Question de cours

1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}_{pm}([n_o, +\infty[)$ et f **croissante** sur $[n_0, +\infty[$. Montrer que :
$$\sum_{k=n_0}^{N} f(k) \leq \int_{n_0}^{N} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{N+1} f(k) - f(n_0)$$
Ou bien :
$$\int_{n_0}^{N-1} f(t)dt + f(n_0) \leq \sum_{k=n_0}^{N} f(k) \leq \int_{n_0}^{N} f(t)dt$$
2. Énoncer le théorème d'intégration par parties (les élèves doivent préciser entièrement les hypothèses).
3. Énoncer le théorème de changement de variables.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période T. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :
$$\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt.$$
5. **Définition :** de produit scalaire, de norme et de norme euclidienne associée. Donner un exemple. (Note à moi : Expliquer que montrer que la norme euclidienne peut être plus facile à démontrer que norme car souvent 1 des 3 axiomes de la norme est difficile à démontrer. Mais bien sur toutes les normes ne sont pas euclidiennes).

Rappel à faire

1. **Règles de Bioche :** Attention elles sont HP donc ne doivenet jamais être citées sur une copie de DS, Concours ou Oral de concours ! Ces règles permettent de calculer des intégrales de fractions rationnelles en cosinus ou sinus : Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ et on veut calculer $\int_I F(\sin(\theta), \cos(\theta))d\theta$. On pose $w(\theta) = F(\theta)d\theta$, alors :
   (a) Si $w(-\theta) = w(\theta)$, on posera alors $t = \cos(\theta)$
   (b) Si $w(\pi - \theta) = w(\theta)$, on posera alors $t = \sin(\theta)$
   (c) Si $w(\pi + \theta) = w(\theta)$, on posera alors $t = \tan(\theta)$
   (d) Si 2 des 3 sont vraies (alors le dernier sera vrai), on posera alors $t = \cos(2\theta)$
   (e) Si aucun des trois sont vrais, on posera alors $t = \tan(\frac{\theta}{2})$

Exercice 1 : Limites de suites

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\dfrac{n\pi}{n}\right)\right).$
2. $u_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right).$
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}.$
4. $u_n = \sqrt[n]{\left(1 + \left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(1 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1 + \left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)}.$

Exercice 2 : Inégalités

1. Démontrer que $\forall x \in [0;+\infty[$:
$$1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}.$$
2. Démontrer que $\forall x \in [0;\pi[$:
$$x-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

Exercice 3 : Intégrale trigonométrique par règle de Bioche

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\ \int_0^{\pi/4}\frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2 t}dt \qquad \textbf{2.}\ \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x} \qquad \textbf{3.}\ \int_0^{\pi/3}\big(1+\cos(x)\big)\tan(x)dx.$$

Exercice 4 : Intégrale trigonométrique par $\tan(\frac{\theta}{2})$

1. On pose $t=\tan(\frac{\theta}{2})$. Exprimer $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ en fonction de t.
2. Calculer
$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2+\sin(x)}dx$$

Exercice 5 : Fonction lipschitzienne

1. Démontrer que la fonction sin est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Démontrer que la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$F(x)=\int_a^b f(t)\sin(xt)dt$$
est lipschitzienne.

Exercice 6 : Inégalité de Kolmogorov

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées, et l'on pose :

$$M_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\quad M_2=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$$

(M_0 et M_2 sont donc des nombres réels tels que, pour tout x réel, on a $|f(x)|\leq M_0$ et $|f''(x)|\leq M_2$). Le but de cet exercice est de prouver que f' est bornée, et de majorer $M_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|$ en fonction de M_0 et M_2. Soit $x\in\mathbb{R}$, et $h>0$.

1. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x et $x+h$ à l'ordre 2.
2. En déduire l'inégalité :
$$|f'(x)|\leq\frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}.$$
En particulier, si on choisit $h=1$, on obtient $|f'(x)|\leq 2M_0+\frac{M_2}{2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$, ce qui prouve que f' est bornée, avec $M_1\leq 2M_0+\frac{M_2}{2}$. On se propose de trouver une meilleure majoration :
3. Etudier la fonction $h\mapsto\frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}$ sur $]0,+\infty[$.
4. En déduire $M_1\leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

Exercice 7 : Intégration et Produit Scalaire

1. Montrer que :
$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$$
est une norme sur $C^0_{pm}([a,b])$.
2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy Schwarz.
3. Application : On considère l'espace $E = C^0_{pm}([a,b], \mathbb{R}^{+*})$. Déterminer :
$$\inf_{f\in E}\left(\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right)$$

Exercice 8 : Une preuve de la divergence de la série harmonique par comparaison série-intégrale

On pose, pour $n \geq 1$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } v_n = u_n - \ln n.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}.$$
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a
$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq v_n \leq 1.$$
3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul,
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}.$$
4. En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite γ (que l'on ne cherchera pas à calculer). Que dire de (u_n) ?

Exercice 9 : Un équivalent utile en Physique Statistique : $\ln(n!)$!

1. (a) Montrer que, pour tout $i \geq 2$,
$$\int_{i-1}^{i} \ln t\, dt \leq \ln i \leq \int_i^{i+1} \ln t\, dt.$$
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$\int_1^n \ln t\, dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln t\, dt + \ln n.$$
2. Pour tout $x > 0$, calculer $F(x) = \int_1^x \ln t\, dt$.
3. En déduire que $\ln(n!)$ est équivalent à $n\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10 : Suite d'intégrale 1

On pose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, nu_n = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{2n}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^2}dt$$
3. Déterminer la limite de nu_n en $+\infty$ et en déduire un équivalent de u_n
4. Calculer $u_{n+1} + u_n$.
5. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 11 : Suite d'intégrale 2

On pose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2} dt$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Calculer $u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$ en fonction de n.
3. Montrer que pour $n \geq 2$, $\frac{1}{n+2} \leq 3u_n \leq \frac{1}{n-1}$.
4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} nu_n$ et un équivalent de u_n en $+\infty$

Exercice 12 : Fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \text{ et } F(1) = \ln(2)$$

.

1. Montrer que F est de classe $C^1(]0,1[)$. Pour $x \in]0,1[$, quel est le signe de $F'(x)$ et de $F(x)$?
2. Montrer que :
$$\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, 0 \leq \frac{t-1}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{t}$$
En déduire que :
$$\lim_{x\to 1^{-1}} \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln(t)} dt = 0$$
3. Calculer pour $x \in]0,1[$,
$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$$
4. Montrer que F est continue en 1.
5. F est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$?