บทที่ 6

เทคนิคการหาปริพันธ์ (Integration Technique)

6.1 การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน (Integration by parts)

กำหนดให้ฟังก์ชัน f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ จากกฎการคูณจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \tag{6.1}$$

จะได้ว่า $f(x)g(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของด้านขวาของสมการ (6.1) ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int (f(x)g'(x)g(x)f'(x))dx \\ &= \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx \end{aligned}$$

หรือ

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \tag{6.2}$$

เรียกสูตร (6.2) ว่า **สูตรสำหรับการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน (Integration by part)** จาก (6.2) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้ กำหนดให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ โดยค่าเชิงอนุพันธ์จะได้ $du = f'(x)dx$ และ $dv = g'(x)dx$ ดังนั้น จาก (6.2) จะได้

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{6.3}$$

สรุปการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนในรูปแบบต่างๆ

1. สำหรับการหาปริพันธ์ในรูปแบบ

$$\int x^n \sin ax\, dx, \quad \int x^n \cos ax\, dx, \text{ หรือ } \int x^n e^{ax}\, dx$$

จะกำหนดให้ $u = x^n$ และ $dv = \sin ax\, dx, \cos ax\, dx, e^{ax}\, dx$

2. สำหรับการหาปริพันธ์ในรูปแบบ

$$\int x^n \ln x\, dx, \quad \int x^n \arcsin ax\, dx, \text{ หรือ } \int x^n \arctan ax\, dx$$

จะกำหนดให้ $u = \ln x, \arcsin ax, \arctan ax$ และ $dv = x^n\, dx$

3. สำหรับการหาปริพันธ์ในรูปแบบ

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx, \text{ หรือ } \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

จะกำหนดให้ $u = \sin bx, \cos bx$ และ $dv = e^{ax}\, dx$

ตัวอย่าง 6.1.1. จงหา $\int x \sin x dx$

ตัวอย่าง 6.1.2. จงหา $\int xe^x dx$

ตัวอย่าง 6.1.3. จงหา $\int \ln x dx$

ตัวอย่าง 6.1.4. จงหา $\int x^2 e^{2x} dx$

ตัวอย่าง 6.1.5. จงหา $\int x \sin(3x) dx$

ตัวอย่าง 6.1.6. จงหา $\int x^2 \sin(5x)dx$

ตัวอย่าง 6.1.7. จงหา $\int e^x \sin(x)dx$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้
   - 1.1. $\int x\cos(5x)dx$
   - 1.2. $\int xe^{-x}dx$
   - 1.3. $\int x^2 \sin x dx$
   - 1.4. $\int x^2 \cos(\pi x)dx$
   - 1.5. $\int x^2 \ln x dx$
   - 1.6. $\int (x^2+x+1)e^x dx$
   - 1.7. $\int \sin(\sqrt{x})dx$
   - 1.8. $\int (\ln x)^2 dx$
   - 1.9. $\int x\sqrt{x+1}dx$
   - 1.10. $\int x \arctan x dx$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

1. $\frac{x}{5}\sin(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + C$
2. $-xe^{-x} - e^{-x} + C$
3. $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$
4. $\frac{1}{\pi^3}\left[\pi^2x^2\sin(\pi x) + 2\pi x\cos(\pi x) - 2\sin(\pi x)\right] + C$
5. $\frac{x^2\ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$
6. $[(x^2+x+1) - (2x+1) + 2]e^2 + C$
7. $2\sin(\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + C$
8. $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$
9. $\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C$
10. $\frac{1}{2}\left[x^2\arctan x - x + \arctan x\right] + C$

6.2 การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- **การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปแบบ** $\int \sin^m x \cos^n x dx$

การหาปริพันธ์ในรูปแบบ

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx \tag{6.4}$$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ติดลบ

สำหรับการหาปริพันธ์ในรูปแบบนี้ จะแบ่งออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า n เป็นจำนวนคี่ นั่นคือ $n = 2k + 1$ สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ จะต้องใช้เอกลักษณ์

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx \\
&= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\
&= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx
\end{aligned} \tag{6.5}$$

จาก (6.5) คำนวณโดยใช้การแทนที่ $u = \sin x$

กรณีที่ 2 ถ้า m เป็นจำนวนคี่ นั่นคือ $m = 2k + 1$ สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ จะต้องใช้เอกลักษณ์

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx \\
&= \int (\sin^2 x)^k \cos^n x \sin x dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx
\end{aligned} \tag{6.6}$$

จาก (6.6) คำนวณโดยใช้การแทนที่ $u = \cos x$

กรณีที่ 3 ถ้า m, n เป็นจำนวนคู่ จะใช้เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{และ} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

