紧致化半径，但以保持对易关系的方式。

低能物理只发生在费米面附近。而一维的费米面不是一个面，而是两个孤立的点： $+k_F$  和  $-k_F$ 。靠近  $+k_F$  的激发，其群速度是正的，所以向右传播；靠近  $-k_F$  的激发，群速度是负的，所以向左传播。当把色散在这两个点附近线性化之后，能量和动量成正比。线性色散意味着波包不会展宽，并且解自动分解成右行解和左行解。这两类模式在低能下互不混合，因此低能理论自然分裂成两个彼此独立的传播方向自由度，这种“只能单向传播”的自由度就叫手征自由度。

给定手征费米子的密度算符满足代数： $[\rho(x), \rho(y)] = \frac{i}{2\pi} \delta'(x-y)$ ，引入手征玻色场  $\phi(x)$ ，定义密度为其导数： $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi(x)$ ，为了使对易关系成立， $\phi$  需满足对易关系： $[\phi(x), \phi(y)] = -\frac{i}{4} \text{sgn}(x-y)$ 。设费米子算符为指数形式： $\psi(x) = C e^{-i\alpha\phi(x)}$ ，其中  $C$  为归一化常数。利用 BCH 公式计算反对易关系： $\psi(x)\psi(y) = e^{-i\alpha[\phi(x)+\phi(y)]} e^{-\alpha^2[\phi(x),\phi(y)]/2}$ 。交换  $x$  与  $y$  时产生的相位因子为  $e^{-i\alpha^2 \text{sgn}(x-y)/4}$ ，导致整体相位差： $\frac{\psi(x)\psi(y)}{\psi(y)\psi(x)} = e^{-i\alpha^2/2}$ 。为满足费米子的反对易关系  $\psi(x)\psi(y) = -\psi(y)\psi(x)$ ，需有： $e^{-i\alpha^2/2} = -1 \Rightarrow \alpha^2 = 4\pi$ 。因此  $\alpha = \sqrt{4\pi}$ 。将结果代入，并确定归一化常数  $C = 1/\sqrt{2\pi}$ （通过要求标准反对易关系或密度匹配），即得玻色化公式：

$$\psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} : e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(x)} :$$

最后验证密度：利用顶点算符的正规序运算可得： $:\psi^{\dagger}(x)\psi(x): = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi(x)$ 。与定义一致，完成推导。

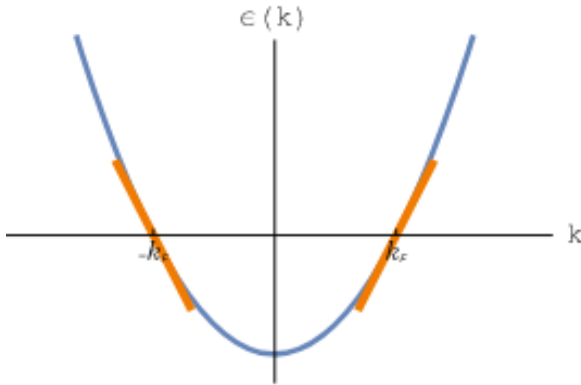


图 1: 费米点附近的线性色散

尽管费米子和玻色子之间的恒等式在一维普遍成立，但正规排序的规定取决于理论（及其基态）。这个规定对于玻色化构造给出有意义的结果（并避免虚假发散）至关重要，并且在一般情况下不可得。然而，如果我们只关注低能激发，我们可以将谱线性化，从而导出一个清晰简单的正规排序规则。因此，我们将自由哈密顿量写为

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2m} \sum_{r=\pm} \psi_r^{\dagger} (\partial_x + irk_F)^2 \psi_r$$

并在费米点附近展开为

$$\mathcal{H} \simeq -\frac{k_F^2}{2m} \sum_{r=\pm} \psi_r^{\dagger} \psi_r - i\frac{k_F}{m} \sum_{r=\pm} r \psi_r^{\dagger} \partial_x \psi_r + \dots$$

其中第一项被解释为化学势（可以吸收到基态能量的重新定义中），而第二项显示了围绕费米点  $\pm k_F$  的激发具有线性谱。左行和右行场  $\psi_{\pm}$  是通过在左/右费米点附近展开  $\Psi(x)$  得到的：

$$\psi_{\pm}(x) \equiv \int_{\pm k > 0} \frac{dk}{2\pi} e^{i(k \mp k_F)x} \tilde{\Psi}(k) \Rightarrow \Psi(x) \simeq e^{ik_F x} \psi_{+}(x) + e^{-ik_F x} \psi_{-}(x) := \sum_{r=\pm} \frac{e^{irk_F x}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ir\sqrt{4\pi}\phi(r)} :.$$

大多数（即低能）物理过程发生在这些点附近，因此这种分离是一个合理的近似。我们可以使用映射将各种费米子双线性项用玻色场表示。例如，可以

考虑像

$$\begin{aligned}
:\psi_{\pm}^{\dagger}(x)\psi_{\pm}(x+\epsilon): &:= \psi_{\pm}^{\dagger}(x)\psi_{\pm}(x+\epsilon) - \langle \psi_{\pm}^{\dagger}(x)\psi_{\pm}(x+\epsilon) \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ : e^{\mp i\sqrt{4\pi}(\phi_{\pm}(x+\epsilon)-\phi_{\pm}(x))} : - 1 \right] e^{4\pi(\phi_{\pm}(x)\phi_{\pm}(x+\epsilon))} \\
&= \pm \frac{1}{2i\pi\epsilon} \left[ e^{\mp i\sqrt{4\pi}(\phi_{L,R}(x+\epsilon)-\phi_{L,R}(x))} - 1 \right]
\end{aligned}$$

这样的量，其中我们使用了恒等式

$$:e^A::e^B:=:e^{A+B}:e^{(AB-\frac{A^2+B^2}{2})}$$

以及事实(推到参见Appendix B.2)

$$\langle \phi_{\pm}(0)\phi_{\pm}(x) - \phi_{\pm}^2(0) \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\alpha}{\alpha \pm ix}$$

这里， $\alpha$  是一个调节子，它模拟有限带宽并防止动量变得太大（从而将带宽限制在  $\Lambda \sim 1/\alpha$ ）。计算这样的双线性项的规则称为点分离法，它考虑到坐标空间中场的平方没有定义，必须通过对空间离散化来正规化。因此，一方面  $\alpha$  捕捉了低能近似，另一方面  $\epsilon$  与微观理论的底层晶格有关。我们可以按  $\epsilon$  的幂次展开

$$:\psi_{\pm}^{\dagger}(x)\psi_{\pm}(x+\epsilon): = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \psi_{\pm}^{\dagger}(x) \partial_x^n \psi_{\pm}(x) = \pm \frac{1}{2i\pi\epsilon} \left[ e^{\mp i\sqrt{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \partial_x^n \phi_{\pm}(x)} - 1 \right],$$

这给出了手征费米流

$$j_n^{\pm}(x) \equiv \psi_{\pm}^{\dagger}(x) \partial_x^n \psi_{\pm}(x)$$

自由哈密顿量为  $H = \int dx \Psi^{\dagger}(x) \left( -\frac{\partial_x^2}{2m} \right) \Psi(x)$ ，在低能下激发只发生在两个费米点  $k = \pm k_F$  附近。为此我们将费米场分解为靠近这两个点的部分： $\Psi(x) \simeq e^{ik_F x} \psi_{+}(x) + e^{-ik_F x} \psi_{-}(x)$ 。将此分解代入哈密顿量并计算导数项：首先有  $\partial_x(e^{\pm ik_F x} \psi_{\pm}) = e^{\pm ik_F x} (\partial_x \pm ik_F) \psi_{\pm}$ ，再求导一次得到  $\partial_x^2(e^{\pm ik_F x} \psi_{\pm}) = e^{\pm ik_F x} (\partial_x \pm ik_F)^2 \psi_{\pm}$ 。代入哈密顿量密度得到上文结果。展开平方项  $(\partial_x + irk_F)^2 = \partial_x^2 + 2irk_F \partial_x - k_F^2$ ，整理后为：

$$\mathcal{H} = -\frac{k_F^2}{2m} \sum_r \psi_r^{\dagger} \psi_r + i\frac{k_F}{m} \sum_r r \psi_r^{\dagger} \partial_x \psi_r - \frac{1}{2m} \sum_r \psi_r^{\dagger} \partial_x^2 \psi_r$$

在低能近似下  $|q| \ll k_F$ ，因而  $\partial_x \sim q$ 。第三项  $\psi_r^{\dagger} \partial_x^2 \psi_r$  为  $q^2$  量级，是高阶小量，可忽略。定义费米速度  $v_F = k_F/m$ ，并注意到常数项  $-\frac{k_F^2}{2m}$  可视为化学势的贡献，最终得到线性化后的有效哈密顿量密度：

$$\mathcal{H} \simeq iv_F \sum_{r=\pm} r \psi_r^{\dagger} \partial_x \psi_r$$

其对应的色散关系为  $\epsilon_r(q) = rv_F q$ ，这是一维 *Luttinger* 液体理论中具有线性色散的手征费米子。

用玻色场  $\phi_{\pm}$  表示的生成函数。通过匹配  $\epsilon$  的幂次，我们可以写出这些表达式。费米子密度是

$$\rho_{\pm} = j_0^{\pm} = \psi_{\pm}^{\dagger}(x) \psi_{\pm}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi_{\pm}(x),$$

电流密度是

$$j_1^\pm = \psi_\pm^\dagger(x) \partial_x \psi_\pm(x) = \pm i (\partial_x \phi_\pm(x))^2 - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \partial_x^2 \phi_\pm.$$

展开中的第三项对应于左/右行者的原始二次哈密顿量

$$j_2^\pm = -2m\mathcal{H}_\pm = \psi_\pm^\dagger(x) \partial_x^2 \psi_\pm(x) = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} (\partial_x \phi_\pm(x))^3 \pm i (\partial_x \phi_\pm) (\partial_x^2 \phi_\pm) - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \partial_x^3 \phi_\pm.$$

虽然用费米子表示时它是一个定义良好的哈密顿算符，但其玻色形式显示出三次项（注意最后一项是全导数，因此仅作为边界项贡献）。因此，我们看到，用于正规排序的正规化方案将自由系统映射到一个不稳定的玻色理论，其三次势不具有下界，因此无法维持稳定的量子真空。然而，只要我们关注低能物理，我们就可以利用费米动量  $k_F$  是一个大参数这一事实，因此被忽略的项是被压低的。我们保留自由费米子理论的线性化版本并将其作为我们的哈密顿量，通过上面找到的表达式将其玻色化为

$$\mathcal{H} \sim -i \frac{k_F}{m} [j_1^+ - j_1^-] + \dots = \frac{k_F}{m} [(\partial_x \phi_+)^2 + (\partial_x \phi_-)^2] + \dots$$

由这两个手征场，我们可以定义一个玻色场及其对偶场

$$\phi(x) \equiv \phi_+(x) + \phi_-(x), \quad \theta(x) \equiv \phi_+(x) - \phi_-(x).$$

利用表达式和费米子对易关系，可以证明这些玻色场满足对易关系

$$[\phi(x), \theta(y)] = i\delta_H(y-x),$$

其中  $\delta_H(x)$  表示 *Heaviside* 阶跃函数。通过微分我们有

$$[\phi(x), \partial_y \theta(y)] = [\theta(x), \partial_y \phi(y)] = i\delta(x-y),$$

这意味着我们可以将对偶场  $\theta(x)$  的导数识别为  $\phi(x)$  的共轭（反之亦然）：

$$\Pi(x) \equiv \frac{1}{v_0} \partial_t \phi(x) = \partial_x \theta(x),$$

其中  $v_0 \equiv k_F/m$  是自由系统的声速。因此，线性化的自由费米子理论被映射到一个自由玻色理论：

$$\mathcal{H} = \frac{v_0}{2} \int [(\Pi(x))^2 + (\partial_x \phi(x))^2] dx.$$

物理上，玻色场是位移场，事实上， $\phi(x)$  计算  $x$  左侧的粒子数，其导数给出粒子密度。



前文已经推得线性化的哈密顿量可写成一维狄拉克形式： $H = v_0 \int dx [\psi_+^\dagger (-i\partial_x) \psi_+ - \psi_-^\dagger (-i\partial_x) \psi_-]$ ，其中  $v_0 = \frac{k_F}{m}$  是费米速度。进一步计算可得  $\psi_\pm^\dagger (-i\partial_x) \psi_\pm = \pm (\partial_x \phi_\pm)^2$ （注意这里在同一点是奇异的，需要进行点分裂取极限得到），代入哈密顿量得到  $H = v_0 \int dx [(\partial_x \phi_+)^2 + (\partial_x \phi_-)^2]$ 。引入新的玻色场变量，手征场可表示为  $\phi_\pm = \frac{1}{2}(\phi \pm \theta)$ 。代入后，动能项化为  $(\partial_x \phi_+)^2 + (\partial_x \phi_-)^2 = \frac{1}{2}[(\partial_x \phi)^2 + (\partial_x \theta)^2]$ ，导出  $[\phi(x), \partial_y \theta(y)] = i\delta(x-y)$ 。这表明  $\partial_x \theta(x)$  是场  $\phi(x)$  的正则共轭动量，定义  $\Pi(x) = \partial_x \theta(x)$ 。因此哈密顿量可写为标准自由标量场形式：

$$H = \frac{v_0}{2} \int dx [(\partial_x \phi)^2 + (\partial_x \theta)^2] = \frac{v_0}{2} \int dx [\Pi^2 + (\partial_x \phi)^2]$$

从哈密顿运动方程可得  $\partial_t \phi(x) = \frac{\delta H}{\delta \Pi(x)} = v_0 \Pi(x)$ ，即  $\Pi(x) = \frac{1}{v_0} \partial_t \phi(x)$ 。这与波动方程  $(\partial_t^2 - v_0^2 \partial_x^2) \phi = 0$  一致，描述了无耗散的声子传播。场  $\phi(x)$  具有明确的物理意义：总密度  $\rho(x) = \rho_+ + \rho_- = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi$ ，因此  $\phi(x) = -\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^x \rho(x') dx'$ 。它表示在位置  $x$  左侧累积的粒子数，即密度涨落的积分，可解释为一维流体的纵向位移场。当某处密度增加时， $\phi$  的斜率相应改变，刻画了系统的集体激发。

特别地，我们有

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \Psi^\dagger(x) \Psi(x) = \rho_0 + \psi_+^\dagger(x) \psi_+(x) + \psi_-^\dagger(x) \psi_-(x) + e^{-i2k_F x} \psi_+^\dagger(x) \psi_-(x) + e^{i2k_F x} \psi_-^\dagger(x) \psi_+(x) \\ &= \rho_0 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi(x) + \frac{1}{\pi} \cos[\sqrt{4\pi} \phi(x) - 2k_F x], \end{aligned}$$

因此我们将玻色场识别为密度波（ $\rho_0$  是恒定的背景粒子密度）。我们已经表明，自由费米子哈密顿量的低能激发可以用一个简单的二次玻色子来描述，对应于量子声波。值得注意的是，出现在自由玻色场中的算符是这个玻色理论中唯一的边缘算符。这意味着，任何添加到自由费米子理论中的相互作用项，只要不打开能隙（即不使系统偏离临界性），一旦玻色化，就会产生一系列无关算符以及  $(\Pi(x))^2$  和  $(\partial_x \phi(x))^2$  的组合。因此，这个重整化群论证意味着所有一维临界费米子理论都通过玻色化映射为像

$$\mathcal{H} = \frac{v_s}{\pi} \int \left[ K(\Pi(x))^2 + \frac{1}{K}(\nabla \phi(x))^2 \right] dx$$

这样的二次理论，其中  $v_s$  具有速度量纲，可以解释为相互作用系统的（重整化）费米速度， $K$  是一个无量纲参数，与理论的紧致化半径相关，或者与相空间中粒子占据的排斥统计面积相关。打开能隙的相互作用会导致玻色理论中出现相关算符，通常是场和/或其对偶场的正弦或余弦项。

从一维无能隙、平移不变且粒子数守恒的系统出发，其低能有效理论必须是局域的、只包含最低阶导数，并保持  $U(1)$  对称性。因此哈密顿量密度只能包含正则动量  $\Pi$  和空间导数  $\partial_x \phi$  的二次项，形如  $\mathcal{H} = A\Pi^2 + B(\partial_x \phi)^2$ 。场  $\phi$  本身或其平方项  $\phi^2$  不能出现，前者会破坏粒子数守恒，后者相当于质量项会打开能隙；更高阶导数项在重整化群流下是无关的。因此低能固定点必然是一个高斯理论。场  $\phi$  与其正则动量  $\Pi$  满足对易关系  $[\phi(x), \Pi(y)] = i\delta(x-y)$ ，它们是共轭变量，不能独立缩放。但可以做正则变换进行重定义，例如令  $\phi \rightarrow \sqrt{K}\phi$  和  $\Pi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{K}}\Pi$ ，此时对易关系保持不变，而哈密顿量变为  $A\frac{1}{K}\Pi^2 + BK(\partial_x \phi)^2$ 。因此任意两个正系数  $A$  和  $B$  都可以通过这种场重定义写成一个标准形式：

$$\mathcal{H} = \frac{v_s}{\pi} \left[ K\Pi^2 + \frac{1}{K}(\partial_x \phi)^2 \right],$$

