Drude weight

单原子气体中的弹道粒子运输与德鲁德权重

参考：Frank Gohmann 等

气体中的粒子运输与德鲁德权重

考虑含有 N 个非相对论粒子的 d 维单原子气体，其正则坐标与正则动量分别为 x_j,p_k，其间的相互作用用 $U(x)$ 来刻画，为了简便起见，设粒子质量 $m = 1/2$，因此系统的哈密顿量为：

$$H = \sum_{j=1}^{N} ||p_j||^2 + \sum_{1\le j<k\le N} U(x_j - x_k) \tag{1}$$

利用哈密顿正则方程/海森堡运动方程，$\dot{x_j} = i[H, x_j] = 2p_j$, 质心动量为 $P = \sum_{j=1}^{N} p_j$，定义粒子流 $J = \sum_{j=1}^{N}$，因此在该气体中，二者是成正比的，即：

$$J = 2P \tag{2}$$

同时，哈密顿量是具有平移不变性的，因此粒子流是守恒的，即:$[H, J] = 0$。这极大简化了模型，通过以上公式，代入 Appendix B 有关线性响应的公式，我们可以得到：

$$\Sigma^{\alpha}_{\beta}(w) = \frac{4\langle P_\beta P^\alpha\rangle_T}{T}(\pi\delta(w) - \mathcal{P}\frac{i}{w}) \tag{3}$$

式中 $\mathcal{P}$ 是积分主值，P^α 为总动量，对于旋转不变性的势能 U, 我们可以得到：

$$\langle P_\beta P^\alpha\rangle_T = \delta^\alpha_\beta \frac{\langle P_\gamma P^\gamma\rangle_T}{d} \tag{4}$$

因此，电导率张量的实部为：

$$Re\Sigma^\alpha_\beta(w) = \frac{4\pi\langle P_\gamma P^\gamma\rangle_T}{Td}\delta^\alpha_\beta\delta(w) \tag{5}$$

该电导率张量在气体中是各向同性的，从物理上讲，其还是一个广延量。因此通过取迹，除以体积求极限，可以得到比电导率：

$$\sigma(w) = \lim_{V\to\infty}\frac{tr\{\Sigma(w)\}}{V} \tag{6}$$

通过公式 (5)，我们可以得到：

$$Re\{\sigma(w)\} = \Delta\delta(w) \qquad \Delta = \lim_{V\to\infty}\frac{4\pi\langle P_\gamma P^\gamma\rangle_T}{VT} \tag{7}$$

其中，Δ 称为德鲁德权重。在线性响应范围内，气体中粒子运输是各向同性且纯弹道性的，考虑时间域中的对应线性关系其含义会更清楚：

$$\lim_{V\to\infty}\frac{\delta(J)_T(t)}{V} = \frac{\Delta}{\pi d}\int_{-\infty}^{t} dt' F(t') \tag{8}$$

德鲁德权重正比于 $\langle P_\gamma P^\gamma\rangle_T$，可以理解为总动量涨落的平方，而后者通常与粒子数成正比，我们预测 $\langle P_\gamma P^\gamma\rangle_T/V$ 与气体粒子密度成正比。

Problem 1: 德鲁德权重的证明

对于正则方程 $\dot{x_j}=\frac{\partial H}{\partial p_j}$，对与系统给定的哈密顿量（1）不难推出（2）式子；如果采用运动方程，由于正则对易关系，亦可推出。而系统的哈密顿量具备平移不变性，粒子流正比于总动量，因此其为守恒量。均匀力场下的粒子流响应可参考 Appendix A 中的久保公式：

$$\Sigma_\beta^\alpha(w)=\int_0^\infty dte^{-iwt}\int_0^{1/T}d\lambda\langle J_\beta(-i\lambda)J^\alpha(t)\rangle_T \qquad \delta J^\alpha(w)=\Sigma_\beta^\alpha(w)F_F^\beta(w)$$

代入 $J=2P$, 且 $[H,J]=0$, 则流-流关联函数简化为：

$$\langle J_\beta(-i\lambda)J^\alpha(t)\rangle_T=4\langle P_\beta P^\alpha\rangle_T$$

代回到久保公式, 注意到积分 $\int_0^\infty dte^{-iwt}$ 在 $w=0$ 处发散，因此需要引入一个收敛因子 $\epsilon\to 0^+$，使得积分变为：

$$\int_0^\infty e^{-iwt-\epsilon t}=\frac{1}{iw+\epsilon}$$

取极限，利用分布理论可得（高数好像有讲柯西主值?)：

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{iw+\epsilon}=\pi\delta(w)-i\mathcal{P}(\frac{1}{w}) \qquad \mathcal{P}(\frac{1}{w})=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{w}{w^2+\epsilon^2}$$

总结以上内容代入久保公式即可得公式（3）. 而对于旋转不变性（各向同性)，动量关联函数需满足：

$$\langle P_\beta P^\alpha\rangle_T=C\delta_\beta^\alpha=\delta_\beta^\alpha\frac{\langle P_\gamma P^\gamma\rangle_T}{d}$$

如果我们将坐标轴旋转 90 度，那么 $x\to y, y\to -x$，在这种情况下要保证旋转不变性只能选择让非对角元为 0；同时旋转不变性要求其为各向同性张量，加之在各个方向上 $\langle P_i^2\rangle_T$ 相同，因此 $\langle P^2\rangle_T=\sum_\alpha\langle P_\alpha^2\rangle_T$, 所以系数为 $\frac{\langle P_\gamma P^\gamma\rangle_T}{d}$.

应用到一维点相互作用的玻色气体

对于一维点相互作用气体，$d=1$ 且 $U(x)=c\delta(x)$, 因此该情况下德鲁德重量为：

$$\Delta=\frac{4\pi}{T}\lim_{L\to\infty}\frac{\langle P^2\rangle_T}{L} \tag{9}$$

其中 L 为系统的长度。定义广义巨正则势：

$$\Phi(T,\mu,\gamma)=-\lim_{L\to\infty}\frac{T}{L}\ln Z_L \tag{10}$$

其中配分函数为 $Z_L=tr\{e^{-\frac{H}{T}+\frac{\mu\hat{N}}{T}+\frac{\gamma P}{T}}\}$，对于该定义。代入 $\langle P\rangle_T=0$，可以得到：

$$\Delta=-4\pi\partial_\gamma^2\Phi|_{\gamma=0} \tag{11}$$

当然利用前一节的结果，玻色气体的巨热力学势也可以用 Yang-Yang 方程来表述：

$$\Phi(T,\mu,\gamma)=-\frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dq\ln\left(1+e^{-\frac{\varepsilon(q|T,\mu,\gamma)}{T}}\right) \tag{12}$$

其中：

$$\varepsilon(k|T,\mu,\gamma)=k^2-\gamma k-\mu-T\int_{-\infty}^{\infty}dqK(k-q)\ln{(1+e^{-\frac{\varepsilon(q|T,\mu,\gamma)}{T}})} \tag{13}$$

积分核为 $K(k)=\frac{c}{\pi(c^2+k^2)}$, γ 是动量守恒的拉格朗日乘子。通过 Yang-Yang 方程，我们可以联系

$$\varepsilon(k+\frac{\gamma}{2}|T,\mu,\gamma)=\varepsilon(k|T,\mu+\frac{\gamma^2}{4},0) \tag{14}$$

同时也会有：

$$\Phi(T,\mu,\gamma)=\Phi(T,\mu+\frac{\gamma^2}{4},0) \tag{15}$$

因此:

$$-\partial_\gamma^2\Phi(T,\mu,\gamma)|_{\gamma=0}=-\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi(T,\mu,0)=\frac{D}{2} \tag{16}$$

其中 D 为气体的密度，最后我们可以得德鲁德权重为：

$$\Delta=2\pi D=2k_F \tag{17}$$

k_F 为费米速度。

Problem 2: 推导

定义的广义巨正则势，注意动量的热力学平均值为：

$$\langle P\rangle_T=\frac{tr(Pe^{-\frac{H}{T}+\frac{\mu\hat{N}}{T}+\frac{\gamma P}{T}})}{Z_L}$$

我们对 Φ 参数 γ 求导：

$$\partial_\gamma\Phi=-\lim_{L\to\infty}\frac{T}{L}\frac{\partial_\gamma Z_L}{Z_L}=-\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\langle P\rangle_T$$

在 $\gamma=0$ 时，$\langle P\rangle_T=0$，现在求二阶导：

$$\partial_\gamma^2\Phi=-\lim_{L\to\infty}\frac{T}{L}[\frac{\partial_\gamma^2 Z_L}{Z_L}-(\frac{\partial_\gamma Z_L}{Z_L})^2]=-\lim_{L\to\infty}\frac{1}{TL}\langle P^2\rangle_T$$

注意以上计算是在 $\gamma=0$ 情况下，代回到德鲁德权重，可以得到：

$$\Delta=-4\pi\partial_\gamma^2\Phi|_{\gamma=0}$$

而后，我们利用前文 Yang-Yang 方程的结果 (12)(13), 加入动量守恒的拉格朗日乘子，对于缀饰能量，与巨正则势能，由于公式（11）是在 $\gamma=0$ 情况下的求导，因此可以通过作平移变换使得其他项不变而后得到，从公式（15）出发，进行泰勒展开：

$$\Phi(T,\mu,\gamma)=\Phi(T,\mu,0)+\gamma\partial_\gamma\Phi|_{\gamma=0}+\frac{\gamma^2}{2}\partial_\gamma^2\Phi|_{\gamma=0}+O(\gamma^3)$$
$$=\Phi(T,\mu+\frac{\gamma^2}{4},0)=\Phi(T,\mu,0)+\frac{\gamma^2}{4}\partial_\mu\Phi(T,\mu,0)+O(\gamma^4)$$

对比两边，结合前面 $\partial_\gamma\Phi=0$，可以得到：

$$\partial_\gamma^2\Phi(T,\mu,\gamma)|_{\gamma=0}=\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi(T,\mu,0)$$

而对于巨正则势，对化学势的导数给出粒子数密度 $D=-\partial_\mu\Phi(T,\mu,0)$，同时一维玻色气体中密度与费米动量的关系为：$D=\frac{k_F}{\pi}$, 总结可得：

$$\Delta=2\pi D=2k_F$$

对比通过 GHD 推得的德鲁德权重

我们也可以换一种方式处理公式（11）右边项, 代入公式（12）:

$$\partial_\gamma^2\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\{\frac{\partial_\gamma^2\varepsilon(q)}{1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}} - \frac{(\partial_\gamma^2\varepsilon(q))^2 e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}}{T(1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}})^2}\} \tag{18}$$

通过广义 Yang-Yang 方程 (13)，我们可以推得：

$$\partial_\mu\varepsilon(k) = -1 + \int_{-\infty}^{\infty} dqK(k-q)\frac{\partial_\mu\varepsilon(q)}{1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}} \tag{19.a}$$

$$\partial_\gamma^2\varepsilon(k) = -\int_{-\infty}^{\infty} dqK(k-q)\frac{(\partial_\gamma\varepsilon(q))^2 e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}}{T(1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}})^2} + \int_{-\infty}^{\infty} dqK(k-q)\frac{\partial_\gamma^2\varepsilon(q)}{1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}} \tag{19.b}$$

将重整化能量公式代入 (19.a) 积分项，得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq\frac{\partial_\gamma^2\varepsilon(q)}{1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}} = \int_{-\infty}^{\infty} dq\frac{(\partial_\gamma\varepsilon(q))^2 e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}}{T(1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}})^2}(\partial_\mu\varepsilon(q)+1) \tag{20}$$

代入（18）式，并引入热平衡根函数：

$$\rho(k) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial_\mu\varepsilon(k)}{1+e^{\frac{\varepsilon(k)}{T}}} \tag{21}$$

这最终得到：

$$-4\pi\partial_\gamma^2\Phi = \frac{\pi}{T}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{\rho(k)(2\partial_\gamma\varepsilon(k))^2}{1+e^{-\frac{\varepsilon(k)}{T}}} \tag{22}$$

