Раздел 5 Булевы функции

Сайт:	Электронное обучение ИРНИТУ	Напечатано::	Арбакова Анастасия Вячеславовна
Курс:	Дискретная математика для студентов специальностей АСУ,ЭВМ	Дата:	Понедельник, 7 Июнь 2021, 04:34
Книга:	Раздел 5 Булевы функции		

Оглавление

§1.Основные понятия и определения.

Определение1. *Функцию f, принимающую одно из двух значений, 0 или 1, от n переменных, каждая из которых принимает одно из двух значений, 0 или 1, называется булевой функцией* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *от n переменных.*

Иначе говоря, *булевой* называется функция вида:

$$f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}.$$

Множество булевых функций от **n** переменных будем обозначать P_n .

Любая булева функция может быть задана в виде ***таблицы истинности***. Если значение функции ***f*** зависит от ***n*** переменных то таблица истинности содержит 2^n строк, соответствующих всем различным комбинациям значений этих переменных.

Пример 1.1.

Рассмотрим, например, устройство, фиксирующее принятие некоторой резолюции комитетом <трех>. Каждый член комитета при одобрении резолюции нажимает свою кнопку; если большинство членов согласны, то резолюция принимается, что фиксируется регистрирующим прибором. Устройство реализует функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, таблица истинности которой имеет вид таблицы1.

Таблица 1.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

Число булевых функций от ***n*** переменных равно числу столбцов, которые можно сопоставить строкам таблиц истинности и равно , т.е. 2^{2^n}, т.е. $|P_n| = 2^{2^n}$.

Булевы функции от одной переменной приведены в таблицах 2,3 от двух переменных в таблицах 4,5.

Таблица 2.

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 3.

функция	обозначение	название
f_0	0	*Конст.0*
f_1	x	x
f_2	$\neg x, \bar{x}$	*Отрицание x*
f_3	1	*Конст.1*

Таблица 4.

Переменные		***Булевы функции***															
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 5.

функция	обозначение	название
f_0	0	***константа нуль.***
f_1	$x_1 \wedge x_2$; $x_1 x_2$	***конъюнкция***
f_2	$\overline{x_1 \to x_2}$	***левая коимпликация***
f_3	x_1	
f_4	$\overline{x_1 \leftarrow x_2}$	***правая коимпликация.***
f_5	x_2	
f_6	$x_1 \oplus x_2$	***сложение по модулю два***
f_7	$x_1 \vee x_2$	***дизъюнкция***
f_8	$x_1 \circ x_2$; $x_1 \downarrow x_2$	***функция Вебба, стрелка Пирса***
f_9	$x_1 \equiv x_2$	***функция эквивалентности***
f_{10}	$\bar{x}_2$, $\neg x_2$	***отрицание.***
f_{11}	$x_1 \leftarrow x_2$	***правая импликация***
f_{12}	$\bar{x}_1$, $\neg x_1$	***отрицание.***
f_{13}	$x_1 \to x_2$	***левая импликация, импликация***
f_{14}	$x_1 \mid x_2$	***функция Шеффера.***
f_{15}	1	***константа единица.***

Условимся называть булевы функции от одной и двух переменных ***элементарными булевыми функциями.***

Булевы функции от одной и двух переменных являются ***операциями*** на множестве булевых функций.

§2.Представление функций формулами. Равносильные формулы.

Пусть $\boldsymbol{F=\{f_1,f_2,\ldots,f_m\}}$ **-** множество булевых функций. ***Формулой над F*** называется выражение вида $\boldsymbol{f(t_1,t_2,\ldots,t_n)}$**,** где и $\boldsymbol{t_i}$ либо переменная, либо формула над $\boldsymbol{F}$.

Всякой формуле однозначно соответствует некоторая булева функция. Зная таблицы истинности для функций множества $\boldsymbol{F}$ можно вычислить таблицу истинности той функции, которую реализует данная формула.