其中  $v_s = \sqrt{AB}$  是激发传播速度，而  $K = \sqrt{A/B}$  是一个无量纲参数。这里的  $K$  和  $1/K$  并非随意放置，而是正则共轭变量缩放后的自然参数化结果。回顾密度  $\rho(x) \propto \partial_x \phi$ ，而电流  $j(x) \propto \Pi$ ，因此哈密顿量实际上是电流涨落平方与密度涨落平方之和。参数  $K = \sqrt{A/B}$  反映了密度涨落刚性（即恢复力系数）与电流涨落刚性（即动能系数）的比值。具体而言， $K$  较大意味着密度涨落的能量代价较小，系统更容易发生电荷密度调制； $K$  较小则表示密度涨落代价较大，系统更倾向于保持均匀密度。

总而言之，任何一维无能隙系统的低能激发都可以使用玻色化程序映射到一个玻色高斯理论，其中所有相互作用效应仅由两个参数捕捉： $v_s$  和  $K$ 。注意，*Luttinger* 参数  $K$  可以通过场的重新标度从哈密顿量中移除

$$\phi(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{K}}\phi(x), \quad \theta(x) \rightarrow \sqrt{K}\theta(x).$$

这对应于手征场紧致化半径的重新定义。利用前文定义：

$$\phi_{\pm} = \frac{1}{2\sqrt{K}} [\phi(x) \pm K\theta(x)].$$

一般来说， $K = 1$  对应于自由费米子； $K > 1$  表示吸引费米子，而  $0 < K < 1$  表示排斥费米子。自由玻色子在一维不稳定，它们将对应于  $K \rightarrow \infty$ 。因此，任何有限的  $K$  都对应于排斥玻色子，一直到完美排斥玻色子的极限  $K = 1$ （即 *Lieb-Liniger* 模型的  $c \rightarrow \infty$  极限，所谓的 *Tonks-Girardeau* 极限）。具有  $K < 1$  的玻色系统可以在超 *Tonks-Girardeau* 区域达到。将相互作用系统映射到高斯理论的一个基本优点是关联函数很容易获得。例如，对于前面已有的公式我们有

$$\begin{aligned} \langle [\phi(x, \tau) - \phi(0, 0)]^2 \rangle &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{K}{2\pi} \ln \frac{x^2 + (v_s \tau + \alpha)^2}{\alpha^2}, \\ \langle [\theta(x, \tau) - \theta(0, 0)]^2 \rangle &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi K} \ln \frac{x^2 + (v_s \tau + \alpha)^2}{\alpha^2}, \end{aligned}$$

其中  $\tau \equiv it$  是欧几里得时间。理论的主要算符是顶点算符，形式为

$$V(\beta, z) \equiv e^{i\beta\phi_+(z=v_s\tau-ix)}, \quad \bar{V}(\bar{\beta}, \bar{z}) \equiv e^{i\bar{\beta}\phi_-(\bar{z}=v_s\tau+ix)}.$$

顶点算符的关联函数可以利用高斯理论的功効计算：

$$\langle e^{i\sum_j [\beta_j \phi_+(z_j) + \bar{\beta}_j \phi_-(z_j)]} \rangle = e^{\frac{i}{2} [\sum_j \beta_j \phi_+(z_j) + \bar{\beta}_j \phi_-(z_j)]^2},$$

仅当  $\sum_j \beta_j = \sum_j \bar{\beta}_j = 0$  时非零。通常，这些关联函数像幂律  $\langle O \rangle \sim r^{-2\Delta}$  一样衰减，具有特征指数  $\Delta$ 。如果  $\Delta < 2$ ，相应的算符在重整化群意义上是相关的；如果  $\Delta > 2$ ，则是无关的，而  $\Delta = 2$  对应于边缘情况。使用这个机制，可以计算物理关联函数的渐近行为。例如

$$\langle \rho(x, \tau) \rho(0, 0) \rangle \simeq \frac{K^2}{2\pi^2} \frac{1}{(x^2 + v_S^2 \tau^2)^2} + B \frac{\cos 2k_F x}{(x^2 + v_S^2 \tau^2)^{2K}} + \dots$$

最后，让我们提及，玻色化构造非常普遍，适用于任何一维临界系统。即使我们只针对微观费米子理论明确展示了构造，它也可以推广到任何模型。对线性谱（低能模式）的近似对于确保所得理论仅为二次型至关重要。要玻色化一个自旋系统，可以先执行 *Jordan–Wigner* 变换将其映射为费米子理论，然后玻色化这些费米子。也可以玻色化一个玻色理论，因为这种映射与粒子的统计性质无关，而是与基本激发是集体的事实有关。

从哈密顿量给出欧几里得作用量，对场泛函求得玻色方程，通过计算方程满足的格林函数即可得到对应的传播子，进而得到两个基本结果。顶点算符中的  $\beta$  是玻色荷，对于高斯场  $\langle e^A \rangle = \exp(\frac{1}{2}\langle A^2 \rangle)$ ，将顶点算符结构带入，利用前面的方差结果即可计算。玻色化给出的密度算符结构代入计算，利用两个基本结果，可以得到平滑部分与震荡部分，这些都是数学计算。

### CFT Parameters from Bethe Ansatz

玻色化背后的物理思想的成功根植于共形场论的普适性，在  $1+1$  维中，共形场论特别强大。在临界点，没有相关的长度尺度，并且理论在标度变换下不变。在相对论性理论中，负责这种不变性的群是共形群。在  $1+1$  维，这种对称性增强为无限多个生成元，并变得足够强大，足以显著地约束理论和关联函数的结构。我们介绍一些基本概念。共形场论是二维的，最好用复变量表示

$$z \equiv -i(x - v_S t) = v_S \tau - ix, \quad \bar{z} \equiv i(x + v_S t) = v_S \tau + ix,$$

其中  $v_S$  是声（光）速， $\tau \equiv it$ 。共形场论假定洛伦兹不变性，因此所有无质量激发都以相同速度  $v_S$  运动。共形场论也是一个手征理论，因此左行和右行部分往往彼此独立。共形变换的量子生成元称为 *Virasoro* 算符  $L_n$ ， $\bar{L}_n$  并满足代数（对于全纯和反全纯部分独立）

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n,-m}, \quad [L_n, \bar{L}_m] = (n - m)\bar{L}_{n+m} + \frac{\bar{c}}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n,-m},$$

其中  $c, \bar{c}$  是中心荷，或共形反常。 $L_n, \bar{L}_n$  无非是应力张量按  $z, \bar{z}$  幂次的 *Laurent* 展开系数：

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{L}_n}{\bar{z}^{n+2}}.$$



将闵氏时空时间  $t$  替换为  $-i\tau$ ，于是度规  $ds^2 = -v_s^2 dt^2 + dx^2$  变为欧氏度规  $ds^2 = v_s^2 d\tau^2 + dx^2$ 。引入的复坐标使得线元可简洁地写成  $ds^2 = dz d\bar{z}$ ，这样二维欧氏空间等同于复平面。

应力张量的守恒方程  $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$  在复坐标中分解为  $\bar{\partial}T(z) = 0$  和  $\partial\bar{T}(\bar{z}) = 0$ ，因此  $T(z)$  是全纯函数，可进行 *Laurent* 展开： $T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}}$ ，其逆变换给出 *Virasoro* 生成元：

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z).$$

算子乘积展开 *OPE* 源于 *Ward* 恒等式，它表达了对称性在量子层面上的实现。对于应力张量自身的 *OPE*：

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \text{regular},$$

其中四阶极点项是中心荷  $c$  的贡献来源于量子反常；二阶和一阶极点项分别对应尺度变换和导数项。通过 *OPE* 可以严格推导 *Virasoro* 代数。考虑对易子  $[L_n, L_m]$ ，利用留数定理将围道积分转化为 *OPE* 系数的计算。具体步骤：将  $L_n$  和  $L_m$  的积分表达式代入，交换积分顺序，并用  $T(z)T(w)$  的 *OPE* 替换对易子。经过详细计算，四阶极点项给出  $\frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m}$ 。二阶极点项  $\frac{2T(w)}{(z-w)^2}$  和一阶极点项  $\frac{\partial T(w)}{z-w}$  的贡献分别计算后合并，最终得到 *Virasoro* 代数：

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m}.$$

在共形变换  $z = z(w), \bar{z} = \bar{z}(\bar{w})$  下，一个初场  $\phi(z, \bar{z})$  变换定义为

$$\phi(w, \bar{w}) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\Delta^+} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}}\right)^{\Delta^-} \phi(z(w), \bar{z}(\bar{w})),$$

共形维数  $\Delta^\pm$  表征了该场，其中  $\Delta^+$  和  $\Delta^-$  分别是右动和左动权重，总标度维数为  $\Delta = \Delta^+ + \Delta^-$ 。并指定了双点关联函数

$$\langle \phi(z_1, \bar{z}_1) \phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = (z_1 - z_2)^{-2\Delta^+} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{-2\Delta^-}.$$

在这一点上，识别共形场论参数的策略是利用标度不变性将系统带到柱面几何，也就是说，我们在空间方向施加周期性边界条件。这样做，一方面我们连接到 *Bethe* 假设中采用的设置，但最重要的是，我们在模型中引入了一个尺度  $L$ ，这打开了一个有限尺寸能隙。到柱面的共形映射是

$$z = e^{2\pi w/L}, \quad w = v_s \tilde{\tau} - i\tilde{x}, \quad 0 \leq \tilde{x} < L.$$

在此几何中，双点关联函数的渐近行为变为

$$\langle \phi(w_1, \bar{w}_1) \phi(w_2, \bar{w}_2) \rangle_L \sim e^{-\frac{2\pi A^+}{L}[i(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) - v_s(\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_2)]} e^{\frac{2\pi A^-}{L}[-i(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) - v_s(\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_2)]},$$

我们看到有限尺寸效应将幂律行为转变为指数行为。这个表达式可以与标准谱分解 ( $\tilde{\tau}_2 > \tilde{\tau}_1$ ) 进行比较

$$\langle \phi(w_1, \bar{w}_1) \phi(w_2, \bar{w}_2) \rangle_L = \sum_Q |\langle 0 | \phi(0, 0) | Q \rangle|^2 e^{-(\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_2)(E_Q - E_0) + i(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)(P_Q - P_0)}$$

其中  $E_0, P_0$  是基态的能量和动量，而  $E_Q, P_Q$  是中间态  $Q$  之一的能量和动量，这些中间态构成一个完备集。

利用对称性可以推导两点函数：首先，平移不变性要求  $\langle \phi(z_1)\phi(z_2) \rangle = F(z_1 - z_2)$ 。在尺度变换  $z \rightarrow \lambda z$  下，场的变换规则是  $\phi(z) \rightarrow \lambda^{-\Delta} \phi(\lambda z)$ 。因此关联函数满足：

$$\langle \phi(\lambda z_1)\phi(\lambda z_2) \rangle = \lambda^{-2\Delta} \langle \phi(z_1)\phi(z_2) \rangle$$

同时有  $F(\lambda(z_1 - z_2)) = \lambda^{-2\Delta} F(z_1 - z_2)$ 。满足此缩放关系的函数只能是幂律形式，从而得到结论：

$$\langle \phi(z_1, \bar{z}_1)\phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{1}{(z_1 - z_2)^{2\Delta^+}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\Delta^-}}$$

根据初场的共形变换规则，计算柱面映射的导数：

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{2\pi}{L} e^{2\pi w/L} = \frac{2\pi}{L} z, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}} = \frac{2\pi}{L} \bar{z}.$$

代入后得到柱面上的两点函数：

$$\langle \phi(w_1, \bar{w}_1)\phi(w_2, \bar{w}_2) \rangle = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2(\Delta^+ + \Delta^-)} (z_1 z_2)^{\Delta^+} (\bar{z}_1 \bar{z}_2)^{\Delta^-} (z_1 - z_2)^{-2\Delta^+} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{-2\Delta^-}.$$

利用指数表示  $z_1 - z_2 = e^{2\pi w_1/L} - e^{2\pi w_2/L} = e^{2\pi w_1/L} (1 - e^{2\pi(w_2 - w_1)/L})$ ，同理有  $\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \bar{z}_1 (1 - e^{2\pi(\bar{w}_2 - \bar{w}_1)/L})$ 。代入并简化：

$$(z_1 z_2)^{\Delta^+} (z_1 - z_2)^{-2\Delta^+} = \left( \frac{z_1 z_2}{z_1^2 (1 - e^{2\pi(w_2 - w_1)/L})^2} \right)^{\Delta^+} = \left( \frac{z_2}{z_1} \frac{1}{(1 - e^{2\pi(w_2 - w_1)/L})^2} \right)^{\Delta^+}.$$

在大距离或长时间渐近极限  $|w_2 - w_1| \gg L$  时，指数项主导，即  $e^{2\pi(w_2 - w_1)/L} \gg 1$ ，所以  $1 - e^{2\pi(w_2 - w_1)/L} \approx -e^{2\pi(w_2 - w_1)/L}$ 。因此：

$$(z_1 - z_2)^{-2\Delta^+} (z_1 z_2)^{\Delta^+} \sim e^{-\frac{2\pi\Delta^+}{L}(w_1 - w_2)}, \quad (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{-2\Delta^-} (\bar{z}_1 \bar{z}_2)^{\Delta^-} \sim e^{-\frac{2\pi\Delta^-}{L}(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)}.$$

用坐标  $\tilde{x}, \tilde{\tau}$  表示：

$$w_1 - w_2 = v_s(\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_2) - i(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2), \quad \bar{w}_1 - \bar{w}_2 = v_s(\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_2) + i(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2).$$

代入指数，得到渐近形式：

$$\langle \phi(w_1, \bar{w}_1)\phi(w_2, \bar{w}_2) \rangle_L \sim e^{-\frac{2\pi\Delta^+}{L}[v_s(\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_2) - i(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)]} \cdot e^{-\frac{2\pi\Delta^-}{L}[v_s(\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_2) + i(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)]}.$$

现在我们从量子力学角度推导谱分解，在时间平移与坐标平移不变下表象为  $\phi(\tau) = e^{H\tau - iPx} \phi(0) e^{-H\tau + iPx}$  插入完备集  $\sum_Q |Q\rangle\langle Q| = 1$ ，对于两点函数：

$$\langle 0|\phi(\tau_1)\phi(\tau_2)|0\rangle$$

得到谱分解：

$$\langle \phi\phi \rangle = \sum_Q |\langle 0|\phi|Q \rangle|^2 e^{-(E_Q - E_0)\tau + i(P_Q - P_0)x}$$

将展开的领头项匹配，得到

$$E_Q - E_0 = \frac{2\pi v_s}{L}(\Delta^+ + \Delta^-) \quad P_Q - P_0 = \frac{2\pi}{L}(\Delta^+ - \Delta^-)$$

将从 *Bethe* 假设得到的不同低能态的能量和动量与上式进行比较，我们可以识别对应于这些态的算符的标度维数。确定了初场之后，为了识别共形场论，我们需要中心荷。再次，有限尺寸效应有所帮助，因为对于共形场论，系统的能量行为为

$$E \simeq Le - c \frac{\pi}{6L} v_S + O(L^{-2}).$$

因此，对于一个无能隙可解模型，我们可以通过研究基态能量的有限尺寸行为以及低能激发的速度  $v_S$  来确定  $c$ 。现在让我们展示如何利用 *Bethe* 假设解来确定场论的参数。按顺序，我们将提取低能模式的速度（声速）、中心荷以及对应于 *Bethe* 态的场的标度维数/*Luttinger* 参数。

### Sound velocity

我们使用费米速度的微观定义，即缀饰能量对缀饰动量在费米点处的导数：

$$v_S \equiv \left. \frac{\partial \epsilon(\lambda)}{\partial k(\lambda)} \right|_{\lambda=\Lambda} = \left( \frac{\partial \epsilon(\lambda)}{\partial \lambda} \right) / \left( \frac{\partial k(\lambda)}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=\Lambda}.$$

缀饰函数满足以裸量为源的缀饰方程：

$$\rho(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} p'_0(\lambda) \quad \epsilon(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \epsilon(\mu) d\mu = \epsilon_0(\lambda),$$

而缀饰动量由下式给出

$$k(\lambda) = p_0(\lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \theta(\lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu.$$

比较公式，我们注意到

$$\frac{\partial k(\lambda)}{\partial \lambda} = 2\pi \rho(\lambda),$$

因此

$$v_s = \frac{1}{2\pi \rho(\Lambda)} \left. \frac{\partial \epsilon(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\Lambda}.$$

也可以采用更宏观的方法，将  $v_s$  定义为压强  $P$ （在零温下等于负的基态能量）。可以证明这个定义与我们使用的定义等价，并且可以通过积分方程的正式操作推导出额外的恒等式。

速度  $v_s = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial k} \right|_{k_F}$  的物理意义是费米点附近低能集体激发的传播速度，即体系的声速。在一维 *Luttinger* 液体理论中，低能激发仅发生在费米点附近，其能谱可线性化为  $\epsilon(k) \approx v_s(k - k_F)$ 。这个速度控制了低能色散关系、长程关联函数的幂律行为以及系统的有限尺寸能谱修正。它亦可通过宏观力学响应来理解，例如从能量对体积（长度）的曲率导出： $v_s = \sqrt{\frac{L^2}{mN} \frac{\partial^2 E}{\partial L^2}}$ ，这反映了系统对抗压缩的刚度，即声速来源于压强对密度的导数。*Luttinger* 参数  $K$  是刻画相互作用强度的无量纲量，其定义为  $K = v_s/v_N$ 。这里  $v_s$  是前述的声速，而  $v_N = \frac{L^2}{\pi \hbar} \frac{\partial^2 E}{\partial N^2}$  是反映粒子数涨落刚度的速度，与系统的压缩率  $\kappa$  成反比  $v_N \propto 1/\kappa$ 。

