Question de cours :

1. Donner la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.
2. Donner la définition de l'espérance, et la variance. Enoncer le théorème de transfert, de König-Huygens, l'inégalité de Markov puis de Bienyamé-Tchebytchev.
3. Donner le loi, l'espérance et la variance des lois de Bernoulli, Binomiale, Uniforme (sur $[\![1, n]\!]$).

Exercice 1 : Théorème de Stone-Weierstrass par approche probabiliste

Le théorème de Stone-Weierstrass est le suivant :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ Alors pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue est limite uniforme d'une suite de polynôme dans $\mathbb{R}[X]$. Démontrons ce résultat par une approche probabiliste
Soit $x \in [0, 1]$ et pour $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_i(x) \sim B(x)$ et on suppose que $(X_i(x))_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

1. On pose
$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)$$
. Donner la loi de $S_n(x)$, son espérance et variance.
2. Calculer $\mathbb{E}(f(\frac{S_n}{n}))$
3. Soit $\epsilon > 0$, justifier les assertions suivantes :
   (a) $\exists\alpha > 0, \forall x, y \in [a, b] \mid x - y \mid\leq \alpha \Rightarrow\mid f(x) - f(y) \mid\leq \epsilon$.
   (b) $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(x)}{n} - x\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{n\alpha^2}$
4. Montrer que
$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|f(x) - \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right)\right)\right| \leq \epsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{n\alpha^2}.$$
5. Conclure pour $a = 0, b = 1$.
6. Conclure pour $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Exercice 2 : Déterminant de Vandermonde

Soit $n \geq 2$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant suivant :
$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \ldots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. On les donnera sous forme factorisée.
2. Démontrer que $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, x)$ est une fonction polynômiale de x dont on précisera le degré.
3. En déduire que $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(x - \alpha_i)$.
4. En déduire l'expression générale de $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Exercice 3 : Racine de polynôme aléatoire

On jette trois fois un dé équilibré à 6 faces et on note le résultat a, b et c. On introduit le polynôme Q définie par $Q(X) = aX^2 + bX + c$. Déterminer la probabilité des évènements suivants :

1. Q a deux racines réelles distincts.
2. Q a une racine réelle double.
3. Q n'a aucune racine réelle.

Exercice 4 : Minimum de variable aléatoire

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes, et suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $M = \min(X_1, \dots, X_n$.

1. Déterminer $M(\Omega)$. Déterminer pour $k \in M(\Omega), \mathbb{P}(M \geq k)$.
2. En déduire la loi de M.
3. Déterminer la probabilité de l'évènement A : "Il existe $i \in [1, n]\!]$, tel que $X_i = 1$. Montrer alors que $\mathbb{P}(A) \geq 1 - \exp(-1)$

Exercice 5 : Une nouvelle expression de l'espérance

Soit X une v.a.d. telle que $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k).$$

Exercice 6 : Urne de Polya

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On repète n fois l'expérience suivante : on tire une boule de l'urne, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

1. Quel est le nombre de boules dans l'urne après la k-ième expérience ?
2. On note N_k le nombre de boules blanches dans l'urne après la k-ième expérience. Montrer que N_k suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, k+1\}$.

Exercice 7 : Minimum et maximum de deux dés

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires indépendantes correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 : Au moins un six !

Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé parfaitement équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir

1. au moins une fois le chiffre 6 ?
2. au moins deux fois le chiffre 6 ?
3. au moins k fois le chiffre 6 ?
4. Retrouver ce résultat avec un raisonnement sur les variables aléatoires.

Exercice 9 : Jeu de cartes

On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de

1. n'obtenir que des coeurs ?
2. que des as ?
3. deux coeurs et un pique ?

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

Exercice 10 : Deux variables aléatoires suivant une loi uniforme

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

1. Déterminer $P(X = Y)$.
2. Déterminer $P(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.