Функции нескольких переменных

Экстремум функции двух переменных

Если в области D задана непрерывная функция двух переменных

Z = f(x,y) и в точке $M_0(x_{0,}y_0)$ є D функция имеет локальный экстремум(максимум или минимум), то в этой точке либо обе ее частные производные равны нулю $\boldsymbol{f'_x(x_0, y_0) = 0}$; $\mathbf{f'_y(x_0, y_0) = 0}$ ($M_0(x_{0,}y_0)$−стационарная точка), либо одна из них не существует($M_0(x_{0,}y_0)$−критическая точка).

Необходимые условия существования экстремума

Пример.1 Найти координаты стационарных точек заданной функции

$$\boldsymbol{z = x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y + 1}$$

Вычислим частные производные заданной функции:

$$z'_x = 2x - 4y,\ z'_y = -4x + 10y - 2.$$

В точке локального экстремума либо обе ее частные производные равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0$; $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ($M_0(x_{0,}y_0)$−стационарная точка), либо одна из них не существует($M_0(x_{0,}y_0)$−критическая точка).

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 10y - 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2y \\ -8y + 10y - 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Определили координаты одной стационарной точки M_0(2, 1).

Пример.2 Найти координаты стационарных точек заданной функции

$$\boldsymbol{z = -2x^2 + 16x - 3y^2 + 12y + 7}$$

Вычислим частные производные заданной функции:

$$z'_x = -4x + 16,\ z'_y = -6y + 1\,2.$$

В точке локального экстремума либо обе ее частные производные равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0$; $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ($M_0(x_{0,}y_0)$−стационарная точка), либо одна из них не существует($M_0(x_{0,}y_0)$−критическая точка).

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x + 16 = 0 \\ -6y + 1\,2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Определили координаты одной стационарной точки M_0(4, 2).

Достаточные условия существования экстремума

Пусть в окрестности критической точки $M_0(x_{0,}y_0)$ функция f(x,y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Введем обозначения: A = $f''_{xx}(x_0, y_0)$, B = $f''_{xy}(x_0,y_0)$, C = $f''_{yy}(x_0, y_0)$.

Рассмотрим выражение: D = AC - B^2.

Если D > 0, то в точке $M_0(x_{0,}y_0)$ функция f(x,y) имеет экстремум,

если A < 0, то максимум, если A > 0, то минимум.

Если D < 0, то в точке $M_0(x_{0,}y_0)$ функция f(x,y) не имеет экстремума.

Если D = 0, требуются дополнительные исследования.

Пример.1

Найти экстремум функции f(x, y) $= x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$.

Решение:

Найдем частные производные по x и y, чтобы вычислить координаты стационарной точки: f'_x= 2x + y - 3; f'_y = 2y + x – 6. Решим систему двух линейных уравнений: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 2y + x - 6 = 0 \end{cases}$

Получим координаты стационарной точки $M_0(0{,}3)$. Найдем частные производные второго порядка функции f(x,y): $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = 2$,
тогда в стационарной точке $M_0(0;3)$ параметры принимают значения: A = 2, B = 1, C = 2, D = 3 > 0, следовательно в точке $M_0(0{,}3\ )$ имеется экстремум и это минимум, т.к. A = 2 > 0. Вычислим минимальное значение функции: $f_0(0;3) = -9$.

Пример.2

Найти экстремум функции f(x, y) $= {}^1\!/_2\, xy + (47 - x - y)({}^x\!/_3 + {}^y\!/_4)$.

Решение:

Найдем частные производные по x и y, чтобы вычислить координаты стационарной точки: $f'_x = {}^y\!/_2 - \left({}^x\!/_3 + {}^y\!/_4\right) + {}^1\!/_3\,(47 - x - y)$;

$f'_y = {}^{x}/_{2} - \left({}^{x}/_{3} + {}^{y}/_{4}\right) + {}^{1}/_{4}\,(47 - x - y).$

Решим систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} {}^{x}/_{2} - \left({}^{x}/_{3} + {}^{y}/_{4}\right) + {}^{1}/_{4}\,(47 - x - y) = 0 \\ {}^{y}/_{2} - \left({}^{x}/_{3} + {}^{y}/_{4}\right) + {}^{1}/_{3}\,(47 - x - y) = 0 \end{cases}$$

Для упрощения вычислений удобно привести оба уравнения к общему знаменателю – 12. Система примет вид:

$$\begin{cases} y + 8x = 188 \\ x + 6y = 141 \end{cases}$$

Получим координаты стационарной точки $\mathrm{M}_0(21; 20)$. Найдем частные производные второго порядка функции f(x,y): $f''_{xx} = -{}^{2}/_{3}$, $f''_{xy} = -{}^{1}/_{12}$,

$f''_{yy} = -{}^{1}/_{2}$,

тогда в стационарной точке $\mathrm{M}_0(21; 20)$ параметры принимают значения: А = $-{}^{2}/_{3}$, В = $-{}^{1}/_{12}$, С = $-{}^{1}/_{2}$, D > 0, следовательно в точке $\mathrm{M}_0(21, 20)$ имеется экстремум и это максимум, т.к. А = $-{}^{2}/_{3} < 0$. Вычислим максимальное значение функции: $f_0(21; 20) = 282$.

Примеры для самостоятельной работы:

1. Найти экстремум функции f(x, y) = $x^3 + y^3 - 15xy$
2. Найти экстремум функции f(x, y) = $-x^2 + 5x - y^2 - 2y + xy$.