

Heisenberg XXX chain and Algebraic Bethe ansatz

1	Introduction to Heisenberg XXX spin chain	1
1.1	哈密顿量	1
1.2	基态与散射矩阵	2
1.3	Bethe 解	5
1.4	String Solutions	7
1.5	热力学方程	11
1.6	与磁场的作用	17
2	Algebraic Bethe Ansatz	19
2.1	Preliminaries	19
2.2	Algebraic bethe ansatz of Heisenberg XXX spin chain	23
2.2.1	Hamiltonian and Permutations for XXX-spin chain	23
2.2.2	Lax 算符与单演矩阵	24
2.2.3	The Bethe Ansatz Equations	28
2.2.4	Ansatz for the ground state	30
2.2.5	Actual values of physical observables	32

1 Introduction to Heisenberg XXX spin chain

1.1 哈密顿量

一维海森堡 XXX 自旋链的哈密顿量为：

$$\hat{H} = -J \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} = -J \sum_{i=1}^N (S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y + S_i^z S_{i+1}^z)$$

其中 N 是格点数目， $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$ 是第 i 个格点上的自旋算符，满足 $SU(2)$ 代数关系 $[S_i^\alpha, S_j^\beta] = i\hbar \delta_{ij} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_i^\gamma$ 。对于 $SU(2)$ 群，利用其有限维不可约表示：

$$\hat{S}_j^\pm = \hat{S}_j^x \pm i\hat{S}_j^y \quad \hat{S}_j^x = \frac{1}{2}(\hat{S}_j^+ + \hat{S}_j^-) \quad \hat{S}_j^y = \frac{1}{2i}(\hat{S}_j^+ - \hat{S}_j^-)$$

选取 $\hbar = 1$ ，存在对易关系 $[S_i^z, S_j^\pm] = \pm S_i^\pm \delta_{ij}$ ， $[S_i^+, S_j^-] = 2S_i^z \delta_{ij}$ 。选取 S^z 表象下，本征矢分别为 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ ，那么算符作用结果有：

$$\hat{S}_j^+ |\uparrow\rangle = 0, \hat{S}_j^+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \hat{S}_j^- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \hat{S}_j^- |\downarrow\rangle = 0$$

这样的话我们就可以将原始哈密顿量改写为：

$$\hat{H} = -J \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} (S_i^+ S_{i+1}^- + S_i^- S_{i+1}^+) + S_i^z S_{i+1}^z \right]$$

我们可以把 $S^+ S^-$ 称作横向自旋部分， $S^z S^z$ 为纵向自旋部分。对于自旋 $1/2$ 体系，有 $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ 。 J 是交换耦合常数， $J > 0$ 为铁磁， $J < 0$ 为反铁磁。通常采用周期性边界条件 $\vec{S}_{N+1} \equiv \vec{S}_1$ 。海森堡模型具有完整的 $SU(2)$ 旋转不变性，添加磁场 (z 方向) 后，关于 z 轴存在 $U(1)$ 对称性，故总自旋 \hat{S}_{tot}^2 和总 $S_{\text{tot}}^z = \sum_{i=1}^N S_i^z$ 守恒。以 S_{tot}^z 的本征值 M 标记子空间。并可以根据 $S^z = N/2 - R, R$ 为下自旋数目进行研究。

1.2 基态与散射矩阵

经典铁磁基态选取自旋全部向一个方向： $|0\rangle = |\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle$ ，其基态能量为 $E_0 = -\frac{J}{4}N$ 。

由于横向部分 S^+ 会直接湮灭波函数，我们只需要考虑纵向部分的作用。

$$\begin{aligned}\hat{H}|0\rangle &= -J \sum_{i=1}^N S_i^z S_{i+1}^z |\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle = -J \sum_{i=1}^N S_i^z S_{i+1}^z |\uparrow\rangle_i |\uparrow\rangle_{i+1} \prod_{j \neq i, i+1}^{N-2} |\uparrow\rangle_j \\ &= -J \sum_{i=1}^N \frac{1}{4} |\uparrow\rangle_i |\uparrow\rangle_{i+1} \prod_{j \neq i, i+1}^{N-2} |\uparrow\rangle_j = -\frac{J}{4}N\end{aligned}$$

考虑完全极化铁磁态的一个偏离，单个自旋翻转的态（一磁子激发）为平面波： $|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N e^{ikR_i} S_i^- |0\rangle$ 是本征态，能量为： $E(k) = E_0 + J(1 - \cos k)$

考虑有两个自旋翻转的态，波函数记为：

$$|k_1, k_2\rangle = \sum_{x_1, x_2} \psi(x_1, x_2) S_{x_1}^- S_{x_2}^- |0\rangle = \sum_{x_1, x_2} \psi(x_1, x_2) |\cdots \downarrow_{x_1} \cdots \downarrow_{x_2} \cdots\rangle$$

假设 $x_1 < x_2$ ，由于哈密顿量中涉及横向自旋部分，因此分为 $x_2 > x_1 + 1$ 和 $x_2 = x_1 + 1$ 两类。对于前一种情况，代入到哈密顿量本征方程：

$$\begin{aligned}\sum_{x_1, x_2 > x_1}^N \psi(x_1, x_2) & \left[-\frac{J}{2} (|\cdots \downarrow_{x_1+1} \cdots \downarrow_{x_2} \cdots\rangle + |\cdots \downarrow_{x_1} \cdots \downarrow_{x_2+1} \cdots\rangle + |\cdots \downarrow_{x_1-1} \cdots \downarrow_{x_2} \cdots\rangle \right. \\ & \left. + |\cdots \downarrow_{x_1} \cdots \downarrow_{x_2-1} \cdots\rangle) + (E_0 + 2J - E) |\cdots \downarrow_{x_1} \cdots \downarrow_{x_2} \cdots\rangle \right] = 0\end{aligned}$$

利用下标的变换，整理可得：

$$\begin{aligned}\sum_{x_1, x_2 > x_1+1}^N & \left[-\frac{J}{2} (\psi(x_1-1, x_2) + \psi(x_1, x_2-1) + \psi(x_1+1, x_2) + \psi(x_1, x_2+1)) \right. \\ & \left. + (E_0 + 2J - E) \psi(x_1, x_2) \right] |\cdots \downarrow_{x_1} \cdots \downarrow_{x_2} \cdots\rangle = 0\end{aligned}$$

利用 Bethe ansatz 型波函数, 其为自由粒子平面波的叠加：

$$\psi(x_1, x_2) = A_{12} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + A_{21} e^{i(k_2 x_1 + k_1 x_2)}$$

将该波函数代入到本征方程，我们得到：

$$\left[-\frac{J}{2} (2 \cos k_1 + 2 \cos k_2) + (E_0 + 2J - E) \right] (A_{12} + A_{21}) = 0$$

可以解得能量为： $E = -J(\cos k_1 + \cos k_2 - 2) + E_0$ 。但是波函数的系数关系还未确定。当 $x_2 = x_1 + 1$ 时，代入定态薛定谔方程 $\hat{H}\psi = E\psi$ ：

$$\sum_{x_1, x_2 = x_1+1}^N \left[-\frac{J}{2} (\psi(x_1-1, x_2) + \psi(x_1, x_2+1)) + (E_0 + J - E) \psi(x_1, x_2) \right] |\cdots \downarrow_{x_1} \downarrow_{x_2} \cdots\rangle = 0$$

同样的步骤，代入 Bethe 波函数，得到的结果为：

$$-\frac{J}{2} (A_{12} e^{i(k_2 - k_1)} + A_{21} e^{i(k_1 - k_2)} + A_{12} e^{2ik_2} + A_{21} e^{2ik_1}) + (E_0 + J - E) (A_{12} e^{ik_2} + A_{21} e^{ik_1}) = 0$$

假设 $|\psi_i\rangle$ 为第 i 个自旋变为向下，那么对于 $\psi_i = |\downarrow_i \prod_{j \neq i} \uparrow_j\rangle$ ，横向自旋部分的结果为：

$$\hat{S}_i^+ \hat{S}_{i+1}^- |\psi_i\rangle = |\psi_{i+1}\rangle \quad \hat{S}_{i-1}^- \hat{S}_i^+ |\psi_i\rangle = |\psi_{i-1}\rangle$$

因此哈密顿量作用于单磁子激发时，结果为：

$$\hat{H}|\psi_i\rangle = -\frac{J}{2}(|\psi_{i+1}\rangle + |\psi_{i-1}\rangle) - J \sum_i S_i^z S_{i+1}^z |\psi_i\rangle = -\frac{J}{2}(|\psi_{i+1}\rangle + |\psi_{i-1}\rangle) + (-\frac{J}{4}(N-2) + \frac{J}{4}2)|\psi_i\rangle$$

那么 $|\psi_i\rangle$ 态的能量为 $E = \langle \psi_i | \hat{H} | \psi_i \rangle = E_0 + 4\frac{J}{4}$ 。物理上解释为一个反向自旋不仅破坏了两对同向排列，同时产生了两对自旋反向对。由于 $|\psi_i\rangle$ 并不是本征态，因此波函数等于体系各个格点偏离的叠加，也就是 $|\psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle$ 。如果系数均不为 0，那么该态描述的是晶格自旋体系中传播的自旋翻转。现在将该波函数求解本征方程：

$$-\frac{J}{2} \sum_i c_i (|\psi_{i+1}\rangle + |\psi_{i-1}\rangle) + (E_0 + J) \sum_i c_i |\psi_i\rangle = E \sum_i c_i |\psi_i\rangle$$

利用下标的变换，我们得到：

$$\sum_i [(E_0 + J)c_i - \frac{J}{2}(c_{i+1} + c_{i-1})] |\psi_i\rangle = \sum_i E c_i |\psi_i\rangle$$

该结果可以写成矩阵形式求解，令行列式结果为 0。当然我哦们可以考虑更简单的方法，选取系数的平面波解 $c_i = e^{ikR_i}$ （周期性边界条件要求 $k = \frac{2\pi}{Na}$ ， a 为晶格间距），代入方程可得：

$$(E_0 + J)e^{ikR_i} - \frac{J}{2}(e^{ik(R_i+a)} + e^{ik(R_i-a)}) = Ee^{ikR_i}$$

消去 e^{ikR_i} ，就得到了 $E = E_0 + J(1 - \cos k)$ ，对应的波函数为 $|\psi\rangle = \sum_i e^{ikR_i} |\psi_i\rangle$ （未归一化）。注意到波矢标记了这个状态，在铁磁体中这即是铁磁自旋波。

代入前文能量关系，进行化简，由此确定散射系数之比（s 二体散射矩阵）：

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = e^{i\theta(k_1, k_2)} = -\frac{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_2}}{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2e^{ik_1}} = S_{x_1, x_2}$$

其中 $\theta(k_1, k_2)$ 为两体散射相位。对波函数施加周期性边界条件 $\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1 + N)$ （选取晶格常数为 1）。“粒子 1”绕系统一周后，会与“粒子 2”散射一次，获得相位 $e^{i\theta(k_1, k_2)}$ ，故有：

$$e^{ik_1 N} = e^{i\theta(k_1, k_2)} \quad e^{ik_2 N} = e^{i\theta(k_2, k_1)}$$

区别于经典的周期性条件，一维系统中由于粒子会穿过旁边粒子，自由传播获得一个相位，而与粒子相撞产生一个散射矩阵，观察 Bethe 波函数的形式，可将两个平面波视为碰撞前后的结果，分别代表入射波与散射波，粒子间发生动量交换，前面的系数之比则为散射矩阵。因此周期性条件的结果是自由传播的动力学相位（姑且称为）等于粒子散射相位

取对数后得到 Bethe 方程：

$$Nk_1 = 2\pi I_1 + \theta(k_1, k_2) \quad Nk_2 = 2\pi I_2 - \theta(k_1, k_2)$$

其中 I_1, I_2 为整数（量子数）。系统的总动量为 $K = k_1 + k_2 = \frac{2\pi}{N}(I_1 + I_2)$ 。允许的量子数为 $0 \leq I_1 \leq I_2 \leq N-1$ ，注意约定 I_1, I_2 的大小关系是因为全同粒子不可分辨，交换其值表示相同态。满足该约束的态组总共有 $(N-1)N/2$ 个。我们将散射矩阵改写：

$$2 \cot \frac{\theta}{2} = \cot \frac{k_2}{2} - \cot \frac{k_1}{2}$$

这个公式的推导我们从简出发，首先注意到复平面上的复相位满足关系： $\cot \frac{\theta}{2} = i \frac{1+e^{-i\theta}}{1-e^{-i\theta}}$ 这个公式既可以通过构造共轭复数的实部得到，也可以通过复平面在 $(1, 0)$ 的单位圆上对称点得到。然后我们利用散射矩阵的形式代入，同分简化，可以得到：

$$\cot \frac{\theta}{2} = i \frac{e^{ik_1} - e^{ik_2}}{(e^{ik_1} - 1)(e^{ik_2} - 1)}$$

然后我们利用半角关系，例如： $e^{ik} - 1 = e^{ik/2}(e^{ik/2} - e^{-ik/2}) = 2ie^{ik/2} \sin \frac{k}{2}$ 。通过这样的变换，我们将上式进一步简化，并且可以消去指数部分，再将分子上的三角函数展开，就可以得到最终的结果

一般求解难以排除具有相同量子数的解，而且缺乏有效的手段来排除伪解，即使通过代换变为单参数方程也难以数值上求解。更好的方法是通过参数化变量：

$$k_1 = \frac{K}{2} + ik \quad k_2 = \frac{K}{2} - ik$$

那么 Bethe 方程变为：

$$\theta = \pi(I_2 - I_1) + iNk$$

散射矩阵的结果也被改写为：

$$\cos \frac{K}{2} \sinh(Nk) = \sinh[(N-1)k] + \cos[\pi(I_2 - I_1)] \sinh k$$

推导较为复杂，第一步将改写后的散射矩阵右边余切函数利用公式利用关系式 $\cot(a+ib) - \cot(a-ib) = -2i \frac{\sinh(2b)}{\cosh(2b) - \cos(2a)}$ 简化，对于等式左边，代入 Bethe 方程，将 \cot 函数展开，实数部分与虚数部分展开为三角函数后通分，注意双曲函数满足 $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$, $2 \cosh x \cdot \sinh x = \sinh 2x$ ，分母是两个平方之和，可进一步简化，这时左右两边的结果分别为：

$$\frac{-2 \sin \phi - 2i \sinh(Nk)}{\cosh(Nk) - \cos \phi} = -2i \frac{\sinh k}{\cosh k - \cos K/2}$$

其中 $\phi = \pi(I_1 - I_2)$ ，由于右边为纯虚数，左边实部为 0，意味着 $\sin \phi = 0$ ，借此改写公式，交叉相乘并利用双曲恒等式 $\sinh a \cosh b - \sinh b \cosh a = \sinh(a-b)$ 化简，即得到最终结果

