บทที่ 5

ปริพันธ์ (Integration)

5.1 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเกี่ยวกับการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ซึ่งจะกล่าวถึงนิยามของปฏิยานุพันธ์ก่อน ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.1. กำหนดให้ $f(x)$ และ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $F(x)$ ว่าเป็น **ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)** ของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{d(F(x))}{dx} = f(x) \tag{5.1}$$

สำหรับทุกช่วงของ x ใน I

เราจะเรียกกระบวนการในการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันว่า **การย้อนกลับของอนุพันธ์ (antidifferentation)**

ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ เป็นปฏิยานุพันธ์ ของ $f(x) = x^4$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$ เพราะว่า

$$\frac{d(F(x))}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4\right] = x^3 = f(x)$$

นอกจากนี้ ยังมีฟังก์ชันอื่นที่เป็นปฏิยานุพันธ์ของ$f(x) = x^3$ คือ

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$$

เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ

ตัวอย่าง 5.1.1. จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 2x$
2. $g(x) = -\sin x$

วิธีทำ.

1. เพราะว่า $f(x) = 2x = \frac{d}{dx}(x^2)$
   จะได้ $F(x) = x^2$
2. เพราะว่า $g(x) = -\sin x = \frac{d}{dx}(\cos x)$
   จะได้ $F(x) = \cos x$

□

ทฤษฎีบท 5.1. ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ บนช่วง I แล้ว $F(x)+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ บนช่วง I

บทนิยาม 5.2. กำหนดให้ $f(x)$ และ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ซึ่งทำให้

$$F'(x) = f(x)$$

ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ใดๆ แล้ว ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ทั้งหมดจะเรียกว่าเป็น **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต หรือ อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)** เขียนแทนด้วย

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

เมื่อ C เป็นค่าคงที่

จากบทนิยามเรียกกระบวนการ $\int f(x)dx$ ว่า "การหาปริพันธ์" เครื่องหมาย " $\int$ " เรียกว่า "**เครื่องหมายปริพันธ์ (integral symbol)**" เรียก $f(x)$ ว่า "**ตัวถูกหาปริพันธ์ (integrand)**" จะเรียกค่าคงที่ C ว่า **ค่าคงที่ของการอินทิเกรต (constant of integration)** และ dx เป็นสัญลักษณ์ที่บอกว่า "การอินทิเกรตนี้เทียบกับตัวแปร x "

ตัวอย่าง 5.1.2. ให้ $f(x) = a$ จงหาปริพันธ์ของ f

วิธีทำ. เนื่องจาก $\dfrac{d}{dx}[ax + C] = a$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่
ดังนั้น $ax + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f นั่นคือ $\int adx = ax + C$ □

ตัวอย่าง 5.1.3. ให้ $f(x) = x^n$ จงหาปริพันธ์ของ f

วิธีทำ. เนื่องจาก $\dfrac{d}{dx}[\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C] = x^n$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่
ดังนั้น $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f นั่นคือ $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ □

5.2 ปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

สำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ทฤษฎีบท 5.2. กำหนดให้ f, g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้และ C เป็นค่าคงที่ใดๆ

1. $\displaystyle\int dx = x + C$
2. $\displaystyle\int kdx = kx + C$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
3. $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
4. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
5. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

พิสูจน์ สามารถพิสูจน์สูตรพื้นฐาน โดยใช้บทนิยามปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ □

ตัวอย่าง 5.2.1. จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int x^2 dx =$
2. $\displaystyle\int 4x^3 dx =$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^5} dx =$
4. $\displaystyle\int \sqrt{x} dx =$

ตัวอย่าง 5.2.2. จงหาค่าของ $\displaystyle\int (4x^3 + 2x^2 - 2x + 5)dx$

ตัวอย่าง 5.2.3. จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{4 - 3x^3 + 3x^4}{x^{1/3}} dx$

ในกรณีที่ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จะได้ว่า

ทฤษฎีบท 5.3. กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

ต่อไปจะกล่าวถึงการหาปริพันธ์โดยการใช้ **เทคนิคการแทนที่ (Integration by Substitution)** จากทฤษฎีบทที่ 5.3 โดยอาศัยแนวคิดเดียวกัน เราสามารถขยายไปยังรูปแบบทั่วไปเพื่อหาปริพันธ์ได้ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.4. ถ้า $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์โดยมีเรนจ์ (R_f) บนช่วง I และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I แล้ว

