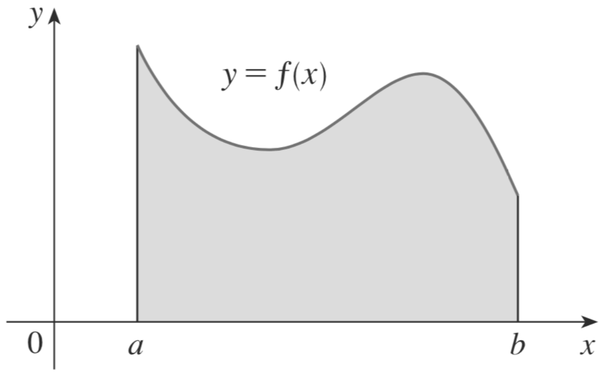
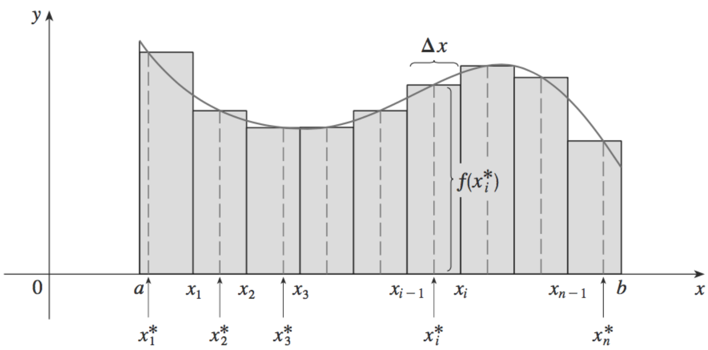
บทที่ 7

ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์ (The definite integral and Applications)

7.1 ปริพันธ์จำกัดเขต (The definite integral)



รูป 7.1



รูป 7.2

บทนิยาม 7.1. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยโดยที่แต่ละช่วงย่อยมีความกว้างเท่ากับ $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ และให้ $x_0(=a), x_1, x_2, ..., x_n(=b)$ เป็นจุดปลายของช่วงย่อยเหล่านี้ เลือกจุดตัวอย่าง (Simple points) $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ ในแต่ละช่วงย่อย นั่นคือ $x_i^* \in [x_{i-1} - x_i]$ ทุก $i = 1, 2, 3, ..., n$ จะได้ว่า **ปริพันธ์จำกัดเขต (Definite integral)** ของ f จาก a ถึง b คือ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \tag{7.1}$$

ต่อไปนี้เป็นการศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานของปริพันธ์จำกัดเขต

ทฤษฎีบท 7.1. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์จำกัดเขตบนช่วงปิด $[a,b]$ คุณสมบัติต่างๆ เหล่านี้เป็นจริง

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int f(x)dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ใดๆ
4. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ สำหรับ $c \in [a,b]$
6. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in [a,b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
7. ถ้า $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a,b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
8. ถ้า $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุกๆ $x \in [a,b]$ แล้ว $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

ต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทสำหรับปริพันธ์จำกัดเขตที่มีความสำคัญเป็นอย่างมากในวิชาของแคลคูลัส

ทฤษฎีบท 7.2. (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสส่วนที่ 1 (The Fundamental Theorem of Calculus, Part 1)) กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้วฟังก์ชัน g นิยามโดย

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b$$

จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) และ $g'(x) = f(x)$

จากทฤษฎีบทที่ 7.2 จะได้ว่า

$$g'(x) = \int_a^x f(t)d = f(x)$$

ทฤษฎีบท 7.3. (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสส่วนที่ 2 (The Fundamental Theorem of Calculus, Part 2)) ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

เมื่อ F เป็นปฏิยานุพันธ์ใดๆ ของ f นั่นคือ $F' = f$

ข้อสังเกต 7.1.1. สัญลักษณ์ที่ใช้

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ตัวอย่าง 7.1.1. จงหาค่าของ $\int_1^2 x^2 dx$

ตัวอย่าง 7.1.2. จงหาค่าของ $\int_0^{2\pi} \sin x dx$

ตัวอย่าง 7.1.3. จงหาค่าของ $\int_{-1}^2 (x^3 - x^2 - 2x)dx$

ตัวอย่าง 7.1.4. จงหาค่าของ $\int_0^1 \left(\frac{4}{x^2+1} - 7\right) dx$

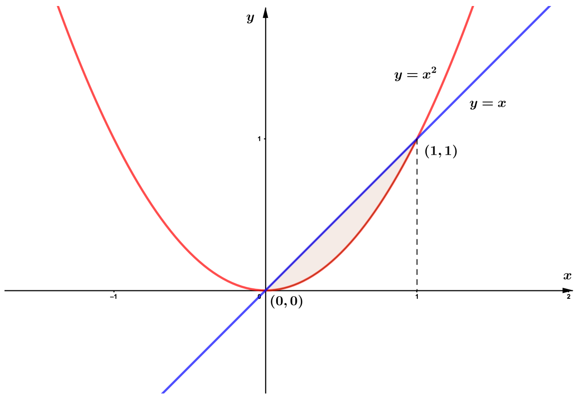
7.2 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง (Areas between curves)

