# บทที่ 3

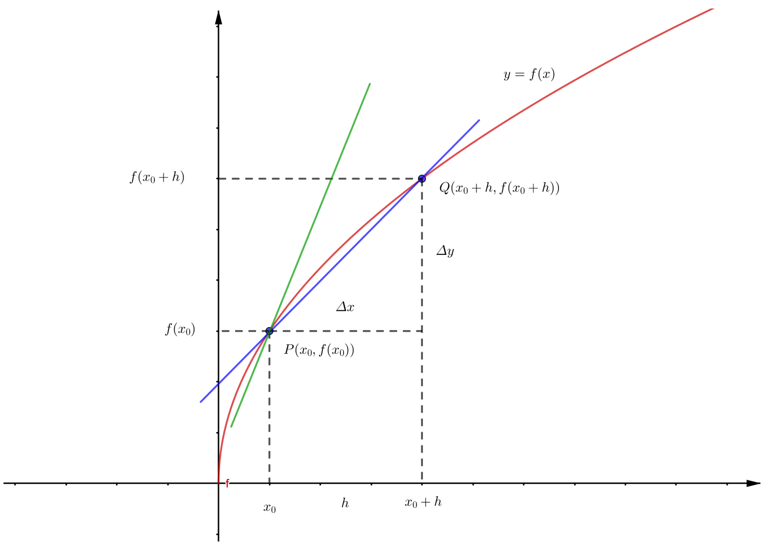
# อนุพันธ์ (Derivative)

สำหรับบทนี้ จะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าจริง นิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย ซึ่งอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น มีความสำคัญต่อการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์และเศรษฐศาสตร์

## 3.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

### 3.1.1 บทนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้จะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เริ่มจากศึกษาความชันของเส้นสัมผัส กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งดังรูปที่ 3.1 พิจารณาที่จุด $P(x_0, f(x_0))$ และ $Q(x_0+h, f(x_0+h))$ จะเห็นได้ว่า ผล




**รูป 3.1**: กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$

ต่างของตัวแปร $x$ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Delta x$ เมื่อ $x_0$ เปลี่ยนแปลงไปเป็น $x_0 + h$ นั่นคือ

$$\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$$

ผลต่างของตัวแปร $y$ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Delta y$ หรือ $\Delta f(x)$ เมื่อ $f(x_0)$ เปลี่ยนแปลงไปเป็น $f(x_0 + h)$ นั่นคือ

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(x_0, f(x_0))$ และ $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ คือ

$$\text{ความชัน } PQ = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.1}$$

จากรูปที่ 3.1 ถ้า $Q$ เคลื่อนที่ตามเส้นโค้งของฟังก์ชัน $f$ เข้าใกล้จุด $P$ ในขณะที่ $h$ เข้าใกล้จุด 0 $(h \to 0)$ แล้วเส้นของ $PQ$ เข้าใกล้เส้นสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุด $P$ นั่นคือ

ความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุด $P$ มีค่าเท่ากับ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

เมื่อลิมิตค่าหาได้

จากความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง เราสามารถนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 3.1.** ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ **อนุพันธ์ของ (derivative)** $f$ ที่จุด $x_0$ คือ

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.2}$$

หาค่าได้ เมื่อลิมิตหาค่าได้จะกล่าวว่า **ฟังก์ชัน** $f$ **หาค่าอนุพันธ์ได้ที่จุด** $x_0$

**ข้อสังเกต 3.1.1.** ถ้าเราให้ $x = x_0 + h$ สมการ (3.2) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.3}$$

การเขียนแทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เทียบกับ $x$ มีหลายแบบ นอกจาก $f'(x)$ แล้ว ยังมีสัญลักษณ์อื่น เช่น $y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}[f(x)]$

**ตัวอย่าง 3.1.1.** จงหาอนุพันธ์ของ $y = mx + c$ โดยใช้นิยาม

**วิธีทำ.** เนื่องจาก $f(x) = y = mx + c$ และนิยาม3.1 จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) + c - (mx + c)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} m = m \end{aligned}$$

□

### 3.1.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐานของการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิต

**ทฤษฎีบท 3.1.** ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันคงที่ กำหนดโดย $f(x) = c$ สำหรับทุกๆ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[c] = 0 \tag{3.4}$$

**ตัวอย่าง 3.1.2.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\frac{d}{dx}[1] = 0$
2. $\frac{d}{dx}[-3] = 0$
3. $\frac{d}{dx}[\pi] = 0$
4. $\frac{d}{dx}[\frac{2}{5}] = 0$

**ทฤษฎีบท 3.2.** ถ้า $f(x) = x$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[x] = 1 \tag{3.5}$$

**ทฤษฎีบท 3.3.** ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \tag{3.6}$$

**ตัวอย่าง 3.1.3.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\frac{d}{dx}[x^2] =$
2. $\frac{d}{dx}[x^4] =$
3. $\frac{d}{dx}[x^{2025}] =$

**ทฤษฎีบท 3.4.** ถ้า $f$ เป็นฟังชันก์ที่หาอนุพันธ์ได้ที่$x$ และ $c$ เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{3.7}$$

**ตัวอย่าง 3.1.4.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\frac{d}{dx}[4x^3] =$
2. $\frac{d}{dx}[-5x^7] =$
3. $\frac{d}{dx}[-x^{11}] =$

**ทฤษฎีบท 3.5.** อนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชัน(Sum Rules)
ถ้า $f, g$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{3.8}$$

**ทฤษฎีบท 3.6.** อนุพันธ์ของผลต่างของฟังก์ชัน( Difference Rules)
ถ้า $f, g$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{3.9}$$

จากทฤษฎีบท 3.6 สามารถขยายอนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชันได้มากกว่า 2 ฟังก์ชันขึ้นไป ดังต่อไปนี้

ถ้า $f_1, f_2, ..., f_n$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)] = \frac{d}{dx}[f_1(x)] + \frac{d}{dx}[f_2(x)] + \cdots + \frac{d}{dx}[f_n(x)] \tag{3.10}$$

**ตัวอย่าง 3.1.5.** กำหนด $y = 2x^4 + 4x^3 - 5x + 7$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

**ตัวอย่าง 3.1.6.** กำหนด $f(x) = 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 6x - 1$ จงหา $f'(-1)$

**ทฤษฎีบท 3.7. อนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน(The Product Rule)**
ถ้า $f, g$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{3.11}$$

**ข้อสังเกต 3.1.2.** ถ้า $f, g, h$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]g(x)h(x) + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]h(x) + f(x)g(x)\frac{d}{dx}[h(x)]$$

**ตัวอย่าง 3.1.7.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$

**ตัวอย่าง 3.1.8.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x + 5)$

**ทฤษฎีบท 3.8. อนุพันธ์ของผลหารของฟังก์ชัน(The Quotient Rule)**
ถ้า $f, g$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x$ และ $g(x) \neq 0$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{\big[g(x)\big]^2} \tag{3.12}$$

**ตัวอย่าง 3.1.9.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \dfrac{x^2+1}{x+5}$

**ตัวอย่าง 3.1.10.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \dfrac{7x^3+4x^2-4x+25}{5x^3-6x^2+3}$

### 3.1.3 อนุพันธ์อันดับสูง (Higher Order Derivatives)

จากการหาอนุพันธ์ในหัวข้อที่ผ่าน ๆ มานั้น เราจะพบว่า ถ้าฟังก์ชัน $f$ หาอนุพันธ์ได้ และอนุพันธ์ ของมันคือ $f'(x)$ ซึ่ง $f'$ เป็นฟังก์ชันอีกฟังก์ชันหนึ่ง ในทำนองเดียวกัน เราก็ยังสามารถหาอนุพันธ์ ของฟังก์ชัน $f'$ และอนุพัธ์ของมันคือ $f''$ และเรียก $f''$ ว่า *อนุพันธ์อันดับสองของ f (Second derivative of $f$)* อาจจะเขียนสัญลักษณ์ของการหาอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน $y = f(x)$ แบบอื่น ได้ดังนี้ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังชันก์ที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว สำหรับอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จะได้