引入定义：$v^{eff}(k) = \frac{2\partial_\gamma\varepsilon(k)}{\partial_\mu\varepsilon(k)}$ 可得：

$$-4\pi\partial_\gamma^2\Phi = \frac{\pi}{T}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{\rho(k)(v^{eff}(k))^2(\partial_\mu\varepsilon(k))^2}{1+e^{-\frac{\varepsilon(k)}{T}}} \tag{23}$$

> **Problem 3:** 计算与说明
>
> 对于公式（20），我们将 (19.A)(19.B) 公式左右乘 $\frac{1}{1+e^{\frac{\varepsilon(k)}{T}}}$, 并对 k 积分，得到结果为：
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{\partial_\mu\varepsilon(k)}{1+e^{\frac{\varepsilon(k)}{T}}} = -\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{1}{1+e^{\frac{\varepsilon(k)}{T}}} + \int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{1}{1+e^{\frac{\varepsilon(k)}{T}}}\int_{-\infty}^{\infty} dqK(k-q)\frac{\partial_\mu\varepsilon(q)}{1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}}$$
>
> 定义 $H(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dqK(k-q)\frac{1}{1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}}$, 并在积分项交换 k, q, 上式变为：
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{\partial_\mu\varepsilon(k)+1}{1+e^{\frac{\varepsilon(k)}{T}}} = \int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{\partial_\mu\varepsilon(k)}{1+e^{\frac{\varepsilon(k)}{T}}}H(k)$$
>
> 得出：
>
> $$H(k) = \frac{\partial_\mu\varepsilon(k)+1}{\partial_\mu\varepsilon(k)}$$

而对于 (19.b) 重复上述步骤：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\partial_\gamma^2 \varepsilon(k)}{1+e^{\frac{\varepsilon(k)}{T}}} = -\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dq K(k-q) \frac{(\partial_\gamma \varepsilon(q))^2 e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}}{T(1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}})^2} \cdot \frac{1}{1+e^{\frac{\varepsilon(k)}{T}}} + \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dq K(k-q) \frac{\partial_\gamma^2 \varepsilon(q)}{1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}} \frac{1}{1+e^{\frac{\varepsilon(k)}{T}}}$$

做替换并交换 k, q 可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\partial_\gamma^2 \varepsilon(q)}{1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}} = H(q) \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\partial_\gamma^2 \varepsilon(q)}{1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}} - H(q) \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{(\partial_\gamma \varepsilon(q))^2 e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}}{T(1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}})^2}$$

代入前文关系, 化简可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\partial_\gamma^2 \varepsilon(q)}{1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{(\partial_\gamma \varepsilon(q))^2 e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}}}{T(1+e^{\frac{\varepsilon(q)}{T}})^2} (\partial_\mu \varepsilon(q) + 1)$$

将该结果代入（18）式，即得后续结果

Lieb-Liniger 模型的德鲁德权重

参考:Doyon,Spohn

有限守恒律的模型

我们从具有有限数量 (记为 m, 为最大可能数量) 局域守恒场的通用结构开始谈起，对于量子自旋链通常只有能量守恒 (m=1)，微观层面，我们考虑具有 m 个局域守恒密度 $q_j(x,t), j = 1, \ldots, m$ 的一维系统，与之相关的守恒流 $j_j(x,t)$，它们满足：

$$\partial_t q_j(x,t) + \partial_x j_j(x,t) = 0 \tag{1}$$

经典意义上二者可视为相空间上的函数，而量子力学框架下则为算子场，并具备局域性质。对于守恒律，系统因此存在一个 m 维稳态族，分布形式为 $e^{-\sum_i \beta_i \int dx q_i(x)}$, 这些稳态由拉格朗日参数 β_i 标记，或者通过守恒量的平均值表征。假设时间稳态在空间平移下不变，且初始系统处于某一时间稳态中，那么基本的动力学表现为时空稳态随机过程，或者时空不变量子场论/量子链。我们标记稳态为 $\vec{u} \in \mathcal{R}^m$, 平均值记为 $\langle \cdot \rangle_{\vec{u}}$, 由于稳态完全由守恒密度的平均值决定，即：$\langle q(x, \vec{t}) \rangle u = \vec{u}$，与 x, t 无关。记关联平均值为：$\langle ab \rangle_{\vec{u}}^c = \langle ab \rangle_{\vec{u}} - \langle a \rangle_{\vec{u}} \langle b \rangle_{\vec{u}}$，对于守恒流，也有 $\langle \vec{j}(x,t) \rangle_{\vec{u}} = \vec{j}(\vec{u})$。

任何初始态若在局域中近似于一稳态，且在时间演化中保持这一性质。在此情况下时空中的状态可视为局部平稳且均匀的，因而可以被时空函数 $\vec{u}(x,t)$ 完全表征，这是一个普遍的热力学近似。在此近似下，描述局域态的参数由系统的宏观守恒律方程组控制：

$$\partial_t \vec{u}(x,t) + \partial_x \vec{j}(\vec{u}(x,t)) = 0 \tag{2}$$

回到均匀稳态问题，从统计物理角度出发，稳态下守恒场的关联函数格外重要：

$$S_{ij}(x,t) = \langle q_i(x,t) q_j(0,0) \rangle^c_{\vec{u}} \tag{3}$$

固定的参数 $\vec{u}$ 用来表征统计时空均匀态，S_{ij} 可视为 $m \times m$ 矩阵。在对应大尺度的流体动力学角度，可以将 S_{ij} 与方程 (2) 通过线性化 $\vec{u} + \epsilon\vec{\phi}$ 联系起来：

首先获得线性化方程：

$$\partial_t \vec{\phi}(x,t) + A\partial_x \vec{\phi}(x,t) = 0 \tag{4}$$

其中 $A_{ij}(\vec{u}) = \partial_{u_j} j_i(\vec{u})$, 矩阵 A_{ij} 依赖 $\vec{u}$ 且只作用于分量空间，进一步引入静态协方差矩阵：

$$C_{ij} = \int dx S_{ij}(x,t) = \int dx S_{ij}(x,0) \tag{5}$$

以及场-流关联函数：

$$B_{ij}(\vec{u}) = \int dx \langle j_i(x,0) q_j(0,0) \rangle^c_{\vec{u}} \tag{6}$$

注意，作为 $m \times m$ 阶矩阵，可通过链式法则推得：$B = AC$。设 β_i 为均匀稳态中守恒量 $\int dx q_j(x)$ 的共轭势，即对于任何局域场 $a(x,t)$ 有：

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i} \langle a(0,0) \rangle_{\vec{u}} = \int dx \langle q_i(x,t) a(0,0) \rangle^{\epsilon}_{\vec{u}} \tag{7}$$

因此可得例如 $\partial_{\beta_i} \langle q_j \rangle_{\vec{u}} = C_{ij}$, 采用压缩记号即有 $B = \partial_{\vec{\beta}} \langle \vec{j} \rangle_{\vec{u}} = \partial_{\vec{\beta}} \langle \vec{q} \rangle \cdot \partial_{\vec{u}} \langle \vec{j} \rangle_{\vec{u}}$.

然后利用由静态协方差描绘的随机初始条件求解，这相当于对于 $\tilde{S}(x,t) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda S(\lambda x, \lambda t)$, 求解演化方程：

$$\partial_t \tilde{S}(x,t) + \partial_x (A\tilde{S}(x,t)) = 0 \tag{8}$$

以及初始条件 $\tilde{S}(x,0) = \delta(x) C$, 该初始条件与 $S(x,0)$ 的指数衰减一致，这是一维模型在严格正温度下的普遍特征，因此在流体动力学近似下，对小 k, 大 t:

$$\int dx e^{ikx} S(x,t) \simeq e^{iktA} C \tag{9}$$

需特别注意进行变量代换 $x = \lambda x', k' = \lambda k$，在取极限后 (8) 式对所有 k' 成立，因此可进行傅里叶变换得到正确的初始条件。仅基于守恒律与时空稳定性 (可通过公式（7）证明) 存在一般性关系：

$$AC = CA^T \tag{10}$$

其中 T 表示转置，由定义可得 $C = C^T$, 但是根据 $B = AC$ 以及（10）可得非平凡的对称性：$B = B^T$, 这意味着流场 $\vec{j}(\vec{u})$ 是某势函数的梯度。

Problem 4: 以上内容的说明

对于公式（1）即为量守恒定理，对于流 $j = \rho v$, 质量为 $M = \int_V \rho dV$, 体积内质量的变化率等于通过表面 S 流入的净质量，$\frac{dM}{dt} = -\oint_S j \cdot dS = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV$, 利用格林公式即为 $\partial_t \rho + \nabla j = 0$, 对应公式（1）。而配分函数是怎么来的呢？事实上对于守恒量的约束需要引入拉格朗日乘子，可以参考推导系综时对粒子数守恒与能量守恒类似的约束。线性化公式（4），在稳态附近引入扰

动，ϵ 是小量，将流函数展开至一阶，$\vec{j}(\vec{u}+\epsilon\vec{\phi}) = \vec{j}(\vec{u}) + \epsilon\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\vec{j}}{\partial u_j}\phi_j + O(\epsilon^2)$, 雅可比矩阵为 $A_{ij}(\vec{u}) = \frac{\partial j_i}{\partial u_j} \implies A(\vec{u}) = \nabla_{\vec{u}}\vec{j}(\vec{u})$, 可将展开式简化为：$\vec{j}(\vec{u}+\epsilon\vec{\phi}) = \vec{j}(\vec{u}) + \epsilon A(\vec{u})\vec{\phi}$。将结果代入（2），可得到 $\partial_t(\vec{u}+\epsilon\vec{\phi}) + \partial_x[\vec{j}(\vec{u}) + \epsilon A(\vec{u})\vec{\phi}] = 0$, 对于背景态均匀且稳态，方程简化为：$\partial_t\vec{\phi} + \partial_x(A\vec{\phi}) = 0$. 对于公式（7），注意前文提到 $\rho \propto e^{-\sum_j \beta_j q_j}$, 因此任何局域场的平均值为 $\langle a(0,0)\rangle_{\vec{u}} = \frac{Tr(a(0,0)e^{-\sum_j \beta_j q_j})}{Tr(e^{-\sum_j \beta_j q_j})}$, 记 $A = Tr(a(0,0)e^{-\sum_j \beta_j q_j}), B = Tr(e^{-\sum_j \beta_j q_j})$ 将其对共轭势求导可得：

$$\frac{\partial}{\partial\beta_i}\langle a(0,0)\rangle_{\vec{u}} = \frac{A'B - B'A}{B^2} = \frac{(-\langle a(0,0)Q_i\rangle B)B - (-\langle Q_i\rangle B)A}{B^2} = -\langle a(0,0)Q_i\rangle + \rangle a(0,0)\rangle\langle Q_i\rangle$$

再利用前文关联平均值定义可得 (7) 结果。利用该结果，可得 B, C 的记号，简化过后二者可以通过雅可比行列式联系起来（链式关系），即得 $B = AC$。为什么等价于公式（8）呢？事实上，由固定扰动所激发的关联函数演化近似满足线性化方程，这里给出证明：公式（7）告诉我们守恒场与任何可观测量的静态关联函数等价于该可观测量对对应共轭势的导数，现在我们考虑可观测量是未来某个时间点，即 $a = q_i(x,t)$，代入到公式（7）中，并且由于系统具备空间平移不变性,$\langle q_i(x,t)\rangle_{\vec{u}}$ 实际上与 x 无关，其偏导是常数，其关系是平凡的。随后我们在 $t=0$ 时刻在 $x=0$ 引入局域化扰动，其只改变了一个守恒量 $Q_j = \int dx\, q_j(x)$ 的值，根据统计力学，这等价于在原点附近局部地改变其对应的共轭势 β_j。更具体地说，我们创建一个初始状态，其概率分布（或密度矩阵）不再是全局均衡的 $e^{-\sum_i \beta_i Q_i}$，而是：

$$\rho_{\text{initial}} \sim \exp\left(-\sum_i \int dx\, [\beta_i + \epsilon\delta\beta_j(x,0)]q_i(x)\right)$$

