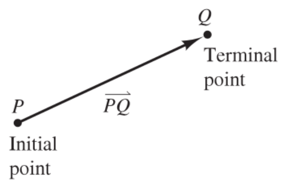
บทที่ 8

เวกเตอร์ (Vector)

8.1 คุณสมบัติของเวกเตอร์

เวอกเตอร์ (Vector space) หมายถึง ปริมาณที่มีทั้งขนาด และทิศทาง เช่น ควมเร็ว, แรงเวกเตอร์เขีนยแทนด้วย สัญญลักษณ์ $\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}$, **u**, **v**



รูป 8.1*:* เวกเตอร์

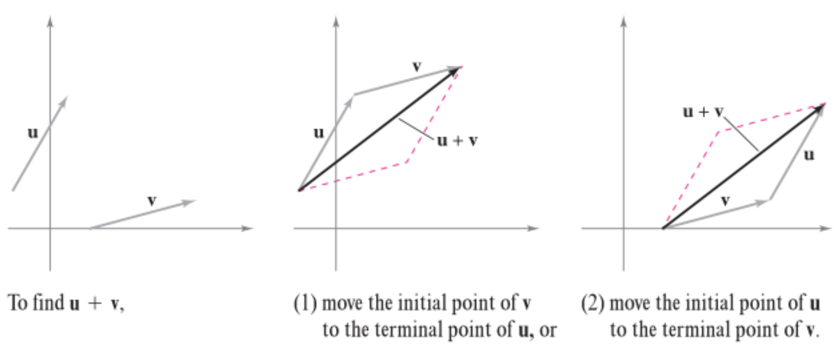
คุณสมบัติของเวกเตอร์

บทนิยาม 8.1. ให้ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ และ ให้ c เป็นสเกลาร์

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. ถ้า $\vec{u} = \vec{v}$ แล้ว $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$

ในทำนองเดียวกัน การลบกันของเวกเตอร์ คือ นิเสธของเวกเตอร์ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม เขียนแทนด้วย $-\vec{u}$

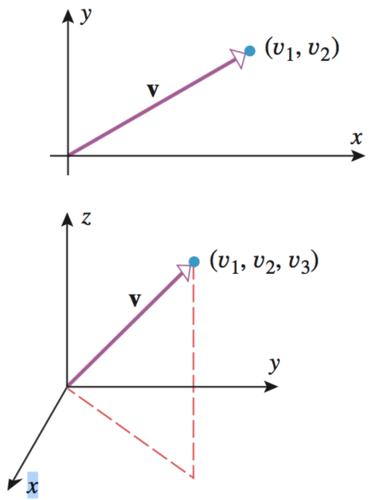
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) \tag{8.1}$$



รูป 8.2*:* เวกเตอร์

สำหรับเวอกเตอร์ที่อยู่ใน 2 มิติ และ 3 มิติ ถ้า เวกเตอร์ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และมีจุดปลายที อยู่ในรูปแบบ v_1, v_2 และ v_1, v_2, v_3 แล้วจะเรียก v_1, v_2 และ v_1, v_2, v_3 ว่า องค์ประกอบ ของเวกเตอร์ $\vec{v}$ ใน 2 มิติ และ 3 มิติ ตามลำดับ นั่นคือ

$$v = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{และ} \quad v = \langle 1, v_2, v_3 \rangle$$



รูป 8.3: เวกเตอร์

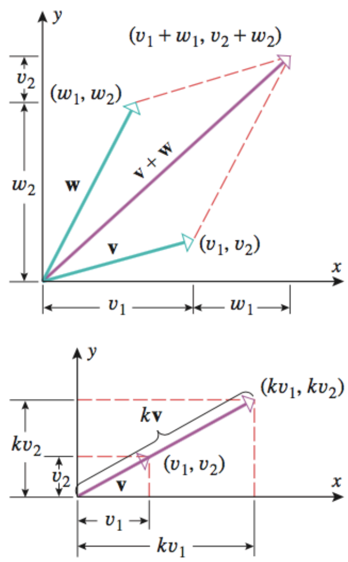
11.2.4 THEOREM *If* $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ *and* $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ *are vectors in 2-space and k is any scalar, then*

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2 \rangle \tag{1}$$
$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle v_1 - w_1, v_2 - w_2 \rangle \tag{2}$$
$$k\mathbf{v} = \langle kv_1, kv_2 \rangle \tag{3}$$