## Central Charge

我们已经提前说明，*Lieb-Liniger* 模型和  $|\Delta| < 1$  时的 *XXZ* 模型在标度极限下都由  $c = 1$  共形场论描述。为了证实这个陈述，我们将前文与从 *Bethe* 假设解得到的有限尺寸修正进行比较。

我们首先回顾 *Euler-Maclaurin* 公式，它捕捉了积分如何近似求和：

$$\sum_{j=1}^N f(x_j) = \int_a^b f(x) dx + \frac{f}{2} \Big|_a^b - \frac{b_2}{2} \frac{df}{dx} \Big|_a^b + \dots$$

这里  $b_2 = \frac{1}{6}$  是第二伯努利数， $x_1 = a$  且  $x_N = b$ ，我们不需要的附加项可以用更高阶的伯努利数和边界处的高阶导数表示。基态能量由  $E = \sum_{j=1}^N \epsilon_0(\lambda_j)$  给出，其中  $\lambda_j$  是 *Bethe* 方程（具有对称分布在 0 附近的量子数  $I_j$ ）的基态解。当  $N \rightarrow \infty$  时，连续  $\lambda$  之间的距离约为  $1/N$ 。我们定义一个函数  $\lambda(x)$  为  $\lambda(I_j/L) = \lambda_j$ 。我们使用 *Euler-Maclaurin* 公式写出：

$$E = L \int_{-N/(2L)}^{N/(2L)} \epsilon_0(\lambda(x)) dx - \frac{1}{24L} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial x} \Big|_{x=-N/(2L)}^{x=N/(2L)} + \dots = L \int_{-N/(2L)}^{N/(2L)} \epsilon_0(\lambda(x)) dx - \frac{1}{24L\rho(\Lambda)} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=-\Lambda}^{\lambda=\Lambda} + \dots,$$

其中我们使用了  $d\lambda/dx = 1/\rho(\lambda)$ 。我们还需要考虑 *Bethe* 方程的有限尺寸修正：

$$\rho_L(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \rho_L(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} \left\{ p'_0(\lambda) + \frac{1}{48\pi L^2 \rho(\Lambda)} [K'(\lambda - \Lambda) - K'(\lambda + \Lambda)] \right\}.$$

我们将解写为

$$\rho_L(\lambda) = \rho(\lambda) + \rho^{(1)}(\lambda)$$

其中  $\rho(\lambda)$  是无限尺寸积分方程的解，而  $\rho^{(1)}(\lambda)$  考虑了有限尺寸修正 [Appendix B.3](#)，并具有形式解

$$\rho^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{48\pi L^2 \rho(\Lambda)} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_{\Lambda}(\lambda, \mu) [K'(\mu - \Lambda) - K'(\mu + \Lambda)] d\mu$$

用格林函数表示。现在我们在展开式中使用快速度：

$$\begin{aligned} E &= L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda) \rho_L(\lambda) d\lambda - \frac{1}{12L} \frac{\epsilon'_0(\Lambda)}{\rho(\Lambda)} \Big|_{x=-\Lambda}^{\Lambda} \\ &= L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda) \rho_L(\lambda) d\lambda + \frac{1}{48\pi L \rho(\Lambda)} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda) U_{\Lambda}(\lambda, \mu) [K'(\mu - \Lambda) - K'(\mu + \Lambda)] d\lambda d\mu - \frac{1}{12L} \frac{\epsilon'_0(\Lambda)}{\rho(\Lambda)} \Big|_{x=-\Lambda}^{\Lambda} + \dots \\ &= L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda) \rho_L(\lambda) d\lambda + \frac{1}{48\pi L \rho(\Lambda)} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon(\mu) [K'(\mu - \Lambda) - K'(\mu + \Lambda)] d\mu - \frac{1}{12L} \frac{\epsilon'_0(\Lambda)}{\rho(\Lambda)} \Big|_{x=-\Lambda}^{\Lambda} + \dots \\ &= L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda) \rho_L(\lambda) d\lambda - \frac{\pi}{6L} \frac{\epsilon'(\Lambda)}{2\pi \rho(\Lambda)} \Big|_{x=-\Lambda}^{\Lambda} + \dots \end{aligned}$$

其中，在第一行和最后一行中，我们考虑了积分极限  $\Lambda \simeq \lambda_N + \frac{1}{2L\rho(\lambda_N)}$  的自洽（至零阶）处理，并且在最后一行中我们使用了缀饰能量函数的导数。比较，并记住我们找到的声速表达式，我们得出结论  $c = 1$ ，正如预期的那样。

将密度分解代入能量表达式，得到：

$$E = L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda + L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda) \rho^{(1)}(\lambda) d\lambda - \frac{1}{12L} \frac{\epsilon'_0(\Lambda)}{\rho(\Lambda)} \Big|_{-\Lambda}^{\Lambda}$$

第一项定义为热力学极限下的基态能量  $Le_\infty$ 。接下来计算后两项，它们都是  $O(1/L)$  量级。首先处理密度修正项  $L \int \epsilon_0(\lambda) \rho^{(1)}(\lambda) d\lambda$ 。将  $\rho^{(1)}$  的表达式代入并交换积分次序，利用缀饰能量  $\varepsilon(\mu)$  与裸能量  $\epsilon_0(\lambda)$  通过核  $U_\Lambda$  相联系的关键恒等式  $\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda) U_\Lambda(\lambda, \mu) d\lambda = \varepsilon(\mu)$ ，上式简化为：

$$L \int \epsilon_0(\lambda) \rho^{(1)}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{48\pi L \rho(\Lambda)} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \varepsilon(\mu) [K'(\mu - \Lambda) - K'(\mu + \Lambda)] d\mu$$

接下来对上述积分进行分部积分。考虑积分  $I = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \varepsilon(\mu) K'(\mu - \Lambda) d\mu$ ，分部积分得：

$$I = \varepsilon(\mu) K(\mu - \Lambda) \Big|_{-\Lambda}^{\Lambda} - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \varepsilon'(\mu) K(\mu - \Lambda) d\mu$$

由于缀饰能量在费米边界处为零，即  $\varepsilon(\pm\Lambda) = 0$ ，边界项消失，故  $I = - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \varepsilon'(\mu) K(\mu - \Lambda) d\mu$ 。同理，对于另一项有  $\int \varepsilon(\mu) K'(\mu + \Lambda) d\mu = - \int \varepsilon'(\mu) K(\mu + \Lambda) d\mu$ 。因此，密度修正项的贡献变为：

$$- \frac{1}{48\pi L \rho(\Lambda)} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \varepsilon'(\mu) [K(\mu - \Lambda) - K(\mu + \Lambda)] d\mu$$

利用核函数的对称性  $K(x) = K(-x)$  以及积分恒等式  $\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \varepsilon'(\mu) [K(\mu - \Lambda) - K(\mu + \Lambda)] d\mu = -2\pi \varepsilon'(\Lambda)$ ，我们得到：

$$L \int \epsilon_0(\lambda) \rho^{(1)}(\lambda) d\lambda = - \frac{1}{48\pi L \rho(\Lambda)} (-2\pi \varepsilon'(\Lambda)) = - \frac{1}{24L} \frac{\varepsilon'(\Lambda)}{\rho(\Lambda)}$$

现在计算欧拉-麦克劳林公式直接给出的边界项。由于  $\epsilon'_0(-\Lambda) = -\epsilon'_0(\Lambda)$ ，且  $\rho(-\Lambda) = \rho(\Lambda)$ ，计算并将两项  $1/L$  阶的贡献合并：

$$- \frac{1}{6L} \frac{\epsilon'_0(\Lambda)}{\rho(\Lambda)} - \frac{1}{24L} \frac{\varepsilon'(\Lambda)}{\rho(\Lambda)}$$

利用缀饰能量  $\varepsilon(\lambda)$  所满足的积分方程关系，可以证明  $\epsilon'_0(\Lambda) = \frac{1}{4}\varepsilon'(\Lambda)$ 。引入体系的声速定义  $v_s = \frac{\varepsilon'(\Lambda)}{2\pi\rho(\Lambda)}$ ，代入上式即得：

$$E(L) = Le_\infty - \frac{\pi v_s}{6L} + O(L^{-2})$$

### Conformal Dimensions from Finite Size

为了评估初场的共形维数，我们使用前面匹配系数得到的结果，并且需要理论的最低激发的动量和能隙。为了统一说明不同模型低能激发的贡献，一个核心角色由缀饰荷函数  $Z(\lambda)$  扮演。我们回想这个函数定义为积分方程的解

$$Z(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \nu) Z(\nu) d\nu = 1,$$



并且与其他热力学量有有趣的关系。首先，我们注意到化学势  $h$  线性地进入裸能量  $\epsilon_0(\lambda; h) = \epsilon_0(\lambda; 0) \pm h$ 。因此，与缀饰方程比较表明

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial h} = \pm Z(\lambda).$$

通过显式写出能量对函数支撑的依赖性，我们注意到条件  $\epsilon(\lambda|\Lambda) = 0$  意味着

$$\left. \frac{\partial \epsilon(\lambda|\Lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\Lambda} + \left. \frac{\partial \epsilon(\lambda|\Lambda)}{\partial \Lambda} \right|_{\lambda=\Lambda} = 0.$$

因此，可以重写为

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial h} \cdot \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \Lambda} \right|_{\lambda=\Lambda} = - \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial h} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\Lambda} = \pm Z(\lambda),$$

并且

$$\frac{\partial h}{\partial \Lambda} = \mp \frac{\epsilon'(\Lambda)}{Z(\Lambda)}.$$

接下来，我们考虑粒子密度  $n = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda$  并计算

$$\frac{\partial n}{\partial \Lambda} = \rho(\Lambda) + \rho(-\Lambda) + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial \Lambda} d\lambda.$$

使用密度方程我们有

$$\frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial \Lambda} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \frac{\partial \rho(\mu)}{\partial \Lambda} d\mu = -\frac{1}{2\pi} \rho(\Lambda) [K(\lambda - \Lambda) + K(\lambda + \Lambda)],$$

使用格林函数，它具有形式解

$$\frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial \Lambda} = -\frac{1}{2\pi} \rho(\Lambda) \int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_{\Lambda}(\lambda, \mu) [K(\mu - \Lambda) + K(\mu + \Lambda)] d\mu.$$

积分并注意到定义式也有形式解

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_{\Lambda}(\lambda, \mu) d\lambda = Z(\mu)$$

我们有

$$\begin{aligned} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial \Lambda} d\lambda &= -\frac{1}{2\pi} \rho(\Lambda) \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d\lambda \int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_{\Lambda}(\lambda, \mu) [K(\mu - \Lambda) + K(\mu + \Lambda)] d\mu \\ &= -\frac{1}{2\pi} \rho(\Lambda) \int_{-\Lambda}^{\Lambda} Z(\mu) [K(\mu - \Lambda) + K(\mu + \Lambda)] d\mu \\ &= -\rho(\Lambda) [2 - Z(\Lambda) - Z(-\Lambda)]. \end{aligned}$$

将其代入原始方程并记住  $\rho(\Lambda)$  和  $Z(\Lambda)$  都是偶函数，我们得到

$$\frac{\partial n}{\partial \Lambda} = 2\rho(\Lambda)Z(\Lambda).$$

我们现在准备好对来自不同类型低能激发的贡献进行分类，这些激发的起源可以追溯到 Bethe 假设构造中的三个基本过程：1. 费米点  $\pm\Lambda$  处的粒子可以被提升：量子数  $I_1$  和  $I_N$  改变一个有限量  $N^-$ （在  $-\Lambda: I_1 \rightarrow I_1 - N^-$ ）或  $N^+$ （在  $\Lambda: I_N \rightarrow I_N + N^+$ ）；2. 可以向系统添加（或从系统减去）一定数量的粒子  $\Delta N$ ，并将其放置（或移除）在费米点附近；3. 一些粒子（假设为  $d$  个）可以背散射，即从

一个费米点转移到另一个费米点。这个过程等价于将所有量子数  $\{I_j\}$  平移  $d$ ，即转移到具有  $\{I_j + d\}$  的态。

裸能量为  $\epsilon_0(\lambda; h) = \epsilon_0(\lambda; 0) \pm h$ ，化学势  $h$  仅以常数形式进入。缀饰能量  $\epsilon(\lambda)$  满足的方程对  $h$  微分得到：

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial h} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \nu) \frac{\partial \epsilon(\nu)}{\partial h} d\nu = \pm 1$$

由于右端为常数  $\pm 1$ ，且这与  $Z(\lambda)$  的定义方程形式一致，因此唯一解为：  
 $\frac{\partial \epsilon}{\partial h} = \pm Z(\lambda)$ . 这表明缀饰荷  $Z(\lambda)$  直接决定了能量对外场（化学势）的响应，这也正是“缀饰电荷”名称的来源。我们从密度方程开始，对整个方程对  $\Lambda$  求导，注意： $\rho(\lambda)$  依赖  $\Lambda$ （因为积分区间影响解），积分上下限依赖  $\Lambda$ ， $a(\lambda)$  不依赖  $\Lambda$ ，求  $\partial/\partial \Lambda$ ：

$$\frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial \Lambda} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left( \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu \right) = 0$$

然后，利用变限积分公式：

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(\mu, \Lambda) d\mu = f(\Lambda, \Lambda) + f(-\Lambda, \Lambda) + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{\partial f}{\partial \Lambda} d\mu$$

代入：

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu = K(\lambda - \Lambda) \rho(\Lambda) + K(\lambda + \Lambda) \rho(-\Lambda) + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \frac{\partial \rho(\mu)}{\partial \Lambda} d\mu$$

整理并移项得到：

$$\frac{\partial \rho(\lambda)}{\partial \Lambda} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \frac{\partial \rho(\mu)}{\partial \Lambda} d\mu = -\frac{1}{2\pi} [K(\lambda - \Lambda) \rho(\Lambda) + K(\lambda + \Lambda) \rho(-\Lambda)].$$

对于基态中： $\rho(\Lambda) = \rho(-\Lambda)$ ，于是：

$$-\frac{1}{2\pi} \rho(\Lambda) [K(\lambda - \Lambda) + K(\lambda + \Lambda)].$$

**Boosting**： $N^\pm$

这种激发可以被认为是产生一个粒子/空穴对，能量和动量的变化可以通过缀饰量表示，如：

$$\Delta P = k(\lambda_p) - k(\lambda_h) \simeq \left. \frac{\partial k}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\Lambda} (\lambda_p - \lambda_h), \quad \Delta E = \varepsilon(\lambda_p) - \varepsilon(\lambda_h) \simeq \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\Lambda} (\lambda_p - \lambda_h).$$

我们还知道，通过将最后一个 *Bethe* 数移动一个整数  $N^+$ ，我们给态以动量  $\Delta P = \frac{2\pi}{L} N^+$ 。将其与第一式结合，我们有  $\lambda_p - \lambda_h = \frac{2\pi N^+}{L k'(\Lambda)}$ ，代入得到

$$\Delta E = \frac{2\pi}{L} \frac{\varepsilon'(\Lambda)}{k'(\Lambda)} N^+ = \frac{2\pi}{L} v_S N^+, \quad \Delta P = \frac{2\pi}{L} N^+,$$

其中我们使用了声速的定义。类似的表达式适用于  $N^-$ 。

$k_i = \frac{2\pi}{L} I_i$ ，且  $P = \sum_i k_i$ ，所以移动量子数  $N^+$ ，动量改变为  $\Delta P = \frac{2\pi}{L} N^+$

### Creation/Annihilation : $\Delta N$

利用能量对化学势的线性依赖性，我们写出

$$E = L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda|h) \rho(\lambda) d\lambda = L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda|0) \rho(\lambda) d\lambda \pm L h n \equiv L[e_0(n) \pm h n],$$

其中  $n$  是粒子密度。添加  $\Delta N$  个粒子将密度改变一个小量  $n \rightarrow n + \frac{\Delta N}{L}$ ，相应地能量也改变

$$\Delta E = L \left[ e_0 \left( n + \frac{\Delta N}{L} \right) - e_0(n) \pm h \frac{\Delta N}{L} \right] \simeq L \left[ \left( \frac{\partial e_0(n)}{\partial n} \pm h \right) \frac{\Delta N}{L} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_0(n)}{\partial n^2} \left( \frac{\Delta N}{L} \right)^2 + \dots \right].$$

基态/平衡条件确保线性项必须为零。因此  $\partial e_0 / \partial n = \mp h$  并且

$$\Delta E \simeq \mp \frac{(\Delta N)^2}{2L} \frac{\partial h}{\partial n} = \mp \frac{(\Delta N)^2}{2L} \left( \frac{\partial n}{\partial \Lambda} \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \Lambda} = \frac{2\pi v_s}{L} \left( \frac{\Delta N}{2Z(\Lambda)} \right)^2, \quad \Delta P = 0,$$

其中我们使用了  $\frac{\partial h}{\partial \Lambda} = \mp \frac{\epsilon'(\Lambda)}{Z(\Lambda)}$ 、 $\frac{\partial n}{\partial \Lambda} = 2\rho(\Lambda)Z(\Lambda)$  和声速的表达式  $v_s = \frac{1}{2\pi\rho(\Lambda)} \frac{\partial \epsilon(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\Lambda}$ 。

