Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт информационных технологий и анализа данных

наименование института

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 6
по дисциплине:

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

«Теория игр»

Выполнил	АСУб-20-2		Арбакова А.В.
	шифр группы	подпись	Фамилия И.О.
Проверил			Китаева О.И.
	должность	подпись	Фамилия И.О.

Иркутск 2022 г.

1. Постановка задачи.

Цель работы: Приобретение навыков применения моделей теории игр, для решения экономических задач.

Задание: Построить математическую модель для задачи индивидуального варианта, выбрать способ решения, решить задачу и дать экономическую интерпретацию полученных результатов.

Задача (вариант 2):

Рассматривается конечная игра двух игроков A и B, в которой игрок A может применить одну из m стратегий

$$A_1, A_2, \dots, A_m,$$

а игрок B – одну из n стратегий

$$B_1, B_2, \dots, B_m,$$

Пусть каждая из сторон выбрала стратегии A_i и B_j соответственно (i и j фиксированы, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$). Через a_{ij} обозначен исход игры (сумму выигрыша игрока A или, что то же, сумму проигрыша игрока B). Известны значения a_{ij} при всех $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Эти значения записаны в виде матрицы, строки которой соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица представляет собой ***платёжную матрицу игры***. Игра задана платежной матрицей, представленной в индивидуальном задании.

Задание 2

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Математическая модель задачи.

Чтобы определить наилучшие стратегии игроков, мы предполагаем, что участники разумны и делают все, чтобы добиться наилучшего результата для себя.

Платежная матрица:

Задание 2

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Выбирая стратегию Ai игрок A должен рассчитывать, что игрок B должен ответить такой стратегией Bj, чтобы выигрыш первого игрока был бы минимальным, следовательно, найдем для каждой строки минимальное число:

$$\alpha_i = \min_{1 \le j \le n} \alpha_{ij}$$

Найдем минимальный элемент каждой строки и запишем с правой стороны матрицы:

8	4	7	4
6	5	9	5
7	7	8	7

Зная для каждой строки число αi игрок A должен выбрать ту стратегию, при котором его выигрыш будет максимальным, найдем максимальное среди минимальных:

$$\alpha = \max_{1 \le i \le m} \alpha_i = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} \alpha_{ij}$$

Найдем среди этих элементов максимальный:

8	4	7	4
6	5	9	5
7	7	8	7

Получаем нижнюю цену игры равную 7, где α – нижняя цена игры (минимальный гарантированный выигрыш, который может достичь игрок A)

Игрок B хочет уменьшить свой проигрыш, поэтому он оценивает максимальный проигрыш в связи с тем, какую стратегию I выберет игрок A:

$$\beta_j = \max_{1 \le i \le m} \alpha_{ij}$$

Теперь найдем максимальный элемент каждого столбца и запишем снизу матрицы:

8	4	7	4
6	5	9	5
7	7	8	7
8	7	9	

Зная для каждого столбца число βj игрок B должен выбрать ту стратегию, при котором его проигрыш будет минимальным, найдем минимальное среди максимальных:

$$\beta = \min_{1 \le j \le n} \beta_j = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} \alpha_{ij}$$

Найдем среди этих элементов максимальный:

8	4	7	4
6	5	9	5
7	7	8	7
8	7	9	

Получаем верхнюю цену игры равную 7, где β – верхняя цена игры (максимальный гарантированный проигрыш, который может достичь игрок B при любых стратегиях игрока A)

Если для чистых стратегий A_k и B_l выполняется равенство α = β, то пара чистых стратегий (A_k, B_l) являются седловой точкой матричной игры, а $\gamma = \alpha = \beta$ чистой ценой игры.

Так как нижняя цена игры совпадает с верхней ценой игры, то цена игры равна 7. Получаем, что цена игры равна значению седловой точки:

$$a_{32} = 7.$$

Цена игры равна 7. Данная матричная игра решена в чистых стратегиях.