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

ขั้นตอนหาปริพันธ์โดยการแทนที่ สำหรับปริพันธ์ที่อยู่ในรูปแบบ $\int f\big(g(x)\big)g'(x)\, dx$

1. แทนที่ $u = g(x)$
2. คำนวณ $du = g'(x)dx$
3. เขียนปริพันธ์ให้อยู่ในเทอมของตัวแปร u นั่นคือ $\int f(u)du$
4. หาปริพันธ์ $\int f(u)du$
5. แทน u ด้วย $g(x)$ จะได้คำตอบในเทอมของตัวแปร x

ตัวอย่าง 5.2.4. จงหาค่าของ $\displaystyle\int (x^3+1)^7(3x^2)dx$

ตัวอย่าง 5.2.5. จงหาค่าของ $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}dx$

นอกจากนี้ ถ้าให้ $u = u(x)$ จะได้ $du = u'(x)dx$ นั่นคือ $dx = \frac{1}{u'(x)}du(x)$
ดังนั้น

$$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{1}{u'(x)}du(x)$$

ตัวอย่าง 5.2.6. จงหาค่าของ $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

แต่ในบางกรณี เราไม่สามารถปรับให้เข้าสูตรได้โดยทันที ต้องอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.2.7. จงหาค่าของ $\int x\sqrt{x+1}dx$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1. $\int \left(x^5+5\right)\,dx$

1.2. $\int (x+1)(3x-2)\,dx$

1.3. $\int (3x^2-2x+1)\,dx$

1.4. $\int \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$

1.5. $\int (2x^3+x)(x^4+x^2+1)^{49}\,dx$

1.6. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

1.7. $\int 8(x-3)^2\sqrt{4x+3}\,dx$

1.8. $\int \frac{1}{(4x+3)^2}\,dx$

1.9. $\int x(x^2+3)^4\,dx$

1.10. $\int x(x-2)^3\,dx$

1.11. $\int \sqrt{3-2x}\,dx$

1.12. $\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx$

5.3 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย

5.3.1 การหาปริพันธ์ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จากกฎลูกโซ่และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\ln |u|] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

ดังนั้น

$$\int \left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right) dx = \ln |u| + C$$

จากสมการข้างต้นสามารถเขียนในรูปแบบค่าเชิงอนุพันธ์ ซึ่งจะได้รูปแบบหาปริพันธ์ฟังก์ชันลอการิทึม ดังนี้

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C \qquad (5.2)$$

ตัวอย่าง 5.3.1. จงหาค่าของ $\int \frac{1}{x+4} dx$

ตัวอย่าง 5.3.2. จงหาค่าของ $\int \frac{x^2}{x^3+4} dx$

ตัวอย่าง 5.3.3. จงหาค่าของ $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x สำหรับ $f(u) = a^u, a > 0$ จากกฎลูกโซ่และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเซียล จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[a^u] = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น

$$\int \left(a^u \frac{du}{dx} \right) dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

จากสมการข้างต้นสามารถเขียนในรูปแบบค่าเชิงอนุพันธ์ ซึ่งจะได้รูปแบบหาปริพันธ์ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเซียล ดังนี้

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \tag{5.3}$$

กรณีที่ $a = e$ จะได้

$$\int e^u du = e^u + C \tag{5.4}$$

ตัวอย่าง 5.3.4. จงหาค่าของ $\int 2^{-15x} dx$ โดยที่ $2 > 0$

ตัวอย่าง 5.3.5. จงหาค่าของ $\int 25^{x^2} x dx$

ตัวอย่าง 5.3.6. จงหาค่าของ $\int e^{x^2} 3x dx$

ตัวอย่าง 5.3.7. จงหาค่าของ $\int \frac{e^x}{1+2e^x}dx$

ตัวอย่าง 5.3.8. จงหาค่าของ $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$

5.3.2 การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จากกฎลูกโซ่และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\sin u] = \cos u \cdot \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx}[\cos u] = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx}[\tan u] = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น

$$\int \left(\cos u \cdot \frac{du}{dx}\right) dx = \sin u + C$$
$$\int \left(-\sin u \cdot \frac{du}{dx}\right) dx = -\cos u + C$$
$$\int \left(\sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}\right) dx = \tan u + C$$