对  $e_0(n + \delta n)$  进行泰勒展开至二阶：

$$e_0(n + \delta n) = e_0(n) + \frac{\partial e_0}{\partial n} \delta n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial n^2} \delta n^2 + \dots$$

与  $\delta n = \Delta N/L$  一起代入  $\Delta E$  表达式：

$$\Delta E = L \left[ \left( \frac{\partial e_0}{\partial n} \pm h \right) \frac{\Delta N}{L} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial n^2} \left( \frac{\Delta N}{L} \right)^2 \right] = \left( \frac{\partial e_0}{\partial n} \pm h \right) \Delta N + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial n^2} \frac{(\Delta N)^2}{L}$$

在给定化学势  $h$  的平衡基态，总能量对粒子数的变分为零，即  $\partial E / \partial N = 0$ 。由于  $E = L[e_0(n) \pm h n]$  且  $n = N/L$ ，平衡条件要求  $\partial E / \partial n = 0$ ，因此：

$$\frac{\partial E}{\partial n} = L \left( \frac{\partial e_0}{\partial n} \pm h \right) = 0$$

这正是一阶导数项为零的条件。将其代入  $\Delta E$  表达式，线性项  $\left( \frac{\partial e_0}{\partial n} \pm h \right) \Delta N$  消失，只剩下二阶项：

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial n^2} \frac{(\Delta N)^2}{L}$$

为了进一步处理二阶导数  $\partial^2 e_0 / \partial n^2$ ，我们从平衡条件  $\frac{\partial e_0}{\partial n} = \mp h$  出发，对  $n$  再求一次导数：

$$\frac{\partial^2 e_0}{\partial n^2} = \mp \frac{\partial h}{\partial n}$$

于是：

$$\Delta E = \mp \frac{(\Delta N)^2}{2L} \frac{\partial h}{\partial n}$$

利用前文结果与链式法则，我们可以化简到文中形式。关于动量，由于我们在左右对称的费米区间同时增加粒子（即左右边界  $\pm\Lambda$  对称移动），这种激发不改变总动量，因此  $\Delta P = 0$ 。最终结果的物理含义是：改变总粒子数  $\Delta N$  所对应的低能激发能量是二次型的， $\Delta E \propto (\Delta N)^2 / L$ 。线性项由于平衡条件而消失。能量系数完全由费米点处的缀饰荷  $Z(\Lambda)$  和声速  $v_s$  决定，这表明系统的压缩率等热力学响应由  $Z(\Lambda)$  控制。

### Backscattering : $d$

将所有 *Bethe* 数平移  $d$  会导致快密度支撑平移  $\delta$ 。发现此过程的逆流积分方程为

$$(\hat{J} + \frac{1}{2\pi} \hat{K}_\Lambda) J = -d,$$

与缀饰荷函数的积分方程比较，意味着  $J(\lambda) = -Z(\lambda)d$ 。同时，逆流的微观定义

$$J(k|k_p) \equiv L\Delta k\rho(k) = \lim_{k \rightarrow k_j} \lim_{N, L \rightarrow \infty} \frac{k_j - k'_j}{k_{j+1} - k_j}$$

给出  $J(\Lambda) = \frac{-d}{\lambda_N - \lambda_{N-1}} = -L\rho(\Lambda)\delta$ ，由此我们提取出  $d$  和  $\delta$  之间的关系为

$$\delta = \frac{Z(\Lambda)}{L\rho(\Lambda)}d.$$

系统基态由快速变量  $\lambda$  填满区间  $[-\Lambda, \Lambda]$  形成“费米海”。将所有 *Bethe* 量子数平移  $I_j \rightarrow I_j + d$ ，这不改变粒子数  $N$ ，只是重新排列量子数。物理上这等价于把  $d$  个粒子从左费米点移动到右费米点，因此粒子数不变，总动量改变，能量增加约  $d^2/L$ 。从 *Bethe* 方程的对数形式出发：

$$Lp_0(\lambda_j) + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi I_j$$

其中  $p_0$  是裸动量， $\theta$  是两体散射相移，记  $K = \theta'$ 。进行线性化以构造逆流函数。平移量子数  $I_j \rightarrow I_j + d$  后，设新的根为  $\lambda'_j = \lambda_j + \Delta\lambda_j$ 。代入新方程减去旧方程，并做线性展开：

$$L[p_0(\lambda'_j) - p_0(\lambda_j)] + \sum_k [\theta(\lambda'_j - \lambda'_k) - \theta(\lambda_j - \lambda_k)] = 2\pi d$$

展开得到 (其中我们用到公式  $dL/d\lambda = L\rho$ )：

$$2\pi L\rho(\lambda_j)\Delta\lambda_j - \sum_k K(\lambda_j - \lambda_k)\Delta\lambda_k = 2\pi d$$

定义逆流函数  $J(\lambda_j) = L\rho(\lambda_j)\Delta\lambda_j$ 。在热力学极限下，方程变为：

$$J(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu)J(\mu)d\mu = -d$$

将此方程与缀饰荷  $Z(\lambda)$  满足的方程比较，可得逆流函数与缀饰荷的关系： $J(\lambda) = -Z(\lambda)d$ 。考虑费米边界的位移。在边界处，逆流为  $J(\Lambda) = L\rho(\Lambda)\delta$ ，其中  $\delta$  是边界位移。代入上述关系  $J(\Lambda) = -Z(\Lambda)d$ ，得到：

$$\delta = \frac{Z(\Lambda)}{L\rho(\Lambda)}d$$

这表明 *Bethe* 数平移导致费米海整体平移。

平移后，系统的能量为

$$E(\delta) = L \int_{-\Lambda+\delta}^{\Lambda+\delta} \epsilon_0(\lambda)\rho_\delta(\lambda)d\lambda = \frac{L}{2\pi} \int_{-\Lambda+\delta}^{\Lambda+\delta} \epsilon_\delta(\lambda)p'_0(\lambda)d\lambda,$$

其中，类比密度与能量的缀饰方程：

$$\rho_\delta(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda+\delta}^{\Lambda+\delta} K(\lambda-\mu) \rho_\delta(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} p'_0(\lambda), \quad \varepsilon_\delta(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda+\delta}^{\Lambda+\delta} K(\lambda-\mu) \varepsilon_\delta(\mu) d\mu = \epsilon_0(\lambda),$$

并且该方程中两个表达式之间的恒等式可以通过使用格林函数表示的积分方程的形式解容易地建立。

根密度满足的积分方程用算符写法可记为  $(\hat{I} + \frac{1}{2\pi} \hat{K}_\delta) \rho_\delta = \frac{1}{2\pi} p'_0$ ，其中  $\hat{K}_\delta$  是在积分区间  $[-\Lambda + \delta, \Lambda + \delta]$  上以核  $K$  作用的积分算符。同时，定义准粒子能量（或称缀饰能量）它满足另一个积分方程用算符写法即为  $(\hat{I} + \frac{1}{2\pi} \hat{K}_\delta) \varepsilon_\delta = \epsilon_0$ 。关键在于，密度方程和能量方程作用的是同一个线性算符： $\hat{A}_\delta = \hat{I} + \frac{1}{2\pi} \hat{K}_\delta$ 。即  $\hat{A}_\delta \rho_\delta = \frac{1}{2\pi} p'_0$  和  $\hat{A}_\delta \varepsilon_\delta = \epsilon_0$ 。我们想将能量表达式  $E = L \int \epsilon_0(\lambda) \rho_\delta(\lambda) d\lambda$  进行改写。利用  $\epsilon_0 = \hat{A}_\delta \varepsilon_\delta$  代入展开算符  $\hat{A}_\delta$ ：

$$E = L \int [\hat{A}_\delta \varepsilon_\delta](\lambda) \rho_\delta(\lambda) d\lambda = L \int \varepsilon_\delta(\lambda) \rho_\delta(\lambda) d\lambda + \frac{L}{2\pi} \int \left[ \int K(\lambda-\mu) \varepsilon_\delta(\mu) d\mu \right] \rho_\delta(\lambda) d\lambda$$

交换第二项中的积分顺序：

$$E = L \int \varepsilon_\delta(\lambda) \rho_\delta(\lambda) d\lambda + \frac{L}{2\pi} \int \varepsilon_\delta(\mu) \left[ \int K(\lambda-\mu) \rho_\delta(\lambda) d\lambda \right] d\mu$$

利用积分核的对称性  $K(\lambda-\mu) = K(\mu-\lambda)$ ，可以将哑变量  $\mu$  重新命名为  $\lambda$ ，将两项合并：

$$E = L \int \varepsilon_\delta(\lambda) \left[ \rho_\delta(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int K(\lambda-\mu) \rho_\delta(\mu) d\mu \right] d\lambda$$

根据密度的积分方程，方括号内的表达式等于  $\frac{1}{2\pi} p'_0(\lambda)$ 。代入得到：

$$E = L \int \varepsilon_\delta(\lambda) \frac{1}{2\pi} p'_0(\lambda) d\lambda$$

为了计算能量变化，首先我们将缀饰能量展开为：

$$\varepsilon_\delta(\lambda) = \varepsilon(\lambda) + \left. \frac{\partial \varepsilon_\delta(\lambda)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} \delta + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \varepsilon_\delta(\lambda)}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0} \delta^2 + \dots$$

并借助能量方程评估各项。对方程关于  $\delta$  求一阶导数，我们有

$$\frac{\partial \varepsilon_\delta(\lambda)}{\partial \delta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda+\delta}^{\Lambda+\delta} K(\lambda-\mu) \frac{\partial \varepsilon_\delta(\mu)}{\partial \delta} d\mu = \frac{1}{2\pi} [K(\lambda+\Lambda-\delta) \varepsilon_\delta(-\Lambda+\delta) - K(\lambda-\Lambda-\delta) \varepsilon_\delta(\Lambda+\delta)].$$

由于缀饰能量在边界处为零，因此当  $\delta \rightarrow 0$  时右边趋于零，从而  $\left. \frac{\partial \varepsilon_\delta(\lambda)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = 0$ 。再求一次导数并在  $\delta=0$  处评估得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_\delta(\lambda)}{\partial \delta^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda-\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_\delta(\mu)}{\partial \delta^2} d\mu &= -\frac{1}{\pi} \varepsilon'(\Lambda) [K(\lambda-\Lambda) + K(\lambda+\Lambda)] \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_\delta(\lambda)}{\partial \delta^2} &= -\frac{1}{\pi} \varepsilon'(\Lambda) \int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_\Lambda(\lambda, \mu) [K(\mu-\Lambda) + K(\mu+\Lambda)] d\mu, \end{aligned}$$

其中  $\varepsilon'(\Lambda) = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\Lambda} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon'_\delta(\Lambda)$ 。



起点是位移后的缀饰能量方程, 两边关于  $\delta$  求导后关键在于计算第二项, 即积分区间依赖于参数的导数。利用带参积分求导公式:

$$\frac{d}{d\delta} \int_{a(\delta)}^{b(\delta)} f(\mu, \delta) d\mu = \int_{a(\delta)}^{b(\delta)} \frac{\partial f}{\partial \delta} d\mu + f(b(\delta), \delta) b'(\delta) - f(a(\delta), \delta) a'(\delta)$$

对于二阶求导后的方程, 因为对于方程:

$$(\hat{I} + \frac{1}{2\pi} \hat{K}) X(\lambda) = S(\lambda)$$

其解可以通过该算符的预解式 (或格林函数)  $U_{\Lambda}(\lambda, \mu)$  表示为:

$$X(\lambda) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_{\Lambda}(\lambda, \mu) S(\mu) d\mu$$

其中  $U_{\Lambda} = (\hat{I} + \frac{1}{2\pi} \hat{K})^{-1}$ 。因此, 二阶导数的解为:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\delta}(\lambda)}{\partial \delta^2} = -\frac{1}{\pi} \varepsilon'(\Lambda) \int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_{\Lambda}(\lambda, \mu) [K(\mu - \Lambda) + K(\mu + \Lambda)] d\mu$$

我们对能量进行类似的展开:

$$E(\delta) = E(0) + \left. \frac{\partial E}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} \delta + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0} \delta^2 + \dots$$

对于一阶, 我们有

$$\frac{\partial E}{\partial \delta} = \frac{L}{2\pi} \left[ \int_{-\Lambda+\delta}^{\Lambda+\delta} \frac{\partial \varepsilon_{\delta}(\lambda)}{\partial \delta} p'_0(\lambda) d\lambda + \varepsilon_{\delta}(\Lambda + \delta) p'_0(\Lambda + \delta) - \varepsilon_{\delta}(-\Lambda + \delta) p'_0(-\Lambda + \delta) \right] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

一阶求导需要使用带参积分求导的莱布尼茨公式 (前面已给出)。现在考虑在基态  $\delta = 0$  处取值。体积分项在之前的推导中已经证明  $\partial_{\delta} \varepsilon_{\delta}|_{\delta=0} = 0$ , 因此整个体积分项为零。边界项根据费米点的定义, 基态缀饰能量在边界处为零:  $\varepsilon(\pm\Lambda) = 0$ 。当  $\delta \rightarrow 0$  时,  $\varepsilon_{\delta}(\pm\Lambda) \rightarrow 0$ , 故两个边界项也都为零。由此得到一阶导数在基态为零的结论。

下一阶在  $\delta = 0$  给出

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial \delta^2} &= \frac{L}{2\pi} \left[ 4\varepsilon'(\Lambda) p'_0(\Lambda) + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{\partial^2 \varepsilon(\lambda)}{\partial \delta^2} p'_0(\lambda) d\lambda \right] \\ &= \frac{L}{2\pi} \left[ 4\varepsilon'(\Lambda) p'_0(\Lambda) - \frac{1}{\pi} \varepsilon'(\Lambda) \int_{-\Lambda}^{\Lambda} u_{\Lambda}(\lambda, \mu) [K(\mu - \Lambda) + K(\mu + \Lambda)] p'_0(\lambda) d\mu d\lambda \right] \\ &= \frac{L}{\pi} \varepsilon'(\Lambda) \left[ 2p'_0(\Lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} [K(\mu - \Lambda) + K(\mu + \Lambda)] \rho(\mu) d\mu \right] = 2L\varepsilon'(\Lambda) \rho(\Lambda). \end{aligned}$$

因此, 结合这个结果和  $\delta = \frac{Z(\Lambda)}{L\rho(\Lambda)} d$ , 能量变化为

$$\Delta E = E(\delta) - E(0) \simeq \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0} \delta^2 = L\varepsilon'(\Lambda) \rho(\Lambda) \left( \frac{Z(\Lambda)}{L\rho(\Lambda)} d \right)^2 = \frac{2\pi}{L} v_S Z^2(\Lambda) d^2.$$

计算二阶导数，我们需要分别处理：来自原体积分项的内部分求导： $\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \partial_{\delta}^2 \varepsilon(\lambda) p'_0(\lambda) d\lambda$ ；来自第一个和第二个边界项  $\varepsilon_{\delta}(\Lambda + \delta) p'_0(\Lambda + \delta)$  的导数。注意，式中边界项，再对其求导时，这些边界项的导数计算如下，对于上边界项  $B_1(\delta) = \varepsilon_{\delta}(\Lambda + \delta) p'_0(\Lambda + \delta)$ ：

$$\left. \frac{dB_1}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \left. \frac{\partial \varepsilon_{\delta}(\Lambda + \delta)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} p'_0(\Lambda) + \varepsilon(\Lambda) p''_0(\Lambda) + \varepsilon'(\Lambda) p'_0(\Lambda)$$

由于已证  $\partial_{\delta} \varepsilon|_{\delta=0} = 0$  且  $\varepsilon(\Lambda) = 0$ ，故只剩  $\varepsilon'(\Lambda) p'_0(\Lambda)$ 。同理对于下边界项  $B_2(\delta) = -\varepsilon_{\delta}(-\Lambda + \delta) p'_0(-\Lambda + \delta)$ ，该项贡献为  $\varepsilon'(\Lambda) p'_0(\Lambda)$ 。两个边界项导数各贡献一个  $\varepsilon'(\Lambda) p'_0(\Lambda)$ 。此外，在应用莱布尼茨公式求二阶导时，原体积分项求导也会产生两个新的边界项，它们分别与上面计算的  $B'_1$  和  $B'_2$  实质上相同。综合结果是，整体求导后，所有边界贡献项的总和最终给出  $4\varepsilon'(\Lambda) p'_0(\Lambda)$ 。因此，在  $\delta = 0$  处，二阶导数表达式为：

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \delta^2} = \frac{L}{2\pi} \left[ 4\varepsilon'(\Lambda) p'_0(\Lambda) + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \partial_{\delta}^2 \varepsilon(\lambda) p'_0(\lambda) d\lambda \right]$$

接下来，将  $\partial_{\delta}^2 \varepsilon$  的积分方程解代入。注意密度函数算符形式  $(\hat{I} + \frac{1}{2\pi} \hat{K})\rho = \frac{1}{2\pi} p'_0$ 。因此，其逆算符作用给出： $\rho(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_{\Lambda}(\mu, \nu) p'_0(\nu) d\nu$ 。由于积分核通常具有对称性，我们可以交换变量，得到等价的表达式： $\int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_{\Lambda}(\lambda, \mu) p'_0(\lambda) d\lambda = 2\pi \rho(\mu)$ 。这正是密度方程的逆表示。将此恒等式代入，代回二阶导数表达式：

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \delta^2} = \frac{L}{\pi} \varepsilon'(\Lambda) \left[ 2p'_0(\Lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho(\mu) [K(\mu - \Lambda) + K(\mu + \Lambda)] d\mu \right]$$