Проверяем платежную матрицу на доминирующие строки и доминирующие столбцы.

С позиции проигрышей игрока B стратегия B2 доминирует над стратегией B1 (все элементы столбца 2 меньше элементов столбца 1), следовательно, исключаем 1-й столбец матрицы. Вероятность q1 = 0.

4	7
5	9
7	8

Стратегия A2 доминирует над стратегией A1 (все элементы строки 2 больше или равны значениям 1-ой строки), следовательно, исключаем 1-ую строку матрицы. Вероятность p1 = 0.

5	9
7	8

Игра 3x3 сведена к 2x2.

Найдем решение игры в смешанных стратегиях. Математические модели пары двойственных задач линейного программирования:

Для игрока A требуется найти минимум функции F(x) при ограничениях:

$$F(x) = x_1 + x_2 \to min$$

$$5 \times x_1 + 7 \times x_2 \geq 1$$

$$9 \times x_1 + 8 \times x_2 \geq 1$$

Для игрока B требуется найти максимум функции Z(y) при ограничениях:

$$Z(y) = y_1 + y_2 \to max$$

$$5 \times y_1 + 9 \times y_2 \leq 1$$

$$7 \times y_1 + 8 \times y_2 \leq 1$$

3. Результаты решения задачи.

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (переход к канонической форме).

$$5 \times y_1 + 9 \times y_2 + y_3 = 1$$

$$7 \times y_1 + 8 \times y_2 + y_4 = 1$$

Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план Y0 = (0,0,1,1):

Базис	B	Y1	Y2	Y3	Y4
Y3	1	5	9	1	0
Y4	1	7	8	0	1
Z(Y0)	0	-1	-1	0	0

Следуя алгоритму решения симплексной таблицы получим в итоге окончательный вариант симплекс-таблицы:

Базис	B	Y1	Y2	Y3	Y4
Y3	2/7	0	23/7	1	-5/7
Y1	1/7	1	8/7	0	1/7
Z(Y0)	1/7	0	1/7	0	1/7

Оптимальный план имеет вид:

$$y_1 = \frac{1}{7} \quad y_2 = 0$$

$$Z(Y) = 1 \times \frac{1}{7} + 1 \times 0 = \frac{1}{7}$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{7}$$

$$F(X) = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$$

Цена игры:

$$g = 1 \div \frac{1}{7} = 7$$

Вероятности стратегий:

$$p_1 = 7 \times 0 = 0$$

$$p_2 = 7 \times \frac{1}{7} = 1$$

$$q_1 = 7 \times \frac{1}{7} = 1$$

$$q_2 = 7 \times 0 = 0$$

Поскольку из исходной матрицы были удалены строки и столбцы, то полученные вероятности можно записать в виде – P(0,0,1) и Q(0,1,0)

Цена игры: V = 7

4. Результаты решения задачи с помощью Excel-таблиц.

	B1	B2	B3	
A1	8	4	7	4
A2	6	5	9	3
A3	7	7	8	

	B1	B2	B3			p*
A1	5	1	4	0	0,25	0
A2	3	2	6	0		0
A3	4	4	5	0,25		1
	1	1	1,25			
V	7					

	B1	B2	B3			q*
A1	5	1	4	0,25	0,25	0
A2	3	2	6	0,5		1
A3	4	4	5	1		0
	0	0,25	0			

По полученным результатам, найденные векторы вероятности равны:

P(0,0,1) и Q(0,1,0)

Цена игры: V = 7

5. Экономическая интерпретация полученных результатов.

По полученным результатам решения платежной матричной игры и предположению, что участники разумны и делают все, чтобы добиться наилучшего результата для себя, можно сделать вывод, что при следовании стратегии A3 победа игрока A будет составлять 100%, не зависимо от реакции игрока B, в ином случае при допущении ошибки игроком A, игроку B следует придерживаться стратегии B2. Средний выигрыш игрока A составляет 7.