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับสอง จะได้

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}[f(x)]\right] = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]\right] = \frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับสี่ จะได้

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]\right] = \frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับอนุพันธ์อันดับ $n$ จะได้

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \tag{3.13}$$

**ตัวอย่าง 3.1.11.** จงหา $f^{(5)}(x)$ ถ้า $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x + 5$

**ตัวอย่าง 3.1.12.** จงหาอนุพันธ์อันดับที่ $n$ ของ $\dfrac{1}{x}$

**ตัวอย่าง 3.1.13.** จงแสดงว่าฟังก์ชัน $y = x^3 + 3x + 1$ สอดคล้องกับสมการ $y''' + xy'' - 2y'' = 0$

### 3.1.4 กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)

สำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึง ทฤษฎีที่มีความสำคัญในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบที่เรียกว่า **กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)**

**ทฤษฎีบท 3.9. กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)**
ถ้า $y = f(u)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $u$ และ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x$ แล้ว $y = f(u)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x$ และ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{3.14}$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\frac{du}{dx} \tag{3.15}$$

**ตัวอย่าง 3.1.14.** กำหนดฟังก์ชันประกอบต่อไปนี้ จงแยกฟังก์ชันออกเป็นสองฟังก์ชัน $u = g(x)$ และ $y = f(u)$

1. $y = \dfrac{1}{x+1}$
2. $y = \sin 2x$
3. $y = \tan^2 x$

**วิธีทำ.** จากฟังก์ชันประกอบ จะได้ว่า

| $y = f(g(x))$ | $u = g(x)$ | $y = f(u)$ |
|---|---|---|
| 1. $y = \dfrac{1}{x+1}$ | $u = x+1$ | $y = \dfrac{1}{u}$ |
| 2. $y = \sin 2x$ | $u = 2x$ | $y = \sin u$ |
| 3. $y = \tan^2 x$ | $u = \tan x$ | $y = u^2$ |

□

**ตัวอย่าง 3.1.15.** กำหนดให้ $y = (x^2+1)^{10}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

**ตัวอย่าง 3.1.16.** กำหนดให้ $y = (4x^2 + 5x + 6)^{100}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

**ตัวอย่าง 3.1.17.** กำหนดให้ $y = \dfrac{1}{(2x+3)^6}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

สำหรับฟังก์ชันประกอบมากกว่าสองฟังก์ชัน เราสามารถปรับปรุงกฎลูกโซ่เพื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ เช่น ถ้า $y = f(u)$ $u = g(v)$ และ $v = h(x)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

**ตัวอย่าง 3.1.18.** กำหนดให้ $y = u^4 + 5u - 3, u = 5v + 1$ และ $v = x^3 - 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะกล่าวถึงอีกรูปแบบหนึ่งซึ่งเป็นรูปแบบทั่วไปของกฎลูกโซ่ (generalized derivative formula) ที่นิยมใช้อย่างมาก

**ทฤษฎีบท 3.10.** ถ้า $y = [u(x)]^n$ ป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x$ และ $n$ เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\big(u(x)\big)^n = n\big(u(x)\big)^{n-1}\frac{du(x)}{dx} \tag{3.16}$$

**ตัวอย่าง 3.1.19.** กำหนดให้ $y = (7x^3 - 6)^5$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

**ตัวอย่าง 3.1.20.** กำหนดให้ $y = (x^2 + 8)^{-6}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

**ตัวอย่าง 3.1.21.** ให้ $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4x^2}}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