最后一步，利用密度方程在边界  $\lambda = \Lambda$  处的取值来化简括号内的表达式。密度方程为：

$$\rho(\Lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\Lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} p'_0(\Lambda)$$

两边乘以  $4\pi$ ，由于核的偶性  $K(x) = K(-x)$ ，有  $K(\Lambda - \mu) = K(\mu - \Lambda)$ 。另外，由于  $\rho(\mu)$  是偶函数，且  $K(\mu + \Lambda)$  项在积分后与  $K(\mu - \Lambda)$  项相等（通过变量变换  $\mu \rightarrow -\mu$  可以验证），因此：

$$\begin{aligned} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho(\mu) [K(\mu - \Lambda) + K(\mu + \Lambda)] d\mu &= 2 \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho(\mu) K(\mu - \Lambda) d\mu \\ \Rightarrow 2p'_0(\Lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho(\mu) [K(\mu - \Lambda) + K(\mu + \Lambda)] d\mu &= 4\pi \rho(\Lambda) \end{aligned}$$

因此，得到最终结果：

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \delta^2} = \frac{L}{\pi} \varepsilon'(\Lambda) \times 4\pi \rho(\Lambda) = 2L \varepsilon'(\Lambda) \rho(\Lambda)$$

从物理考虑，将一个激发从左费米点移动到右费米点会产生动量变化  $\Delta P = 2k_F$ （因此移动  $d$  个粒子对应于  $\Delta P = 2k_F d$ ）。对于单个背散射过程，由  $k(\lambda) =$

$p_0(\lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \theta(\lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu$  我们有：

$$\begin{aligned}\Delta P &= k(\Lambda) - k(-\Lambda) = p_0(\Lambda) - p_0(-\Lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} [\theta(\Lambda - \mu) - \theta(-\Lambda - \mu)] \rho(\mu) d\mu \\ &= \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d\lambda \left[ p'_0(\lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu \right] \\ &= 2\pi \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda = 2\pi n = \frac{2\pi}{L} N,\end{aligned}$$

这表明  $k_F = \pi N/L$ ，与自由费米子一样。注意，结合上一小节分析的  $\Delta N$  过程，

$$\Delta P = \frac{2\pi}{L} (N + \Delta N) d.$$

### Summary

汇总我们有

$$\Delta E = \frac{2\pi v_S}{L} \left[ \left( \frac{\Delta N}{2Z} \right)^2 + (Zd)^2 + N^+ + N^- \right],$$

$$\Delta P = 2k_F d + \frac{2\pi}{L} (N^+ - N^- + \Delta N d) = 2k_F d + \Delta P_{CFT},$$

其中  $Z = Z(\Lambda) = Z(-\Lambda)$  是缀饰荷函数  $Z(\lambda)$  在费米边界处的值，且  $k_F = \pi N/L$ 。与前面结果比较，我们将动量中的第一项（对应于背散射过程）识别为源于算符在费米动量  $\pm k_F$  附近的展开：由于它连接了两个手征性扇区，这个动量贡献相对于共形场论描述是外部的。对应于这些基本激发的算符的共形维数为

$$\Delta^\pm = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta N}{2Z} \pm Zd \right)^2 + N^\pm.$$

在共形语言中， $N^\pm$  描述了后代的层级，而  $\Delta N$  是局部场  $\phi(x, t)$  的特征。比较公式可以识别  $K = Z^2$ 。

事实上在长度为  $L$  的有限 *Luttinger* 液体系统中，场可以分解为零模（零频部分）和振动模（非零频率的振荡部分）：

$$\phi(x) = \phi_0 + \frac{\pi Q}{L} x + \text{振动模}, \quad \theta(x) = \theta_0 + \frac{\pi J}{L} x + \text{振动模}$$

这里： $Q$  对应系统总粒子数的变化， $Q = \Delta N$ 。 $J$  是“电流量子数”或“环绕数”，它描述左右费米点粒子数的不平衡，与背散射过程有关。将场的线性部分代入哈密顿量，计算得到系统的总低能激发能与动量为：

$$\Delta E = \frac{\pi v}{2L} \left( \frac{Q^2}{K} + K J^2 \right) + \frac{2\pi v}{L} (N^+ + N^-) \quad P = \frac{\pi}{L} Q J + \frac{2\pi}{L} (N^+ - N^-)$$

这里，第一项  $QJ$  体现了零模之间的耦合，第二项是振动模的手征不对称性带来的动量。我们可以通过定义左右手征部分的“共形维数”  $\Delta^\pm$  来重写总能量和动量，可以得到一样的结果：

$$\Delta^\pm = \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{\sqrt{K}} \pm J\sqrt{K} \right)^2 + N^\pm$$

## Bosonization of XXZ model

对 XXZ 链重复玻色化过程是有必要的，我们将看到，这个模型的标度极限对应于一个 *sine-Gordon* 理论。我们可以首先使用 *Jordan-Wigner* 变换 [Appendix B.1](#)，用无自旋费米子写出自旋模型：

$$S_n^z := \psi_n^\dagger \psi_n := \psi_n^\dagger \psi_n - \frac{1}{2}.$$

我们将费米子场围绕费米点展开，用手征场表示：

$$\psi_n \rightarrow \sqrt{a} [(-i)^n \psi_+(x) + i^n \psi_-(x)],$$

其中  $a$  是晶格常数， $x = an$ ，并且我们取系统处于半满填充 ( $k_F = \pi/2$ )，即零磁化强度。

物理上，只有费米面附近的激发才参与低能动力学，因此我们将动量求和严格分割为两个费米点附近的小区间，引入截断  $\Lambda$  满足  $|\Lambda| \ll k_F$ ：

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{|q| < \Lambda} [e^{i(k_F+q)na} \psi_{k_F+q} + e^{i(-k_F+q)na} \psi_{-k_F+q}]$$

这一分割是精确的，因为我们只是将动量求和拆分为两个区域，并显式写出了相位因子。将上述两项分别提出与费米点相关的整体相位：

$$\psi_n = e^{ik_F na} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{iqna} \psi_{k_F+q} \right) + e^{-ik_F na} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{iqna} \psi_{-k_F+q} \right)$$

引入连续空间坐标  $x = na$ ，并定义两个慢变手征场算符：

$$\psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{iqx} \psi_{k_F+q}, \quad \psi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{iqx} \psi_{-k_F+q}$$

这两个场在连续极限下是坐标  $x$  的缓变函数，它们携带了系统的全部低能信息。费米波矢与格常数的乘积为： $k_F a = \frac{\pi}{2}$ 。因此指数因子化为：

$$e^{ik_F na} = e^{i\pi n/2} = (-i)^n, \quad e^{-ik_F na} = e^{-i\pi n/2} = i^n$$

这里  $(-i)^n$  和  $i^n$  是周期为 4 的纯相位因子，它们精确捕捉了格点算符在费米面处的快速振荡特征。代入后得到：

$$\psi_n = (-i)^n \psi_+(x) + i^n \psi_-(x)$$

通过反对易关系确定归一化因子，格点算符满足离散克罗内克型反对易关系，而连续场算符应满足狄拉克型反对易关系：连续狄拉克函数与离散克罗内克函数通过  $\delta_{nm} = a^{-1} \delta(x - x')$  相联系。这意味着当我们从离散过渡到连续时，场算符必须重新标度。正确的对应关系是： $\psi_n = \sqrt{a} \psi(x)$ 。将这一标度因子纳入手征分解，得到最终精确表达式：

$$\psi_n = \sqrt{a} [(-i)^n \psi_+(x) + i^n \psi_-(x)], \quad x = na$$

用费米子手征场表示的自旋密度分解为平滑分量和振荡（交错）分量的和：

$$S^z(x) = \rho(x) + (-1)^n M(x), \quad \rho(x) =: \psi_+^\dagger(x) \psi_+(x) +: \psi_-^\dagger(x) \psi_-(x):$$

$$M(x) =: \psi_+^\dagger(x) \psi_-(x) : +: \psi_-^\dagger(x) \psi_+(x) :$$

其中  $S_n^z \rightarrow a S^z(x)$ 。XXZ 哈密顿量可以写为

$$\mathcal{H} = - \sum_n \left[ \frac{1}{2} (S_n^+ S_{n+1}^- + S_n^- S_{n+1}^+) + \Delta S_n^z S_{n+1}^z \right] \simeq \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int},$$

其中前两项是自由理论的动能部分，在线性近似下给出

$$\mathcal{H}_0 = -iv_0 \int dx [\psi_+^\dagger \partial_x \psi_+ - \psi_-^\dagger \partial_x \psi_-],$$

相互作用项可以写为

$$\mathcal{H}_{int} = v_0 \Delta \int dx [\rho(x) \rho(x+a) - M(x) M(x+a)].$$

将前面展开结果代入玻色化形式计算，相乘得到四个项：

$$\begin{aligned} \psi_n^\dagger \psi_n &= a \left[ i^n (-i)^n \psi_+^\dagger \psi_+ + (-i)^n i^n \psi_-^\dagger \psi_- + (-i)^n (-i)^n \psi_+^\dagger \psi_- + i^n i^n \psi_-^\dagger \psi_+ \right] \\ &= a \left[ \psi_+^\dagger \psi_+ + \psi_-^\dagger \psi_- + (-1)^n (\psi_+^\dagger \psi_- + \psi_-^\dagger \psi_+) \right] \end{aligned}$$

现在处理连续极限下的归一化问题，格点自旋密度  $S_n^z$  无量纲，而连续自旋密度  $S^z(x)$  应满足  $\sum_n S_n^z = \int dx S^z(x)$ ，由于  $\sum_n = \frac{1}{a} \int dx$ ，必须令  $S_n^z = a S^z(x)$ 。这是从离散求和过渡到连续积分的标准对应关系，它保证了总自旋在两个表示下相等。因此

$$S^z(x) = \psi_+^\dagger \psi_+ + \psi_-^\dagger \psi_- + (-1)^n (\psi_+^\dagger \psi_- + \psi_-^\dagger \psi_+) - \frac{1}{2a}$$

常数项  $-1/2a$  的物理意义需要澄清。在半满填充下，自由费米子海的平均占据数为  $\langle \psi_n^\dagger \psi_n \rangle = 1/2$ ，这对应于

$$\langle \psi_+^\dagger \psi_+ + \psi_-^\dagger \psi_- \rangle = \frac{1}{2a}$$

因此常数项  $-1/2a$  恰好抵消了平均密度，使自旋密度算符描述的是相对于均匀背景的涨落。这自然引入了正规序的概念：将算符减去其真空期待值。定义

$$:\psi_\pm^\dagger \psi_\pm: = \psi_\pm^\dagger \psi_\pm - \langle \psi_\pm^\dagger \psi_\pm \rangle, \quad :\psi_+^\dagger \psi_-: = \psi_+^\dagger \psi_-, \quad :\psi_-^\dagger \psi_+: = \psi_-^\dagger \psi_+$$

交叉项在自由费米子真空中的期望值为零，因此无需减去。于是我们定义平滑密度算符和交错振幅算符：

$$\rho(x) =: \psi_+^\dagger \psi_+ : +: \psi_-^\dagger \psi_- :, \quad M(x) =: \psi_+^\dagger \psi_- : +: \psi_-^\dagger \psi_+ :$$

代入后得到最终分解：

$$S^z(x) = \rho(x) + (-1)^n M(x)$$

动能项的玻色化给出  $\mathcal{H} = \frac{v_0}{2} \int [(\Pi(x))^2 + (\partial_x \phi(x))^2] dx$ 。对于相互作用项，我们有

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi(x), \quad M(x) \simeq -\frac{1}{\pi a} : \sin \sqrt{4\pi} \phi(x) :,$$



$$\lim_{a \rightarrow 0} M(x)M(x+a) = -\frac{1}{(\pi a)^2} \cos \sqrt{16\pi}\phi(x) - \frac{1}{\pi}(\partial_x \phi)^2 + \text{const.}$$

余弦项源于所谓的 *Umklapp* 过程  $\psi_+^\dagger(x)\psi_+^\dagger(x+a)\psi_-(x+a)\psi_-(x) + h.c.$ ，其中两个粒子从一个费米点移除并添加到另一个费米点。这种散射事件对应于动量转移  $4k_f$ ，并且只有当费米点允许晶格反冲并吸收这个过剩动量时才可能发生，正如  $k_f = \pi/2$  时发生的情况。将这些贡献放在一起， $XXZ$  哈密顿量的连续版本为

$$\mathcal{H} = \int dx \left\{ \frac{v_0}{2} \left[ \Pi^2 + \left( 1 + \frac{4\Delta}{\pi} \right) (\partial_x \phi)^2 \right] + \frac{v_0 \Delta}{(\pi a)^2} : \cos \sqrt{16\pi}\phi : \right\}.$$

这显然是一个朴素的分析，因为高阶项和融合规则重整化了这个哈密顿量中的系数。尽管如此，上式中的三项足以捕捉  $XXZ$  链的标度极限。

动能的线性化表达式， $\rho(x)$  与  $M(x)$  的表达式也都是玻色化公式的直接应用。相互作用项的推导，交叉项做线性化展开后是高阶小量。对于交错振幅算符  $M(x)$ ，将其表示为指数顶角算符的线性组合

$$M(x) = -\frac{1}{2i\pi a} (: e^{i\alpha\phi(x)} : - : e^{-i\alpha\phi(x)} :), \quad \alpha = \sqrt{4\pi}$$

这里正规序表示相对于自由玻色场真空的编序，它自动减除了所有收缩，保证算符在关联函数中具有良好定义的行为。利用自由玻色场的两点函数结果，以及高斯场正规序的性质计算，可得顶角算符的基本公式：

$$: e^{i\alpha\phi(x)} :: e^{i\beta\phi(y)} := \left( \frac{a}{|x-y|} \right)^{\frac{\alpha\beta}{2\pi}} : e^{i\alpha\phi(x)+i\beta\phi(y)} :$$

计算  $M(x)M(x+a)$ ，其中  $a$  是格距，我们关心的是  $a \rightarrow 0$  极限下的主导行为。将  $M(x)$  的表达式代入并展开，得到四项指数乘积的组合，这四项可分为两类：第一类是两顶角电荷相反的项，如  $: e^{i\alpha\phi(x)} :: e^{-i\alpha\phi(x+a)} :$ ；第二类是电荷相同的项，如  $: e^{i\alpha\phi(x)} :: e^{i\alpha\phi(x+a)} :$ 。先处理第一类，应用公式并对小位移  $a$  展开场算符： $\phi(x) - \phi(x+a) = -a\partial_x\phi + O(a^2)$ ，代入指数并展开至  $a^2$  阶：

$$: e^{i\alpha(\phi(x)-\phi(x+a))} := : e^{-i\alpha a\partial_x\phi} := 1 - i\alpha a : \partial_x\phi : - \frac{\alpha^2 a^2}{2} : (\partial_x\phi)^2 : + \dots$$

另一电荷相反项： $: e^{-i\alpha\phi(x)} :: e^{i\alpha\phi(x+a)} :$  给出完全类似的贡献，只是指数中  $\phi$  的符号交换，导致展开式为  $1 + i\alpha a : \partial_x\phi : - \frac{\alpha^2 a^2}{2} : (\partial_x\phi)^2 : + \dots$ 。将这两项相加，线性项抵消，得到

$$: e^{i\alpha\phi(x)} :: e^{-i\alpha\phi(x+a)} : + : e^{-i\alpha\phi(x)} :: e^{i\alpha\phi(x+a)} := 2 - \alpha^2 a^2 : (\partial_x\phi)^2 : + O(a^4)$$

再处理第二类电荷相同的项。场算符之和展开为

$$\phi(x) + \phi(x+a) = 2\phi(x) + a\partial_x\phi + \dots$$

忽略导数项（它们在后续与其他项合并后贡献高阶或可吸收），主导项为： $: e^{i2\alpha\phi(x)} := : e^{i\sqrt{16\pi}\phi(x)} :$  同样地，另一项： $: e^{-i\alpha\phi(x)} :: e^{-i\alpha\phi(x+a)} :$  给出： $: e^{-i2\alpha\phi(x)} :$ 。二者相加得到

$$: e^{i\alpha\phi(x)} :: e^{i\alpha\phi(x+a)} : + : e^{-i\alpha\phi(x)} :: e^{-i\alpha\phi(x+a)} := 2 : \cos(\sqrt{16\pi}\phi(x)) : + \dots$$

将两类结果代回  $M(x)M(x+a)$  的表达式，略去了高阶项。代入  $\alpha^2 = 4\pi$  并整理系数，通常将常数项吸收到能量零点，最终得到短距离展开的主导算符结构：

$$M(x)M(x+a) = -\frac{1}{(\pi a)^2} : \cos(\sqrt{16\pi}\phi) : - \frac{1}{\pi} : (\partial_x\phi)^2 : + \text{const}$$

将自由玻色场的动能项与相互作用项的结果总结代入即可得到连续版本的哈密顿量。注意密度项的贡献是两支之和，因此系数为  $\frac{2\Delta}{\pi}$ 。

通常也会将场归一化以吸收余弦项的  $\Delta$  依赖系数：这样做，我们通过声速重新标度能量尺度，并将相互作用的影响转移到玻色子的紧致化半径中。研究余弦项的共形维数，可以看到对于  $|\Delta| < 1$  它是无关的。在  $\Delta = -1$ （海森堡反

