Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт информационных технологий и анализа данных

Допускаю к защите ____________

Руководитель ____________

И.О.Фамилия

Решение оптимизационных задач методами исследования операций

наименование темы

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовому проекту (работе) по дисциплине

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

1.002.00.00 – ПЗ

обозначение документа

Выполнила студентка	АСУб-20-2		Арбакова А.В.
	Шифр группы	Подпись	И.О.Фамилия

Нормоконтроль		Китаева О.И.
	Подпись	И.О.Фамилия

Курсовой проект (работа) защищен(а) с оценкой ____________

Иркутск 2022 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАНИЕ

НА КУРСОВОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ (КУРСОВУЮ РАБОТУ)

По курсу ***Исследование операций***

Студенту ***Арбаковой Анастасии Вячеславовне***

Тема работы (проекта) ***Решение оптимизационных задач методом исследований операций***

Исходные данные ***Задача 1: 100 строительных площадок для 5 типовых проектов; параллельная закладка 10 фундаментов и 15 зданий***

Задача 2: станции А, Б и В; 100, 150 и 50 вагонов; 4 пункта с зерном, которым требуется 75, 80, 60 и 85 вагонов

Рекомендуемая литература:

Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология: учебное пособие, 2010. - 191 с.

Таха Х. А. Введение в исследование операций [Электронный ресурс], 2001 г. 911 с.

Графическая часть на ______________ листах.

Дата выдачи задания “___14___” __________февраля____________________ 2022 г.

Задание получил _____________ ***Арбакова А.В.***

подпись И.О.Фамилия

Дата представления проекта (работы) руководителю “__27__” ____мая___ 2022г.

Руководитель курсового проектирования (курсовой работы)_________ ***Китаева О.И.***

Подпись И.О.Фамилия

Содержание

Введение

Огромную роль в современном технологичном мире играет понятие оптимизации, ведь это процесс выбора наилучшего варианта или процесс приведения системы в оптимальное состояние, который состоит из нахождения всех максимизирующих и минимизирующих элементов.

Оптимальное состояние или наилучший вариант достигаются с помощью различных методов оптимизации, представляющие собой методы поиска экстремума функции (критериев оптимальности) при наличии ограничений или без ограничений.

Оптимизационные задачи решают многие аспекты экономических и социальных проблем, таких как управление запасами, трудовыми ресурсами и транспортными потоками.

Цель: решить две задачи, согласно выданному варианту, используя изученные методы решения оптимизационных задач.

Основная часть

1. Задача 1 (вариант 2).

1.1. Формулировка задачи.

На рисунке 1 представлена формулировка задачи.

Задача 1

Для строительства домов на 100 строительных площадках выбраны 5 типовых проектов. Параллельно можно вести закладку 10 фундаментов и строительство 15 зданий. Составить план строительства, максимизирующий ввод жилой площади в течении года (300 рабочих дней), при условии, что домов второго типа будет построено не менее 10. Исходные данные задачи приведены в табл. 2.

Таблица 2

Вид работы	Длительность выполнения (дни) для типового проекта				
	1	2	3	4	5
Закладка фундамента	20	30	35	30	40
Остальные работы	40	20	60	35	25
Жилая площадь, кв.м	3000	2000	5000	4000	6000

Рисунок 1 – Формулировка задачи

1.2. Математическая модель задачи.

Обозначим переменные:

x_1 – количество домов 1 типа

x_2 – количество домов 2 типа

x_3 – количество домов 3 типа

x_4 – количество домов 4 типа

x_5 – количество домов 5 типа

По условию задачи должно быть построено 100 домов, это можно записать как:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$$

Одновременно можно вести закладку не более 10 фундаментов, поэтому временное количество рабочих дней будет ограничено 3000 рабочих дней.

$$300 \times 10 = 3000 \text{ раб. дней}$$

Для реализации плана по закладке фундаментов потребуется следующее количество рабочих дней:

$$20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5$$

Это количество рабочих дней не может превышать временное количество рабочих дней, т.е. не может превышать 3000 рабочих дней:

$$20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5 \leq 3000$$

А временное количество рабочих дней на строительство 15 зданий тогда составляет 4500 рабочих дней.

$$300 \times 15 = 4500 \text{ раб. дней}$$

Для реализации плана по строительству зданий потребуется следующее количество рабочих дней:

$$40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5$$

Это количество рабочих дней не может превышать временное количество рабочих дней, т.е. не может превышать 4500 рабочих дней:

$$40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5 \leq 4500$$

При условии, что домов 2 типа будет построено не менее 10:

$$x_2 \geq 10$$

Условия неотрицательности переменных:

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0$$

Целевая функция ввода жилой площади в течении года будет иметь вид:

$$F(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 \to \max$$

где жилая площадь измеряется в тыс. кв. м.

Таким образом, математическая модель данной задачи имеет следующий вид:

$$F(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 \to \max$$

$$20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5 \leq 3000$$

$$40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5 \leq 4500$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 10 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0$$

1.3. Выбор метода решения. Теоретические положения по решению задачи в соответствии с выбранным методом.