**ตัวอย่าง 3.1.22.** จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \left(\dfrac{3x^2 - x}{4x^2 + 2}\right)^6$

### 3.1.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit Differentiation)

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้ศึกษาฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $y = f(x)$ โดยฟังก์ชันที่เขียนลักษณะนี้จะเรียกว่า **ฟังก์ชันชัดแจ้ง (explicit function)** นั่นคือ $x$ เป็นตัวแปรต้น $y$ เป็นตัวแปรตาม เช่น

$$y = 2x + 5,\ y = x^2,\ y = \sin x$$

เป็นต้น แต่สำหรับหัวข้อนี้กล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ถูกกำหนดในรุปความสัมพันธ์ของตัวแปร $x$ และ $y$ ในรูป $F(x, y) = 0$ เช่น

$$x^2 + 5xy + y^2 = 0,\ x^3 + y^3 - 9xy = 0, 6y^2x^2 + 12yx^3 + 3 = 0.$$

จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันข้างต้นเป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร $x$ และ $y$ ซึ่งอยู่ในรูปสมการที่ไม่สามารถหาค่า $y$ ออกมาชัดเจนเมื่อกำหนดค่าตัวแปร $x$ เราจะเรียกฟังก์ชันเหล่านี้ว่า **ฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit Function)**
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายมีขั้นตอนดังนี้

1. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ $x$
2. จัดรูปให้ $\dfrac{dy}{dx}$ ไว้ทางซ้ายมือของสมการ
3. แยกตัวประกอบ $\dfrac{dy}{dx}$ ออกจากเทอมทางซ้ายมือของสมการ
4. แก้สมการหา $\dfrac{dy}{dx}$

**ตัวอย่าง 3.1.23.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\dfrac{d}{dx}[x^5] = 5x^4$
2. $\dfrac{d}{dx}[y^5] = 5y^4\dfrac{dy}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}[x + 3y] = 1 + 3\dfrac{dy}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}[xy] = x\dfrac{dy}{dx} + y\dfrac{dy}{dx}$

**ตัวอย่าง 3.1.24.** กำหนดให้ $y$ เป็นฟังก์ชันโดยปริยายกำหนดโดย $y^3 + y^2 - 9y - x^3 = 1$ จงหาค่าของ $\dfrac{dy}{dx}$

**ตัวอย่าง 3.1.25.** กำหนดให้ $y$ เป็นฟังก์ชันโดยปริยายกำหนดโดย $5x^3y + y^3 = 4x^2 - 5$ จงหาค่าของ $\dfrac{dy}{dx}$

**ตัวอย่าง 3.1.26.** กำหนดให้ $y$ เป็นฟังก์ชันโดยปริยายกำหนดโดย $9(x^2 + y^2)^3 = 13xy$ จงหาค่าของ $\dfrac{dy}{dx}$

**แบบฝึกหัดท้ายบท**

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1. $y = 15$
   1.2. $y = 5x^5$
   1.3. $y = \dfrac{\pi}{x}$
   1.4. $y = \dfrac{3}{5x^3}$
   1.5. $y = x^5 + 7x^3 - 9$
   1.6. $y = x^7 - 2x^4 - 6x^{-3}$
   1.7. $f(x) = 3x^5 - 5\sqrt{x}$
   1.8. $s(t) = t^2 + 2t + 3$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1. $f(x) = (x + \dfrac{1}{x})(x - \dfrac{1}{x} + 1)$
   2.2. $f(x) = (4x^4 - 6x^2 + 4)(6x^2 - 5x + 3)$
   2.3. $y = \dfrac{7x^3 + 4x^2 - 4x + 2}{5x^3 - 6x^2}$
   2.4. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$

3. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$ จงหาค่า $f'(-1)$

4. จงใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   4.1. $y = (3x + 1)^5$
   4.2. $y = (x^2 + 6)^3$
   4.3. $y = (2x^3 + 9x - 4)^5$
   4.4. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x}{1 - 3x}}$

5. กำหนดให้ $y = \dfrac{3}{2}u^2 + 4u - 3,\ u = 4v - 5$ และ $v = 6x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ จงหาค่าของ $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 1$ โดยใช้กฎลูกโซ่

6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   6.1. $f(x) = (4x^5 + 9x - 4)^{12}$
   6.2. $f(x) = (3x^2 + 5)^{-3}$
   6.3. $y(t) = (2t - 5)^4(8t^2 - 5)^{-3}$
   6.4. $y = \left(\dfrac{x + 5}{x^2 + 2}\right)^2$
   6.5. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
   6.6. $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$

7. กำหนดให้ $f(x) = (3 - 5x)^5$ จงหา $f'''(x)$

8. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{3x - 1}$ จงหา $f^{(n)}(x)$

