Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт информационных технологий и анализа данных

наименование института

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 1
по дисциплине:

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

«Построение математической модели задачи линейного программирования»

Выполнил	АСУб-20-2		Арбакова А.В.
	шифр группы	подпись	Фамилия И.О.
Проверил			Китаева О.И.
	должность	подпись	Фамилия И.О.

Иркутск 2022 г.

1. Постановка задачи.

Цель работы: Приобретение навыков построения математических моделей задач линейного программирования, получение навыков решения задач в MS Excel.

Задание: Построить математическую модель для задачи индивидуального варианта, решить задачу графическим методом, симплекс-методом и с использованием надстройки Поиск решения MS Excel, сравнить полученные результаты и дать их экономическую интерпретацию.

Задача 2

С железнодорожной станции ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. Известны наличный парк вагонов, из которых можно формировать поезда и количество пассажиров, вмещающихся в каждый из вагонов. Определить оптимальное число скорых и пассажирских поездов из условия максимального числа перевозимых пассажиров, исходя из того. Что пропускная способность дороги – не более шести пассажирских поездов в день. В табл.2 приведены исходные данные задачи.

Таблица 2

	Вагоны		
	плацкартные	купейные	мягкие
Скорый поезд	5	4	3
Пассажирский поезд	8	6	1
Число пассажиров	58	40	32
Парк вагонов	88	72	30

2. Математическая модель задачи.

Обозначим переменные:

x_1 – количество скорых поездов

x_2 – количество пассажирских поездов

Число перевозимых пассажиров:

$$z = a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2$$

где a_1 и a_2 – вместимость скорого и пассажирского поездов

По условию задачи получим:

$$a_1 = 5 \times 58 + 4 \times 40 + 3 \times 32 = 546$$

$$a_2 = 8 \times 58 + 6 \times 40 + 32 = 736$$

Целью задачи является определение среди всех допустимых значений x_1и x_2 таких, которые максимизируют число перевозимых пассажиров, т. е. целевую функцию:

$$z = 546 \times x_1 + 736 \times x_2 \to max$$

Перейдем к ограничениям, которые налагаются на x_1и x_2:

1. Количество поездов не может быть отрицательным, следовательно:

$$x_1 \geq 0 \text{ и } x_2 \geq 0$$

2. Ограничение по парку плацкартных вагонов:

$$5 \times x_1 + 8 \times x_2 \leq 88$$

3. Ограничение по парку купейных вагонов:

$$4 \times x_1 + 6 \times x_2 \leq 72$$

4. Ограничение по парку мягких вагонов:

$$3 \times x_1 + x_2 \leq 30$$

5. Ограничение на пропускную способность дороги – не более шести пассажирских поездов в день:

$$x_2 \leq 6$$

Таким образом, математическая модель данной задачи имеет следующий вид:

$$z = 546 \times x_1 + 736 \times x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 5 \times x_1 + 8 \times x_2 \leq 88 \\ 4 \times x_1 + 6 \times x_2 \leq 72 \\ 3 \times x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_2 \leq 6$$