Для решения задачи был использован симплекс-метод с использованием симплексной таблицы.

Суть этого метода заключается в нахождении начального допустимого плана, и в последующем улучшении плана до достижения максимального (или минимального) значения целевой функции.

Под симплексным методом понимается последовательный переход от одного базисного нахождения системы решений к другому. Эта перестановка повторяется до тех пор, пока переменная величина цели не достигнет своего наибольшего или наименьшего значения. Такой подход является универсальным, его можно использовать для решения любой задачи последовательного программирования.

1.4. Практическое решение задачи.

$$F(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 \to \max$$

$$20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5 \le 3000$$

$$40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5 \le 4500$$

$$x_2 \ge 10$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \quad x_4 \ge 0 \quad x_5 \ge 0$$

Для построение первого опорного плана симплекс-методом приведем систему неравенств к системе уравнений, введя дополнительные базисные переменные x_6 x_7 x_8, тем самым приведем к канонической форме.

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5 + x_6 = 3000 \\ 40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5 + x_7 = 4500 \\ x_2 - x_8 = 10 \end{cases}$$

Так как количество базисных векторов должен быть 3, то добавляем искусственные переменные:

$$F(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 - Mx_9 \to \max$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5 + x_6 = 3000 \\ 40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5 + x_7 = 4500 \\ x_2 - x_8 + x_9 = 10 \end{cases}$$

Получаем начальную симплекс-таблицу (табл. 1):

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	B
X6	20	30	35	30	40	1	0	0	0	3000
X7	40	20	60	35	25	0	1	0	0	4500
X9	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	10
Δ	-3	-2	-5	-4	-6	0	0	0	0	0

Таблица 1

Данный опорный план не является оптимальным, так как в строке Δ имеются отрицательные элементы. Определяем, какой вектор выходит из базиса $\min\left(\frac{3000}{30};\frac{4500}{20};\frac{10}{1}\right) = 10$ соответствует строке X9(табл. 2).

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	B
X6	20	30	35	30	40	1	0	0	0	3000
X7	40	20	60	35	25	0	1	0	0	4500
X9	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	10
Δ	-3	-2	-5	-4	-6	0	0	0	0	0

Таблица 2

Введем в базис X2 (табл. 3).

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	B
X6	20	30	35	30	40	1	0	0	0	3000
X7	40	20	60	35	25	0	1	0	0	4500
X9	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	10
Δ	-3	-2	-5	-4	-6	0	0	0	0	0

Таблица 3

В качестве базисной переменной X9 берём X2.

Делим строку 3 на -1. Из строк 1, 2 вычитаем строку 3, умноженную на соответствующий элемент в столбце 2. Получаем таблицу (табл. 4):

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	B
X6	20	0	35	30	40	1	0	30	-30	2700
X7	40	0	60	35	25	0	1	20	-20	4300
X2	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	10
Δ	-3	0	-5	-4	-6	0	0	-2	2	20

Таблица 4

Полученный план не оптимален, потому что присутствуют отрицательные Δ.

Разрешающим столбцом является X5, потому что Δmin = -6. Далее найдем симплекс-отношения Q, путём деления коэффициентов B на соответствующие значения столбца 5 (табл. 5).

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	B	Q
X6	20	0	35	30	40	1	0	30	2700	$2700/40=\frac{135}{2}$
X7	40	0	60	35	25	0	1	20	4300	4300/25=172
X2	0	1	0	0	0	0	0	-1	10	-
Δ	-3	0	-5	-4	-6	0	0	-2	20	

Таблица 5

Так как Qmin=135/2 следует, что строка 1 будет разрешающей строкой.

Следовательно, разрешающий элемент равен 40 (табл. 6).

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	B	Q
X6	20	0	35	30	40	1	0	30	2700	2700/40=$\frac{135}{2}$
X7	40	0	60	35	25	0	1	20	4300	4300/25=172
X2	0	1	0	0	0	0	0	-1	10	-
Δ	-3	0	-5	-4	-6	0	0	-2	20	

Таблица 6

Делим строку 1 на 40. Из строк 2, 3 вычитаем строку 1, умноженную на соответствующий элемент в столбце 5. В качестве базисной переменной X6 берём X5 (табл. 7).

Базис	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	B	Q
X5	1/2	0	7/8	3/4	1	1/40	0	3/8	135/2	135/2
X7	55/2	0	305/8	65/4	0	-5/8	1	5/4	5225/2	172
X2	0	1	0	0	0	0	0	-1	10	-
Δ	0	0	1/4	1/2	0	3/20	0	5/2	425	

Таблица 7

Отрицательные Δ отсутствуют, следовательно, план оптимален.

Результат решения задачи, полученный методом симплекс-таблиц:

$$F(X) = 425$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 10$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 67{,}5$$

1.5. Решение задачи с помощью надстройки «Поиск решения» MS Excel.

На рабочем листе введем числовые данные задачи.

