Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт информационных технологий и анализа данных
наименование института

Отделение прикладной математики и информатики
наименование отделения

Отчет по дисциплине
«Вычислительная математика»
по теме:
«Сплайн-интерполяции функций»

Выполнил студент группы	АСУб-20-2		Арбакова А.В.
	Шифр группы	Подпись	И.О. Фамилия
Проверил преподаватель			И.А. Огнёв
		Подпись	И.О. Фамилия

Отчет по НИР защищен с оценкой ________________________________

Иркутск 2021 г.

ЗАДАНИЕ

Вариант: 6

Условия задания:

> Построить кубическую сплайн-функцию для функции $y=f(x)$, заданной таблично на отрезке $[a;b]$.

6	1	2	4	7	x
	-3	-7	2	8	$f(x)$

Алгоритм метода вычислений:

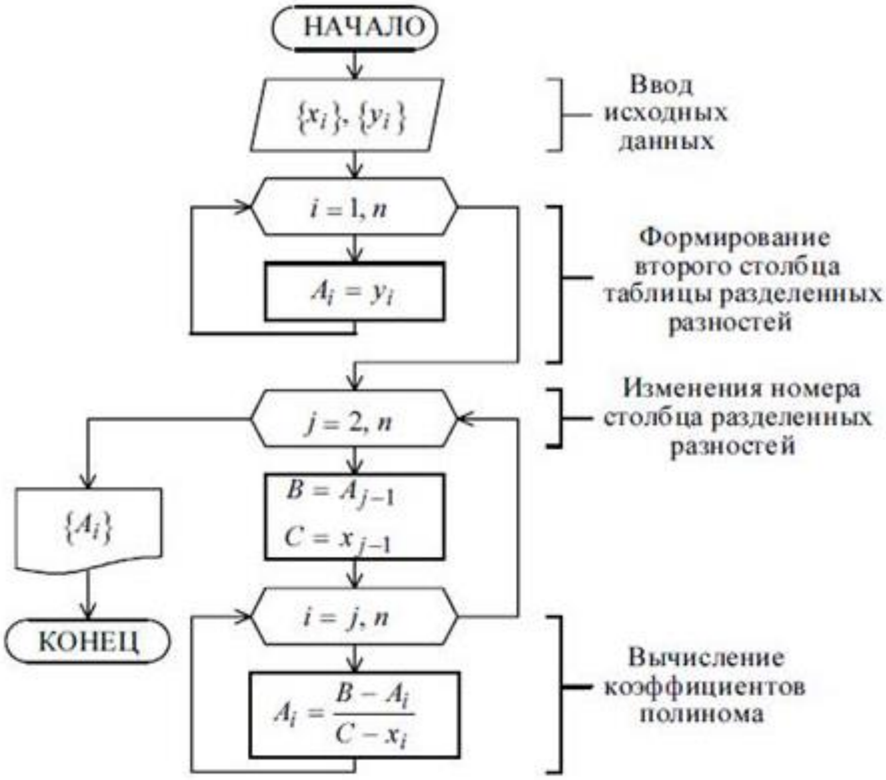

Рисунок 1 – Интерполяция функции кубическими сплайнами.

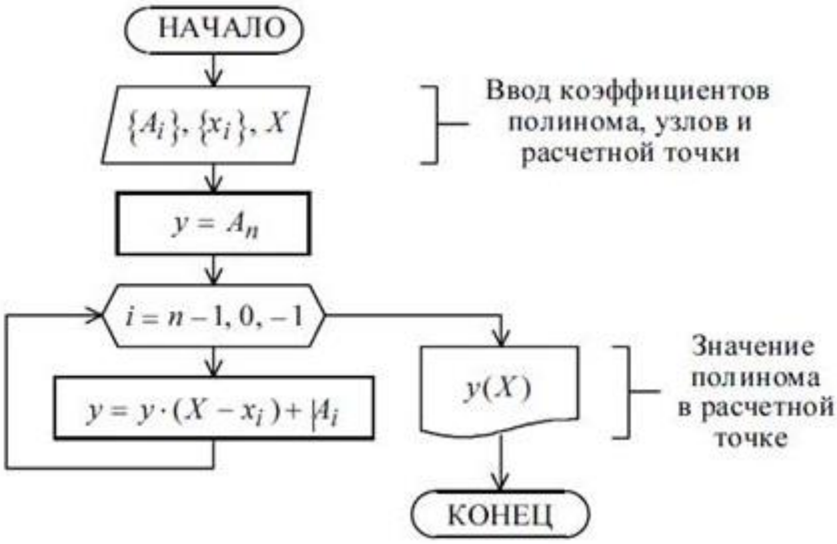

Рисунок 2 – Алгоритм вычислений коэффициентов полинома по схеме Горнера.

