บทที่ 1

ฟังก์ชัน

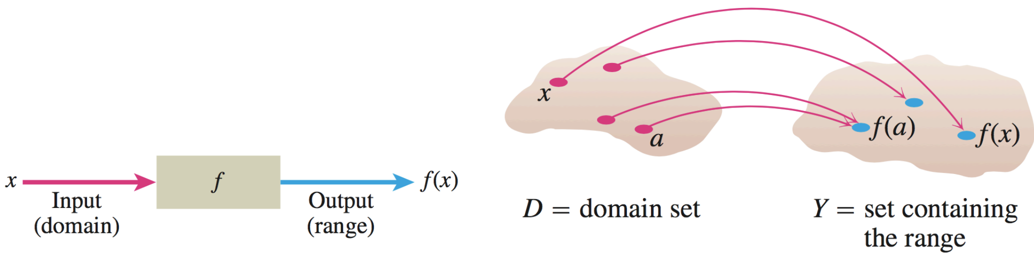
สำหรับบทนี้ จะกล่าวถึงบทนิยาม สมบัติ และกราฟของฟังก์ชัน พีชคณิตของฟังก์ชัน ฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน ซึ่งจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในวิชาแคลคูลัส

1.1 บทนิยายของฟังก์ชัน

บทนิยาม 1.1. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง ความสัมพันธ์ (relation) จากเซต A ไปยังเซต B คือ เซตย่อยของผลคูณคาร์ทีเซียนของบนเซต A กับเซต B โดยที่ ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product) นิยามโดย $A \times B = \{(a, b)|a \in A\text{และ}b \in B\}$

บทนิยาม 1.2. ฟังก์ชัน(function) คือความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับคู่อันดับใดๆ ในความสัมพันธ์นั้นสมาชิกตัวแรกต้องจับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียงตัวเดียวเท่านั้น

นั่นคือ เมื่อ f เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B $(f \subset A \times B)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อสำหรับ x ใดๆ ใน A และ y, z ใดๆ ใน B ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน $(x, y) \in f$ สามารถเขียนแทน ด้วย $y = f(x)$ จากนิยาม 1.2 จะได้ *สำหรับทุกค่าของ* x *จะทำให้ค่าของ* $f(x)$ *มีเพียงค่าเดียว แล้ว* y *เป็นฟังก์ชันของ* x เราสามารถเขียนสัญลักษณ์ $f : A \to B$ แทนฟังก์ชัน f จากเซต A ไปยังเซต B



ตัวอย่าง 1.1.1. กำหนดให้ฟังก์ชันคือ $f(x) = x^2 - 4x + 2ln(x^2)$ จงหาค่าของ

(1). $f(0)$ (2). $f(-1)$ (3). $f(\sqrt{2})$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.1.2. กำหนดให้ฟังก์ชันคือ $f(x) = x^2 - 4$ จงหาค่าของ

(1). $f(2a)$ (2). $f(m-2)$ (3). $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$

วิธีทำ

ต่อไปนี้จะกล่าวถึง โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน (Domain and Range)

บทนิยาม 1.3. กำหนดให้ A, B เป็นเซตของจำนวนจริงและไม่เป็นเซตว่าง และ f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B โดยเราจะเรียก เซต A ว่า โดเมน (Domain) ของฟังก์ชัน จะเขียนแทนด้วย D_f และเซต B ว่าเรนจ์ (Renge) ของฟังก์ชัน จะเขียนแทนด้วย R_f
นั่นคือ $D_f = \{x \in A |$ มี $y \in B$ ซึ่ง $y = f(x)\}$ และ $R_f = \{y \in B |$ มี $x \in A$ ซึ่ง $y = f(x)\}$

จากนิยาม 1.3 จะกล่าวได้ว่า โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวน x ทั้งหมดซึ่งฟังก์ชัน f ให้ค่า $f(x)$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนที่เป็นค่าของฟังก์ชันทั้งหมด