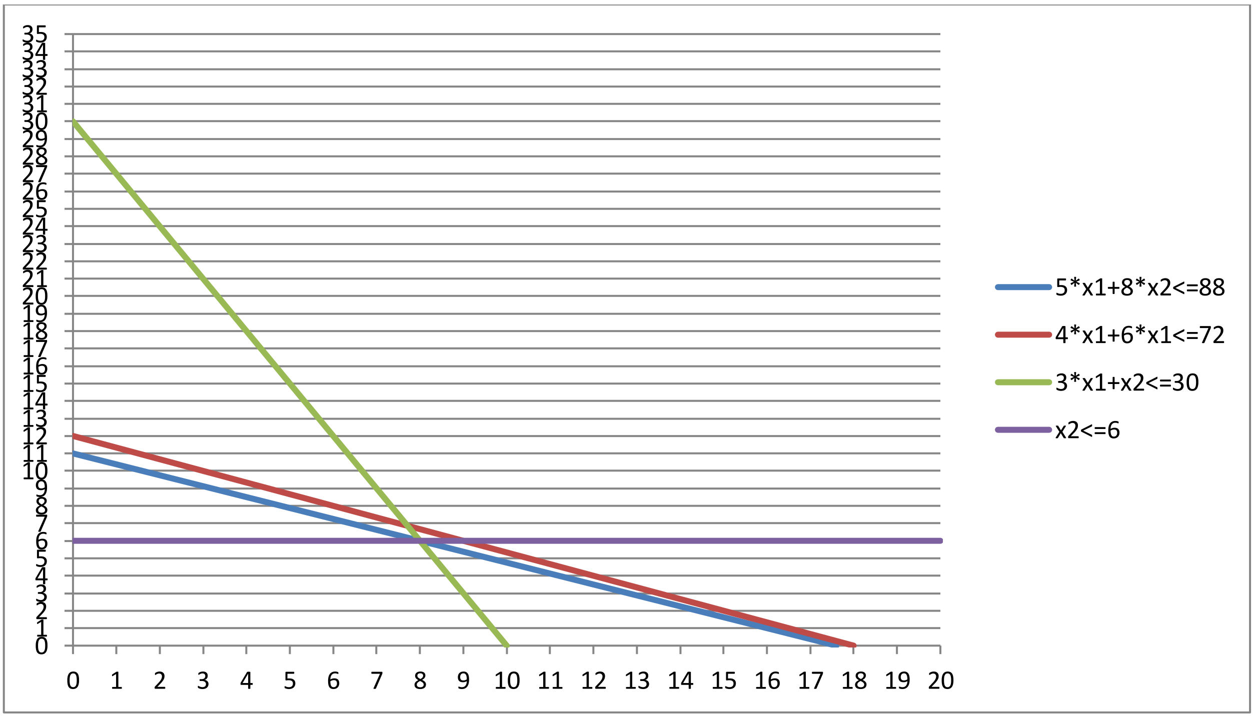
3. Результаты решения задачи графическим методом.

Для того чтобы решить задачу графически методом, построим область допустимых решений, т.е. решим графически систему неравенств.

Построим каждую прямую и определим полуплоскости, заданные неравенствами:

$$\begin{cases} 5 \times x_1 + 8 \times x_2 \leq 88 \\ 4 \times x_1 + 6 \times x_2 \leq 72 \\ 3 \times x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_2 \leq 6$$



$$\begin{cases} 5 \times x_1 + 8 \times x_2 \leq 88 \\ 3 \times x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$$

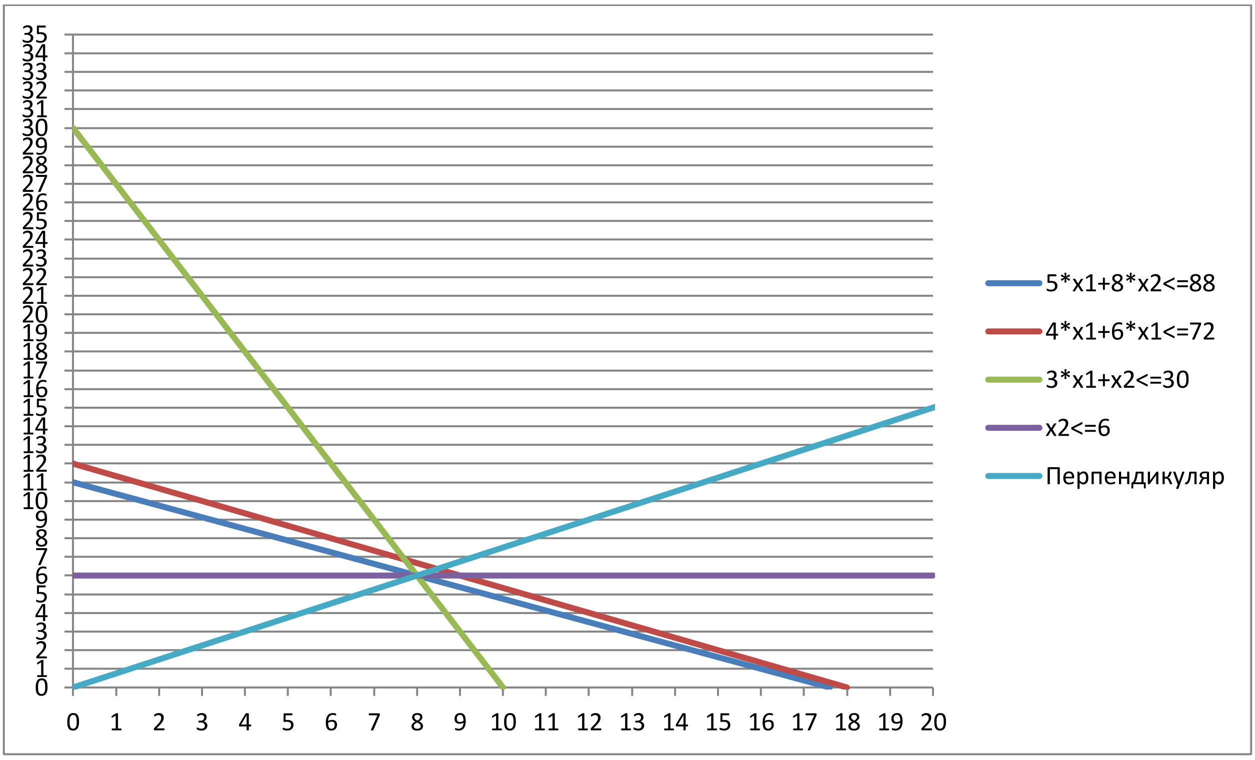
Помножим $3 \times x_1 + x_2 \leq 30$ на 8:

$$\begin{cases} 5 \times x_1 + 8 \times x_2 \leq 88 \\ 24 \times x_1 + 8 \times x_2 \leq 240 \end{cases}$$

$$-19x_1 = -152$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 6$$



Следовательно, целевая функция будет равна:

$$z = 546 \times 8 + 736 \times 6 = 8784$$

Результат решения задачи, полученный с помощью графического метода:

$$z = 8784$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 6$$

4. Результаты решения задачи с использованием симплекс-метода.

$$z = 546 \times x_1 + 736 \times x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 5 \times x_1 + 8 \times x_2 \leq 88 \\ 4 \times x_1 + 6 \times x_2 \leq 72 \\ 3 \times x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_2 \leq 6$$

Запишем расширенную форму задачи:

$$546 \times x_1 + 736 \times x_2 + 0 \times x_3 + 0 \times x_4 + 0 \times x_5 + 0 \times x_6 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 5 \times x_1 + 8 \times x_2 + x_3 + 0 \times x_4 + 0 \times x_5 + 0 \times x_6 \leq 88 \\ 4 \times x_1 + 6 \times x_2 + 0 \times x_3 + x_4 + 0 \times x_5 + 0 \times x_6 \leq 72 \\ 3 \times x_1 + x_2 + 0 \times x_3 + 0 \times x_4 + x_5 + 0 \times x_6 \leq 30 \\ x_2 + 0 \times x_3 + 0 \times x_4 + 0 \times x_5 + x_6 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Условие задачи запишем в виде таблицы:

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A0
5	8	1	0	0	0	88
4	6	0	1	0	0	72
3	1	0	0	1	0	30
0	1	0	0	0	1	6

Выбрав в качестве начального базиса {A3, A4, A5, A6} находим первое допустимое базисное решение:

$$A_3x_3^* + A_4x_4^* + A_5x_5^* + A_6x_6^* = A_0$$

Это выражение соответствует системе уравнений:

$$x_3^* + 0 \times x_4^* + 0 \times x_5^* + 0 \times x_6^* = 88$$
$$0 \times x_3^* + x_4^* + 0 \times x_5^* + 0 \times x_6^* = 72$$
$$0 \times x_3^* + 0 \times x_4^* + x_5^* + 0 \times x_6^* = 30$$
$$0 \times x_3^* + 0 \times x_4^* + 0 \times x_5^* + x_6^* = 6$$

Откуда: $x_3^* = 88 \quad x_4^* = 72 \quad x_5^* = 30 \quad x_6^* = 6$

Представим каждый из векторов A1, A2 в виде линейной комбинации базисных векторов {A3, A4, A5, A6}:

$$A_3x_{31} + A_4x_{41} + A_5x_{51} + A_6x_{61} = A_1$$
$$A_3x_{32} + A_4x_{42} + A_5x_{52} + A_6x_{62} = A_2$$

Решая эти уравнения получим:

$x_{31} = 5 \quad x_{41} = 4 \quad x_{51} = 3 \quad x_{61} = 0$

$x_{32} = 8 \quad x_{42} = 6 \quad x_{52} = 1 \quad x_{62} = 1$

Находим симплекс-разности соответственно для переменных x1 и x2, используя формулу:

$c_r - c_1x_{1r} - c_2x_{2r} - \cdots - c_mx_{mr}$ – симплекс-разность для xr.