จากสมการข้างต้นสามารถเขียนในรูปแบบค่าเชิงอนุพันธ์ ซึ่งจะได้รูปแบบหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนี้

$$\int \cos u\,du = \sin u + C \tag{5.5}$$
$$\int \sin u\,du = -\cos u + C \tag{5.6}$$
$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C \tag{5.7}$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการข้างต้น เราสามารถสรุปรูปแบบของการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ได้ดังนี้

กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x

$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C \tag{5.8}$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C \tag{5.9}$$

$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C \tag{5.10}$$

$$\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C \tag{5.11}$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C \tag{5.12}$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C \tag{5.13}$$

$$\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C \tag{5.14}$$

ตัวอย่าง 5.3.9. จงหาค่าของ $\int 5\sin(5x)dx$

ตัวอย่าง 5.3.10. จงหาค่าของ $\int x\cos(x^2+1)dx$

ตัวอย่าง 5.3.11. จงหาค่าของ $\int \frac{9\sec^2(\ln x)}{x}dx$

5.3.3 การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จากกฎลูกโซ่และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\arcsin u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \quad (-1 < u < 1)$$

ดังนั้น

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}\right) dx = \arcsin u + C$$

จากสมการข้างต้นสามารถเขียนในรูปแบบค่าเชิงอนุพันธ์ ซึ่งจะได้รูปแบบหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ดังนี้

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right) du = \arcsin u + C$$

ในทำนองเดียวกัน จะสรุปสูตรการหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x เมื่อ a เป็นจำนวนจริงๆ ใดและ C เป็นค่าคงที่

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u + C \quad (5.15)$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} du = \arctan u + C \quad (5.16)$$

$$\int \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} du = \operatorname{arcsec} u + C \quad (5.17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} du = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (5.18)$$

$$\int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (5.19)$$

$$\int \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-a^u}} du = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (5.20)$$

(5.21)

ตัวอย่าง 5.3.12. จงหาค่าของ $\int \frac{1}{1+9x^2}dx$

ตัวอย่าง 5.3.13. จงหาค่าของ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

5.3.4 การหาปริพันธ์ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จากกฎลูกโซ่และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\sinh u] = \cosh u \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น

$$\int \left(\cosh u \frac{du}{dx} \right) dx = \sinh u + C$$

จากสมการข้างต้นสามารถเขียนในรูปแบบค่าเชิงอนุพันธ์ ซึ่งจะได้รูปแบบหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ดังนี้

$$\int \cosh u du = \sinh u + C$$

ในทำนองเดียวกัน จะสรุปสูตรการหาปริพันธ์ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x เมื่อ a เป็นจำนวนจริงๆ ใดและ C เป็นค่าคงที่

$$\int \sinh u du = \cosh u + C \tag{5.22}$$

$$\int \cosh u du = \sinh u + C \tag{5.23}$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C \tag{5.24}$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u + C \tag{5.25}$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C \tag{5.26}$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + C \tag{5.27}$$

$$\int \tanh u du = \ln|\cosh u| + C \tag{5.28}$$

$$\int \coth u du = \ln|\sinh u| + C \tag{5.29}$$

ตัวอย่าง 5.3.14. จงหาค่าของ $\int x \sinh(4x^2) dx$

ตัวอย่าง 5.3.15. จงหาค่าของ $\int \cosh(\sin x)\cos x dx$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1. $\int \frac{x^2+2}{x+1}\,dx$

1.2. $\int \frac{x^2 \ln(4+x^3)}{(4+x^3)}\,dx$

1.3. $\int \frac{e^x}{7e^x+8}\,dx$

1.4. $\int (e^{5x}+a^{5x})\,dx$

1.5. $\int (1+\tan x)^2\,dx$

1.6. $\int \frac{1}{\sqrt{49-16x^2}}\,dx$

1.7. $\int \operatorname{sech}^2(3x+5)\,dx$

1.8. $\int \frac{sec^2 x \tan x}{(1+\sec^3 x)^2}\,dx$

1.9. $\int \frac{e^{\sin x}\cos x}{1+e^{\sin x}}\,dx$

1.10. $\int \frac{\sqrt{1+e^{-2x}}}{e^{-3x}}\,dx$

1.11. $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)}\,dx$

1.12. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$