对于前文求解的能量 $E = -J(\cos k_1 + \cos k_2 - 2) + E_0$ ，利用公式：

$$\cos(a+bi) + \cos(a-bi) = 2 \cosh b \cdot \cos a$$

现在我们可以将其改写为：

$$E = E_0 + 2J(1 - \cos \frac{K}{2} \cdot \cosh k)$$

在 $N \rightarrow \infty$ 时, $K \rightarrow 0$, 同时双曲函数可以近似为: $\sinh x \sim \frac{e^x}{2}$, 因此我们近似结果为:

$$\cos \frac{K}{2} \cdot e^{Nk} = e^{Nk} \cdot e^{-k} + 2 \cos [\pi(I_2 - I_1)] \sinh k$$

移项, 由于移项后等式右边不含 N , 而等式左边会在极限情况下趋于无穷, 因此提取公因子后括号内必为 0, $\cos \frac{K}{2} = e^{-k}$, 取对数, 得到:

$$-k = \ln \left(\cos \left(\frac{K}{2} \right) \right)$$

代回即得到动量关系。而对于能量关系:

$$\cos \frac{K}{2} \cdot \cosh k = \cos \frac{K}{2} \cdot \frac{(\cos \frac{K}{2})^{-1} + \cos \frac{K}{2}}{2} = \frac{1 + \cos^2 \frac{K}{2}}{2} = \cos K$$

在 $N \rightarrow \infty$ 下, 对于 $K = \frac{2\pi}{N}(I_1 + I_2)$, 散射矩阵的结果给出关系有 $k_{1,2} = \frac{K}{2} \pm i \ln(\cos \frac{K}{2})$, 能量在此极限下, 有 $E \xrightarrow{N \rightarrow \infty} = E_0 + \frac{J}{2}(1 - \cos K)$

1.3 Bethe 解

在简单讨论二体散射问题之后, 我们将推广至 N 个格点的情况, 其结果与上节具有较高相似性。Bethe 波函数变为:

$$f(n_1, \dots, n_M) = \sum_{\mathcal{P}} \exp \left[i \sum_{j=1}^M k_{\mathcal{P}_j} n_j + \frac{i}{2} \sum_{l < j} \theta(k_{\mathcal{P}_l}, k_{\mathcal{P}_j}) \right]$$

$\sum_{\mathcal{P}}$ 是对准动量所有可能排列的求和共 ($M!$ 种), 相位因子分两部分, 一部分是由于散射动量交换的散射波相位, 另一部分是当前散射情况下粒子相遇的散射相位之和, $1/2$ 因子是为了保证在处理散射矩阵时, 结果一致, 因为这里还没有引入入射系数与散射系数, 因此相位相除应为 $\frac{\theta}{2} - (-\frac{\theta}{2}) = \theta$. (这里 ai 解释的是真烂)

对于散射相位有 $\theta(k_l, k_j) = -\theta(k_j, k_l)$. 我们可以选取简单情况 $x_1 < \dots < x_M$. 将散射相位提到前面系数 A_P 中, 那么波函数变为: $\psi = \sum_P A_P e^{i \sum_{j=1}^N k_{P_j} x_j}$. 现将波函数代入本征方程, 在 x_i 与 x_{i+1} 不相邻情况下, $E = E_0 + J \sum_{j=1}^N (1 - \cos k_j)$. 而在相邻情况下有:

$$\frac{A_{P_1 \dots P_{i+1} P_i \dots P_N}}{A_{P_1 \dots P_i P_{i+1} \dots P_N}} = - \frac{1 + e^{i(k_{P_i} + k_{P_{i+1}})} - 2e^{ik_{P_{i+1}}}}{1 + e^{i(k_{P_i} + k_{P_{i+1}})} - 2e^{ik_{P_i}}} = S_{k_{P_i}, k_{P_{i+1}}}$$

与之对应可以简化为: $2 \cot \frac{\theta(k_i, k_j)}{2} = \cot \frac{k_j}{2} - \cot \frac{k_i}{2}$. 利用周期性边界条件:

$$e^{ik_{P_1} N} = \frac{A_{P_1 \dots P_N}}{A_{P_2 \dots P_N P_1}} = \frac{A_{P_1 \dots P_N}}{A_{P_2 P_1 \dots P_N}} \frac{A_{P_2 P_1 \dots P_N}}{A_{P_2 P_3 P_1 \dots P_N}} \dots \frac{A_{P_2 \dots P_1 P_N}}{A_{P_2 \dots P_N P_1}}$$

既然以上结果与具体排列无关, 那么假设 $P_1 = j$, 得到:

$$e^{ik_j N} = \prod_{l \neq j}^M S_{jl}^{-1}, \quad S_{jl} = S_{k_j, k_l}$$

引入快度 λ ，重参数化为 $e^{ik_j} = \frac{\lambda_j - i/2}{\lambda_j + i/2}$ 。经过代数运算，可以得到散射矩阵形式为：

$$S_{ij} = \frac{\lambda_i - \lambda_j + i}{\lambda_i - \lambda_j - i}$$

上述方程可化为标准形式：

$$\left(\frac{\lambda_j - i/2}{\lambda_j + i/2} \right)^N = - \prod_{l=1}^M \frac{\lambda_j - \lambda_l - i}{\lambda_j - \lambda_l + i}$$

上式右边的符号是因为费米子交换统计的性质。类似，其满足： $2 \cot \frac{\theta(k_i, k_j)}{2} = \cot \frac{k_j}{2} - \cot \frac{k_i}{2}$ 。总能量为：

$$E(\lambda_1 \dots \lambda_N) = J \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_j^2 + 1/4} + E_0$$

准动量的分布通过将参数化后的 Bethe 方程求对数，定义 $\theta_n(x) = 2 \arctan(2x/n)$ 。可以得到：

$$\theta_1(\lambda_j) = \frac{2\pi I_j}{N} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M \theta_2(\lambda_j - \lambda_i)$$

进一步的，我们定义：

$$Z(\lambda) = \frac{1}{2\pi} [\theta_1(\lambda) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M \theta_2(\lambda - \lambda_i)] \quad \sigma(\lambda) = \frac{dZ(\lambda)}{d\lambda}$$

这里 $Z(\lambda_j) = I_j/N$ 。在热力学极限下，可以得到：

$$\sigma(\lambda) = a_1(\lambda) - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d\mu \sigma(\mu) a_2(\lambda - \mu), \quad a_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{n}{\lambda^2 + n^2/4}$$

将重参数化的结果代入到能量公式中：

$$\begin{aligned} E &= E_0 + J \sum_{j=1}^M (1 - \cos k_j) = E_0 + J \sum_{j=1}^M \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_j - i/2}{\lambda_j + i/2} + \frac{\lambda_j + i/2}{\lambda_j - i/2} \right) \right) \\ &= E_0 + \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_j^2 + 1/4} \end{aligned}$$

对于动量， I_j 在 $N - M$ 为奇数时取整数，在 $N - M$ 为偶数的时候为半整数。由于求导结果 $\theta'_n(x) = \frac{n}{x^2 + n^2/4}$ ，因此：

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\lambda^2 + 1/4} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M \frac{2}{(\lambda - \lambda_i)^2 + 1} \right]$$

在 $N, M \rightarrow \infty$ 极限下，定义自旋反转密度函数 $\sigma(\mu)$ ，满足 $\frac{1}{N} \sum_{l=1}^M f(\lambda_l) \rightarrow \int d\mu \sigma(\mu) f(\mu)$ ，应用到上式，即得最终结果

值得一提的是， $\cot \frac{k_j}{2} = -2\lambda_j$ ，亦即 $k_j = \frac{1}{i} \ln \left(\frac{\lambda_j - i/2}{\lambda_j + i/2} \right) = 2\pi - 2 \operatorname{arccot}(2\lambda_j)$ 。因此：

$$p_0(\lambda) = \frac{1}{i} \ln \left(\frac{\lambda_j - i/2}{\lambda_j + i/2} \right) = k \quad \epsilon_0(\lambda) = \frac{J}{2} \frac{dk}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{J}{\lambda^2 + 1/4} = J(1 - \cos k)$$

引入下标 0 表示这是单个粒子，我们在下一节称为 0-型弦。

1.4 String Solutions

注意到 Bethe 方程存在复数解，如果我们取 $N \rightarrow \infty$ ，那么解的结构会非常有规律，我们从 $n = 2, M = 1/2$ 的情况来开始讲这部分内容：

$$\left(\frac{\lambda_1 - i/2}{\lambda_1 + i/2}\right)^N = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - i}{\lambda_1 - \lambda_2 + i} \quad \left(\frac{\lambda_2 - i/2}{\lambda_2 + i/2}\right)^N = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - i}{\lambda_2 - \lambda_1 + i}$$

如果 λ_i 的虚部不为 0，则上面方程的左边将以指数增长，所以在热力学极限下左右方程必须为零或者有限值，从而我们可以得出：

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \pm i \quad i.e. \quad \lambda_{1,2} = \lambda \pm \frac{i}{2}$$

与之对应的能量与动量分别为：

$$p_{1/2}(\lambda) = p_0(\lambda + i/2) + p_0(\lambda - i/2) = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)$$

$$\epsilon_{1/2}(\lambda) = \epsilon_0(\lambda + i/2) + \epsilon_0(\lambda - i/2) = \frac{J}{\lambda^2 + 1}$$

存在色散关系： $\epsilon_{1/2}(p) = \frac{J}{2}(1 - \cos p_{1/2})$. 对于多粒子情况，对应同一实部描述的 $n = 2M + 1$ 个快速度，其复数解可归纳为复合体（n-弦），亦即：

$$\lambda_m^{(M)} = \lambda_M + im, \quad m = -M, -M + 1, \dots, M - 1, M$$

其中 $M = \frac{n-1}{2} = 0, 1/2, 1, \dots, \lambda_M$ 是共同实部， n 为奇数时，中心部分对应实数。

也可将以上内容记为：

$$\lambda_m^{(M)} = \lambda_M + i\left(\frac{n+1}{2} - j\right) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

记 ν_M 为长度为 M 的弦的个数，则具有给定磁化强度的状态满足

$$R = \sum_M (2M + 1) \nu_M.$$

当 ν_0 （即单粒子解的数量）在此求和中占主导地位时，我们预期通过弦假设得到的结果能很好地近似实际情形。一个 M -复形的能量和动量通过对一个弦内所有快速变量求和得到：

$$p_M(\lambda_M) = \sum_{m=-M}^M p_0(\lambda_M + im) = \frac{1}{i} \ln \frac{\lambda_M - i(2M+1)/2}{\lambda_M + i(2M+1)/2} = \pi - \theta_{2M+1}(\lambda_M)$$

$$\epsilon_M(\lambda_M) = \sum_{m=-M}^M \epsilon_0(\lambda_M + im) = \frac{2J(2M+1)}{4\lambda_M^2 + (2M+1)^2} = \frac{J}{(2M+1)^2} (1 - \cos p_M)$$

磁化强度表示的是自旋翻转的个数，总自旋等于 $S_{tol}^z = N/2 - R$. 由于这些快速度代表一组 $2M + 1$ 个自旋，它们以相同的实快速度一起运动，并且倾向于彼此靠近（否则当它们分开时会导致波函数指数衰减），我们将它们视为一个整体。实际上，一个复形内各个快速变量之间的所有相互作用可以被分解，并在复形之间的相互作用中分别求和。

由于其规则结构，我们有很多相消项。考虑这些后，我们可以看到，我们可以再次考虑一个 M -复形与一个简单磁振子（0-复形）的散射相，通过对给定复形中的所有粒子取乘积得到：

$$S_{0,M}(\lambda_0 - \lambda_M) = S_{0,M}(\lambda) = \frac{\lambda - i(M + 1/2)}{\lambda + i(M + 1/2)} = \frac{\lambda - in/2}{\lambda + in/2}$$

二者的相对快度为：

$$\lambda_0 - (\lambda_M + im) = \lambda - im, \quad \lambda = \lambda_0 - \lambda_M$$

因此总散射相位为 $S_{0,M}(\lambda) = \prod_{m=-M}^M S(\lambda - im)$ ，而单个的散射矩阵形式为 $S(\lambda) = \frac{\lambda - i/2}{\lambda + i/2}$ 。代入连乘，只保留首位分子分母项不能消去，得到最终结果。而两个长度分别为 M 和 M' 的复形之间的散射为

$$S_{M,M'}(\lambda) = \prod_{L=|M-M'|}^{M+M'} S_{0,L}(\lambda)$$

使用这些符号，我们希望用每种类型 M 的复形数量 ν_M 及其质心快速变量 $\lambda_{M,j}$ （其中 $j = 1, \dots, \nu_M$ ）来描述海森堡链的一个本征态。复形的贝特方程在弦假设下，通过将属于同一复根（弦）的所有快度 $\lambda_j^{(M)}$ 进行分组，并首先对每个复根内部的快度进行乘积运算，从而只剩下关于其实部中心 $\lambda_{M,j}$ 的相容性条件：

$$e^{ip_M(\lambda_{M,j})N} = \prod_{M'} \prod_{\substack{j' \\ (M',j') \neq (M,j)}}^{\nu_{M'}} S_{M,M'}(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'}), \quad \forall M; \quad j = 1, \dots, \nu_M.$$

从单个快速性的贝特方程出发, 对于单个快速度 $\lambda_j^{(M)}$, 标准的贝特方程为:

$$e^{ip_0(\lambda_j^{(M)})N} = \prod_{(M',j',m') \neq (M,j,m)} S(\lambda_j^{(M)} - \lambda_{j'}^{(M')})$$

其中乘积遍历所有其他快速度 (包括不同复合体中的快速性)。由于复合体内部的结构是规则的, 我们可以将乘积分解为: 同一复合体内部的相互作用与不同复合体之间的相互作用: 对于复合体 (M,j) 中的快速度 $\lambda_j^M + im$, 其贝特方程变为:

$$e^{ip_0(\lambda_{M,j}+im)N} = \left[\prod_{m' \neq m} S(i(m-m')) \right] \times \left[\prod_{(M',j') \neq (M,j)} \prod_{m'} S(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'} + i(m-m')) \right]$$

复合体内部的相互作用项: $\prod_{m' \neq m} S(i(m-m'))$. 在假设中这些项自动满足, 因为构型本身就是通过要求这些内部散射相位平衡来定义的。不同复合体之间的相互作用可以重新组织。注意到对于固定的 M 和 M' , 我们有:

$$\prod_{m=-M}^M \prod_{m'=-M'}^{M'} S(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'} + i(m-m')) = S_{M,M'}(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'})$$

对复合体内所有快速度取乘积。现在, 我们对复合体 (M,j) 内的所有 $(2M+1)$ 个快速性分别写出贝特方程, 并将它们相乘。左边:

$$\prod_{m=-M}^M e^{ip_0(\lambda_{M,j}+im)N} = e^{iN \sum_{m=-M}^M p_0(\lambda_{M,j}+im)} = e^{iN p_M(\lambda_{M,j})}$$

右边: 复合体内部相互作用项相互抵消, 只剩下复合体之间的相互作用:

$$\prod_{(M',j') \neq (M,j)} S_{M,M'}(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'})$$

