НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекция 1

1. Понятие неопределенного интеграла

Дифференциальное исчисление решает задачу нахождения для данной функции $F(X)$ ее производной $F'(x)$ или дифференциала $F'(x)dx$.
Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$ (или дифференциал).

Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ (или $dF(x) = f(x)dx$).

Пример 1.
Функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$ на всей числовой прямой, так как при любом значении x $F'(x) = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$.

Пример 2.
Функция $F(x) = \sin 5x$ является первообразной для функции $f(x) = 5\cos 5x$ на всей числовой прямой, так как при любом значении x $F'(x) = (\sin 5x)' = 5\cos 5x = f(x)$.

Теорема. Всякая непрерывная функция имеет бесчисленное множество первообразных, причем любые две из них отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.

Доказательство.
Любая непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$. Но тогда функция $F(x)+c$ при всякой постоянной c будет также первообразной, так как $(F(x)+c)' = F'(x)+c' = f(x)$.
Итак, функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество первообразных.
Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные от $f(x)$, тождественно не равные между собой.
Имеем $F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = f(x)$.
Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$. Вычисляя ее производную, получаем

$$\varphi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \text{ т.е. } \varphi'(x) = 0,$$

следовательно $\varphi(x) = c$ (c – произвольная постоянная).

Тогда $\Phi(x) - F(x) = c$, отсюда

$$\Phi(x) = F(x) + c,$$

что и требовалось доказать.

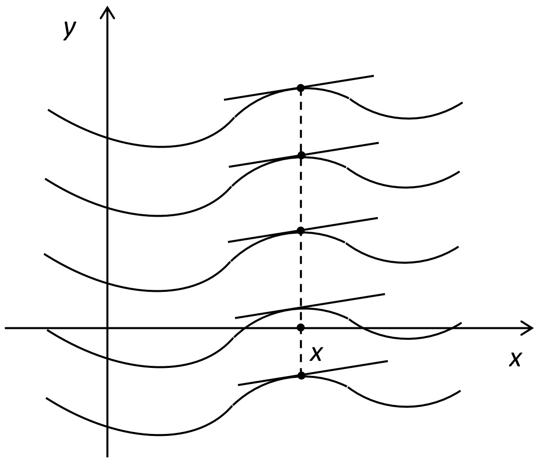
Определение. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то множество функций $F(x)+c$, где c – произвольная постоянная, называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Восстановление функции по ее производной, т.е. отыскание неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции $f(x)$, называется **интегрированием** этой функции.

График первообразной от функции $f(x)$ называется **интегральной кривой** функции $y = f(x)$.



Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых. Все кривые семейства получаются при непрерывном параллельном движении одной из них по направлению оси *OY*. Касательные к этим кривым в точках с одной и той же абсциссой x будут параллельны между собой, так как угловые коэффициенты этих касательных одни и те же

$$K = F'(x) = f(x).$$

1.1. Свойства неопределенного интеграла.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Действительно,

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x)+c\right) = dF(x) + d(c) = F'(x)dx = f(x)dx$$

и $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = F'(x) + 0 = f(x)$.

Благодаря этому свойству правильность интегрирования проверяется дифференцированием результата.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + c.$$

Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + c$.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $a \neq 0$ – постоянная, то

$$\int a\ f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций, т.е.

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5. Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т.е. если

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{ то } \int f(u)du = F(u) + c,$$

где $u = u(x)$ – любая дифференцируемая функция от *x*.

Итак, если $u = u(x)$, то $du = u'(x)dx$ и $\int f(u)du = \int f(u)\cdot u'dx = F(u) + c$.

1.2. Таблица интегралов.

1. $\int u^{\alpha}\cdot u'dx = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + c\right);$

2. $\int \dfrac{u'}{u^2}dx = -\dfrac{1}{u} + c;$

3. $\int a^u\cdot u'dx = \dfrac{a^u}{\ln a} + c;$

4. $\int e^u\cdot u'dx = e^u + c;$

5. $\int \sin u\cdot u'dx = -\cos u + c; \qquad \left(\int \operatorname{sh} u\cdot u'dx = \operatorname{ch} u + c\right);$

6. $\int \cos u\cdot u'dx = \sin u + c; \qquad \left(\int \operatorname{ch} u\cdot u'dx = \operatorname{sh} u + c\right);$