บทนิยาม 7.2. ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ จะได้ว่า พื้นที่ใต้ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ จาก a ถึง b กำหนดโดย

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \tag{7.2}$$

ตัวอย่าง 7.2.1. จงหาพื้นที่ของปริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y = x$

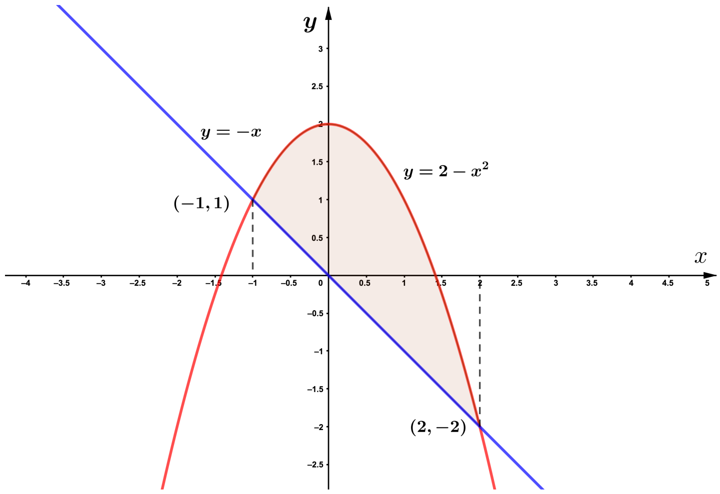
วิธีทำ. บริเวณที่ต้องการหาพื้นที่ แสดงได้ดังรูปที่ 7.3 □



รูป 7.3

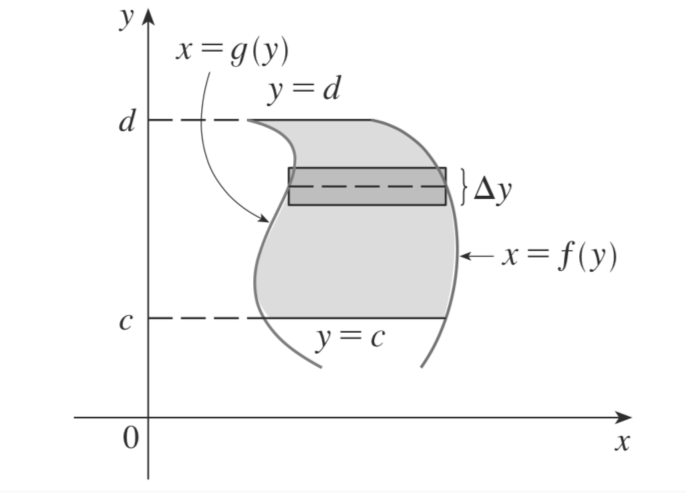
ตัวอย่าง 7.2.2. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นเส้นโค้ง $y = 2 - x^2$ และ $y = -x$

วิธีทำ. บริเวณที่ต้องการหาพื้นที่ แสดงได้ดังรูปที่ 7.4 $\square$



รูป 7.4

กำหนดให้ฟังก์ชัน $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c, d]$ โดยที่ $f(y) \geq g(y)$ สำหรับทุกๆ $y \in [c, d]$ ดังนั้นพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งของฟังก์ชัน $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$ แสดงดังรูปที่ 7.5 โดยใช้แนวคิดเดียวกันกับการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งของ



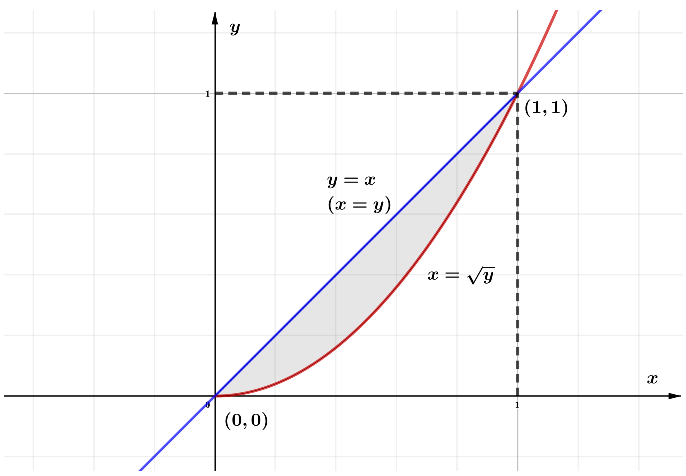
รูป 7.5

ฟังก์ชันในเทอมของ x ดังนั้น พื้นที่ระหว่างเส้นโค้งของฟังก์ชัน $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$ กำหนดโดย

$$A = \int_c^d (f(y) - g(y))dy \tag{7.3}$$

ตัวอย่าง 7.2.3. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นเส้นโค้ง $x = \sqrt{y}$ และ $y = x$ โดยหาปริพันธ์เทียบกับ y