最后整理可得:

$$e^{ip_M(\lambda_{M,j})N} = \prod_{M'} \prod_{\substack{j' \\ (M',j') \neq (M,j)}} S_{M,M'}(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'})$$

取对数, 引入 (半) 整数量子数 $I_{M,j}$ 以考虑每个复根类型对数的多值分支, 并利用熟悉的恒等式

$$\frac{1}{i} \ln \frac{\lambda - in/2}{\lambda + in/2} = \pi + 2 \arctan \frac{2\lambda}{n} = \pi + \theta_n(\lambda),$$

我们得到

$$N\theta_{2M+1}(\lambda_{M,j}) = 2\pi I_{M,j} + \sum_{(M',j') \neq (M,j)} \theta_{M,M'}(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'}),$$

其中

$$\theta_{M,M'}(\lambda) \equiv \theta_{M+M'}(x) + 2\theta_{M+M'-2}(x) + \dots + 2\theta_{|M-M'|+2}(x) + (1 - \delta_{M,M'})\theta_{|M-M'|}(x),$$

并且约定 $L=0$ 项被省略。方程被称为 *Bethe - Gaudin - Takahashi* 方程。

$$iNp_M(\lambda_{M,j}) = 2\pi i I_{M,j} + \sum_{(M',j') \neq (M,j)} \frac{1}{i} \ln S_{M,M'}(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'})$$

其中 $I_{M,j}$ 是 (半) 整数量子数，用于标记对数的不同分支。由公式：
 $p_M(\lambda^M) = \pi - \theta_{2M+1}(\lambda^M)$ 代入得：

$$iN[\pi - \theta_{2M+1}(\lambda_{M,j})] = 2\pi i I_{M,j} + \sum_{(M',j') \neq (M,j)} \frac{1}{i} \ln S_{M,M'}(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'})$$

展开散射相位项

$$\frac{1}{i} \ln \frac{\lambda - in/2}{\lambda + in/2} = \pi + \theta_n(\lambda)$$

对于 $S_{M,M'}$ ：

$$\frac{1}{i} \ln S_{M,M'}(\lambda) = \sum_{L=|M-M'|}^{M+M'} \left[\frac{1}{i} \ln S_{0,L}(\lambda) \right]$$

而：

$$\frac{1}{i} \ln S_{0,L}(\lambda) = \frac{1}{i} \ln \frac{\lambda - i(2L+1)/2}{\lambda + i(2L+1)/2} = \frac{1}{i} \ln \frac{\lambda - in/2}{\lambda + in/2} = \pi + \theta_{2L+1}(\lambda)$$

定义：

$$\theta_{M,M'}(\lambda) \equiv \theta_{M+M'}(x) + 2\theta_{M+M'-2}(x) + \cdots + 2\theta_{|M-M'|+2}(x) + (1 - \delta_{M,M'})\theta_{|M-M'|}(x),$$

这样：

$$\frac{1}{i} \ln S_{M,M'}(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'}) = \sum_{j=1, j'=1}^{m, m'} [\pi + S_{0,L} \left(\lambda + \frac{i}{2}(m - m') - i(j - j') \right)] = 2\pi K - \theta_{m,m'}(\lambda)$$

其中 K 是某个整数。将所有 2π 整数项吸收到量子数 $I_{M,j}$ 的重新定义中，最终得到公式：

$$N\theta_{2M+1}(\lambda_{M,j}) = 2\pi I_{M,j} + \sum_{(M',j') \neq (M,j)} \theta_{M,M'}(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'})$$

在弦假设下，每个态因此由复根的数量 ν_M 以及每个复根类型的贝特数 $I_{M,j}$ 来表征。由于自旋链的希尔伯特空间是有限的，并非所有量子数都是允许的。首先，在每个复根内部，必须有 $I_{M,j} \neq I_{M,j'}$ 才能得到非零解。此外，由于动量被限制在一个布里渊区内（源于实空间中晶格的存在），贝特数是有界的。我们注意到，一个发散的快度 $\lambda_M^{(\infty)} = \infty$ （对应于布里渊区边缘的准动量）与所有其他粒子具有固定的散射相位，因为 $\arctan \pm \infty = \pm \pi/2$ 。因此，我们得到 $\lambda_M^{(\infty)}$ 由以下贝特数给出：

$$I_M^{(\infty)} = - \sum_{M' \neq M} [2 \min(M, M') + 1] \nu_{M'} - \left(2M + \frac{1}{2} \right) (\nu_M - 1) + \frac{N}{2}.$$

由于添加一个 M -复根会使此边界移动 $\frac{1}{2\pi} \theta_{M,M}(\infty) = 2M + \frac{1}{2}$ ，因此表征一个有限快度（在其到达边缘的快度之前）的最大量子数为

$$I_M^{\max} = I_M^{(\infty)} - \left(2M + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{N-1}{2} - \sum_{M'} J(M, M') \nu_{M'}$$

对于方程：

$$N\theta_{2M+1}(\lambda_{M,j}) = 2\pi I_{M,j} + \sum_{(M',j') \neq (M,j)} \theta_{M,M'}(\lambda_{M,j} - \lambda_{M',j'})$$

我们观察快速发散的渐进行为，在 $\lambda_{M,j} \rightarrow \infty$ 下，方程左边 $\theta_{2M+1}(\lambda_{M,j}) \rightarrow \theta_{2M+1}(\infty) = \pi$ ，我们将其改写为：

$$I_{M,j} = \frac{N}{2} - \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{(M',j') \neq (M,j)} \theta_{M,M'}(\infty) \right]$$

注意 $\lambda_{M,j} \rightarrow \infty$ ，而 $\lambda_{M',j'}$ 是有限值。因为 ν_M 表示类型为 M 的弦的数量，

求和项分解为：
$$\begin{cases} \sum_{M' \neq M} \nu_{M'} \theta_{M,M'}(\infty) & \text{对于 } M' \neq M \\ (\nu_M - 1) \theta_{M,M}(\infty) & \text{对于 } M' = M \end{cases}$$
 同时，我们分析

$\theta_{M,M'}(\lambda) \equiv \sum_{L=|M-M'|}^{M+M'} [\theta_L(\lambda) + \theta_{L+1}(\lambda)]$ 的渐进行为 ($L \neq 0$)，不难得出：

$$\frac{1}{2\pi} \theta_{M,M'}(\infty) = \begin{cases} 2 \min(M, M') + 1 & \text{对于 } M' \neq M \\ 2M + \frac{1}{2} & \text{对于 } M' = M \end{cases}$$

将以上内容总结代入整理，得到：

$$I_M^{(\infty)} = - \sum_{M' \neq M} [2 \min(M, M') + 1] \nu_{M'} - \left(2M + \frac{1}{2}\right) (\nu_M - 1) + \frac{N}{2}$$

其中

$$J(M, M') \equiv \begin{cases} 2 \min(M, M') + 1 & M \neq M' \\ 2M + \frac{1}{2} & M = M' \end{cases}$$

并且式中额外的 $1/2$ 平移考虑到了每个快速都会导致贝特数在整数和半整数之间切换（或反之）。由于所有散射相位都是其自变量的奇函数，我们有：

$$I_{M,\min} = -I_{M,\max}$$

这意味着对于一个 M -复根，存在 $P_M = 2I_M^{\max} + 1 = N - 2 \sum_{M'} J(M, M') \nu_{M'}$ 个空位。我们注意到，如果向系统中添加任何弦，则任何尺寸的复根的允许值范围都会变窄。利用这些结果，可以估算在弦假设下可达到的态的数量，并且可以证明其数量级为 2^N ，正如我们所期望的那样，这意味着在此框架下可能只有很少的态被忽略。这类被忽略的态通常涉及大量未组织成弦的复快速度（数量为格点数 N 的有限比例），但它们仍然能够满足贝特方程，因为左边的指数增长/衰减被右边恰当地补偿了。如前所述，这些无效态对模型的热力学性质贡献不大，但对于确定贝特解的完备性以及进行其他研究（如关联函数、动力学响应或处理有限系统）非常重要。

1.5 热力学方程

Part 1: 铁磁情形 $J = 1$

对于铁磁耦合，完全极化的态 $|0\rangle$ 可以被视为基态。实际上，它与 $S = N/2$ 多重态中的所有其他态是简并的，这些态可以通过向 $|0\rangle$ 添加零动量磁振子来生

成。最低能量的态是单个长波磁振子以及束缚态, 这些束缚态与多个磁振子激发相比具有更低的能量 (显然, 铁磁耦合有利于翻转自旋的聚集)。因此, 基态可以描述为磁振子真空, 其激发具有二次色散关系。因此, 在标度极限下, 铁磁海森堡链不能用共形场论来描述, 并且由于其高的基态简并度, 它在 XXZ/XYZ 链的相图中是一个有些奇异的点。

Part 2: 反铁磁情形: $J = -1$

反铁磁区间是物理应用中最相关的, 因为铁磁耦合在自然界中更为罕见。此外, 虽然铁磁性允许半经典描述, 但反铁磁海森堡链显示出真正的量子特性。可以证明, 并且从直觉上也讲得通, 反铁磁区的基态必须在 $S^z = 0$ ($R = N/2$) 扇区中寻找。由于在此区间内束缚态的能量比未束缚的磁振子高, 基态配置必须由 0 型复粒子组成, 即单个准粒子激发:

$$\nu_0 = \frac{N}{2}: \quad \nu_M = 0, \quad M \geq \frac{1}{2}, \quad \rightarrow \quad R = \frac{N}{2}.$$

使用前文结果, 我们发现此配置的空位数是

$$P_0 = N - 2J(0,0)\nu_0 = N - \frac{N}{2} = \frac{N}{2},$$

这等于粒子态的数量。因此, 量子数占据了所有允许的空位:

$$-\frac{N}{4} + \frac{1}{2} \leq I_{0,k} \leq \frac{N}{4} - \frac{1}{2},$$

并且当 $N/2$ 为奇数 (偶数) 时是整数 (半整数)。因此, 只有一个具有 $N/2$ 个实磁振子的态, 这就是反铁磁基态 $|AFM\rangle$ 。

对于单粒子能量为 $\frac{1}{2} \frac{J}{\lambda^2 + 1/4}$, 而 $2M+1$ 个粒子的 M-弦能量为 $\frac{2J(2M+1)}{4\lambda_M^2 + (2M+1)^2}$, 假设中心位置相同, λ 均为 0, 那么在 $J = -1$ 的反铁磁情况下能量大小比较为:

$$-2(2M+1) < \frac{-2}{(2M+1)}$$

亦即未束缚的磁振子能量低于束缚态粒子。动量分布可以参考 Lieb—liniger 气体的部, 由于基态动量对称分布且周期性条件要求下间隔为 1, 可通过求和的方式获得通项结果。

在此基态上的激发态是通过逐步从该单态中取出准粒子并将它们移入复粒子来构造的, 即我们将用 κ 来表征激发态, 其中

$$\nu_0 = \frac{N}{2} - \kappa.$$

对于一般的 κ , 我们可以有以下配置:

$$\nu_0 = \frac{N}{2} - \kappa: \quad \nu_M = 0, \quad M \geq \frac{1}{2}, \quad R = \frac{N}{2} - \kappa,$$

其空位数为 $P_0 = \frac{N}{2} + \kappa$, 这会产生 2κ 个空穴 (用于表征该态) 和总自旋 $S^z = \kappa$ 。除了这些解之外, 我们还可以有磁化强度更小 (一直到 0) 且包含大量复粒子的态。再次地, 实量子数的空位数允许存在两个空穴, 而对于 $1/2$ -复粒子则没有自由度, 因此其态是固定的。

对于 $\kappa = 1$ ，我们无法激发任何复粒子，因此我们有 $R = N/2 - 1$ ，这对应于总自旋 $S^z = 1$ 。这种情况下的空位数为

$$P_0 = N - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{N}{2} - 1 \right) = \frac{N}{2} + 1$$

这比粒子数多出两个。这意味着该扇区中一个态的贝特数是允许范围内的所有量子数，但缺少两个：这两个空穴的选择表征了该态。

对于 $\kappa = 2$ ，我们有两种可能性：我们可以像之前一样保持 $\nu_M = 0$ （对于 $M \geq 1/2$ ），得到一个磁化强度为 $S^z = 2$ 的态。其物理性质与 $\kappa = 1$ 扇区相似，只是该态由四个缺失的量子数（4 个空穴）描述。第二种可能性是取 $\nu_{1/2} = 1$ （且对于 $M \geq 1$ ，有 $\nu_M = 0$ ），这保持了 $R = N/2$ 和 $S^z = 0$ 。此时空位为：

$$P_0 = N - 2 \left(\frac{N}{2} - 2 \right) \frac{1}{2} - 2J \left(0, \frac{1}{2} \right) = \frac{N}{2}$$

$$P_{1/2} = N - 2 \left(\frac{N}{2} - 2 \right) J \left(\frac{1}{2}, 0 \right) - 2J \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = 4 - 3 = 1.$$

我们从基态开始，其贝特数填满了允许的空位区间，没有空穴。我们假设 $N/2$ 是奇数（偶数情况只需稍作修改），因此有：

$$I_{0,j} = j, \quad j = -\frac{N}{4} + \frac{1}{2}, -\frac{N}{4} + \frac{3}{2}, \dots, \frac{N}{4} - \frac{1}{2}.$$

贝特方程可以写为：

$$\arctan(2\lambda_j) = \pi \frac{j}{N} + \frac{1}{N} \sum_i \arctan(\lambda_j - \lambda_i).$$

在 $N \rightarrow \infty$ 极限下，变量 $x = \frac{j}{N}$ 变得连续，并被限制在范围 $-1/4 \leq x \leq 1/4$ 内。根的集合 λ_j 变为一个函数 $\lambda(x)$ ，变为

$$\arctan(2\lambda(x)) = \pi x + \int_{-1/4}^{1/4} \arctan(\lambda(x) - \lambda(y)) dy.$$

由于可观测量依赖于（最好用）快度 λ_j 而不是整数 $I_{0,j}$ 来表达，我们希望执行变量变换并对 λ 而不是 x 进行积分：

$$\frac{1}{N} \sum_j f(\lambda_j) = \int_{-1/4}^{1/4} f(\lambda(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \rho_0(\lambda) d\lambda,$$

其中变量变换 $x \rightarrow \lambda(x)$ 将区间 $-1/4 \leq x \leq 1/4$ 映射到整个实轴 $-\infty < \lambda < \infty$ 。更明确地说，实速率的密度 $\rho_0(\lambda)$ 可以写成变量变换的雅可比行列式，即

$$\rho_0(\lambda) = \frac{dx}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda'(x)} \Big|_{x=\lambda^{-1}(\lambda)}.$$

在公式左右对 x 求导，可得：

$$\frac{2\lambda'(x)}{1 + 4(\lambda(x))^2} = \pi + \int_{-1/4}^{1/4} \frac{\lambda'(x)}{1 + (\lambda(x) - \lambda(y))^2} dy$$

