

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Институт информационных технологий и анализа данных

наименование института

Отделение прикладной математики и информатики

наименование отделения

Отчет по дисциплине

«Вычислительная математика»

по теме:

«Решение уравнений с одной переменной»

Выполнил студент группы

АСУб-20-2

Шифр группы

Подпись

Арбакова А.В.

И.О. Фамилия

Проверил преподаватель

Подпись

Огнёв И.А.

И.О. Фамилия

Отчет по НИР защищен с оценкой _____

Иркутск 2021 г.

ЗАДАНИЕ

Вариант: 6

6.	а)	$e^x + 2x - 3 = 0$
	б)	$x^3 + 2x - 11 = 0$
	в)	$\sqrt{4x + 7} = 3 \cos x$

Условия задания:

1. Отделить корни заданного уравнения в табличном редакторе.
 2. Реализовать алгоритм вычисления всех корней заданного уравнения с точностью 10^{-6} в табличном редакторе:
 - 2.1. методом половинного деления;
 - 2.2. методом итераций;
 - 2.3. методом хорд и касательных.
- При выводе ответа показывать число итераций.

Алгоритм метода вычислений:

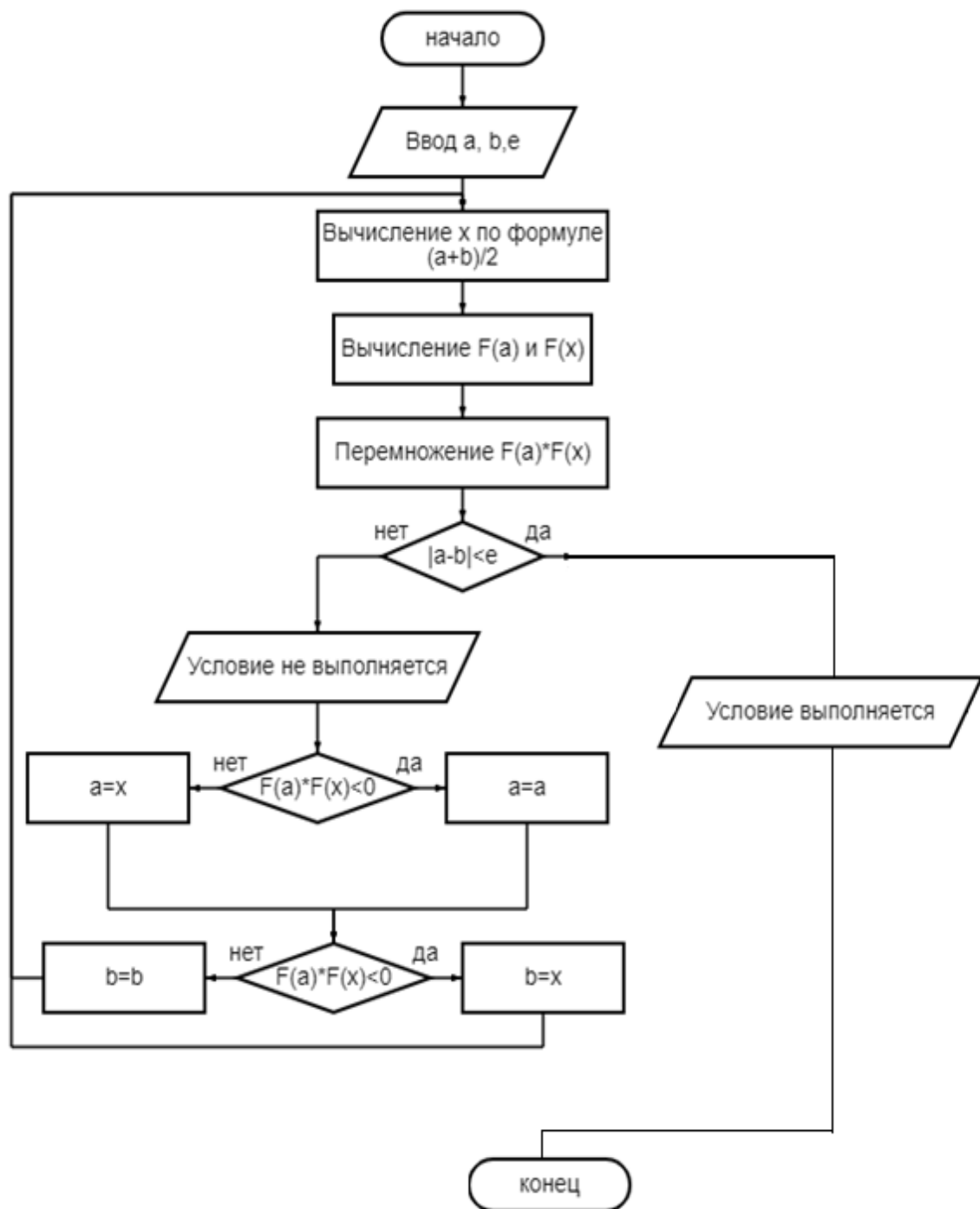


Рисунок 1 - Метод половинного деления.