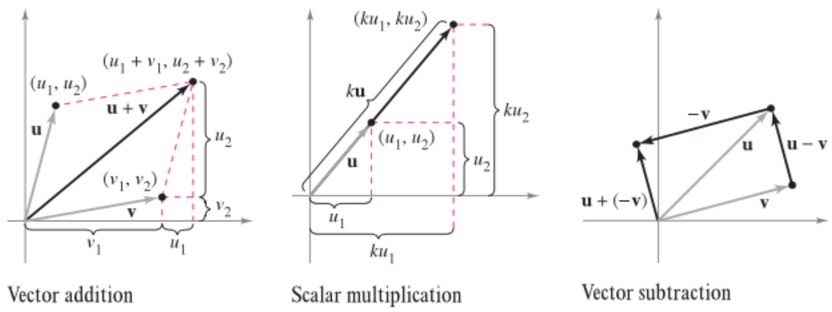
Similarly, if $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ *and* $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ *are vectors in 3-space and k is any scalar, then*

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3 \rangle \tag{4}$$
$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3 \rangle \tag{5}$$
$$k\mathbf{v} = \langle kv_1, kv_2, kv_3 \rangle \tag{6}$$

รูป 8.4: เวกเตอร์



รูป 8.5: เวกเตอร์



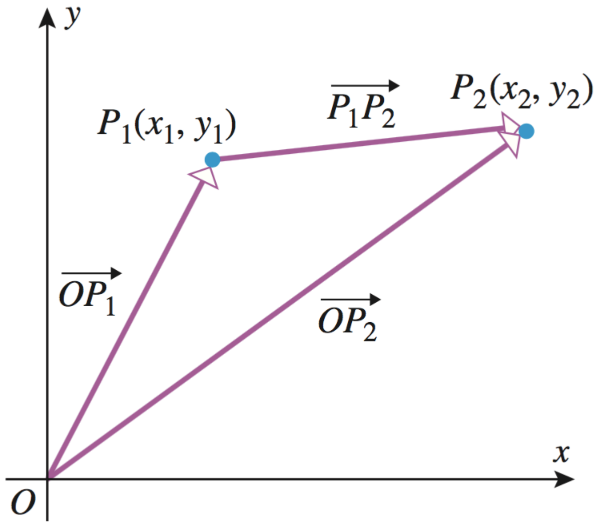
รูป 8.6: เวกเตอร์

ตัวอย่าง 8.1.1. ถ้า $\mathbf{v} = \langle -2, 0, 1\rangle$ และ $\mathbf{w} = \langle 3, 5, -4\rangle$ จงหา $\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}, 3\mathbf{v}, 3\mathbf{v} - \mathbf{w}$

วิธีทำ

8.2 เวกเตอร์ระหว่างจุด

สำหรับ 2 มิติ เวกเตอณ์ที่จากจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ คือ $\vec{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ และ สำหรับ 3 มิติ เวกเตอณ์ที่จากจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ คือ $\vec{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$



รูป 8.7: เวกเตอร์ระหว่างจุด

ตัวอย่าง 8.2.1. สำหรับ 2 มิติ เวกเตอณ์ที่จากจุด $P_1(1, 3)$ และ $P_2(4, 8)$ และ สำหรับ 3 มิติ เวกเตอณ์ที่จากจุด $P_1(1, 3, 5)$ และ $P_2(4, 8, -8)$ จงหา $\vec{P_1P_2}$ **วิธีทำ**

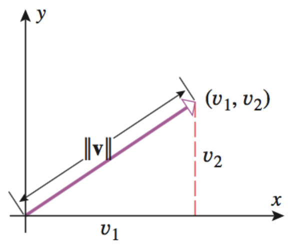
8.3 นอร์มของเวกเตอร์

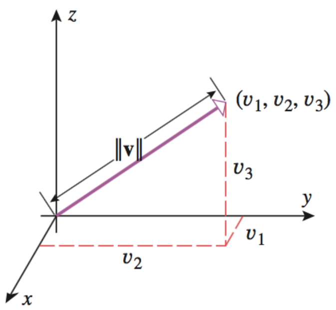
ระยะทางระหว่าง จุดเริ่มต้น ถึงจุดสุดท้าย ของเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ จะเรียกว่า ความยาว หรือ นอร์ม (norm) ซึ่งเขียนแทนด้วย $\|\mathbf{v}\|$ โดย นอร์มของเวกเตอร์ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ ใน 2 มิติ นิยามโดย

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{8.2}$$

โดย นอร์มของเวกเตอร์ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3, \rangle$ ใน 2 มิติ นิยามโดย

