Question de cours

1) **Définition** de l'intégration dans le cas de fonction en escalier et **Théorème** des sommes de Riemann dans le cas de fonction continue sur un segment $[a, b]$: Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b])$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

2) **Définition** de la continuité uniforme. Enoncer le **Théorème** de Heine
3) **Preuve de théorème** : Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ tel que $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer que $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$.
Indication : Raisonner par l'absurde en supposant f non nulle.
Élément de preuve : Soit f non identiquement nulle. Alors $\exists x_0 \in [a, b], \exists \lambda > 0$ tel que $f(x_0) = \lambda \neq 0$. Par continuité de f, $\exists c < d \in [a, b], \forall x \in [c, d], f(x) \geq \frac{\lambda}{2}$. Faire un dessin, puis Chasles et minorer l'intégrale.
4) **Preuve de théorème** Formule de Taylor avec reste Intégrale. Hypothèse + Conclusion.
Élément de correction :
Hypothèse : Soit $n \in \mathbb{N}, I \subset \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^{n+1}$. Alors

$$\forall (a, b) \in I^2, f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Indication : Refaire la construction à partir de $n = 0$.
5) **Théorème** : Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange. (Indication : appliquer Taylor avec reste intégrale).

Exercice 1 : Intégrale de f et de f^2

Déterminer les fonctions continues $f : [0, 1] \to [0, 1]$ vérifiant $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt$.

Exercice 2 : Changement de signes d'une fonction

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, une fonction continue non identiquement nulle. On suppose qu'il existe un entier n tel que, pour tout $k \leq n$, on a $\int_a^b t^k f(t)dt = 0$. On souhaite prouver que, dans l'intervalle $[a, b]$, il existe au moins $n + 1$ points où f s'annule en changeant de signe.

1. Traiter le cas $n = 0$.
2. Traiter le cas $n = 1$.
3. Traiter le cas général.

Exercice 3 : Intégration de fonction périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période T. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Exercice 4 : Limites de suites

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\dfrac{n\pi}{n}\right)\right).$
2. $u_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right).$
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}.$
4. $u_n = \sqrt[n]{\left(1 + \left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(1 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\ldots\left(1 + \left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)}.$

Exercice 5 : Inégalités

1. Démontrer que $\forall x \in [0; +\infty[$:

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}.$$

2. Démontrer que $\forall x \in [0; \pi[$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 6 : Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. On pose

$$u_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)dx.$$

1) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On considère maintenant $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b])$

2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
(Indication : Raisonner sur les fonctions en escaliers puis étendre le résultat aux fonctions continues par morceaux.)

Exercice 7 :

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$, prouver que :

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 8 : Cas d'égalité de Taylor-Lagrange

Soient $a < b$ deux réels.

1. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \geq 1$. On note $m = \min_{[a,b]} g$ et $M = \max_{[a,b]} g$.
   (a) Démontrer que
   $$\frac{m(b-a)^n}{n} \leq \int_a^b (b-t)^{n-1} g(t) dt \leq \frac{M(b-a)^n}{n}.$$
   (b) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que
   $$\int_a^b (b-t)^{n-1} g(t) dt = \frac{(b-a)^n g(c)}{n}.$$
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que
   $$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^n f^{(n)}(c)}{n!}.$$