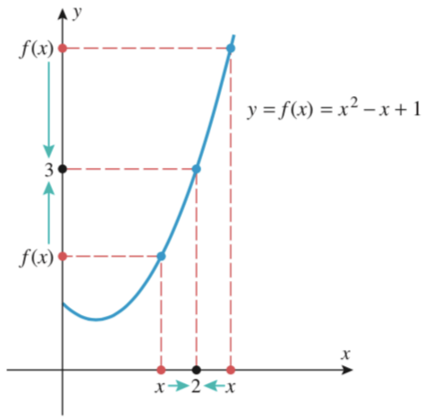
บทที่ 2

ลิมิตและความต่อเนื่อง (Limits and Continuity)

2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน (The Limit of Functions)

พิจารณาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x^2 - x + 1$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ดังตาราง และกราฟต่อไปนี้ เพื่อดูค่าของ $f(x)$ โดยเลือกบางค่า x ที่มีค่าเข้าใกล้ 2



รูป 2.1: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - x + 1$ ดัดแปลงจาก Anton, H.CALCULUS.New York; John Wiley and Sons, Inc., 1995.

ถ้าสนใจค่าของ x ที่เข้าใกล้ 2 มากๆ ไม่ว่าค่านั้นจะมากกว่า 2 หรือ น้อยกว่า 2 ก็ตาม ดังนั้น จะพิจารณาตารางต่อไปนี้

x	1.0	1.5	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.5	3
$f(x)$	1.000	1.750	2.970	2.997	3	3.003	3.03	4.750	7.00

จากตารางจะเห็นได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้ายมือ 2 ($x < 2$) แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 3 และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวามือ 2 ($x > 2$) แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 3
สรุปได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ $2^2 - 2 + 1 = 3$
ซึ่งเราจะกล่าวว่า "**ลิมิตของฟังก์ชัน** $f(x)$ เท่ากับ 3 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2" เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

โดยที่ $\to$ เขียนแทนคำว่า "มีค่าเข้าใกล้"

ในกรณีทั่วๆไป เราอาจจะกล่าวนิยามของลิมิตได้ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1. ลิมิตของฟังก์ชัน f มีค่าเท่ากับจำนวนจริง L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ จำนวนจริง a ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \tag{2.1}$$

ก็ต่อเมื่อ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อค่าของ x มีค่าเข้าใกล้ a (จากทั้งสอง ด้านของ a) แต่ $x \neq a$

จากสมการ (2.1) สามารถขียนอยู่ในรูป $f(x) \to L$ เมื่อ $x \to a$

$$f(x) = L$$

ความต่างกันระหว่างลิมิตของฟังก์ชันและค่าของฟังก์ชันจะแสดงให้เห็นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1.1. ให้ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1} f(x)$ และ $f(1)$

วิธีทำเห็นได้ชัดเจนว่า $f(1)$ หาค่าไม่ได้ เพราะว่า $f(1) = \dfrac{1^2-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ ซึ่งไม่นิยามจำนวนนี้

หาค่า $\lim_{x\to 1} f(x)$ จะพิจารณา ค่า x ที่เข้าใกล้ 1 จะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

1. เมื่อ $x < 1$

x	0.9	0.99	0.999	$\cdots$	0.99999
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	$\cdots$	1.99999

2. เมื่อ $x > 1$

x	1.0001	1.001	1.01	$\cdots$	1.1
$f(x)$	2.0001	2.001	2.01	$\cdots$	2.1

จากทั้งสองกรณี ทำให้ได้ว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 1 แล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เท่ากับ 2 นั่นคือ $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

จากตัวอย่าง 2.1.1 จะเห็นได้ว่าค่าของ $\lim_{x\to 1} f(x)$ และ $f(1)$ ไม่เท่ากัน

2.2 สมบัติของลิมิต

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมบัติของลิมิตซึ่งช่วยในการคำนวณค่าของลิมิต