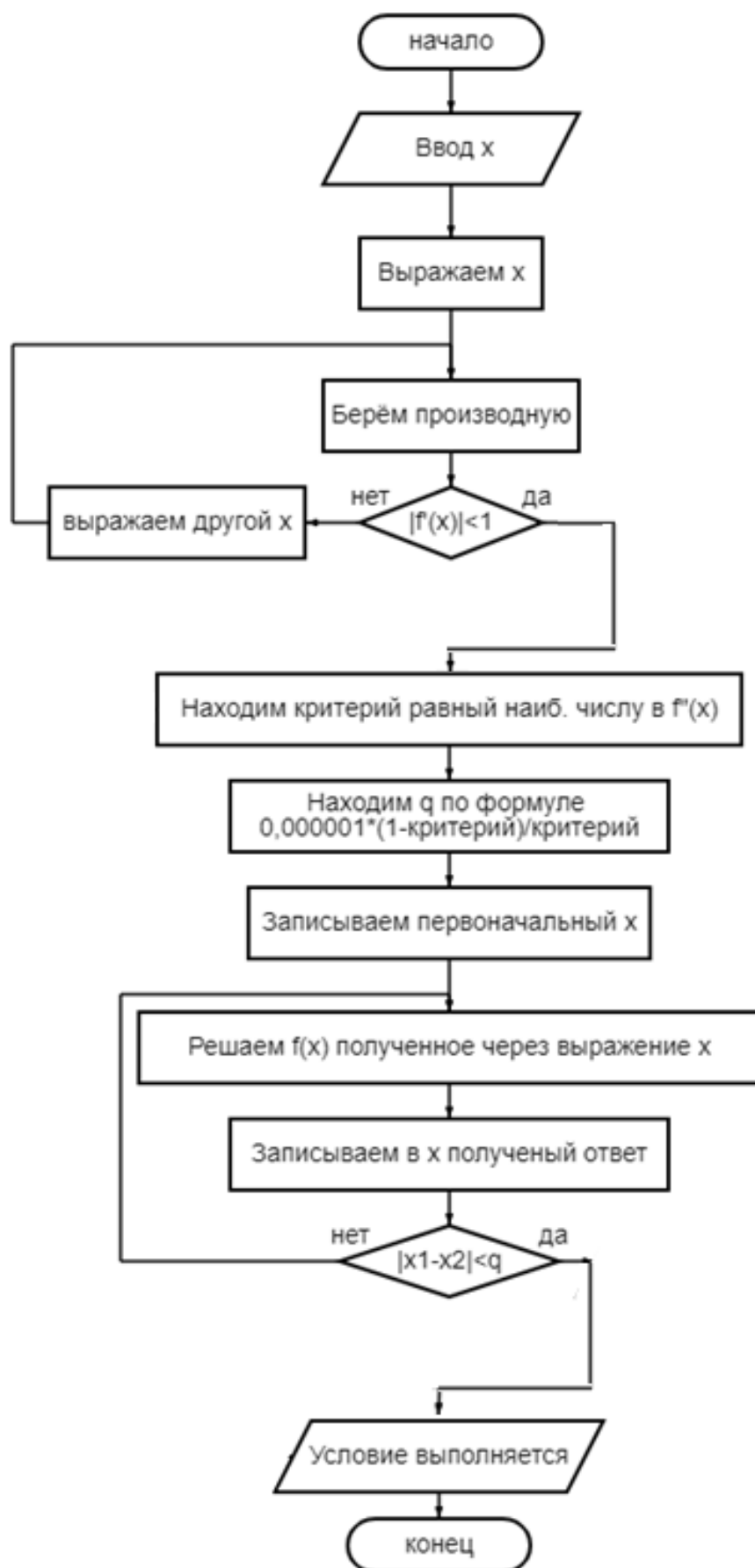


Рисунок 2 - Метод итерации.