铁磁) 处, 手征对称性被  $Umklapp$  项破坏, 余弦项变得相关并打开朝向单轴反铁磁相的能隙。在  $\Delta = 1$  处, 低能激发是具有二次色散关系的磁振子, 因此由于恢复了伽利略对称性而非洛伦兹对称性, 玻色化方案失效。我们现在只关注顺磁相, 其中可以忽略余弦项, 有效哈密顿量为:

$$\mathcal{H} = \frac{v_s}{\pi} \int \left[ K(\Pi(x))^2 + \frac{1}{K}(\nabla\phi(x))^2 \right] dx$$

声速可以使用  $v_s = \frac{1}{2\pi\rho(\Lambda)} \frac{\partial\epsilon(\lambda)}{\partial\lambda} \Big|_{\lambda=\Lambda}$ 。利用已知结果确定了它为  $v_s = \frac{\pi \sin \gamma}{2\gamma}$ 。其中  $\Delta = -\cos \gamma$ 。Luttinger 参数可以从分数荷中提取为  $K = Z^2$ 。

我们从紧致自由玻色场的拉氏量出发, 其对应的 Luttinger 液体哈密顿量为:

$$H = \frac{v}{2} \int_0^L dx \left[ \frac{1}{K}(\partial_x\phi)^2 + K(\partial_x\theta)^2 \right],$$

为了求解有限尺寸下的能谱, 我们对场进行模展开, 将其分解为零模和振动模两部分:  $\phi(x) = \phi_0 + \frac{\pi\Delta N}{L}x + \phi_{\text{osc}}, \theta(x) = \theta_0 + \frac{\pi D}{L}x + \theta_{\text{osc}}$ 。这里,  $\Delta N$  代表系统总粒子数的变化量, 而  $D$  是与边界条件相关的拓扑绕数。代入哈密顿量, 完成对空间的积分后, 即可得到零模部分的能量:

$$H_0 = \frac{v}{2} \int_0^L dx \left[ \frac{1}{K} \left( \frac{\pi\Delta N}{L} \right)^2 + K \left( \frac{\pi D}{L} \right)^2 \right]. \quad \Delta E_{\text{zero}} = \frac{2\pi v}{L} \left[ \frac{(\Delta N)^2}{4K} + KD^2 \right]$$

这一部分能量的物理来源非常清晰:  $(\Delta N)^2/4K$  项源于密度涨落的刚度  $1/K$ , 而  $KD^2$  项则源于相位涨落的刚度  $K$ 。接下来考虑振动模  $\phi_{\text{osc}}$  和  $\theta_{\text{osc}}$  的贡献。对振动部分进行傅里叶展开, 在周期边界条件下, 波数取离散值  $k = \frac{2\pi}{L}m$ 。振动部分的哈密顿量可以通过适当的玻色化技巧对角化, 转化为一组独立的谐振子:

$$H_{\text{osc}} = \sum_{k>0} v|k| (a_k^\dagger a_k + \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k).$$

每个模的激发能量为  $E_k = v|k|n_k = \frac{2\pi v}{L}mn_k$ , 将所有激发模求和, 得到振动部分对能谱的贡献:

$$\Delta E_{\text{osc}} = \frac{2\pi v}{L} (n_R + n_L).$$

其中,  $n_R = \sum_{m>0} mn_m$  对应于右移动声子的总激发数, 而  $n_L = \sum_{m>0} m\tilde{n}_m$  对应于左移动声子的总激发数。将零模和振动模的贡献合并, 就得到了完整的有限尺寸谱:

$$\Delta E = \frac{2\pi v}{L} \left[ \frac{(\Delta N)^2}{4K} + KD^2 + n_R + n_L \right].$$

与我们之前利用 BA 方法推导的结果进行对比可以显然得到  $K = Z^2$

在零磁场下, 积分方程的支撑在整个实轴上, 可以通过傅里叶变换求解, 得到常数分数荷  $Z(\lambda) = \frac{\pi}{2(\pi-\gamma)}$ 。这不是用于 Luttinger 参数的值, 可以通过考虑有限但小的磁场 (大的  $\Lambda$ ) 来检查。可以通过 Wiener-Hopf 方法微扰地完成计算, 这给出一级近似下边界处缀饰荷的不同常数值, 该值可以解析延拓到  $\Lambda \rightarrow \infty$  以给出无穷远边界处的值:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z(\Lambda) = \sqrt{\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z(0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-\gamma)}} \Rightarrow K = \frac{\pi}{2(\pi-\gamma)}.$$

这个结果与从哈密顿量在小的  $\Delta$  处导出的朴素（微扰）答案一致， $K \simeq 1 - \frac{2\Delta}{\pi} + O(\Delta^2)$ ，但当远离  $\Delta = 0$  时会偏离。 $\Delta = 0$  对应于自由费米子（ $K = 1$ ）， $\Delta > 0$  给出排斥费米子（ $K < 1$ ）， $\Delta < 0$  给出吸引费米子（ $K > 1$ ）。海森堡反铁磁链（ $\Delta = 1$ ）具有  $K = \frac{1}{2}$  和  $v_S = \frac{\pi}{2}$ ，而铁磁点  $\Delta = -1$  不是共形的（ $v_S = 0$ ）。对于  $h \ll 1$ ，*Wiener-Hopf* 解中的下一阶给出

$$K \stackrel{h \ll 1}{\approx} \frac{\pi}{2(\pi - \gamma)} \times \begin{cases} 1 + \frac{1}{2 \ln \frac{h_0}{h}}, & \gamma = 0, \\ 1 + \alpha_1 h^{\frac{4\gamma}{\pi - \gamma}}, & 0 < \gamma < \frac{\pi}{3}, \quad (-1 < \Delta < -5), \\ 1 + \alpha_2 h^2, & \frac{\pi}{3} < \gamma < \pi. \end{cases}$$

这表明  $h = 0$  的值是通过不同的指数接近的，这些指数对于  $-1 < \Delta < -0.5$  连续变化，对于  $\Delta > -0.5$  保持恒定（常数  $h_0, \alpha_{1,2}$  可以查到）。自旋算符最终的玻色化表示为：

$$S^2(x) = \sqrt{\frac{K}{2\pi}} \partial_x \phi(x) - \text{const} (-1)^j \sin \sqrt{4\pi K} \phi(x), \quad S^\pm(x) = \text{const} (-1)^j e^{\pm i \sqrt{\frac{\pi}{K}} \theta(x)}.$$

自旋算符的玻色化表示参见 [Appendix B.4](#)

$XXZ$  链在磁场小于  $h_s$  时保持临界。接近饱和时，积分方程的支撑向零收缩：我们可以使用微扰结果  $\rho_0(\Lambda)[1 + \frac{1}{2\pi} \mathcal{K}(0)2\Lambda] \sim \frac{1}{2\pi} \theta'_1(\Lambda)$ ， $Z(\Lambda)[1 + \frac{1}{2\pi} \mathcal{K}(0)2\Lambda] \simeq 1$  连同  $\Lambda \stackrel{h \rightarrow h_s}{\simeq} 2 \tan \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{h_s - h}{J}} (h \leq h_s)$  得到：

$$Z(\Lambda) \stackrel{h \rightarrow h_s^-}{\simeq} 1 - \frac{\Lambda}{\pi} K(0) = 1 - \frac{2}{\pi} \tan \gamma / 2 \sqrt{h_s - h}, \quad \Rightarrow \quad K \stackrel{h \rightarrow h_s^-}{\simeq} 1 + \frac{4}{\pi} \frac{\Delta}{1 - \Delta} \sqrt{h_s - h},$$

这对应于接近饱和点时反铁磁海森堡链的  $K \simeq 1 - \frac{2}{\pi} \sqrt{h_s - h}$ 。

接近饱和点（ $h \rightarrow h_s^-$ ），此时反向自旋数  $M \rightarrow 0$ ，区间  $\Lambda \rightarrow 0$ ，因此可做小区间展开。由于区间小， $\rho_0(\mu) \approx \rho_0(0)$ ， $\mathcal{K}(\lambda - \mu) \approx \mathcal{K}(0)$ ，于是： $\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \mathcal{K}(\lambda - \mu) \rho_0(\mu) d\mu = 2\Lambda \rho_0(0) \mathcal{K}(0)$ 。对于缀饰荷方程： $Z(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \mathcal{K}(\lambda - \mu) Z(\mu) d\mu = 1$  同样展开，方程变为：

$$\rho_0(\lambda) \left[ 1 + \frac{\Lambda}{\pi} \mathcal{K}(0) \right] = \frac{1}{2\pi} \theta'_1(\lambda) \quad Z(\Lambda) \left[ 1 + \frac{\Lambda}{\pi} \mathcal{K}(0) \right] = 1$$

因此  $Z(\Lambda) = \frac{1}{1 + \frac{\Lambda}{\pi} \mathcal{K}(0)} \simeq 1 - \frac{\Lambda}{\pi} \mathcal{K}(0)$ 。小量展开  $\mathcal{K}(0) = \frac{2 \sin 2\gamma}{1 - \cos 2\gamma} = 2 \cot \gamma$ 。因此： $Z(\Lambda) \simeq 1 - \frac{2}{\pi} \cot \gamma \cdot \Lambda$ 。缀饰能量在  $\lambda = 0$  展开：

$$\varepsilon(\lambda) = h - h_s + \frac{1}{2} m^* \lambda^2$$

费米条件  $\varepsilon(\Lambda) = 0$  给出： $h_s - h = \frac{1}{2} m^* \Lambda^2$ 。因此  $\Lambda \propto \sqrt{h_s - h}$ 。代入精确系数为：

$$\Lambda = 2 \tan \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{h_s - h}{J}} \quad Z \simeq 1 - \frac{4}{\pi} \frac{\Delta}{1 + \Delta} \sqrt{\frac{h_s - h}{J}}$$

对于  $K = Z^2$ ：

$$K \simeq 1 - \frac{8}{\pi} \frac{\Delta}{1 + \Delta} \sqrt{h_s - h}$$

顺磁区域（即使在有限  $h < h_s$ ）的自旋翻转关联函数对应于  $\Delta N = 1$ （并且领头阶  $d = N^\pm = 0$ ）

$$\langle S^-(x, \tau) S^+(0, 0) \rangle \simeq A |x + iv_S \tau|^{-1/(2Z)},$$

这与 *Lieb – Liniger model* 相同。类似地，

$$\langle S^z(x, t) S^z(0, 0) \rangle = C_1 \frac{x^2 - (v_S \tau)^2}{[x^2 + (v_S \tau)^2]^2} + C_2 \frac{\cos 2k_F x}{|x + iv_S \tau|^{2Z^2}}, \quad 0 \leq h \leq h_s,$$

这里，参见  $\Delta P$  附近的讨论， $k_F = \pi \int \rho_0(\lambda) d\lambda$ ，在  $h = 0$  时等于  $k_F = \frac{\pi}{2}$ 。在中报道了反铁磁各向同性海森堡链（ $\Delta = 1$ ）在  $h = 0$  时由于该点增强的对称性而偏离此行为：

$$\langle S^z(z) S^z(0) \rangle \simeq \tilde{A} (-1)^{|z|} |z|^{-1} \sqrt{\ln |z|}, \quad \text{at } h = 0, \Delta = 1.$$

对于前文结果  $\langle [\theta(x, \tau) - \theta(0, 0)]^2 \rangle = \frac{1}{2\pi K} \ln \frac{x^2 + (v_S \tau)^2}{\alpha^2}$ ，以及横向自旋算符： $S^\pm(x) = C(-1)^j e^{\pm i\sqrt{\frac{\pi}{K}}\theta(x)}$ 。计算  $\langle S^-(x, \tau) S^+(0, 0) \rangle$ ，代入得：

$$\langle S^-(x, \tau) S^+(0, 0) \rangle = C^2 (-1)^j \langle e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{K}}\theta(x, \tau)} e^{+i\sqrt{\frac{\pi}{K}}\theta(0, 0)} \rangle$$

使用高斯场恒等式  $\langle e^A e^B \rangle = \exp(\frac{1}{2} \langle (A + B)^2 \rangle)$ ，令  $A = -i\alpha\theta(x)$ ， $B = +i\alpha\theta(0)$ ，其中  $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{K}}$ ，则  $A + B = -i\alpha(\theta(x) - \theta(0))$ ，于是：

$$\langle S^- S^+ \rangle = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} \langle [\theta(x) - \theta(0)]^2 \rangle\right)$$

代入书上给出的差平方：

$$\langle S^- S^+ \rangle = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi K} \ln \frac{x^2 + (v_S \tau)^2}{\alpha^2}\right)$$

代入  $\alpha^2 = \frac{\pi}{K}$ ，指数部分为：

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{K} \cdot \frac{1}{2\pi K} = -\frac{1}{4K^2}$$

因此：

$$\langle S^- S^+ \rangle = \left( \frac{x^2 + (v_S \tau)^2}{\alpha^2} \right)^{-1/(4K^2)} = \left( \frac{\alpha^2}{x^2 + (v_S \tau)^2} \right)^{1/(4K^2)}$$

写成复坐标形式， $x^2 + (v_S \tau)^2 = |x + iv_S \tau|^2$ ，所以：

$$(x^2 + v_S^2 \tau^2)^{-1/(4K^2)} = |x + iv_S \tau|^{-1/(2K^2)}$$

最终得到：

$$\langle S^-(x, \tau) S^+(0, 0) \rangle \propto (-1)^j |x + iv_S \tau|^{-1/(2K^2)}$$

现在与书上的结果  $-1/(2Z)$  比较。书上写  $\langle S^- S^+ \rangle \sim |x + iv_S \tau|^{-1/(2Z)}$ ，而我们得到  $-1/(2K^2)$ 。要一致必须满足  $K^2 = Z$ ，但 *Bethe Ansatz* 给出的是  $K = Z^2$ 。这就构成了一个矛盾点，书上的内容是否有误？不过可以姑且给出最终答案为：

$$\langle S^-(x, \tau) S^+(0, 0) \rangle \propto |x + iv_S \tau|^{-1/(2K^2)}$$



对于已知结果， $\langle [\phi(x, \tau) - \phi(0, 0)]^2 \rangle = \frac{K}{2\pi} \ln \frac{x^2 + v^2 \tau^2}{\alpha^2}$ ，等价地： $\langle \phi(x, \tau) \phi(0, 0) \rangle = -\frac{K}{4\pi} \ln \frac{x^2 + v^2 \tau^2}{\alpha^2}$ 。记  $r^2 = x^2 + v^2 \tau^2$ 。算符玻色化表达式为：

$$S^z(x, \tau) = \underbrace{\sqrt{\frac{K}{2\pi}} \partial_x \phi}_A + \underbrace{C_2(-1)^j \sin(\sqrt{4\pi K} \phi)}_B$$

记  $S^z = A + B$ ，计算  $\langle S^z(x, \tau) S^z(0, 0) \rangle = \langle AA \rangle + \langle BB \rangle$ ，交叉项为零。平滑项  $\langle AA \rangle$ ，其中  $A = \sqrt{\frac{K}{2\pi}} \partial_x \phi$ ，因此

$$\langle AA \rangle = \frac{K}{2\pi} \partial_x \partial_{x'} \langle \phi(x, \tau) \phi(x', 0) \rangle \Big|_{x'=0}$$

传播子  $G(x) = -\frac{K}{4\pi} \ln r^2$ 。导数为：

$$\partial_x G = -\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{2x}{r^2} = -\frac{K}{2\pi} \frac{x}{r^2} \quad \partial_x^2 G = -\frac{K}{2\pi} \partial_x \left( \frac{x}{r^2} \right) = -\frac{K}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} \right) = \frac{K}{2\pi} \frac{x^2 - v^2 \tau^2}{r^4}$$

乘以系数  $\frac{K}{2\pi}$  得：

$$\langle AA \rangle = \frac{K}{2\pi} \cdot \frac{K}{2\pi} \frac{x^2 - v^2 \tau^2}{r^4} = \frac{K^2}{4\pi^2} \frac{x^2 - v^2 \tau^2}{(x^2 + v^2 \tau^2)^2}$$

振荡项  $\langle BB \rangle$  的计算： $B = C_2(-1)^j \sin(\sqrt{4\pi K} \phi)$ ，展开正弦并保留电荷中性项：

$$\langle BB \rangle = \frac{C_2^2}{2} (-1)^j \langle e^{i\alpha\phi(x)} e^{-i\alpha\phi(0)} \rangle$$

其中  $\alpha = \sqrt{4\pi K}$ 。使用高斯公式：

$$\langle e^{i\alpha\phi(x)} e^{-i\alpha\phi(0)} \rangle = \exp \left( -\frac{\alpha^2}{2} \langle [\phi(x) - \phi(0)]^2 \rangle \right)$$

代入差平方定义：

$$\exp \left( -\frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{K}{2\pi} \ln \frac{r^2}{\alpha^2} \right)$$

代入  $\alpha^2 = 4\pi K$ ，指数部分为：

$$-\frac{1}{2} \cdot 4\pi K \cdot \frac{K}{2\pi} = -K^2$$

因此：

$$\langle BB \rangle \propto (-1)^j \left( \frac{r^2}{\alpha^2} \right)^{-K^2} = (-1)^j \left( \frac{\alpha^2}{r^2} \right)^{K^2}$$

写成幂律形式为  $|x + iv\tau|^{-2K^2}$ 。书中结果中振荡项指数应为  $2K$  而非  $2K^2$ 。我们计算的振荡项为：

$$\langle BB \rangle = C_2(-1)^j \frac{1}{(x^2 + v^2 \tau^2)^{K^2}}$$

最终纵向关联函数

$$\langle S^z(x, \tau) S^z(0, 0) \rangle = \frac{K^2}{4\pi^2} \frac{x^2 - v^2 \tau^2}{(x^2 + v^2 \tau^2)^2} + C_2(-1)^j \frac{1}{(x^2 + v^2 \tau^2)^{K^2}}$$

