1. การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Derivatives)

1.1. อนุพันธ์ในทางเรขาคณิต: สมการเส้นสัมผัส (Tangent Line)

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงวิธีการหาสมการเส้นสัมผัสส่วนโค้งและเส้นปกติ เมื่อเส้นโค้ง $y = f(x)$ และให้จุด $P_0(x_0, y_0)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y = f(x)$

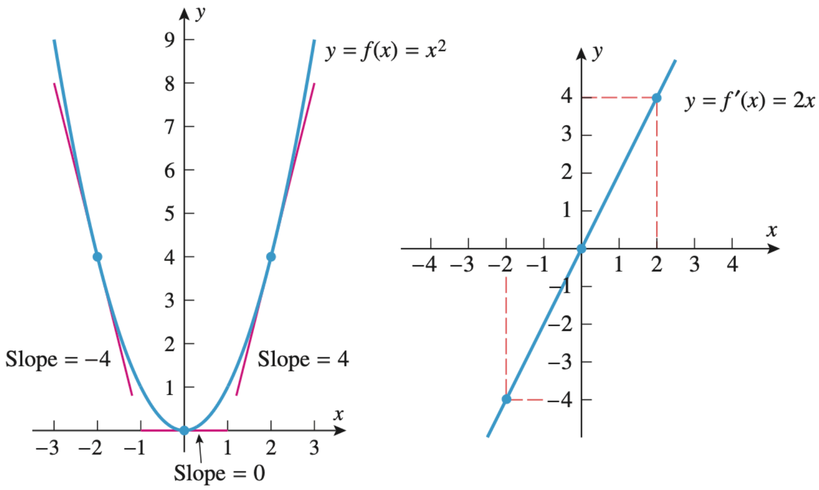


Figure 1: อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$

นิยาม 1. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x_0 **เส้นสัมผัส (Tangent line)** ของกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด $P(x_0, f(x_0))$ คือเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

สมการเส้นสัมผัสของกราฟฟังก์ชัน f ที่จุด $P(x_0, f(x_0))$ คือ

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

ตัวอย่าง 1. จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ ที่จุด (x, y) ใดๆ

วิธีทำ:

ตัวอย่าง 2. จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $x^2y - x = \sqrt{x}$ ที่จุด (x, y) ใดๆ
วิธีทำ:

ตัวอย่าง 3. จงหาสมการเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $f(x) = \sqrt{x+8}$ ที่จุด $(1, 3)$

ตัวอย่าง 4. จงหาสมการเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $f(x) = e^{2x-2} + x - 5$ ที่จุด $x = 1$
วิธีทำ:

1.2. ความเร็วและความเร่ง (Velocity and Acceleration)

จะกล่าวถึงนิยามความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง ดังต่อไปนี้

นิยาม 2. ให้ $s = f(t)$ เป็นฟังก์ชันของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ณ เวลา t

1. **ความเร็ว (Velocity)** ของวัตถุคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางเทียบกับเวลา เขียนแทนด้วย $v(t)$ นิยามโดย
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$
2. **ความเร่ง (Acceleration)** ของวัตถุคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเทียบกับเวลา เขียนแทนด้วย $a(t)$ นิยามโดย
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

ข้อสังเกต. 1) ถ้า $v > 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางเพิ่มขึ้น 2) ถ้า $v < 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางลดลง 3) ถ้า $v = 0$ วัตถุจะหยุดนิ่งชั่วขณะ

ข้อสังเกต. 1) ถ้า $a > 0$ ความเร็วจะเพิ่มขึ้น 2) ถ้า $a < 0$ ความเร็วจะลดลง

ตัวอย่าง 5. วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง โดยมีสมการการเคลื่อนที่ $s(t) = 3t^3 + 2t$ (เมตร) เมื่อ t เป็นวินาที จงหาความเร็วและความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา $t = 2$

ตัวอย่าง 6. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s(t) = 4t^3 - 2t^2 + 3t - 1$ เมตร เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที จงหา

1. ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ
2. ความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ
3. ความเร่งของวัตถุ ณ เวลา $t = 2$

2. อัตราสัมพัทธ์ (Related Rates)

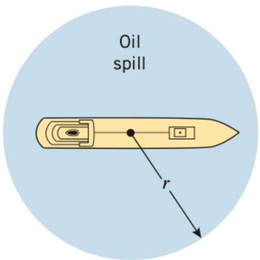
ใน หัวข้อ นี้ กล่าว ถึง ความ สัมพันธ์ ระหว่าง อัตรา การ เปลี่ยนแปลง ของ ปริมาณ สอง ปริมาณ เทียบ กับ เวลา (**อัตราสัมพัทธ์**) ซึ่งเป็นการประยุกต์ของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันปริยาย

กำหนดให้ตัวแปร x และ y ขึ้นอยู่กับเวลา และมีความสัมพันธ์กันด้วยสมการ $F(x,y)=0$ จะได้ว่า $\frac{dy}{dt}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับเวลา t และ $\frac{dx}{dt}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ x เทียบกับเวลา t