ทฤษฎีบท 2.1. กำหนดให้ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใดๆ และให้ f, g เป็นฟังก์ชันที่ทำให้ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \lim_{x\to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
3. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$
4. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M$
5. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = LM$
6. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ โดยที่ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
8. $\lim_{x\to a} x = a$
9. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อสังเกต 2.2.1. จากทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 7 จะได้ $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ โดยที่ $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$ เมื่อ n เป็นเลขคู่

ตัวอย่าง 2.2.1. จงหาค่าของ

1. $\lim_{x\to 3} 1 = 1$
2. $\lim_{x\to 3} (x+5) = \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 5 = 3 + 5 = 8$
3. $\lim_{x\to -1} (x-7) = \lim_{x\to -1} x - \lim_{x\to -1} 7 = -1 - 7 = -8$
4. $\lim_{x\to 3} 6x = 6 \lim_{x\to 3} x = 6(3) = 18$
5. $\lim_{x\to 3} 6x(x+5) = \lim_{x\to 3} 6x \cdot \lim_{x\to 3} (x+5) = 18(8) = 144$
6. $\lim_{x\to 3} \frac{x}{x+5} = \frac{\lim_{x\to 3} x}{\lim_{x\to 3} (x+5)} = \frac{3}{8}$
7. $\lim_{x\to -1} x^7 = (-1)^7 = -1$ □

ตัวอย่าง 2.2.2. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{6x^3-1}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.2.3. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to -1}(5x^2-3x+2)$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-5}{x^2-1}$

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 2.2. กำหนดให้ $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ a เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} P(x) = c_0 + c_1a + c_2a^2 + \cdots + c_na^n = P(a)$$

ตัวอย่าง 2.2.4. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1}(5x^5 + 3x^3 - x^2 - 8)^{10}$
วิธีทำ

ทฤษฎีบท 2.3. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยที่ $Q(a) \neq 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

ตัวอย่าง 2.2.5. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2} \frac{3x-5}{x+1}$
วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.2.6. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1} \frac{3x^3+6}{x+2}$
วิธีทำ

จากทฤษฎีบท 2.3 ในกรณีที่ $P(a) = 0$ และ $Q(a) = 0$ แล้ว $\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ จะมีผลลัพธ์เป็น $\frac{0}{0}$ ซึ่งเป็นรูปแบบที่ไม่กำหนด (Indeterminate Form) การแก้ปัญหาในรูปแบบนี้จะต้องทำการปรับฟังก์ชันใหม่โดยวิธีการทางคณิตศาสตร์ นั่นคือ

1. การแยกตัวประกอบ

2. ใช้สังยุค (Conjugate)

ตัวอย่าง 2.2.7. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.2.8. จงหาค่าของ $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.2.9. จงหาค่าของ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(5+\Delta x)^2 - 25}{\Delta x}$

ตัวอย่าง 2.2.10. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.2.11. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.2.12. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+81}-9}{x^2}$

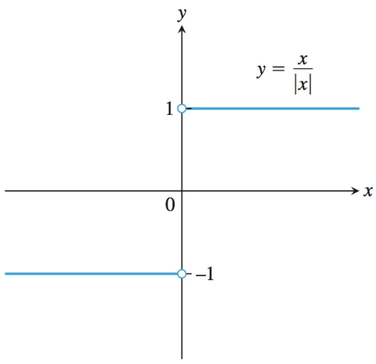
วิธีทำ

2.3 ลิมิตขวา และ ลิมิตซ้าย (Right-hand limits and left-hand limits)

สำหรับหัวข้อนี้เราจะศึกษาการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันโดยพิจารณาจากลิมิตขวาของฟังก์ชันและลิมิตซ้ายของฟังก์ชัน เช่นพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

กราฟของ f แสดงได้ดังรูปที่ 2.2



รูป 2.2: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{|x|}$

จากกราฟ (2.2) จะพบว่า ถ้า x เข้าใกล้ 0 โดยที่ $x > 0$ แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 หรือจะกล่าวได้ว่า**ลิมิตทางขวา (right-hand limit)** ของ f เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$
ถ้า x เข้าใกล้ 0 โดยที่ $x < 0$ แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ -1 หรือจะกล่าวได้ว่า**ลิมิตทางซ้าย (left-hand limit)** ของ f เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