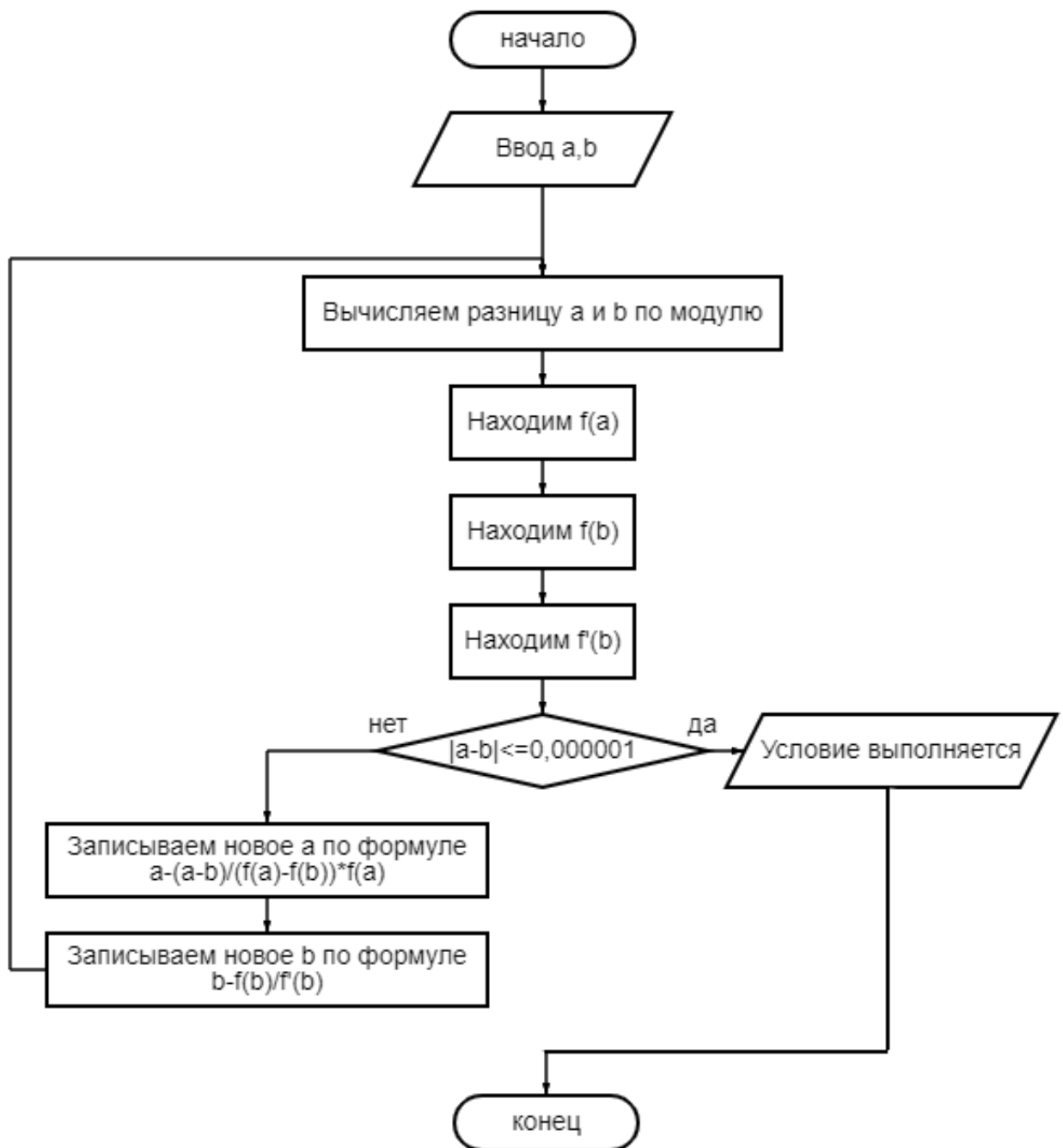


Рисунок 3 - Метод хорд и касательных.

Уравнение 1:

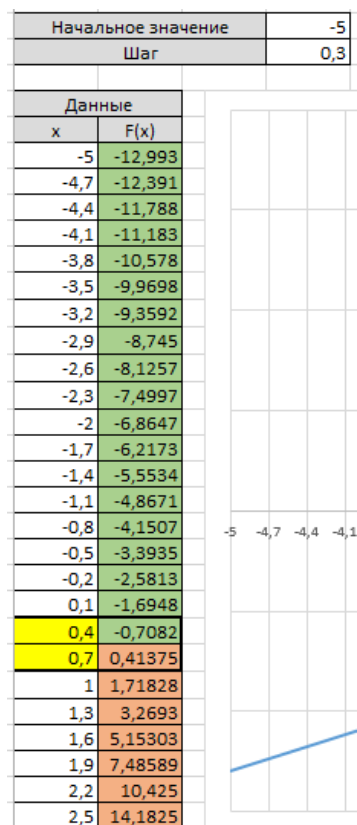


Рисунок 4 - Интервал нахождения корня.

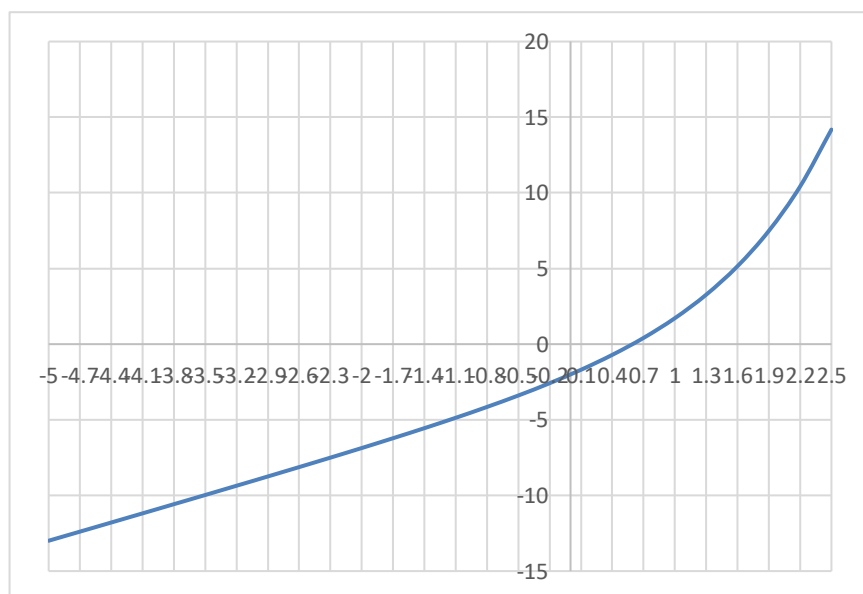


Рисунок 5 - График $f(x)$.

На рисунках 4 и 5, после задания функции $f(x) = e^x + 2 * x - 3 = 0$, при начальном значении $x_0 = -5$ и шагом 0,3 мы находим интервал, на котором функция меняет свой знак. Значит график функции пересёк абсциссу в некоторой точке на интервале $[0,4 ; 0,7]$.

Метод половинного деления.