Обозначим переменные (рис. 2):

x_1 – количество домов 1 типа

x_2 – количество домов 2 типа

x_3 – количество домов 3 типа

x_4 – количество домов 4 типа

x_5 – количество домов 5 типа

x1	x2	x3	x4	x5

Рисунок 2 – Переменные задачи

Целевая функция ввода жилой площади в течении года имеет вид (рис. 3):

$$F(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 \rightarrow max$$

где жилая площадь измеряется в тыс. кв. м.

Целевая функция F(x)

Рисунок 3 – Целевая функция

Запишем коэффициенты целевой функции под переменными *x* (рис. 4).

x1	x2	x3	x4	x5
3	2	5	4	6

Рисунок 4 – Коэффициенты целевой функции

Введем ограничения, которые налагаются на переменные (рис. 5):

20x1+30x2+35x3+30x4+40x5	0	<=	3000
40x1+20x2+60x3+35x4+25x5	0	<=	4500
x2	0	>=	10
x1	0	>=	0
x3	0	>=	0
x4	0	>=	0
x5	0	>=	0

Рисунок 5 – Ограничения для переменных

Поскольку целевая функция:

$$F(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 \rightarrow max$$

То в ячейке целевой функции применим формулу =СУММПРОИЗВ(B3:F3;B5:F5) (рис. 6).

Рисунок 6 – Результат целевой функции после применении формулы

Поскольку ячейки оптимального решения не содержат данных, значение целевой функции пока 0.

Выбираем команду «Поиск решения» и в появившееся диалоговое окно вводим данные (рис. 7).

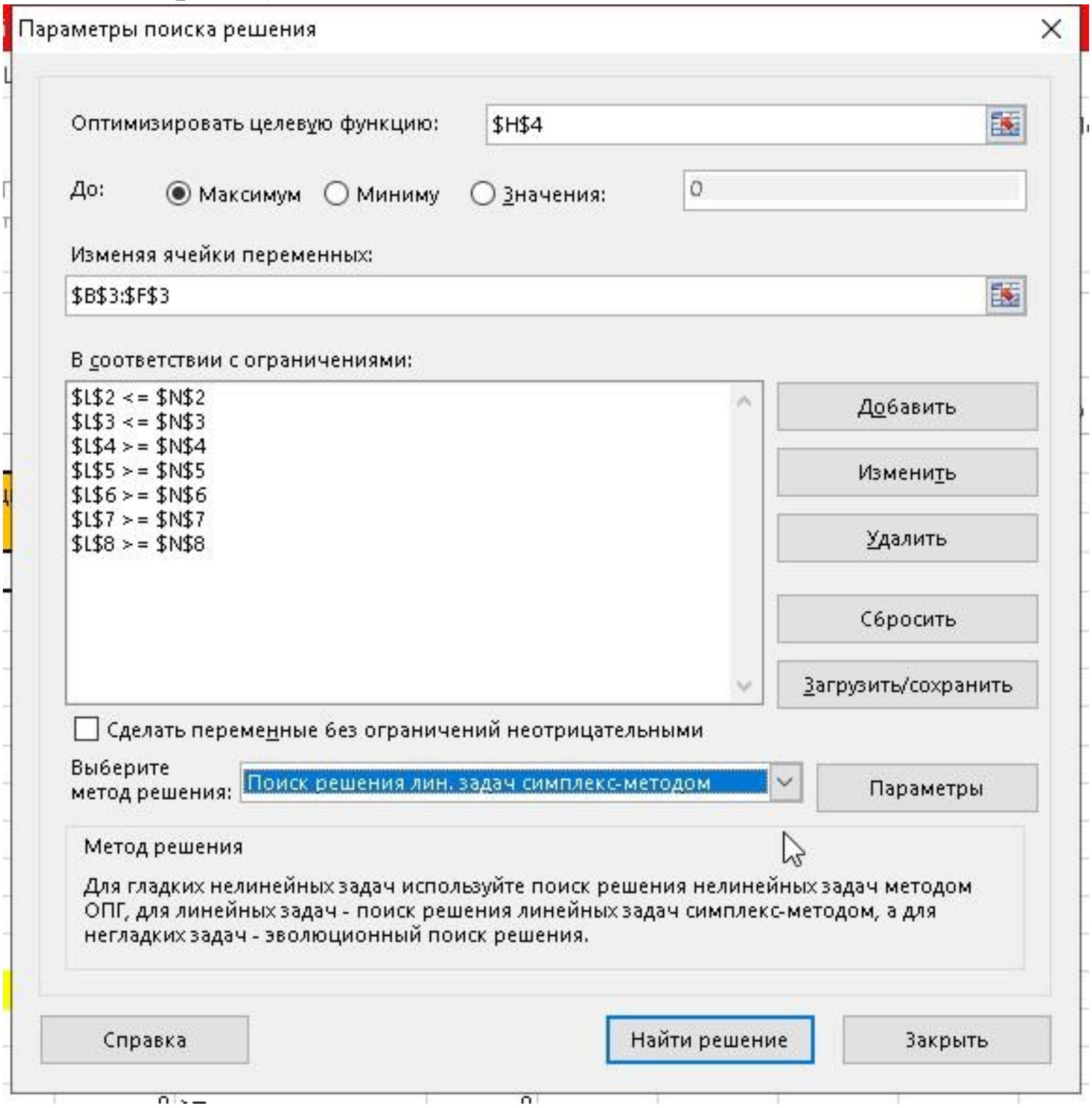


Рисунок 7 – «Поиск решения»