Программа:

Интерполяция функции кубическими сплайнами

Аппроксимация функций заключается в приближенной замене заданной функции $f(x)$ некоторой функцией $f(x)$ так, чтобы отклонение функции $f(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $f(x)$ при этом называется аппроксимирующей. Типичной задачей аппроксимации функций является задача интерполяции. Необходимость интерполяции функций в основном связана с двумя причинами:

1. Функция $f(x)$ имеет сложное аналитическое описание, вызывающее определенные трудности при его использовании
2. Аналитическое описание функции $f(x)$ неизвестно, т. е. $f(x)$ задана таблично. При этом необходимо иметь аналитическое описание, приближенно представляющее $f(x)$

Кубическим интерполяционным сплайном**,** соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам x_i, называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. На каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., N$ функция $S(x)$ является полиномом третьей степени,
2. Функция $S(x)$, а также ее первая и вторая производные непрерывны на отрезке $[a, b]$,

3. $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., N$.

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., N$ будем искать функцию $S(x) = S_i(x)$ в виде полинома третьей степени:

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x -_1)^3$

где a_i, b_i, c_i, d_i - коэффициенты, подлежащие определению на всех n элементарных отрезках. Чтобы система алгебраических уравнений имела решение, нужно, чтобы число уравнений точно равнялось числу неизвестных. Поэтому мы должны получить $4n$ уравнения.

Первые $2n$ уравнения мы получим из условия, что график функции $S(x)$ должен проходить через заданные точки, т. е. $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $S_i(x_i) = y_i$.

Эти условия можно записать в виде:

$S_i(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}$,

$S_i(x_i) = a_i + b_ih_i + c_ih + d_ih = y_i$,

где $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Следующие $2n - 2$ уравнения вытекают из условия непрерывности первых и вторых производных в узлах интерполяции, т. е. условия гладкости кривой во всех точках.

$S'_{i+1}(x_i) = S'_i(x_i)$, $i = 1, ..., n - 1,''_{i+1}(x_i) = S''_i(x_i)$, $i = 1, ..., n - 1$,

$S'_i(x) = b_i + 2\,c_i\,(x - x_{i-1}) + 3\,d_i\,(x - x_{i-1})$,

$S'_{i+1}(x) = b_{i+1} + 2\,c_{i+1}\,(x - x_i) + 3\,d_{i+1}\,(x - x_i)$.

Приравнивая в каждом внутреннем узле $x = x_i$ значения этих производных, вычисленные в левом и правом от узла интервалах, получаем (с учетом $h_i = x_i - x_{i-1}$):

$b_{i+1} = b_i + 2\,h_i\,c_i + 3h\,d_i$, $i = 1, ..., n - 1,''_i(x) = 2\,c_i + 6\,d_i\,(x - x_{i-1}),''_{i+1}(x) = 2\,c_{i+1} + 6\,d_{i+1}\,(x - x_i)$, если $x = x_i$

$c_{i+1} = c_i + 3\,h_i\,d_i$, $i = 1,2, ..., n - 1$.

На данном этапе мы имеем $4n$ неизвестных и $4n - 2$ уравнений. Следовательно, необходимо найти еще два уравнения.

При свободном закреплении концов можно приравнять к нулю кривизну линии в этих точках. Из условий нулевой кривизны на концах следуют равенства нулю вторых производных в этих точках:

$S_1''(x_0) = 0$ и $S_n''(x_n) = 0$,

$c_i = 0$ и $2\,c_n + 6\,d_n\,h_n = 0$.

Уравнения составляют систему линейных алгебраических уравнений для определения $4n$ коэффициентов: a_i , b_i , c_i , d_i ($i = 1, 2, . . ., n$).

Эту систему можно привести к более удобному виду. Из условия сразу можно найти все коэффициенты a_i.