7. $\int \operatorname{tg} u\cdot u'dx = -\ln|\cos u| + c;$

8. $\int \operatorname{ctg} u\cdot u'dx = \ln|\sin u| + c;$

9. $\int \dfrac{u'}{\sin^2 u}dx = -\operatorname{ctg} u + c; \qquad \left(\int \dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}dx = -\operatorname{cth} u + c\right);$

10. $\int \dfrac{u'}{\cos^2 u}dx = \operatorname{tg} u + c; \qquad \left(\int \dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + c\right);$

11. $\int \frac{u'}{\sin u}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + c$;

12. $\int \frac{u'}{\cos u}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$;

13. $\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + c$;

14. $\int \frac{u'}{u^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + c = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + c$;

15. $\int \frac{u'}{u^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$;

16. $\int \frac{u'}{\sqrt{u}}dx = 2\sqrt{u} + c$;

17. $\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx = \arcsin\frac{u}{a} + c = -\arccos\frac{u}{a} + c$;

18. $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$;

19. $\int \sqrt{a^2-u^2}\cdot u'dx = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + c$;

20. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\cdot u'dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$;

21. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$;

22. $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + c$;

23. $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$.

В приведенной таблице буква u может обозначать независимую переменную или непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x)$ аргумента x.

2. Основные методы интегрирования

2.1. Непосредственное интегрирование.

Этот метод состоит в том, чтобы с помощью тождественных преобразований разложить подынтегральную функцию на сумму таких функций, интегралы от которых являются табличными.

Пример 1.

$$\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}+2\right)dx=5\int x^4dx-3\int x^{-4}dx+2\int dx=\{\text{см.}\,1.3,\,(1)\}=$$
$$=5\frac{x^5}{5}-3\frac{x^{-3}}{-3}+2x+c=x^5+\frac{1}{x^3}+2x+c.$$

Пример 2.

$$\int e^x\left(4+\frac{e^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx=\int\left(4e^x+\frac{e^x\cdot e^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx=4\int e^x dx+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=$$
$$=\{\text{см. }1.3,\,(4)\text{ и }(9)\}=4e^x-\operatorname{ctg}x+c.$$

Пример 3.

$$\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\left(\frac{1+x^2}{x(1+x^2)}+\frac{2x}{x(1+x^2)}\right)dx=$$
$$=\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{1+x^2}dx=\{\text{см.}\,1.3,\,(13)\text{ и }(14)\}=\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+c.$$

2.2. Метод подстановки.

Замена переменной интегрирования является эффективным приемом сведения неопределенного интеграла к табличному. Такой прием называется **методом подстановки** или **методом замены переменной**. Он основан на теореме.

Теорема. Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке *T*, а X – множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$.
Тогда, если функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве X, то на множестве *T* справедлива формула

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\,. \qquad (1)$$

После интегрирования возвращаются к старой переменной *x*. Для этого уравнение подстановки $x=\varphi(t)$ разрешают относительно *t*: $t=\varphi^{-1}(x)=\psi(x)$.
Замечание. Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $u=\psi(x)$, тогда

$$\int f\big(\psi(x)\big)\cdot\psi'(x)\,dx=\int f(u)\cdot u'dx=\int f(u)\,du\,.$$

Новой переменной *u* следует обозначать ту функцию, производная которой, хотя бы с точностью до постоянного множителя, присутствует под знаком интеграла.

Пример 1.

$$\int x\sqrt{x+3}\,dx=\left\{\begin{array}{l} x+3=t^2,\\ x=t^2-3,\\ dx=2t\,dt.\end{array}\right\}=\int\left(t^2-3\right)\cdot\sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt=2\int\left(t^2-3\right)\cdot t^2dt=$$

$$=2\int t^4dt-6\int t^2dt=2\frac{t^5}{5}-6\frac{t^3}{3}+c=\left\{\begin{array}{l} t^2=x+3,\\ t=\sqrt{x+3}.\end{array}\right\}=\frac{2}{5}\sqrt{(x+3)^5}-2\sqrt{(x+3)^3}+c.$$

Пример 2.

$$\int\cos 7x\,dx=\big(1.3,(6)\big)=\left\{\begin{array}{l} u=7x,\\ u'=7.\end{array}\right\}=\frac{1}{7}\int\cos 7x\cdot 7dx=\frac{1}{7}\sin 7x+c\,.$$

Недостающий у дифференциала множитель $u'=7$ ввели под знак интеграла, перед знаком интеграла записали компенсирующий множитель $\frac{1}{7}$, получили табличный интеграл

$$\frac{1}{7}\int\cos u\cdot u'dx=\frac{1}{7}\sin u+c\,.$$

Пример 3.

$$\int e^{1-5x^2}x\,dx=\big(1.3,(4)\big)=\left\{\begin{array}{l} u=1-5x^2,\\ u'=-10x.\end{array}\right\}=-\frac{1}{10}\int e^{1-5x^2}(-10x)\,dx=-\frac{1}{10}e^{1-5x^2}+c\,.$$

Пример 4.

$$\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+9}dx=\big(1.3,(13)\big)=\left\{\begin{array}{l} u=e^{2x}+9,\\ u'=e^{2x}\cdot 2.\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}+9}dx=\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+9\right|+c\,.$$

Пример 5.

$$\int\frac{e^{x}}{e^{2x}+9}dx=\big(1.3,(14)\big)=\left\{\begin{array}{l} u=e^{x},\\ u'=e^{x}.\end{array}\right\}=\int\frac{e^{x}}{\left(e^{x}\right)^2+3^2}dx=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{e^{x}}{3}+c\,.$$

Лекция 2

2.3. Метод интегрирования по частям.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на промежутке X и функция $u'(x)\cdot v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $u(x)\cdot v'(x)$ также имеет первообразную на промежутке X и при этом справедлива формула

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx. \qquad (2)$$

Так как $v'(x)\,dx = dv$, $u'(x)\,dx = du$, то формулу интегрирования по частям (2) можно записать в виде

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du. \qquad (3)$$

Доказательство. Из формулы дифференцирования произведения двух функций имеем

$d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du$, откуда

$$u\,dv = d(u\cdot v) - v\,du.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим

$$\int u\,dv = \int d(u\cdot v) - \int v\,du$$

или

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du.$$

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv, затем, после нахождения v и du, используется формула (3). Иногда формулу (3) приходится применять несколько раз.

Некоторые типы интегралов, которые вычисляют методом интегрирования по частям:

1. $\int P(x)\cdot e^{ax}dx$, $\int P(x)\cdot \sin ax\,dx$, $\int P(x)\cdot \cos ax\,dx$, где $P(x)$ – многочлен, a – число.

Полагают $u = P(x)$, а за dv обозначают все остальные сомножители.

2. $\int P(x)\cdot \arcsin x\,dx$, $\int P(x)\cdot \arccos x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\cdot \mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P(x)\cdot \mathrm{arcctg}\,x\,dx$.

Полагают $dv = P(x)\,dx$, а за u принимают все остальные сомножители.

3. $\int e^{ax}\cdot \sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cdot \cos bx\,dx$, где a и b – числа. Можно положить $u = e^{ax}$.

Пример 1.

$$\int (2x-1)\cdot e^{3x}dx = \left\{\begin{array}{l|l} u = 2x-1, & dv = e^{3x}dx, \\ du = 2dx, & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}. \end{array}\right\} = (2x-1)\cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot 2dx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x-1)\cdot e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}(2x-1)\cdot e^{3x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + c = \frac{1}{3}e^{3x}\cdot\left(2x - \frac{5}{3}\right) + c.$$

Пример 2.

$$\int \ln^2 x dx = \left\{\begin{array}{l|l} u = \ln^2 x, & dv = dx, \\ du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx, & v = \int dx = x. \end{array}\right\} =$$

$$\ln^2 x \cdot x - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx =$$

$\left(\text{к} \int \ln x dx \text{ применим формулу (3)}\right)$

$$= \left\{\begin{array}{l|l} u = \ln x, & dv = dx, \\ du = \frac{1}{x}dx, & v = x. \end{array}\right\} = x\ln^2 x - 2\left(\ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= x\cdot \ln^2 x - 2(x\ln x - x) + c = x\cdot(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + c.$$

Пример 3.