9. กำหนดให้ $y$ เป็นฟังก์ชันโดยปริยายกำหนดโดย $x^3 + y^3 = 27xy$ จงหาค่าของ $\dfrac{dy}{dx}$

10. กำหนดให้ $y$ เป็นฟังก์ชันโดยปริยายกำหนดโดย $x^2 + y^2 = 81$ จงหาค่าของ $y''$

## 3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย

### 3.2.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Derivatives of Trigonometric functions)

สำหรับหัวนี้ จะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยฟังก์ชันตรีโกณมิติ มี 6 ฟังก์ชันคือ ฟังก์ชัน ไซน์ (Sine or sin) ฟังก์ชันโคไซน์ (Cosine or cos) ฟังก์ชันแทนเจนท์ (Tangent or tan) ฟังก์ชันโคแทนเจนท์ (Cotangent or cot) ฟังก์ชันเซแคนด์ (Secant or sec) และฟังก์ชันโคเซแคนต์ (Cosecant or csc) ซึ่งความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
\cot\theta &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} \\
\csc\theta &= \frac{1}{\sin\theta} \\
\sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta}
\end{aligned}$$

**ทฤษฎีบท 3.11.**

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

ในกรณีที่ $u$ เป็นฟังก์ชันของ $x$ จากกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\sin u] = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

**ตัวอย่าง 3.2.1.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sin(2x^2 + 3x + 1)$

**ตัวอย่าง 3.2.2.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sin^6(5x^2)$

**ทฤษฎีบท 3.12.**

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$

ในกรณีที่ $u$ เป็นฟังก์ชันของ $x$ จากกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\cos u] = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$

**ตัวอย่าง 3.2.3.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \cos(5x) + \sin(2x - 1)$

**ตัวอย่าง 3.2.4.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \cos^5(6x^2)$

**ตัวอย่าง 3.2.5.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 5x\cos(5x)$

**ทฤษฎีบท 3.13.**

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$$

ในกรณีที่ $u$ เป็นฟังก์ชันของ $x$ จากกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\tan u] = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

**ตัวอย่าง 3.2.6.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \tan(\pi x^2 + 1)$

นอกจากนี้ เราจะได้สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้อนุพันธ์ผลหารของฟังก์ชันดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.14.**

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$$
$$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

ในกรณีที่ $u$ เป็นฟังก์ชันของ $x$ จากกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u \tan u \cdot \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}[\cot u] = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}[\csc u] = -\csc u \cot u \cdot \frac{du}{dx}$$

**ตัวอย่าง 3.2.7.** จงหา $\frac{dy}{dx}$ ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $y = \sec(5x^3)$

**ตัวอย่าง 3.2.8.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sec(2x) + 3\cot(4x-5) - \csc(6x+7)$

**ตัวอย่าง 3.2.9.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = (x^3 \cot x + 5)^7$

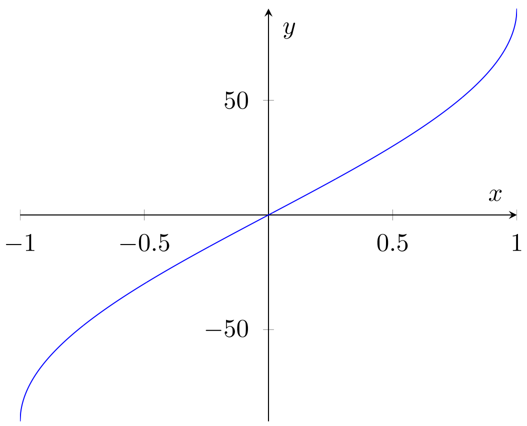
### 3.2.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Derivatives of Inverse Trigonometric Functions)

ต่อไปจะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน โดยที่ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse Trigonometric Functions) คือ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

