Question de cours :

1. Enoncer et démontrer l'inégalité de Markov
2. Enoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev
3. Démontrer la variance d'une somme de variables aléatoires. Que devient cette somme dans le cas de variables mutuellement indépendantes.

Exercice 1 : Théorème de Stone-Weierstrass par approche probabiliste

Le théorème de Stone-Weierstrass est le suivant :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ Alors pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue est limite uniforme d'une suite de polynôme dans $\mathbb{R}[X]$. Démontrons ce résultat par une approche probabiliste
Soit $x \in [0, 1]$ et pour $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_i(x) \sim B(x)$ et on suppose que $(X_i(x))_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

1. On pose
$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)$$
. Donner la loi de $S_n(x)$, son espérance et variance.
2. Calculer $\mathbb{E}(f(\frac{S_n}{n}))$
3. Soit $\epsilon > 0$, justifier les assertions suivantes :
   (a) $\exists \alpha > 0, \forall x, y \in [a, b] \mid x - y \mid\leq \alpha \Rightarrow\mid f(x) - f(y) \mid\leq \epsilon$.
   (b) $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(x)}{n} - x\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{n\alpha^2}$
4. Montrer que
$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|f(x) - \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right)\right)\right| \leq \epsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{n\alpha^2}.$$
5. Conclure pour $a = 0, b = 1$.
6. Conclure pour $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Exercice 2 : Racine de polynôme aléatoire

On jette trois fois un dé équilibré à 6 faces et on note le résultat a, b et c. On introduit le polynôme Q définie par $Q(X) = aX^2 + bX + c$. Déterminer la probabilité des évènements suivants :

1. Q a deux racines réelles distincts.
2. Q a une racine réelle double.
3. Q n'a aucune racine réelle.

Exercice 3 : Minimum de variable aléatoire

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes, et suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $M = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer $M(\Omega)$. Déterminer pour $k \in M(\Omega), \mathbb{P}(M \geq k)$.
2. En déduire la loi de M.
3. Déterminer la probabilité de l'évènement A : "Il existe $i \in [\![1, n]\!]$, tel que $X_i = 1$. Montrer alors que $\mathbb{P}(A) \geq 1 - \exp(-1)$

Exercice 4 : Une nouvelle expression de l'espérance

Soit X une v.a.d. telle que $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k).$$

Exercice 5 : Urne de Polya

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On répète n fois l'expérience suivante : on tire une boule de l'urne, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

1. Quel est le nombre de boules dans l'urne après la k-ième expérience ?
2. On note N_k le nombre de boules blanches dans l'urne après la k-ième expérience. Montrer que N_k suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, k+1\}$.

Exercice 6 : Minimum et maximum de deux dés

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires indépendantes correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 : Au moins un six !

Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé parfaitement équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir

1. au moins une fois le chiffre 6 ?
2. au moins deux fois le chiffre 6 ?
3. au moins k fois le chiffre 6 ?
4. Retrouver ce résultat avec un raisonnement sur les variables aléatoires.

Exercice 8 : Jeu de cartes

On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de

1. n'obtenir que des coeurs ?
2. que des as ?
3. deux coeurs et un pique ?

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

Exercice 9 : Deux variables aléatoires suivant une loi uniforme

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

1. Déterminer $P(X = Y)$.
2. Déterminer $P(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 10 : Uniformément uniforme

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k indiscernables au toucher. On réalise l'expérience aléatoire suivante. On choisit d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Pour $(i, k) \in \{1, \ldots, n\}^2$, déterminer $P(Y = k | X = i)$.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Quelle est l'espérance de Y ? Comment l'interprétez-vous ?

Exercice 11 : Fonction génératrice

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, on appelle fonction génératrice la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

où $p_k = P(X = k)$.

1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p ; une loi binomiale de paramètres n et p.
2. Démontrer que deux variables aléatoires discrètes finies X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.
3. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \big(G'_X(1)\big)^2$. Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
4. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Retrouver alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$. Quelle est la loi de $Z = X + Y$?

Exercice 12 : Pièces défectueuses

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que X_n/n approche p.

1. Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que X_n/n soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 13 : Loi marginale

On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard de façon équiprobable une boite, puis une boule dans cette boite. On note X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 14 : Loi jointe uniforme

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}^2$.

1. Déterminer la loi de X, la loi de Y, la loi de $X + Y$.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?