Далее получим:

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i} d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$i = 1, 2, ..., n - 1$,

Подставляя, получим: $b_i = -(c_{i+1} + 2c_i)$, $i = 1,2, ..., n - 1,_n = -(h_n\,c_n)$

Исключаем из уравнения коэффициенты b_i и d_i . Окончательно получим следующую систему уравнений только для коэффициентов c_i:

$c_1 = 0$ и $c_{n+1} = 0$:$_{i-1}\,c_{i-1} + 2\,(h_{i-1} + h_i)\,c_i + h_i\,c_{i+1} = 3$,

$i = 2, 3, ..., n$.

По найденным коэффициентам c_i легко вычислить d_i ,b_i.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	1	2	4	7
f(x)	-3	-7	2	8
	y_0	y_1	y_2	y_3

Вариант 6
Арбакова АВ АСУб20-2

h_1	h_2	h_3
1	2	3
g_1	g_2	g_3
-4	9	6

a_1	a_2	a_3	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	k
1	0	0	0	0	1	0	0	-4
0	8	0	4	0	0	2	0	9
0	0	27	0	9	0	0	3	6
3	0	0	0	0	1	-1	0	0
0	12	0	4	0	0	1	-1	0
3	0	0	-1	0	0	0	0	0
0	6	0	1	-1	0	0	0	0
0	0	9	0	1	0	0	0	0

Рисунок 3 – Параметры для составления системы.

$$\begin{cases} a_1 {h_1}^3 + c_1 h_1 = g_1, \\ a_2 {h_2}^3 + b_2 {h_2}^2 + c_2 h_2 = g_2, \\ a_3 {h_3}^3 + b_3 {h_3}^2 + c_3 h_3 = g_3, \\ 3a_1 {h_1}^2 + c_1 - c_2 = 0, \\ 3a_2 {h_2}^2 + 2b_2 h_2 + c_2 - c_3 = 0, \\ 3a_1 h_1 - b_2 = 0, \\ 3a_2 h_2 + b_2 - b_3 = 0, \\ 3a_3 h_3 + b_3 = 0. \end{cases}$$

Рисунок 4 – Система уравнений для решения кубическими сплайн-интерполяциями.

	a	b	c	d
S_1	1,607143	0	-5,60714	-3
S_2	-1,08929	4,821429	-0,78571	-7
S_3	0,190476	-1,71429	5,428571	2

Рисунок 5 – Значения параметров.

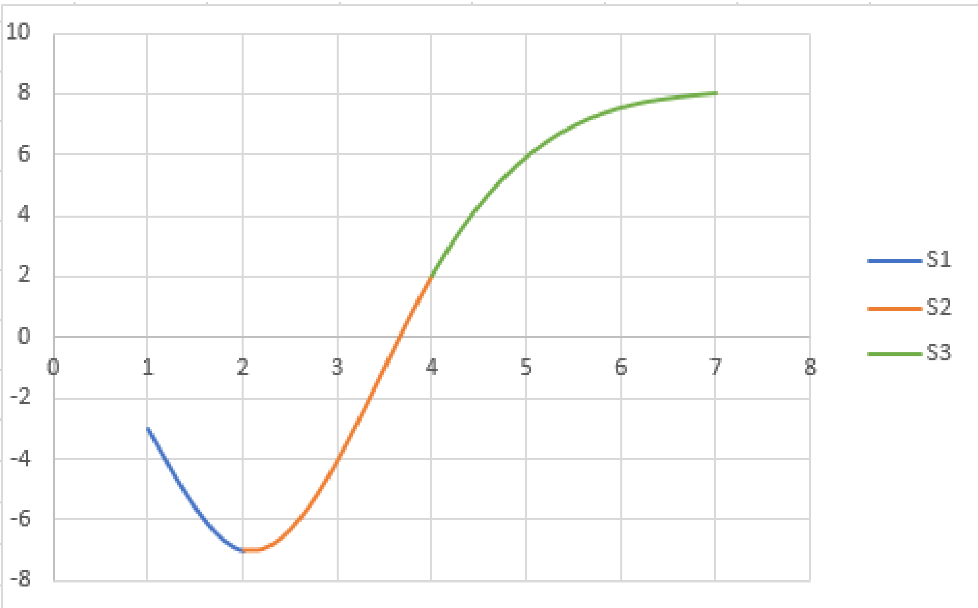

Рисунок 6 – График кубической сплайн-интерполяции.