**บทนิยาม 3.2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse Trigonometric Functions)**

1. ฟังก์ชันไซน์ผกผัน เขียนแทนด้วย arcsin หรือ $\sin^{-1}$ นิยามโดย
   $y = \arcsin x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sin y$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $-1 \leq x \leq 1$
2. ฟังก์ชันโคไซน์ผกผัน เขียนแทนด้วย arccos หรือ $\cos^{-1}$ นิยามโดย
   $y = \arccos x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \cos y$ โดยที่ $0 \leq y \leq \pi$, $-1 \leq x \leq 1$
3. ฟังก์ชันแทนเจนท์ผกผัน เขียนแทนด้วย arctan หรือ $\tan^{-1}$ นิยามโดย
   $y = \arctan x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \tan y$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$
4. ฟังก์ชันโคแทนเจนท์ผกผัน เขียนแทนด้วย arccot หรือ $\cot^{-1}$ นิยามโดย
   $y = \operatorname{arccot} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \cot y$ โดยที่ $0 < y < \pi$, $x \in \mathbb{R}$
5. ฟังก์ชันเซแคนท์ผกผัน เขียนแทนด้วย arcsec หรือ $\sec^{-1}$ นิยามโดย
   $y = \operatorname{arcsec} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sec y$ โดยที่ $0 \leq y \leq \pi$ , $y \neq \frac{\pi}{2}$ และ $|x| \geq 1$
6. ฟังก์ชันโคเซแคนท์ผกผัน เขียนแทนด้วย arccsc หรือ $\csc^{-1}$ นิยามโดย
   $y = \operatorname{arccsc} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \csc y$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $y \neq 0$ และ $|x| \geq 1$

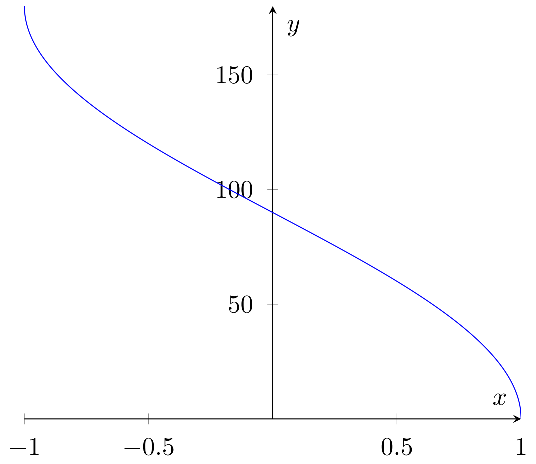
ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันผกผันบางฟังก์ชัน แสดงได้ดังรูปที่ 3.2,3.3,3.4



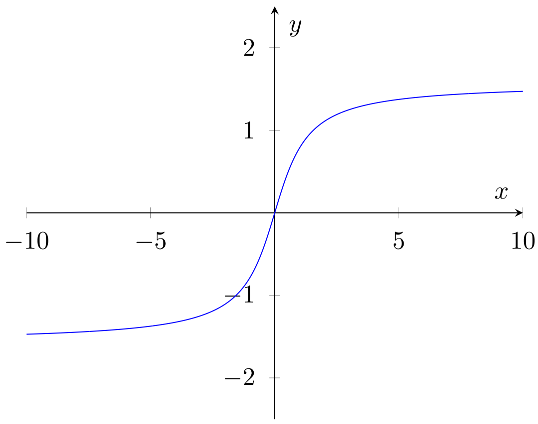

**รูป 3.2**: กราฟของฟังก์ชัน $y = \arcsin x$

**ทฤษฎีบท 3.15.**

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$$




**รูป 3.3**: กราฟของฟังก์ชัน $y = \text{arccos}\, x$




**รูป 3.4**: กราฟของฟังก์ชัน $y = \text{arctan}\, x$

ในกรณีที่ $u$ เป็นฟังก์ชันของ $x$ จากกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\text{arcsin}\, u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}, -1 < u < 1$$

**ตัวอย่าง 3.2.10.** ถ้า $y = \arcsin(x^2)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

**ตัวอย่าง 3.2.11.** จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $y = \arcsin(x^2 + 2x + 1)$

ในทำนองเดียวกัน จะได้สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.16.** ให้ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x$ และ หาอนุพันธ์ได้

$$\frac{d}{dx}\arcsin u = \frac{d}{dx}sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\arccos u = \frac{d}{dx}\cos^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}arc\sec u = \frac{d}{dx}\sec^{-1}u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}arc\cot u = \frac{d}{dx}\cot^{-1}u = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}arc\csc u = \frac{d}{dx}\csc^{-1}u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