1) $e^x + 2 \times x - 3 = 0$							
Интервал		[0,4 ; 0,7]					
Точность $10^{(-6)}$		1E-06					
(итерации)	(середина)	(левая граница)		(правая граница)			
N	x	a	b	F(x)	F(a)	F(x)*F(a)	точность
1	0,55	0,4	0,7	-0,166747	-0,70818	0,11809	не выполнено
2	0,625	0,55	0,7	0,118246	-0,16675	-0,01972	не выполнено
3	0,5875	0,55	0,625	-0,025516	-0,16675	0,00425	не выполнено
4	0,60625	0,5875	0,625	0,046043	-0,02552	-0,00117	не выполнено
5	0,596875	0,5875	0,60625	0,010184	-0,02552	-0,00026	не выполнено
6	0,592188	0,5875	0,59688	-0,007686	-0,02552	0,0002	не выполнено
7	0,594531	0,59219	0,59688	0,001244	-0,00769	-9,6E-06	не выполнено
8	0,593359	0,59219	0,59453	-0,003222	-0,00769	2,5E-05	не выполнено
9	0,593945	0,59336	0,59453	-0,00099	-0,00322	3,2E-06	не выполнено
10	0,594238	0,59395	0,59453	0,000127	-0,00099	-1,3E-07	не выполнено
11	0,594092	0,59395	0,59424	-0,000431	-0,00099	4,3E-07	не выполнено
12	0,594165	0,59409	0,59424	-0,000152	-0,00043	6,6E-08	не выполнено
13	0,594202	0,59417	0,59424	-1,26E-05	-0,00015	1,9E-09	не выполнено
14	0,59422	0,5942	0,59424	5,72E-05	-1,3E-05	-7,2E-10	не выполнено
15	0,594211	0,5942	0,59422	2,23E-05	-1,3E-05	-2,8E-10	не выполнено
16	0,594206	0,5942	0,59421	4,88E-06	-1,3E-05	-6,1E-11	не выполнено
17	0,594204	0,5942	0,59421	-3,85E-06	-1,3E-05	4,8E-11	не выполнено
18	0,594205	0,5942	0,59421	5,14E-07	-3,8E-06	-2E-12	выполнено
ОТВЕТ: x=0,594205 F(x)=5,14E-07 N=18							

Рисунок 6 – Метод половинного деления на интервале [0,4 ; 0,7].

На рисунке 6 приведено решение методом половинного деления. По завершении вычислений значения функции в середине интервала одна часть интервала отбрасывается так, чтобы функция имела на концах оставшейся части разный знак. Полученное значение является ответом, если интервал меньше точности ϵ .

В конечном итоге, $x=0,594205$ за 18 итераций.

Метод итерации.

1) $e^x + 2 \times x - 3 = 0$					
$f_1(x) = \ln(3 - 2 \times x)$		$f_2(x) = \frac{3 - e^x}{2}$			
$f'_1(x) = -\frac{2}{3 - 2 \times x}$		$f'_2(x) = -\frac{e^x}{2}$			
x	f ₁ (x)	f ₂ (x)	N	x	f(x)
0,4	0,788457	0,74591	1	0,4	-0,7082
0,41	0,779325	0,75341	2	0,576406	-0,0676
0,42	0,770108	0,76098	3	0,593234	-0,0037
0,43	0,760806	0,76863	4	0,594156	-0,0002
0,44	0,751416	0,77635	5	0,594202	-9E-06
0,45	0,741937	0,78416	6	0,594205	-5E-07
0,46	0,732368	0,79204			
0,47	0,722706	0,8	ОТВЕТ: x=0,594205 N=6		
0,48	0,71295	0,80804			
0,49	0,703098	0,81616			

Рисунок 7 – Метод простой итерации.

На рисунке 7 для поиска корня используется метод простой итерации над функцией. Суть метода заключается в последовательном приближении. В результате, чего получен результат $x=0,594205$ за 6 итераций.

Метод хорд и касательных.

1) $e^x + 2 \times x - 3 = 0$

N	x	F(x)	F'(x)
1	0,4	-0,7082	3,49182
2	0,602810	0,03286	3,82725
3	0,594223	6,7E-05	3,81162
4	0,594205	2,8E-10	3,81159
5	0,594205	0	3,81159

ОТВЕТ: x=0,594205 N=5

N	a	b	f(a)	f(b)	d
1	0,4	0,7	-0,7082	0,41375	
2	0,4	0,589364	-0,7082	-0,0184	0,11064
3	0,4	0,594424	-0,7082	0,00083	0,00506
4	0,4	0,594195	-0,7082	-4E-05	0,00023
5	0,4	0,594205	-0,7082	1,7E-06	1E-05

Рисунок 8 – Метод хорд и касательных.

Суть комбинированного метода состоит в разбиении отрезка $[a; b]$ (при условии $f(a)f(b) < 0$) на три отрезка с помощью хорды и касательной и выборе нового отрезка от точки пересечения хорды с осью абсцисс до точки пересечения касательной с осью абсцисс, на которых функция меняет знак и имеет решение.

Построение хорд и касательных продолжается до достижения необходимой точности решения (0,000001).

Комбинированный метод применим для решения уравнения вида $f(x) = 0$ на отрезке $[a; b]$, если ни одна точка отрезка $[a; b]$ $f(x) \neq 0$ и $f'(x) \neq 0$.

Уравнение 2:



Рисунок 9 - Интервал нахождения корня.