## 2 EFP method

(静态关联函数，没有过多了解)

### Introduction

自旋  $1/2$  反铁磁海森堡  $XXX$  链是一维量子磁性中研究最为深入的模型之一，其哈密顿量由下式给出：

$$\mathcal{H} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + S_j^z S_{j+1}^z)$$

其中  $S_j^\alpha = \sigma_j^\alpha/2$ ，而  $\sigma_j^\alpha$  是作用在第  $j$  个格点上的泡利矩阵。*Boos* 和 *Korepin* 在 2001 年设计了一种方法来评估  $XXX$  链的这些多重积分。研究表明，多重积分公式中的被积函数可以化简为一种标准形式，这使得我们能够进行积分。该方法最初应用于一种称为空位形成概率  $EFP$  的特殊关联函数，即找到长度为  $n$  的铁磁串的概率：

$$P(n) = \left\langle \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} + S_j^z \right) \right\rangle.$$

通过执行积分，获得了直到  $n=5$  的  $EFP$  的解析形式：

$$P(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\zeta_a(1) = 0.102284273146684\dots,$$

$$P(3) = \frac{1}{4} - \zeta_a(1) + \frac{1}{2}\zeta_a(3) = 0.00762415812490254\dots,$$

$$\begin{aligned} P(4) &= \frac{1}{5} - 2\zeta_a(1) + \frac{173}{45}\zeta_a(3) - \frac{22}{9}\zeta_a(1)\zeta_a(3) - \frac{17}{15}\zeta_a(3)^2 - \frac{22}{9}\zeta_a(5) + \frac{34}{9}\zeta_a(1)\zeta_a(5) \\ &= 0.000206270046519527\dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(5) &= \frac{1}{6} - \frac{10}{3}\zeta_a(1) + \frac{281}{18}\zeta_a(3) - \frac{163}{3}\zeta_a(3)^2 - \frac{1355}{36}\zeta_a(5) + \frac{1960}{9}\zeta_a(1)\zeta_a(5) \\ &\quad - \frac{85}{9}\zeta_a(3)\zeta_a(5) - \frac{485}{9}\zeta_a(5)^2 + \frac{889}{36}\zeta_a(7) - \frac{1645}{9}\zeta_a(1)\zeta_a(7) + \frac{679}{6}\zeta_a(3)\zeta_a(7) \\ &= 2.01172595898884\dots \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

这里我们注意到，通过这些结果，最近邻和次近邻关联函数可以通过关系  $P(2) = \langle S_j^z S_{j+1}^z \rangle + \frac{1}{4}$ ,  $P(3) = \langle S_j^z S_{j+1}^z \rangle + \frac{1}{2}\langle S_j^z S_{j+2}^z \rangle + \frac{1}{8}$  重现，而第三近邻关联函数  $\langle S_j^z S_{j+3}^z \rangle$  不能仅从  $P(4)$  确定。将 *Boos-Korepin* 方法应用于其他四个格点上的关联函数，在 2003 年，获得了所有四个格点上的关联函数。特别是他们获得了第三近邻关联函数的解析形式：

$$\begin{aligned} \langle S_j^z S_{j+3}^z \rangle &= \frac{1}{12} - 3\zeta_a(1) + \frac{74}{9}\zeta_a(3) - \frac{56}{9}\zeta_a(1)\zeta_a(3) - \frac{8}{3}\zeta_a(3)^2 - \frac{50}{9}\zeta_a(5) + \frac{80}{9}\zeta_a(1)\zeta_a(5) \\ &= -0.0502486272572352\dots. \end{aligned}$$

此外，结果被推广到无质量和有质量区域的  $XXZ$  链

## Explicit calculations of the generating function

$n = 2$

首先我们考虑  $n = 2$  的生成函数，其形式为：

$$P_2^\kappa(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^2 + A_{2,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2||)\omega_{12},$$

其中我们引入了缩写  $\omega_{jk} = \omega(\lambda_{jk})$ ,  $\lambda_{jk} = \lambda_j - \lambda_k$ 。在这种情况下，有理函数  $A_{2,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2||)$  没有分母，仅有一个常数分子：

$$A_{2,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2||) = Q_{2,1}^\kappa.$$

第一个递推关系给出：

$$\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}Q_{2,1}^\kappa = \kappa.$$

解这个关于  $Q_{2,1}^\kappa$  的方程，我们得到：

$$Q_{2,1}^\kappa = \frac{(1-\kappa)^2}{6},$$

这已经给出了  $P_2^\kappa(\lambda_1, \lambda_2)$  的最终答案：

$$P_2^\kappa(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^2 + \frac{(1-\kappa)^2}{6}\omega_{12}.$$

注意第二个递推关系自动满足。通过取均匀极限  $\lambda_1 \rightarrow 0, \lambda_2 \rightarrow 0$ ，我们得到：

$$P_2^\kappa = \frac{1}{3}(1+\kappa+\kappa^2) - \frac{1}{3}(1-\kappa)^2\zeta_a(1).$$

我们恢复了  $\langle S_j^z S_{j+1}^z \rangle$  和  $P(2)$  的结果。

$n = 3$

$n = 3$  的生成函数可以写为：

$$P_3^\kappa(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^3 + A_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2||\lambda_3)\omega_{12} + A_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_3||\lambda_2)\omega_{13} + A_{3,1}^\kappa(\lambda_2, \lambda_3||\lambda_1)\omega_{23},$$

$$A_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2||\lambda_3) = \frac{Q_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2||\lambda)}{Q_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_3)}.$$

考虑到对称关系和取反关系，我们可以假设多项式  $Q_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2||\lambda_3)$  的形式为：

$$Q_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2||\lambda) = c_{3,1}^\kappa(0, 0||0) + c_{3,1}^\kappa(1, 1||0)\lambda_1\lambda_2 + c_{3,1}^\kappa(1, 0||1)(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3 + c_{3,1}^\kappa(0, 0||2)\lambda_3^2,$$

其中  $c_{3,1}^\kappa(i_1, i_2||i_3)$  是一些具有有理系数的参数  $\kappa$  的多项式。第二个递推关系给出  $\lambda_3^2$  的系数：

$$c_{3,1}^\kappa(0, 0||2) = \frac{1+\kappa}{2}Q_{2,1}^\kappa.$$

由平移不变性，我们有：

$$c_{3,1}^\kappa(1, 1||0) = -c_{3,1}^\kappa(1, 0||1) = c_{3,1}^\kappa(0, 0||2).$$

第一个递推关系等价于  $A_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2||\lambda_3)$  的以下两个关系：

$$\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^3 + \alpha(\lambda_1, \lambda_2)A_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2 \pm 1||\lambda_2) - \frac{3}{2}A_{3,1}^\kappa(\lambda_2, \lambda_2 \pm 1||\lambda_1) = \kappa \left(\frac{1+\kappa}{2}\right),$$

$$A_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2 || \lambda_2 \pm 1) + \gamma_+(\lambda_1, \lambda_2) A_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2 \pm 1 || \lambda_2) = 0.$$

尽管这些方程对于未知系数  $c_{3,1}^\kappa(i_1, i_2 || i_3)$  是一个超定线性系统，我们得到了唯一解：

$$c_{3,1}^\kappa(0, 0 || 0) = c_{3,1}^\kappa(1, 1 || 0) = -c_{3,1}^\kappa(1, 0 || 1) = c_{3,1}^\kappa(0, 0 || 2) = \frac{1+\kappa}{2} Q_{2,1}^\kappa,$$

由此我们得到：

$$Q_{3,1}^\kappa(\lambda_1, \lambda_2 || \lambda_3) = \frac{1+\kappa}{2} (1 + \lambda_{13} \lambda_{23}) Q_{2,1}^\kappa.$$

将其代入一般形式并取均匀极限  $\lambda_1 \rightarrow 0, \dots, \lambda_3 \rightarrow 0$ ，我们得到  $n=3$  的均匀生成函数：

$$P_3^\kappa = \frac{1}{4} (1+\kappa)(1+\kappa^2) - (1-\kappa)^2 (1+\kappa) \zeta_a(1) + \frac{1}{2} (1-\kappa)^2 (1+\kappa) \zeta_a(3),$$

重现了  $\langle S_j^z S_{j+2}^z \rangle$  和  $P(3)$  的结果。

---

### 3 Numerical method

利用网站[链接](#)，我们可以绘制自选链极化率与关联函数随时间演化的图像，例如对于  $Temperature = 0, L = 64$ , 各项异性因子  $\Delta = 1$  (在  $\Delta = 0$  时退化为  $XXX$  自旋链)， $t = 10$ , bond dimension  $\chi = 8$  的条件下，我们有：对于这类图像利用 *claude* 等

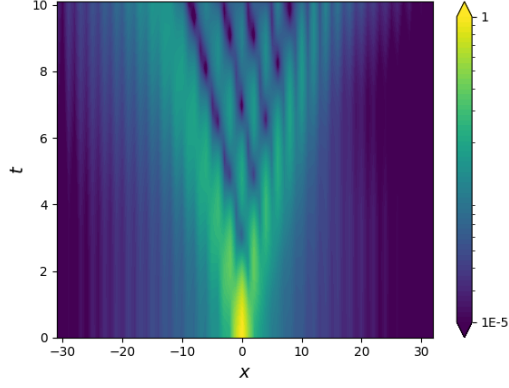


图 2: 热图

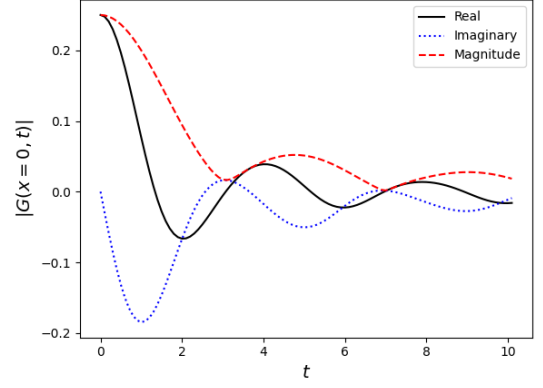


图 3: 关联函数

大模型也可以命令生成，例如以下是纯文字命令 *claude* 生成的结果：

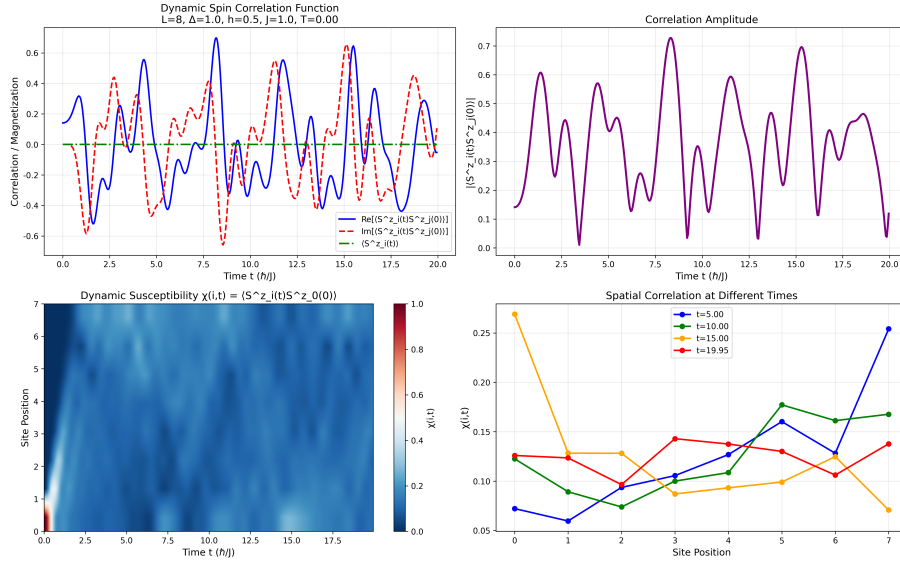


图 4: 动力学关联函数 edited by claude

## 4 Appendix

### 4.1 Appendix B.1

在  $1/2$  自旋系统中，我们有：

$$|\uparrow\rangle = f^\dagger|0\rangle \quad |\downarrow\rangle = |0\rangle$$



其中，精确表示自旋升降算符为：

$$S^+ = f^\dagger = S_x + iS_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^- = f = S_x - iS_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

这样的话， $z$  方向上的自旋算符则可以表示为：

$$S_z = \frac{1}{2} [| \uparrow \rangle \langle \uparrow | - | \downarrow \rangle \langle \downarrow | ] \equiv f^\dagger f - \frac{1}{2}$$

注意，因为  $f^\dagger f$  满足：

$$f^\dagger f | \downarrow \rangle = f^\dagger f | 0 \rangle = 0 \quad f^\dagger f | \uparrow \rangle = f^\dagger (1 - f^\dagger f) | 0 \rangle = f^\dagger | 0 \rangle = | \uparrow \rangle$$

所以可以表示为  $f^\dagger f = | \uparrow \rangle \langle \uparrow |$ ，而根据基的完备性可知：

$$| \uparrow \rangle \langle \uparrow | + | \downarrow \rangle \langle \downarrow | = I$$

将以上结果代入即可得  $S_z$  表示

重新构造自旋算符可得：

$$S_x = \frac{1}{2}(S^+ + S^-) = \frac{1}{2}(f^\dagger + f) \quad S_y = \frac{1}{2i}(S^+ - S^-) = \frac{1}{2i}(f^\dagger - f)$$

以上的这些表示可以证明满足对易关系： $[S_a, S_b] = i\epsilon_{abc}S_c$ ，以及反对易代数  $\{S_a, S_b\} = \frac{1}{4}\{\sigma_a, \sigma_b\} = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ 。这些独立的自旋算符对易，但是费米子反对易，Jordan 和 Wigner 在一维情况下通过添加相位因子（称为弦因子）解决了这个困难：

$$S_j^+ = f_j^\dagger e^{i\phi_j} \quad \phi_j = \pi \sum_{l < j} n_l$$

该相位算符包含了在  $j$  位置左边的所有费米子求和， $e^{i\phi_j}$  称为弦算符。

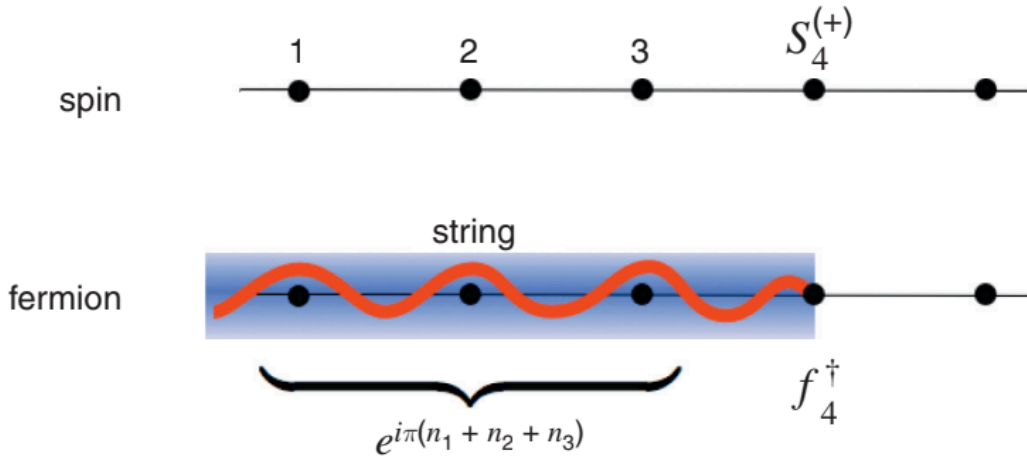


图 5: 示意图

完整的 *Jordan – Wigner* 变换形式为：

$$S_j^z = f_j^\dagger f_j - \frac{1}{2} \quad S_j^+ = f_j^\dagger e^{i\pi \sum_{l<j} n_l} \quad S_j^- = f_j e^{-i\pi \sum_{l<j} n_l}$$

换言之，自旋现在表示为：自旋 = 费米子  $\times$  弦。它的一个重要性质为弦与任何费米子算符反对易，我们给出一点说明：

$$\{e^{i\pi n_l}, f_j\} = 0$$

首先我们注意到数算符  $n_j = f_j^\dagger f_j$  的本征值只能取 0, 1，因此弦算符对应值为 0, -1，也就是说  $e^{in_j} = (-1)^{n_j}$ 。我们要证明  $e^{i\pi n_l} f_j = -f_j e^{i\pi n_l}$ ，按照作用顺序左边的  $f_j$  先作用会改变奇偶性，因此成立。值得注意的是，费米子算符是一个奇算符，而弦算符是一个局域费米子奇偶算符。

同理，我们有  $\{e^{i\pi n_j}, f_j^\dagger\} = 0$ 。接下来，我们进一步拓宽范围，对于  $l = j, l < j, l > j$  三种情况，我们不难分析得出，只有在  $l > j$  的时候， $f_j$  才能作用改变奇偶性，而对于其他情况，由于不改变粒子数，因此是对易的，也就是说：

$$\{e^{i\pi \phi_j}, f_l^\dagger\} = 0 \quad (l < j) \quad [e^{i\pi \phi_j}, f_l^\dagger] = 0 \quad (l \geq j)$$