**ตัวอย่าง 3.2.12.** จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $y = \arctan(3x)$

**ตัวอย่าง 3.2.13.** จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = (1 + \operatorname{arccos}(x))^4$

**ตัวอย่าง 3.2.14.** จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^3 \operatorname{arcsec}(5x)$

### 3.2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม(Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

**บทนิยาม 3.3. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential Function)** คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ | y = a^x \text{ เมื่อ } a > 0 \text{ และ } a \neq 1\}$$

เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลมีฟังก์ชันผกผัน กล่าวคือ ถ้า $y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เป็นฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล เรียกว่า **ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function)** ซึ่งเขียนแทนด้วย $y = \log_a x$

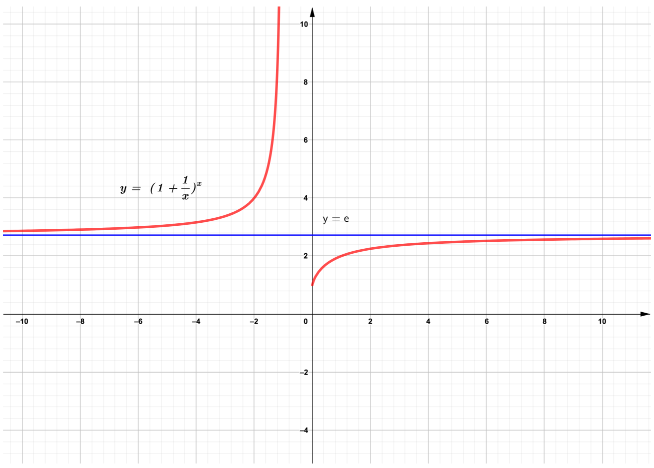
ต่อไปนี้จะกล่าวถึงจำนวนจริง $e$ ซึ่งจะพิจารณาจากฟังก์ชันต่อไปนี้

$$y = (1 + \frac{1}{x})^x$$

เมื่อ $x \to \infty$ จะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันจะเข้าใกล้ $e$ โดยที่ $e$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่ง

$$e = \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x \text{ หรือ } e = \lim_{z \to 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}}$$

แสดงได้ดังรูปที่ 3.5




**รูป 3.5**: กราฟของฟังก์ชัน $y = (1 + \frac{1}{x})^x$

ถ้า $a = e$ แล้วจะเรียก $y = \log_e x$ ว่าฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ (Natural Logarithmic Function) และเขียนแทนด้วย $y = \ln x$
ต่อไปนี้จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ

**ทฤษฎีบท 3.17.**

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}, x > 0$$

ให้ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x$ และ จากกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, u > 0$$

**ตัวอย่าง 3.2.15.** จงหาอนุพันธ์ของ $y = \ln(5x)$

**ตัวอย่าง 3.2.16.** จงหาอนุพันธ์ของ $y = \ln(3x^2 + 3x + 1)$

**ตัวอย่าง 3.2.17.** จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = (\ln x)^5$

**ทฤษฎีบท 3.18.**

$$\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{1}{x \ln a}, x > 0$$

ให้ $u$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x$ และ จากกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}, u > 0$$

**ตัวอย่าง 3.2.18.** จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \log_7(x^2 + 8x + 16)$

**ทฤษฎีบท 3.19.** ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a,$$
$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

ให้ $u$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x$ และ จากกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{d}{dx}[a^u] = a^u \ln a\frac{du}{dx},$$
$$\frac{d}{dx}[e^u] = e^u\frac{du}{dx}$$