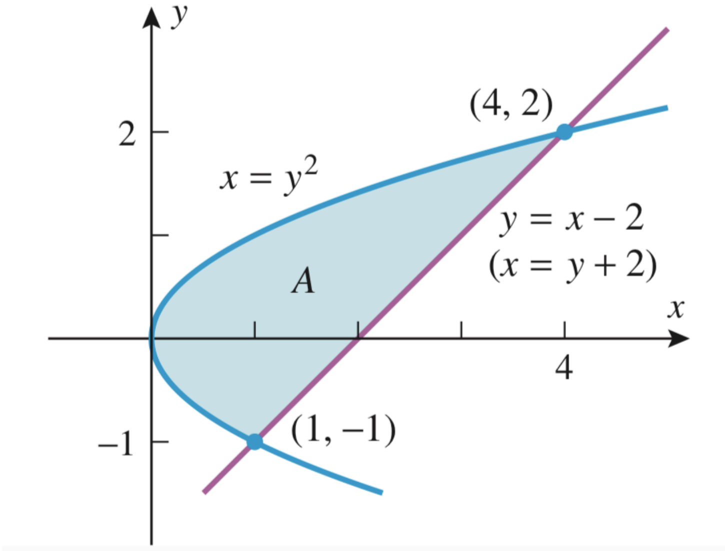
วิธีทำ. บริเวณที่ต้องการหาพื้นที่ แสดงได้ดังรูปที่ 7.6 □



รูป 7.6

ตัวอย่าง 7.2.4. จงหาพื้นที่ของปริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นเส้นโค้ง $x = y^2$ และ $y = x - 2$

วิธีทำ. บริเวณที่ต้องการหาพื้นที่ แสดงได้ดังรูปที่ 7.7 □



รูป 7.7

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้

   1.1. $\int_{-2}^{0} (2x-5)\,dx$

   1.2. $\int_{-2}^{2} (x^3-2x+3)\,dx$

   1.3. $\int_{-1}^{2} (3x^2+4x-2)\,dx$

   1.4. $\int_{0}^{1} (x^2+\sqrt{x})\,dx$

   1.5. $\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$

   1.6. $\int_{0}^{\pi/3} 2\sec^2 x\,dx$

   1.7. $\int_{1}^{2} (e^{x-1}+4\ln x)\,dx$

   1.8. $\int_{0}^{\pi} t\sin t dt$

   1.9. $\int_{3}^{4} \frac{5}{(x-2)(x+3)} dx$

   1.10. $\int_{0}^{\pi/6} \sin 2x \cos 4x dx$

   1.11. $\int_{0}^{\pi/3} \sin^4 3x \cos^3 3x dx$

   1.12. $\int_{0}^{1} \sqrt{x^2+1} dx$

2. จงหาพื้นที่ของปริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นเส้นโค้ง $y=x^2$ และ $y=2x-x^2$

3. จงหาพื้นที่ของปริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นเส้นโค้ง $y=\sin x$, $y=cosx$, $x=0$ และ $x=\pi/2$

4. จงหาพื้นที่ของปริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นเส้นโค้ง $y=x-1$ และ $y^2=2x+6$

5. จงหาพื้นที่ของปริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นเส้นโค้ง $y=\sqrt{x}$ และ $y=x-2$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

1. 1.1. -14

   1.2. 12

   1.3. 9

   1.4. 1

   1.5. 2

   1.6. $2\sqrt{3}$

   1.7. $e-5+8\ln 2$

   1.8. $\pi/3$

   1.9. $\ln\frac{12}{7}$

   1.10. 1/24

   1.11. 0

   1.12. $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)$

2. $\frac{1}{3}$

3. $2\sqrt{2}-2$

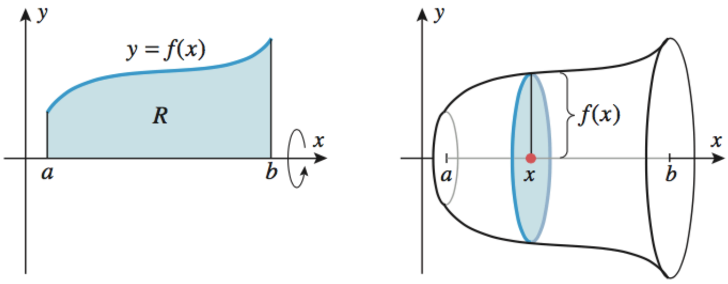
4. 18

5. $\frac{10}{3}$

7.3 ปริมาตร (Volume)