Пример 2.1.

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

§3. Принцип двойственности

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n$ - булева функция. Тогда функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определенная следующим образом:

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Из определения видно, что двойственность инволютивна: $f^{**} = f$.

Пример

Двойственные функции:

f	1	0	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$	x	$\bar{x}$
f^*	0	1	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	x	$\bar{x}$

Функция называется ***самодвойственной,*** если $f^* = f$.

Пример

Тождественная функция и отрицание *самодвойственны,* а дизъюнкция и конъюнкция — нет.

Принцип двойственности. Если

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_{11}, \dots, x_{1n_1}), \dots, f_m(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})), \text{ то}$$
$$\varphi^*(x_1, \dots, x_n) = f^*(f_1^*(x_{11}, \dots, x_{1n_1}), \dots, f_m^*(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})).$$

Таким образом, функция, двойственная суперпозиции функций, есть соответствующая суперпозиция двойственных функций.

Принцип двойственности удобен при нахождении двойственных функций, представленных формулами, содержащими лишь конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. В этом случае в исходной формуле конъюнкции заменяются на дизъюнкции, а дизъюнкции — на конъюнкции. В следующем параграфе будут рассмотрены особые функции так.

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

§4. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.

Если x - логическая переменная, {0,1}, то выражение

$$x^{\delta}=\begin{cases} x, & если\ \delta=1, \\ \bar{x}, & если\ \delta=0 \end{cases}$$

называется литерой. Литеры x и $\bar{x}$ называются контрарными.

Элементарной конъюнкцией или ***конъюнктом*** называется конъюнкция литер. ***Элементарной дизъюнкцией*** или ***дизъюнктом*** называется дизъюнкция литер.

Пример3.1. Формулы $x\vee\bar{y}\vee\bar{z}$ и $x\vee y\vee x\vee\bar{x}$ - дизъюнкты, формулы $\bar{x}_1x_2x_3$ и $x_1x_2\bar{x}_3$ - конъюнкты, а x является одновременно и дизъюнктом, и конъюнктом.

Дизъюнкция конъюнктов называется ***дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ);*** конъюнкция дизъюнктов называется ***конъюнктивной нормальной формой (КНФ).***

Пример3.2. Формула $x\bar{y}\vee yz$ — ДНФ, формула $(x\vee z\vee\bar{y})(x\vee z)y$ — КНФ, а формула $x\bar{y}$ является одновременно КНФ и ДНФ.

Теорема3.1. *1) Любая формула эквивалентна некоторой ДНФ.*

2) Любая формула эквивалентна некоторой КНФ.

Алгоритм приведения формулы к ДНФ.

1. Выражаем все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, используя эквивалентности 11-15 предыдущего параграфа.

2. Используя законы де Моргана, переносим все отрицания к переменным и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x\sim x$.

3. Используя закон дистрибутивности , преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций.

В результате применения пп. 1-3 получается ДНФ данной формулы.

Пример 3.3. Приведем к ДНФ формулу $\varphi=((x\to y)\downarrow\neg(y\to z))$.

Выразим логические операции $\to$ и $\downarrow$ через $\wedge,\vee$ и $\neg$:

$$\varphi\sim(((\bar{x}\vee y)\downarrow\neg(\bar{y}\vee z))\sim((\bar{x}\vee y)\vee\neg(\bar{y}\vee z)))\ .$$

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

$$\varphi \sim (\neg(\bar{x} \vee y) \wedge \neg\neg(\bar{y} \vee z)) \sim ((\bar{\bar{x}} \wedge \bar{y}) \vee \neg(\bar{y} \vee z)$$

Используя закон дистрибутивности, приводим формулу к ДНФ: .

$$\varphi \sim (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)$$

Приведение формулы к КНФ производится аналогично приведению ее к ДНФ, только вместо п. 3 применяется

3'. Используя закон дистрибутивности преобразуем формулу так, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше, чем конъюнкции.