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \left\{\begin{array}{l|l} u = e^x, & dv = \sin x dx, \\ du = e^x dx, & v = \int \sin x dx = -\cos x. \end{array}\right\} =$$

$$= e^x\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)\cdot e^x dx = -e^x\cdot\cos x + \int e^x\cdot\cos x dx =$$

$\left(\text{к} \int e^x \cdot \cos x dx \text{ применим формулу (3)}\right)$

$$= \left\{\begin{array}{l|l} u = e^x, & dv = \cos x dx, \\ du = e^x dx, & v = \int \cos x dx = \sin x. \end{array}\right\} = -e^x\cdot\cos x + \left(e^x\cdot\sin x - \int \sin x \cdot e^x dx\right) =$$

$$= -e^x\cdot\cos x + e^x\cdot\sin x - \int e^x\cdot\sin x dx.$$

Применяя формулу (3) интегрирования по частям два раза мы вернулись к исходному интегралу. Решим полученное уравнение относительно интеграла $\int e^x\cdot\sin x dx$. Обозначим $\int e^x\cdot\sin x dx = I$, $e^x\cdot\sin x - e^x\cdot\cos x = f(x)$.

Уравнение принимает вид:

$I = f(x) - I \Rightarrow 2I = f(x) \Rightarrow I = \frac{1}{2}f(x)$, т.е.

$$\int e^x\cdot\sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c.$$

С помощью интегрирования по частям выводится рекуррентная формула для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}.$$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(n-1)\cdot\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}\right). \qquad (4)$$

Пример. Вычислить $I_3 = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Здесь $a = 1,\ n = 3$.

$$I_3 = \frac{x}{2\cdot 2\left(x^2+1\right)^2} + \frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2}\cdot I_2 = \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2\cdot 1\left(x^2+1\right)} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\cdot I_1\right) =$$

$$= \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}\right) = \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right) + c.$$

Лекция 3

3. Интегрирование рациональных функций

Интегрирование целой рациональной функции $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ выполняется путем разбиения интеграла на слагаемые, в результате интегрирования получится многочлен степени $(n+1)$.

Определение. Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е. $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$,

где

$P_m(x)$ – многочлен степени *m*,

$Q_n(x)$ – многочлен степени *n*.

Определение. Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$, и неправильной, если $m \geq n$.

3.1. Интегрирование неправильных дробей.

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$, т.е.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}.$$

Определение. Правильные рациональные дроби вида

(I) $\frac{A}{x-a}$; (II) $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k \geq 2,\ \ k \in N)$;

(III) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; (IV) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $(k \geq 2)$,

где знаменатель x^2+px+q имеет комплексные корни и $A,\ a,\ M,\ N,\ p,\ q$ – действительные числа, называются простейшими рациональными дробями.

Теорема. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q_n(x) = (x-x_1)^l \cdot (x-x_2)^m \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^s \cdot \ldots,$$

можно представить единственным образом в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{R(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_l}{(x-x_1)^l} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-x_2)^m} +$$

$$+ \ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s} + \ldots, \tag{5}$$

где $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ – некоторые действительные числа.

Для нахождения чисел $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ в равенстве (5) применяют **метод неопределенных коэффициентов**:

1. Правую часть равенства (5) приведем к общему знаменателю $Q_n(x)$; в результате получим тождество $\frac{R(x)}{Q_n(x)} = \frac{S(x)}{Q_n(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами.
2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т.е. $R(x) \equiv S(x)$.

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества, получим систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов $A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ...$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов применяют также **метод частных значений аргумента.** Для этого в тождестве $R(x) \equiv S(x)$ аргументу x придают значения действительных корней многочлена $Q_n(x)$).

Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.

3.2. Интегрирование простейших рациональных дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + c$.

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c$.

3. Рассмотрим интеграл $I = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$. Если $M \neq 0$, то из числителя можно выделить слагаемое $(2x+p)$, равное производной квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе; в результате преобразований получим:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \left\{ \begin{array}{l} (x^2+px+q)' = 2x+p, \\ Mx+N = \frac{M}{2}(2x+p) - \frac{Mp}{2} + N. \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2} \ln |x^2+px+q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Для вычисления интеграла $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+px+q}$ в квадратном трехчлене выделяем полный квадрат:

$$x^2+px+q = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

$I_1 = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}$ и в зависимости от знака выражения $\left(q - \frac{p^2}{4}\right)$

получаем один из табличных интегралов $\int \frac{u'}{u^2 \pm a^2} dx$.