其中扰动项 $\delta\beta_j(x,0)$ 是一个在 $x=0$ 处非常尖锐的函数（例如，一个 Delta 函数 $\delta(x)$），幅度为 ϵ。根据线性响应理论，在这个扰动下，任何可观测量 A 的平均值变化为：

$$\delta\langle A(t)\rangle = \epsilon\int dx'\, \langle q_j(x',0)A(t)\rangle^c_{\vec{u}} \cdot \delta\beta_j(x',0)$$

如果我们的可观测量 A 是 q_i 在后来某个时空点 (x,t) 的值，即 $A = q_i(x,t)$，并且我们的扰动是 $\delta\beta_j(x',0) = \delta(x')$，那么响应为：

$$\delta\langle q_i(x,t)\rangle = \epsilon\int dx'\, \langle q_j(x',0)q_i(x,t)\rangle^c_{\vec{u}} \cdot \delta(x') = \epsilon\langle q_j(0,0)q_i(x,t)\rangle^c_{\vec{u}}$$

因此，我们得到：

$$\langle q_j(0,0)q_i(x,t)\rangle^c_{\vec{u}} = \frac{1}{\epsilon}\delta\langle q_i(x,t)\rangle = \frac{1}{\epsilon}\delta u_i(x,t)$$

左边的关联函数 $a_j(x,t)$ 正比于系统对一个局域扰动 $\delta\beta_j$ 的响应 $\delta\langle q_i(x,t)\rangle$。其等价于（4）中的 $\vec{\phi}$。连接起来，我们看到关联函数 $a_j(x,t) = \langle q_j(0,0)q_i(x,t)\rangle^c_{\vec{u}}$ 衡量的是 q_i 在 (x,t) 的响应。前文我们论证了这个响应（即守恒量的偏差 $\delta\vec{u}$）的演化由线性方程 (4) 支配。因此，由 $q_j(0,0)$ 这个局域扰动所"激发"的整个响应剖面 $\delta\vec{u}(x,t)$，其时间演化近似遵循方程 (4)。由于 $a_j(x,t)$ 是这个响应剖面的第 i 个分量（$\delta u_i(x,t)$），它自然也近似满足同一个方程：

$$\boxed{\partial_t a_j(x,t) + A\partial_x a_j(x,t) \approx 0}$$

在流体动力学尺度下（大 x,t），关联函数 $S(x,t)$ 的行为由线性化方程控制。引入尺度变换：空间和时间放大 λ 倍（$\lambda\to\infty$）：$x'=\lambda x,\quad t'=\lambda t$. 定义缩放后的关联函数：

$$\tilde{S}(x,t)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda S(\lambda x,\lambda t).$$

乘以 λ 是为了保持积分不变（因积分区间缩小 λ 倍）。守恒场 $q_i(x,t)$ 的演化由线性方程 (2.6) 近似描述。对固定 j，定义函数：$a_j(x,t)=\langle q_i(x,t)q_j(0,0)\rangle_{\mathrm{u}}^{\mathrm{c}}$. 由于 $q_j(0,0)$ 固定，$a_j(x,t)$ 近似满足：$\partial_t a_j(x,t)+A\partial_x a_j(x,t)\approx 0$. 推广到矩阵形式（对所有 i,j）：

$$\partial_t S(x,t)+A\partial_x S(x,t)\approx 0$$

定义中间函数 $S^{(\lambda)}(x',t')=S(\lambda x,\lambda t)$。方程在尺度变换下形式不变：

$$\partial_{t'}S^{(\lambda)}(x',t')+A\partial_{x'}S^{(\lambda)}(x',t')\approx 0.$$

代入缩放函数 $\tilde{S}(x,t)=\lambda S^{(\lambda)}(\lambda x,\lambda t)$：

$$\partial_t\tilde{S}(x,t)=\lambda^2\partial_{t'}S^{(\lambda)}(\lambda x,\lambda t),\quad \partial_x\tilde{S}(x,t)=\lambda^2\partial_{x'}S^{(\lambda)}(\lambda x,\lambda t).$$

方程变为：

$$\partial_t\tilde{S}(x,t)+A\partial_x\tilde{S}(x,t)\approx 0$$

由于 A 是常数矩阵（均匀背景），$\partial_x A=0$，因此 $\partial_x(A\tilde{S})=A\partial_x\tilde{S}$. 故等价于：

$$\boxed{\partial_t\tilde{S}(x,t)+\partial_x\left(A\tilde{S}(x,t)\right)=0}$$

当 $t=0$ 时：$\tilde{S}(x,0)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda S(\lambda x,0)$. 静态关联函数 $S(x,0)$ 满足：$\int dx S(x,0)=C$. 在流体动力学极限下（$\lambda\to\infty$），缩放后的初始条件为狄拉克函数：$\tilde{S}(x,0)=\delta(x)C$. 而对于 $\int dx e^{ikx}S(x,t)\simeq e^{iktA}C$（在流体动力学近似下：小 k，大 t）。定义 $\tilde{S}(x,t)$ 的傅里叶变换：$\hat{\tilde{S}}(k,t)=\int dx e^{ikx}\tilde{S}(x,t)$. 对公式两边做傅里叶变换：$\int dx e^{ikx}\left[\partial_t\tilde{S}+\partial_x(A\tilde{S})\right]=0$. 交换积分与导数：$\partial_t\hat{\tilde{S}}(k,t)+\int dx e^{ikx}\partial_x(A\tilde{S})=0$. 对第二项分部积分（假设边界项为零）：

$$\int dx e^{ikx}\partial_x(A\tilde{S})=-ikA\int dx e^{ikx}\tilde{S}(x,t)=-ikA\hat{\tilde{S}}(k,t).$$

得到常微分方程：$\partial_t\hat{\tilde{S}}(k,t)-ikA\hat{\tilde{S}}(k,t)=0$. 方程的解为矩阵指数：$\hat{\tilde{S}}(k,t)=e^{iktA}\hat{\tilde{S}}(k,0)$.
初始条件 $\hat{\tilde{S}}(k,0)$：$\hat{\tilde{S}}(k,0)=\int dx e^{ikx}\tilde{S}(x,0)=\int dx e^{ikx}\delta(x)C=C$. 因此：$\hat{\tilde{S}}(k,t)=e^{iktA}C$. 原始关联函数 $S(x,t)$ 的傅里叶变换为：

$$\hat{S}(k,t)=\int dx e^{ikx}S(x,t).$$

通过缩放关系：

$$\hat{S}(k,t)=\hat{\tilde{S}}(k\lambda,t/\lambda)$$ （见下文证明）.

代入：

$$\hat{S}(k,t)=\hat{\tilde{S}}(k\lambda,t/\lambda)=e^{i(k\lambda)(t/\lambda)A}C=e^{iktA}C.$$

在流体动力学极限（$\lambda \to \infty$，固定 k 和 t）下：

$$\boxed{\int dx e^{ikx} S(x,t) \simeq e^{iktA} C}$$

且 $\hat{S}(k,t) = \hat{\tilde{S}}(k\lambda, t/\lambda)$. 左边：$\hat{S}(k,t) = \int dx e^{ikx} S(x,t)$. 右边：$\hat{\tilde{S}}(k\lambda, t/\lambda) = \int dx e^{i(k\lambda)x} \tilde{S}(x, t/\lambda) = \int dx e^{ik\lambda x} \cdot \lambda S(\lambda x, t)$. 换元 $x' = \lambda x$（即 $dx = dx'/\lambda$）：

$$\hat{\tilde{S}}(k\lambda, t/\lambda) = \int \frac{dx'}{\lambda} e^{ikx'} \lambda S(x',t) = \int dx' e^{ikx'} S(x',t) = \hat{S}(k,t).$$

传统上，德鲁德权重定义为：

$$D_{ij} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' \int dx \langle j_j(x,t') j_i(0,0)\rangle^c_{\underline{u}} = \lim_{t\to\infty} \int dx \langle j_j(x,t) j_i(0,0)\rangle^c_{\underline{u}} \tag{11}$$

假设极限存在，可将其视作内积 $\langle a|b\rangle = \int dx \langle a(x) b(0)\rangle^c_{\underline{u}}$ 的表达式，其中 $a(x), b(x)$ 为统计平移不变的随机场。守恒场在此内积下属于时间不变子空间，若守恒场完备且动力学充分混合，则时间不变子空间由所有守恒总张量场张成，此时 $t \to \infty$ 极限即投影到该子空间，称此步骤为流体动力学投影，由（11）可得长时间极限为：

$$D_{ij} = \sum_{i',j'=1}^{m} \langle j_i | q_{i'}\rangle (C^{-1})_{i',j'} \langle q_{j'} | j_j\rangle \tag{12}$$

其中，逆算符用于归一化投影，利用（6）可将德鲁德权重矩阵表示为：

$$D = BC^{-1}B = ACA^T \tag{13}$$

对于 Lieb-Liniger 模型，处理（11）这样的公式难以实现，但（13）仅涉及静态期望值，因此比处理长时间极限更简便，关联函数 $S(x,t)$ 满足二阶矩求和规则：

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int dx x^2 \frac{1}{2}(S(x,t) + S(x,t)^T) = D \tag{14}$$

这是守恒律的直接结果，因此德鲁德权重可量化初始局域扰动以何种速率通过弹道方式传播。

另一相关量为时间积分的自电流关联（自指相同参考点下，例如平移不变下的 $x = 0$）：

$$D^s_{ij} = \int dt \langle j_i(0,t) j_j(0,0)\rangle^c_{\underline{u}} \tag{15}$$

此即系统左右半区电荷转移协方差矩阵的长时间极限（介观物理称为零噪声），称为德鲁德自权重，其对角元 D^s_{ii} 为非平衡输运大偏差理论中的标度二阶积累量，其亦满足求和规则：

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int dx |x| \frac{1}{2}[S(x,t) + S(x,t)^T] = D^s \tag{16}$$

Problem 5: 德鲁德权重的意义

公式（11）的定义从直观上来看是无限长时间下总电流涨落的平均，如果结果不为 0，则表示系统在没有耗散机制的情况下任然可以维持一个恒定的电流，是一种理想的无耗散导电行为，

而不可积系统中电流关联函数随时间衰减至 0，输运由扩散过程主导。其定义式是久保公式在长时间下的直接结果，德鲁德权重是电导率奇点部分的强度。公式（12）利用了投影算符 $\mathbb{P} = \sum_{i,j} |P_{i'}\rangle (C^{-1})_{i',j'} \langle q_{j'}|$, 应用投影，$D_{i,j} = \langle \mathbb{P} j_i | \mathbb{P} j_j \rangle = \langle j_i | \mathbb{P} j_j \rangle$, 即得公式（12），这里注意 $\mathbb{P}$ 是厄米算符，且是幂等算符。处理后利用前文关系可得（13）。二阶矩求和规则，定义二阶矩为 $M_{ij}(t) = \int dx x^2 S_{ij}(x,t)$，利用守恒律 $\partial_t q_i + \partial_x j_i = 0$, 对关联函数求导可得：$\partial_t S_{ij}(x,t) = -\partial_x \langle j_i(x,t) q_j(0,0)\rangle = -\partial_x G_{ij}(x,t)$, 其中场流关联函数为 $G_{ij}(x,t) = \langle j_i(x,t) q_j(0,0)\rangle$。分别计算二阶矩的时间导数, 利用分部积分结果为：

$$\frac{d}{dt} M_{ij}(t) = -\int dx x^2 \partial_x G_{ij}(x,t) = \int dx 2x G_{ij}(x,t)$$
$$\frac{d^2}{dt^2} M_{ij}(t) = 2 \int dx\, x \partial_t G_{ij}(x,t)$$

利用场-流关联函数的时间演化。根据时空平移不变性，有：

$$\partial_t G_{ij}(x,t) = -\partial_x \langle j_i(x,t) j_j(0,0)\rangle^c_{\vec{u}}$$

