Analisis Numerik
Akar Persamaan Nonlinier

Ahmad Rio Adriansyah

STT Terpadu - Nurul Fikri

ahmad.rio.adriansyah@gmail.com
arasy@nurulfikri.ac.id

Persamaan Non Linier

Yang disebut persamaan non linier adalah :

1. polinom derajat > 1
2. trigonometri
3. eksponensial
4. logaritma
5. dll

Banyak persoalan di dunia nyata (matematika, sains, rekayasa) yang dimodelkan menjadi persamaan non linier

Contoh

Ketinggian gelombang berdiri (*standing wave*) yang dipantulkan oleh dermaga diberikan oleh persamaan

$$h = h_0 \left\{ sin(\frac{2\pi x}{\lambda}) cos(\omega t) + e^{-x}) \right\}$$

dimana

1. h_0 = ketinggian gelombang awal
2. x = posisi longitudinal
3. t = waktu longitudinal
4. λ = panjang gelombang
5. ω = frekuensi angular

Berapa jarak yang dibutuhkan agar tinggi gelombangnya menjadi separuhnya jika diketahui variabel λ, ω, dan t nya?

Contoh

Tingkat oksigen pada hilir sungai dari tempat pembuangan limbah dapat dituliskan sebagai fungsi

$$c = 10 - 15(e^{-0.1x} - e^{-0.5x})$$

dimana x adalah jarak tempat pengukuran pada hilir sungai dengan tempat pembuangan limbahnya.

Berapa jarak hilir sungai dari tempat pembuangan sampah jika hasil pengukurannya adalah 4?

Contoh

Kecepatan sebuah roket dapat dihitung menggunakan

$$v = u \; ln \left| \frac{m_0}{m_0 - qt} \right| - gt$$

dimana

1. u = kecepatan pada saat bahan bakar dikeluarkan
2. m_0 = massa awal roket, pada saat t=0
3. q = laju pemakaian bahan bakar
4. g = percepatan grafitasi

kapan waktu roket tersebut mencapai kecepatan 1000 m/s?

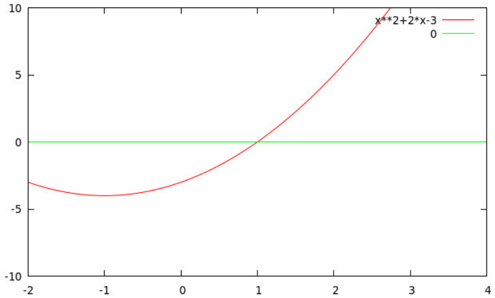
Deret Taylor

Persamaan non linier bisa diubah jadi bentuk polinom dengan menggunakan deret Taylor

Akar Persamaan

Mencari akar dari fungsi $f(x)$ sama artinya dengan mencari nilai x yang memenuhi persamaan $f(x) = 0$.

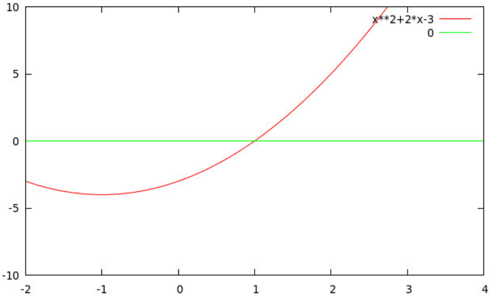
Atau jika divisualisasikan dalam grafik, akar dari $f(x)$ adalah nilai x pada saat grafik fungsi berpotongan dengan sumbu x



Akar Persamaan

Contoh :
Jika diberikan sebuah fungsi $f(x) = x^2 + 2x - 3$ maka dengan mudah kita mengetahui bahwa akar-akarnya adalah $x_1 = -3$ dan $x_2 = 1$

Artinya, jika kita gambarkan grafik fungsi tersebut, maka akan berpotongan dengan sumbu x di posisi $x = -3$ dan $x = 1$



Metode Numerik

Metode metode numerik yang digunakan untuk pencarian akar persamaan non linier ada sangat banyak ragamnya, tetapi secara umum dapat dikategorikan menjadi 2 kelompok besar :

1. Metode tertutup
2. Metode terbuka

Metode Tertutup

Metode dalam kelompok ini mencari akar di dalam sebuah selang $[a, b]$ dengan dipastikan bahwa selang tersebut mengandung setidaknya sebuah akar.