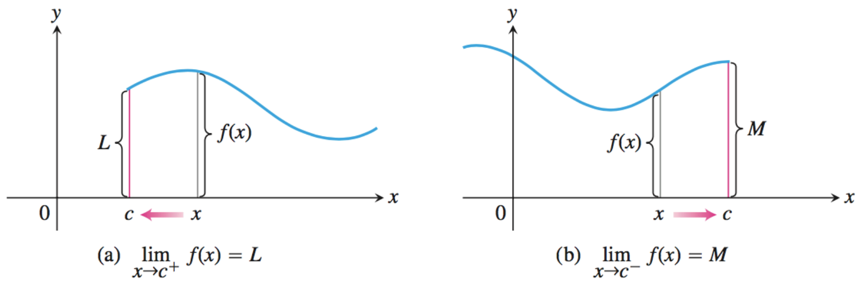
บทนิยาม 2.2. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ และ a, L เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a โดยที่ $x > a$ (x เข้าใกล้ a ทางขวา) เขียนแทนด้วย
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$
2. ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a โดยที่ $x < a$ (x เข้าใกล้ a ทางซ้าย) เขียนแทนด้วย
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

จากนิยาม 2.2 จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ และ a, L เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

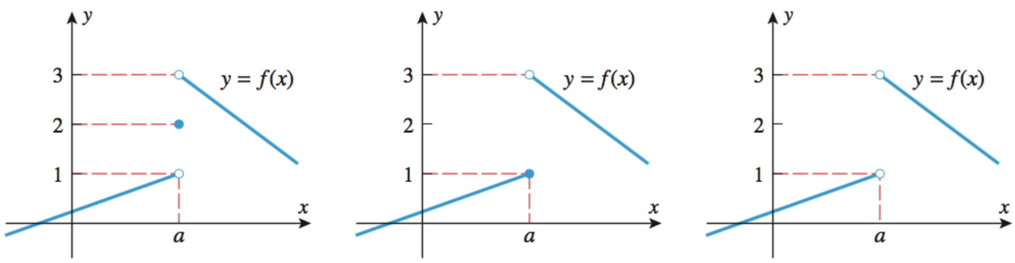


รูป 2.3: กราฟของลิมิตขวา และ ลิมิตซ้ายของฟังก์ชัน $f(x)$

จากตัวอย่างข้างต้นของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ จะเห็นว่า

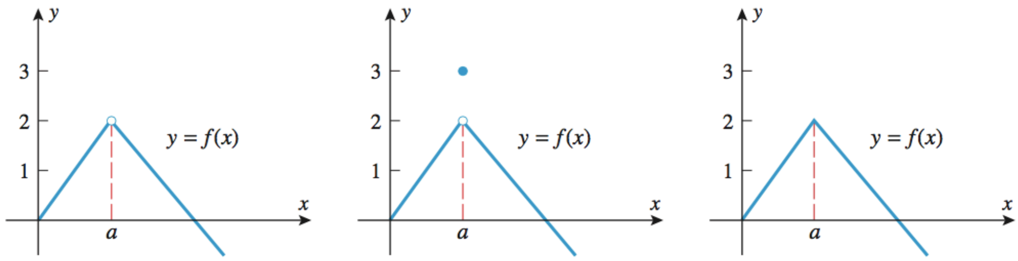
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้



รูป 2.4: กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$

ตัวอย่าง 2.3.1. จากกราฟ 2.4 จะได้ว่า $\lim_{x\to a^+} f(x) = 3$ และ $\lim_{x\to a^-} f(x) = 1$ ดังนั้น $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้ เนื่องจากลิมิตขวาไม่เท่ากับ ลิมิตซ้าย