利用密度函数 $\rho_0(\lambda) d\lambda = dx$ ，令 $\mu = \lambda(y)$ ，得到：

$$\frac{2}{1 + 4\lambda^2} = \pi \rho_0(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda - \mu)^2} \rho_0(\mu) d\mu$$

我们得到关于密度 $\rho_0(\lambda)$ 的线性积分方程：

$$\rho_0(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{2}{1+4\lambda^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda-\mu)^2+1} \rho_0(\mu) d\mu.$$

这个积分方程与我们在 *Lieb-Liniger* 模型中遇到的类型相同，并且通过记住散射相位的定义可以写成相同的形式：

$$\rho_0(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\lambda-\mu) \rho_0(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} \theta_1'(2\lambda),$$

其中我们定义了核函数

$$\mathcal{K}(\lambda) \equiv \frac{d}{d\lambda} \theta_2(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} 2 \arctan(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2+1}.$$

由于这个积分方程的定义域是整个实轴，它可以通过傅里叶变换来求解：

$$\tilde{\rho}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\lambda} \rho_0(\lambda) d\lambda$$

利用

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{n}{\lambda^2+n^2} e^{-i\lambda\omega} d\lambda = e^{-n|\omega|}$$

我们可以将积分方程转化为

$$\tilde{\rho}_0(\omega) (1 + e^{-|\omega|}) = e^{-\frac{1}{2}|\omega|}$$

由此得到

$$\rho_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\lambda} \tilde{\rho}_0(\omega) d\omega = \frac{1}{2 \cosh(\pi\lambda)}.$$

基态的动量和能量则由下式给出：

$$K = N \int p_0(\lambda) \rho_0(\lambda) d\lambda = \frac{\pi}{2} N \mod 2\pi \equiv K_{\text{AFM}}$$

$$E = E_0 + N \int \epsilon_0(\lambda) \rho_0(\lambda) d\lambda = N \left(\frac{1}{4} - \ln 2 \right) \equiv E_{\text{AFM}}$$

其中 $\rho_0(\lambda)$ 和 $\epsilon_0(\lambda)$ 在式中定义。这个结果最初是由 *Hulthen* 推导出的。

现在我们考察具有 $\nu_0 = N/2 - 1$ 且对于 $M \geq 1/2$ 有 $\nu_M = 0$ 的态。它们由两个空穴表征：假设空缺的量子数是 j_1 和 j_2 ：

$$I_{0,j} = j + \vartheta_H(j-j_1) + \vartheta_H(j-j_2)$$

其中 $\vartheta_H(x)$ 是 *Heaviside* 阶跃函数。实根速率密度 $\rho_t(\lambda)$ （其中 t 代表三重态）的积分方程为

$$\rho_t(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\lambda-\mu) \rho_t(\mu) d\mu = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\lambda^2} - \frac{1}{N} [\delta(\lambda-\lambda_1) + \delta(\lambda-\lambda_2)]$$

其中 $\lambda_{1,2}$ 是 $x_1 = j_1/N$ 和 $x_2 = j_2/N$ 在映射 $x \rightarrow \lambda(x)$ 下的像。

在取走两个量子数的情况下，量子数顺沿增加 1，动量公式中 $j \neq j_1, j_2$ ，且 $\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ 将动量公式代入贝特方程，参考前文的证明过程，连续化后结果为：

$$\arctan(2\lambda(x)) = \pi x + \frac{\pi}{N}(\vartheta(x - x_1) + \vartheta(x - x_2)) + \int_{-1/4}^{1/4} \arctan(\lambda(x) - \lambda(y)) dy$$

再对 x 求导，由于阶跃函数求导为狄拉克函数，即可得文中形式。

由于我们处理的是线性方程，我们可以将解写为：

$$\rho_t(\lambda) = \rho_0(\lambda) + \frac{1}{N} [\tau(\lambda - \lambda_1) + \tau(\lambda - \lambda_2)]$$

其中 $\tau(\lambda)$ 满足方程

$$\tau(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\lambda - \mu) \tau(\mu) d\mu = -\delta(\lambda)$$

其在傅里叶空间中的解为：

$$\tilde{\tau}(\omega) = \frac{-1}{1 + e^{-|\omega|}}.$$

其在实空间的形式有些复杂，但我们可以通过在 ω 空间工作来评估它对态的动量和能量的贡献分别为 ($\tilde{p}_0(\omega) = 2\pi i \frac{e^{-|\omega|/2}}{\omega}$)：

$$\begin{aligned} \int p_0(\lambda) \tau(\lambda - \lambda') d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{p}_0(\omega) \tau(-\omega) e^{i\omega\lambda'} = \int \frac{e^{-|\omega|/2}}{1 + e^{-|\omega|}} \frac{e^{i\omega\lambda'}}{i\omega} d\omega \\ &= \int \tilde{\rho}_0(\omega) \left(\int^{\lambda'} e^{i\omega\lambda} d\lambda \right) d\omega = 2\pi \int^{\lambda'} \rho_0(\lambda) d\lambda = \arctan[\sinh \pi\lambda'] \end{aligned}$$

能量为：

$$\begin{aligned} \int \epsilon_0(\lambda) \tau(\lambda - \lambda') d\lambda &= -\frac{1}{2} \int p'_0(\lambda) \tau(\lambda - \lambda') d\lambda \\ &= -\frac{i}{4\pi} \int \omega \tilde{p}_0(\omega) \tau(-\omega) e^{i\omega\lambda'} d\omega = -\frac{1}{2} \int \tilde{\rho}_0(\omega) e^{i\omega\lambda'} d\omega = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\cosh(\pi\lambda)}. \end{aligned}$$

因此，由给出的态的总动量和能量为

$$\begin{aligned} K &= N \int p_0(\lambda) \rho_t(\lambda) d\lambda = K_{AFM} + k(\lambda_1) + k(\lambda_2) \\ E &= N \int \epsilon_0(\lambda) \rho_t(\lambda) d\lambda = E_{AFM} + \epsilon(\lambda_1) + \epsilon(\lambda_2), \end{aligned}$$

其中

$$k(\lambda) \equiv \frac{\pi}{2} - \arctan \sinh(\pi\lambda), \quad \epsilon(\lambda) \equiv \frac{\pi}{2 \cosh(\pi\lambda)}$$

这里的计算可以通过 *Mathematics* 验证，动量的积分结果可以通过反三角函数变换等价于计算结果。需要注意到变换及积分顺序并代入密度函数。但是态的总动量与能量形式中动量变为 $\frac{\pi}{2} - k(\lambda)$ ，能量变为 $-\epsilon(\lambda)$ ，这是因为激发态是移除量子数对应产生空穴，等价于在系统中增加一个自旋子，因此其在物理量的修正上体现为负值，而激发意味着能量高于基态，因此需要添加负号使激发变为正的准粒子能量

我们构建的这个态在基态上有两个激发（自旋子），自旋子的修饰后能量和动量结合，我们发现每个激发都由以下色散关系表征：

$$\epsilon(k) = \frac{\pi}{2} \sin k, \quad -\frac{\pi}{2} \leq k \leq \frac{\pi}{2}.$$

量子数中的每个空穴产生一个准粒子激发，称为自旋子，即一个自旋 $1/2$ 的激发。自旋子仅作为集体激发存在（因为翻转一个自旋 $1/2$ 会产生一个自旋 1 的激发）。

现在让我们考察之前考虑的最后一个态，即具有 $\nu_0 = N/2 - 2$ ， $\nu_{1/2} = 1$ ，且对于 $M \geq 1$ 有 $\nu_M = 0$ 的态。对于实根的密度 $\rho_s(\lambda)$ （s 代表单重态），我们得到积分方程：

$$\rho_s(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \rho_s(\mu) d\mu = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + 4\lambda^2} - \frac{1}{N} \left[\delta(\lambda - \lambda_1) + \delta(\lambda - \lambda_2) + \frac{1}{2\pi} \theta'_{0,1/2}(\lambda - \lambda_{1/2}) \right],$$

其中 $\lambda_{1,2}$ 代表空穴，积分核 $K(x) = \frac{4}{4x^2 + 1}$ ，注意式子中的狄拉克函数其实是在求和抛去两项之后利用积分正则化表达狄拉克函数的结果，为了归一化因此前面没有 π 系数；右边最后一项是来自与速率为 $\lambda_{1/2}$ 的 $1/2$ 型复粒子散射的贡献，它是贝特方程的解：

$$2 \arctan(\lambda_{1/2}) = \frac{1}{N} \sum_j \theta_{1/2,0}(\lambda_{1/2} - \lambda_{0,j}) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1/2,0}(\lambda_{1/2} - \lambda) \rho_s(\lambda) d\lambda,$$

我们有 $\theta_{3,1}(\lambda) = 2 \arctan(2\lambda) + 2 \arctan \frac{2\lambda}{3}$

积分方程来源于动量，我们先来看散射相移 $\theta_{1/2,0}$ 的推导，对于前文公式： $\theta_{M,M'}(\lambda) \equiv \sum_{L=|M-M'|}^{M+M'} [\theta_L(\lambda) + \theta_{L+1}(\lambda)]$ 选取 $M = 1/2, M' = 0$ ，即得结果。积分方程则是通过之前相同步骤连续化 $M = 0$ 的实根 BGT 方程而得到。对于这个唯一的 $M = 1/2$ 复根，其快度记为 $\lambda_{1/2}$ ，其贝特量子数记为 $I_{1/2,1}$ 。对于这种构型，其允许的量子数取 $I_{1/2,1} = 0$ 。将 $M = 1/2, j = 1$ 代入方程：

$$N \theta_2(\lambda_{1/2}) = 2\pi I_{1/2,1} + \sum_{(M',j') \neq (1/2,1)} \theta_{1/2,M'}(\lambda_{1/2} - \lambda_{M',j'})$$

现在处理右边的求和项 $\sum_{(M',j') \neq (1/2,1)} \theta_{1/2,M'}(\lambda_{1/2} - \lambda_{M',j'})$ 。可能的 (M',j') 包括：所有实根 ($M' = 0$)：共有 $\nu_0 = N/2 - 2$ 个；其他 $M' = 1/2$ 的复根：没有，因为 $\nu_{1/2} = 1$ ，且我们排除了 $(1/2,1)$ 本身；其他 $M' \geq 1$ 的复根：没有，因为 $\nu_M = 0$ 。因此，求和只对 $M' = 0$ 的实根进行，方程变为：

$$N \cdot 2 \arctan(\lambda_{1/2}) = \sum_{j'=1}^{N/2-2} \theta_{1/2,0}(\lambda_{1/2} - \lambda_{0,j'})$$

两边同时除以 N ：

$$2 \arctan(\lambda_{1/2}) = \frac{1}{N} \sum_{j'=1}^{N/2-2} \theta_{1/2,0}(\lambda_{1/2} - \lambda_{0,j'})$$

在热力学极限 $N \rightarrow \infty$ 下，方程的右边变为：

$$\frac{1}{N} \sum_{j'} \theta_{1/2,0}(\lambda_{1/2} - \lambda_{0,j'}) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1/2,0}(\lambda_{1/2} - \mu) \rho_s(\mu) d\mu$$

于是我们得到： $2 \arctan(\lambda_{1/2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1/2,0}(\lambda_{1/2} - \mu) \rho_s(\mu) d\mu$

如前所述， $1/2$ 型复粒子的贝特数是 $I_{1/2,1} = 0$ ，因为其允许范围仅限于一个点。解是：

$$\rho_s(\lambda) = \rho_0(\lambda) + \frac{1}{N} [\tau(\lambda - \lambda_1) + \tau(\lambda - \lambda_2) + \sigma(\lambda - \lambda_{1/2})]$$

步骤如同上我们给出必要的结果 $\lambda_{1/2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ 。因此， $1/2$ 型复粒子的速率是固定的，并由空穴的速率决定。这是由于缺乏为此激发选择量子数的自由度所致。

此外，如果我们计算此态的动量，我们发现：

$$K = N \int p_0(\lambda) \rho_s(\lambda) d\lambda + p_{1/2}(\lambda_{1/2}) = K_{\text{AFM}} + k(\lambda_1) + k(\lambda_2)$$

因为，积分项可以抵消。类似地，对于能量

$$E = E_{\text{AFM}} + N \int \epsilon_0(\lambda) \rho_s d\lambda + \epsilon_{1/2}(\lambda_{1/2}) = E_{\text{AFM}} + \epsilon(\lambda_1) + \epsilon(\lambda_2),$$

这可以很容易地从之前的结果推导出来，记住 $\epsilon_M(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda} k(\lambda)$ 。因此，我们看到弦的贡献相互抵消，并且此态具有与之前计算的没有复粒子的态完全相同的动量、能量（和色散关系）。特别地，两种情况下两个激发都服从。

因此，我们看到这两族在纯实根分布中有两个空穴的态具有相同的能量和动量（当在两种情况下取相同的空穴时），它们仅在总自旋上有所不同，第一种情况是 $S^z = 1$ ，后一种情况是 $S^z = 0$ 。人们注意到，由于将算符 $S^+ \equiv \sum_{n=1}^N S_n^+$ 应用于这些态中的任何一个都会使其湮灭，所以这些是最高权态。这支持了每个空穴激发是自旋 $1/2$ 激发（自旋子）的解释。在第一种情况下，我们描述了两个激发组合成一个三重态（处于其最高权态 $S^z = 1$ ），而在第二种情况下我们得到了一个单重态（ $S^z = 0$ ）。

对于一般的 κ ，同样的图像成立：具有 $\nu_0 = N/2 - \kappa$ 且对于 $M \geq 1/2$ 有 $\nu_M = 0$ 的态是 2κ -自旋子态，处于自旋 $S^z = \kappa$ 的最高权态。所有其他具有相同 κ 的态具有更低的磁化强度，进入粒子数不超过 2κ 的多重态。在所有这些情况下， M -复粒子对能量和动量的贡献恒为零，因此能量/动量仅取决于粒子数，即纯实解中的空穴数。注意，这些多重态仅在海森堡点（在零外磁场下）是严格简并的，在一般的 XXZ 模型中将会发生分裂。

1.6 与磁场的作用

在存在磁场 h 的情况下，哈密顿量需附加塞曼能项：

$$H = -J \sum_{n=1}^N \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_{n+1} - 2h \sum_{n=1}^N S_n^z.$$

由于哈密顿量与总磁化强度对易，磁场不影响本征态，仅改变其本征能量。对于铁磁情况 $J > 0$ ，基态仍然是完全极化的状态，磁场仅分裂每个多重态中能级的能量。

在反铁磁情况 $J < 0$ 下， H 的两部分相互竞争。磁场在能量上倾向于自旋沿正 z 方向排列，而相互作用能则惩罚任何自旋近邻对齐。显然，当 $h \rightarrow \infty$ 时，具有最大磁化强度 $S_z = N/2$ 的磁子真空态 $|0\rangle$ 是能量最低态；而在 $h = 0$ 时，我们由 $R = N/2$ 个实快度构造了具有 $S_z = 0$ 的基态，即自旋子真空态 $|AFM\rangle$ 。开启正磁场不会影响 $|AFM\rangle$ 的能量，但会逐步降低更高磁化强度态的能量。特别地，对于给定的磁化强度 S_z ， $S = S_z$ 的最高权态最小化了相互作用能，因此是能量上更有利的态。因此，对于任何 h 值，基态都是由实磁子快度构造的。