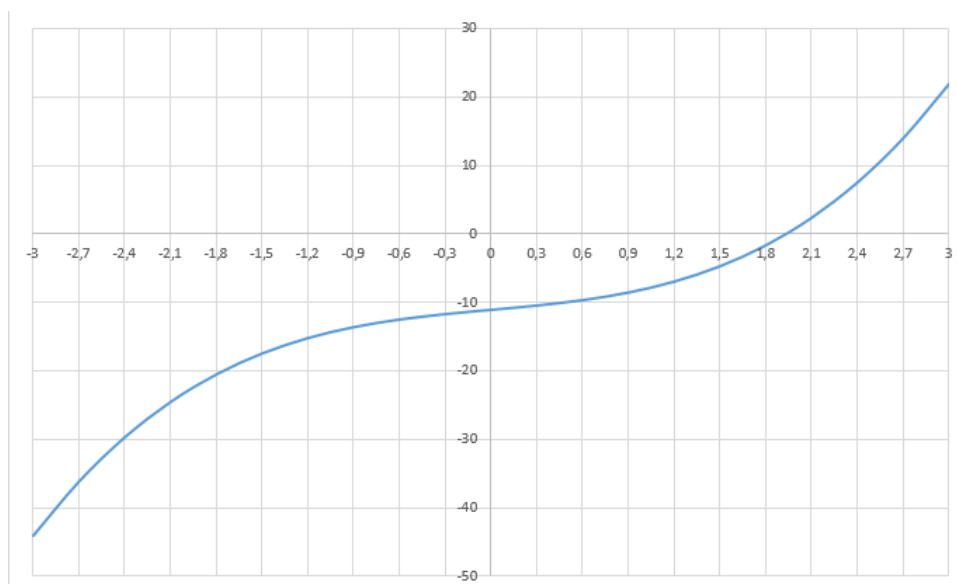


Рисунок 10 - График $f(x)$.

На рисунках 9 и 10 после задания функции $f(x) = x^3 + 2x - 11 = 0$, при начальном значении $x_0 = -3$ и шагом $0,3$, мы находим интервал, на котором функция меняет свой знак. Значит график функции пересёк абсциссу в некоторой точке на интервале $[1,8 ; 2,1]$.

Метод половинного деления.

2) $x^3 + 2 \times x - 11 = 0$							
Интервал				[1,8 ; 2,1]			
Точность $10^{(-6)}$				1E-06			
(итерации)	(середина)	(левая граница)	(правая граница)				
N	x	a	b	F(x)	F(a)	F(x)*F(a)	точность
1	1,95	1,8	2,1	0,314875	-1,568	-0,4937	не выполнено
2	1,875	1,8	1,95	-0,6582	-1,568	1,03206	не выполнено
3	1,9125	1,875	1,95	-0,17973	-0,6582	0,1183	не выполнено
4	1,93125	1,9125	1,95	0,065534	-0,1797	-0,0118	не выполнено
5	1,921875	1,9125	1,93125	-0,05761	-0,1797	0,01035	не выполнено
6	1,926563	1,92188	1,93125	0,003837	-0,0576	-0,0002	не выполнено
7	1,924219	1,92188	1,92656	-0,02692	-0,0576	0,00155	не выполнено
8	1,925391	1,92422	1,92656	-0,01155	-0,0269	0,00031	не выполнено
9	1,925977	1,92539	1,92656	-0,00386	-0,0115	4,5E-05	не выполнено
10	1,92627	1,92598	1,92656	-1E-05	-0,0039	4E-08	не выполнено
11	1,926416	1,92627	1,92656	0,001913	-1E-05	-2E-08	не выполнено
12	1,926343	1,92627	1,92642	0,000952	-1E-05	-1E-08	не выполнено
13	1,926306	1,92627	1,92634	0,000471	-1E-05	-5E-09	не выполнено
14	1,926288	1,92627	1,92631	0,00023	-1E-05	-2E-09	не выполнено
15	1,926279	1,92627	1,92629	0,00011	-1E-05	-1E-09	не выполнено
16	1,926274	1,92627	1,92628	4,98E-05	-1E-05	-5E-10	не выполнено
17	1,926272	1,92627	1,92627	1,98E-05	-1E-05	-2E-10	не выполнено
18	1,926271	1,92627	1,92627	4,75E-06	-1E-05	-5E-11	не выполнено
19	1,92627	1,92627	1,92627	-2,8E-06	-1E-05	2,8E-11	не выполнено
20	1,926270	1,92627	1,92627	9,88E-07	-3E-06	-3E-12	выполнено
ОТВЕТ: x=1,926270 F(x)=9,88E-07 N=20							

Рисунок 11 – Метод половинного деления на интервале [1,8 ; 2,1].

На рисунке 11 приведено решение методом половинного деления. По завершении вычислений значения функции в середине интервала одна часть интервала отбрасывается так, чтобы функция имела на концах оставшейся части разный знак. Полученное значение является ответом, если интервал меньше точности ϵ .

В конечном итоге, $x=1,926270$ за 20 итераций.

Метод итерации.

2) $x^3 + 2 \times x - 11 = 0$					
$f1(x) = \sqrt[3]{11 - 2 \times x}$		$f2(x) = \frac{11 - x^3}{2}$			
$f'(x) = -\frac{2}{3 \times (11 - 2 \times x)^2}$		$f'(x) = -\frac{3 \times x^2}{2}$			
x	f1(x)	f2(x)	N	x	f(x)
1,8	2,53161	4,86	1	1,8	-1,568
1,81	2,52705	4,91415	2	1,902876	-0,304
1,82	2,52248	4,9686	3	1,922825	-0,0452
1,83	2,51791	5,02335	4	1,925789	-0,0063
1,84	2,51333	5,0784	5	1,926204	-0,0009
1,85	2,50875	5,13375	6	1,926261	-0,0001
1,86	2,50417	5,1894	7	1,926269	-2E-05
1,87	2,49958	5,24535	8	1,926270	-2E-06
1,88	2,49498	5,3016			
1,89	2,49039	5,35815	ОТВЕТ: x=1,926270 N=8		
1,9	2,48579	5,415			

Рисунок 12 – Метод простой итерации.