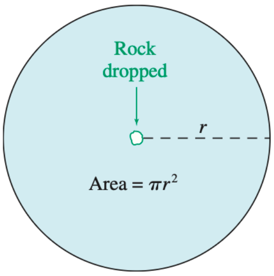
ขั้นตอนการแก้ปัญหาอัตราสัมพัทธ์

1. วาดรูปประกอบ ณ เวลา t พร้อมกำหนดตัวแปรที่เกี่ยวข้อง
2. เขียนสมการความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร
3. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับเวลา t
4. แทนค่าที่โจทย์กำหนด แล้วคำนวณหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ต้องการ

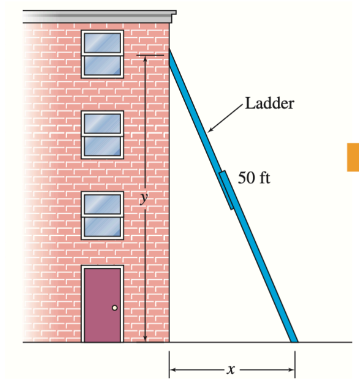
ตัวอย่าง 7. น้ำมันที่รั่วไหลจากเรือบรรทุกน้ำมันกระจายออกเป็นวงกลม โดยรัศมีกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ 2 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าพื้นที่ของคราบน้ำมันกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด เมื่อรัศมีของคราบน้ำมันยาว 60 ฟุต



ตัวอย่าง 8. ช่วงน้ำท่วม อาสาสมัครกำลังลำเลียงของยังชีพทางเรือเข้าไปในชุมชนที่ถูกตัดขาด ระหว่างหย่อนถุงยังชีพลงบนผิวน้ำที่นิ่ง ถุงสัมผัสน้ำทำให้เกิดคลื่นวงกลมกระจายออกไป โดยรัศมีของคลื่นเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ 1.5 ฟุตต่อวินาที จงหาว่า พื้นที่ภายในวงกลมของคลื่นกำลังเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด ณ ขณะที่รัศมีของคลื่นมีค่า 4 ฟุต (สมมติสภาพลมอ่อนและสิ่งกีดขวางไม่มีผลในช่วงเวลาสั้น ๆ นี้)



ตัวอย่าง 9. บันไดยาว 50 ฟุต ถูกพาดกับตึกสูง ฐานของบันไดวางอยู่บนคราบน้ำมันและเลื่อนไปทางขวาด้วยอัตรา 3 ฟุตต่อนาที จงหาว่า ความสูงของปลายบนบันไดที่อยู่เหนือพื้นดินกำลังเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด ณ ขณะที่ฐานบันไดอยู่ห่างจากฐานตึก 30 ฟุต



3. รูปแบบไม่กำหนดและกฎของโลปีตาล (Indeterminate Forms and L'Hospital's Rule)

จากหัวข้อที่ผ่านมา การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ที่มีคำตอบเป็น $\dfrac{0}{0}$ มักใช้การแยกตัวประกอบหรือสังยุค แต่เมื่อแทนค่าแล้วอยู่ในรูปแบบ $\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty-\infty$ เราจะเรียกว่า **รูปแบบไม่กำหนด** และอาจใช้กฎของโลปีตาลช่วยหาลิมิตได้

3.1. รูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ และ $\dfrac{\infty}{\infty}$

ทฤษฎีบท 1 (ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยของโคชี (Cauchy Mean Value Theorem)). *ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) สมมติว่า $g'(x)\neq 0$ ทุก $x\in(a,b)$ แล้วมี $c\in(a,b)$ ทำให้*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

ทฤษฎีบท 2 (กฎของโลปีตาล (L'Hospital's Rule)). *ให้ f และ g หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) ซึ่งมี $c\in(a,b)$ และให้ $g'(x)\neq 0$ สำหรับทุก $x\in(a,b)$ และ $x\neq c$ ถ้า*

$$\lim_{x\to c} f(x)=0 \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to c} g(x)=0,$$

แล้ว

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

โดยที่ลิมิตด้านขวามือมีอยู่ (อาจเป็น $\pm\infty$ ได้)

ตัวอย่าง 10. จงหาค่าของ $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x-3}$ โดยใช้กฎของโลปีตาล

ตัวอย่าง 11. จงหาลิมิตของฟังก์ชัน $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5x-\sin x}{x}$

ตัวอย่าง 12. จงหาลิมิตของฟังก์ชัน $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$

ตัวอย่าง 13. จงหาลิมิตของฟังก์ชัน $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

ตัวอย่าง 14. จงหาลิมิตของฟังก์ชัน $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2}$

ตัวอย่าง 15. จงหาลิมิตของฟังก์ชัน $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$

ทฤษฎีบท 3 (กฎของโลปีตาล (L'Hospital's Rule)). *ให้* f *และ* g *หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด* (a,b) *ซึ่งมี* $c \in (a,b)$ *และ* $g'(x) \neq 0$ *สำหรับทุก* $x \in (a,b)$*,* $x \neq c$ *ถ้า*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty,$$

แล้ว

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

โดยที่ลิมิตด้านขวามือมีอยู่ (อาจเป็น $\pm\infty$ *ได้)*

ตัวอย่าง 16. จงหาลิมิตค่า $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

ตัวอย่าง 17. จงหาลิมิตของฟังก์ชัน $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

ตัวอย่าง 18. จงหาลิมิตของฟังก์ชัน $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$