Получаем результат вычислений задачи (рис. 8.1 и 8.2):

x1	x2	x3	x4	x5
0	10	0	0	67,5
3	2	5	4	6

Целевая функция F(x)
425

Рисунок 8.1 – Результаты вычислений

20x1+30x2+35x3+30x4+40x5	3000	<=	3000
40x1+20x2+60x3+35x4+25x5	1887,5	<=	4500
x2	10	>=	10
x1	0	>=	0
x3	0	>=	0
x4	0	>=	0
x5	67,5	>=	0

Рисунок 8.2 – Результаты вычислений

Результат решения задачи, полученный с помощью Excel-таблиц:

$$F(X) = 425$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 10$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 67{,}5$$

1.6. Экономическая интерпретация полученных результатов.

По результатам, полученными при решении задачи с помощью симплекс-метода и Excel-таблицы, можно определить, что оптимальным решением, при условиях что имеется 300 рабочих дней и необходимо построить не менее 10 домов 2-го типа, будет построить именно 10 домов 2-го типа и 67 домов 5-го типа, а жилая площадь при этом составит 425 тыс. кв. м.

2. Задача 2 (вариант 2).

2.1. Формулировка задачи.

На рисунке 9 приставлена формулировка задачи.

Задача 2

В резерве железнодорожных станций А, Б и В находится соответственно 100, 150 и 50 порожних вагонов, пригодных для перевозки зерна. Зерно находится в четырех пунктах, которым требуется 75, 80, 60 и 85 вагонов соответственно. Найти вариант перегона вагонов со станции в пункты перевозка зерна, при котором общие затраты минимальны. В табл. 3 приведены затраты (в денежных единицах) на перегон вагонов из железнодорожных станций в пункты перевозки.

Таблица 3

Пункты перевозки	Железнодорожные станции		
	А	Б	В
Пункт 1	6	1	3
Пункт 2	7	2	10
Пункт 3	3	5	20
Пункт 4	5	6	1

Рисунок 9 – Формулировка задачи.

2.2. Математическая модель задачи.

Составим транспортную таблицу задачи (табл. 8):

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	6	7	3	5	100
A2	1	2	5	6	150
A3	3	10	20	1	50
Потребности	75	80	60	85	

Таблица 8

Вводим переменные задачи (матрицу перевозок):

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{24} \end{pmatrix}$$

Записываем матрицу стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

Целевая функция задачи равняется сумме произведений всех соответствующих элементов матриц C и X:

$$F(x) = 6 \times x_{11} + 7 \times x_{12} + 3 \times x_{13} + 5 \times x_{14} +$$

$$+ x_{21} + 2 \times x_{22} + 5 \times x_{23} + 6 \times x_{24} +$$

$$+ 3 \times x_{31} + 10 \times x_{32} + 20 \times x_{33} + x_{34} \to \min$$

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи:

$$\sum a = 150 + 100 + 50 = 300$$

$$\sum b = 75 + 80 + 60 + 85 = 300$$

Условие баланса соблюдается, потому что запасы равны потребностям. Следовательно, модель транспортной задачи является закрытой.

Составим систему ограничений задачи. Сумма всех перевозок из каждой строки должна равняться запасам:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50$$

Сумма всех перевозок из каждого столбца должна равняться потребностям:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85$$

Перевозки не могут быть отрицательными:

$$x_{11} \geq 0 \quad x_{12} \geq 0 \quad x_{13} \geq 0 \quad x_{14} \geq 0$$

$$x_{21} \geq 0 \quad x_{22} \geq 0 \quad x_{23} \geq 0 \quad x_{24} \geq 0$$

$$x_{31} \geq 0 \quad x_{32} \geq 0 \quad x_{33} \geq 0 \quad x_{34} \geq 0$$

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи записывается следующим образом:

$$F(x) = 6 \times x_{11} + 7 \times x_{12} + 3 \times x_{13} + 5 \times x_{14} +$$

$$+ x_{21} + 2 \times x_{22} + 5 \times x_{23} + 6 \times x_{24} +$$

$$+ 3 \times x_{31} + 10 \times x_{32} + 20 \times x_{33} + x_{34} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85 \end{cases}$$

$$x_{11} \geq 0 \quad x_{12} \geq 0 \quad x_{13} \geq 0 \quad x_{14} \geq 0$$

$$x_{21} \geq 0 \quad x_{22} \geq 0 \quad x_{23} \geq 0 \quad x_{24} \geq 0$$

$$x_{31} \geq 0 \quad x_{32} \geq 0 \quad x_{33} \geq 0 \quad x_{34} \geq 0$$

2.3. Выбор метода решения. Теоретические положения по решению задачи в соответствии с выбранным методом.