现在我们给出横场自旋算符满足的正确代数关系为 (假设  $j < k$ )：

$$[S_j^{(\pm)}, S_k^{(\pm)}] = [f_j^{(\dagger)} e^{i\phi_j}, f_k^{(\dagger)} e^{i\phi_k}] \propto [f_j^{(\dagger)}, f_k^{(\dagger)} e^{i\phi_k}] = 0$$

注意到  $f_j^\dagger$  与  $f_k^\dagger$  跟  $e^{i\phi_k}$  都反对易，因此对他们的乘积对易，我们发现乘上弦因子后其变成了一个玻色子算符。

考虑各向异性自旋 1/2 链，其哈密顿量写为

$$H = - \sum_n \left[ \frac{1}{2} (S_n^+ S_{n+1}^- + S_n^- S_{n+1}^+) + \Delta S_n^z S_{n+1}^z \right]$$

第一项描述自旋在横向平面内的翻转，第二项为纵向量子 *Ising* 相互作用。通过 *Jordan – Wigner* 变换将自旋算符映射为无自旋费米子

$$S_n^+ = \psi_n^\dagger \exp \left( i\pi \sum_{j<n} \psi_j^\dagger \psi_j \right), \quad S_n^z = \psi_n^\dagger \psi_n - \frac{1}{2}$$

代入哈密顿量后，*XY* 部分在最近邻处串因子恰好抵消，直接化为紧束缚跳跃项  $H_{XY} = -\frac{1}{2} \sum_n (\psi_n^\dagger \psi_{n+1} + \text{h.c.})$ ，*Ising* 部分则给出密度-密度相互作用  $S_n^z S_{n+1}^z = (\psi_n^\dagger \psi_n - \frac{1}{2})(\psi_{n+1}^\dagger \psi_{n+1} - \frac{1}{2})$ ，因此 *XXZ* 链等价于一维紧束缚无自旋费米子模型叠加最近邻密度相互作用。格点算符  $\psi_n$  定义在离散坐标  $x_n = na$  上，其傅里叶变换是  $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikna} \psi_k$ ，这里  $k$  取值于第一布里渊区  $(-\pi/a, \pi/a]$ ， $N$  为格点总数， $\psi_k$  是动量空间费米子算符。体系的自由色散关系来自 *XY* 耦合项： $\varepsilon(k) = -\cos(ka)$ 。半满填充对应化学势位于能带中心，即费米能级满足  $\varepsilon(k_F) = 0$ 。由  $\cos(k_F a) = 0$  解得两个费米点： $k_F = \pm \frac{\pi}{2a}$ ，这两个点决定了低能激发的动量支点。

## 4.2 Appendix B.2

计算手征玻色场的两点关联函数之差，即  $\langle \phi_{\pm}(0)\phi_{\pm}(x) - \phi_{\pm}^2(0) \rangle$ ，并最终得到表达式  $\frac{1}{4\pi} \ln \frac{\alpha}{\alpha \pm ix}$ 。

推导过程从手征玻色场的模展开出发。对于右移动场  $\phi_+$ ，其模展开为

$$\phi_+(x) = \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}} (a_k e^{ikx} + a_k^{\dagger} e^{-ikx}) e^{-\alpha k/2}$$

其中  $k > 0$  表示只含正动量，因子  $1/\sqrt{k}$  保证了规范归一，而指数因子  $e^{-\alpha k/2}$  则是引入的调节子，截止标度  $\alpha$  与截止  $\Lambda$  的关系为  $\alpha \sim 1/\Lambda$ ，玻色子算符满足对易关系  $[a_k, a_{k'}^{\dagger}] = \delta(k - k')$ 。计算两点函数  $\langle \phi_+(0)\phi_+(x) \rangle$  时，代入模展开后，仅保留非零的期望项  $\langle a_k a_k^{\dagger} \rangle = 1$ ，最终得到积分表达式

$$\langle \phi_+(0)\phi_+(x) \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dk}{4\pi k} e^{-\alpha k} e^{-ikx}$$

该积分的核心部分是

$$I(x) = \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} e^{-(\alpha + ix)k}$$

这是一个标准积分，结果为  $-\ln(\alpha + ix)$  加上一个常数。因此，

$$\langle \phi_+(0)\phi_+(x) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \ln(\alpha + ix) + \text{const}$$

然而，直接计算  $\langle \phi_+(0)\phi_+(0) \rangle$  在  $\alpha \rightarrow 0$  时会产生发散（表现为  $\ln \alpha \rightarrow -\infty$ ）。为了得到有限的物理结果，需要计算关联函数的差，即减去  $\phi^2(0)$  的期望值。这一操作对应于正规化处理中的点分离正规化，其物理本质是先引入微观尺度上的分离，再减去发散部分。计算该差值得到

$$\langle \phi_+(0)\phi_+(x) - \phi_+^2(0) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \ln(\alpha + ix) + \frac{1}{4\pi} \ln(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\alpha}{\alpha + ix}$$

对于左移动场  $\phi_-$ ，其传播方向相反，推导过程类似，最终结果中分母的符号改变，得到统一形式  $\frac{1}{4\pi} \ln \frac{\alpha}{\alpha \pm ix}$ ，其中正号对应右移场，负号对应左移场。

## 4.3 Appendix B.3

从对数形式的 *Bethe* 方程

$$Lp_0(\lambda_j) + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi I_j$$

出发，定义计数函数  $Z_L(\lambda) = \frac{1}{2\pi} [Lp_0(\lambda) + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda - \lambda_k)]$ ，使得方程等价于  $Z_L(\lambda_j) = I_j$ 。有限尺寸下的粒子密度定义为  $\rho_L(\lambda) = \frac{1}{L} \frac{dI}{d\lambda} = \frac{1}{L} Z'_L(\lambda)$ 。对  $Z_L(\lambda)$  求导得到

$$\rho_L(\lambda) = \frac{1}{2\pi} p'_0(\lambda) + \frac{1}{2\pi L} \sum_{k=1}^N K(\lambda - \lambda_k) \quad K(\lambda) = \theta'(\lambda)$$

推导有限尺寸修正的核心在于处理求和项  $S(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^N K(\lambda - \lambda_k)$ 。将求和变量转换到等间距的量子数  $I_k$  上，即令  $x_k = I_k/L$ ，并定义函数  $F(x) = K(\lambda - \lambda(x))$ 。对  $\sum_k F(x_k)$  应用欧拉-麦克劳林公式展开至  $1/L^2$  阶，得到

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \rho_L(\mu) d\mu + \frac{1}{2L} [K(\lambda - \Lambda) - K(\lambda + \Lambda)] \\ &\quad + \frac{1}{12L^2 \rho_L(\Lambda)} [K'(\lambda - \Lambda) - K'(\lambda + \Lambda)] + O(L^{-3}) \end{aligned}$$

这里利用了基态的对称性  $\rho_L(-\Lambda) = \rho_L(\Lambda)$ 。将此展开式代回  $\rho_L(\lambda)$  的表达式中，得到包含有限尺寸修正的密度方程：

$$\begin{aligned}\rho_L(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \rho_L(\mu) d\mu \\ = \frac{1}{2\pi} p'_0(\lambda) + \frac{1}{4\pi L} [K(\lambda - \Lambda) - K(\lambda + \Lambda)] \\ + \frac{1}{24\pi L^2 \rho_L(\Lambda)} [K'(\lambda - \Lambda) - K'(\lambda + \Lambda)] + O(L^{-3})\end{aligned}$$

在固定粒子数密度  $N/L$  的条件下，边界  $\Lambda$  自身也会随  $L$  变化，其修正  $\Lambda = \Lambda_\infty + O(1/L)$  会使得上述方程中的  $1/L$  阶项被抵消。经过细致的边界移动分析后，主导的有限尺寸修正项来自  $1/L^2$  阶部分，最终得到简化后的有限尺寸密度方程：

$$\rho_L(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \rho_L(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} p'_0(\lambda) + \frac{1}{48\pi L^2 \rho(\Lambda)} [K'(\lambda - \Lambda) - K'(\lambda + \Lambda)] + O(L^{-3})$$

为了求解密度修正，将总密度分解为热力学极限部分与修正部分： $\rho_L(\lambda) = \rho(\lambda) + \rho^{(1)}(\lambda)$ ，其中  $\rho^{(1)} = O(L^{-2})$ 。热力学极限密度  $\rho(\lambda)$  满足方程  $\rho(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int K(\lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} p'_0(\lambda)$ 。将分解代入有限尺寸方程，并减去热力学极限方程，得到关于  $\rho^{(1)}$  的线性积分方程：

$$\rho^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \rho^{(1)}(\mu) d\mu = \frac{1}{48\pi L^2 \rho(\Lambda)} [K'(\lambda - \Lambda) - K'(\lambda + \Lambda)]$$

此方程的形式解可以通过引入积分算符的预解来表示。定义线性算符  $\mathcal{K}$  满足  $(\mathcal{K}f)(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) f(\mu) d\mu$ ，则方程可写为  $(1 + \mathcal{K})\rho^{(1)} = \text{源}(\lambda)$ 。假设算符  $(1 + \mathcal{K})$  可逆（对于所考虑的 *Bethe Ansatz* 可积模型通常成立），定义其预解核  $U_\Lambda(\lambda, \mu)$  为  $(1 + \mathcal{K})^{-1}$  的积分核，满足方程  $U_\Lambda(\lambda, \mu) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \nu) U_\Lambda(\nu, \mu) d\nu = \delta(\lambda - \mu)$ 。于是，密度修正的形式解为：

$$\rho^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{48\pi L^2 \rho(\Lambda)} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_\Lambda(\lambda, \mu) [K'(\mu - \Lambda) - K'(\mu + \Lambda)] d\mu$$

这个表达式清晰地显示了有限尺寸修正如何由一个来自边界  $\pm\Lambda$  的源项，通过系统的线性响应函数（即  $U_\Lambda$ ）传播到整个快度空间。核  $U_\Lambda$  具有重要的对偶性质，例如它与缀饰能量  $\varepsilon(\lambda)$  的关系满足  $\varepsilon(\lambda) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_\Lambda(\lambda, \mu) \epsilon_0(\mu) d\mu$ ，这一性质将在后续计算能量修正时起到关键作用。物理上，这一系列推导表明，有限尺寸效应源于费米边界处根的量子涨落，这些涨落通过两体散射过程影响整个系统的状态，最终以  $1/L$  的尺度修正宏观热力学量。

同时，我们有缀饰能量的定义方程：

$$\varepsilon(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \nu) \varepsilon(\nu) d\nu = \epsilon_0(\lambda)$$

其中  $K(\lambda) = \theta'(\lambda)$  是散射相位的导数。其次，引入格林函数（或称预解核） $U_\Lambda(\lambda, \mu)$ ，它定义为线性算符  $(1 + \mathcal{K})^{-1}$  的积分核，满足以下积分方程：

$$U_\Lambda(\lambda, \mu) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \nu) U_\Lambda(\nu, \mu) d\nu = \delta(\lambda - \mu)$$

这里算符  $\mathcal{K}$  定义为  $(\mathcal{K}f)(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \nu) f(\nu) d\nu$ 。方程写成紧凑的算符形式：

$$(1 + \mathcal{K})\varepsilon = \epsilon_0$$

由于  $U_{\Lambda}$  是  $(1 + \mathcal{K})$  的逆算符的核，形式上有：

$$\varepsilon = (1 + \mathcal{K})^{-1} \epsilon_0$$

将逆算符用其积分核表示，即得：

$$\varepsilon(\mu) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} U_{\Lambda}(\lambda, \mu) \epsilon_0(\lambda) d\lambda.$$

这正是所要证明的恒等式。若不借助算符语言，可以直接验证。定义函数  $g(\mu) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda) U_{\Lambda}(\lambda, \mu) d\lambda$ 。计算  $g(\mu)$  加上  $\mathcal{K}$  作用后的结果：

$$g(\mu) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\mu - \nu) g(\nu) d\nu = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda) \left[ U_{\Lambda}(\lambda, \mu) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\mu - \nu) U_{\Lambda}(\lambda, \nu) d\nu \right] d\lambda.$$

利用核  $U_{\Lambda}$  所满足的方程，并注意到通常散射核  $K$  的对称性，方括号内的表达式等于  $\delta(\lambda - \mu)$ 。因此，

$$g(\mu) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\mu - \nu) g(\nu) d\nu = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \epsilon_0(\lambda) \delta(\lambda - \mu) d\lambda = \epsilon_0(\mu).$$

这表明  $g(\mu)$  满足与  $\varepsilon(\mu)$  完全相同的线性积分方程。由于该方程在给定边界  $\Lambda$  下解唯一，故必有  $g(\mu) = \varepsilon(\mu)$ ，同样证得该恒等式。

该等式的物理意义在于，缀饰能量  $\varepsilon$  可以理解为裸能量  $\epsilon_0$  在多体散射背景下的“传播”或“缀饰”结果，而传播子正是格林函数  $U_{\Lambda}$ ，它编码了系统由于粒子间相互作用而产生的集体效应。

#### 4.4 Appendix B.4

首先进行 *Jordan-Wigner* 变换，将格点自旋映射为费米子：

$$S_j^+ = c_j^\dagger \exp\left(i\pi \sum_{l < j} c_l^\dagger c_l\right), \quad S_j^z = c_j^\dagger c_j - \frac{1}{2}.$$

其中的字符串因子保证了费米子间的反交换关系。接下来引入连续极限与慢变场展开。定义连续坐标  $x = ja$ ，并将格点费米子替换为连续场  $c_j \rightarrow \sqrt{a}c(x)$ 。在半填充条件下，费米波矢为  $k_F = \pi/(2a)$ ，对费米场进行线性化展开：

$$c(x) \approx e^{ik_F x} \psi_R(x) + e^{-ik_F x} \psi_L(x),$$

其中  $\psi_R(x)$  和  $\psi_L(x)$  是右移和左移的慢变场。对这两个慢变场进行玻色化：

$$\psi_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{+i\sqrt{4\pi}\phi_R(x)}, \quad \psi_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_L(x)}.$$

为方便起见，定义总玻色场和对偶场：

$$\phi = \phi_L + \phi_R, \quad \theta = \phi_L - \phi_R.$$

现在推导纵向自旋算符  $S^z$  的玻色化形式。 $S^z$  的贡献分为平滑部分和振荡部分。平滑部分来自左右移费米子的密度之和, 考虑到相互作用的影响, 引入 *Luttinger* 参数  $K$  进行修正, 归一化后的平滑部分为:

$$\rho_{\text{smooth}}(x) = \psi_R^\dagger \psi_R + \psi_L^\dagger \psi_L = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi \rightarrow \sqrt{\frac{K}{2\pi}} \partial_x \phi.$$

振荡部分来自  $2k_F$  的密度波项:

$$\rho_{\text{osc}}(x) = \psi_R^\dagger \psi_L e^{-2ik_F x} + \psi_L^\dagger \psi_R e^{2ik_F x}.$$

将玻色化公式代入, 注意此时需要计入相互作用修正, 得到:

$$\psi_R^\dagger \psi_L \sim \frac{1}{2\pi a} e^{-i\sqrt{4\pi K}\phi}, \quad \psi_L^\dagger \psi_R \sim \frac{1}{2\pi a} e^{i\sqrt{4\pi K}\phi}.$$

合并后得:

$$\rho_{\text{osc}}(x) = \frac{1}{2\pi a} \left[ e^{-i2k_F x} e^{-i\sqrt{4\pi K}\phi} + e^{i2k_F x} e^{i\sqrt{4\pi K}\phi} \right] = \frac{1}{\pi a} \cos(2k_F x + \sqrt{4\pi K}\phi).$$

注意括号里的原始项是  $2k_F x + \sqrt{4\pi K}\phi$ 。对于半填充的格点模型, 由于  $2k_F x = 2 \cdot \frac{\pi}{2a} \cdot ja = \pi j$ , 因此:

$$\cos(2k_F x + \sqrt{4\pi K}\phi) = \cos(\pi j + \sqrt{4\pi K}\phi) = (-1)^j \cos(\sqrt{4\pi K}\phi).$$

有些教材中写作  $(-1)^j \sin(\sqrt{4\pi K}\phi)$ , 这仅是相差  $\pi/2$  相位的不同约定。综合平滑项和振荡项, 得到纵向自旋算符的最终玻色化形式:

$$S^z(x) = \sqrt{\frac{K}{2\pi}} \partial_x \phi - C(-1)^j \cos(\sqrt{4\pi K}\phi).$$

接下来推导横向自旋算符  $S^\pm$ 。以  $S^+$  为例, 其 *Jordan-Wigner* 表示为:

$$S^+(x) = c^\dagger(x) \exp\left(i\pi \int^x \rho(y) dy\right).$$

指数中的弦算符在连续极限下化为:

$$\int^x \rho(y) dy \approx \int^x \sqrt{\frac{K}{2\pi}} \partial_y \phi dy = \sqrt{\frac{K}{2\pi}} \phi(x).$$

费米场部分  $c^\dagger(x)$  来自线性化展开中的两项:

$$c^\dagger(x) \sim e^{-ik_F x} \psi_R^\dagger + e^{ik_F x} \psi_L^\dagger.$$

将玻色化公式代入, 并合并所有指数因子, 经过计算 (主要利用  $\phi$  和  $\theta$  的关系以及顶点算符的代数), 最终得到:

$$S^+(x) \sim (-1)^j e^{+i\sqrt{\pi/K}\theta(x)}, \quad S^-(x) \sim (-1)^j e^{-i\sqrt{\pi/K}\theta(x)}.$$

这里  $(-1)^j$  因子同样源于  $e^{\pm ik_F x}$  在格点上的取值。