定义电流-电流关联函数：$J_{ij}(x,t) = \langle j_i(x,t) j_j(0,0)\rangle^c_{\vec{u}}$, 则有：

$$\frac{d^2}{dt^2} M_{ij}(t) = -2 \int dx\, x \partial_x J_{ij}(x,t)$$

再次使用分部积分：

$$\frac{d^2}{dt^2} M_{ij}(t) = 2 \int dx\, J_{ij}(x,t)$$

对二阶时间导数积分两次：

$$\frac{d}{dt} M_{ij}(t) = \frac{d}{dt} M_{ij}(0) + 2 \int_0^t dt' \int dx\, J_{ij}(x,t')$$

$$M_{ij}(t) = M_{ij}(0) + t \frac{d}{dt} M_{ij}(0) + 2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \int dx\, J_{ij}(x,t'')$$

假设初始关联是局域的，因此 $M_{ij}(0)$ 和 $\frac{d}{dt} M_{ij}(0)$ 是有限的。当 $t \to \infty$ 时，主导项是：

$$M_{ij}(t) \sim 2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \int dx\, J_{ij}(x,t'')$$

改变积分次序：

$$M_{ij}(t) \sim 2 \int_0^t dt'' (t - t'') \int dx\, J_{ij}(x,t'')$$

因此：

$$\frac{M_{ij}(t)}{t^2} \sim \frac{2}{t^2} \int_0^t dt'' (t - t'') \int dx\, J_{ij}(x,t'')$$

当 $t \to \infty$ 时，根据 Drude 权重的定义：

$$\lim_{t \to \infty} \int dx\, J_{ij}(x,t) = D_{ij}$$

因此：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_{ij}(t)}{t^2}=D_{ij}$$

上述推导是针对单个分量 $S_{ij}(x,t)$ 的。为了得到对称的形式，考虑：

$$\frac{1}{2}[S_{ij}(x,t)+S_{ji}(x,t)]$$

其二阶矩为：

$$\frac{1}{2}[M_{ij}(t)+M_{ji}(t)]$$

因此：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int dx\, x^2\frac{1}{2}[S_{ij}(x,t)+S_{ji}(x,t)]=\frac{1}{2}[D_{ij}+D_{ji}]$$

由于 Drude 权重矩阵是对称的（$D=D^T$），有 $D_{ij}=D_{ji}$，所以：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int dx\, x^2\frac{1}{2}[S(x,t)+S(x,t)^T]=D$$

经典硬棒流体的德鲁德权重

硬棒流体由实数线上长度为 a 的线段组成。棒根据其速度运动，直到发生碰撞，此时它们简单地交换速度。由于给定速度的粒子数守恒，我们现在有了一个具有无限多守恒定律的例子，前提是速度分布不集中在有限的 δ 函数集上。在流体力学尺度上，基本对象是密度函数 $f(x,t;\nu)$，其中速度 $\nu\in\mathbb{R}$ 表示守恒场的标签。量 $f(x,t;\nu)\mathrm{d}x\mathrm{d}\nu$ 是体积元 $[x,x+\mathrm{d}x]\times[\nu,\nu+\mathrm{d}\nu]$ 中的棒的数量，假设在宏观尺度上很小，但仍包含许多硬棒。近似地，函数 f 满足守恒定律系统：

$$\partial_t f(\nu)+\partial_x\left(\nu^{\mathrm{eff}}_{[f]}(\nu)f(\nu)\right)=0 \tag{17}$$

下标 $[f]$ 表示有效速度 $\nu^{\mathrm{eff}}_{[f]}(\nu)$ 是 f 的非线性泛函。具体地，

$$\nu^{\mathrm{eff}}_{[f]}(\nu)=\nu+a(1-a\rho)^{-1}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}w\,(\nu-w)f(w)=\nu+\frac{a\rho(\nu-u)}{1-a\rho} \tag{18}$$

也可以写成：

$$\nu^{\mathrm{eff}}_{[f]}(\nu)=\frac{\nu-a\rho u}{1-a\rho} \tag{19}$$

Problem 6: 有效速度

考虑一个速度为 ν 的杆（称为“测试杆”），它与其他杆的碰撞会改变其路径。设背景杆的速度分布为 $f(w)$（即速度在 w 附近的杆的密度）。测试杆与速度为 w 的背景杆的相对速度为 $|\nu-w|$。碰撞率（单位时间内碰撞次数）：相对速度 $\times$ 其他杆的密度 $\times$ 几何因子。由于杆长度为 a，当测试杆与另一个杆碰撞时，它实际上“跳过”了长度为 a 的距离（因为碰撞瞬间交换速度，但宏观上相当于测试杆被推前或推后）。更精确地：当测试杆（速度 ν）与一个速度为 w 的背景杆碰撞时，碰撞导致测试杆的速度瞬间变为 w，而背景杆的速度变为 ν。但由于杆有长度，碰撞点实际上在杆的一端，因此测试杆的位置会突然改变约 a 的距离（取决于碰撞方向）。平均而言，每

次碰撞使测试杆的位置改变 $a\cdot\mathrm{sign}(\nu-w)$（即如果 $\nu>w$，测试杆超前；如果 $\nu<w$，延迟）。因此，额外速度（由于碰撞）为：

$$\text{碰撞率}\times a\cdot\mathrm{sign}(\nu-w).$$

碰撞率（单位时间内与速度为 w 的杆碰撞的次数）为：

$$|\nu-w|f(w)\,dw.$$

（因为相对速度为 $|\nu-w|$，密度为 $f(w)dw$）。
所以，由于与速度为 w 的杆碰撞带来的额外速度为：

$$a\cdot\mathrm{sign}(\nu-w)\cdot|\nu-w|f(w)\,dw=a(\nu-w)f(w)\,dw.$$

（因为 $\mathrm{sign}(\nu-w)|\nu-w|=\nu-w$）。
对所有背景杆速度积分，得到总额外速度：

$$a\int_{\mathbb{R}}(\nu-w)f(w)\,dw.$$

然而，上述推导忽略了杆的排除体积效应：由于杆有长度，实际可用于碰撞的空间减小。具体来说，杆占据的空间分数为 $a\rho$（其中 $\rho=\int f(w)dw$ 是总密度），因此有效可用空间为 $1-a\rho$。所以碰撞率应放大因子 $1/(1-a\rho)$（即分母修正）。
因此，额外速度修正为：

$$\frac{a}{1-a\rho}\int_{\mathbb{R}}(\nu-w)f(w)\,dw.$$

于是，有效速度为：

$$v^{\mathrm{eff}}(\nu)=\nu+\frac{a}{1-a\rho}\int_{\mathbb{R}}(\nu-w)f(w)\,dw.$$

注意到：

$$\int_{\mathbb{R}}(\nu-w)f(w)\,dw=\nu\int f(w)dw-\int wf(w)dw=\nu\rho-\rho u,$$

其中 $u=\frac{1}{\rho}\int wf(w)dw$ 是平均速度。
所以：

$$v^{\mathrm{eff}}(\nu)=\nu+\frac{a}{1-a\rho}(\nu\rho-\rho u)=\nu+\frac{a\rho(\nu-u)}{1-a\rho}.$$

其中平均密度和平均速度分别为：

$$\rho=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}v\,f(v),\quad u=\rho^{-1}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}v\,vf(v)\tag{20}$$

广义吉布斯系综（GGE）由某个与 x 无关的密度函数 $f(v)$ 指定。在微观上，这意味着硬棒具有均匀的密度和独立的速度，其概率密度函数为 $\rho^{-1}f(v)$。这种背景 GGE 现在被视为给定的。速度空间上的测试函数一般记为 $\psi(v)$, $\phi(v)$。

我们引入卷积算子：

$$T\psi(v) = -a\int \mathrm{d}w\, \psi(w) \tag{21}$$

以及乘法算子：

$$n\psi(v) = (1-a\rho)^{-1} f(v)\psi(v) \tag{22}$$

修饰操作定义为：

$$\psi^{\mathrm{dr}} = (1-Tn)^{-1}\psi = (1+(1-a\rho)Tn)\,\psi \tag{23}$$

对于 $\delta - Bose$ 气体，修饰算子仍具有形式 $(1-Tn)^{-1}$，其中 T 通过某个函数 φ 的卷积定义，即 $T\psi(v) = (1/2\pi)\varphi * \psi(v)$。因此，方程 (21) 应理解为与常数函数 $\varphi(v) = -a$ 的卷积。注意在当前情况下，算子 $-[(1-a\rho)/(a\rho)]\,Tn$ 是向常数函数的投影算子，而 (23) 中的第二个等式仅因为这一投影性质才成立。

将 (18) 线性化为 $f + \epsilon\psi$，得到线性化算子：

$$A = (1-nT)^{-1} v^{\mathrm{eff}} (1-nT) \tag{24}$$

其中 $v^{\mathrm{eff}}(v)$ 被视为乘法算子，为简化符号，我们省略了下标 $[f]$。对于静态协方差，得到：

$$C = (1-nT)^{-1} f (1-Tn)^{-1} \tag{25}$$

对于流-场协方差：

$$B = (1-nT)^{-1} f v^{\mathrm{eff}} (1-Tn)^{-1} \tag{26}$$

对于 Drude 权重：

$$D = (1-nT)^{-1} f (v^{\mathrm{eff}})^2 (1-Tn)^{-1} \tag{27}$$

其中 $f(v)$ 和 $v^{\mathrm{eff}}(v)$ 作为乘法算子作用。通过直接乘法可以注意到，前文关系均满足。有时将这些关系改写为二次形式更为方便。例如：

$$\langle \phi, C\psi \rangle = \int \mathrm{d}v\, \phi(v) f(v)\psi(v) + a(a\rho - 2)\int \mathrm{d}v\, f(v)\phi(v)\int \mathrm{d}w\, f(w)\psi(w) \tag{28}$$

在微观上，可以考虑平稳随机场 $a_\psi(x) = \sum_i \psi(v_i)\delta(x - r_i)$，其中 r_i 是第 i 个硬棒的位置，v_i 是其速度。那么，如 (2.17) 所示，C 是协方差：

$$\langle \phi, C\psi \rangle = \langle a_\phi | a_\psi \rangle = \int \mathrm{d}x\, \langle a_\phi(x) a_\psi(0) \rangle_f \tag{29}$$

平均值在由 $f(v)$ 定义的 GGE 中计算。(3.12) 右边的第一项对应于理想气体的贡献，而第二项是由硬核排斥势引起的。

Problem 7: 以上说明

静态协方差 C 的推导：$C=(1-nT)^{-1}f(1-Tn)^{-1}$

考虑测试函数 ϕ,ψ，需证明：

$$\langle \phi, C\psi\rangle = \langle \phi|(1-nT)^{-1}f(1-Tn)^{-1}|\psi\rangle$$

首先计算 $(1-Tn)^{-1}$ 的显式表达式。注意到：

$$Tn\psi(\nu) = -a\int_{\mathbb{R}} n\psi(w)dw = -\frac{a}{1-a\rho}\int_{\mathbb{R}} f(w)\psi(w)dw = -\frac{a}{1-a\rho}\langle f,\psi\rangle$$

由于 Tn 将任意函数投影到常数函数上，有：

$$(Tn)^2\psi(\nu) = Tn(Tn\psi(\nu)) = \left(\frac{a}{1-a\rho}\right)^2\rho\langle f,\psi\rangle$$

一般地：

$$(Tn)^n\psi(\nu) = \left(-\frac{a}{1-a\rho}\right)^n\rho^{n-1}\langle f,\psi\rangle \quad (n\geq 1)$$

因此：

$$(1-Tn)^{-1}\psi(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty}(Tn)^n\psi(\nu) = \psi(\nu) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{a}{1-a\rho}\right)^n\rho^{n-1}\langle f,\psi\rangle$$

计算几何级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{a\rho}{1-a\rho}\right)^n\rho^{-1} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{-\frac{a\rho}{1-a\rho}}{1+\frac{a\rho}{1-a\rho}} = \frac{-a}{1-2a\rho}$$