7.3.1 การหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนโดยวิถีจาน (Volumes by Disk Method)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $f(x) \geq 0$ และ ให้ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และแกน x สำหรับ $a \leq x \leq b$ เมื่อหมุนบริเวณ R รอบแกน x จะได้รูปทรงตันดังรูปที่ 7.8 ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน บริเวณ R รอบแกน x คือ

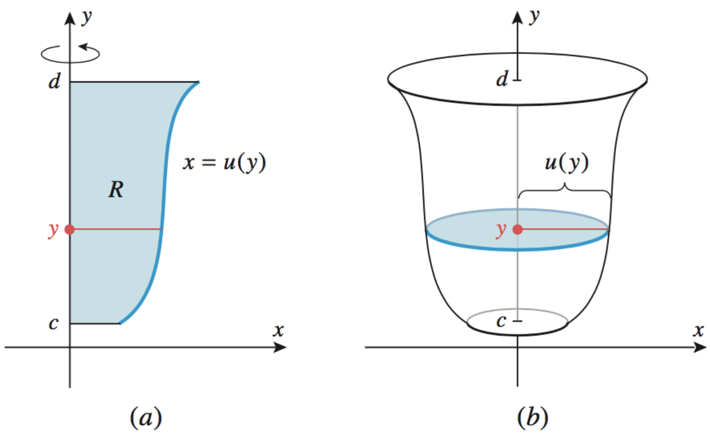


รูป 7.8

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx \qquad (7.4)$$

เนื่องจากภาคตัดขวางของปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากหมุนของเส้นโค้งมีลักษณะเป็นจาน (Disks) ดังนั้น จะเรียกสมการ (7.4) ว่า **การหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนโดยวิถีจาน (Volumes by Disk Method)**

ในทำนองเดียวกันกับการหมุนรูปแกน y นั่นคือ กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[c, d]$ และ $u(y) \geq 0$ และ ให้ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = u(y)$ และแกน y สำหรับ $c \leq y \leq d$ เมื่อหมุนบริเวณ R รอบแกน y จะได้รูปทรงตันดังรูปที่ 7.9 ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงตัน



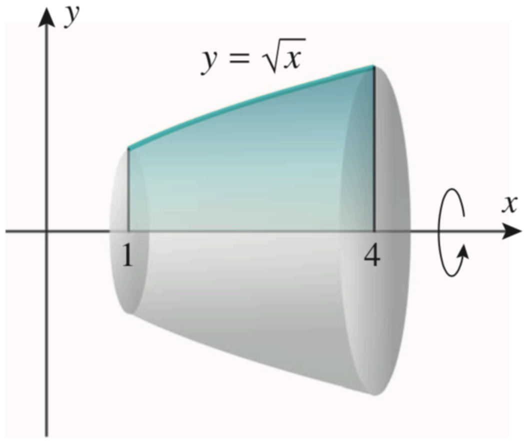
รูป 7.9

ที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน y คือ

$$V = \int_c^d \pi[u(y)]^2 dy$$

ตัวอย่าง 7.3.1. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณระหว่าง $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ และแกน x หมุนรอบแกน x

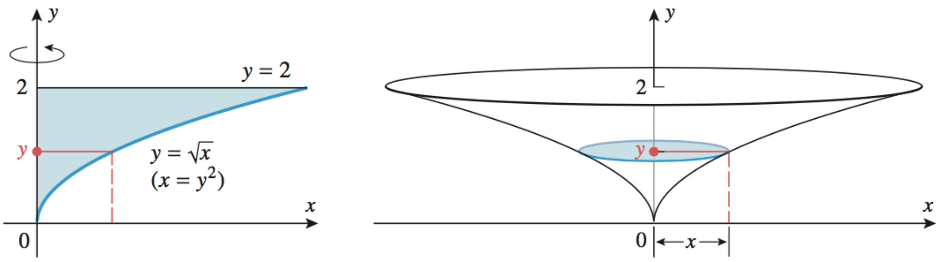
วิธีทำ. บริเวณที่ต้องการหาปริมาตรแสดงได้ดังรูปที่ 7.10 □



รูป 7.10

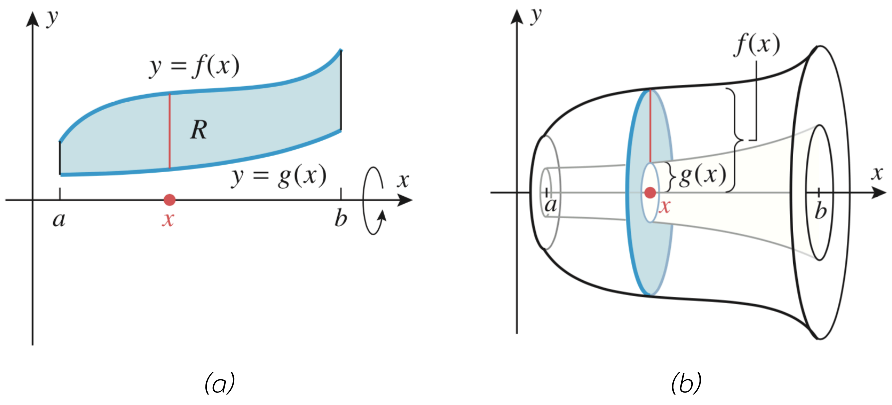
ตัวอย่าง 7.3.2. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณระหว่าง $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ และ $x = 0$ รอบแกน y