Пример 3.4. Приведем к КНФ формулу $\varphi = (x \to y) \wedge ((\bar{y} \to z) \to \bar{x})$.

Преобразуем формулу φ к формуле, не содержащей

$$\varphi \sim (\bar{x} \vee y) \wedge (\neg(\bar{y} \to z) \vee \bar{x}) \sim (\bar{x} \vee y) \wedge (\neg(\bar{\bar{y}} \vee z) \vee \bar{x})$$.

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:

$$\varphi \sim (\bar{x} \vee y) \wedge ((\bar{\bar{\bar{y}}} \wedge \bar{z}) \vee \bar{x}) \sim (\bar{x} \vee y) \wedge (\neg(\bar{y} \wedge \bar{z}) \vee \bar{x})$$.

По закону дистрибутивности получаем, что формула эквивалентна формуле $(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z})$, являющейся КНФ.

Упростим полученную формулу:

$$(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z})^{(1)} \sim (\bar{x} \vee (y \wedge \bar{y})) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z})^{(2)} \sim (\bar{x} \vee \bar{z})^{(3)} \sim \bar{x}$$

(для преобразования (1) использовался закон дистрибутивности, для (2) — эквивалентность 10, для (3) — закон поглощения).

Таким образом, формула φ эквивалентными преобразованиями приводится к формуле $\bar{x}$ (являющейся одновременно ДНФ и КНФ формулы).

§5. Совершенные ДНФ и КНФ.

Любая булева функция может иметь бесконечно много представлений в виде ДНФ и КНФ. Особое место среди этих представлений занимают *совершенные ДНФ (СДНФ)* и *совершенные КНФ (СКНФ)*.

Пусть $(x_1,...,x_n)$ — набор логических переменных, $\Delta = (\delta_1,...,\delta_n)$ - набор нулей и единиц.

Конституентой единицы набора называется конъюнкт $K^1(\delta_1,...,\delta_n) = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} ... x_n^{\delta_n}$.

Конституентой нуля набора называется дизъюнкт $K^0(\delta_1,...,\delta_n) = x_1^{1-\delta_1} \vee x_2^{1-\delta_2} \vee ... \vee x_n^{1-\delta_n}$

Отметим, что $K^1(\delta_1,...,\delta_n) = 1, \quad (K^0(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n) = 0)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = \delta_1, x_2 = \delta_2,...,x_n = \delta_n$.

Пример 4.1 - Формула $x_1\bar{x}_2x_3$ есть конституента единицы K^1 (1,0,1), формула $x \vee y \vee \bar{z}$ есть конституента нуля K^0(0,0,1).

Совершенной ДНФ называется дизъюнкция всех конституент единицы, а ***совершенной КНФ*** называется конъюнкция всех конституент нуля, среди которых нет одинаковых.

Таким образом; СДНФ (СКНФ) есть ДНФ (КНФ), в которой в каждый конъюнкт (дизъюнкт) каждая переменная x_i из набора $\{x_i,..., x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i ,либо ее отрицание .

Пример 4.2 формула $x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$ - СДНФ,

формула $(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)$ - СКНФ,

а формула $x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$ не является СДНФ.

Для решения задачи нахождения СДНФ и СКНФ, эквивалентных исходной формуле φ , предварительно рассмотрим разложения булевой функции $f(x_1 ,x_2 ,..., x_n)$ по m переменным (для определенности по $x_1, x_2, ..., x_m$) - разложения Шеннона.