รูป 2.5: กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$

ตัวอย่าง 2.3.2. จากกราฟ 2.5 จะได้ว่า $\lim_{x\to a^+} f(x) = 2$ และ $\lim_{x\to a^-} f(x) = 2$ ดังนั้น $\lim_{x\to a} f(x) = 2$

ตัวอย่าง 2.3.3. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x \geq 1 \\ 5-4x, & x < 1 \end{cases}$$

จงหา $\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to 1} f(x)$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.3.4. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x-4}{x-1}, & x < 1 \\ 3x^2+1, & x \geq 1 \end{cases}$$

จงหา $\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to 1} f(x)$

วิธีทำ

2.4 ลิมิตอนันต์ (Infinite Limits)

พิจารณาการหาค่าลิมิตจากตารางของฟังก์ชัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้ กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\dots$
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	10	100	1000	10000	$\dots$

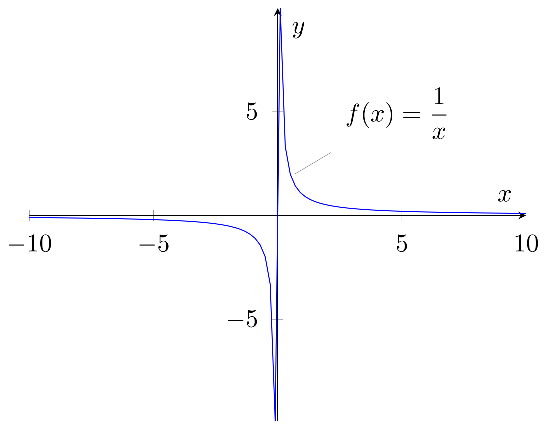
ตาราง 2.1: ค่าของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \to 0^+$

จากตารางที่ 2.1 จะเห็นว่าเมื่อ $x \to 0^+$ ค่าของ $\frac{1}{x}$ จะเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต
จะเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	$\dots$
$f(x) = \frac{1}{x}$	-1	-10	-100	-1000	-10000	$\dots$

ตาราง 2.2: ค่าของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \to 0^-$

จากตารางที่ 2.2 จะเห็นว่าเมื่อ $x \to 0^-$ ค่าของ $\frac{1}{x}$ จะลดลงโดยไม่มีขอบเขต
จะเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$



รูป 2.6: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x}$

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงนิยามของลิมิตเป็นอนันต์

บทนิยาม 2.3. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุก x ในช่วงเปิดที่มี a เป็นสมาชิก โดยที่ f ไม่จำเป็นต้องกำหนดค่าได้ที่ a

1. ถ้าค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา จะกล่าวว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เข้าใกล้อนันต์** เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$
2. ถ้าค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย จะกล่าวว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เข้าใกล้อนันต์** เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

และในกรณีที่ $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty = \lim_{x \to a^-} f(x)$ จะได้ $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

บทนิยาม 2.4. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุก x ในช่วงเปิดที่มี a เป็นสมาชิก โดยที่ f ไม่จำเป็นต้องกำหนดค่าได้ที่ a

1. ถ้าค่าของ $f(x)$ จะลดลงโดยไม่มีขอบเขต เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา จะกล่าวว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เข้าใกล้อนันต์** เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
2. ถ้าค่าของ $f(x)$ จะลดลงโดยไม่มีขอบเขต เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย จะกล่าวว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เข้าใกล้อนันต์** เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

และในกรณีที่ $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty = \lim_{x \to a^-} f(x)$ จะได้ $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

ข้อสังเกต 2.4.1. ถ้าลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ $-\infty$ หรือ $+\infty$ แล้วเป็นข้อตกลงว่า ลิมิตของ $f(x)$ ไม่มีค่า

2.5 ลิมิตที่อนันต์ (Limits at Infinite)

ในหัวข้อนี้เราจะแสดงวิธีการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ อย่างไม่มีขอบเขตบน หรือ x มีค่าลดลงเรื่อยๆ อย่างไม่มีขอบเขตล่าง จะเขียนแทนข้อความเหล่านี้ด้วยสัญลักษณ์ $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$ ตามลำดับ