วิธีทำ. บริเวณที่ต้องการหาปริมาตรแสดงได้ดังรูปที่ 7.11 □



รูป 7.11

กำหนดให้ f, g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ โดยที่ $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ และให้ R เป็นพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 7.12 (a)



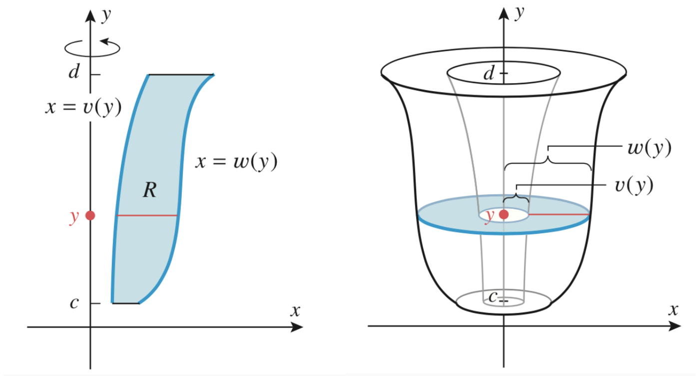
(a) (b)

รูป 7.12

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากหมุนบริเวณ R รอบแกน x บนช่วง $[a, b]$ คือ

$$V = \int_a^b \pi \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$$

ในทำนองเดียวกันการหมุนรอบแกน y นั่นคือ กำหนดให้ w และ v เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[c, d]$ โดยที่ $w(y) \geq v(y)$ สำหรับทุกๆ $y \in [c, d]$ และให้ R เป็นพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟของฟังก์ชัน $x = w(y)$ และ $x = v(y)$ และเส้นตรง $y = c$ และ $y = d$ ดังรูปที่ 7.13(a) ดังนั้น ปริมาตร



(a) (b)

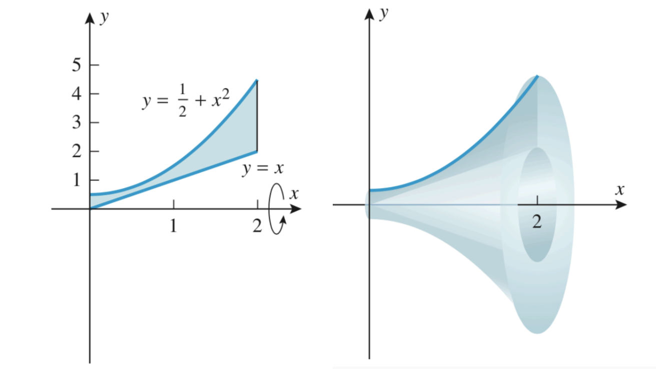
รูป 7.13

ของรูปทรงตันที่เกิดจากหมุนบริเวณ R รอบแกน y บนช่วง $[c, d]$ คือ

$$V = \pi \int_c^d ([w(y)]^2 - [v(y)]^2] dy$$

ตัวอย่าง 7.3.3. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณระหว่าง $f(x) = \frac{1}{2} + x^2$, $g(x) = x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2$ หมุนรอบแกน x

วิธีทำ. บริเวณที่ต้องการหาปริมาตรแสดงได้ดังรูปที่ 7.14 □

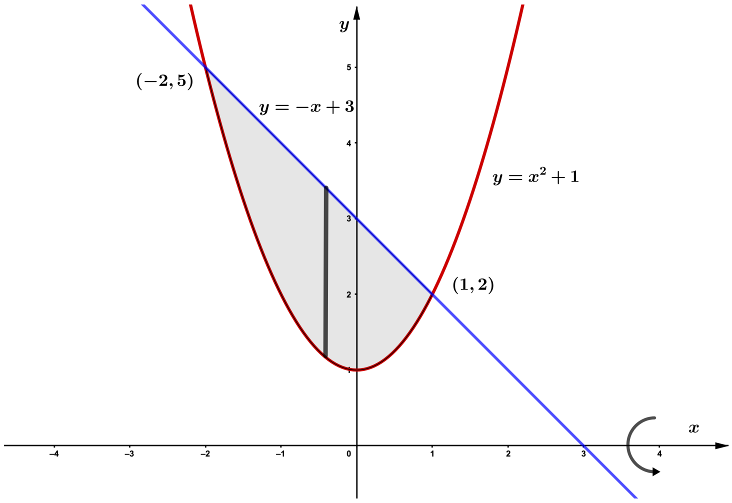


(a) (b)