对于给定的磁化强度 $S^z = N/2 - R$ ，最低能量态由 $\nu_0 = R$ 和 $M > 0$ 时的 $\nu_M = 0$ 给出，并且该态的 0-络合物的 Bethe 量子数为

$$I_{0,j} = \frac{1}{2}(2j - R - 1), \quad j = 1, \dots, R.$$

从 $h = 0$ 时的 $|AFM\rangle (R = N/2)$ 开始并增加 h ，我们将首先与 $R = N/2 - 1 = \nu_0$ 态发生能级交叉，该态将成为基态，直到在更高的 h 处被 $R = N/2 - 2 = \nu_0$ 态取代，依此类推，直到在 h_s 处， $R = 0 = \nu_0$ 态 $|0\rangle$ 成为能量最低态，并在 h 更大时保持如此，此时磁化强度已达到饱和。由于塞曼项对每个态能量的贡献与 S^z 成线性关系，渐进磁化强度扇区中最低能量态之间的能级交叉间隔等于无磁场时这些态之间的（一半）能隙 $\Delta E_R = E_{GS}^{(R)} - E_{GS}^{(R+1)}$ ，该能隙随 S^z 增大而增大。因此，最后的能级交叉发生在具有一个 π -动量磁子的 $R = 1$ 态和 $|0\rangle$ 之间，对应的交叉场为 $h_s = \Delta E_0/2$ 。我们有 $\Delta E_0 = 2J$ （这是此阶梯结构中最大的能隙），因此使极化态成为绝对基态的饱和场为 $h_s = J$ 。

尽管磁化强度在每个能级交叉处以有限间隔变化，但在热力学极限下，此阶梯结构可以用一条平滑的曲线来近似，其导数给出磁化率。在有限 h 下，当 $N \rightarrow \infty$ 时，积分方程变为

$$\rho_0(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K(\lambda - \mu) \rho_0(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} \theta'_1(\lambda),$$

其中快度密度的有限支撑反映了 $h \rightarrow h + \delta h$ 的变化改变了支撑 $\Lambda \rightarrow \Lambda + \delta \Lambda$ ，从而改变了密度 $\rho_0(\lambda) \rightarrow \rho_0(\lambda) + \delta \rho_0(\lambda)$ 。由定义的态的能量和磁化强度为

$$e = \frac{E}{N} = \frac{|J| - 4h}{4} + 2 \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \left[h - \frac{|J|}{\lambda^2 + 1} \right] \rho_0(\lambda) d\lambda$$

$$S_z = \frac{N}{2} - N \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \rho_0(\lambda) d\lambda$$

基态条件是 $\frac{\partial e}{\partial \Lambda} = 0$ 。基态条件等价于以下 h 和 Λ 之间的关系：

$$h = \pi |J| \frac{\rho_0(\Lambda)}{Z(\Lambda)},$$

其中 $Z(\lambda)$ 是定义的 *dressed charge*，与相比的前置因子差异源于之间色散关系的不同。给定 h 的基态磁化强度可通过反解并将其代入，并结合的解得到。

需要注意的是，引入磁场项 ($h \neq 0$) 后的变化：磁场项 $-2hS^z$ 的加入，打破了 $SU(2)$ 对称性，降为 $U(1)$ 对称性（绕 z 轴的旋转对称性）。总 \hat{S}^z 仍然是守恒量。磁场项是一个全局的、对角的扰动。它只影响系统的能谱，而不改变系统的本征态波函数本身。因为 $[\hat{H}(0), \hat{S}_{\text{total}}^z] = 0$ ，所以 $\hat{H}(0)$ 和 \hat{S}_{total}^z 有共同的本征态。磁场项只是在这些共同本征态上附加了一个能量 $-2h(N/2 - M)$ 。对于一个由 M 个快动量 $\{\lambda_k\}$ 描述的态（即一个有 M 个自旋翻转的态），其总 $S^z = N/2 - M$ 。该态的能量变为：

$$E(\{\lambda_k\}, h) = E_0(J) - \frac{J}{2} \sum_{j=1}^M \frac{1}{\lambda_j^2 + 1/4} - 2h \left(\frac{N}{2} - M \right)$$

其中 $E_0(J)$ 是无磁场时的常数能量偏移。基态不再是 $S_{\text{total}}^z = 0$ 的态，而是能量最低的态。

本节参考资料：

《凝聚态物理导论》. 钟寅；

《An Introduction to Integrable Techniques for One-dimensional Quantum Systems》. Fabio Franchini

2 Algebraic Bethe Ansatz

Algebraic Bethe Ansatz (ABA) 方法本质上是我们迄今为止使用的坐标方法的二次量子化。它利用转移矩阵的 *Yang - Baxter* 代数，通过将某些算子（可以解释为准粒子产生算符）作用于参考态（称为赝真空）来生成波函数。*Bethe* 方程作为这些态成为转移矩阵特征向量的相容性条件出现。ABA 构造是为了理解看似不同类型的可积系统之间关系而长期努力的结果之一。事实上，它是逆散射方法 (ISM) 的量子版本：这种构造通过经典可积非线性微分方程的 *Lax* 表示，使得对这些系统有了更深入的理解，并且最显著的是，系统地构造了它们的孤子解。

2.1 Preliminaries

代数方法的一般性

代数贝特方法通过引入某些辅助空间或变量来扩大物理空间，以“解耦”相互作用，使得物理自由度彼此之间不相互作用，而只与辅助空间作用。此过程将问题简化到允许对这个扩大的系统进行精确求解的程度。在 ABA 中，人们可以将这个额外的空间视为描述一个新的自由度，它在系统内部传播。我们将物理希尔伯特空间记为 \mathcal{H} ，额外的空间记为 \mathcal{V}_a ，其中 a 是一个标签，用于在需要多个此类空间的副本时区分它们。人们引入一个称为单演矩阵 (monodromy matrix) 的算子 $\mathcal{T}_a(\lambda) : \mathcal{H} \times \mathcal{V}_a \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{V}_a$ ，它作用在扩大的空间上。这个算子依赖于谱参数 λ ，它可以被解释为注入系统的探针的快度。对辅助空间求迹得到转移矩阵： $\mathbf{T}(\lambda) \equiv \text{tr}_a \mathcal{T}_a(\lambda) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ，我们试图构造后者的本征态。

模型的可积性体现在以下性质中：两个单演矩阵的应用顺序通过一个称为缠

绕子或 \mathcal{R} 矩阵, 定义为 $\mathcal{R}_{a,b}(\lambda) : \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_b \rightarrow \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_b$ 的算子, 通过相似变换相关联:

$$\mathcal{T}_a(\lambda) \mathcal{T}_b(\mu) \mathcal{R}_{a,b}(\mu - \lambda) = \mathcal{R}_{a,b}(\mu - \lambda) \mathcal{T}_b(\mu) \mathcal{T}_a(\lambda).$$

这种关系的存在是缠绕子本身满足一个类似方程的结果, 该方程称为 *Yang-Baxter 方程 (YBE)*:

$$\mathcal{R}_{1,2}(\lambda - \mu) \mathcal{R}_{1,3}(\lambda - \nu) \mathcal{R}_{2,3}(\mu - \nu) = \mathcal{R}_{2,3}(\mu - \nu) \mathcal{R}_{1,3}(\lambda - \nu) \mathcal{R}_{1,2}(\lambda - \mu)$$

以图形方式描绘, 这里 1, 2, 3 表示 \mathcal{V} 的三个不同模式, \mathcal{R} -矩阵作用在其上 (成对地)。YBE 被认为是可积性的核心, 是整个构造所依据的方程。事实上, 每

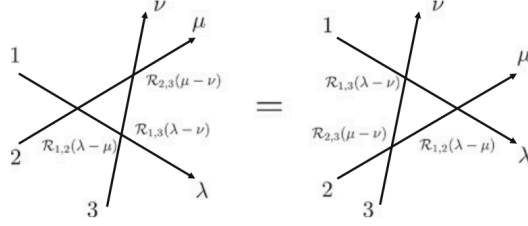


图 1: yang-Baxter 方程图表示

个解都生成一个可积模型族。然而, 对于给定的可积哈密顿量, 没有重构缠绕子算子的方法。因此, 在实践中, 人们寻找 YBE 方程的解, 并且每当找到一个 \mathcal{R} 矩阵时, 就使用逆散射方法 ISM 机制来识别手头的模型。

在利用代数贝特方法的时候, 对于一维可积模型我们选取的辅助空间为试探粒子的自旋空间, 而对于物理系统则为可积链上的晶格自旋空间, \mathcal{R} 矩阵表示的是两个试探粒子的散射结果, 可积性要求散射顺序对结果不产生影响因此满足 YBE, 而 Lax 算子代表的是单个散射试探粒子与晶格散射的结果, 因此其乘积代表的是 \mathcal{T} 矩阵 (单演矩阵), 对于 $1/2$ 系统, 因为最终可以产生 4 种最终结果: 上自旋进上自旋出, 上自旋进下自旋出, 下自旋进上自旋出, 下自旋进下自旋出, 因此单演矩阵有四个矩阵元, 其迹代表的转移矩阵表示的是不考虑试探粒子的具体入射状态, 对所有可能性求和, 这里需要注意的是, 单演矩阵求迹是表示求当试探粒子处于完全混合态 (即我们对它的具体入射状态无知) 时, 物理系统的有效演化算符, 可以类比统计物理中的配分函数, 即:

$$T(\lambda) = \text{tr}_a \mathcal{T}_a(\lambda) = \langle \uparrow | \mathcal{T}_a(\lambda) | \uparrow \rangle + \langle \downarrow | \mathcal{T}_a(\lambda) | \downarrow \rangle$$

因此, 概述量子 ISM 的通用步骤, 通常, 人们假设物理希尔伯特空间可以分解为每个粒子或每个格点 \mathcal{H}_j 的希尔伯特空间的直积: $\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j$ 。对于 XXX 自旋链, 每个格点的空间是 \mathbb{C}^2 , 即一个二维复向量, 对应于自旋向上或向下 (自旋 $-1/2$) 的概率空间。辅助空间 \mathcal{V} 原则上可以是一个不同的 κ 维空间, 但在 XXX 模型中 $\kappa = 2$ (事实上, 在这种情况下 \mathcal{H}_j 和 \mathcal{V} 是同构的):

第一步, 对于给定的 κ , 寻找 Yang-Baxter 方程的一个解。

第二步，有了 \mathcal{R} 算子的一个解，寻找满足以下关系的 \mathcal{L} 算子（或 Lax 算子） $\mathcal{L}_{j,a} \mathcal{H}_j \times \mathcal{V}_a \rightarrow \mathcal{H}_j \times \mathcal{V}_a$ ，可以简记为 RLL 关系：

$$\mathcal{L}_{j,a}(\lambda) \mathcal{L}_{j,b}(\lambda') \mathcal{R}_{a,b}(\lambda' - \lambda) = \mathcal{R}_{a,b}(\lambda' - \lambda) \mathcal{L}_{j,b}(\lambda') \mathcal{L}_{j,a}(\lambda).$$

需要注意的是， R 矩阵描述的是两个粒子之间的散射过程，YBE 方程描述的是纯粒子之间的散射一致性条件，三个粒子之间的散射顺序不影响结果；而 RLL 关系描述的是单粒子与格点的散射一致性条件，作用在格点的物理空间与试探粒子的辅助空间中。

第三步，单演矩阵被构造为链上 N 个不同格点的 \mathcal{L} 的乘积：

$$\mathcal{T}_a(\lambda) \equiv \mathcal{L}_{N,a}(\lambda - \xi_N) \mathcal{L}_{N-1,a}(\lambda - \xi_{N-1}) \cdots \mathcal{L}_{1,a}(\lambda - \xi_1),$$

其中我们允许每个格点被赋予不同的谱参数 ξ_j 。如果 λ 标识了注入系统的探针的快度，那么 ξ_j 是位于格点 j 的自由度的快度，因此它们的散射依赖于 $\lambda - \xi_j$ 。注意，通过构造，如此定义的单演矩阵满足，这可以通过用 \mathcal{L} 算子表示它并重复使用将缠绕子移过链来检验

第四步，现在我们需要对辅助空间求迹。单演算子可以表示为一个 $\kappa \times \kappa$ 矩阵，其中 κ^2 个元素中的每一个都是作用在 \mathcal{H} 上的算子。例如，聚焦于 $\kappa = 2$ 的情况，单演矩阵可以写成

$$T_a(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}.$$

转移矩阵则是：

$$T(\lambda) \equiv \text{tr}_a T_a(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda).$$

如果 $\dim \mathcal{H}_j = 2$ ，算子 A, B, C, D 也可以表示为 $2^N \times 2^N$ 矩阵，它们的显式表达式并不比转移矩阵简单，并且比哈密顿量更不直观。然而，当转移矩阵被代入原始公式时，单演矩阵的 *Yang-Baxter* 方程提供了不同谱参数下的 A, B, C, D 之间的一系列广义对易关系，这些关系可以被用来生成系统的本征态。

第五步，识别出一个被 C 湮灭的态 $|0\rangle$ ： $C(\lambda)|0\rangle = 0$ 。这是一个参考态，它被称为真空，因为它不承载任何准粒子激发。具有 R 个准粒子激发的态被构造为

$$|\Psi\rangle = \prod_{j=1}^R B(\lambda_j)|0\rangle.$$

准粒子快度由本征向量条件确定

$$T(\lambda)|\Psi\rangle = [A(\lambda) + D(\lambda)]|\Psi\rangle = A(\lambda)|\Psi\rangle.$$

这个条件可以通过使用 A, B, C, D 算子之间的对易关系来推导，并且等价于关于 λ_j 的 R 个代数 *Bethe* 方程（这些方程将不依赖于 λ ）。

为了计算给定算子的期望值，需要通过 A, B, C, D 算子来表达它。注意，通常人们感兴趣的是局域观测量，而出现在单演矩阵中的算子是非局域的。因此，虽然在 ABA 中态的表达形式相当紧凑，但观测量通常是复杂的对象。尽管如此，构造背后的代数结构允许某些优雅的操作，并且在某些情况下可以得到显式结果。其中一个显式公式是范数，它是归一化所有其他关联函数的基本要素。

预备内容

在我们继续进行代数构造之前，让我们再次从散射矩阵的角度看一下二体相互作用。让我们将二体波函数写为

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, x_2) &= \sum_{\mathcal{P}} \Psi(Q|\mathcal{P}) e^{i \sum_j x_i x_j k p_j} \\ &= \begin{cases} \Psi(1, 2|1, 2) e^{i(x_1 k_1 + x_2 k_2)} + \Psi(1, 2|2, 1) e^{i(x_1 k_2 + x_2 k_1)}, & x_1 < x_2 \\ \Psi(2, 1|1, 2) e^{i(x_2 k_1 + x_1 k_2)} + \Psi(2, 1|2, 1) e^{i(x_2 k_2 + x_1 k_1)}, & x_1 > x_2 \end{cases} \\ &= e^{ixK} \begin{cases} \Psi(1, 2|1, 2) e^{ixk} + \Psi(1, 2|2, 1) e^{-ixk}, & x < 0 \\ \Psi(2, 1|1, 2) e^{-ixk} + \Psi(2, 1|2, 1) e^{ixk}, & x > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