Для решения задачи был использован метод северо-западного угла, потому что он является наиболее простым методов построения начального опорного решения.

В данном методе запасы очередного по номеру поставщика используются для обеспечения запросов очередных по номеру потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла. Метод состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или один потребитель.

После в решении задачи был задействован метод потенциалов. Общий принцип определения оптимального плана транспортной задачи этим методом аналогичен принципу решения задачи линейного программирования симплексным методом, а именно: сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

2.4. Практическое решение задачи.

Построим первый опорный план транспортной задачи. План начинается заполняться с верхнего левого угла. Последовательность действий (табл. 9-15).

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	6 75	7	3	5	100- 75=25
A2	1 x	2	5	6	150
A3	3 x	10	20	1	50
Потребности	75-75=0	80	60	85	

Таблица 9

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	6 75	7 25	3 x	5 x	25-25=0
A2	1 x	2	5	6	150
A3	3 x	10	20	1	50
Потребности	0	80-25=55	60	85	

Таблица 10

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	6 75	7 25	3 x	5 x	0
A2	1 x	2 55	5	6	150- 55=95
A3	3 x	10 x	20	1	50
Потребности	0	55-55=0	60	85	

Таблица 11

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	6 75	7 25	3 x	5 x	0
A2	1 x	2 55	5 60	6	95-60=35
A3	3 x	10 x	20 x	1	50
Потребности	0	0	60-60=0	85	

Таблица 12

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	6 75	7 25	3 x	5 x	0
A2	1 x	2 55	5 60	6 35	35-35=0
A3	3 x	10 x	20 x	1	50
Потребности	0	0	0	85-35=50	

Таблица 13

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	6 75	7 25	3 x	5 x	0
A2	1 x	2 55	5 60	6 35	0
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	50-50=0
Потребности	0	0	0	50-50=0	

Таблица 14

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	6 75	7 25	3 x	5 x	0
A2	1 x	2 55	5 60	6 35	0
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	0
Потребности	0	0	0	0	

Таблица 15

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы вывезены, потребность удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Переходим к улучшению опорного плана методом потенциалов.

Сначала проверим оптимальность опорного плана, для этого найдем предварительные потенциалы u_i и v_j.

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

Полагаем, что $u_1 = 0$.

$u_1 + v_1 = 6 \;\rightarrow\; 0 + v_1 = 6 \;\rightarrow\; v_1 = 6$

$u_1 + v_2 = 7 \;\; \rightarrow \;\; 0 + v_2 = 7 \;\rightarrow\; v_2 = 7$

$u_2 + v_2 = 2 \;\; \rightarrow \;\; 7 + u_2 = 2 \;\rightarrow\; u_2 = -5$

$u_2 + v_3 = 5 \;\; \rightarrow \;\; -5 + v_3 = 5 \;\rightarrow\; v_3 = 10$

$u_2 + v_4 = 6 \;\; \rightarrow \;\; -5 + v_4 = 6 \;\rightarrow\; v_4 = 11$

$u_3 + v_4 = 1 \;\; \rightarrow \;\; 11 + u_3 = 1 \;\rightarrow\; u_3 = -10$

Введем полученные результаты в таблицу (табл. 16).

	B1	B2	B3	B4	Запасы	ui
A1	6 75	7 25	3 x	5 x	100	0
A2	1 x	2 55	5 60	6 35	150	-5
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	50	-10
Потребности	75	80	60	85		
vj	6	7	10	11		

Таблица 16

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых

$$u_i + v_j > c_{ij}$$

В клетке x_{13} $\quad 0 + 10 > 3 \quad \Delta_{13} = 0 + 10 - 3 = 7 > 0$

В клетке x_{14} $\quad 0 + 10 > 5 \quad \Delta_{14} = 0 + 11 - 5 = 6 > 0$

Максимальный из них max(7,6) = 7.

Выбираем максимальную оценку свободной клетки x_{13}: 3. Для этого в перспективную клетку x_{13} поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-» и «+» (табл. 17).

	B1	B2	B3	B4	Запасы	ui
A1	6 75	7 (-) 25	3 (+) x	5 x	100	0
A2	1 x	2 (+) 55	5 (-) 60	6 35	150	-5
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	50	-10
Потребности	75	80	60	85		
vj	6	7	10	11		

Таблица 17

Из грузов, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее:

$$y = \min(x_{12}) = 25$$

Прибавляем 25 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках, и вычитаем 25 из объемов грузов, стоящих в минусовых клетках.

В результате, получен новый опорный план (табл. 18).

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	6 75	7 x	3 25	5 x	100
A2	1 x	2 80	5 35	6 35	150
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	50
Потребности	75	80	60	85	

Таблица 18

Проверим оптимальность опорного плана, для этого еще раз найдем предварительные потенциалы u_i и v_j.

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

Полагаем, что $u_1 = 0$.