รูป 7.14

ตัวอย่าง 7.3.4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณระหว่าง $y = x^2 + 1$, $y = -x + 3$ หมุนรอบแกน x

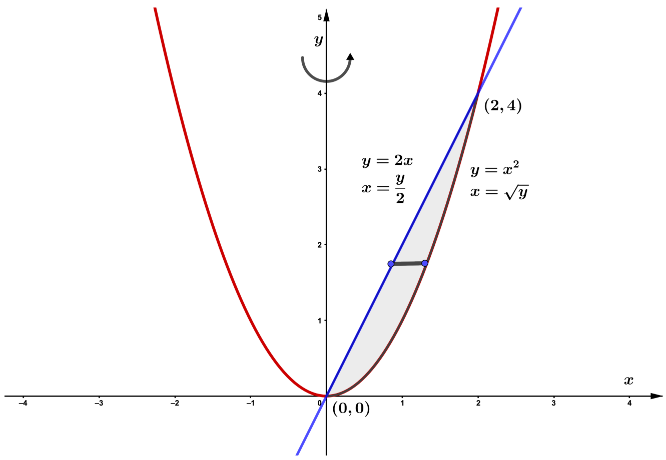
วิธีทำ. บริเวณที่ต้องการหาปริมาตรแสดงได้ดังรูปที่ 7.15 □



รูป 7.15

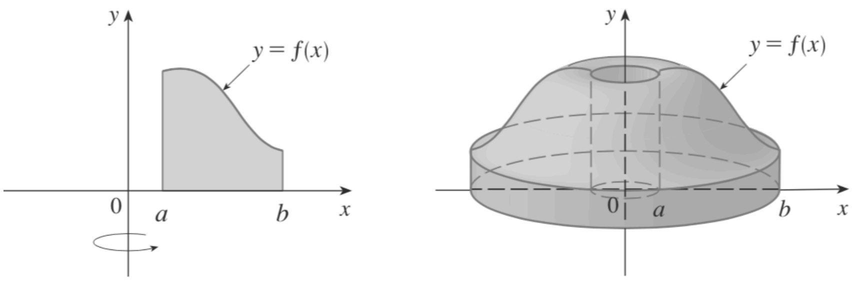
ตัวอย่าง 7.3.5. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณระหว่าง $y = x^2$, $y = 2x$ ในจตุภาคที่หนึ่งหมุนรอบแกน y

วิธีทำ. บริเวณที่ต้องการหาปริมาตรแสดงได้ดังรูปที่ 7.16 □

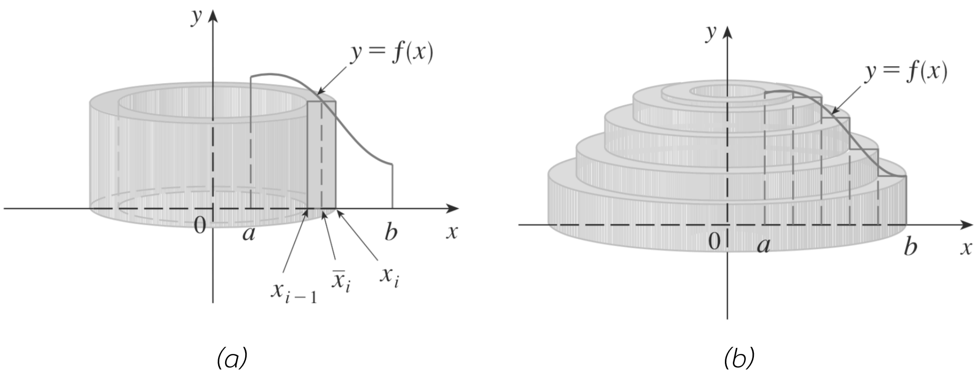


รูป 7.16

7.3.2 การหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีแบบเปลือก (Volumes by Shell Method)



รูป 7.17



รูป 7.18

ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบแกน y ภายใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก a ถึง b คือ

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

เมื่อ $0 \le a < b$ หรือ

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{รัศมี})(\text{ความสูง})dx$$

ในทำนองเดียวกันกับการหมุนรอบแกน x นั่นคือ กำหนดให้ $x = u(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c, d]$ และ R เป็นพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วย เส้นโค้ง $x = u(y)$ แกน y และเส้นตรง $y = c$ และ $y = d$