บทนิยาม 2.5. กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน

1. ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ อย่างไม่มีขอบเขตบน เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$
2. ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x มีค่าลดลงเรื่อยๆ อย่างไม่มีขอบเขตล่าง เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

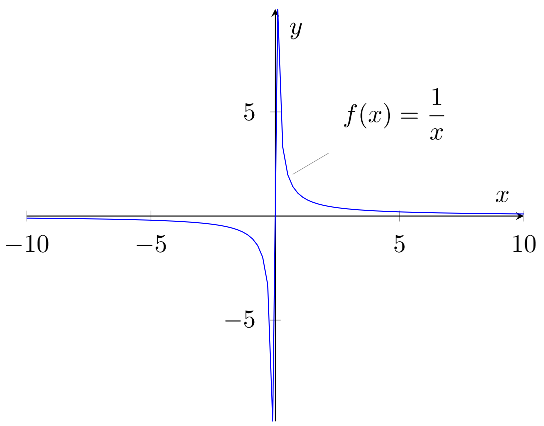
พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ โดยที่ $x \neq 0$ จากตารางต่อไปนี้

x	1	10	100	1000	10000	...
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
ข้อสรุป	เมื่อ $x \to \infty$ ค่าของ $\frac{1}{x}$ จะลดลงไปหา 0					

ตาราง 2.3: ค่าของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \to \infty$

x	-1	-10	-100	-1000	-10000	...
$f(x) = \frac{1}{x}$	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...
ข้อสรุป	เมื่อ $x \to -\infty$ ค่าของ $\frac{1}{x}$ จะลดลงไปหา 0					

ตาราง 2.4: ค่าของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \to -\infty$



รูป 2.7: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x}$

ดังนั้นจากตารางที่ 2.3 และ 2.4 หรือกราฟที่ 2.7 จะเห็นว่า $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

ทฤษฎีบท 2.5. กำหนดให้ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = M$ โดยที่ L และ M เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to+\infty} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $\lim_{x\to+\infty} c\cdot f(x) = c\lim_{n\to+\infty} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
3. $\lim_{x\to+\infty} [f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim_{x\to+\infty} g(x) = L\pm M$
4. $\lim_{x\to+\infty} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to+\infty} g(x) = L\cdot M$
5. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ โดยที่ $\lim_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$
6. $\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$ เมื่อ r, s เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

หมายเหตุ ทฤษฎีบทดังกล่าว ยังคงเป็นจริงสำหรับการแทนด้วย $x\to-\infty$

ทฤษฎีบท 2.6. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ แล้ว $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

ตัวอย่าง 2.5.1. จงหา $\lim_{x\to\infty} (4 - \dfrac{3}{x^3})$
วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.5.2. จงหา $\lim_{x\to+\infty} (5 + \dfrac{1}{x})$
วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.5.3. จงหา $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-5}{x+1}$

วิธีทำ

หมายเหตุ $\pm\frac{\infty}{\infty}$ เป็นรูปแบบที่ไม่กำหนดของลิมิต เช่นเดียวกับ $\frac{0}{0}$ ดังนั้นเราจึงไม่สามารถบอกได้ว่าลิมิตมีค่าเป็นเท่าใด โดยในการแก้ปัญหานี้ จะต้องจัดรูปฟังก์ชันตรรกยะใหม่เสียก่อน โดยการหารทั้งเศษทั้งส่วนด้วยพจน์ที่มีดีกรีสูงสุด

ตัวอย่าง 2.5.4. จงหา $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5+3x^2-5}{10x^6-x^4+3}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.5.5. จงหา $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^5+3x^6-2}{9x^6-x^4-9}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.5.6. จงหา $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{6x^3+3x^2-2}{12x^3-x+7}}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.5.7. จงหา $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 11}{8x^3 - 6x + 2}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.5.8. จงหา $\lim\limits_{x \to -\infty} (\dfrac{x^5 - x^7 - 2x}{9x^6 - x^7 - 19})^5$