ช่วยในการคำนวณ เพื่อลดรูปปริพันธ์ให้อยู่ในรูป $\cos 2x$

สำหรับในกรณีอื่น ๆ เราอาจใช้เอกลักษณ์

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

ตัวอย่าง 6.2.1. จงหา $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

ตัวอย่าง 6.2.2. จงหา $\int \sin x \cos^3 x \, dx$

ตัวอย่าง 6.2.3. จงหา $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

ตัวอย่าง 6.2.4. จงหา $\int \sin^4(5x) \cos^3(5x) \, dx$

ตัวอย่าง 6.2.5. จงหา $\int \cos^2 x \, dx$

ตัวอย่าง 6.2.6. จงหาค่า $\int \sin^4 x dx$

• **การหาปริพันธ์ฟังก์ชันในรูปแบบ** $\int \tan^m x \sec^n x dx$

การหาปริพันธ์ในรูปแบบ

$$\int \tan^m x \sec^n x dx \tag{6.7}$$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ติดลบ

สำหรับการหาปริพันธ์ในรูปแบบนี้ จะแบ่งออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้าn เป็นจำนวนคู่ นั่นคือ $n = 2k$ สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ จะใช้เอกลักษณ์

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \tan^m x \sec^n x dx &= \int \tan^m x \sec^{2k} x dx \\ &= \int \tan^m x (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx \\ &= \int \tan^m x (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx \end{aligned} \tag{6.8}$$

จาก (6.5) คำนวณโดยใช้การแทนที่ $u = \tan x$

กรณีที่ 2 ถ้า m เป็นจำนวนคี่ นั่นคือ $m = 2k + 1$ สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ จะใช้เอกลักษณ์

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \tan^m x \sec^n x dx &= \int \tan^{2k+1} x \sec^n x dx \\ &= \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x dx \end{aligned} \tag{6.9}$$

จาก (6.9) คำนวณโดยใช้การแทนที่ $u = \sec x$

กรณีที่ 3 ถ้า m เป็นจำนวนคู่และ n เป็นจำนวนคี่ จะได้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

ตัวอย่าง 6.2.7. จงหา $\displaystyle\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$

ตัวอย่าง 6.2.8. จงหา $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^5 x \, dx$

ตัวอย่าง 6.2.9. จงหาค่า $\displaystyle\int tan^3 x dx$

• **การหาปริพันธ์ฟังก์ชันในรูปแบบ** $\int \cot^m x \csc^n x dx$

การหาปริพันธ์ในรูปแบบ

$$\int \cot^m x \csc^n x dx \tag{6.10}$$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ติดลบ

มีหลักการในการหาปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \tan^m x \sec^n x dx$ ร่วมกับการใช้เอกลักษณ์

$$\csc^2 x = \cot^2 x + 1$$

ตัวอย่าง 6.2.10. จงหา $\displaystyle\int \csc^4(5x) \cot^3(5x) \, dx$

- **การหาปริพันธ์โดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ**

สำหรับการคำนวณปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx$ และ $\int \cos mx \cos nx dx$ จะใช้เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\big(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\big) \tag{6.11}$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big) \tag{6.12}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\big(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\big) \tag{6.13}$$

ตัวอย่าง 6.2.11. จงหาค่า $\displaystyle\int \sin 6x \sin 3x \, dx$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1. $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

1.2. $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^3 x \, dx$

1.3. $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$

1.4. $\displaystyle\int \tan^4 x \sec^4 x \, dx$

1.5. $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^5 x \, dx$

1.6. $\displaystyle\int \tan^3 4x \sec^4 4x \, dx$

1.7. $\displaystyle\int \cos^5(x) \, dx$

1.8. $\displaystyle\int \cos^6(x) \, dx$

1.9. $\displaystyle\int \sec^6(x) \, dx$

1.10. $\displaystyle\int \tan^5(x) \, dx$

1.11. $\displaystyle\int \sin(5x) \sin(2x) \, dx$

1.12. $\displaystyle\int \sin(3x) \cos(x) \, dx$

1.13. $\displaystyle\int \cos(7x) \cos(5x) \, dx$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

1. $-\frac{1}{15}\left(3\sin^2 x\cos^3 x + 2\cos^3 x\right) + C$
2. $-\frac{1}{24}\cos^4 x\left(3\cos^4 x - 8\cos^2 x + 6\right) + C$
3. $-\frac{1}{315}\sin^5 x\left(35\cos^4 x + 20\cos^2 x + 8\right) + C$
4. $\frac{1}{7}\sec^2 x\tan^5 x + \frac{1}{24}\tan^6 x + C$
5. $\frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C$
6. $\frac{1}{16}\tan^4 4x + \frac{1}{24}\tan^6 4x + C$
7. $\frac{1}{15}\sin x(3\cos^4 x + 4\cos^2 x + 8) + C$
8. $\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x\sin x + \frac{5}{16}\cos x\sin x + \frac{5x}{16} + C$
9. $\frac{1}{5}\sec^4 x\tan x + \frac{4}{15}\sec^2 x\tan x + \frac{8}{15}\tan x + C$
10. $\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{2}\ln|1 + \tan^2 x| + C$
11. $\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C$
12. $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$
13. $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{24}\sin 12x + C$