Dalam tiap iterasinya, lebar selang tersebut diperkecil secara sistematis dan semakin ujung-ujung selangnya konvergen menuju akar yang benar.

Metode yang termasuk kelompok ini diantaranya :

1. Metode bagidua (bisection / bolzano)
2. Metode posisi palsu (false position / regula falsi)

Metode Terbuka

Metode dalam kelompok ini mencari akar tanpa perlu mengurung akar di dalam selang tertentu. Yang digunakan adalah tebakan awal x_0.

Dalam tiap iterasinya, tebakan awal tersebut dipakai untuk menghitung hampiran akar yang baru secara sistematis. Hampiran akar ini bisa saja mendekati (konvergen) ke akar sejati, atau bahkan menjauhinya (divergen). Jadi metode ini tidak selalu menemukan akar sejati.

Metode yang termasuk kelompok ini diantaranya :

1. Metode titik tetap (fixed point)
2. Metode Newton-Raphson
3. Metode secant

Mencari Selang yang Mengandung Akar

Bagaimana mencari selang yang mengandung akar dalam sebuah fungsi?

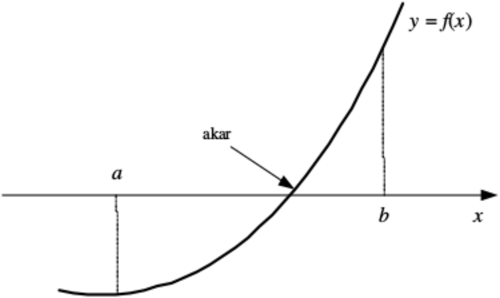
Mencari Selang yang Mengandung Akar

Bagaimana mencari selang yang mengandung akar dalam sebuah fungsi?

Ada 2 pendekatan yang bisa dilakukan :

1. Grafik
   Dibuat grafik fungsinya dalam bidang x-y, lalu dilihat perpotongan dengan sumbu x. Dari situ didapat perkiraan selang yang mengandung akarnya.
2. Kalkulasi
   Menentukan selang $[a, b]$, menghitung nilai fungsi di tepi selangnya $f(a)$ dan $f(b)$, lalu membandingkan tandanya. Jika tandanya berbeda, maka terdapat setidaknya satu akar di dalam selang tersebut.

Teorema :
"Jika $f(x)$ kontinu dalam selang $[a, b]$ dan $f(a)f(b) < 0$, maka paling sedikit terdapat satu buah akar persamaan $f(x) = 0$ dalam selang $[a, b]$"



note : nilai fungsi dari ujung selang berbeda tanda adalah syarat cukup, tapi bukan syarat perlu

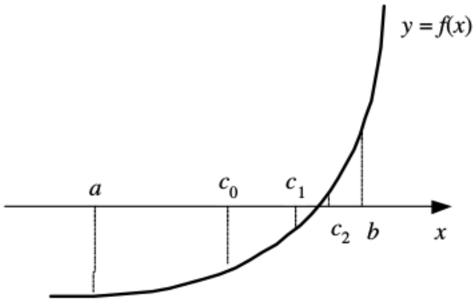
Metode Bagi Dua (*Bisection*)

Misalnya kita sudah menentukan selang tertutup $[a, b]$ dimana didalamnya sudah terdapat akar.

Pada tiap iterasinya, metode ini membelah selang tersebut menjadi 2 subselang yang sama besar, yaitu $[a, c]$ dan $[c, b]$.

Selang yang diambil untuk iterasi berikutnya adalah subselang yang memuat akar.

Metode Bagi Dua



Algoritma

Input : $f(x)$, fungsi yang bersangkutan
a_0, b_0, tebakan awal dimana $f(a_0)f(b_0) < 0$
ϵ_1, ϵ_2, toleransi galat

Output : hampiran akar dari $f(x)$ yang berada pada selang $[a_0, b_0]$

Untuk $k = 0, 1, 2, ...$ sampai terpenuhi $|f(c_k)| < \epsilon_1$ atau $|b - a| < \epsilon_2$, lakukan :

1. Hitung $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$
2. Hitung $f(c_k)$
3. Jika $f(c_k) < \epsilon$, maka c_k adalah akar. Jika tidak, kita periksa $f(a_k)f(c_k)$ atau $f(b_k)f(c_k)$.
   Jika $f(a_k)f(c_k) < 0$, maka $a_{k+1} = a_k$ dan $b_{k+1} = c_k$
   Jika sebaliknya, maka $a_{k+1} = c_k$ dan $b_{k+1} = b_k$

Contoh

Hitunglah akar dari fungsi $f(x) = x^2 - 4$, dengan
tebakan awal $a_0 = -1$ dan $b_0 = 7$.
Kriteria pemberhentian dengan nilai fungsi lebih kecil dari $\epsilon_1 = 10^{-6}$ atau lebar selang lebih kecil dari $\epsilon_2 = 10^{-4}$.