วิธีทำ

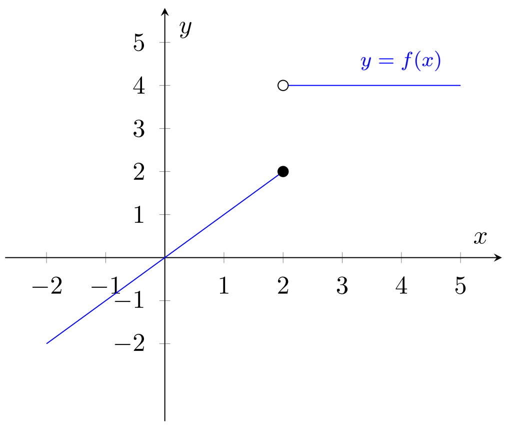
2.6 ความต่อเนื่อง (Continuity)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความต่อเนื่องของฟังก์ชันซึ่งเป็นสมบัติที่สำคัญอย่างมากสำหรับการศึกษาวิชาแคลคูลัส

บทนิยาม 2.6. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงและ $a \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ (*continuous at* $x = a$) ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

หมายเหตุ ถ้า f ไม่สอดคล้องงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งในสามข้อดังกล่าว จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่อง (*Discontinuous*) ที่จุด a



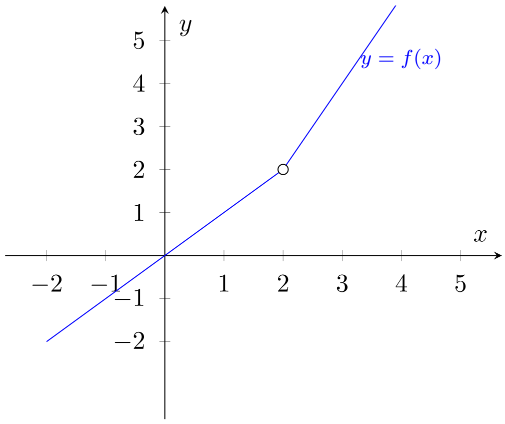
รูป 2.8: กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่าง 2.6.1. พิจารณารูปที่ 2.8 ของ $f(x)$ เมื่อ พิจารณาที่จุด $x = 2$ จะได้ว่า

(1) $f(2) = 2$

(2) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ไม่มีค่า เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2 \neq 4 = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$



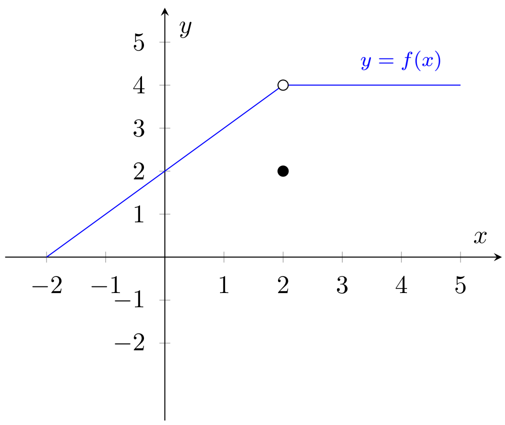
รูป 2.9: กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่าง 2.6.2. พิจารณารูปที่ 2.9 ของ $f(x)$ เมื่อ พิจารณาที่จุด $x = 2$ จะได้ว่า

(1) $f(2)$

(2) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2 = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$



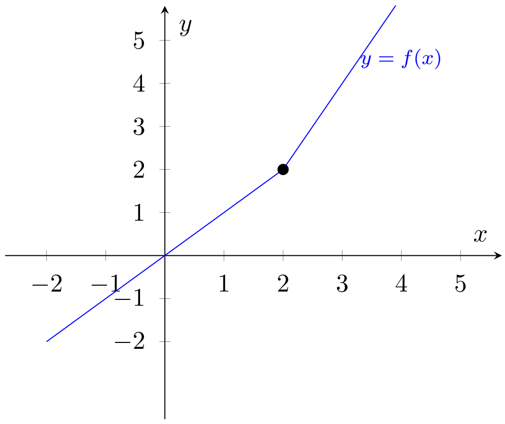
รูป 2.10: กราฟของฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่าง 2.6.3. พิจารณารูปที่ 2.10 ของ $f(x)$ เมื่อ พิจารณาที่จุด $x = 2$ จะได้ว่า