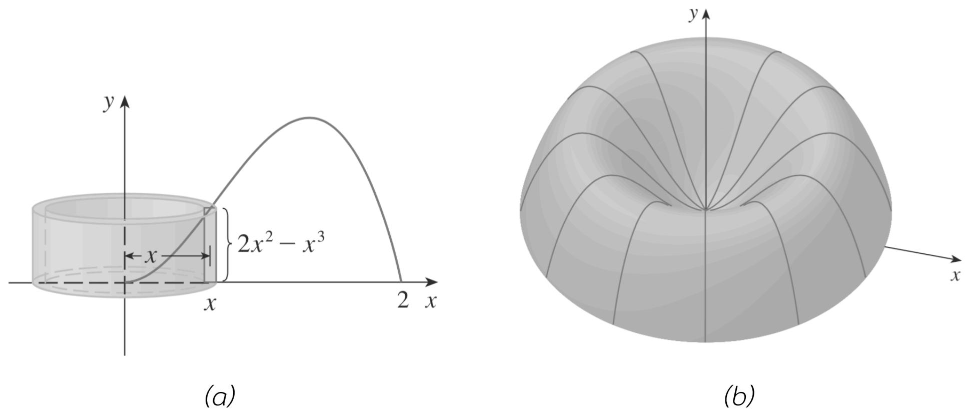
ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบแกน x ภายใต้เส้นโค้ง $x = u(y)$ จาก c ถึง d คือ

$$V = \int_c^d 2\pi y[u(y)]dy$$

หรือ

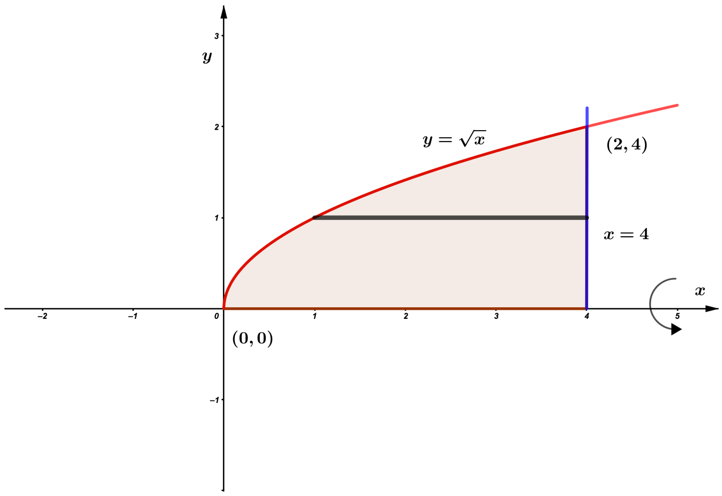
$$V = \int_c^d 2\pi(\text{รัศมี})(\text{ความสูง})dy$$

ตัวอย่าง 7.3.6. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณระหว่าง $y = 2x^2 - x^3$, $y = 0$ หมุนรอบแกน y



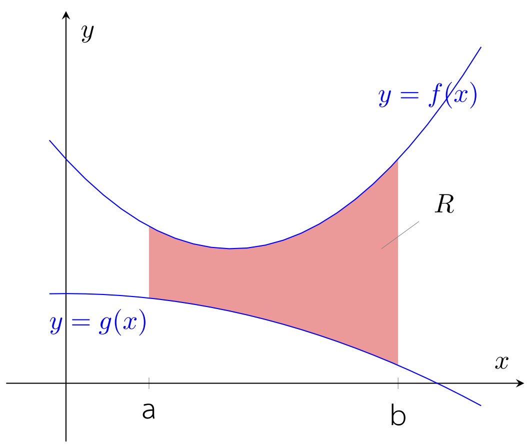
รูป 7.19

ตัวอย่าง 7.3.7. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณระหว่าง $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ และเส้นตรง $x = 4$ หมุนรอบแกน x



รูป 7.20

สำหรับการหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนของพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งจะกำหนดดังต่อไปนี กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ โดยที่ $f(x) \geq g(x)$ สำหรับ $x \in [a, b]$ และ R เป็นพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ จาก $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 7.21

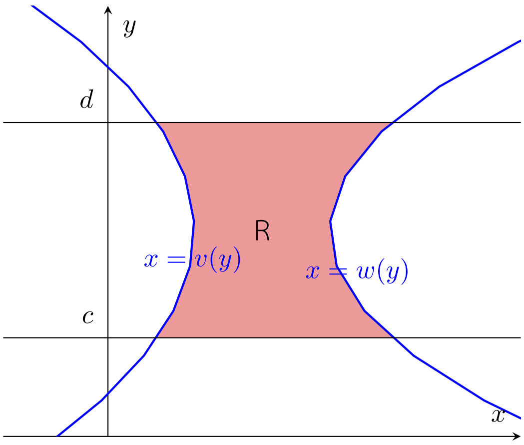


รูป 7.21

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน y คือ

$$V = \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]dx$$

กำหนดให้ $w(y)$ และ $v(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c, d]$ โดยที่ $w(y) \geq v(y)$ สำหรับ $c \in [c, d]$ และ R เป็นพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = w(y)$ และ $x = v(y)$ จาก $y = c$ และ $y = d$ ดังรูปที่ 7.22