Penyelesaian

Hitunglah akar dari fungsi $f(x) = x^2 - 4$, dengan tebakan awal $a_0 = -1$ dan $b_0 = 7$.
Kriteria pemberhentian dengan nilai fungsi lebih kecil dari $\epsilon_1 = 10^{-6}$ atau lebar selang lebih kecil dari $\epsilon_2 = 10^{-4}$.

Secara analitik, kita bisa menjawab berapa akar fungsi tersebut, tapi di sini akan ditunjukkan cara numeriknya. Pertama-tama, kita periksa terlebih dahulu apakah tebakan awal yang kita gunakan sudah mengapit salah satu akar atau belum.

$$
\begin{aligned}
f(a_0) &= f(-1) && = (-1)^2 - 4 && = -3 \\
f(b_0) &= f(7) && = (7)^2 - 4 && = 45
\end{aligned}
$$

Hasil kali $f(a_0)$ dan $f(b_0) = (-3)(45) = -135$, lebih kecil dari nol.
Dari teorema, berarti kita bisa pastikan bahwa setidaknya ada satu akar berada pada selang $[-1, 7]$

Penyelesaian

i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	c_i	$f(c_i)$
0	-1	-3	7	45	$\dfrac{(-1)+7}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$	5
1						
2						
3						
4						

c_0 (titik tengah pertama) didapat dari hasil tengah-tengah nilai a_0 dan b_0 bisa dihitung dengan rumus

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

tapi bisa terjadi overflow karena adanya penjumlahan a dan b (jika angkanya besar). Alternatifnya, nilai c_0 dan seterusnya dapat dihitung dengan rumus

$$c_i = a_i + \frac{b_i - a_i}{2}$$

Penyelesaian

i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	c_i	$f(c_i)$
0	-1	-3	7	45	3	5
1						
2						
3						
4						

Kita lihat hasil kali $f(a)f(c) = (-3)(5) = -15$, ternyata lebih kecil dari nol.

Jika $f(a)f(c) < 0$, berarti akarnya berada diantara selang $[a, c]$. Kita bisa ganti nilai b pada iterasi selanjutnya dengan nilai c untuk mendapatkan selang yang lebih kecil.

Penyelesaian

i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	c_i	$f(c_i)$
0	-1	-3	7	45	3	5
1	-1	-3	**3**	**5**		
2						
3						
4						

Kita bandingkan hasil kali $f(a)f(c) = (-3)(5) = -15$, ternyata lebih kecil dari nol.

Jika $f(a)f(c) < 0$, berarti akarnya berada diantara selang $[a, c]$. Kita bisa ganti nilai b pada iterasi selanjutnya dengan nilai c untuk mendapatkan selang yang lebih kecil.

Penyelesaian

i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	c_i	$f(c_i)$
0	-1	-3	7	45	3	5
1	-1	-3	**3**	**5**	$-1 + \frac{3-(-1)}{2} = 1$	-3
2						
3						
4						

Dihitung kembali nilai c_1 dan $f(c_1)$

$f(x) = x^2 - 4$
$f(1) = 1^2 - 4 = -3$

Kali ini hasil kali $f(c)f(b) < 0$, berarti di iterasi selanjutnya selang yang digunakan adalah selang $[c, b]$

Penyelesaian

i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	c_i	$f(c_i)$
0	-1	-3	7	45	3	5
1	-1	-3	**3**	**5**	1	-3
2	**1**	**-3**	3	5	$\frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$	0
3						
4						

Pada langkah ini, ternyata $f(c) = 0 < \epsilon$, dengan kata lain kita sudah menemukan akar yang kita cari, yaitu $c = 2$

Salah satu akar dari persamaan $f(x) = x^2 - 4$ adalah $x = 2$

Algoritma Metode Bagi Dua (Revisi)

