Question de cours :

1. Enoncer le théorème de comparaison et démontrer le cas de deux suites équivalentes.
2. Enoncer et démontrer la convergence des séries de Riemann
3. Enoncer le critère spéciale des séries alternées.

Exercice 1 : Série télescopique

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 2 : Quelques convergences

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ **2**. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ **3**. $u_n = n\sin(1/n)$

4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5**. $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$ **6**. $u_n = \dfrac{1}{n!}$

7. $u_n = \dfrac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$ **8**. $u_n = \dfrac{n+1}{2^n+8}$ **9**. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+1)}$

Exercice 3 : Reste de la série de Riemann

Soit $\alpha > 1$. On note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Soit $a > 0$. Déterminer
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}.$$
2. En déduire un équivalent simple de R_n.

Exercice 4 : Attention aux signes !

1. Démontrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 5 : Séries de Bertrand

Cet exercice est un classique à l'oral comme à l'écrit. Il vaut le coup d'être retravaillé.
On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.
   (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
   (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
   (c) Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

Exercice 6 : Règle de d'Alembert

C'est un résultat de cours de spé très utile.
Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l.$$

1. On suppose $l < 1$ et on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
   (a) Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a
   $$u_n \leq (l+\varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$
   (b) En déduire que $\sum_n u_n$ converge.
2. On suppose $l > 1$. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge.
3. Étudier le cas $l = 1$.

Exercice 7 : Développement asymptotique de la série harmonique

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Prouver que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la nature de la série $\sum_n v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera γ sa limite.
3. Soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donner un équivalent de R_n.
4. Soit w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$, et soit $t_n = w_{n+1} - w_n$. Donner un équivalent du reste $\sum_{k \geq n} t_k$. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 8 : Série des inverses des nombres premiers

Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers. Le but de l'exercice est d'étudier la divergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$. Pour $n \geq 1$, on pose $V_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.

1. Montrer que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la suite $(\ln V_n)$ est convergente.
2. En déduire que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ est convergente.
3. Démontrer que
$$V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j\geq 0} \frac{1}{p_k^j} \right).$$
4. En déduire que $V_n \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$?
6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k^{\alpha}}$?

Exercice 9 : Transformation d'Abel

On considère deux suites complexes (u_n) et (v_n). On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_n u_n v_n$. Pour $n \geq 1$, on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$, on a :
$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = s_q v_q - s_{p-1} v_p + \sum_{k=p}^{q-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$
2. En déduire que $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge.