Question de cours :

1. Énoncer le théorème de la projection orthogonale et donner le formule de la projection orthogonale.
2. Définition du déterminant.
3. Soit f et g deux endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-ev. Montrer que $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$
4. Démontrer/Justifier la formule de changement de base.

Exercice 1 : Projection sur $\mathbb{R}_1[X]$

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$. Calculer le projeté orthogonal de x^2 sur $F = \mathrm{vect}(1, x)$.

Remarque : On n'est pas obligé d'orthormaliser les vecteurs 1 et X. En effet, on sait que $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) \in \mathbb{R}_1[X]$, donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = aX + b$ avec $X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) \perp 1$ et $X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) \perp X$ (un dessin dans $\mathbb{R}^3$ permet de s'en rappeler). Ces deux conditions d'orthogonalité permettent, par le calcul du produit scalaire de déterminer a et b.

Exercice 2 : Calcul de distance par théorème de la projection orthogonale - 1

Calculer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

Exercice 3 : Calcul de distance par théorème de la projection orthogonale - 2

Calculer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \big(t - a\cos(t) - b\sin(t)\big)^2 dt$.

Exercice 4 : Etude de permutations

Pour les permutations σ suivantes, décomposer σ en produits de cycles disjoints, en produit de transpositions, calculer l'ordre de σ, la signature de σ, calculer σ^{100} :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : Décomposition en produit de transpositions

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. Calculer σ^{2001}.

Exercice 6 : Signature d'une grande permutation

Soit $n \geq 1$. Déterminer la signature de la permutation suivante :

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 : Déterminant 4x4

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

où a, b, c, d sont des éléments de $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Calcul sans développer

Montrer que $D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer.

Exercice 9 : Déterminant de Vandermonde

Soit $n \geq 2$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant suivant :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. On les donnera sous forme factorisée.
2. Démontrer que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ est une fonction polynômiale de x dont on précisera le degré.
3. En déduire que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(x - \alpha_i)$.
4. En déduire l'expression générale de $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Exercice 10 : Déterminant imbriqué

Soient $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 10 : Matrice compagnon

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ n nombres complexes et soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(A - xI_n)$.