Input : $f(x)$, fungsi yang bersangkutan
a_0, b_0, tebakan awal dimana $f(a_0)f(b_0) < 0$
ϵ_1, ϵ_2, toleransi galat

Output : hampiran akar dari $f(x)$ yang berada pada selang $[a_0, b_0]$

Untuk $k = 0, 1, 2, ...$ sampai terpenuhi $|f(c_k)| < \epsilon_1$ atau $|b - a| < \epsilon_2$, lakukan :

1. Hitung $c_k = a_k + \dfrac{b_k - a_k}{2}$
2. Hitung $f(c_k)$
3. Jika $f(c_k) < \epsilon$, maka c_k adalah akar. Jika tidak, kita periksa $f(a_k)f(c_k)$ atau $f(b_k)f(c_k)$.
   Jika $f(a_k)f(c_k) < 0$, maka $a_{k+1} = a_k$ dan $b_{k+1} = c_k$
   Jika sebaliknya, maka $a_{k+1} = c_k$ dan $b_{k+1} = b_k$

Metode Bagi Dua

Salah satu kriteria pemberhentian bagi metode bagi dua adalah lebar selang yang dicapai. Jika lebar selangnya lebih kecil dari ϵ_2, maka iterasi diberhentikan.

Iterasi maksimal yang dibutuhkan oleh metode bagi dua untuk mencapai hampiran akar yang errornya kurang dari ϵ_2 pada selang $[a, b]$ adalah

$$R > \frac{ln(|b-a|) - ln(\epsilon_2)}{ln(2)}$$

atau

$$R > {}^{2}log\left(\frac{|b-a|}{\epsilon_2}\right)$$

Latihan

Cari nilai salah satu akar dari fungsi $f(x) = 16x^3 - 22x + 9$ menggunakan metode bagi dua dengan selang tebakan awal :

1. $[-2, -1]$
2. $[0.2, 0.7]$
3. $[0.7, 1]$

hingga galatnya lebih kecil dari 10^{-4} atau maksimal 8 iterasi

note : gunakan perhitungan 4 angka di belakang koma

Tugas

Opsi 1 :

Buat implementasi metode bagi dua dalam python.

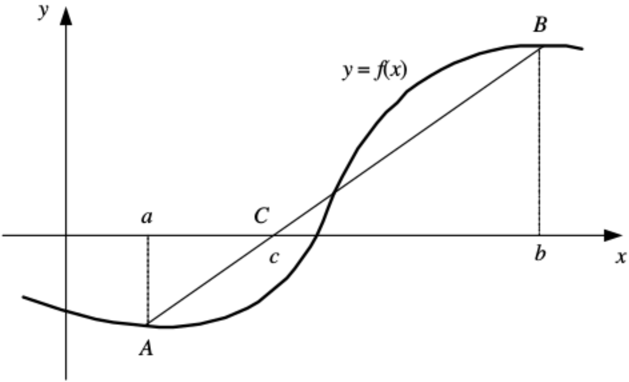
Input fungsi dan batas galat boleh di*hardcode*kan, tapi input selang awal dimasukkan oleh user. Input selang diperiksa terlebih dahulu apakah di dalamnya mengandung akar atau tidak.

Metode Posisi Palsu (*Regula Falsi*)

Metode bagi dua selalu menemukan akar, tetapi kecepatan konvergensinya lambat. Kecepatan konvergensi bisa ditingkatkan jika nilai $f(a)$ dan $f(b)$ diperhitungkan juga. Jika $|f(a)| < |f(b)|$, maka nilai akar logikanya lebih dekat ke a, daripada b.

Metode posisi palsu memanfaatkan hal tersebut. Pada tiap iterasinya, ditarik garis antara nilai $f(a)$ dan $f(b)$. Titik perpotongan garis tersebut dengan sumbu x digunakan sebagai nilai penentu selang yang baru.