На рисунке 12 для поиска корня используется метод простой итерации над функцией. Суть метода заключается в последовательном приближении. В результате, чего получен результат $x=1,926270$ за 8 итераций.

Метод хорд и касательных.

2) $x^3 + 2 \times x - 11 = 0$									
N1	x	F(x)	F'(x)	N2	a	b	f(a)	f(b)	d
1	1,8	-1,568	11,72	1	1,8	2,1	-1,568	2,461	
2	1,933788	0,09905	13,2186	2	1,8	1,916754	-1,568	-0,1244	0,18325
3	1,926295	0,00033	13,1318	3	1,8	1,926819	-1,568	0,0072	0,01007
4	1,926270	3,5E-09	13,1316	4	1,8	1,926239	-1,568	-0,0004	0,00058
5	1,926270	0	13,1316	5	1,8	1,926272	-1,568	2,4E-05	3,3E-05
				6	1,8	1,926270	-1,568	-1E-06	1,9E-06
ОТВЕТ: x=1,926270 N1=5 N2=6									

Рисунок 13 – Метод хорд и касательных.

Суть комбинированного метода состоит в разбиении отрезка $[a; b]$ (при условии $f(a)f(b) < 0$) на три отрезка с помощью хорды и касательной и выборе нового отрезка от точки пересечения хорды с осью абсцисс до точки пересечения касательной с осью абсцисс, на которых функция меняет знак и имеет решение.

Построение хорд и касательных продолжается до достижения необходимой точности решения (0,000001).

Комбинированный метод применим для решения уравнения вида $f(x) = 0$ на отрезке $[a; b]$, если ни одна точка отрезка $[a; b]$ $f(x) \neq 0$ и $f'(x) \neq 0$.

Уравнение 3:

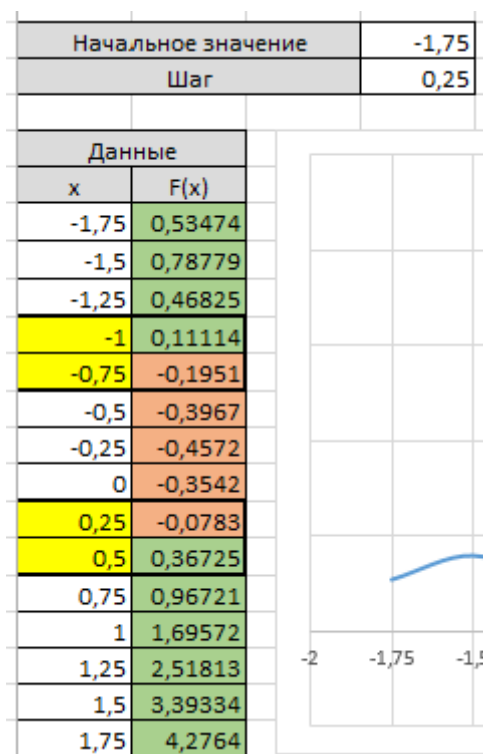


Рисунок 14 - Интервал нахождения корня.

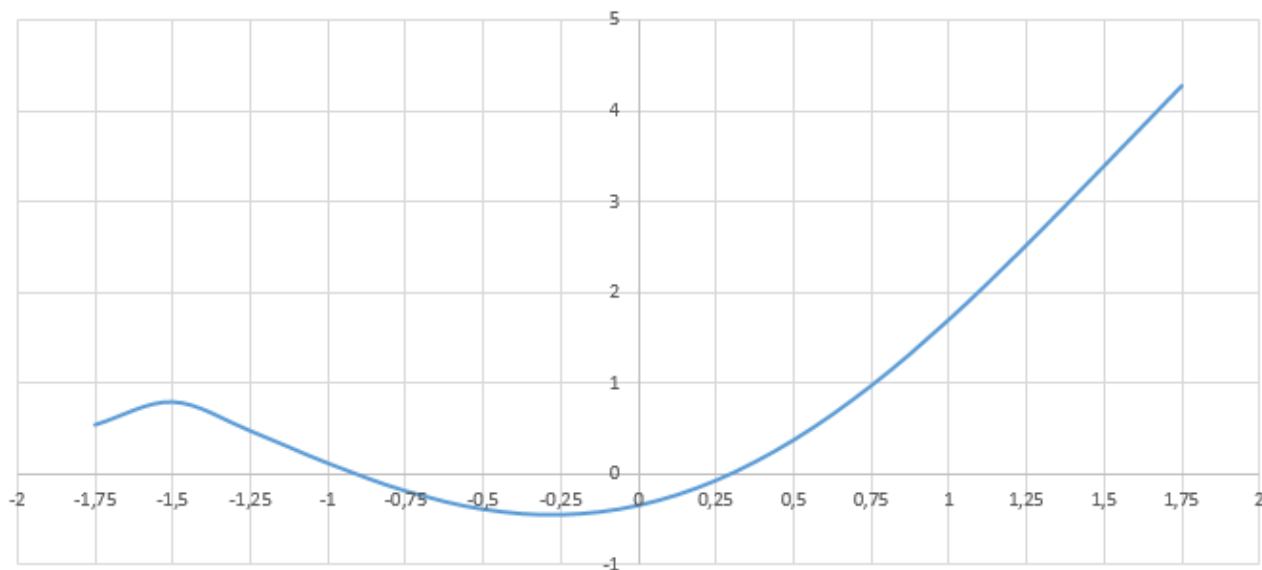


Рисунок 15 - График $f(x)$.