故：

$$(1-Tn)^{-1}\psi(\nu) = \psi(\nu) + \frac{a}{1-2a\rho}\langle f,\psi\rangle$$

现在计算二次型：

$$\begin{aligned}
\langle \phi, C\psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(\nu)\left[\phi(\nu)+\frac{a}{1-2a\rho}\langle f,\phi\rangle\right]\left[\psi(\nu)+\frac{a}{1-2a\rho}\langle f,\psi\rangle\right]d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(\nu)\phi(\nu)\psi(\nu)d\nu + \frac{a}{1-2a\rho}\langle f,\phi\rangle\int_{\mathbb{R}} f(\nu)\psi(\nu)d\nu \\
&+ \frac{a}{1-2a\rho}\langle f,\psi\rangle\int_{\mathbb{R}} f(\nu)\phi(\nu)d\nu + \left(\frac{a}{1-2a\rho}\right)^2\langle f,\phi\rangle\langle f,\psi\rangle\rho \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(\nu)\phi(\nu)\psi(\nu)d\nu + a(a\rho-2)\langle f,\phi\rangle\langle f,\psi\rangle
\end{aligned}$$

其中利用了 $\int f\psi = \langle f,\psi\rangle$ 等关系进行化简。接下来我们分别推导其他公式。对于线性化算子 A, 其形式 $A=(1-nT)^{-1}v^{\text{eff}}(1-nT)$ 推导：

从守恒方程出发：$\partial_t f(\nu)+\partial_x[v^{\text{eff}}(\nu)f(\nu)]=0$, 令 $f\to f+\epsilon\psi$，求 $\mathcal{O}(\epsilon)$ 项。需要计算 $\delta[v^{\text{eff}}f]$。

首先计算变分：

$$\delta\rho = \int\psi(\nu)d\nu, \quad \delta u = \frac{1}{\rho}\int\nu\psi(\nu)d\nu - \frac{u}{\rho}\int\psi(\nu)d\nu$$

由 $v^{\text{eff}}(\nu)=\frac{\nu-a\rho u}{1-a\rho}$，得：$\delta v^{\text{eff}}(\nu) = \frac{-a\delta\rho\cdot\nu+a\rho\delta u+a^2\rho u\delta\rho}{(1-a\rho)^2}$

代入 $\delta\rho$ 和 δu 表达式，整理得：

$$\delta[v^{\text{eff}}f] = v^{\text{eff}}\psi + f\delta v^{\text{eff}} = (1-nT)^{-1}v^{\text{eff}}(1-nT)\psi$$

因此线性化算子为 $A = (1-nT)^{-1}v^{\text{eff}}(1-nT)$
流-场关联 B, 满足 $B = (1-nT)^{-1}fv^{\text{eff}}(1-Tn)^{-1}$
由一般流体动力学关系 $B = AC$，代入 A 和 C 的表达式：

$$B = \left[(1-nT)^{-1}v^{\text{eff}}(1-nT)\right]\left[(1-nT)^{-1}f(1-Tn)^{-1}\right]$$

利用 $(1-nT)(1-nT)^{-1} = 1$，得：

$$B = (1-nT)^{-1}v^{\text{eff}}f(1-Tn)^{-1}$$

Drude 权重 D 满足 $D = (1-nT)^{-1}f(v^{\text{eff}})^2(1-Tn)^{-1}$：
Drude 权重由关系 $D = ACA^\dagger$ 给出。由于 T 和 n 是自伴算子，且 v^{eff} 是乘法算子，有：

$$A^\dagger = (1-nT)v^{\text{eff}}(1-nT)^{-1}$$

代入：

$$D = ACA^\dagger = \left[(1-nT)^{-1}v^{\text{eff}}(1-nT)\right]\left[(1-nT)^{-1}f(1-Tn)^{-1}\right]\left[(1-nT)v^{\text{eff}}(1-nT)^{-1}\right]$$

利用结合律和 $(1-nT)(1-nT)^{-1} = 1$，化简得：

$$D = (1-nT)^{-1}v^{\text{eff}}fv^{\text{eff}}(1-Tn)^{-1} = (1-nT)^{-1}f(v^{\text{eff}})^2(1-Tn)^{-1}$$

δ 函数排斥势玻色气体

前文概述的流体动力学理论被推广至排斥性 Lieb-Linigerδ-玻色气体，该气体具有无限多个守恒荷。然而，我们保持符号的通用性，因为通过微小调整，所呈现的主要结果实际上适用于其他费米型可积模型，包括 XXZ 量子自旋链和可积相对论量子场论在二次量子化中，Lieb-Liniger 哈密顿量表示为：

$$H = \int dx \left(\frac{1}{2}\partial_x\hat{\psi}(x)^*\partial_x\hat{\psi}(x) + c\hat{\psi}(x)^*\hat{\psi}(x)^*\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(x)\right) \tag{30}$$

其中 $\hat{\psi}(x)$ 为玻色场，$x \in \mathbb{R}$，排斥耦合常数 $c > 0$，且玻色粒子质量 $m = 1$。H 具有无限多个守恒荷，记为 $\hat{Q}_j$，$j = 0, 1, \ldots$。$\hat{Q}_0$ 为粒子数，$\hat{Q}_1$ 为总动量，$\hat{Q}_2 = H$ 为总能量，等等。守恒荷 $\hat{Q}_j$ 的密度为 $\hat{Q}_j(x)$：

$$\hat{Q}_j = \int dx\hat{Q}_j(x). \tag{31}$$

通过守恒荷可构造广义吉布斯态：

$$\rho_{GG} = Z^{-1}\exp\left[-\sum_{j\geq 0}\beta_j\hat{Q}_j\right] \tag{32}$$

其中 $\{\beta_j, j\geq 0\}$ 为广义逆温度（即化学势）。在流体动力学方法中，玻色气体初始化为如下形式的局域平衡态：

$$\rho_{LE} = Z^{-1}\exp\left[-\sum_{j\geq 0}\int dx\beta_j(x)\hat{Q}_j(x)\right], \tag{33}$$

假设化学势在典型粒子间距和散射距离尺度上缓慢变化。广义流体动力学断言，近似下这种结构随时间传播满足：

$$\rho_{LE}(t) = e^{-iHt}\rho_{LE}e^{iHt} \simeq Z^{-1}\exp\left[-\sum_{j\geq 0}\int dx\beta_j(x,t)\hat{Q}_j(x)\right]. \tag{34}$$

空间上的缓慢变化导致时间上的相应缓慢变化。这也意味着，相对于 ρ_{LE} 的局域观测量在 (x,t) 处的平均值，可通过调整化学势 $\{\beta_j(x,t), j\geq 0\}$ 后的 ρ_{GG} 计算得到。

注：对于可积晶格模型，守恒荷写为局域和准局域密度平移的和。由守恒定律计算的电流具有相同结构。但对于 δ-玻色气体，我们的公式是试探性的。通常通过 $\hat{Q}_2$ 的 Bethe 本征函数定义总荷 $\hat{Q}_j$，即将 n-粒子能量 $\sum_{\ell=1}^{n}(k_\ell)^2$ 替换为 $\sum_{\ell=1}^{n}(k_\ell)^j$。但相应的局域荷密度仅知至 $j=4$。尽管如此，我们希望至少对于适当的守恒荷，GGE 平均密度、电流及 GGE 连通两点关联函数仍有意义。适当的守恒荷集合是一个微妙问题。存在某些“合法”GGE 态，其局域密度平均值发散，但这不意味着其两点关联函数发散。可限制在伪局域荷的希尔伯特空间内，根据已有的严格结果（至少在量子链中），这是由协方差内积诱导的函数 $h(\theta)$ 的希尔伯特空间。伪局域密度通过构造具有有限积分连通两点关联函数，且我们预期所有结果对所有此类伪局域密度及其电流成立，只要显式公式给出有限解。

在变化的最低阶下，族 $\{\beta_j(x,t), j\geq 0\}$ 满足闭合的欧拉型方程组, 相较于 $\{\beta_j(x,t), j\geq 0\}$，用守恒场标记 $\theta\in\mathbb{R}$ 的准粒子密度 $\rho_p(x,t;\theta)$ 表示演化方程更具启发性。密度由守恒定律系统控制：

$$\partial_t\rho_p(x,t;\theta) + \partial_x\left(v^{\mathrm{eff}}_{[\rho_p]}(x,t;\theta)\rho_p(x,t;\theta)\right) = 0. \tag{35}$$

与（17）比较，$\rho_p(x,t;\theta)$ 扮演硬杆密度 $f(x,t;v)$ 的角色。有效速度 $v^{\mathrm{eff}}_{[\rho_p]}$ 是 $\rho_p(\cdot;\theta)$ 的非线性泛函，且在 (x,t) 局域。其精确定义将在下文给出。为简洁起见，我们将省略对 $[\rho_p]$ 的依赖。Lieb-Liniger 模型的动量为 $p(\theta)=\theta$，动能为 $E(\theta)=\frac{1}{2}\theta^2$。我们的结果对一般的 p, E 选择有效，并为未来应用保留此通用性。类似地，Lieb-Liniger 模型中的高自旋守恒荷可选单粒子本征值为 $h_j(\theta)=\theta^j/j!$，且我们的结果适用于 Bethe-ansatz 可积模型中一般完备基 h_j 的选择。散射振幅记为 $\varphi(\theta)$，对于 Lieb-Liniger 模型 $\varphi(\theta)=4c/(\theta^2+4c^2)$。此具体选择在以下推导中非必需。与 φ 卷积的算子记为：

$$T\psi(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int d\alpha\varphi(\theta-\alpha)\psi(\alpha). \tag{36}$$

Problem 8: Lieb-Liniger 模型的说明 (Castro-Alvaredo)

这里散射振幅的定义为散射矩阵的对数，在 Lieb-Liniger 模型中，散射矩阵为 $S(\theta)=\frac{\theta-2ic}{\theta+2ic}$，注意，这里相互作用势的系数为 c, 与前文有所差异。因此散射振幅对应为：$\varphi(\theta)=-i\frac{d}{d\theta}\ln S(\theta)=\frac{4c}{\theta^2+4c^2}$. 守恒量在可积系统中，可以通过传递矩阵系统性构造，传递矩阵的对数生成守恒荷，且对于平移不变系统，我们可以得到：$\ln T(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}\hat{Q}_j$。同时，也可以通过 $Baxter\,Q$ 函数方法构造。这两种方法可以构造出单粒子本征值，需要具体的深入学习。对于（36）的卷积，可以对应前文关于态密度的积分方程。

如硬杆情形，ϕ,ψ 为标记空间上光滑测试函数的通用符号。首先解释 ρ_p 和 $v^{\rm eff}$，为此只需考虑具有预设化学势 $\{\beta_j, j\geq 0\}$ 的空间均匀态 $\rho_{\rm GG}$。定义：

$$w(\theta)=\sum_{j\geq 0}\beta_j h_j(\theta). \tag{37}$$

准能量 $\epsilon(\theta)$ 为积分方程的解：

$$\epsilon(\theta)=w(\theta)-T\ln\big(1+e^{-\epsilon}\big)(\theta). \tag{38}$$

注意：

$$\partial_{\beta_m}\epsilon=h_m+Tn\partial_{\beta_m}\epsilon, \tag{39}$$

其中：$n(\theta)=\frac{1}{1+e^{\epsilon(\theta)}}$ 且 n 表示乘以占据函数 $n(\theta)$，即 $(n\psi)(\theta)=n(\theta)\psi(\theta)$。如前定义修饰变换为：

$$\psi^{\rm dr}=(1-Tn)^{-1}\psi. \tag{40}$$

因此：

$$\partial_{\beta_m}\epsilon=(h_m)^{\rm dr}. \tag{41}$$

准粒子密度满足：

$$n(\theta)^{-1}\rho_p(\theta)=\frac{1}{2\pi}p'(\theta)+T\rho_p(\theta),\quad 2\pi\rho_p(\theta)=n(\theta)(p')^{\rm dr}(\theta). \tag{42}$$

通过 ρ_p 可计算单位长度的平均守恒荷：

$$\langle\hat{Q}_j(0)\rangle=q_j=\int d\theta\rho_p(\theta)h_j(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int dp(\theta)n(\theta)(h_j)^{\rm dr}(\theta). \tag{43}$$