Metode Posisi Palsu



Metode Posisi Palsu

Nilai c dapat dicari dengan menggunakan persamaan garis lurus yang melalui dua buah titik

$$c = a - \left(\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}\right)(b - a) \tag{1}$$

atau

$$c = b - \left(\frac{f(b)}{f(b) - f(a)}\right)(b - a) \tag{2}$$

Pada contoh algoritma ini, kita gunakan persamaan (2)

Algoritma

Input : $f(x)$, fungsi yang bersangkutan
a_0, b_0, tebakan awal dimana $f(a_0)f(b_0) < 0$
ϵ_1, ϵ_2, toleransi galat

Output : hampiran akar dari $f(x)$ yang berada pada selang $[a_0, b_0]$

Untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$ sampai terpenuhi $|f(c_k)| < \epsilon_1$ atau $|b - a| < \epsilon_2$, lakukan :

1. Hitung $c_k = b_k - \left(\dfrac{f(b_k)}{f(b_k) - f(a_k)}\right)(b_k - a_k)$
2. Hitung $f(c_k)$
3. Jika $f(c_k) < \epsilon$, maka c_k adalah akar. Jika tidak, kita periksa $f(a_k)f(c_k)$ atau $f(b_k)f(c_k)$.
   Jika $f(a_k)f(c_k) < 0$, maka $a_{k+1} = a_k$ dan $b_{k+1} = c_k$
   Jika sebaliknya, maka $a_{k+1} = c_k$ dan $b_{k+1} = b_k$

Contoh

Sama seperti yang kita kerjakan pada metode bagi dua. Hitunglah akar dari fungsi $f(x) = x^2 - 4$, dengan
tebakan awal $a_0 = -1$ dan $b_0 = 7$ menggunakan metode posisi palsu.

Kriteria pemberhentiannya adalah jika nilai fungsi lebih kecil dari $\epsilon_1 = 10^{-6}$ atau lebar selang lebih kecil dari $\epsilon_2 = 10^{-4}$.

Dari teorema sebelumnya, kita sudah tahu bahwa setidaknya ada satu akar berada pada selang $[-1, 7]$

Secara umum, metode posisi palsu mirip seperti metode bagi dua, selain cara perhitungan c nya.

Penyelesaian

i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	c_i	$f(c_i)$
0	-1	-3	7	45	$7-\left(\frac{45}{45-(-3)}\right)(7-(-1))$ $=7-(0.9375)(8)$ $=7-7.5$ $=-0.5$	-3.75
1						
2						

c_0 (titik hampiran pertama) didapat dari hasil perpotongan garis antara sumbu x dengan garis yang menghubungkan dua titik $(a_0, f(a_0))$ dan $(b_0, f(b_0))$
bisa dihitung dengan rumus

$$c_0 = b_0 - \left(\frac{f(b_0)}{f(b_0)-f(a_0)}\right)(b_0 - a_0)$$

Latihan

Cari nilai salah satu akar dari fungsi $f(x) = 16x^3 - 22x + 9$ menggunakan metode posisi palsu dengan selang tebakan awal :

1. $[-2, -1]$
2. $[0.2, 0.7]$
3. $[0.7, 1]$

hingga galatnya lebih kecil dari 10^{-4} atau maksimal 8 iterasi

note : gunakan perhitungan 4 angka di belakang koma

Tugas

Opsi 2 :

Buat implementasi metode posisi palsu dalam python.

Input fungsi dan batas galat boleh di*hardcode*kan, tapi input selang awal dimasukkan oleh user. Input selang diperiksa terlebih dahulu apakah di dalamnya mengandung akar atau tidak.

Metode Terbuka

Metode dalam kelompok ini mencari akar tanpa perlu mengurung akar di dalam selang tertentu. Yang digunakan adalah tebakan awal x_0.

Dalam tiap iterasinya, tebakan awal tersebut dipakai untuk menghitung hampiran akar yang baru secara sistematis. Hampiran akar ini bisa saja mendekati (konvergen) ke akar sejati, atau bahkan menjauhinya (divergen). Jadi metode ini tidak selalu menemukan akar sejati.