Получаем следующие значения:

$$c_1 - c_3x_{31} - c_4x_{41} - c_5x_{51} - c_6x_{61} = 546$$
$$c_2 - c_3x_{32} - c_4x_{42} - c_5x_{52} - c_6x_{62} = 736$$

Так как 736>546, то вводим переменную x2 в базисное решение, а вектор A2 в базис.

Определим, какая переменная выводится из базиса, используя условие:

$x_{max} = min\left\{\frac{x_i^*}{x_{ir}}\right\}$ для всех i, для которых xir>0.

$$maxx_1 = min\left\{\frac{88}{8};\frac{72}{6};\frac{30}{1};\frac{6}{1}\right\} = 6$$

Выводим из базисного решения переменную xi, соответствующую $min\left\{\frac{x_i^*}{x_{ir}}\right\}$, а из базиса соответствующий вектор.

Вводим в базис переменную x2 со значением $x_2^* = 6$, а переменная x6 выводится из базисного решения, а вектор А6 из базиса.

Новые значения переменных находим:

$$x_3 = x_3^* - x_2x_{32} = 88 - 6 \times 8 = 40$$
$$x_4 = x_4^* - x_2x_{42} = 72 - 6 \times 6 = 36$$
$$x_5 = x_5^* - x_2x_{52} = 30 - 6 = 24$$

Новый базис {A3, A4, A5, A2}

Соответствующее базисное решение

$x_3^* = 40 \quad x_4^* = 36 \quad x_5^* = 24 \quad x_2^* = 6$

Представим каждый из векторов А1 и А6 не вошедших в базис в виде

линейной комбинации векторов А3 А4 А5 А2. Так как вектор А6 был выведен из базиса рассмотрим только А1.

$$A_1 = A_3x_{31} + A_4x_{41} + A_5x_{51} + A_2x_{21}$$

Так как 546>-736, то вводим переменную x1 в базисное решение, а вектор А1 в базис.

Определим, какая переменная выводится из базиса, используя условие:

$x_{max} = min\left\{\frac{x_i^*}{x_{ir}}\right\}$ для всех i, для которых xir>0.

$$maxx_1 = min\left\{\frac{40}{5};\frac{36}{4};\frac{24}{3};-\right\} = 8$$

Выводим из базисного решения переменную xi, соответствующую $min\left\{\frac{x_i^*}{x_{ir}}\right\}$, а из базиса соответствующий вектор.

Вводим в базис переменную x3 со значением $x_3^* = 8$, а переменная x6 выводится из базисного решения, а вектор А3 из базиса.

Новые значения переменных находим:

$$x_4 = x_4^* - x_2x_{42} = 36 - 8 \times 4 = 4$$
$$x_5 = x_5^* - x_2x_{52} = 24 - 8 \times 3 = 0$$

Новый базис: {A1, A4, A6, A2}

Соответствующее базисное решение:

$x_1^* = 8 \quad x_4^* = 4 \quad x_6^* = 0 \quad x_2^* = 6$

Так как вектор А5 был выведен из базиса рассмотрим только А3.

$$A_3 = A_3x_{13} + A_4x_{43} + A_5x_{63} + A_2x_{23}$$

Решая эти уравнения получим:

$x_{13} = 8/19 \quad x_{43} = -2/19 \quad x_{63} = 5/19 \quad x_{23} = -5/19$

Находим их симплекс-разность для x3:

$$c_3 - c_1x_{13} - c_4x_{43} - c_6x_{63} - \ c_2x_{23} = \times \frac{8}{19} + 736 \times -\frac{5}{19} = -36.21 < 0$$

Поскольку симплекс-разность отрицательна, данное решение оптимально.

$x_1^* = 8 \quad x_2^* = 6$

Значение целевой функции:

$$z = 546 \times x_1^* + 736 \times x_2^* = 8784$$

Оптимальный план можно записать так:

$$x_1 = 8$$
$$x_2 = 6$$
$$z = 546 \times 8 + 736 \times 6 = 8784$$

5. Результаты решения задачи с помощью Excel-таблиц.

На рабочем листе введем числовые данные задачи.