此处 $\langle\cdot\rangle$ 表示无限体积 GGE 平均（下文中，如 $\langle\hat{Q}_i(x)\hat{Q}_j(0)\rangle^c$ 的表达式，上标仍指通常的连通关联函数）。令人惊讶的是，此形式主义还可推广至平均电流。第 j 个守恒荷的局域电流密度通过：

$$i[H,\hat{Q}_j(x)]+\partial_x j(x)=0 \tag{44}$$

给出，其平均为：

$$\langle\hat{J}_j(0)\rangle=j_j=\int d\theta\rho_p(\theta)v^{\rm eff}(\theta)h_j(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int dE(\theta)n(\theta)(h_j)^{\rm dr}(\theta) \tag{45}$$

其中有效速度为：

$$v^{\rm eff}(\theta)=\frac{(E')^{\rm dr}(\theta)}{(p')^{\rm dr}(\theta)}. \tag{46}$$

注：对于良定义的修饰变换，算子 $1-Tn$ 需可逆。此外，第 5 节的线性响应计算需要 $v^{\text{eff}}(\theta)$ 严格递增且对大 θ 近似线性。此类性质可在 Lieb-Liniger 模型中建立，但需更多技术考虑，此不赘述。

Problem 9: 准能量，准粒子数密度的计算

对于前文已有的结果：

$$\rho(k)+\rho_h(k)=\frac{1}{2\pi}+\int a(k-k')\rho(k')dk' \implies \rho(\theta)+\rho_h(\theta)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\int d\alpha\varphi(\theta-\alpha)\rho(\alpha)$$

以及系统熵表达式:

$$S=\int d\theta[(\rho+\rho_h)\ln(\rho+\rho_h)-\rho\ln\rho-\rho_h\ln\rho_h]$$

对于广义自由能：$F=\sum_j\beta_jQ_j-TS$, 对 $\rho(\theta)$ 进行变分, 过程中将约束条件引入，设置拉格朗日乘子 ϵ:

$$\rho_s(\theta)=\frac{1}{2\pi}+T\rho(\theta) \qquad \Longrightarrow \qquad \delta\rho_s=T\,\delta\rho$$

后一式为对 ρ 取变分得到的线性化关系。）由此:

$$\delta\rho_h=\delta\rho_s-\delta\rho=(T-1)\,\delta\rho$$

广义 Gibbs 集合下需极小化的自由能（每单位长度）取为:

$$\mathcal{F}[\rho]=\int d\theta\,w(\theta)\,\rho(\theta)\ -\ s[\rho_p,\rho_h]$$

因此极值条件为对任意 $\delta\rho$,$\delta\mathcal{F}=0$. 逐步变分，第一项的变分：

$$\delta\Big(\int w\,\rho\Big)=\int d\theta\,w(\theta)\,\delta\rho(\theta)$$

熵项的变分（用 $\delta(x\log x)=(\log x+1)\delta x$）：

$$\begin{aligned}\delta s&=\int d\theta\Big[(\ln\rho_s+1)\,\delta\rho_s-(\ln\rho+1)\,\delta\rho-(\ln\rho_h+1)\,\delta\rho_h\Big]\\&=\int d\theta\Big[(\ln\rho_s+1)\,T\delta\rho-(\ln\rho+1)\,\delta\rho-(\ln\rho_h+1)\,(T-1)\delta\rho\Big]\\&=\int d\theta\Big[\underbrace{(\ln\rho_s-\ln\rho_h)}_{=\ln(\rho_s/\rho_h)}T\delta\rho_p+\underbrace{(\ln\rho_h-\ln\rho_p)}_{=\ln(\rho_h/\rho_p)}\delta\rho_p\Big].\end{aligned}$$

将 $T\delta\rho_p$ 上的 T 通过核的对称性（$\varphi(\theta-\alpha)=\varphi(\alpha-\theta)$）移到另一个因子上：

$$\int d\theta\,f(\theta)\,(T\delta\rho_p)(\theta)=\int d\alpha\,(Tf)(\alpha)\,\delta\rho_p(\alpha)$$

于是:$\delta s=\int d\theta\Big[\ \ln(\rho_h/\rho_p)+T\ln(\rho_s/\rho_h)\Big](\theta)\,\delta\rho_p(\theta)$. 由 $\delta\mathcal{F}=0$ 得:

$$0=\delta\mathcal{F}=\int d\theta\Big[w-\ln(\rho_h/\rho_p)-T\ln(\rho_s/\rho_h)\Big]\delta\rho_p.$$

因为 $\delta\rho_p$ 任意，括号内必须为零：

$$w(\theta)=\ln\frac{\rho_h(\theta)}{\rho_p(\theta)}+T\left[\ln\frac{\rho_s(\theta)}{\rho_h(\theta)}\right].$$

引入准能量:$\varepsilon(\theta):=\ln\frac{\rho_h(\theta)}{\rho_p(\theta)}$, 并注意到 $\rho_s/\rho_h=1+\rho_p/\rho_h=1+e^{-\varepsilon}$，改写为:

$$\varepsilon(\theta)=w(\theta)-T\left[\ln\left(1+e^{-\varepsilon}\right)\right](\theta)$$

与占据函数的关系: 由定义 $n(\theta):=\rho_p/\rho_s$ 得

$$\frac{n}{1-n}=\frac{\rho_p}{\rho_h}=e^{-\varepsilon}\quad\Rightarrow\quad n(\theta)=\frac{1}{1+e^{\varepsilon(\theta)}}$$

注意后文把 n 写入算子 $(1-Tn)^{-1}$, 接下来我们证明公式（39），对公式（38）左右求导，利用复合函数的求导法则，可以得到：

$$\partial_{\beta_m}\epsilon(\theta)=h_m(\theta)+\frac{1}{2\pi}\int d\alpha\varphi(\theta-\alpha)[n(\alpha)\cdot\partial_{\beta_m}\epsilon(\alpha)]$$

亦即:$\partial_{\beta_m}=h_m+Tn\partial_{\beta_m}\epsilon$. 对于准粒子满足的公式（42），第一步利用占据度进行改写，然后将公式左右同乘 n，移项：

$$(1-nT)\rho_p=n\frac{1}{2\pi}$$

注意到关系（可以通过级数展开证明）：$(1-nT)^{-1}n=n(1-Tn)^{-1}$, 得到：

$$\rho_p=n(1-Tn)^{-1}\frac{p'}{2\pi}\implies 2\pi\rho_p(\theta)=n(\theta)(p')^{dr}(\theta)$$

注意到 Lieb-Liniger 模型 $p'=1$。代入到守恒量计算公式，我们便得到（43）。在海森堡表象下 $\partial_t\hat{Q}_j(x)=i[H,\hat{Q}_j]$，代入可得在此表象下的守恒方程。对于准粒子，存在守恒方程：$\partial_t\rho_p+\partial_x(v^{eff}\rho_p)=0$. 我们从基本的局域守恒量出发，$q_j(x)=\int d\theta\rho_p h_j$，将其左右对时间求导，利用粒子守恒：

$$\partial_t q_j=\int d\theta h_j\partial_t\rho_p=\int d\theta h_j[-\partial_x(v^{eff}\rho_p)]=-\partial_x j_j$$

因此可以得到 $j_j(x)=\int d\theta\rho_p v^{eff}h_j$，在空间均匀的 GGE 下，取 $x=0$，即得到文中公式（45）第一个等号。对于有效速度的定义，我们可以参照经典的群速度，给定背景下局域化波包的速度即为有效速度。我们将有效速度定义代入：

$$\begin{aligned}j_j&=\frac{1}{2\pi}\int d\theta n(\theta)(p')^{dr}(\theta)v^{eff}(\theta)h_j(\theta)\\&=\frac{1}{2\pi}\int d\theta n(\theta)(E')^{dr}(\theta)h_j(\theta)\\&=\frac{1}{2\pi}\int d\theta E'(\theta)n(\theta)(h_j)^{dr}(\theta)\\&=\frac{1}{2\pi}\int dE(\theta)n(\theta)(h_j)^{dr}(\theta)\end{aligned}$$

计算过程中，利用了核函数 $\varphi(\theta-\alpha)$ 的对称性，积分中存在代数恒等式 $(nT)^k nh_j=n(Tn)^k h_j$.

现将有限守恒场的普遍关系推广至 Lieb-Liniger 模型。荷-荷协方差矩阵 C 需从 δ-玻色气体的 GGE 推导：

$$C_{ij} = \int dx \langle \hat{Q}_i(x)\hat{Q}_j(0)\rangle^c_{\rho_p}. \tag{47}$$

我们开发了一种方法，可同时计算荷-流关联矩阵 B：

$$B_{ij} = \int dx \langle \hat{Q}_i(x)\hat{J}_j(0)\rangle^c_{\rho_p}. \tag{48}$$

Drude 权重为 $D = BC^{-1}B$，线性化算子 $A = BC^{-1}$。作为一致性检验，我们还将表明如此确定的 A 与将（35）线性化为 $\rho_p + \delta\psi$（小 δ）的结果一致。亦可反向逻辑：给定荷关联子 C 和 A（仅使用平均电流），计算矩阵 B, D。作为主要结果，Lieb-Liniger 模型的矩阵（47）和（48）以某种对角化形式写出，从而得到 Drude 权重的显式表达式。方便使用前述算子 T, n 及乘法算子 ρ_p 和 v^{eff}。记 $C_{ij} = \langle h_i, Ch_j\rangle = \int d\theta h_i(\theta)(Ch_j)(\theta)$，类似定义 B, D, A 和 D^s，以下恒等式成立：

(i) 荷-荷关联子：

$$C = (1 - nT)^{-1}\rho_p(1 - n)(1 - Tn)^{-1}, \tag{49}$$

(ii) 荷-流关联子：

$$B = (1 - nT)^{-1}\rho_p(1 - n)v^{\text{eff}}(1 - Tn)^{-1}, \tag{50}$$

(iii) Drude 权重：

$$D = (1 - nT)^{-1}\rho_p(1 - n)(v^{\text{eff}})^2(1 - Tn)^{-1}, \tag{51}$$

(iv) 线性化算子：

$$A = (1 - nT)^{-1}v^{\text{eff}}(1 - nT), \tag{52}$$

(v) Drude 自权重：

$$D^s = (1 - nT)^{-1}\rho_p(1 - n)|v^{\text{eff}}|(1 - Tn)^{-1}. \tag{53}$$

对于线性组合：

$$a_\psi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\hat{Q}_j(x), \quad \psi(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j h_j(\theta) \tag{54}$$

有：

$$\langle \phi, C\psi\rangle = \int d\theta \rho_p(\theta)(1 - n(\theta))\phi^{d\tau}(\theta)\psi^{d\tau}(\theta), \tag{55}$$

$$\langle\phi, B\psi\rangle = \int d\theta\rho_p(\theta)(1-n(\theta))v^{\mathrm{eff}}(\theta)\phi^{d\tau}(\theta)\psi^{d\tau}(\theta), \tag{56}$$

$$\langle\phi, D\psi\rangle = \int d\theta\rho_p(\theta)(1-n(\theta))v^{\mathrm{eff}}(\theta)^2\phi^{d\tau}(\theta)\psi^{d\tau}(\theta), \tag{57}$$

$$\langle\phi, A\psi\rangle = \int d\theta v^{\mathrm{eff}}(\theta)\phi^{d\tau}(\theta)(1-nT)\psi(\theta), \tag{58}$$

$$\langle\phi, D^s\psi\rangle = \int d\theta\rho_p(\theta)(1-n(\theta))|v^{\mathrm{eff}}(\theta)|\phi^{d\tau}(\theta)\psi^{d\tau}(\theta). \tag{59}$$

例如：

$$\langle\phi, C\psi\rangle = \int dx\langle a_\phi(x)a_\psi(0)\rangle^c_{\rho_p} = \int d\theta\rho_p(\theta)(1-n(\theta))\phi^{d\tau}(\theta)\psi^{d\tau}(\theta) \tag{60}$$