其中我们使用了质心坐标

$$X \equiv \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x \equiv \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad K \equiv k_1 + k_2, \quad k \equiv k_1 - k_2$$

我们显式地写出了振幅 $\Psi(Q|\mathcal{P})$ 对粒子顺序（由 Q 排列给出）和与不同动量的配对（由 \mathcal{P} 排列给出）的依赖性。

想象一个散射实验。从左边射入一束波，并在左边测量到反射分量的振幅 $R(k)$ ，在右边测量到透射分量的振幅 $T(k)$ ：

$$\Psi(1, 2|1, 2) = R(k)\Psi(1, 2|2, 1) + T(k)\Psi(2, 1|2, 1).$$

类似地，如果从右边开始入射一束波，我们有

$$\Psi(2, 1|1, 2) = R(k)\Psi(2, 1|2, 1) + T(k)\Psi(1, 2|2, 1).$$

我们可以用矩阵形式来表述这些方程，有多种方式。我们可以写

$$\Psi^r(\mathcal{P}') = \begin{pmatrix} \Psi(1, 2|1, 2) \\ \Psi(2, 1|1, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(k) & T(k) \\ T(k) & R(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi(1, 2|2, 1) \\ \Psi(2, 1|2, 1) \end{pmatrix} = S^r(k)\Psi(\mathcal{P})$$

其中粒子的身份与动量无关，这种表示称为反射对角表示。另一种选择是透射对角表示：

$$\Psi^t(\mathcal{P}') = \begin{pmatrix} \Psi(2, 1|1, 2) \\ \Psi(1, 2|1, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(k) & R(k) \\ R(k) & T(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi(2, 1|2, 1) \\ \Psi(1, 2|2, 1) \end{pmatrix} = S^t(k)\Psi(\mathcal{P})$$

其中我们将每个粒子与其携带的动量标识起来。由于粒子是不可区分的，我们可以同样认为在散射事件后，一个粒子已经穿过（透射对角）或者已经反冲并将其动量传递给另一个粒子（反射对角）。

反射对角和透射对角表示通过一个交换粒子的矩阵 $\Pi \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 相关联：

$$\Psi^r(\mathcal{P}) = \Pi \Psi^t(\mathcal{P}), \quad S^r(k) = \Pi S^t(k).$$

我们实际上可以写 $S^r(k) = R(k) + \Pi T(k)$, $S^l(k) = T(k) + \Pi R(k)$. 使用 $\Pi^2 = 1$ ，如果粒子具有玻色子/费米子统计性，我们有 $\Pi = \pm 1$ ，因此

$$S^r(k) = R(k) \pm T(k), \quad S^l(k) = T(k) \pm R(k) = \pm S^r(k).$$

透射系数和反射系数由粒子的统计性及其散射相位 $S^r(k) = -e^{-i\theta_{\pm}(k)}$ 唯一确定，其中 $+/-$ 号分别指玻色子/费米子。

在格点系统中，散射问题必须补充关于格点上是否存在粒子的信息，因此，散射矩阵变成一个 4×4 矩阵。我们将二体相互作用写成一个连接 4 种可能态 $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ 的矩阵（我们使用自旋语言，但我们知道我们同样可以用空/占据格点替换自旋上/下）。如果相互作用守恒磁化/粒子数，我们有

$$S^r = \begin{pmatrix} \Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & T & 0 \\ 0 & T & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta \end{pmatrix} = \Theta(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & t & 0 \\ 0 & t & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Theta(k) s^r(k),$$

其中引入了约化的反射和透射振幅 $r \equiv R/\Theta, t \equiv T/\Theta$ ，其中 $\Theta(k) = -e^{-i\theta_{\pm}(k)}$ 用来表示粒子统计属性，对于平行自旋态粒子不可分辨因此散射只是简单的相位累积

交换算子被表示为 4×4 矩阵

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

其中 $+$ 号适用于玻色子和自旋，而 $-$ 号保留给费米子。 Π 可用于从反射对角表示切换到透射对角表示： $S' = \Pi S' = \Theta(k) s'(k)$ 。

注意这些矩阵自然可以表示为 2×2 Pauli 矩阵的乘积，例如

$$s^t(k) = \frac{1}{2} [1 + \sigma_z \sigma'_z + t(k) (1 - \sigma_z \sigma'_z) + r(k) (\sigma_x \sigma'_x + \sigma_y \sigma'_y)].$$

由于 $t(0) = 0, r(0) = 1$ ，我们有 $s'(0) = \Pi = \frac{1 + \sigma \cdot \sigma'}{2}$ 。

2.2 Algebraic bethe ansatz of Heisenberg XXX spin chain

2.2.1 Hamiltonian and Permutations for XXX-spin chain

我们考虑一个由 N 个自旋组成的闭合链：每个自旋与其最近邻相互作用；最后一个和第一个自旋也相互作用。每个粒子在其局部量子空间 h_n 中描述，它是二维的（包括两个自旋）。我们称 \mathcal{H} 为描述整个 N 自旋系统的完整量子空间： $\mathcal{H} = h_1 \otimes \dots \otimes h_N$ 。

前文已经对 XXX 链给出过具体的推导，这里我们选取基态能量为 0，哈密顿量为：

$$H = \sum_{\alpha, n} \left(S_n^\alpha S_{n+1}^\alpha - \frac{1}{4} \mathbb{1} \right) = \sum_{\alpha, n} (S_n^\alpha S_{n+1}^\alpha) - \frac{N}{4} \mathbb{1},$$

哈密顿量是一个 $2^N \times 2^N$ 维的矩阵，周期性条件为 $S_{n+N}^\alpha = S_n^\alpha$ ，其中 $\mathbb{1}$ 是单位矩阵。我们首先定义置换算符 P ，使得 $Pa \otimes b = b \otimes a$ ：

$$P = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=0}^3 \sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{\alpha=1}^3 \sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha \right)$$

以矩阵形式我们有：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可以观察到其作用在二位自旋空间张量积下结果为 $P|\uparrow\downarrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$ ，首先要注意的重要一点： P 和 $L_{a,n}$ 是通过 σ^α 定义的， H 也是如此。因此，首先尝试用置换算符写出哈密顿量是有意义的。我们有：

$$\sum_n P_{n,n+1} = \sum_n \frac{1}{2} \mathbb{1} + \sum_n \left(\frac{1}{2} \sigma_n^\alpha \right) \otimes \sigma_{n+1}^\alpha$$

因此（其中 $S_n^\alpha = \sigma_n^\alpha/2$ ）

$$\frac{1}{2} \sum_n P_{n,n+1} = \sum_{\alpha,n} \left(S_n^\alpha S_{n+1}^\alpha + \frac{1}{4} \mathbb{1} \right) = H + \frac{N}{2} \mathbb{1}$$

因此我们得出第一个非常重要的结果：

$$H = \frac{1}{2} \sum_n P_{n,n+1} - \frac{N}{2}$$

因此，在下文中，我们将尝试重写 $\sum_n P_{n,n+1}$ 以便重写哈密顿量。

2.2.2 Lax 算符与单演矩阵

接下来我们要定义的算符是 Lax 算符。它作用于局部量子空间 h_n 和一个我们将称为 V_a 的辅助空间：形式上它作用于它们的张量积 $V_a \otimes h_n$ 。它通过以下形式定义：

$$L_{a,n}(\lambda) = \lambda \mathbb{1}_a \otimes \mathbb{1}_n + i \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_a^\alpha \otimes S_n^\alpha = \begin{pmatrix} \lambda + iS_n^3 & iS_n^- \\ iS_n^+ & \lambda - iS_n^3 \end{pmatrix}_a$$

这里 $S^+ = S^1 + iS^2$ 和 $S^- = S^1 - iS^2$ 。现在可以重写 Lax 算符 $L_{a,n}(\lambda)$ ：

$$L_{a,n}(\lambda) = \left(\lambda - \frac{i}{2} \right) \mathbb{1}_{a,n} + iP_{a,n}$$

Lax 算符描述辅助粒子与第 n 个格点自旋的局部散射过程，对角元描述辅助粒子与格点自旋平行的散射，非对角元则是描述自旋翻转的过程。初学时好奇为什么 Lax 算符需要这样构造是否有内在的数学或物理原因或者图像？其实上，由于 XXX 链满足全局 $SU(2)$ 全局不变性，要求算符必须与 $SU(2)$ 群作用对易，在张量积空间上满足该不变性的算符由恒等算符与交换算符的线性组合生成，这对于缠绕子 \mathcal{R} 与 lax 算符都是一样的，由于存在 RLL 关系，利用算符作用在基态上的结果对比系数可得到参数方程，选取规范要求相对谱参数趋于零单演矩阵趋于置换矩阵且无相互作用极限下由单位矩阵主导，因此可以得到缠绕子与 Lax 算符的最终形式为：

$$\mathcal{R}(\lambda) = \lambda I \otimes I + iP \quad L_{a,n}(\lambda) = \left(\lambda - \frac{i}{2} \right) I_{a,n} + iP_{a,n}$$

接下来我们将把缠绕子与 L_{ax} 算符的数学表达式与物理图像联系起来，首先我们给出二者与态的作用结果，定义 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 为两个表示的态， \mathcal{R} 矩阵的作用结果为：

$$\begin{aligned} R|\uparrow\uparrow\rangle &= (\lambda + i)|\uparrow\uparrow\rangle & R|\uparrow\downarrow\rangle &= \lambda|\uparrow\downarrow\rangle + i|\downarrow\uparrow\rangle \\ R|\downarrow\uparrow\rangle &= \lambda|\downarrow\uparrow\rangle + i|\uparrow\downarrow\rangle & R|\downarrow\downarrow\rangle &= (\lambda + i)|\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

可以看到对于同自旋态，没有交换，相遇不作用只产生一个整体相位（透射振幅）；对于反自旋态包括透射（保持原序）与交换（互换位置）两部分以复振幅叠加

对于 L_{ax} 算符，前面自旋表示试探粒子后面自旋表示格点粒子，作用结果为：

$$\begin{aligned} L_{a,n}|\uparrow\uparrow\rangle &= (\lambda + \frac{i}{2})|\uparrow\uparrow\rangle & L_{a,n}|\uparrow\downarrow\rangle &= (\lambda - \frac{i}{2})|\uparrow\downarrow\rangle + i|\downarrow\uparrow\rangle \\ L_{a,n}|\downarrow\uparrow\rangle &= (\lambda - \frac{i}{2})|\downarrow\uparrow\rangle + i|\uparrow\downarrow\rangle & L_{a,n}|\downarrow\downarrow\rangle &= (\lambda + \frac{i}{2})|\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

在完整量子空间 H 中，我们将考虑：

$$L_{a,n}(\lambda) = \lambda \mathbb{1}_a \otimes \mathbb{1}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_N + i \sum_{\alpha=1}^3 \lambda \sigma_a^\alpha \otimes \mathbb{1}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{n-1} \otimes \frac{1}{2} \sigma_n^\alpha \otimes \mathbb{1}_{n+1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_N$$

这允许我们定义单演矩阵 (Monodromy matrix)： $T_{a,N}(\lambda) = L_{a,N}(\lambda) \cdots L_{a,1}(\lambda)$. 在辅助空间 V 中，单演矩阵采用以下形式：

$$T_{a,N}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix}_a$$

单演矩阵为什么是一个 2×2 只跟 λ 有关的矩阵？

原因在于这是一个作用在 $V_a \otimes H$ 空间上的算符，因此可以视为在辅助空间上的 2×2 矩阵，其矩阵元是作用在 H 上的算符，形式上由于 L_{ax} 算符是只依赖于 λ 的，因此单演矩阵矩阵元也只依赖于 λ

我们可以用 λ 重写单演矩阵 $T_{a,N}(\lambda)$ ：

$$T_{a,N}(\lambda) = \lambda^N \mathbb{1} + i \lambda^{N-1} \sum_{\alpha} (\sigma_a^\alpha \otimes S_n^\alpha) + \cdots$$

我们需要的下一个部分是单演矩阵在辅助空间 V 上的迹：

$$F(\lambda) = \text{Tr}_{V_a} T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$$

稍后我们将能够证明 $[F(\lambda), F(\mu)] = 0$ 。我们现在可以做的是用 λ 展开 F ：

$$F(\lambda) = 2\lambda^N + \sum_{l=0}^{N-2} Q_l \lambda^l$$

由于 $[F(\lambda), F(\mu)] = 0$ ，我们也必须有 $[Q_l, Q_k] = 0$ 。阶数为 $N-1$ 的项为零，因为对于每个 α 有 $\text{Tr} \sigma^\alpha = 0$ 。 L_{ax} 算符的两个重要性质是：

$$L_{a,n}(i/2) = iP_{a,n} \quad \frac{d}{d\lambda} L_{a,n}(\lambda) = \mathbb{1}_{a,n}$$

有前面 λ 重写的单演矩阵形式可求得求迹时 λ^{N-1} 项会因为泡利矩阵求迹而等于零，因此展开结果最高项为 $2\lambda^N$ ，次高项为 λ^{N-2} 。

此外，还成立：

$$T_{a,N}(i/2) = i^N P_{a,N} P_{N-a,1} \cdots P_{a,2} P_{a,1} = i^N P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{N-1,N} P_{a,N}$$

最后一个等式源于具有完全不同索引的置换相互对易，且 $P_{i,j} = P_{j,i}$ 以及 $P_{i,j} P_{i,k} = P_{i,k} P_{k,j}$ 。此外，

$$\text{Tr}_a P_{a,N} = \mathbb{1}_N$$

下一步是在 $\lambda = i/2$ 处展开 $F(\lambda)$ 。使用导数的乘积法则，我们得到：

$$\left. \frac{d}{d\lambda} T_a(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} = \left. \frac{d}{d\lambda} \left(\prod_{n=1}^N L_{a,n}(\lambda) \right) \right|_{\lambda=i/2} \stackrel{\frac{dL}{d\lambda} = \mathbb{1}}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^N \left(\prod_{k \neq n} L_{a,k}(i/2) \right)$$

因此：

$$\left. \frac{d}{d\lambda} T_a(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} = i^{N-1} \sum_n P_{a,N} \cdots \hat{P}_{a,n} \cdots P_{a,1}$$

其中 \hat{P} 表示缺失。我们现在可以在辅助空间上取迹并写出：

$$\left. \frac{d}{d\lambda} F(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} = i^{N-1} \sum_n P_{1,2} \cdots P_{n-1,n+1} \cdots P_{N-1,N}$$