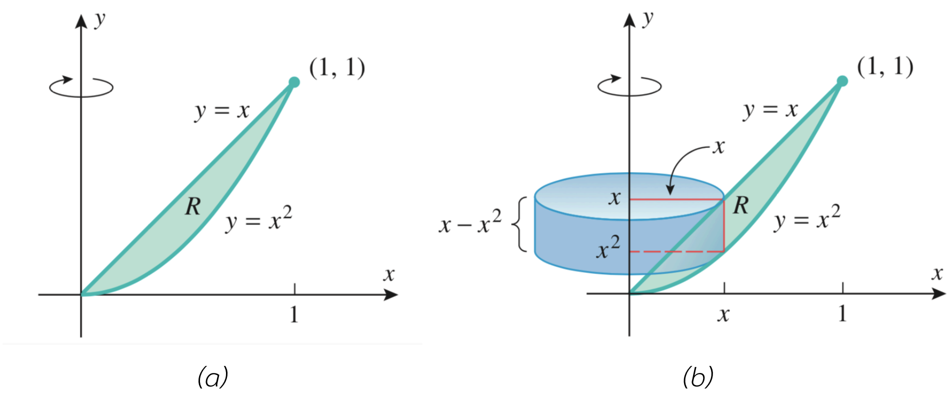


รูป 7.22

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน x คือ

$$V = \int_c^d 2\pi y[w(y) - v(y)]dy$$

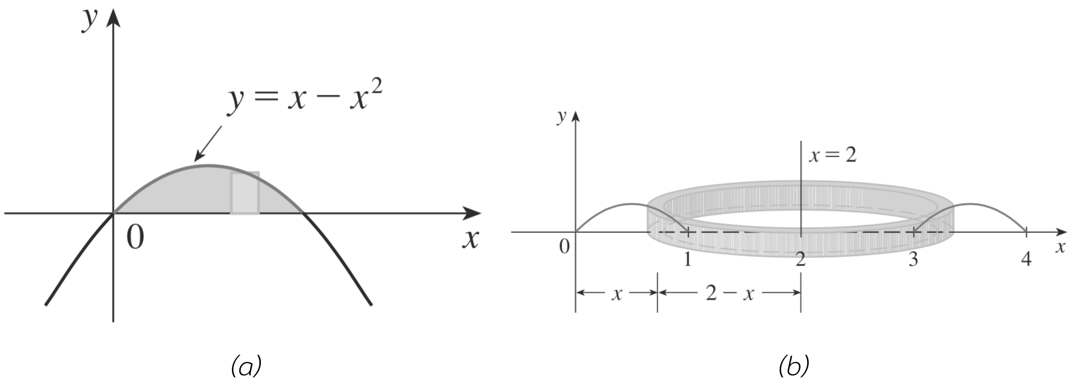
ตัวอย่าง 7.3.8. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณระหว่าง $y = x$, $y = x^2$ ในจตุภาคที่หนึ่งหมุนรอบแกน y



รูป 7.23

ตัวอย่าง 7.3.9. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณระหว่าง $y = x$, $y = x^2$ ในจตุภาคที่หนึ่งหมุนรอบแกน x

ตัวอย่าง 7.3.10. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณระหว่าง $y = x - x^2$, $y = 0$ หมุนรอบเส้นตรง $x = 2$



รูป 7.24

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณล้อมรอมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{9 - x^2}$ และ $y = 0$ รอบแกน x
2. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณล้อมรอมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{\cos x}$, $x = 0$ และ $y = 0$ สำหรับ $0 \leq x \leq \pi/4$ รอบแกน x
3. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณล้อมรอมด้วยเส้นโค้ง $x^2 = 4y$ และแกน $y = \frac{1}{2}x$ ใช้วิธีจาน โดยหมุนรอบ
   (a) แกน x
   (b) แกน y
4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณล้อมรอมด้วยเส้นโค้ง $8x = y^2$ และ $y = x^2$ รอบแกน y โดยใช้
   (a) วิธีจาน
   (b) วิธีเปลือกทรงกระบอก
5. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณล้อมรอมด้วยเส้นโค้ง $y = 2x + 6$ และ $y = 9 - x^2$ รอบแกน x โดยใช้
   (a) วิธีจาน
   (b) วิธีเปลือกทรงกระบอก
6. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณล้อมรอมด้วยเส้นโค้ง $y = 1 + x^2$ และ $y = 5$ รอบแกน x โดยใช้
   (a) วิธีจาน
   (b) วิธีเปลือกทรงกระบอก
7. จงหาพื้นที่ของปริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นเส้นโค้ง $y = \sin x$ และแกน x จาก $x = 0$ และ $x = \pi$ โดยใช้วิธีเปลือกทรงกระบอก