类似定义适用于 B, D, A, D^s。

Problem 10: 证明 **(i)-(iv)**：

从泛函出发：

$$F_g = -\frac{1}{2\pi}\int d\theta g(\theta)\ln\bigl(1+e^{-g(\theta)}\bigr) \tag{a}$$

其中 g 为任意函数。则（隐去被积函数自变量 θ）：

$$\partial_{\beta_j}F_g = \frac{1}{2\pi}\int d\theta gn\partial_{\beta_j}g = \frac{1}{2\pi}\int d\theta gnh_j^{d\tau}, \tag{b}$$

其中使用了（41）。结合（43）和（45），选择 $g=p'$ 和 $g=E'$ 分别给出平均密度和电流：

$$\partial_{\beta_j}F_{p'} = q_j, \quad \partial_{\beta_j}F_{E'} = j_j. \tag{c}$$

注意 $F_{p'}$ 为 GGE 的自由能，而 $F_{E'}$ 为获得的“电流自由能”，其中首次导出（c）的第二关系。假设 n 光滑依赖于某参数 μ。对（39）取二阶导数：

$$\partial_\mu\partial_{\beta_j}\varepsilon = T\partial_\mu(n\partial_{\beta_j}\varepsilon) = T(\partial_\mu n\partial_{\beta_j}\varepsilon + n\partial_\mu\partial_{\beta_j}\varepsilon). \tag{d}$$

因此：

$$\partial_\mu\partial_{\beta_j}\varepsilon = (1-Tn)^{-1}T(\partial_\mu n\partial_{\beta_j}\varepsilon). \tag{e}$$

对（b）也取二阶导数并结合（e）得一般关系：

$$\partial_\mu\partial_{\beta_j}F_g = \frac{1}{2\pi}\int d\theta g^{d\tau}\partial_\mu n\partial_{\beta_j}\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int d\theta g^{d\tau}\partial_\mu nh_j^{d\tau}. \tag{f}$$

取 $\mu=\beta_i$，得：

$$\partial_{\beta_i}\partial_{\beta_j}F_g = -\frac{1}{2\pi}\int d\theta g^{d\tau}n(1-n)\partial_{\beta_i}\varepsilon\partial_{\beta_j}\varepsilon. \tag{g}$$

设 $\phi(\theta)=\sum_{i\geq 0} c_i h_i(\theta)$，$\psi(\theta)=\sum_{j\geq 0}\tilde{c}_j h_j(\theta)$。利用（41）得基本恒等式：

$$\sum_{i,j\geq 0} c_i\tilde{c}_j\partial_{\beta_i}\partial_{\beta_j}F_g=-\frac{1}{2\pi}\int d\theta g^{d\tau}n(1-n)\phi^{d\tau}\psi^{d\tau}. \tag{h}$$

注意到选择 $g=p'$ 时，（c）与（7）表明 $C_{ij}=-\partial_{\beta_i}\partial_{\beta_j}F_{p'}$，结合（42）最后一式即得（55）。为证明（50），选择 $g=E'$，则（c）与（7）给出：

$$B_{ij}=\int dx\langle\hat{Q}_i(x)\hat{J}_j(0)\rangle=-\partial_{\beta_i}\partial_{\beta_j}F_{E'}. \tag{i}$$

因此，结合基本恒等式（h）与关系（42）和（46）即得断言。最后注意到 $C^{-1}=(1-Tn)(\rho_p(1-n))^{-1}(1-nT)$，由 $D=BC^{-1}B$ 和 $A=BC^{-1}$ 即得（57）和（58）。

缺失的部分是通过线性化欧拉型方程（35）重新确认（52）的 A。将（35）中的电流线性化为 $\rho_p+\delta\psi$：

$$\delta(v^{\text{eff}}\rho_p)=v^{\text{eff}}\delta\psi+\rho_p\delta v^{\text{eff}}. \tag{j}$$

对 v^{eff} 使用中 Eq. (29) 的恒等式：

$$p'v^{\text{eff}}=E'+2\pi T(\rho_p v^{\text{eff}})-2\pi v^{\text{eff}}T\rho_p, \tag{k}$$

因 ρ_p 线性出现。则：

$$v^{\text{eff}}=(\frac{1}{2\pi}p'-T\rho_p+M_{\rho_p})^{-1}\frac{1}{2\pi}E', \tag{l}$$

其中 M_{ρ_p} 为乘以 $(T\rho_p)$ 的乘法算子：

$$M_{\rho_p}\psi(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int da\varphi(\theta-a)\rho_p(a)\psi(\theta). \tag{m}$$

对 ρ_p 的变分给出：

$$\langle\phi,v^{\text{eff}}_{\{\rho_p+\delta\psi\}}\rangle-\langle\phi,v^{\text{eff}}_{\{\rho_p\}}\rangle=\langle\phi,\rho_p(\frac{1}{2\pi}p'-T\rho_p+M_{\rho_p})^{-1}(Tv^{\text{eff}}-v^{\text{eff}}T)\delta\psi\rangle. \tag{n}$$

因此需证明：

$$(1-nT)^{-1}v^{\text{eff}}(1-nT)=v^{\text{eff}}+\rho_p(\frac{1}{2\pi}p'-T\rho_p+M_{\rho_p})^{-1}(Tv^{\text{eff}}-v^{\text{eff}}T). \tag{o}$$

将方程 (o) 左乘 $(1-nT)$ 得：

$$n(Tv^{\text{eff}}-v^{\text{eff}}T)=(1-nT)\rho_p(\frac{1}{2\pi}p'-T\rho_p+M_{\rho_p})^{-1}(Tv^{\text{eff}}-v^{\text{eff}}T). \tag{p}$$

为等式成立，只需：

$$n=(1-nT)\rho_p(\frac{1}{2\pi}p'-T\rho_p+M_{\rho_p})^{-1} \tag{q}$$

等价于：

$$n(\frac{1}{2\pi}p' - T\rho_p + M_{\rho_p}) = (1 - nT)\rho_p. \tag{r}$$

由（42）知此式成立，故（o）得证。

对时间依赖的荷-荷关联子有一物理有趣推论，定义为：

$$\hat{S}_{ij}(k,t) = \int dx e^{ikx} \langle \hat{Q}_i(x,t)\hat{Q}_j(0,0)\rangle^{\rm c}_{\rho_p}, \tag{61}$$

对比（9）。在流体动力学尺度（小 k，大 t）下，$\hat{S}_{ij}(k,t)$ 近似为：

$$\hat{S}_{ij}(k,t) \approx \langle h_i, e^{iktA} C h_j\rangle = \int d\theta e^{iktv^{\rm eff}(\theta)} \rho_p(\theta)(1-n(\theta))(h_i)^{\rm dr}(\theta)(h_j)^{\rm dr}(\theta). \tag{62}$$

对于密度特例 $h_i = 1, h_j = 1$，此渐近行为已直接从 Bethe ansatz 导出。此处可见关联子结构在更广范围内成立。回到缺失的恒等式（53）。存在精确求和规则：

$$\int dx |x| \frac{1}{2} \langle S_{ij}(x,t) + S_{ji}(x,t)\rangle = \int_0^t ds \int_0^t ds' \langle i_j(0,s) j_i(0,s')\rangle^{\rm c}, \tag{63}$$

在右侧利用时间平稳性，左侧利用（62）对 $S_{ij}(x,t)$ 的近似，即得（53）。流体动力学近似同样适用于其他关联函数。对 t 微分并利用守恒方程得：

$$\int dx e^{ikx} \langle \hat{J}_i(x,t)\hat{Q}_j(0,0)\rangle^{\rm c} \approx \int d\theta e^{iktv^{\rm eff}(\theta)} \rho_p(\theta)(1-n(\theta)) v^{\rm eff}(\theta)(h_i)^{\rm dr}(\theta)(h_j)^{\rm dr}(\theta). \tag{64}$$

利用时空平移不变性及进一步微分得：

$$\int dx e^{ikx} \langle \hat{J}_i(x,t)\hat{J}_j(0,0)\rangle^{\rm c} \approx \int d\theta e^{iktv^{\rm eff}(\theta)} \rho_p(\theta)(1-n(\theta)) v^{\rm eff}(\theta)^2(h_i)^{\rm dr}(\theta)(h_j)^{\rm dr}(\theta). \tag{65}$$

在 $k=0$ 处恢复 Drude 权重（51），与其基本定义（11）一致。进一步对 $t \in \mathbb{R}$ 积分（64），左侧因守恒定律与位置无关而正比于 $\delta(k)$。与积分右侧相等再次得（53）。我们的讨论中“长时间”指弹道（欧拉）时间尺度，即 $kt = \mathcal{O}(1)$。扩散时间尺度（t 为 k^{-2} 量级）未覆盖，需输入关于：

$$\int_0^\infty dt \left(\int dx \langle \hat{J}_i(x,t)\hat{J}_j(0,0)\rangle^c - D_{ij} \right), \tag{66}$$

的信息，目前似不可及。最后，对（62）作 k 的傅里叶变换，时空依赖的荷-荷关联子可写为：

$$S_{ij}(x,t) \simeq \int d\theta\, \delta(x - v^{\rm eff}(\theta)t) \rho_p(\theta)(1-n(\theta))(h_i)^{\rm dr}(\theta)(h_j)^{\rm dr}(\theta), \tag{67}$$

其物理意义明确：在流体动力学极限下，关联由从初始位置 $(0,0)$ 以速度 $v^{\rm eff}(\theta)$ 弹道传播至 (x,t) 的粒子构建。平衡权重编码于 $\rho_p(1-n)$，而 $(h_i)^{\rm dr}$ 和 $(h_j)^{\rm dr}$ 分别对应起点和终点的可观测量。类似观点适用于其他关联函数（64）和（65）。

线性响应

Lieb-Liniger 模型的 Drude 权重也可以通过电流的线性响应获得。从畴壁初始条件出发，即状态（33）中对于 $x<0$ 有 $\beta_i(x)=\beta_i-\frac{1}{2}\mu_i$，对于 $x>0$ 有 $\beta_i(x)=\beta_i+\frac{1}{2}\mu_i$，且对于 $j\neq i$ 有 $\beta_j=const.$。第 j 个平均电流的线性响应定义为：

$$D_{ij}=\lim_{\mu_i\to 0}\frac{\partial}{\partial\mu_i}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int dx\,\langle\hat{J}_j(x,t)\rangle_{\mu_i} \tag{68}$$

我们将证明该表达式确实与 (51) 一致。

Problem 11: 1

于 (68) 的右侧在大时间下求值，我们可以使用渐近形式的电流，已知其由自相似形式的局部 GGE 描述。因此，我们将积分变量改为 $\xi=x/t$：

$$D_{ij}=\lim_{\mu_i\to 0}\frac{\partial}{\partial\mu_i}\int d\xi\,\langle\hat{J}_j\rangle_{\xi,\mu_i}=\lim_{\mu_i\to 0}\int d\xi\,\frac{\partial\langle\hat{J}_j\rangle_{\xi,\mu_i}}{\partial\mu_i} \tag{69}$$

已知：

$$\langle\hat{J}_j\rangle_{\xi,\mu_i}=\int d\theta\,E'nh_j^{\mathrm{dr}} \tag{70}$$

其中

$$n(\theta)=n_L(\theta)\chi(\theta>\theta_*(,_i))+n_R(\theta)\chi(\theta<\theta_*(,_i)) \tag{71}$$

这里 $\chi=1$（如果参数的条件满足）否则 $\chi=0$，$\theta_*(\xi,\mu_i)$ 由关系 $v^{eff}(\theta_*(\xi,\mu_i))=\xi$ 隐式定义，

$$n_{L,R}(\theta)=\frac{1}{1+e^{\epsilon_{L,R}(\theta)}} \tag{72}$$

且 ϵ_L（或 ϵ_R）由 (38) 确定，其中 $w(\theta)$ 由 (37) 给出，但替换为 $\beta_i\sim\beta_i-\mu_i/2$（或 $\beta_i\sim\beta_i+_i/2$）。求导后，一般关系 (g) 给出：

$$\left.\frac{\partial(\hat{J}_j)_{\xi,\mu_i}}{\partial_i}\right|_{i=0}=\int d\theta((E')^d h_j^d r\partial_{\mu_i}n)_{\mu_i=0} \tag{73}$$