Пример.

$$\int \frac{3-5x}{4x^2+16x-9}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{5x-3}{x^2+4x-\frac{9}{4}}dx =$$

$$\left\{\begin{aligned} &\left(x^2+4x-\frac{9}{4}\right)' = 2x+4,\\ &5x-3=\frac{5}{2}(2x+4)-\frac{20}{2}-3=\frac{5}{2}(2x+4)-13.\end{aligned}\right\} = -\frac{1}{4}\int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-13}{x^2+4x-\frac{9}{4}}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x-\frac{9}{4}}dx - \frac{1}{4}(-13)\int \frac{dx}{x^2+4x-\frac{9}{4}} =$$

$$= \left\{ x^2+4x-\frac{9}{4} = \left(x^2+2\cdot 2x+4\right)-4-\frac{9}{4} = (x+2)^2-\frac{25}{4} \right\} =$$

$$= -\frac{5}{8}\ln\left|x^2+4x-\frac{9}{4}\right| + \frac{13}{4}\int \frac{dx}{(x+2)^2-\frac{25}{4}} = \bigl(1.3,\ (15)\bigr) =$$

$$= -\frac{5}{8}\ln\left|x^2+4x-\frac{9}{4}\right| + \frac{13}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\ln\left|\frac{(x+2)-\frac{5}{2}}{(x+2)+\frac{5}{2}}\right| =$$

$$= -\frac{5}{8}\ln\left|x^2+4x-\frac{9}{4}\right| + \frac{13}{20}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+9}\right| + c.$$

4. Интеграл $I = \int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$, $k \ge 2$, $q-\frac{p^2}{4}>0$ преобразованиями, аналогичными преобразованиям при вычислении интеграла $I = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, сводится к сумме двух интегралов

$$I = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}.$$

Интеграл $\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$ является табличным интегралом $\int \frac{u'}{u^k}dx = \frac{u^{-k+1}}{-k+1}+c$.

Интеграл $\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ после выделения полного квадрата и введения новой переменной $t = x+\frac{p}{2}$ вычисляется по рекуррентной формуле (4).

3.3. Интегрирование рациональных дробей.

1. Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.
2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших дробей.
3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример 1.

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx .$$

Подынтегральная рациональная дробь неправильная, поэтому выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^5 + x^4 - 8 \\ \underline{x^5 - 4x^3} \end{array} & \begin{array}{l} x^3 - 4x \\ \hline x^2 + x + 4 \end{array} \\
\quad -\begin{array}{l} x^4 + 4x^3 - 8 \\ \underline{x^4 - 4x^2} \end{array} & \\
\qquad -\begin{array}{l} 4x^3 + 4x^2 - 8 \\ \underline{4x^3 - 16x} \end{array} & \\
\qquad\qquad 4x^2 + 16x - 8 &
\end{array}$$

Таким образом,

$$I = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4\int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} dx .$$

В последнем интеграле разлагаем знаменатель дроби на множители:

$$x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x+2)(x-2).$$

$I = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 4x + 4I_1$, где $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x+2)(x-2)} dx$.

Представим правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} .$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)} .$$

Приравняем числители

$$x^2 + 4x - 2 = A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2).$$

Полагая *x* равным действительным корням знаменателя, получим

1) $x=0$, $\quad -2=-4A$, $\quad A=\dfrac{1}{2}$.

2) $x=-2$, $\quad -6=8B$, $\quad B=-\dfrac{3}{4}$.

3) $x=2$, $\quad 10=8C$, $\quad C=\dfrac{5}{4}$.

Следовательно,

$$I_1=\int\frac{\frac{1}{2}}{x}dx+\int\frac{-\frac{3}{4}}{x+2}dx+\int\frac{\frac{5}{4}}{x-2}dx=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+c_1;$$

$$I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-4x+2\ln|x|-3\ln|x+2|+5\ln|x-2|+c=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-4x+\ln\left|\frac{x^2\cdot(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+c.$$

Пример 2.

$$I=\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$$

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, ее разложение на сумму простейших рациональных дробей имеет вид:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A(x^2-2x+5)+(Bx+C)\cdot(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)},$$ следовательно,

$$2x^2-3x-3=A(x^2-2x+5)+Bx(x-1)+C(x-1).$$

Полагая $x=1$, имеем: $-4=4A$, $A=-1$.