$u_1 + v_1 = 6 \ \rightarrow \ 0 + v_1 = 6 \rightarrow \ v_1 = 6$

$u_1 + v_3 = 3 \ \rightarrow \ 0 + v_3 = 3 \rightarrow \ v_3 = 3$

$u_2 + v_3 = 5 \ \rightarrow \ 3 + u_2 = 5 \rightarrow \ u_2 = 2$

$u_2 + v_2 = 2 \ \rightarrow \ 2 + v_2 = 2 \rightarrow \ v_2 = 0$

$u_2 + v_4 = 6 \ \rightarrow \ 2 + v_4 = 6 \rightarrow \ v_4 = 4$

$u_3 + v_4 = 1 \ \rightarrow \ 4 + u_3 = 1 \rightarrow \ u_3 = -3$

Введем полученные результаты в таблицу (табл. 19).

	B1	B2	B3	B4	Запасы	ui
A1	6 75	7 x	3 25	5 x	100	0
A2	1 x	2 80	5 35	6 35	150	2
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	50	-3
Потребности	75	80	60	85		
vj	6	0	3	4		

Таблица 19

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых

$$u_i + v_j > c_{ij}$$

В клетке x_{21} $2 + 6 > 1$ $\Delta_{21} = 2 + 6 - 1 = 7 > 0$

Выбираем максимальную оценку свободной клетки x_{21}: 1. Для этого в перспективную клетку x_{21} поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-» и «+» (табл. 20).

	B1	B2	B3	B4	Запасы	ui
A1	6 (-) 75	7 x	3 (+) 25	5 x	100	0
A2	1 (+) x	2 80	5 (-) 35	6 35	150	2
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	50	-3
Потребности	75	80	60	85		
vj	6	0	3	4		

Таблица 20

Из грузов, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее:

$$y = \min(x_{23}) = 35$$

Прибавляем 35 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках, и вычитаем 35 из объемов грузов, стоящих в минусовых клетках.

В результате, получен новый опорный план (табл. 21).

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	6 40	7 x	3 60	5 x	100
A2	1 35	2 80	5 x	6 35	150
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	50
Потребности	75	80	60	85	

Таблица 21

Проверим оптимальность опорного плана, для этого еще раз найдем предварительные потенциалы u_i и v_j.

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

Полагаем, что $u_1 = 0$.

$u_1 + v_1 = 6 \ \rightarrow \ 0 + v_1 = 6 \ \rightarrow \ v_1 = 6$

$u_1 + v_3 = 3 \ \rightarrow \ 0 + v_3 = 3 \ \rightarrow \ v_3 = 3$

$u_2 + v_1 = 1 \ \rightarrow \ 6 + u_2 = 1 \ \rightarrow \ u_2 = -5$

$u_2 + v_2 = 2 \ \rightarrow \ -5 + v_2 = 2 \ \rightarrow \ v_2 = 7$

$u_3 + v_2 = 10 \ \rightarrow \ 0 + v_3 = 3 \ \rightarrow \ v_3 = 3$

$u_2 + v_4 = 6 \rightarrow -5 + v_4 = 6 \rightarrow v_4 = 11$

$u_3 + v_4 = 1 \rightarrow 11 + u_3 = 1 \rightarrow u_3 = -10$

Введем полученные результаты в таблицу (табл. 22).

	B1	B2	B3	B4	Запасы	ui
A1	6 40	7 x	3 60	5 x	100	0
A2	1 35	2 80	5 x	6 35	150	-5
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	50	-10
Потребности	75	80	60	85		
vj	6	7	3	11		

Таблица 22

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых

$$u_i + v_j > c_{ij}$$

В клетке x_{14} $0 + 11 > 5$ $\Delta_{14} = 0 + 11 - 5 = 6 > 0$

Выбираем максимальную оценку свободной клетки x_{14}: 5. Для этого в перспективную клетку x_{14} поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-» и «+» (табл.23).

	B1	B2	B3	B4	Запасы	ui
A1	6 (-) 40	7 x	3 60	5 (+) x	100	0
A2	1 (+) 35	2 80	5 x	6 (-) 35	150	-5
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	50	-10
Потребности	75	80	60	85		
vj	6	7	3	11		

Таблица 23

Из грузов, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее:

$$y = \min(x_{24}) = 35$$

Прибавляем 35 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках, и вычитаем 35 из объемов грузов, стоящих в минусовых клетках.

В результате, получен новый опорный план (табл. 24).

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	6 5	7 x	3 60	5 35	100
A2	1 70	2 80	5 x	6 x	150
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	50
Потребности	75	80	60	85	

Таблица 24

Проверим оптимальность опорного плана, для этого еще раз найдем предварительные потенциалы u_i и v_j.

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

Полагаем, что $u_1 = 0$.