На рисунках 14 и 15, после задания функции $\sqrt{4 \times x + 7} = 3 \times \cos x$, с начальным значением $x_0 = -1,75$ и шагом равным $0,25$, мы находим интервал изменения знака функции. Это означает, что график функции пересёк абсциссу в некоторых точках на промежутках $[-1 ; -0,75]$ и $[0,25 ; 0,5]$.

Метод половинного деления.

3) $\sqrt{4 \times x + 7} = 3 \times \cos x$							
Интервал			[-1 ; -0,75]				
Точность 10^{-6}			1E-06				
(итерация)	(середина)	(левая граница)	(правая граница)				
N	x1	a	b	F(x1)	F(a)	F(x1)*F(a)	точность
1	-0,875	-1	-0,75	-0,05216	0,11114	-0,0058	не выполнено
2	-0,9375	-1	-0,875	0,02736	0,11114	0,00304	не выполнено
3	-0,90625	-0,9375	-0,875	-0,01299	0,02736	-0,0004	не выполнено
4	-0,92188	-0,9375	-0,9063	0,007045	0,02736	0,00019	не выполнено
5	-0,91406	-0,9219	-0,9063	-0,00301	0,00705	-2E-05	не выполнено
6	-0,91797	-0,9219	-0,9141	0,00201	0,00705	1,4E-05	не выполнено
7	-0,91602	-0,918	-0,9141	-0,0005	0,00201	-1E-06	не выполнено
8	-0,91699	-0,918	-0,916	0,000754	0,00201	1,5E-06	не выполнено
9	-0,9165	-0,917	-0,916	0,000126	0,00075	9,5E-08	не выполнено
10	-0,91626	-0,9165	-0,916	-0,00019	0,00013	-2E-08	не выполнено
11	-0,91638	-0,9165	-0,9163	-3,1E-05	0,00013	-4E-09	не выполнено
12	-0,91644	-0,9165	-0,9164	4,79E-05	0,00013	6E-09	не выполнено
13	-0,91641	-0,9164	-0,9164	8,66E-06	4,8E-05	4,1E-10	не выполнено
14	-0,9164	-0,9164	-0,9164	-1,1E-05	8,7E-06	-9E-11	не выполнено
15	-0,9164	-0,9164	-0,9164	-1,1E-06	8,7E-06	-1E-11	не выполнено
16	-0,91641	-0,9164	-0,9164	3,75E-06	8,7E-06	3,2E-11	не выполнено
17	-0,91641	-0,9164	-0,9164	1,3E-06	3,8E-06	4,9E-12	не выполнено
18	-0,91641	-0,9164	-0,9164	7,78E-08	1,3E-06	1E-13	не выполнено
19	-0,91641	-0,9164	-0,9164	-5,3E-07	7,8E-08	-4E-14	не выполнено
20	-0,91641	-0,9164	-0,9164	-2,3E-07	7,8E-08	-2E-14	выполнено
Интервал			[0,25 ; 0,5]				
Точность 10^{-6}			1E-06				
(итерация)	(середина)	(левая граница)	(правая граница)				
N	x2	a	b	F(x2)	F(a)	F(x2)*F(a)	точность
1	0,375	0,25	0,5	0,123953	-0,0783	-0,0097	не выполнено
2	0,3125	0,25	0,375	0,017577	-0,0783	-0,0014	не выполнено
3	0,28125	0,25	0,3125	-0,03169	-0,0783	0,00248	не выполнено
4	0,296875	0,28125	0,3125	-0,00739	-0,0317	0,00023	не выполнено
5	0,304688	0,29688	0,3125	0,005014	-0,0074	-4E-05	не выполнено
6	0,300781	0,29688	0,30469	-0,00121	-0,0074	8,9E-06	не выполнено
7	0,302734	0,30078	0,30469	0,001899	-0,0012	-2E-06	не выполнено
8	0,301758	0,30078	0,30273	0,000345	-0,0012	-4E-07	не выполнено
9	0,30127	0,30078	0,30176	-0,00043	-0,0012	5,2E-07	не выполнено
10	0,301514	0,30127	0,30176	-4,3E-05	-0,0004	1,9E-08	не выполнено
11	0,301636	0,30151	0,30176	0,000151	-4E-05	-6E-09	не выполнено
12	0,301575	0,30151	0,30164	5,4E-05	-4E-05	-2E-09	не выполнено
13	0,301544	0,30151	0,30157	5,48E-06	-4E-05	-2E-10	не выполнено
14	0,301529	0,30151	0,30154	-1,9E-05	-4E-05	8,1E-10	не выполнено
15	0,301537	0,30153	0,30154	-6,6E-06	-2E-05	1,2E-10	не выполнено
16	0,301540	0,30154	0,30154	-5,8E-07	-7E-06	3,8E-12	выполнено
ОТВЕТ: x1=-0,916405 F(x1)=-2,3E-07 N=20 x2=0,301540 F(x2)=-6E-07 N=16							

Рисунок 16 – Метод половинного деления на интервалах [-1 ; -0,75] и [0,25 ; 0,5].

На рисунке 16 приведено решение методом половинного деления. По завершении вычислений значения функции в середине интервала одна часть интервала отбрасывается так, чтобы функция имела на концах оставшейся части разный знак. Полученное значение является ответом, если интервал меньше точности ϵ .

В конечном итоге, $x_1 = -0,916405$ за 20 итераций и $x_2 = 0,301540$ за 16 итераций.

Метод итерации.