ТЕОРЕМА (*О разложении булевой функции по переменным*)

$$f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n) = \\ = \bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1,\dots,\sigma_m,x_{m+1},\dots,$$

Где дизъюнкция берется по всем возможным наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

Доказательство.

$$\Big(\bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)} x_1^{\sigma_1}\wedge\dots\wedge x_m^{\sigma_m}\wedge f(\sigma_1,\dots,\sigma_m,x_{m+1},\dots,x_n)\Big)(a_1,\dots,a_n)=$$
$$=\bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)} a_1^{\sigma_1}\wedge\dots\wedge a_m^{\sigma_m}\wedge f(\sigma_1,\dots,\sigma_m,a_{m+1},\dots,a_n)=$$
$$=a_1^{a_1}\wedge\dots\wedge a_n^{a_n}\wedge f(a_1,\dots,a_m,a_{m+1},\dots,a_n)=f(a_1,\dots,a_n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь доказывается, что некоторая формула реализует заданную функцию. Для этого достаточно взять произвольный набор значений аргументов функции, вычислить на этом наборе значение формулы, и если оно окажется равным значению функции на этом наборе аргументов, то из этого следует доказываемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.
$$f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=x_n\wedge f(x_1,\dots,x_{n-1},1)\vee\overline{x}_n\wedge f(x_1,\dots,x_{n-1},0).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.
$$f(x_1,\dots,x_n)=\bigvee_{f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}\wedge\dots\wedge x_n^{\sigma_n}\wedge f(\sigma_1,\dots,\sigma_n).$$

Предельное представление (т.е. когда $n=m$) булевой функции $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ в виде

$$\bigvee x_1^{\sigma_1}\wedge\dots\wedge x_n^{\sigma_n}$$

называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой*** (СДНФ).

ЗАМЕЧАНИЕ. СДНФ называется совершенной, потому что каждое слагаемое в дизъюнкции включает все переменные; дизъюнктивной, потому что главная операция — дизъюнкция, а почему она называется нормальной, объяснено в следующем отступлении.

ТЕОРЕМА. ***Всякая [булева функция](#) (кроме 0) имеет единственную СДНФ.***

Доказательство.

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} x_1^{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\sigma_n} \wedge f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) =$$

$$= \bigvee_{f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\sigma_n} \wedge f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) =$$

$$= \bigvee_{f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\sigma_n}. \quad \square$$

ТЕОРЕМА. ***Всякая булева функция может быть выражена через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание:***

$$\forall f \in P_n \; \exists \mathfrak{F}[\{\vee, \wedge, \neg\}] \; f = \mathrm{func}\,\mathfrak{F}.$$

Доказательство

Если $f = 0$, то $0 = x \wedge \overline{x}$. Если $f \neq 0$, то см. предыдущую теорему.

ТЕОРЕМА. ***Всякая булева функция (кроме 1) может быть единственным образом выражена в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ):***

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{f^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}.$$

Доказательство.

По принципу двойственности из предыдущей теоремы.

Построим совершенные ДНФ и КНФ булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблицей истинности (табл. 4.1).

Таблица 4.1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Пример

- СДНФ

$\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 x_3$

- СКНФ

$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)\,(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$

$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\,(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

Описанный способ нахождения СДНФ и СКНФ по таблице истинности бывает часто более трудоемким, чем следующий алгоритм.

Алгоритм нахождения СДНФ функции, заданной таблицей истинности.

Для нахождения СДНФ данную формулу приводим сначала к ДНФ, а затем преобразовываем ее конъюнкты в конституенты единицы с помощью следующих действий:

а) если в конъюнкт входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем этот конъюнкт из ДНФ;

б) если в конъюнкт одна и та же литера x^{δ} входит несколько раз, то удаляем все литеры x^{δ}, кроме одной;

в) если в некоторый конъюнкт $x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \ldots x_n^{\delta_n}$ не входит переменная y, то этот конъюнкт заменяем на эквивалентную формулу $x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \ldots x_k^{\delta_k} \wedge (y \vee \bar{y})$ и, применяя закон дистрибутивности, приводим полученную формулу к ДНФ; если недостающих переменных несколько, то для каждой из них к конъюнкту добавляем соответствующую формулу вида $(y \vee \bar{y})$;

г) если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конституент единицы, то оставляем только одну из них. В результате получается СДНФ.