Практическое занятие - 5

Решение линейного однородного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейное однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y'' + py' + qy = 0$.

Решение ищется в виде показательной функции $y = e^{kx}$. После подстановки его в ДУ и сокращения на экспоненциальный множитель получаем ***характеристическое алгебраическое уравнение***

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Квадратное уравнение имеет два корня, определяющие виды решения.

1. Корни характеристического уравнения действительные и разные $k_1 \neq k_2$**,** тогда общее решение ищется в форме $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Покажем, что решения $y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$ линейно независимы, т.е. определитель Вронского не нулевой ($W \neq 0$).

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) e^{(k_1 + k_2)x} \neq 0$$

Пример 1. Найти общее решение ДУ: $y'' - 12y' + 7y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 12k + 7 = 0$ и корни $k_1 = 4, \quad k_2 = 3.$ Общее решение определяется следующим образом

$$y = C_1 e^{4^x} + C_2 e^{3x}$$. Ответ: $y = C_1 e^{4^x} + C_2 e^{3x}$.

Пример 2. Найти общее решение ДУ: $y'' - y' - 12y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - k - 12 = 0$ и корни $k_1 = 4, \quad k_2 = -3.$ Общее решение определяется следующим образом

$$y = C_1 e^{4^x} + C_2 e^{-3x}$$. Ответ: $y = C_1 e^{4^x} + C_2 e^{-3x}$

Пример 3. Найти решение задачи Коши ДУ:
$y'' - 2y' - 3y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 2$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k - 3 = 0$ и имеет корни $k_1 = -1, \quad k_2 = 3.$ Общее решение определяется следующим образом $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$, $y' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x}$. Частное решение задачи Коши определяется из системы с начальными условиями $y(0) = 1, \; y'(0) = 2$, $\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 2 = -C_1 + 3C_2 \end{cases}$. Решая систему линейных уравнений, получаем значения произвольных постоянных $C_1=\frac{1}{4}; C_2=\frac{3}{4}$. Решение задачи Коши имеет вид: $y=\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^{3x}$.

Ответ: $y=\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^{3x}$

2. Корни действительные и одинаковые $k_1=k_2=k$**.** Тогда общее решение имеет вид

$$y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}.$$

Покажем, что два данных решения линейно независимы. Действительно,

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx}(1+kx) \end{vmatrix}=e^{2kx}\neq 0.$$

Пример 1. Найти общее решение однородного ДУ: $y''-10y'+25y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2-10k+25=0$ и кратные корни $k_1=k_2=5.$ Общее решение определяется следующим образом $y=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}$. Ответ: $y=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}$

Пример 2. Найти общее решение однородного ДУ: $y''-8y'+16y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2-8k+16=0$ и кратные корни $k_1=k_2=4.$ Общее решение определяется следующим образом $y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}$. Ответ: $y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}$

Пример 3. Решить задачу Коши $y''-2y'+y=0, \quad y(0)=1, y'(0)=-1.$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет кратные корни $k=1$. Общее решение имеет вид

$y=(C_1+C_2x)e^x, y'=(C_1+C_2)e^x+C_2xe^x$. Частное решение задачи Коши определяем из начальных условий $y(0)=1, y'(0)=-1$ $\begin{cases} C_1=1 \\ C_2+C_1=-1 \end{cases}$. Решая систему линейных уравнений, получаем значения произвольных постоянных $C_1=1; C_2=-2$. Решение задачи Коши имеет вид: $y=(1-2x)e^x$

Ответ: $y=(1-2x)e^x$.

3. Корни комплексно сопряжены $k_1=\alpha-i\beta, k_2=\alpha+i\beta$**,** тогда решение имеет стандартный вид

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x),$$

где коэффициенты C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Пример 1. Решить однородное ДУ $y''-2y'+10y=0.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k + 10 = 0$ и комплексные сопряженные корни $k_1 = 1 - i3, k_2 = 1 + i3$. Действительная часть комплексного числа α = 1, мнимая часть β = 3, тогда общее решение

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Ответ: $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$

Пример 2. Решить однородное ДУ $y'' + 6y' + 25y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 6k + 25 = 0$ и комплексные сопряженные корни $k_1 = -3 - i4, k_2 = -3 + i4.$ Действительная часть комплексного числа α = -3, мнимая часть β = 4, тогда общее решение

$$y = e^{-3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Ответ: $y = e^{-3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$

Пример 3. Решить однородное ДУ $y'' + 2y' + 5y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 2k + 5 = 0$ и

1. комплексные сопряженные корни $k_1 = -1 - i2, k_2 = -1 + i2$. Действительная часть комплексного числа α = - 1, мнимая часть β = 2, тогда общее решение

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Ответ: $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$