我们想重写最后这个和中的项。我们知道 $P_{n,n+1} P_{n-1,n} P_{n-1,n+1} = P_{n-1,n}$ 。因此，由于 $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$ ，我们得到 $P_{n-1,n+1} = P_{n-1,n} P_{n,n+1} P_{n-1,n}$ 。回顾具有完全不同索引的置换相互对易，我们现在可以将这个结果代回方程得到：

$$\left. \frac{d}{d\lambda} F(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} = i^{N-1} \sum_n P_{1,2} \cdots P_{n-1,n} P_{n,n+1} \cdots P_{N-1,N} P_{n-1,n}$$

回顾前面方程，我们可以因此写出：

$$\left. \frac{d}{d\lambda} F(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} = \frac{1}{i} \sum_n F(\lambda)|_{\lambda=i/2} P_{n-1,n}$$

所以有：

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \ln F(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} = F(\lambda)^{-1} \left(\left. \frac{d}{d\lambda} F(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} \right) = \frac{1}{i} \sum_n P_{n-1,n}$$

如果我们将最后一个和的索引移动 1，并考虑到 $P_{i,j} = P_{j,i}$ ，回顾哈密顿量方程，我们得到本节的最终结果：

$$\boxed{H = \frac{i}{2} \frac{d}{d\lambda} \ln F(\lambda) \Big|_{\lambda=i/2} - \frac{N}{2}}$$

平移算子与守恒荷

我们定义：

$$U = i^{-N} \text{Tr}_a T_N(i/2) = P_{1,2} P_{2,3} \cdots P_{N-1,N}$$

现在，置换算子 $P_{a,b}$ 的一个基本性质是：如果我们有某个作用在第一个向量空间 V_a 上的算子 X_a ，那么 $P_{a,b}X_aP_{a,b} = X_b$ 。将此表达式代入 U 的定义，并回想起作用在不同向量空间上的算子彼此对易，我们得到：

$$X_n U = U X_{n-1}$$

我们可以将此作用解释为一个平移——其量子力学生成元是动量 P 。此外， $U^* = U = U^{-1}$ （根据置换的基本性质），因此 U 是酉算子。这允许我们定义一个动量 P ，使得：

$$U = e^{iP}$$

在前面的章节中，我们看到了如何通过 $F(\lambda)|_{\lambda=1/2}$ 来写出哈密顿量（利用定义的 U ，我们有 $U = i^{-N}F(i/2)$ ，因此我们可以直接使用 U ）。特别地，对于哈密顿量，我们取了 F 关于 λ 的一阶导数。我们还看到了如何基于 U 的对数来写出动量，因此也可以基于 $\ln F(i/2)$ 来写。

需要说明的是 $P_{a,b}X_aP_{a,b} = X_b$ ，其作用效果相当与先交换两个空间再作用 $X_a \otimes I_b$ （算符只作用于 V_a 空间上），最后交换过来，写成：

$$P_{a,b}(X_a \otimes I_b)P_{a,b}(|\psi\rangle_a \otimes |\phi\rangle_b) = P_{a,b}(X_a \otimes I_b)(|\phi\rangle_a \otimes |\psi\rangle_b) = |\psi\rangle_a \otimes X_b|\phi\rangle_b = (I_a \otimes X_b)(|\psi\rangle_a \otimes |\phi\rangle_b)$$

也就是 $P_{a,b}X_aP_{a,b} = X_b$

现在的想法是，我们可以取更高阶的导数，从而得到 N 个守恒荷，这些守恒荷可以用置换算子来表示。例如，如果我们考虑二阶导数，我们得到：

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^2}{d\lambda^2} T(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} \\ &= \sum_{n \neq m} \prod_{k \neq n, m} L_{a,k}(i/2) \\ &= i^{N-2} \sum_{n \neq m} P_{a,N} \cdots \hat{P}_{a,n} \cdots \hat{P}_{m,a} \cdots P_{a,1} \\ &= i^{N-2} \sum_{m \neq n, n \pm 1} P_{1,2} \cdots P_{m-1,m+1} \cdots P_{n-1,n+1} \cdots P_{N-1,N} + \\ &+ i^{N-2} \sum_n P_{1,2} \cdots P_{n-2,n+1} \cdots P_{N-1,N} \end{aligned}$$

我们想要简化最后一个表达式。第一项很容易：我们利用对于 $j = n, m$ ，有 $P_{j-1,j+1} = P_{j-1,j}P_{j,j+1}P_{j-1,j}$ 。第二项看起来更复杂，但其实并非如此。实际上，我们有

$$P_{n-2,n+1} = P_{n-2,n-1}P_{n-1,n+1}P_{n-2,n-1} = P_{n-2,n-1}P_{n-1,n}P_{n,n+1}P_{n-1,n}P_{n-2,n-1}$$

将这些表达式代入上面所述的结果中，我们发现结果简化为：

$$\left. \frac{d^2}{d\lambda^2} T(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} = \frac{i^N}{i^2} U \sum_{n,m} P_{n-1,n} P_{m-1,m}$$

现在不难猜测更高阶导数会是什么样子：

$$\left. \frac{d^p}{d\lambda^p} T(\lambda) \right|_{\lambda=i/2} = \frac{i^N}{i^p} U \sum_{j_1, \dots, j_p} P_{j_1-1, j_1} \cdots P_{j_p-1, j_p}, \quad p \leq N$$

L 和 T 的性质与 **Yang-Baxter** 方程

在本节中，我们将介绍关于算符 L 和 T 的几个重要结果。为此，我们首先必须定义 $(\lambda - \mu)$ 是一个复数，我们将其形式地写为两个量 λ 和 μ 的差，原因稍后会清楚）：

$$R_{a_1, a_2}(\lambda - \mu) = (\lambda - \mu) \mathbb{1}_{a_1} \otimes \mathbb{1}_{a_2} + iP_{a_1, a_2}$$

形式上，此算符作用于两个辅助空间 $V_{a_1} \otimes V_{a_2}$ 的张量积上。

然而，由于我们感兴趣的是作用于量子空间上的算符的作用，我们可以扩展此算符使其（平凡地）也作用于第 n 个局部量子空间：因此，形式上的底向量空间将是 $h_n \otimes V_{a_1} \otimes V_{a_2}$ 。我们现在可以写出 R 的显式形式。根据置换算符形式我们得到：

$$R_{a_1, a_2}(\lambda - \mu) = \left(\lambda - \mu + \frac{i}{2} \right) \mathbb{1}_{a_1} \otimes \mathbb{1}_{a_2} \otimes \mathbb{1}_n + \frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{a_1}^\alpha \otimes \sigma_{a_2}^\alpha \otimes \mathbb{1}_n$$

我们也可以类似地重新定义 Lax 算符：

$$L_{a, n_1}(\lambda) = \lambda \mathbb{1}_{a_1} \otimes \mathbb{1}_{a_2} \otimes \mathbb{1}_n + \frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{a_1}^\alpha \otimes \mathbb{1}_{a_2} \otimes \sigma_n^\alpha$$

$$L_{a, n_2}(\mu) = \mu \mathbb{1}_{a_1} \otimes \mathbb{1}_{a_2} \otimes \mathbb{1}_n + \frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \mathbb{1}_{a_1} \otimes \sigma_{a_2}^\alpha \otimes \sigma_n^\alpha$$

可以注意到 R 本质上也是一个非平凡地作用于两个辅助空间的 Lax 算符。

我们将使用的第一个关系是 *Yang-Baxter* 方程： RTT 关系：

$$R_{a_1, a_2}(\lambda - \mu) L_{a_1, n}(\lambda) L_{a_2, n}(\mu) = L_{a_2, n}(\mu) L_{a_1, n}(\lambda) R_{a_1, a_2}(\lambda - \mu)$$

RTT 关系: 对于如上定义的矩阵 T 和 R ，以下关系成立：

$$R_{a_1, a_2}(\lambda - \mu) T_{a_1}(\lambda) T_{a_2}(\mu) = T_{a_2}(\mu) T_{a_1}(\lambda) R_{a_1, a_2}(\lambda - \mu)$$

2.2.3 The Bethe Ansatz Equations

在前面的章节中，我们看到了如何从 Lax 算符 L 出发，并使用单演矩阵 T 的迹 F 来重写哈密顿量。我们现在的首要目标是通过上一节展示的 *Yang-Baxter* 关系推导 T 各分量之间的关系。我们有 T 分量的对易关系定理：

设 $T_N(\lambda)$ 如前文定义。则对于任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ，有：

$$[B(\lambda), B(\mu)] = 0 \quad (\text{相同的关系对 } A, C \text{ 和 } D \text{ 也成立})$$

$$A(\lambda)B(\mu) = f(\lambda - \mu)B(\mu)A(\lambda) + g(\lambda - \mu)B(\lambda)A(\mu)$$

$$D(\lambda)B(\mu) = h(\lambda - \mu)B(\mu)D(\lambda) + k(\lambda - \mu)B(\lambda)D(\mu)$$

$$f(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda} \quad g(\lambda) = \frac{i}{\lambda} \quad h(\lambda) = \frac{\lambda + i}{\lambda} \quad k(\lambda) = -\frac{i}{\lambda}$$

证明: 我们考虑两个分别作用于两个不同辅助空间的单演矩阵 $T_{a_1}(\lambda)$ 和 $T_{a_2}(\mu)$, 以便我们可以应用 RTT 关系, 像通常一样, 我们将在两个辅助空间 $V = V_1 \otimes V_2$ 的张量积上工作。在这个空间中, 两个矩阵将采取以下形式:

$$T_{a_1}(\lambda) \hat{=} \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}_{V_1} \otimes \mathbb{1}_{V_2} = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) & 0 & 0 \\ C(\lambda) & D(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(\lambda) & B(\lambda) \\ 0 & 0 & C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$T_{a_2}(\mu) \hat{=} \mathbb{1}_{V_1} \otimes \begin{pmatrix} A(\mu) & B(\mu) \\ C(\mu) & D(\mu) \end{pmatrix}_{V_2} = \begin{pmatrix} A(\mu) & 0 & B(\mu) & 0 \\ 0 & A(\mu) & 0 & B(\mu) \\ C(\mu) & 0 & D(\mu) & 0 \\ 0 & C(\mu) & 0 & D(\mu) \end{pmatrix}$$

回顾给出的 R_{a_1, a_2} 的定义, 我们还有:

$$R_{a_1, a_2}(\lambda - \mu) = \begin{pmatrix} a(\lambda - \mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda - \mu) & c(\lambda - \mu) & 0 \\ 0 & c(\lambda - \mu) & b(\lambda - \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(\lambda - \mu) \end{pmatrix}$$

这里 $a(\lambda) = \lambda + i, b(\lambda) = \lambda, c(\lambda) = i$, 该定理现在直接来自 RTT 关系, 我们有:

$$T_{a_1}(\lambda)T_{a_2}(\mu) = \begin{pmatrix} A(\lambda)A(\mu) & A(\lambda)B(\mu) & B(\lambda)A(\mu) & B(\lambda)B(\mu) \\ A(\lambda)C(\mu) & A(\lambda)D(\mu) & B(\lambda)C(\mu) & B(\lambda)D(\mu) \\ C(\lambda)A(\mu) & C(\lambda)B(\mu) & D(\lambda)A(\mu) & D(\lambda)B(\mu) \\ C(\lambda)C(\mu) & C(\lambda)D(\mu) & D(\lambda)C(\mu) & D(\lambda)D(\mu) \end{pmatrix}$$

我们可以通过反转每个矩阵元素中因子的顺序来获得矩阵 $T_{a_2}(\mu)T_{a_1}(\lambda)$:

$$T_{a_2}(\mu)T_{a_1}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\mu)A(\lambda) & B(\mu)A(\lambda) & A(\mu)B(\lambda) & B(\mu)B(\lambda) \\ C(\mu)A(\lambda) & D(\mu)A(\lambda) & C(\mu)B(\lambda) & D(\mu)B(\lambda) \\ A(\mu)C(\lambda) & B(\mu)C(\lambda) & A(\mu)D(\lambda) & B(\mu)D(\lambda) \\ C(\mu)C(\lambda) & D(\mu)C(\lambda) & C(\mu)D(\lambda) & D(\mu)D(\lambda) \end{pmatrix}$$

下一步将是计算 $R_{a_1, a_2}(\lambda - \mu)T_{a_1}(\lambda)T_{a_2}(\mu)$ 和 $T_{a_2}(\mu)T_{a_1}(\lambda)R_{a_1, a_2}(\lambda - \mu)$ 。我们不会完全执行这个计算, 只给出一些例子, 在下文中, 用 (a, b) 表示矩阵元素的索引。

$$(1, 4) : a(\lambda - \mu)B(\mu)B(\lambda) = B(\lambda)B(\mu)a(\lambda - \mu) \Rightarrow [B(\lambda), B(\mu)] = 0$$

因为 $a(\lambda - \mu) \in \mathbb{C}$.