**ตัวอย่าง 3.2.19.** จงหาอนุพันธ์ของ $y = 2^{3x+5}$

**ตัวอย่าง 3.2.20.** จงหาอนุพันธ์ของ $y = e^{6x} - e^{-3x}$

**ตัวอย่าง 3.2.21.** จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^x \ln(e^x + 1)$

### 3.2.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก (Derivatives of Hyperbolic Functions)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก โดยที่ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Function) คือฟังก์ชันที่นิยามจากการบวกของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $e^x$ และ $e^{-x}$ ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

**บทนิยาม 3.4.** ให้ $x$ เป็นจำนวนจริงใดๆ กำหนดฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกดังนี้

1. ไฮเพอร์โบลิกไซน์ (Hyperbolic sine) เขียนแทนด้วย $\sinh x$ กำหนดโดย

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2. ไฮเพอร์โบลิกโคไซ (Hyperbolic cosine) เขียนแทนด้วย $\cosh x$ กำหนดโดย

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3. ไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ (Hyperbolic tangent) เขียนแทนด้วย $\tanh x$ กำหนดโดย

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cos x}$$

4. ไฮเพอร์โบลิกโคแทนเจนต์ (Hyperbolic cotangent) เขียนแทนด้วย $\coth x$ กำหนดโดย

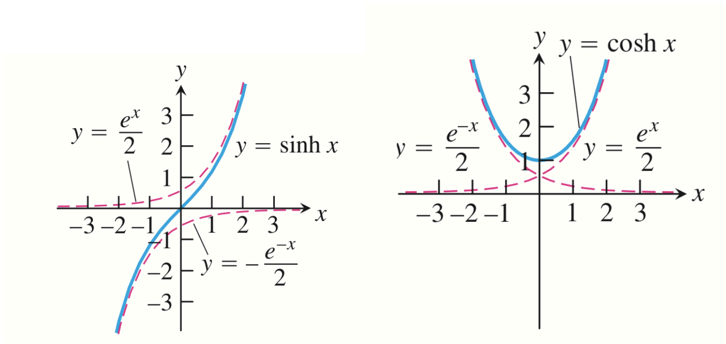
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

5. ไฮเพอร์โบลิกเซกเคนท์ (Hyperbolic secant) เขียนแทนด้วย $\operatorname{sech} x$ กำหนดโดย

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

6. ไฮเพอร์โบลิกโคเซกเคนท์ (Hyperbolic cosecant) เขียนแทนด้วย $\operatorname{csch} x$ กำหนดโดย

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$




(a) $y = \sinh x$ (b) $y = \cosh x$

**รูป 3.6**: ไฮเพอร์โบลิกไซน์และไฮเพอร์โบลิกโคไซ

ต่อไปจะพิจารณาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.20.** ถ้า $u$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x$ แล้ว

1. $\dfrac{d}{dx}\sinh u = \cosh u\dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}\cosh u = \sinh u\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch} u\dfrac{du}{dx}$
5. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u\tanh u\dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u\coth u\dfrac{du}{dx}$

**ตัวอย่าง 3.2.22.** จงหาอนุพันธ์ของ $y = \sinh(2x^3 + 1)$

**ตัวอย่าง 3.2.23.** จงหาอนุพันธ์ของ $y = x\tanh(\ln x)$

**แบบฝึกหัดท้ายบท**

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1. $y = 2\sin(\cot x)$

1.2. $y = \dfrac{\csc x}{5\cot x}$

1.3. $y = x^2 \cos 2x$

1.4. $y = \sin^3(5x+4)$

1.5. $y = x\arctan(\sqrt{x})$

1.6. $y = \operatorname{arccsc}(x^2+1)$

1.7. $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

1.8. $y = x^2 \cos 2x$

1.9. $y = \arctan(\ln x)$

1.10. $y = (\ln x)^3$

1.11. $y = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$

1.12. $y = \log_5(x^3+2)$

1.13. $y = x\log_7 x$

1.14. $y = xe^x - e^x$

1.15. $y = e^{-4x}\sin(5x)$

1.16. $y = 11^{\tan x}\ln 11$

1.17. $y = \dfrac{1}{4}\sinh 2x - \dfrac{x}{2}$

1.18. $y = \cosh^3(4x + \ln x)$

2. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ $n$ ของฟังก์ชัน $f(x) = e^{-2x}$