Metode yang termasuk kelompok ini diantaranya :

1. Metode titik tetap (fixed point)
2. Metode Newton-Raphson
3. Metode secant

Metode Iterasi Titik Tetap

Metode ini kadang disebut sebagai metode iterasi sederhana atau metode langsung. Kesederhanaannya karena prosedur iterasinya yang mudah dibentuk sebagai berikut :

1. Susun $f(x) = 0$ menjadi $x = g(x)$
2. Bentuk persamaan tersebut menjadi prosedur iteratif

$$x_{r+1} = g(x_r)$$

3. Tentukan sebuah nilai awal x_0
4. Hitung x_1, x_2, dst sehingga konvergen

$$f(x_s) = 0 \text{ dan } x_s = g(x_s)$$

Algoritma

Input : $g(x)$, fungsi hasil modifikasi dari $f(x) = 0$
x, tebakan awal
ϵ, toleransi galat

Output : x, hampiran akar dari $f(x)$

Untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$ sampai terpenuhi $|x - x\_sebelumnya| < \epsilon$, lakukan :

1. x_sebelumnya $= x$
2. Hitung $x = g(x\_sebelumnya)$
3. Jika $|x - x\_sebelumnya| < \epsilon$, maka x adalah akar dari $f(x)$

Contoh

Hitunglah akar dari fungsi $f(x) = x^2 + 2x - 3$, dengan tebakan awal $x_0 = 2$.
Kriteria pemberhentian ketika errornya sudah lebih kecil dari $\epsilon = 10^{-6}$

Contoh

Hitunglah akar dari fungsi $f(x) = x^2 + 2x - 3$, dengan tebakan awal $x_0 = 2$.
Kriteria pemberhentian ketika errornya sudah lebih kecil dari $\epsilon = 10^{-6}$

Langkah pertama, ubah persamaan fungsi $f(x) = 0$ menjadi $x = g(x)$

$f(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$ dapat diubah bentuknya menjadi

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2x - 3 &= 0 \\
2x &= 3 - x^2 \\
x &= \frac{3 - x^2}{2}
\end{aligned}
$$

Penyelesaian

$$g(x) = \frac{3 - x^2}{2}$$

tebakan awal $x_0 = 2$

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	galat
0	2	$\frac{3-(2)^2}{2} = -0.5$	-
1			
2			
3			

Penyelesaian

$$g(x) = \frac{3 - x^2}{2}$$

tebakan awal $x_0 = 2$

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	galat
0	2	-0.5	-
1	-0.5	$\frac{3-(-0.5)^2}{2} = 1.375$	$\lvert 1.375 - (-0.5) \rvert = 1.875$
2			
3			

Penyelesaian

$$g(x) = \frac{3 - x^2}{2}$$

tebakan awal $x_0 = 2$

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	galat
0	2	-0.5	-
1	-0.5	1.375	1.875
2	1.375	$\frac{3-(1.375)^2}{2} = 0.5547$	$\|0.5547 - 1.375\| = 0.8203$
3			

dst...

Metode Titik Tetap

Metode ini tidak selalu menghasilkan iterasi yang konvergen ke akar, bisa pula divergen tergantung pada :

1. fungsi $g(x)$ yang dibentuk
2. titik tebakan awal

Dari fungsi $f(x)$ yang sama dapat dibentuk beberapa macam $g(x)$. Contohnya fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 3$ dapat dibentuk jadi

1. $g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}$
2. - - - $g(x) = \sqrt{2x + 3}$, atau
3. $g(x) = \dfrac{3}{x - 2}$

Metode Titik Tetap

Jika diberikan nilai awal yang sama, yaitu $x_0 = 4$, perilaku ketiga fungsi tersebut berbeda dalam mencari akar persamaannya.

$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$$

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0	4.0000	-
1	6.5000	2.5000
2	19.6250	13.1250
3	191.0703	171.4453
4	18252.4322	18061.3618

Hasilnya **divergen**, semakin membesar (ke arah ∞) atau semakin mengecil (ke arah $-\infty$)

$g(x) = \sqrt{2x + 3}$

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0	4.0000	-
1	3.3166	0.6834
2	3.1037	0.2129
3	3.0344	0.0694
4	3.0114	0.0229
5	3.0038	0.0076
6	3.0013	0.0025
7	3.0004	0.0008
8	3.0001	0.0003
9	3.0000	0.0001
10	3.0000	0.0000

Hasilnya **konvergen monoton**, ke arah satu titik tertentu, dalam hal ini $x = 3$

Metode Titik Tetap

$$g(x) = \frac{3}{x-2}$$

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0	4.0000	-
1	1.5000	2.5000
2	-6.0000	7.5000
3	-0.3750	5.6250
4	-1.2632	0.8882
5	-0.9194	0.3438
6	-1.0276	0.1083
7	-0.9909	0.0367
8	-1.0031	0.0122
9	-0.9990	0.0041
10	-1.0003	0.0014

Hasilnya **konvergen berosilasi**, ke arah satu titik tertentu, dalam hal ini $x = -1$

Metode Titik Tetap

Demikian pula jika fungsi yang digunakan sama, tetapi nilai tebakan awal yang digunakan berbeda.