(1, 3): 这里我们得到:

$$a(\lambda - \mu)B(\lambda)A(\mu) = c(\lambda - \mu)B(\mu)A(\lambda) + b(\lambda - \mu)A(\mu)B(\lambda)$$

我们可以交换 λ 和 μ 。因此 $(\lambda - \mu) \rightarrow -(\lambda - \mu)$ 。注意到 $g(\lambda) = c(\lambda)/b(\lambda) = -g(-\lambda)$ 并且类似地 $h(-\lambda) = a(-\lambda)/b(-\lambda) = f(\lambda)$, 然后通过除以 $b(-(\lambda - \mu))$ 得到定理的第二个断言。

(2, 4): 这里我们可以以类似于前一点的方式推导出第三个断言。其他关系可以用同样的方式推导。

2.2.4 Ansatz for the ground state

这些关系使我们能够识别一个类似于谐振子的代数结构：算符 $A + D$ 负责能量，而 B 和 C 可以用作升降算符。第一步是寻找一个基态 Ω ，它必须满足 $C\Omega = 0$ （选择 C 作为下降算符）。通过观察向量 $\omega_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，我们意识到它满足：

$$S^+\omega_n = 0$$

因此，如果我们考虑给出的 $L_{a,n}$ 的公式，我们看到，由于 $S^+\omega_n = 0$ ：

$$L_n(\lambda)v \otimes \omega_n = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{i}{2} & \text{某些项} \\ 0 & \lambda - \frac{i}{2} \end{pmatrix} v \otimes \omega_n \quad \forall v \in V_a$$

定义的 Lax 算子 $L_{a,n}(\lambda)$ ，其矩阵形式为：

$$L_{a,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + iS_n^3 & iS_n^- \\ iS_n^+ & \lambda - iS_n^3 \end{pmatrix}_a$$

考虑 Lax 算子作用于 $v \otimes \omega_n$ ，其中 $v \in V_a$ 是辅助空间中的向量，而 $\omega_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是局部状态，满足 $S^+\omega_n = 0$ 。现在，计算 $L_{a,n}(\lambda)(v \otimes \omega_n)$ 。将 Lax 算子写为算子矩阵：

$$L_{a,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

其中： $A = \lambda + iS_n^3, B = iS_n^-, C = iS_n^+, D = \lambda - iS_n^3$ 。作用于 $v \otimes \omega_n$ 时，有：

$$L_{a,n}(\lambda)(v \otimes \omega_n) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1\omega_n \\ v_2\omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av_1\omega_n + Bv_2\omega_n \\ Cv_1\omega_n + Dv_2\omega_n \end{pmatrix}$$

利用 ω_n 的性质： $C\omega_n = iS_n^+\omega_n = 0$ ； $A\omega_n = (\lambda + iS_n^3)\omega_n$ 。假设自旋为 $1/2$ ，则 $S_n^3\omega_n = \frac{1}{2}\omega_n$ ，所以 $A\omega_n = (\lambda + \frac{i}{2})\omega_n$ ； $D\omega_n = (\lambda - iS_n^3)\omega_n = (\lambda - \frac{i}{2})\omega_n$ ； $B\omega_n = iS_n^-\omega_n$ ，这里 $S_n^-\omega_n$ 不一定与 ω_n 成正比（对于自旋 $1/2$ ， $S_n^-\omega_n$ 对应另一个状态，如 $|\downarrow\rangle$ ）。因此，代入后得：

$$L_{a,n}(\lambda)(v \otimes \omega_n) = \begin{pmatrix} (\lambda + \frac{i}{2})v_1\omega_n + iS_n^-(v_2\omega_n) \\ (\lambda - \frac{i}{2})v_2\omega_n \end{pmatrix}$$

将此结果写为矩阵形式：

$$L_n(\lambda)v \otimes \omega_n = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{i}{2} & \text{某些项} \\ 0 & \lambda - \frac{i}{2} \end{pmatrix} v \otimes \omega_n$$

其中“某些项”实际上就是 iS_n^- 。这里的矩阵应被解释为算子值矩阵：元素 $\lambda + \frac{i}{2}$ 和 $\lambda - \frac{i}{2}$ 是标量算子（作用于 ω_n 时相当于乘法），而“某些项”即 iS_n^- 是一个算子。

因此我们的基态由下式给出：

$$\Omega = \bigotimes_{n=1}^N \omega_n$$

核心点是我们得到：

$$T(\lambda)\Omega = \begin{pmatrix} (\lambda + \frac{i}{2})^N & \text{某些项} \\ 0 & (\lambda - \frac{i}{2})^N \end{pmatrix} \Omega$$

因此，令 $\alpha(\lambda) = \lambda + i/2$ 和 $\delta(\lambda) = \lambda - i/2$ ，我们得到：

$$A(\lambda)\Omega = \alpha^N(\lambda)\Omega \quad D(\lambda)\Omega = \delta^N(\lambda)\Omega \quad C(\lambda)\Omega = 0$$

下一步是寻找更多的本征向量。正如我们上面看到的，我们可以使用 B 作为升降算符。因此我们将查看形式为 $(\{\lambda_k\} = \{\lambda_1 \cdots \lambda_l\})$ 是一组 l 个参数) 的向量：

$$\Phi(\{\lambda_k\}) = B(\lambda_1) \cdots B(\lambda_l)\Omega$$

核心思想是并非所有的 $\{\lambda_k\}$ 值都是允许的，因为要求 $\Phi(\{\lambda_k\})$ 是 $F(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ 的本征向量导致 $\{\lambda_k\}$ 必须满足特定的代数关系，我们现在就来推导这些关系。 $\{\lambda_k\}$ 的条件, 我们看一下以下表达式：

$$A(\lambda)\Phi(\{\lambda_k\}) = A(\lambda)B(\lambda_1) \cdots B(\lambda_l)\Omega$$

从上面显示的对易关系出发，我们知道 $A(\lambda)B(\lambda_1) = f(\lambda - \lambda_1)B(\lambda_1)A(\lambda) + g(\lambda - \lambda_1)B(\lambda)A(\lambda_1)$ 。因此我们可以写出：

$$A(\lambda)\Phi(\{\lambda_k\}) = [f(\lambda - \lambda_1)B(\lambda_1)A(\lambda) + g(\lambda - \lambda_1)B(\lambda)A(\lambda_1)]B(\lambda_2) \cdots B(\lambda_l)\Omega$$

对所有 λ_k 重复此过程（并记住 $A(\lambda)\Omega = \alpha^N(\lambda)\Omega$ ），我们得到：

$$A(\lambda)\Phi(\{\lambda_k\}) = \left[\prod_{k=1}^l f(\lambda - \lambda_k) \alpha^N(\lambda) \Phi(\{\lambda_k\}) + \text{其他项} \right]$$

思路是来自 A 和 D 的其他项必须抵消，以便我们获得 $A + D$ 的一个本征向量，这个事实导致了关于 $\{\lambda_k\}$ 的代数条件。我们现在的目标是明确地计算这些其他项。我们从最简单的一个开始。我们可以展开方程的第二项并得到：

$$g(\lambda - \lambda_1) \left[\prod_{k=2}^l f(\lambda_1 - \lambda_k) \alpha^N(\lambda_1) \Omega \right]$$

其他项看起来更复杂。尽管如此，我们可以考虑 $[B(\lambda_i), B(\lambda_j)] = 0$ 这一事实：因此可以通过将 λ_1 替换为 λ_k 来找到它们。它们具有以下形式：

$$g(\lambda - \lambda_k) \left[\prod_{j \neq k}^l f(\lambda_k - \lambda_j) \alpha^N(\lambda_k) \Omega \right]$$

$D(\lambda)\Phi(\{\lambda_k\})$ 的计算遵循相同的模式；我们只需要将 $\alpha(\lambda)$ 替换为 $\delta(\lambda)$ ， $f(\lambda)$ 替换为 $h(\lambda)$ ， $g(\lambda)$ 替换为 $k(\lambda)$ 。总结一切，我们得到（帽子 $\hat{}$ 表示对应的算符缺失）：

$$\begin{aligned} (A(\lambda) + D(\lambda))\Phi(\{\lambda_k\}) &= \left[\prod_{k=1}^l f(\lambda - \lambda_k) \alpha^N(\lambda) + \prod_{k=1}^l h(\lambda - \lambda_k) \delta^N(\lambda) \right] \Phi(\{\lambda_k\}) + \\ &\sum_{k=1}^l \left(g(\lambda - \lambda_k) \left[\prod_{j \neq k}^l f(\lambda_k - \lambda_j) \alpha^N(\lambda_k) + k(\lambda - \lambda_k) \left[\prod_{j \neq k}^l h(\lambda_k - \lambda_j) \right] \delta^N(\lambda_k) \right] \times B(\lambda_1) \cdots \hat{B}(\lambda_k) \cdots B(\lambda_l) \Omega \right) \end{aligned}$$

所以，如果我们想要有 $A + D$ 的一个本征向量，我们必须使这个求和项为 0。由于 $h(\lambda) = -g(\lambda)$ 且 $k(\lambda) = -g(\lambda)$ ，因此必须成立：

$$\left[\prod_{j \neq k} f(\lambda_k - \lambda_j) \right] \alpha^N(\lambda_k) = \left[\prod_{j \neq k} h(\lambda_k - \lambda_j) \right] \delta^N(\lambda_k)$$

回顾 $\alpha(\lambda) = \lambda + i/2$ 和 $\delta(\lambda) = \lambda - i/2$ ，我们发现这个关系取以下显式形式 (Bethe ansatz 方程)：

$$\left(\frac{\lambda_k + i/2}{\lambda_k - i/2} \right)^N = \prod_{j \neq k}^l \frac{\lambda_k - \lambda_j + i}{\lambda_k - \lambda_j - i}$$

因此我们得到一组必须满足的 l 个方程。找到它们的解通常不是一项容易的任务。

2.2.5 Actual values of physical observables

对易关系的进一步结果及关于 l 的条件, 定理下式成立：

$$\left[T_a(\lambda), \frac{1}{2} \sigma^\alpha + S^\alpha \right] = 0$$

证明：我们考虑 $\mu \rightarrow \infty$ 极限下的杨-巴克斯特方程。利用给出的 R 的定义，并写出 T_{a_2} ，我们得到（使用简写 $S^\alpha = \sigma_{h_n}^\alpha/2$ ）：

$$\begin{aligned} & \left((\lambda - \mu + \frac{i}{2}) \mathbb{1} + \frac{i}{2} \sum \sigma_{a_1}^\alpha \otimes \sigma_{a_2}^\alpha \right) T_{a_1}(\lambda) (\mu^N + i\mu^{N-1} \sum S^\alpha \otimes \sigma_{a_2}^\alpha) \\ &= (\mu^N + i\mu^{N-1} \sum S^\alpha \otimes \sigma_{a_2}^\alpha) T_{a_1}(\lambda) \left((\lambda - \mu + \frac{i}{2}) \mathbb{1} + \frac{i}{2} \sum \sigma_{a_1}^\alpha \otimes \sigma_{a_2}^\alpha \right) \end{aligned}$$

通过仅保留 μ^N 阶的项，然后两边除以 $i\mu^N$ ，我们得到：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\sum \sigma_{a_1}^\alpha \otimes \sigma_{a_2}^\alpha \right) T_{a_1}(\lambda) - T_{a_1}(\lambda) \left(\sum S^\alpha \otimes \sigma_{a_2}^\alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} T_{a_1}(\lambda) \left(\sum \sigma_{a_1}^\alpha \otimes \sigma_{a_2}^\alpha \right) - \left(\sum S^\alpha \otimes \sigma_{a_2}^\alpha \right) T_{a_1}(\lambda) \end{aligned}$$

这里我们只保留了 $T_{a_2}(\mu)$ 展开中 μ 的最高阶项（即 μ^N 和 μ^{N-1} ）。由于 $[T_{a_1}, \sigma_{a_2}^\alpha] = 0$ ，我们可以从方程中消去 $\sigma_{a_2}^\alpha$ 。此外，我们实际上得到了三个独立的方程，对应于 $\alpha = 1, 2, 3$ 的每一个值，每次只取一个自旋方向。因此定理得证。

这意味着：

$$[S^3, B] = -B \quad [S^+, B] = A - D$$

证明：这是上一个定理（以及基本性质 $[X, Y] = -[Y, X]$ ）的推论。事实上，我们有（为简洁省略指标）：

$$\begin{pmatrix} [S^3, A] & [S^3, B] \\ [S^3, C] & [S^3, D] \end{pmatrix} = (S^3, T) = -\frac{1}{2}[\sigma^3, T] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

第二个关系式可类似证明：

$$\begin{pmatrix} [S^+, A] & [S^+, B] \\ [S^+, C] & [S^+, D] \end{pmatrix} = [S^+, T] = -\frac{1}{2}[\sigma^+, T] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -C & A-D \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

对于参考态 Ω ，下式成立：

$$S^+ \Omega = 0 \quad S^3 \Omega = \frac{N}{2} \Omega$$

这些关系源于，在每个局部量子态 h_n 上，根据 S^+ 和 S^3 的定义，有 $S^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ 和 $S^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

上一个定理中展示的对易关系给出：

$$S^3 \Phi(\{\lambda_k\}) = \left(\frac{N}{2} - l \right) \Phi(\{\lambda_k\}) \quad S^+ \Phi(\{\lambda_k\}) = 0$$

第一个性质可以通过计算 $S^3 \Phi = S^3 B \Omega = [S^3, B] \Omega + B S^3 \Omega = B(S^3 - 1_{\mathcal{H}}) \Omega$ 并将此操作重复 l 次来证明。第二个关系的证明更为复杂。这意味着每一个 $\Phi(\{\lambda\})$ 都是一个最高权。因此，由于最高权的自旋不能为负，我们可以推断：

$$l \leq \frac{N}{2}$$

动量和能量

设 $\{\lambda_k\}$ 满足 Bethe 假设方程。则 $F(\lambda) \Phi(\{\lambda_k\}) = \Lambda(\lambda, \{\lambda_k\})$ ，其中：

$$\Lambda(\lambda, \{\lambda_k\}) = \alpha^N(\lambda) \prod_{k=1}^l f(\lambda - \lambda_k) + \delta^N(\lambda) \prod_{k=1}^l h(\lambda - \lambda_k)$$

这个方程的显式版本是：

$$\Lambda(\lambda, \{\lambda_k\}) = \left(\lambda + \frac{i}{2} \right)^N \left[\prod_{k=1}^l \frac{\lambda - \lambda_k - i}{\lambda - \lambda_k} \right] + \left(\lambda - \frac{i}{2} \right)^N \left[\prod_{k=1}^l \frac{\lambda - \lambda_k + i}{\lambda - \lambda_k} \right]$$

因此：

$$\Lambda(i/2, \{\lambda_k\}) = i^N \prod_{k=1}^l \frac{\lambda_k + i/2}{\lambda_k - i/2}$$

因此，由 $U = e^{iP} = i^{-N} F(i/2)$ 我们得到动量

$$P \Phi(\{\lambda_k\}) = \left[\sum_{k=1}^l p(\lambda_k) \right] \Phi(\{\lambda_k\})$$

其中：

$$p(\lambda_k) = \frac{1}{i} \ln \frac{\lambda_k + i/2}{\lambda_k - i/2}$$

对 $\ln \Lambda$ 关于 λ 求导并令 $\lambda = i/2$ ，我们得到（我们重复使用乘积法则）：

$$\begin{aligned} \left. \frac{d \ln \Lambda}{d \lambda} \right|_{\lambda=i/2} &= \left. \frac{d \Lambda}{\Lambda} \right|_{\lambda=i/2} = \frac{N i^{N-1} \left[\prod_k \frac{-\lambda_k - i/2}{i/2 - \lambda_k} \right] + i^N \sum_k \left[\frac{i}{(i/2 - \lambda_k)^2} \prod_{j \neq k} \frac{-\lambda_j - i/2}{i/2 - \lambda_j} \right]}{\Lambda \Big|_{\lambda=i/2}} \\ &= i \left(-N + \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2 + 1/4} \right) \end{aligned}$$

因此我们可以计算能量；利用方程 $H = \frac{i}{2} \frac{d}{d \lambda} \ln F(\lambda) \Big|_{\lambda=i/2} - \frac{N}{2}$ 我们有：

$$\begin{aligned} H \Phi(\{\lambda_k\}) &= \frac{i}{2} i \left(-N + \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2 + 1/4} \right) - N/2 = \left[\sum_k \varepsilon(\lambda_k) \right] \Phi(\{\lambda_k\}) \\ \varepsilon(\lambda_k) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_k^2 + 1/4} \end{aligned}$$

最后，回顾 $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ ，我们得到色散关系：

$$\varepsilon(p) = \cos(p) - 1$$

本节参考资料：

《Bethe Ansatz for Heisenberg XXX model》 arXiv:con-mat/9509183v1 2Oct 1995

《An Introduction to Integrable Techniques for One-dimensional Quantum Systems》 .Fabio Franchini

《Algebraic Bethe Ansatz》 N.A.Slavnov

《How Algebraic Bethe Aansatz works for integerable model》 L.D.Faddeev

《Algebraric and functional Bethe Ansatz for the Integrable XXX spin chain》 Patrick Kaftan.