Для нахождения B и C приведем подобные и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве:

$$2x^2-3x-3=Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C,$$

$$2x^2-3x-3=x^2(A+B)+x(-2A-B+C)+(5A-C)$$

$$\begin{array}{c|ll} x^2 & A+B=2 & \Rightarrow B=2-A,\quad B=2+1,\quad B=3 \\ x & -2A-B+C=-3 & \\ x^0 & 5A-C=-3 & \Rightarrow C=5A+3,\quad C=-2 \end{array}$$

$$I=\int\frac{-1}{x-1}dx+\int\frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx=-\ln|x-1|+I_1;$$

$$I_1=\int\frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx=\left\{\begin{aligned}&(x^2-2x+5)'=2x-2,\\&3x-2=\frac{3}{2}(2x-2)+3-2=\frac{3}{2}(2x-2)+1.\end{aligned}\right\}=$$

$$=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-2)+1}{x^2-2x+5}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx+\int\frac{dx}{x^2-2x+5}=$$

$$=\left\{\begin{aligned}&x^2-2x+5=(x^2-2x+1)-1+5=\\&=(x-1)^2+4.\end{aligned}\right\}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+c_1;$$

$$I=-\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+c=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+c.$$

Лекция 4

4. Интегрирование тригонометрических функций

4.1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Интегралы вида $\int \boldsymbol{R(\sin x;\cos x)dx}$, где $R(\sin x;\cos x)$ – рациональная функция своих аргументов $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегралам от рациональной функции новой переменной t подстановкой $\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\frac{x}{2}=t}$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой.

Тогда $x=2\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$;

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad \text{и}$$

$$\int R(\sin x;\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция от t.

Применение универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ часто связано с громоздкими вычислениями, поэтому, по возможности, применяют более простые подстановки, в зависимости от вида подынтегральной функции.

1) Если функция $R(\sin x;\cos x)$ нечетна относительно $\sin x$, т.е. $R(-\sin x;\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$, то делают подстановку $\mathbf{\cos x = t}$.

2) Если функция $R(\sin x;\cos x)$ нечетна относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x;-\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$, то полагают $\mathbf{\sin x = t}$.

3) Если функция $R(\sin x;\cos x)$ четна относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$, то подстановка $\mathbf{tg x = t}$ рационализирует интеграл. Тогда

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 1.

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x\cdot(1+\cos x)}dx=\left\{\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right\}=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=$$

$$=\int\frac{1+t^2+2t}{(1+t^2)\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1+t^2+2t}{2t}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+t+2\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|t|+\frac{t^2}{2}+2t\right)+c=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+c.$$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x} = \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{tg} x = t, \\ &dx = \frac{dt}{1+t^2}. \end{aligned} \right\} =$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{t^2}{1+t^2} - 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + 3\frac{1}{1+t^2} \right)} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{\frac{t^2 - 2t + 3}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 3} = \int \frac{dt}{(t-1)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t-1}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{2}} \right) + c.$$

4.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$.

1. m или n – **нечетное** целое положительное число.
От нечетной степени отделяют один множитель и новой переменной t обозначают ту функцию, дифференциал которой присутствует под знаком интеграла, т.е.
а) если m нечетное, то подстановка
$\cos x = t$ и $\sin x dx = -dt$;
б) если n нечетное, то подстановка
$\sin x = t$ и $\cos x dx = dt$.
Оставшуюся четную степень выражают из формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Пример.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \cdot \sin x dx = \left\{ \begin{aligned} &\cos x = t, \\ &-\sin x dx = dt, \\ &\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2. \end{aligned} \right\} =$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{\sqrt[4]{t}} dt = \int \frac{t^2}{t^{1/4}} dt - \int \frac{1}{t^{1/4}} dt = \int t^{7/4} dt - \int t^{-1/4} dt =$$

$$= \frac{t^{11/4}}{11/4} - \frac{t^{3/4}}{3/4} + c = \frac{4}{11} \sqrt[4]{\cos^{11} x} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{\cos^3 x} + c.$$

2. m и n – **четные** целые неотрицательные числа.
Степени понижаются переходом к удвоенному аргументу с помощью формул:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Пример.

$$\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x dx=\int(\sin x\cdot\cos x)^2\cdot\cos^2 x dx=\int\frac{1}{4}\sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=$$

$$\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\cos 2x dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\cdot\cos 2x\cdot 2dx=$$

$$=\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3}+c=\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+c.$$

3. $(m+n)$ – четное целое отрицательное число.
В этом случае возможны подстановки:

а) $\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}$, тогда $x=\operatorname{arctg} t$ и $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$.