$u_1 + v_1 = 6 \ \rightarrow \ 0 + v_1 = 6 \ \rightarrow \ v_1 = 6$

$u_1 + v_3 = 3 \ \rightarrow \ 0 + v_3 = 3 \ \rightarrow \ v_1 = 3$

$u_1 + v_4 = 5 \ \rightarrow \ 0 + v_4 = 5 \ \rightarrow \ v_1 = 5$

$u_2 + v_1 = 1 \ \rightarrow \ 6 + u_2 = 1 \ \rightarrow \ u_2 = -5$

$u_2 + v_2 = 2 \ \rightarrow \ -5 + v_2 = 2 \ \rightarrow \ v_2 = 7$

$u_3 + v_4 = 1 \ \rightarrow \ 5 + u_3 = 1 \ \rightarrow \ u_3 = -4$

Введем полученные результаты в таблицу (табл. 25).

	B1	B2	B3	B4	Запасы	ui
A1	6 5	7 x	3 60	5 35	100	0
A2	1 70	2 80	5 x	6 x	150	-5
A3	3 x	10 x	20 x	1 50	50	-4
Потребности	75	80	60	85		
vj	6	7	3	5		

Таблица 25

Опорный план является оптимальным, так как все оценки свободных клеток удовлетворяют:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

В результате, получена целевая функция равная 665:

$$F(x) = 6 \times 5 + 3 \times 60 + 5 \times 35 + 70 + 2 \times 80 + 50 = 665$$

2.5. Решение задачи с помощью надстройки «Поиск решения» MS Excel.

На рабочем листе введем числовые данные задачи. Изобразим транспортную таблицу (рис. 10):

	B1	B2	B3	B4	Запас
A1	6	7	3	5	100
A2	1	2	5	6	150
A3	3	10	20	1	50
Потребности	75	80	60	85	

Рисунок 10 – Транспортная таблица на листе Excel

Добавим вторую таблицу с пустыми ячейками для вычислений (рис. 11):

	B1	B2	B3	B4	Запас
A1					
A2					
A3					
Потребности					

Рисунок 11 – Вторая таблица

Так как целевая функция имеет вид:

$$F(x) = 6 \times x_{11} + 7 \times x_{12} + 3 \times x_{13} + 5 \times x_{14} +$$
$$+ x_{21} + 2 \times x_{22} + 5 \times x_{23} + 6 \times x_{24} +$$
$$+ 3 \times x_{31} + 10 \times x_{32} + 20 \times x_{33} + x_{34} \to \min$$

Запишем ее в виде формулы = СУММПРОИЗВ(C3:F5;J3:M5) (рис. 12):

ЦФ=	=СУММПРОИЗВ(C3:F5;J3:M5)

Рисунок 12 – Целевая функция

Поскольку ячейки оптимального решения не содержат данных, значение целевой функции пока 0.

Во второй таблице, в ячейках запасов и потребностей вычислим суммы по строкам и столбцам с помощью формулы =СУММ() (рис. 13):

	B1	B2	B3	B4	Запас
A1					0
A2					0
A3					=СУММ(J5:M5)
Потребности	0	0	0	0	

Рисунок 13 – Вычисление сумм

Выбираем команду «Поиск решения» и в появившееся диалоговое окно вводим данные (рис. 14).

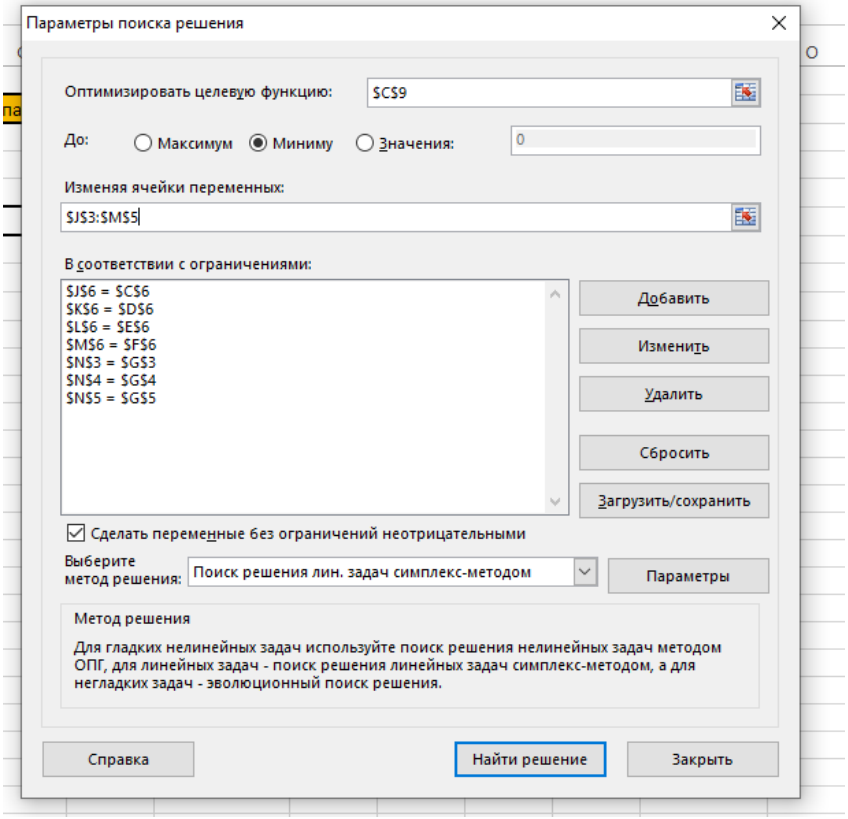
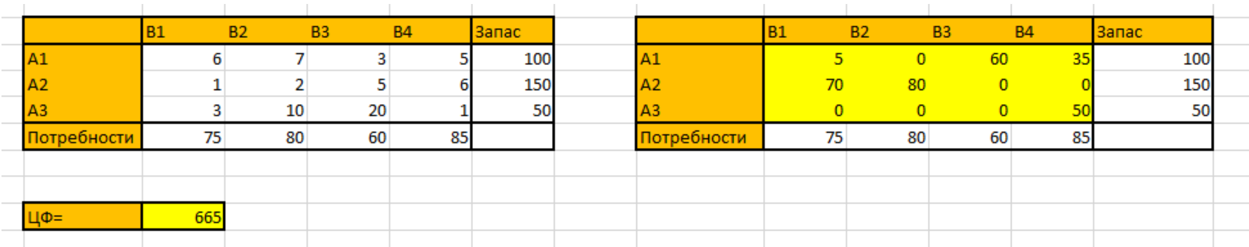


