Question de cours

1. Définition de produit scalaire, de norme et de norme euclidienne associée et en donner un exemple de chaque.
2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Énoncer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Quelle hypothèse permet d'assurer l'unicité de la base ainsi orthonormalisée.
4. Soit E un espace préhilbertien de dimension finie (un euclidien), et soit F un sev de E. Montrer que
$$F \oplus F^{\perp} = E$$
5. Enoncer la formule de la projection orthogonale sur une sous-espace munie d'une base orthonormée. Enoncer le théorème de la projection orthogonale.

Exercice 1 : Produit scalaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Application de Cauchy-Schwarz

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit
$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a
$$\big(\operatorname{tr}(AB)\big)^2 \leq \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2).$$

Exercice 2 : Des produits scalaires définit par des intégrales

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1. $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$;
2. $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ où $w \in E$ satisfait $w > 0$ sur $]a, b[$.

Exercice 3 : Application de Cauchy-Schwarz 1

Démontrer que : $\forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Exercice 4 : Application de Cauchy-Schwarz 2

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$
et étudier les cas d'égalité.

2. Désormais, on suppose $\forall k \in [\![1,n]\!], x_k > 0$. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$$

. Que dire du cas d'égalité ?

Exercice 5 : Application de Cauchy-Schwarz 3

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$f^2(t) \leq (t-a)\int_a^t f'^2(u)du.$$

2. En déduire que

$$\int_a^b f^2(t)dt \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(u)du.$$

Exercice 6 : Intégration - Produit Scalaire - Application de Cauchy-Schwarz 4

1. Montrer que :

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$$

est une norme sur $C^0([a,b])$.

2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy Schwarz.
3. Application : On considère l'espace $E = C^0([a,b],\mathbb{R}^{+*})$. Déterminer :

$$\inf_{f\in E}\left(\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right)$$

Exercice 7 : Des bases d'orthogonales par simples observations

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère les sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x - y + 2z + t = 0 \text{ et } -x + 2y + 3z - t = 0\}$$

$$G = \text{vect}\big((1,1,1,0),(2,1,1,-1)\big).$$

Déterminer une base de $F^\perp$ et de $G^\perp$.

Exercice 8 : Relations sur les orthogonaux à savoir

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

3. $A^{\perp} = \text{vect}(A)^{\perp}$;
4. $\text{vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.
5. On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\text{vect}(A) = A^{\perp\perp}$.
6. Bonus : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}.$$

$$F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}.$$

Que se passe-t-il en dimension finie ?

Exercice 9 : Contre-exemple d'un s.e.v. qui n'admet pas de supplémentaire orthogonal

On considère $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 10 : Orthonormalisons les vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Exercice 11 : Projection sur $\mathbb{R}_1[X]$

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$. Calculer le projeté orthogonal de x^2 sur $F = \text{vect}(1, x)$.

Remarque : On n'est pas obligé d'orthormaliser les vecteurs 1 et X. En effet, on sait que $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) \in \mathbb{R}_1[X]$, donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = aX + b$ avec $X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) \perp 1$ et $X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) \perp X$ (un dessin dans $\mathbb{R}^3$ permet de s'en rappeler). Ces deux conditions d'orthogonalité permettent, par le calcul du produit scalaire de déterminer a et b.

Exercice 12 : Calcul de distance par théorème de la projection orthogonale - 1

Calculer $\displaystyle\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

Exercice 13 : Calcul de distance par théorème de la projection orthogonale - 2

Calculer $\displaystyle\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \big(t - a\cos(t) - b\sin(t)\big)^2 dt$.

Exercice 14 : Une sorte de réciproque à l'identité du parallélogramme

Version MP cf *Algèbre et Probabilités* de Xavier Gourdon exercice 9 page 263 :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé vérifiant

$$\forall(x,y) \in E^2, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Montrer que E est un espace préhilbertien réel (ce qui est équivalent à montrer que la norme est euclidienne).

Version sup :
Il est bien connu que si E est un espace préhilbertien muni de la norme $\|.\|$, alors l'identité de la médiane (ou du parallélogramme) est vérifiée, à savoir : pour tous x, y de E, on a :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer une sorte de réciproque à cette propriété, à savoir le résultat suivant : si E est un espace vectoriel normé réel dont la norme vérifie l'identité de la médiane, alors E est nécessairement un espace préhilbertien, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur E tel que pour tout x de E, on a $(x,x) = \|x\|^2$. Il s'agit donc de construire un produit scalaire, et compte tenu des formules de polarisation, on pose :

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1. Montrer que pour tout x, y de E, on a $(x,y) = (y,x)$ et $(x,x) = \|x\|^2$.
2. Montrer que pour $x_1,\ x_2,\ y \in E$, on a $(x_1+x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y) = 0$ (on utilisera l'identité de la médiane avec les paires (x_1+y, x_2+y) et (x_1-y, x_2-y)).
3. Montrer, en utilisant la question précédente,que si $x, y \in E$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a $(rx, y) = r(x,y)$. En utilisant un argument de densité et de continuité, montrer que c'est encore vrai pour $r \in \mathbb{R}$.
4. Conclure !

Exercice 15 : Déterminant de Gram

Soit E un espace euclidien. A une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ de p vecteurs de E. On introduit la matrice suivante : $G_p(x_1, \ldots x_p) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq p}$.

1. Montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée ssi $\det G_p(x_1, \ldots x_p) = 0$
2. On suppose maintenant que la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre et on note $F = \text{vect}(x_1, \ldots, x_p)$.
   (a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une BON de F et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)$. Montrer que $G_p(x_1, \ldots x_p) = A^\top A$.
   (b) En déduire que $\det G_p(x_1, \ldots x_p) > 0$
3. Soit $x \in E$. On note p la projection orthogonale sur F.
   (a) Montrer que $\det G_{p+1}(x, x_1, \ldots x_p) = \det G_{p+1}(x - p(x), x_1, \ldots x_p)$
   (b) Montrer que $d(x,F)^2 = \dfrac{\det G_{p+1}(x, x_1, \ldots x_p)}{\det G_p(x_1, \ldots x_p)}$

Exercice 16 : Théorème de représentation de Riesz

Soit $(E, \langle .;.\rangle)$ un espace préhilbertien réel de dimension finie ($n \geq 1$) (un euclidien). On note E' (ou E^*) l'espace *dual* de E (c'est l'espace des formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$).
Montrer que :

$$\forall \varphi \in E', \exists! y \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = \langle y; x\rangle.$$