(1) $f(2) = 2$

(2) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4 = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$



รูป 2.11: กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่าง 2.6.4. พิจารณารูปที่ 2.11 ของ $f(x)$ เมื่อ พิจารณาที่จุด $x = 2$ จะได้ว่า

(1) $f(2) = 2$

(2) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ เนื่องจาก $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่าง 2.6.5. กำหนดให้ $f(x) = x + 5$ จงตรวจสอบว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ หรือไม่
วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.6.6. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-x}, & x \neq 1 \\ 2x+1, & x = 1 \end{cases}$$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$
วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.6.7. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}, & x \neq 16 \\ 8, & x = 16 \end{cases}$$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 16$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.6.8. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5, & 0 \leq x < 2 \\ 11, & x \geq 2 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.6.9. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 2x+9, & x \geq -3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2+4x+3}, & x < -3 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = -3$ หรือไม่

วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.6.10. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 3k+4x, & 0 \leq x < -1 \\ 11, & x \geq -1 \end{cases}$$

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = -1$ แล้ว k มีค่าเท่าใด

วิธีทำ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1.1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x+5)$

1.2. $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+4x+3)$

1.3. $\lim\limits_{x\to -5}(x+4)^{2568}$

1.4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-5}{x^2-25}$

1.5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$

1.6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$

1.7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

1.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

1.9. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$

1.10. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

1.11. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x+3)^2-9}{\Delta x}$

1.12. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

1.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

1.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$

1.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$

1.16. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

1.17. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}}$

1.18. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$

2. กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x<1 \\ x+1, & x\geq 1 \end{cases}$$

จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

2.1. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ 2.2. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ 2.3. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

3. กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>2 \\ 3x-1, & x\leq 2 \end{cases}$$

จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

3.1. $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$ 3.2. $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$ 3.3. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

4. กำหนดให้ $f(x)$ นิยามโดย

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

4.1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 4.2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 4.3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

5. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^5 - x^3}{10x^6 + 3}$

5.2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4 + 7x - 3}{3x^3 - 2x^4}$

5.3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 - 3x^2}\right)^4$

5.4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-3x^3 + 2x + 1}{3x^3 - 3x + 6}\right)^1 5$

5.5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 7}{3x^3 + 4x - 2}$

5.6. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{8x^2 - 2}{2x^2 - x + 1}}$

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3 - x + 7}{9x^3 + 1}}$

5.8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{12x^4 + x^3 - x + 7}{9x^3 - 6x^4 + 8}\right)^3$

6. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 3 \\ 4 - x, & x \geq 3 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

7. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x+1}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2 - \sqrt{5 - x}}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่

8. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & 0 < x < 2 \\ \ln(x + 1), & x \geq 2 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

9. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}, & 1 < x \leq 4 \\ \frac{1}{x+1}, & x > 4 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 4$ หรือไม่

10. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & x \neq -1 \\ 2, & x = -1 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = -1$ หรือไม่

11. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2x, & x \leq 1 \\ 3x^2 + x - 2, & x > 1 \end{cases}$$

จงหา a ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

12. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 5, & x > 2 \end{cases}$$

จงหา k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 2$

13. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < -1 \\ 2x + 5, & x \geq -1 \end{cases}$$

จงหา a ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = -1$

14. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4}, & x < 0 \\ ax + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

จงหา a ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 0$

15. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+2), & x < 1 \\ k(x-1) + \ln 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

จงหา k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

16. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} ax - b, & x \leq 1 \\ 3x, & 1 < x < 2 \\ bx^2 - a, & 2 \leq x \end{cases}$$

จงหา a, b ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และต่อเนื่องที่ $x = 2$