Misalnya fungsi $f(x) = x^3 + 6x - 3$ dengan fungsi iterasi yang digunakan $x_{r+1} = \dfrac{3 - x_r^3}{6}$ dengan tebakan awal $x_0 = \{0.5,\ 1.5,\ 2.2,\ 2.7\}$

r	x_r	r	x_r	r	x_r	r	x_r
0	0.5	0	1.5	0	2.2	0	2.7
1	0.4791667	1	-0.0625	1	-1.2744667	1	-2.7805
2	0.4816638	2	0.5000407	2	0.8451745	2	4.0827578
3	0.4813757	3	0.4791616	3	0.3993792	3	-10.842521
...	...	4	0.4816644	4	0.4893829	4	212.9416
7	0.4814056	...	...	...	...	5	-16909274.5
8	0.4814056	9	0.4814056	9	0.4814054		
		10	0.4814056	10	0.4814056		
				11	0.4814056		

Konvergen

Divergen

Tugas

Opsi 3 :

Buat implementasi metode titik tetap dalam python.

Input fungsi dan batas galat boleh di*hardcode*kan, tapi input tebakan awal dimasukkan oleh user.

Metode Newton-Raphson

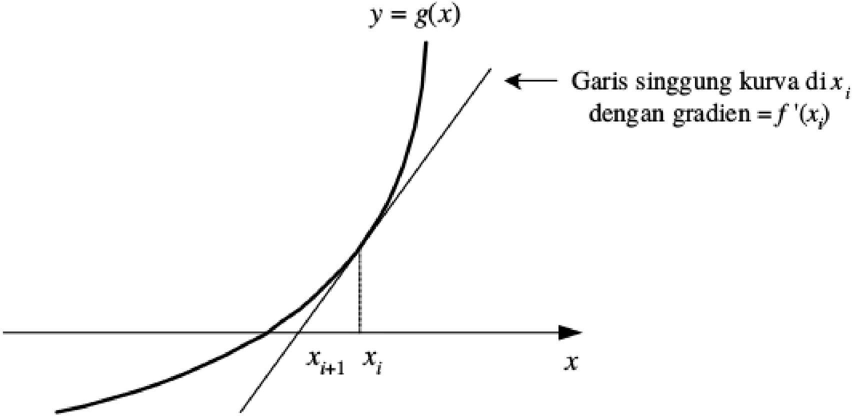
Metode ini adalah metode yang paling terkenal sebagai metode pencarian akar, dan banyak digunakan dalam bidang sains dan rekayasa. Metode ini disukai karena konvergensinya paling cepat diantara metode lainnya.

Ada dua pendekatan dalam penurunan metode Newton-Raphson

1. Secara geometri
2. Memanfaatkan deret Taylor

$$f(x_s) = 0 \text{ dan } x_s = g(x_s)$$

Metode Newton-Raphson (Geometri)



Metode Newton-Raphson (Geometri)

Gradien dari garis singgung $f(x)$ di titik x_r adalah

$$m = f'(x_r) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_r) - 0}{x_r - x_{r+1}}$$

$$f'(x_r) = \frac{f(x_r)}{x_r - x_{r+1}}$$

dengan kata lain,

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

Metode Newton-Raphson (Deret Taylor)

Uraikan $f(x_{r+1})$ di sekitar x_r menggunakan deret Taylor didapatkan

$$f(x_{r+1}) = f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} f''(x_r) + \dots$$
$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r)$$

Karena ini adalah permasalahan mencari akar, maka $f(x_{r+1}) = 0$, dengan kata lain,

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

Metode Newton-Raphson

Cara metode Newton-Raphson mendekati nilai sejati sama seperti cara metode titik tetap. Nilai hampiran x_i diperbaiki terus menerus dalam tiap iterasinya. Yang membedakan adalah cara pengambilan nilai x yang baru, yaitu menggunakan formula

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

Tugas

Opsi 4 :

Buat implementasi metode Newton-Raphson dalam python.

Input fungsi, turunan fungsi, dan batas galat boleh di*hardcode*kan, tapi input tebakan awal dimasukkan oleh user.