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{8.3}$$



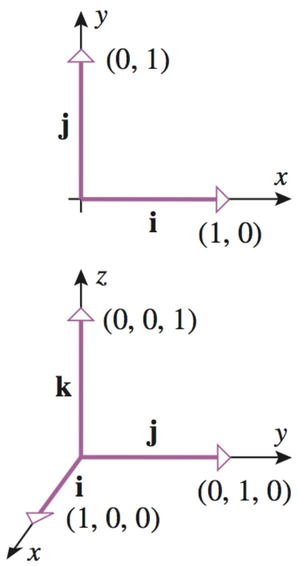


รูป 8.8: นอร์มของเวกเตอร์

ตัวอย่าง 8.3.1. จงหานอร์มของเวกเตอร์ $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$, $10\mathbf{v} = \langle -20, 30 \rangle$ และ $\mathbf{w} = \langle 2, 3, 6 \rangle$
วิธีทำ

8.4 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vectors)

ความยาวของเวกเตอร์ที่มีค่าเท่ากับ 1 จะเรียกว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vectors) สำหรับในระนาบ xy และ xyz จะนิยาม เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ดังนี้



รูป 8.9: เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vectors)

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle \qquad \boxed{\text{In 2-space}}$$

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle \qquad \boxed{\text{In 3-space}}$$

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, 0\rangle + \langle 0, v_2\rangle = v_1\langle 1, 0\rangle + v_2\langle 0, 1\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle = v_1\langle 1, 0, 0\rangle + v_2\langle 0, 1, 0\rangle + v_3\langle 0, 0, 1\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

2-SPACE	3-SPACE
$\langle 2, 3\rangle = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$	$\langle 2, -3, 4\rangle = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
$\langle -4, 0\rangle = -4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = -4\mathbf{i}$	$\langle 0, 3, 0\rangle = 3\mathbf{j}$
$\langle 0, 0\rangle = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = \mathbf{0}$	$\langle 0, 0, 0\rangle = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$
$(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$	$(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) - (4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
$5(6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = 30\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$	$2(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) + 4(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
$\lVert 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\rVert = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$	$\lVert \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\rVert = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$
$\lVert v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}\rVert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$	$\lVert \langle v_1, v_2, v_3\rangle\rVert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

8.5 Dot Product

บทนิยาม 8.2. ถ้า $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ แล้ว ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Dot Product) คือ

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \tag{8.4}$$

ในทำนองเดียวกันกับ ถ้า $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ แล้ว ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Dot Product) คือ

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{8.5}$$

11.3.2 THEOREM *If* **u**, **v**, *and* **w** *are vectors in 2- or 3-space and k is a scalar, then:*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(*c*) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

(*d*) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

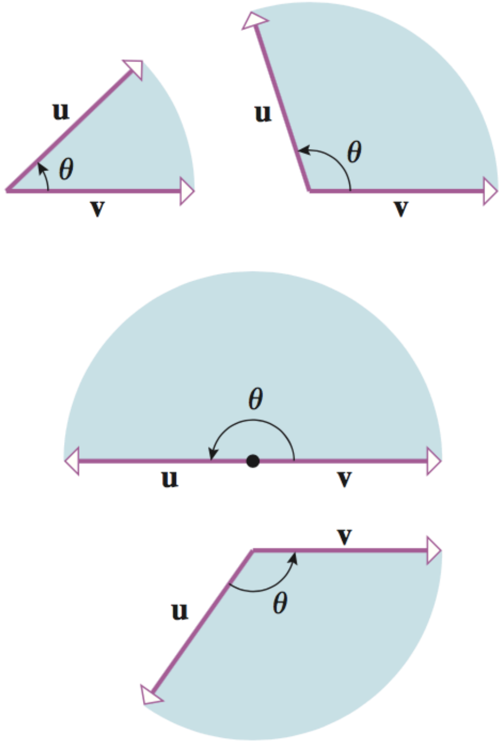
(*e*) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$

ตัวอย่าง 8.5.1. จงหา dot product ของ
วิธีทำ

และมุมระหว่างเวกเตอร์ นิยามโดย

$$\cos \zeta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \tag{8.6}$$

ตัวอย่าง 8.5.2. จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ของ $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ และ $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
วิธีทำ



รูป 8.10: มุมระหว่างเวกเตอร์

8.6 Cross Product

11.4.2 DEFINITION If $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ and $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ are vectors in 3-space, then the ***cross product*** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ is the vector defined by

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \tag{3}$$

or, equivalently,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k} \tag{4}$$

ตัวอย่าง 8.6.1. กำหนดให้ $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ และ $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ จงหา $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ และ $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

วิธีทำ

11.4.3 THEOREM *If* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are any vectors in 3-space and* k *is any scalar, then:*

(*a*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

(*b*) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

(*c*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(*d*) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

(*e*) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*f*) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

ตัวอย่าง 8.6.2. จงแสดงว่า u $\times$ u $= 0$ สำหรับทุกๆเวกเตอร์ u ใน 3 มิติ

วิธีทำ