Из формулы $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ получаем $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, а так как $\sin x=\operatorname{tg} x\cdot\cos x$, то $\sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

б) $\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}$, тогда $x=\operatorname{arcctg} t$ и $dx=-\dfrac{dt}{1+t^2}$.

Из формулы $1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ получаем $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, а так как $\cos x=\operatorname{ctg} x\cdot\sin x$, то $\cos x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos x}=\left\{\begin{aligned}&\operatorname{ctg} x=t,\\&dx=-\frac{dt}{1+t^2}.\end{aligned}\right\}=\int\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\cdot\left(-\frac{dt}{1+t^2}\right)==-\int\frac{(1+t^2)^2}{t\cdot(1+t^2)}dt=$$

$$=-\int\frac{1+t^2}{t}dt=-\int\frac{1}{t}dt-\int t dt=-\ln|t|-\frac{t^2}{2}+c=c-\ln|\operatorname{ctg} x|-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x.$$

Пример 2.

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx=\int\operatorname{tg}^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\left\{\begin{aligned}&\operatorname{tg} x=t,\\&\frac{1}{\cos^2 x}dx=dt.\end{aligned}\right\}=\int t^4 dt=\frac{t^5}{5}+c=\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+c.$$

4.3. Интегралы вида $\int \mathbf{tg}^m x\,dx$, $\int \mathbf{ctg}^m x\,dx$.

Если m – целое положительное число, то интегралы вычисляются с помощью формул: $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, т.е. $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$ и $1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$, т.е. $\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$.

Пример.

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx=\int \operatorname{tg}^2 x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int \operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx-\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}\,x+x+c.$$

4.4. Интегралы вида $\int \cos mx\cdot\cos nx\,dx$, $\int \sin mx\cdot\sin nx\,dx$, $\int \sin mx\cdot\cos nx\,dx$ вычисляются с помощью формул тригонометрии:

$$\cos mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right),$$
$$\sin mx\cdot\sin nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right),$$
$$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x+\sin(m+n)x\right),$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

Пример.

$$\int \sin 3x\cdot\cos 5x dx=\int\frac{1}{2}\left(\sin(-2x)+\sin 8x\right)dx=-\frac{1}{2}\int \sin 2x dx+\frac{1}{2}\int \sin 8x dx=$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\cos 2x\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left(-\cos 8x\right)+c=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+c.$$

Лекция 5

5. Интегрирование некоторых иррациональных функций

5.1. Интегралы вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots\right)dx$, где R – рациональная функция, $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ – целые числа, находятся с помощью подстановки

$\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^m$, где m – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\dfrac{p_1}{q_1},\dfrac{p_2}{q_2},\dots$, т.е. m – наименьшее общее кратное показателей радикалов $q_1,\ q_2,\dots$.

В частности, интегралы вида $\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}},\dots\right)dx$ приводятся к интегралу от рациональной функции новой переменной t с помощью подстановки $x=t^m$.

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x+4}+2\sqrt[3]{3x+4}}=\left\{\begin{array}{l}3x+4=t^6,\\ x=\frac{1}{3}\left(t^6-4\right),\\ dx=2t^5dt.\end{array}\right\}=\int\frac{2t^5dt}{t^3+2t^2}=2\int\frac{t^5}{t^2(t+2)}dt=$$

$$=2\int\frac{t^3}{t+2}dt=2\int\frac{\left(t^3+8\right)-8}{t+2}dt=2\left(\int\frac{t^3+8}{t+2}dt-8\int\frac{dt}{t+2}\right)=$$

$$=2\left(\int\frac{(t+2)\left(t^2-2t+4\right)}{t+2}dt-8\ln|t+2|\right)=2\left(\int\left(t^2-2t+4\right)dt-8\ln|t+2|\right)=$$

$$2\left(\frac{t^3}{3}-2\frac{t^2}{2}+4t-8\ln|t+2|\right)+c=\left\{\begin{array}{l}3x+4=t^6,\\ t=\sqrt[6]{3x+4}.\end{array}\right\}=$$

$$=2\left(\frac{1}{3}\sqrt{3x+4}-\sqrt[3]{3x+4}+4\sqrt[6]{3x+4}-8\ln\left|\sqrt[6]{3x+4}\right|\right)+c.$$