Рисунок 14 – Поиск решения

Получаем результат вычислений задачи (рис. 15):



	B1	B2	B3	B4	Запас
A1	6	7	3	5	100
A2	1	2	5	6	150
A3	3	10	20	1	50
Потребности	75	80	60	85	

ЦФ=	665

	B1	B2	B3	B4	Запас
A1	5	0	60	35	100
A2	70	80	0	0	150
A3	0	0	0	50	50
Потребности	75	80	60	85	

Рисунок 15 – Результаты вычислений

В результате, получена таблица и целевая функция равная 665 (табл. 26):

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	5		60	35	100
A2	70	80			150
A3				50	50
Потребности	75	80	60	85	

Таблица 26

$$F(x) = 6 \times 5 + 3 \times 60 + 5 \times 35 + 70 + 2 \times 80 + 50 = 665$$

2.6. Экономическая интерпретация полученных результатов.

По результатам, полученными при решении задачи с помощью метода северо-западного угла и метода потенциалов, а также Excel-таблиц, можно определить, что оптимальным решением будет направить груз:

- из станции А на 1-ый пункт – 5 вагонов, на 3-ий пункт – 60 вагонов, а на 4-ый пункт – 35 вагонов
- из станции В на 1-ый пункт – 70 вагонов и на 2-ой пункт – 80 вагонов
- из станции С на 4-ый пункт – 50 вагонов

Общие затраты на перегон вагонов между железнодорожными станциями и пунктами перевозки составят 665 денежных единиц и будут минимальны.

3. Определение использованных терминов.

Оптимальное решение – это решение, которое по эффективности предпочтительнее перед другими.

Целевая функция – это функция, в которой критерий эффективности зависит от показателей и факторов обоих групп.

$$F(x) = f(x_1, x_2 \dots a_1, a_2 \dots)$$

Опорный план определяет каждая вершина непустого множества планов основной задачи линейного программирования, образующее выпуклый многогранник.

Симплекс-метод – алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путем перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

Базис – любой набор из m таких переменных, что определитель, составленный из коэффициентов при этих переменных в m-ограничениях, отличен от нуля.

Транспортная задача – оптимальный план перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2 \dots A_m$ в n пункты $B_1, B_2 \dots B_m$.

Критерий оптимизации – минимальная стоимость перевозок всего груза.

Заключение

В результате выполнения курсовой работы, были решены 2 оптимизационные задачи. В 1-ой задаче для решения был использован симплекс-метод, во 2-ой задаче были использованы метод северо-западного угла для построения первого опорного плана и метод потенциалов для улучшения полученного опорного плана. Затем произведены расчеты в программе Microsoft Excel, подтверждающие ранее полученные результаты.

Была дана экономическая характеристика результатам вычислений. Было получено, что для 1-ой задачи оптимальным решением, будет построить именно 10 домов 2-го типа и 67 домов 5-го типа, а жилая площадь при этом составит 425 тыс. кв. м. Для 2-ой задачи было получено, что оптимальным решением будет направить груз: из станции А в 5 вагонах на 1-ый пункт, в 60 вагонах на 3-ий пункт – 6, в 35 вагонах на 4-ый пункт; из станции В в 70 вагонах на 1-ый пункт и в 80 вагонах на 2-ой пункт; из станции С в 50 вагонах на 4-ый пункт. При этом общие затраты на перегон вагонов между железнодорожными станциями и пунктами перевозки составят 665 денежных единиц и будут минимальны.

Список использованных источников

1. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и применение. Издательство «Прогресс». г. Москва 1966 г. 602 с.
2. Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л. Введение в исследование операций. Издательство «Наука». г. Москва 1968 г. 488 с.