ตัวอย่างต่อไปนี้จะกล่าวถึงการหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 1.1.3. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = x^2$ (2) $f(x) = \sqrt{x-2}$ (3) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.1.4. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-2}$
2. $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$
3. $f(x) = ln(x-4)$

วิธีทำ

1.2 พีชคณิตของฟังก์ชัน (Arithmetic Operations on Functions)

บทนิยาม 1.4. กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ พีชคณิตของฟังก์ชันกำหนดดังนี้

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; g(x) \neq 0$

โดยที่ โดเมนของ $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$ มีค่าเท่ากับ $D_f \cap D_g$ เมื่อ D_f แทนโดเมนของฟังก์ชัน f และ D_g แทนโดเมนของฟังก์ชัน g และ โดเมนของฟังก์ชัน $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ จะมีค่าเท่ากับ $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g | g(x) \neq 0\} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

ตัวอย่าง 1.2.1. กำหนดให้ $f(x) = 1 + x^2$ และ $g(x) = x^2 - 3x$ จงหา $f+g, f-g, fg, f/g$
วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.2.2. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x-2}$ และ $g(x) = x+4$ จงหา

(1). $f+g$

(2). $f-g$

(3). fg

(4). f/g

พร้อมทั้งหาโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

วิธีทำ

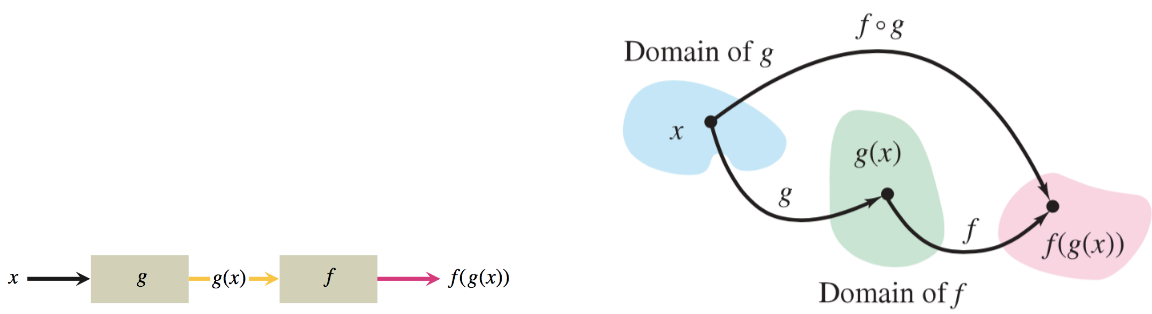
1.3 ฟังก์ชันประกอบ (Composite function)

บทนิยาม 1.5. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันใดๆ โดยที่ $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ **ฟังก์ชันประกอบ (Composite function)** ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f \circ g$ ซึ่งฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ นิยามโดย

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

และโดเมนของฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ คือ

$$D_{(f \circ g)} = \{x | x \in D_g \text{ และ } g(x) \in D_f\}$$



รูป 1.1: ฟังก์ชันประกอบ ดัดแปลงจาก Ron Larson, Bruce H. Edwards (2010). **Calculus**, 9th ed.

นอกจากนี้

กำหนดให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันใดๆ ฟังก์ชันประกอบ $f \circ (g \circ h)$ นิยามโดย

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x)))$$

ตัวอย่าง 1.3.1. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 5$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ จงหา $(f \circ g)(x)$ และ $(g \circ f)(x)$ พร้อมทั้งหา $D_{(f \circ g)}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.3.2. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = x + 1$ จงหา

(1) $(f \circ g)(x)$

(2) $(f \circ g)(1)$

(3) $(g \circ f)(x)$

(4) $(g \circ f)(0)$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.3.3. กำหนดให้ $f(x) = 5x - 7$ และ $g(x) = ln(x)$ จงหา $(f \circ g)(x)$ และ $(g \circ f)(x)$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.3.4. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $g(x) = x^2 + 1$ และ $h(x) = \sqrt{2-x}$ จงหา $f \circ g$ และ $(g \circ f)(0)$