注意，$(n_L-n_R)\delta(\theta-\theta_*)\theta_{\mu_i}\theta_*|_{\mu_i=0}=0$，因为在 $\mu_i=0$ 时 $n_L=n_R$。因此我们得到：

$$\partial_{\mu_i}n(\theta)|_{\mu_i=0}=\partial_{\mu_i}n_L(\theta)|_{i=0}(\theta>\theta_*())+\partial_{\mu_i}n_R(\theta)|_{\mu_i=0}(\theta<\theta_*(\xi)) \tag{74}$$

其中 $\theta_*(\xi)={}_*(\xi,\mu_i=0)$。根据 (44) 和 (46)：

$$\partial_{\mu_i}n_{L,R}|_{\mu_i=0}=\pm\frac{1}{2}h_i^d r(n(1-n)) \tag{75}$$

其中 n 是空间均匀背景态 (32) 的平衡占据函数。因此，代入积分 (73)：

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\int d\xi\left[\int_{\theta_*(\xi)}^{\infty}d\theta h_i^d r h_j^d r(1-n)(E')^d r-\int_{-\infty}^{\theta_*(\xi)}d\theta h_i^d r h_j^d r(1-n)(E')^d r\right] \tag{76}$$

注意被积函数不依赖于 ξ。记 $g=h_i^d r h_j^d r(1-n)(E')^d r$，则：

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\int d\xi\int d\theta g(\theta)(\chi((\xi<v^{eff}(\theta)))-\chi((\xi>v^{eff}(\theta)))) \tag{77}$$

近似地，v^{eff} 对于大的 $|\theta|$ 是线性的。对于 Lieb-Liniger 模型可以验证，我们假设：

$$\int d|g(\theta)|(1+|\theta|^{1+\delta})<\infty \tag{78}$$

对于某个 $\delta>0$ 成立。因此，可以截断 ξ-积分且误差为零，得到：

$$D_{ij}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\int dg(\theta)\int_{-a}^{a}d(\chi((\xi<v^{eff}(\theta)))-\chi((\xi>v^{eff}(\theta))))=\int dg(\theta)v^{eff}(\theta) \tag{79}$$

Drude 自权重

类似于 Drude 权重的线性响应公式，D^s 的表达式如下。采用与 (68) 相同的协议，对于量 $\langle\hat{J}_j(0,t)\rangle_i$，可以写出：

$$D_{ij}^s=\lim_{i\to 0}2\frac{\partial}{\partial_i}\lim_{t\to\infty}\langle J_j(0,t)\rangle_i \tag{80}$$

可以给出这一关系的一般性论证。如果 $\mu_i=0$ 时的 GGE 是一个平衡态（即时间反演对称），则该关系遵循 Cohen-Gallavotti 类型的标准涨落关系，这些关系可以通过一般原理建立（此处推广到更高阶守恒量）。然而，一般情况下，GGE 态并非平衡态，因为它可能携带电流。但已知所有具有实本征值的 $\mathcal{PT}$ 对称哈密顿量的本征态可以选择为 $\mathcal{PT}$ 对称的。由于 Lieb-Liniger 模型以及许多其他可积模型是 $\mathcal{PT}$ 对称的，因此其 GGE 也是。

等式 (80) 与 Drude 权重的线性响应公式非常相似，区别在于电流不是空间积分的，而是通过原点的电流。计算过程与前一节类似，区别在于我们只需要在 $\xi=0$ 处求值所有量。因此，在 (79) 中，对 ξ 的积分被替换为在 $\xi=0$ 处的被积函数，因此表达式 (80) 与 (59) 一致。实际上，如果在 (80) 中不取 $\mu_i=0$ 的极限，所得到的更一般的等式是在“纯传输”的某种性质下导出的, 这是称为“扩展涨落关系”的高阶累积量等式家族中的一个。纯传输性质在自由粒子模型和共形场论中成立，并且猜想在相互作用的可积模型中也成立。然而，我们在此看到这一猜想并不成立：如果在取导数后不设 $\mu_i=0$，所得到的表达式将与 (59) 不一致。在 (73) 之后讨论的与 $\delta(\theta-\theta_\star)$ 成正比的项即使在 $\mu_i\neq 0$ 时也不会在 $\xi=0$ 处贡献，因为在 $\xi=0$ 处有 $v^{\rm eff}(\theta_\star)=0$，因此 $(E')^{\rm dr}=0$。然而，保持 μ_i 非零时，我们得到的关系是 $\partial_{\mu_i}n_{\rm L,R}=\pm\frac{1}{2}(h_i)^{\rm dr}_{[n_{L,R}]}n_{L,R}(1-n_{L,R})$，其中下标表示修饰操作是相对于左（右）浴 $n_L(\theta)$（$n_R(\theta)$）进行的。因此我们得到 (76)，同样没有对 ξ 积分，而是在 $\xi=0$ 处求值，但在第一个 θ-积分中 $h_i^{\rm dr}$ 被替换为 $(h_i)^{\rm dr}_{[n_L]}$，在第二个积分中被替换为 $(h_i)^{\rm dr}_{[n_R]}$。因此，所得到的表达式与 (59) 不同。更深入地理解缺乏纯传输的后果，以及 (80) 和相关高阶累积量等式的一般性论证，将是非常有趣的。

Appendix

Appendix A: 线性响应与电导率

对于一个哈密顿量为 H, 且具备离散本征值与本征态的量子系统，在 $t < t_0$ 时，系统处于热平衡态，那么由正则系综刻画的统计算符表示为：

$$\rho_0 = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/T}|n\rangle\langle n| \tag{A.1}$$

其中 Z 为配分函数，t_0 是引入微 $V(t)$ 的时间，对于时间演化算符 $|n,t\rangle = U(t) = |n\rangle$，其满足薛定谔方程：

$$i\partial_t U(t) = (H + V(t))U(t) \tag{A.2}$$

在初始时间，$U(t_0) = I$ 为单位算符，而在引入时间后，统计算符变为：

$$\rho(t) = U(t)\rho_0 U^{-1}(t) \tag{A.3}$$

在此时，我们利用海森堡运动方程，计算统计算符的时间演化性质, 对于哈密顿量 $H = H_0 + V$, 我们将统计算符分为 $\rho = \rho + \rho_1$，因此：

$$i\frac{d\rho}{dt} = [H_0 + V, \rho + \rho_1]$$

忽略掉小量，并消去平衡态满足的运动方程，可以得到：

$$i\frac{d\rho_1}{dt} = [H_0, \rho_1] + [V, \rho_0]$$

引入相互作用绘景，$\tilde{\rho_1} = e^{iH_0(t-t_0)}\rho_1 e^{-iH_0(t-t_0)}$, 代入计算可得：

$$\frac{d\tilde{\rho_1}}{dt} = -ie^{iH_0(t-t_0)}[V, \rho_0]e^{-iH_0(t-t_0)}$$

积分得：

$$\tilde{\rho_1} = -i\int_{t_0}^{t} e^{iH_0(t'-t_0)}[V(t'), \rho_0]e^{-iH_0(t'-t_0)}dt'$$

引入定义

$$W(s,t) = e^{iHs}V(t)e^{-iHs} \tag{A.4}$$

原式变为：

$$\rho_1 = -i\int_{t_0}^{t} e^{iH_0(t'-t)}[V(t'), \rho_0]e^{-iH_0(t'-t)}dt' = -i\int_{t_0}^{t}[W(t'-t, t'), \rho_0]dt'$$

可以得到统计算符随时间变化为：

$$\rho(t) = \rho_0 - i\int_{t_0}^{t}[W(t'-t, t'), \rho_0]dt' \tag{A.5}$$

方便起见，后文时间 t_0 设置为 $-\infty$。正则系综的热力学平均为 $\langle\cdot\rangle = tr\{\rho_0\cdot\}$, 对于相互作用绘景下的算符 $B(t) = e^{iHt}Be^{-iHt}$，因此：

$$\begin{aligned}\delta\langle B\rangle_T(t) &= tr\{(\rho(t)-\rho_0)B\}\\ &= -i\int_{-\infty}^{t} dt' tr\{[W(t'-t,t'),\rho_0]B\}dt'\\ &= -i\int_{-\infty}^{t} dt' tr\{[W(t'-t,t'),B]\rho_0\}dt'\\ &= i\int_{-\infty}^{t} dt' tr\{[B(t'-t),V(t')]\rho_0\}dt'\\ &= i\int_{-\infty}^{t} dt' tr\{[\rho_0,V(t')]B(t-t')\}\end{aligned} \tag{A.6}$$

推导过程利用了迹具有可循环性。接下来假设引入的微扰项是不含时算符与标量函数的积。即：$V(t) = -AF(t)$，其中 A 为算符，$F(t)$ 为标量函数 (也称为经典作用力项)，代入到（A.6）中，可以得到：

$$\delta\langle B\rangle_T(t) = -i\int_{-\infty}^{t} dt' tr\{[\rho_0,A]B(t-t')\}F(t') \tag{A.7}$$

引入定义响应函数 $\Phi_{BA}(t) = -itr\{[\rho_0,A]B(t)\}$，那么 $\delta\langle B\rangle_T(t)$ 可以与标量函数 $F(t)$ 通过一个线性积分联系起来。

$$\delta\langle B\rangle_T(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \Phi_{AB}(t-t')F(t') \tag{A.8}$$

引入复导纳:

$$\chi_{BA}(w) = \int_0^{\infty} dte^{-iwt}\Phi_{BA}(t) \tag{A.9}$$

对 (B.8) 进行傅里叶变换, 利用卷积性质有:

$$\delta B(w) = \chi_{BA}(w)F_F(w) \tag{A.10}$$

进一步，我们来将响应函数写成另一种形式。由于:

$$[\rho_0,A] = e^{-H/T}(A - e^{H/T}Ae^{-H/T}) = -\rho_0(A(-i/T)-A) = i\rho_0\int_0^{1/T} d\lambda\dot{A}(-i\lambda) \tag{A.11}$$

注意这里 $A(-i/T)$ 为相互作用绘景下的虚时形式，$\lambda = it$。代入到响应函数与复导纳中，分别为：

$$\Phi_{AB}(t) = \int_0^{1/T} d\lambda\langle\dot{A}(-i\lambda)B(t)\rangle_T \tag{A.12.a}$$

$$\chi_{BA}(w) = \int_0^{\infty} dte^{-iwt}\int_0^{1/T} d\lambda\langle\dot{A}(-i\lambda)B(t)\rangle_T \tag{A.12.b}$$

对于电场中的带电粒子，其受力为 $F(t) = qE(t)$，因此其势能为 $V(t) = -q\int E(x)dx = -q\langle x,E(t)\rangle$, 因此一个均匀的电场总势能为：

$$V(t) = -\sum_{j=1}^{N}\langle x_j,F(t)\rangle \tag{A.13}$$

其为一个线性项，设：$A=\sum_{j=1}^{N}x_j$，则粒子流算符为：

$$J=\dot{A}=\sum_{j=1}^{N}\dot{x_j} \tag{A.14}$$

代入到线性响应公式中，可以得到复导率张量 (久保公式) 为：

$$\Sigma_{\beta}^{\alpha}(w)=\int_{0}^{\infty}dte^{-iwt}\int_{0}^{1/T}d\lambda\langle J_{\beta}(-i\lambda)J^{\alpha}(t)\rangle_{T} \tag{A.15}$$

以及：

$$\delta J^{\alpha}(w)=\Sigma_{\beta}^{\alpha}(w)F_{F}^{\beta}(w) \tag{A.16}$$

Appendix B: 一维可积系统中的传递矩阵

References

[Castro-Alvaredo] Castro-Alvaredo. Emergent hydrodynamics in integrable quantum systems out of equilibrium. *Physical review X 6,041065(2016).*