3) $\sqrt{4 \times x + 7} = 3 \times \cos x$					
$f_1(x) = \frac{(3 \times \cos x)^4 - 7}{4}$			$f_2(x) = \arccos \frac{\sqrt{4 \times x + 7}}{3}$		
$f'_1(x) = -9 \sin x \times \frac{\cos x}{2}$			$f'_2(x) = -\frac{1}{3 \sqrt{4 \times x + 7} \times \sqrt{4 \times x + 7}}$		
x	f'1(x)	f'2(x)	N	x	f(x)
-1	2,04592	2,24697	1	-1	0,11114
-0,99	2,06424	2,25638	2	-0,893635	-0,02895
-0,98	2,08173	2,26578	3	-0,921340	0,00635
-0,97	2,09838	2,27517	4	-0,915259	-0,00147
-0,96	2,1142	2,28457	5	-0,916668	0,00034
-0,95	2,12918	2,29395	6	-0,916345	-7,8E-05
-0,94	2,1433	2,30334	7	-0,916419	1,8E-05
-0,93	2,15656	2,31272	8	-0,916402	-4,1E-06
-0,92	2,16896	2,32209	9	-0,916406	9,4E-07
-0,91	2,1805	2,33147			
-0,9	2,19116	2,34083	ОТВЕТ: x=-0,916406 N=9		
-0,89	2,20094	2,3502			
-0,88	2,20985	2,35956			

x	f'1(x)	f'2(x)	N	x	f(x)
0,25	-1,07871	0,62854	1	0,25	-0,07831
0,26	-1,11798	0,64259	2	0,287205	-0,0225
0,27	-1,15681	0,65646	3	0,297897	-0,00577
0,28	-1,19517	0,67015	4	0,300639	-0,00143
0,29	-1,23305	0,68369	5	0,301319	-0,00035
0,3	-1,27045	0,69708	6	0,301486	-8,6E-05
0,31	-1,30733	0,71033	7	0,301527	-2,1E-05
0,32	-1,34369	0,72345	8	0,301537	-5,2E-06
0,33	-1,37951	0,73644	9	0,301540	-1,3E-06
0,34	-1,41478	0,74931			
0,35	-1,44949	0,76206	ОТВЕТ: x=0,301540 N=9		
0,36	-1,48362	0,77471			
0,37	-1,51715	0,78726			

Рисунок 17 – Метод простой итерации.

На рисунке 17 для поиска корня используется метод простой итерации над функцией. Суть метода заключается в последовательном приближении. В результате, чего получен результат $x_1 = -0,916406$ за 20 итераций и $x_2 = 0,301540$ за 16 итераций.

Метод хорд и касательных.

3) $\sqrt{4 \times x + 7} = 3 \times \cos x$					
N1	x1	f(x1)	f'(x1)	N2	a
1	-1	0,111144	-1,26971	1	-1
2	-0,918856	0,003152	-1,28784	2	-1
3	-0,916408	3,48E-06	-1,28499	3	-1
4	-0,916406	4,3E-12	-1,28498	4	-1
5	-0,916406	0	-1,28498	5	-1
ОТВЕТ: x1=-0,916406 N1=5 N2=5					

N2	a	b	f(a)	f(b)	d
1	-1	-0,75	0,111144	-0,19507	
2	-1	-0,809259	0,111144	-0,00915	0,198259
3	-1	-0,916163	0,111144	-0,00031	0,008905
4	-1	-0,916397	0,111144	-1E-05	0,000234
5	-1	-0,916405	0,111144	-3,5E-07	7,85E-06
6	-1	-0,916406	0,111144	-1,2E-08	2,63E-07

N1	x2	f(x2)	f'(x2)	N2	a
1	0,25	-0,07831	1,449319	1	0,25
2	0,3040324	0,003968	1,593855	2	0,25
3	0,3015480	8,32E-06	1,589157	3	0,25
4	0,3015407	3,7E-11	1,589143	4	0,25
5	0,3015407	0	1,589143	5	0,25
ОТВЕТ: x2=0,301540 N1=5 N2=5					

N2	a	b	f(a)	f(b)	d
1	0,25	0,5	-0,07831	0,367252	
2	0,25	0,289389	-0,07831	-0,012	0,206061
3	0,25	0,3018924	-0,07831	0,000559	0,007933
4	0,25	0,3015246	-0,07831	-2,6E-05	0,000368
5	0,25	0,3015415	-0,07831	1,18E-06	1,69E-05
6	0,25	0,3015407	-0,07831	-5,4E-08	7,75E-07

Рисунок 18 – Метод хорд и касательных.

Суть комбинированного метода состоит в разбиении отрезка $[a; b]$ (при условии $f(a)f(b) < 0$) на три отрезка с помощью хорды и касательной и выборе нового отрезка от точки пересечения хорды с осью абсцисс до точки пересечения касательной с осью абсцисс, на которых функция меняет знак и имеет решение.

Построение хорд и касательных продолжается до достижения необходимой точности решения (0,000001).

Комбинированный метод применим для решения уравнения вида $f(x) = 0$ на отрезке $[a; b]$, если ни одна точка отрезка $[a; b]$ $f(x) \neq 0$ и $f'(x) \neq 0$.

Вывод по проделанной работе:

В ходе данной практической работы мы изучили методы решения уравнений, такие как: метод «что, если», метод простых итераций, метод половинного деления и метод хорд и касательных. Вспомнили основы работы с табличным редактором Excel. Каждый из нас смог испытать свои силы на 3 данных в задании уравнениях, найдя их корни различными методами.