วิธีทำ

1.4 ฟังก์ชันผกผัน (Inverse of Functions)

บทนิยาม 1.6. ฟังก์ชัน f จะถูกเรียกว่า *ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one)* ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ สำหรับทุกๆ x_1, x_2 ที่เป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน f

พิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน ถ้ามีเส้นตรงแนวนอนที่ขนานกับแกน x ตัดกับกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ มากกว่าหนึ่งจุด แล้ว ฟังก์ชันนั้นไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 1.4.1. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

(1) $f(x) = 3x + 2$

(2) $f(x) = x^2$

(3) $f(x) = x^3$

(4) $f(x) = \dfrac{2x - 4}{3x + 5}$

วิธีทำ

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันผกพัน (inverse function)

บทนิยาม 1.7. กำหนดให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one) ที่มีโดเมนเท่ากับ X และ เรนจ์เท่ากับเท่ากับ Y แล้ว *ฟังก์ชันผกพัน (inverse function)* ของ f เขียนแทนด้วย f^{-1} นิยามโดย $f^{-1}(y) = x$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = y$ สำหรับทุกๆ y ใน B

ข้อสังเกต 1.4.1. สำหรับทุกๆ x ที่เป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน f จะได้ $f^{-1}(f(x)) = x$ และสำหรับทุกๆ x ที่เป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน f^{-1} จะได้ $f(f^{-1}(x)) = x$

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนการหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน f

ขั้นตอนการหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน f

(1) ตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(2) กำหนดให้ $y = f(x)$

(3) หาค่า x ในเทอมของ y

(4) เขียน $x = f^{-1}(y)$

(5) เปลี่ยน y เป็น x จะได้ $f^{-1}(x)$

ตัวอย่าง 1.4.2. จงหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันต่อไป

(1) $f(x) = 3x + 2$ (2) $f(x) = x^3$ (3) $f(x) = \dfrac{2x-4}{3x+5}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.4.3. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x-4}{x+4}, x \neq -4$ จงหาฟังก์ชันพกผันของฟังก์ชัน f

วิธีทำ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. กำหนดให้ฟังก์ชันคือ $f(x) = x^2 + 9$ จงหาค่าของ

   1.1. $f(0)$

   1.2. $f(\sqrt{3})$

   1.3. $f(3c)$

   1.4. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$

2. กำหนดให้ฟังก์ชันคือ $f(x) = ln(2x) + 4x$ จงหาค่าของ

   2.1. $f(0)$

   2.2. $f(\frac{1}{2})$

   2.3. $f(2)$

3. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   3.1. $f(x) = 5x + 3$

   3.2. $f(x) = 2x^2 + 1$

   3.3. $f(x) = \dfrac{5x - 1}{x(x+2)}$

   3.4. $f(x) = \sqrt{4 - x}$

   3.5. $f(x) = \dfrac{5}{x+2}$

4. กำหนดให้ $f(x) = 2x - 1$ และ $g(x) = x^2 + x - 2$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

   4.1. $(f + g)(x)$

   4.2. $(f - g)(x)$

   4.3. $(fg)(x)$

   4.4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

5. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 4 จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้

   5.1. D_{f+g}

   5.2. D_{f-g}

   5.3. D_{fg}

   5.4. $D_{f/g}$

6. กำหนดให้ $f(x) = 3x - 4$ และ $g(x) = x^2 - 2x + 6$ จงหา

   6.1. $(f \circ g)(x)$

   6.2. $(g \circ f)(x)$

7. จงหาฟังก์ชันพกผันของฟังก์ชันต่อไป

   7.1. $f(x) = \dfrac{2x - 7}{3x + 5}$

   7.2. $f(x) = \ln(2x - 1)$

   7.3. $f(x) = 3^{5x-1}$