Многочлен Лагранжа									
x*=	1,25	i=1		i=2		i=3		i=4	
x	y	x*-xj	xi-xj	x*-xj	xi-xj	x*-xj	xi-xj	x*-xj	xi-xj
1	-3			0,25	1	0,25	3	0,25	6
2	-7	-0,75	-1			-0,75	2	-0,75	5
4	2	-2,75	-3	-2,75	-2			-2,75	3
7	8	-5,75	-6	-5,75	-5	-5,75	-3		
		-11,8594	-18	3,953125	10	1,078125	-18	0,515625	90
		A1=	0,658854	A2=	0,395313	A3=	-0,0599	A4=	0,005729
		P(x)=	-4,81771						
		P(x)=	-4,81771						

$$P(x) = (-3)\left(\frac{(1{,}25-2)(1{,}25-4)(1{,}25-7)}{(1-2)(1-4)(1-7)}\right) + (-7)\left(\frac{(1{,}25-1)(1{,}25-4)\ (1{,}25-7)}{(2-1)(2-4)(2-7)}\right) + 2\left(\frac{(1{,}25-1)(1{,}25-2)(1{,}25-7)}{(4-1)(4-2)(4-7)}\right) + 8\left(\frac{(1{,}25-1)(1{,}25-2)(1{,}25-4)}{(7-1)(7-2)(7-4)}\right)$$

Рисунок 7 – Многочлен Лагранжа.

Многочлен Ньютона			
y	dy	d2y	d3y
-3	-4	13	-16
-7	9	-3	
2	6		
8			
1-ый многочлен		2-ой многочлен	
q=	0,25	q=	-5,75
Pn(x)=	-4,81771	Pn(x)=	-4,81771

Рисунок 8 – Многочлен Ньютона.

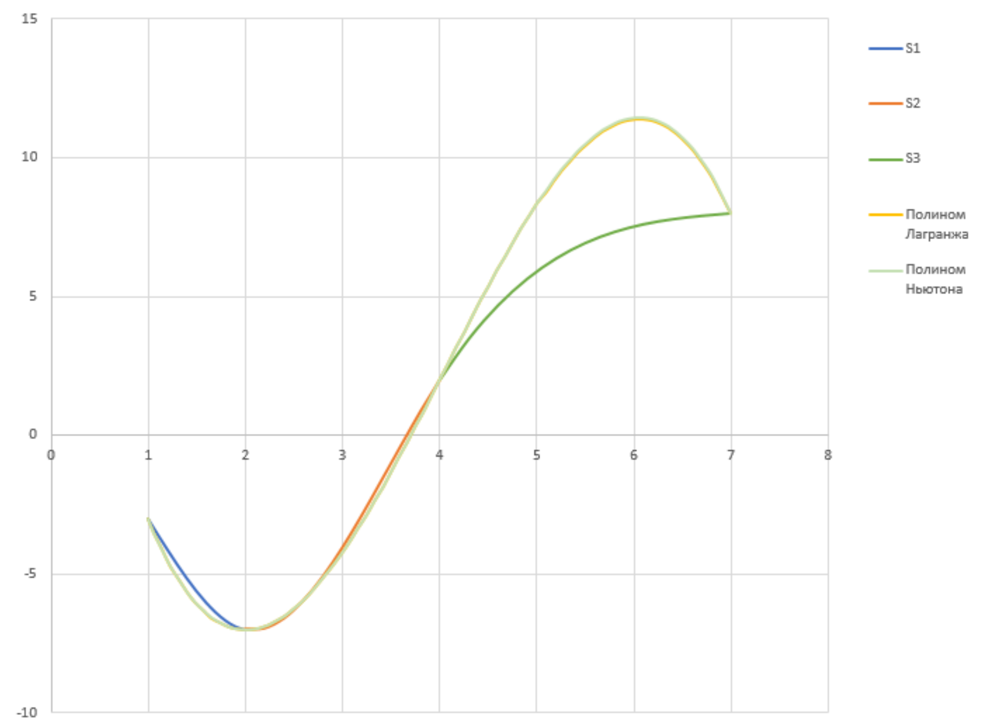

Рисунок 9 – Графики многочленов Лагранжа и Ньютона на одном графике со сплайнами.

Вывод:

В ходе данной работы был реализовал алгоритм вычисления интерполяции функций кубическими сплайнами в табличном редакторе Excel, также с последующим вычислением и построением полиномов Лагранжа и Ньютона, сравнимые со сплайнами.

За достоинства сплайн-интерполяции стоит счесть повышенную скорость обработки вычислительного алгоритма. При интерполяции параллельно обрабатываются данные по некоторому малому количеству точек измерений, которые в свою очередь принадлежат к фрагменту, который обрабатывается в данный момент времени.