6.3 การหาปริพันธ์โดยการแทนที่ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric substitution)

สำหรับหัวข้อนี้จะหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบต่อไปนี้

$$\int \sqrt{a^2-b^2u^2}du, \int \sqrt{a^2+b^2u^2}du, \quad \text{หรือ} \quad \int \sqrt{b^2u^2-a^2}du$$

โดยใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติมาช่วยในการหาปริพันธ์ เช่น ถ้า $a>0$ ให้ $u=a\sin\theta$ เมื่อ $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-u^2} =& \sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}\\ =& \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\\ =& \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} \;=\; \sqrt{a^2\cos^2\theta}\\ =& a\cos\theta\end{aligned}$$

การหาปริพันธ์โดยการแทนที่ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยมีหลักเกณฑ์ดังตารางต่อไปนี้

รูปแบบ	การแทนที่ (Inverse substitution function)	เอกลักษณ์
$\sqrt{a^2-b^2u^2}$	$bu=a\sin\theta,\ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+b^2u^2}$	$bu=a\tan\theta,\ \theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
$\sqrt{b^2u^2-a^2}$	$bu=a\sec\theta,\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2})$ หรือ $\theta\in[\pi,\frac{3\pi}{2})$	$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$

เมื่อ a,b เป็นค่าคงที่ใดๆ

ตัวอย่าง 6.3.1. จงหาค่า $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

ตัวอย่าง 6.3.2. จงหาค่า $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

ตัวอย่าง 6.3.3. จงหาค่า $\int \frac{1}{\sqrt{25x^2-4}}dx, x > \frac{2}{5}$

ตัวอย่าง 6.3.4. จงหาค่า $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+36}}\,dx$

1.2. $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

1.3. $\int \sqrt{16-4x^2}\,dx$

1.4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

1.5. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

1.6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

1.7. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

1.8. $\int \frac{1}{(x^2+4)^{3/2}}\,dx$

1.9. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16x^2-9}}\,dx$

1.10. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

1.11. $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$

1.12. $\int x^3\sqrt{16-9x^2}\,dx$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

1. $\sqrt{x^2+36}+C$
2. $\arcsin(x/4)+C$
3. $4\arcsin(x/2)+x\sqrt{4-x^2}+C$
4. $\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+C$
5. $-\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}-\arcsin(x/3)+C$
6. $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C$
7. $-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+C$
8. $\dfrac{x}{4\sqrt{x^2+4}}+C$
9. $\dfrac{\sqrt{16x^2-9}}{9x}+C$
10. $\dfrac{(9+x^2)^{3/2}}{3}-9\sqrt{9+x^2}+C$
11. $\dfrac{x}{2}\sqrt{1-4x^2}+\dfrac{1}{4}\arcsin 2x+C$
12. $-\dfrac{16}{243}(16-9x^2)^{3/2}+\dfrac{1}{405}(16-9x^2)^{5/2}+C$

6.4 การหาปริพันธ์โดยการแยกเศษส่วนย่อย (Integration by partial fractions)

ก่อนอื่นขอพูดถึงนิยามที่สำคัญที่จะใช้ในหัวข้อนี้

บทนิยาม 6.1. 1. เราเรียกฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax+b$ ว่า **ตัวประกอบเชิงเส้น (Linear fractors)** เมื่อ a, b เป็นค่าคงที่ใดๆ และ $a \neq 0$

2. เราเรียกฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ ว่า **ตัวประกอบกำลังสอง (Quadratic factors)** เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัวใดๆ และ ฟังก์ชัน $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะแยกตัวประกอบ ไม่ได้ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ เช่น $4x^2 + x$

ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโดยที่ $Q(x) \neq 0$ เช่น $\dfrac{5x-3}{x^2-2x-3}$ เป็นต้น

สำหรับหัวข้อนี้เราจะแสดงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ โดยทำฟังก์ชันนี้ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อยอย่างง่าย เรียกว่า **การแยกเป็นเศษส่วนย่อย (Partial fractions)** เช่น

$$\frac{x+7}{x^2+3x-3} = \frac{2(x+3)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+3} \tag{6.14}$$

จาก (6.14) โดยการหาปริพันธ์จะได้

$$\int \frac{x+7}{x^2+2x-3}dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right)dx = 2\ln|x-1| - \ln|x+3| + C$$

เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ

สำหรับการหาปริพันธ์ในรูปแบบนี้ จะแบ่งออกเป็น 4 กรณีดังนี้ กำหนดให้ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ฟังก์ชันตรรกยะ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโดยที่ $Q(x) \neq 0$

กรณีที่ 1 สำหรับแต่ละตัวประกอบของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นไม่ซ้ำกัน นั่นคือ

$$Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_kx+b_k)$$

โดยผลรวมของเศษส่วนย่อยจะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_m}{a_kx+b_k}$$

เมื่อ $A_1, A_2, ..., A_m$ เป็นค่าคงที่

กรณีที่ 2 สำหรับแต่ละตัวประกอบของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นซ้ำกัน m ครั้ง นั่นคือ

$$Q(x) = (ax+b)^m$$

โดยผลรวมของเศษส่วนย่อยจะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

เมื่อ $A_1, A_2, ..., A_m$ เป็นค่าคงที่

กรณีที่ 3 สำหรับแต่ละตัวประกอบของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบกำลังสองไม่ซ้ำกัน นั่นคือ

$$Q(x) = (a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdots(a_kx^2+b_kx+c_k)$$

โดยผลรวมของเศษส่วนย่อยจะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)} + \frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)} + \cdot + \frac{A_kx+B_k}{(a_kx^2+b_kx+c_k)}$$

มื่อ $A_1, A_2, ..., A_m$ และ $B_1, B_2, ..., B_k$ เป็นค่าคงที่

กรณีที่ 4 สำหรับแต่ละตัวประกอบของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบกำลังสองซ้ำกัน m ครั้ง นั่นคือ

$$Q(x) = (ax^2+bx+c)^m$$

โดยผลรวมของเศษส่วนย่อยจะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdot + \frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

มื่อ $A_1, A_2, ..., A_m$ และ $B_1, B_2, ..., B_m$ เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง 6.4.1. จงหาค่าเขียนฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบผลรวมของเศษส่วนย่อย โดยไม่ต้องหาค่าสัมประสิทธิ์

1. $\dfrac{1}{(x+4)(x-5)} =$
2. $\dfrac{2}{x^2+3x-4} =$
3. $\dfrac{x-3}{x^2(x-1)} =$
4. $\dfrac{2x^2+1}{(x-3)^3} =$
5. $\dfrac{x^2+1}{(x-3)(x^2+x+1)} =$

ตัวอย่าง 6.4.2. จงหาค่า $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx$

ตัวอย่าง 6.4.3. จงหาค่า $\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx$

ตัวอย่าง 6.4.4. จงหาค่า $\int \frac{x^2+4}{x^3-2x^2}dx$

ตัวอย่าง 6.4.5. จงหาค่า $\int \frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}dx$

ตัวอย่าง 6.4.6. จงหาค่า $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}dx$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาปริพันธ์ของฟังกฺชันแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1. $\int \frac{1}{(x-2)(x+1)}\,dx$

1.2. $\int \frac{1}{x^2+x}\,dx$

1.3. $\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx$

1.4. $\int \frac{x^2+x-16}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$

1.5. $\int \frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)}\,dx$

1.6. $\int \frac{x^3+3x^2+x+9}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx$

1.7. $\int \frac{5x^2+3x-2}{x^2+2x^2}\,dx$

1.8. $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

1.9. $\int \frac{x^2}{(x^2+2)^3}\,dx$

1.10. $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{(x^2-4)}\,dx$

1.11. $\int \frac{x-5}{(x^2(x+1))}\,dx$

1.12. $\int \frac{x+4}{(x^3+6x^2+9x)}\,dx$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

1. $\frac{1}{3}\ln|\frac{x-2}{x+1}|+C$
2. $\ln|\frac{x}{x+1}|+C$
3. $\frac{1}{7}\ln|(x+6)^2(x-1)^5|+C$
4. $\ln|\frac{(x-3)^2}{x+1}|+\frac{1}{x+3}+C$
5. $\frac{6}{17}\ln|x^2+1|-\frac{7}{24}\ln|4x-1|+\frac{3}{17}\arctan x+C$
6. $3\arctan x+\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+C$
7. $2\ln x+\frac{1}{x}+3\ln(x+2)+C$
8. $\ln x+\frac{1}{x^2+1}+C$
9. $\ln|x+2|+\frac{1}{x-3}+C$
10. $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}\ln|x+2|+\frac{3}{4}\ln|x-2|+C$
11. $6\ln|x|+\frac{5}{x}-6\ln|x+1|+C$
12. $\frac{4}{9}\ln|x|-\frac{4}{9}\ln|x+3|+\frac{1}{3}\frac{1}{x+3}+C$