Первое практическое занятие по дифференциальным уравнениям (ДУ)

1.Практическое занятие по дифференциальным уравнениям первого порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x,

искомую функцию $y(x)$

и ее производную $y'(x)$:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение разрешено относительно производной, оно примет вид

$$y' = f(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

1.1 Общее решение дифференциального уравнения вида $y' = f(x)$

Начнем с решения простейшего ДУ: $y' = f(x)$, когда правая часть уравнения не зависит от функции y. Очевидно, что решение этого ДУ сводится к отысканию неопределенного интеграла, который, как известно, определен с точностью до постоянной C:

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Видно, что решение любого ДУ первого порядка сводится к однократному интегрированию, поэтому ***общим решением*** ДУ будет функция вида $y = \varphi(x, C)$, где C – произвольная постоянная. Геометрической иллюстрацией общего решения является семейство интегральных кривых.

Задание 1

Решить дифференциальные уравнения первого порядка вида $y' = f(x)$***:***

1. $y' = \frac{e^x}{e^{2x}+9}$;

Решение:

$$y = \int \frac{e^x}{e^{2x}+9}dx = \int \frac{e^x}{\left(e^x\right)^2 + 3^2}dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{3} + c$$

Ответ: общее решение ДУ имеет вид: $\boldsymbol{y} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{3} + c$

2. $y' = \frac{e^x}{e^x+7}$;

Решение:

$$y = \int \frac{e^x}{e^x+7}dx = \ln(e^x + 7) + c$$

Ответ: общее решение ДУ имеет вид: $y = \ln(e^x + 7) + c$

3. $y' = \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}$

Решение:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx = \int \operatorname{tg}^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx = \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt. \end{array}\right\} = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + c = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + c$$

Ответ: общее решение ДУ имеет вид: $y = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + c\frac{dy}{dx}$

1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Отметим, что это основной вид ДУ, так как другие виды приводятся к нему. Дано ДУ $y' = f_1(x)\cdot f_2(y)$, где $f_2(y) \neq 0$ и непрерывна по переменной y в интервале (c,d), а $f_1(x)$ непрерывна по x в интервале (a,b). Преобразуем ДУ по свойству пропорции к виду с разделенными переменными (в левой части уравнения все сомножители зависят только от *y*,а в правой – только от *x)*

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$, и его

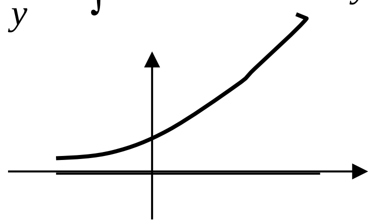
можно непосредственно интегрировать $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$.

Отметим, что $f_2(y) = 0$ тоже является решением данного типа ДУ, поэтому необходимо не потерять это решение. Заметим, что дифференциалы переменных не должны быть в знаменателях выражений, так как ДУ приводится к интегральному виду.

Пример 1. Найти общее решение ДУ $y' = 5yx^2$.

Решение. $\frac{dy}{dx} = 5yx^2 \Rightarrow \frac{dy}{y} = 5x^2dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = 5\int x^2dx + \ln C \Rightarrow \ln y = \frac{5}{3}x^3 + \ln C$.

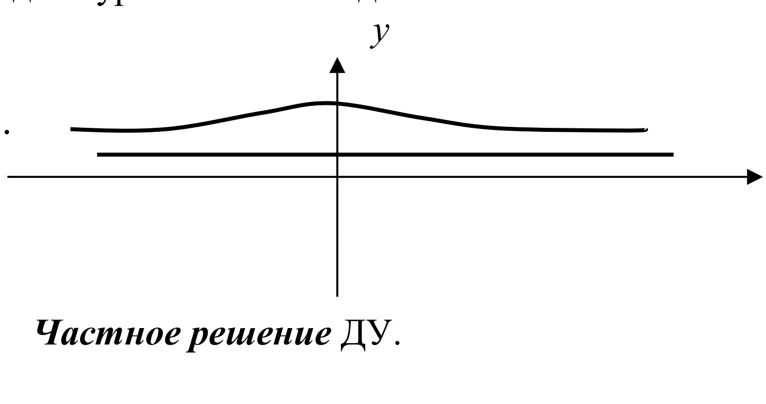
Ответ: $\begin{cases} y = Ce^{\frac{5}{3}x^3} \\ y = 0 \end{cases}$



Пример 2. Найти общее решение $x^2(y^2-4)dx + ydy = 0$.