Пример 2.

$$I=\int\frac{x^{1/2}}{x^{3/4}+1}dx=\left\{\begin{array}{l}x=t^4,\\ dx=4t^3dt.\end{array}\right\}=\int\frac{t^2}{t^3+1}\cdot4t^3dt=4\int\frac{t^5}{t^3+1}dt\,.$$

Подстановка привела к интегралу от неправильной рациональной дроби. Выделяя целую часть, получим:

$$\begin{array}{r|l}-\,t^5 & t^3+1\\ \cline{2-2} t^5+t^2 & t^2\\ \cline{1-1} -t^2 & \end{array}$$

$$I=\int\left(t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\right)dt=4\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}\ln\left|t^3+1\right|\right)+c==\left\{\begin{array}{l}x=t^4,\\ t=\sqrt[4]{x}.\end{array}\right\}=\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right)+c.$$

5.2. Интеграл вида $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

можно разбить на два интеграла, выделив в числителе производную подкоренного выражения; тогда один из интегралов будет табличным, а другой сведется к табличному после выделения полного квадрата под радикалом.

Пример.

$$\int \frac{7-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \left\{ \begin{aligned} &\left(-x^2+2x+3\right)' = -2x+2, \\ &-x+7 = \frac{1}{2}\left(-2x+2\right)-1+7 = \frac{1}{2}\left(-2x+2\right)+6. \end{aligned} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\left(-2x+2\right)+6}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{-2x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx + 6\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \left(1.3, (16)\right) =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &-\left(x^2-2x-3\right) = \\ &= -\left(\left(x^2-2x+1\right)-1-3\right) = 4-\left(x-1\right)^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3+2x-x^2} + 6\int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(x-1\right)^2}} =$$

$$= \left(1.3, (17)\right) = \sqrt{3+2x-x^2} + 6\arcsin\frac{x-1}{2} + c.$$

5.3. Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

вычисляют с помощью подстановки $x-\alpha = \frac{1}{t}$.

Пример.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}} = \left\{ \begin{aligned} &x = \frac{1}{t}, \\ &dx = -\frac{1}{t^2}dt. \end{aligned} \right\} = \int \frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2t-1}{t^2}}}\cdot\frac{1}{t}dt =$$

$$= -\int \frac{t}{\sqrt{2t-1}}\cdot\frac{1}{t}dt = -\int \frac{dt}{\sqrt{2t-1}} = \left(1.3, (16)\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{2dt}{\sqrt{2t-1}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2t-1} + c =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &x = \frac{1}{t}, \\ &t = \frac{1}{x}. \end{aligned} \right\} = -\sqrt{2\cdot\frac{1}{x}-1} + c = -\sqrt{\frac{2-x}{x}} + c.$$

5.4. Интеграл $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, где R – рациональная функция, находят подстановкой $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$, интеграл $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ –

подстановкой $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$, а интеграл $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a}^2}\right)\boldsymbol{dx}$ – подстановкой $x = \dfrac{a}{\sin t}$ или $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

Пример.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(4 - x^2\right)^3}} = \left\{\begin{array}{ll} x = 2\sin t, & \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = \sqrt{4\left(1 - \sin^2 t\right)} = \\ dx = 2\cos t\, dt, & = \sqrt{4 \cdot \cos^2 t} = 2\cos t. \end{array}\right\}$$

$$= \int \frac{2\cos t\, dt}{2^3 \cdot \cos^3 t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\mathrm{tg}\, t + c =$$

Вернемся к старой переменной:

$$= \left\{\begin{array}{lll} x = 2\sin t, & \cos^2 t = 1 - \sin^2 t, & \cos t = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2}. \\ \sin t = \dfrac{x}{2}, & \cos^2 t = 1 - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{4 - x^2}{4}, & \end{array}\right\};$$

$$I = \frac{1}{4}\frac{\sin t}{\cos t} + c = \frac{1}{4}\frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}} + c = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} + c.$$