Обозначим переменные:

x_1 – количество скорых поездов

x_2 – количество пассажирских поездов

x1	x2

Число перевозимых пассажиров:

$$z = a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2$$

где a_1 и a_2 – вместимость скорого и пассажирского поездов.

По условию задачи получим:

$$a_1 = 5 \times 58 + 4 \times 40 + 3 \times 32 = 546$$
$$a_2 = 8 \times 58 + 6 \times 40 + 32 = 736$$

a1	a2
546	736

Перейдем к ограничениям, которые налагаются на x_1и x_2.

Условия			
5*x1+8*x2		<=	88
4*x1+6*x2		<=	72
3*x1+x2		<=	30
x2		<=	6
x1		>=	0
x2		>=	0

Поскольку целевая функция:

$$z = 546 \times x_1 + 736 \times x_2 \rightarrow max$$

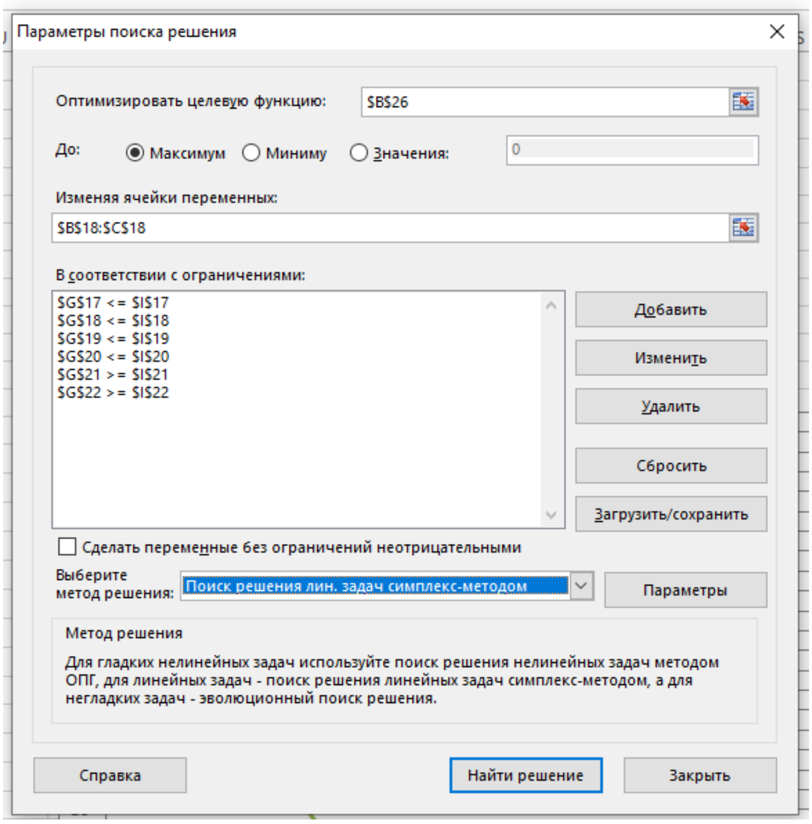
То в ячейке целевой функции применим формулу:

=СУММПРОИЗВ(B18:C18;B21:C21)

Целевая функция
0

Поскольку ячейки оптимального решения не содержат данных, значение целевой функции пока 0.

Выбираем команду «Поиск решения» и в появившееся диалоговое окно вводим данные.



Получаем результат вычислений задачи:

x1	x2
8	6

a1	a2
546	736

Целевая функция
8784

Условия			
5*x1+8*x2	88	<=	88
4*x1+6*x2	68	<=	72
3*x1+x2	30	<=	30
x2	6	<=	6
x1	8	>=	0
x2	6	>=	0

Результат решения задачи, полученный с помощью Excel-таблиц:

$$z = 8784$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 6$$

6. Экономическая интерпретация полученных результатов.

По результатам, полученными различными методами решения задачи, т.е. с помощью графического метода, симплекс-метода и Excel-таблиц, можно определить, что оптимальное число скорых и пассажирских поездов, из условий максимального числа перевозимых пассажиров, будет равно 8 скорым поездам и 6 пассажирским поездам, что и требовалось найти по условию задачи. С определенными условиями выявлено, что оптимальным решением будет 88 плацкартных, 68 купейных и 30 мягких вагонов. Все условия соблюдены со значением целевой функции – 8784.