Решение. Переменные разделяются, каждая к своему дифференциалу $\frac{ydy}{y^2-4} = -xdx$. Видно, что y = - 2 и y = 2 тоже являются решениями ДУ, поскольку обращают исходное уравнение в тождество.

Ответ: $\begin{cases} y = \pm\sqrt{4 + Ce^{-x^2}} \\ y = \pm 2 \end{cases}$.



Частное решение ДУ.

Частное решение ДУ получаем, если заданы начальные условия в виде пары чисел (x_0,y_0) таким образом, что

$$y\big|_{x_0} = y_0, \quad (y(x_0) = y_0).$$

В отличие от общего решения, частное решение - единственное и геометрически представляет интегральную кривую, проходящую через точку (x_0,y_0). Решение ДУ с заданными начальными условиями называется решением задачи Коши.

Пример 1. Решить ДУс разделяющимися переменными $y' = -\dfrac{x}{y}$ при заданном начальном условии $y(3) = 4$.

Решение. Представим производную в форме Лейбница $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и разделим переменные: $ydy = -xdx$. Причем $y \neq 0$. Далее интегрируем обе части уравнения и получаем общий интеграл: $x^2 + y^2 = C$. Частное решение получается, когда из начального условия определим $C = 3^2 + 4^2 = 25$.

Пример 2. Найти частное решение ДУ с разделяющимися переменными и заданным начальным условием $yy' + xe^y = 0, \quad y(1) = 0.$.

Решение. Представим производную в форме Лейбница $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и разделим переменные $e^{-y} ydy = -xdx \Rightarrow -e^{-y} y - e^{-y} = -\dfrac{x^2}{2} + C$. Интеграл от левой части ДУ вычисляем по частям. При $x = 1$ и $y = 0$ получаем
-1 = -1/2 + C. Отсюда следует, что C = -1/2.

Ответ: $e^{-y}(1+y) = \dfrac{x^2+1}{2}$.

1.3 Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ есть ***однородная функция*** своих переменных измерения порядка **n**, если выполняется $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

Пример. Функция 2-ого порядка $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$ - *однородная функция* своих переменных измерения порядка 2.

Дифференциальное уравнение $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где правая часть уравнения может быть представлена как функция отношения аргументов, называется *однородным ДУ нулевого порядка*.

Для решения таких ДУ рекомендуется ввести вспомогательную переменную $u = \dfrac{y}{x}$, тогда $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$, после чего данное уравнение сводится к ДУ с разделяющими переменными :

$$u'x+u=f(u)\Rightarrow \frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Пример 1. Найти общее решение ДУ $(x^2+2xy)dx+xydy=0$

Решение. Поделим все уравнение на x^2dx. Видно, что это однородное уравнение, поэтому делаем замену $u=\dfrac{y}{x}$, $y=u\cdot x$, $y'=u'\cdot x+u$. Получаем ДУ с разделяющимися переменными:

$$(1+2\frac{y}{x})+\frac{y}{x}y'=0\Rightarrow\left\{\frac{y}{x}=u\right\}\Rightarrow(1+2u)+u(u'x+u)=0\Rightarrow$$

$$1+2u+u^2=-uxu'\Rightarrow\frac{udu}{u^2+2u+1}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{(u+1-1)du}{(u+1)^2}\Rightarrow$$

$$\ln(u+1)+\frac{1}{u+1}=-\ln x+\ln C.$$

Возвращаемся к старой переменной y и получаем общее решение в виде

$$\ln\left(\frac{y+x}{x}\right)+\frac{x}{y+x}=\ln\left(\frac{C}{x}\right).$$

Пример 2. Найти частное решение ДУ $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$, при заданном начальном условии: $y(1)=\sqrt{3}$.

Решение. Поделим числитель и знаменатель дроби в правой части ДУ на переменную x делаем замену $u=\dfrac{y}{x}$, $y=u\cdot x$, $y'=u'\cdot x+u$. Получаем ДУ с разделяющимися переменными:

$$xu'+u=\frac{1+u}{1-u}\Rightarrow xu'=\frac{1+u^2}{1-u}\Rightarrow\frac{(1-u)du}{1+u^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)=\ln x+\ln C.$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=\ln xC.$$

При заданном начальном условии $x=1, y=\sqrt{3}$, получаем $\ln C=\dfrac{\pi}{3}-\ln 2$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{\pi}{3}-\ln 2$.