Таблица интегралов

1.	$\int dx = x + c$	1.	$\int (u)' dx = u + c$
2.	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad m \neq 1$	2.	$\int u^m (u)' dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c \quad m \neq -1$
3.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$	3.	$\int \frac{(u)' dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	4.	$\int \frac{(u)' dx}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$
5.	$\int e^x dx = e^x + c$	5.	$\int e^u (u)' dx = e^u + c$
6.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	6.	$\int a^u (u)' dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$
7.	$\int \cos x dx = \sin x + c$	7.	$\int \cos u (u)' dx = \sin u + c$
8.	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	8.	$\int \sin u (u)' dx = -\cos u + c$
9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + c$	9.	$\int \frac{(u)' dx}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + c$
10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + c$	10.	$\int \frac{(u)' dx}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + c$
11.	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + c$	11.	$\int \frac{(u)' dx}{\cos u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + c$
12.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + c$	12.	$\int \frac{(u)' dx}{\sin u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{u}{2}\right\rvert + c$
13.	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + c$	13.	$\int \frac{(u)' dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + c$
14.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert \frac{x - a}{x + a}\right\rvert + c$	14.	$\int \frac{(u)' dx}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert \frac{u - a}{u + a}\right\rvert + c$
15.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$	15.	$\int \frac{(u)' dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$
16.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + c$	16.	$\int \frac{(u)' dx}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + c$
17.	$\int \mathrm{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	17.	$\int \mathrm{tg} u (u)' dx = -\ln\lvert\cos u\rvert + c$
18.	$\int \mathrm{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$	18.	$\int \mathrm{ctg} u (u)' dx = \ln\lvert\sin u\rvert + c$

Таблица производных

1.	$(C)' = 0$	1.	$(C)' = 0$
2.	$(x^n)' = nx^{n-1}$	2.	$(u^n)' = nu^{n-1}(u)'$
3.	$(e^x)' = e^x$	3.	$(e^u)' = e^u(u)'$
4.	$(a^x)' = a^x \ln a$	4.	$(a^u)' = a^u \ln a(u)'$
5.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	5.	$(\ln u)' = \frac{1}{u}(u)'$
6.	$(\sin x)' = \cos x$	6.	$(\sin u)' = \cos u(u)'$
7.	$(\cos x)' = -\sin x$	7.	$(\cos u)' = -\sin u(u)'$
8.	$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	8.	$(\mathrm{tg}u)' = \frac{1}{\cos^2 u}(u)'$
9.	$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	9.	$(\mathrm{ctg}u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}(u)'$
10.	$(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$	10.	$(\mathrm{ch}u)' = \mathrm{sh}u(u)'$
11.	$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$	11.	$(\mathrm{sh}u)' = \mathrm{ch}u(u)'$
12.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12.	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}(u)'$
13.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	13.	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}(u)'$
14.	$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$	14.	$(\mathrm{arctg}u)' = \frac{1}{1+u^2}(u)'$
15.	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	15.	$(\mathrm{arcctg}u)' = -\frac{1}{1+u^2}(u)'$
16.	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	16.	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}(u)'$
17.	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	17.	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}(u)'$
18.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	18.	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}(u)'$
19.	$x' = 1;\quad (cx)' = c$	19.	$(cu)' = c(u)'$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Методы интегрирования

Интегрирование по частям $\int u d\nu = u\nu - \int \nu du$.

1. $\int P(x)\cdot e^{ax}dx$, $\int P(x)\cdot \sin ax\, dx$, $\int P(x)\cdot \cos ax\, dx$, где $P(x)$ – многочлен, a – число.

Полагают $u = P(x)$, а за dv обозначают все остальные сомножители.

2. $\int P(x)\cdot \arcsin x\, dx$, $\int P(x)\cdot \arccos x\, dx$, $\int P(x)\ln x\, dx$, $\int P(x)\cdot \mathrm{arctg}\, x\, dx$, $\int P(x)\cdot \mathrm{arcctg}\, x\, dx$.

Полагают $dv = P(x)\, dx$, а за u принимают все остальные сомножители.

3. $\int e^{ax}\cdot \sin bx\, dx$, $\int e^{ax}\cdot \cos bx\, dx$, где a и b – числа. Можно положить $u = e^{ax}$.

Простейшие дроби $\frac{A}{ax+в}$, $\frac{B}{(ax+в)^n}$, $\frac{Ax+B}{\underset{Д<0}{ax^2+вx+c}}$, $\frac{Ax+B}{(ax^2+вx+c)^n}$ (n>0 целое).

$\int \sin^m x\cdot\cos^n x\, dx$

m>0 нечет. $\cos x = t$

n>0 нечет. $\sin x = t$

m+n<0 четн. $\mathrm{tg}x = t$

m≥0, n≥ 0 четн. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\int \sin nx\cdot \cos mx\, dx$ $\qquad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$

$\int \cos nx\cdot \cos mx\, dx$ $\qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$

$\int \sin nx\cdot \sin mx\, dx$ $\qquad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

$\int \frac{dx}{a\sin x + в\cos x + c}$ $\quad \mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$, $\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$, $\quad x = t^\kappa$ (κ – общий знаменатель $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$)

$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+dx+c}}$ $\qquad x-\alpha = \frac{1}{t}$

$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ $\qquad x = a\sin t$

$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ $\quad x = a\,tgt$

$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ $\quad x = \dfrac{a}{\sin t}$

$\int \dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+вx+c}}dx$, в числителе выделить производную подкоренного выражения, ввести компенсирующие множители и слагаемые, разбить на сумму двух интегралов.

Определенный интеграл

$$\int_a^в f(x)dx = F(x)\Big|_a^в = F(в) - F(a)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) - \text{четная функция} \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция.} \end{cases}$$

Интегрирование по частям: $\int_a^в u\,d\nu = u\nu\Big|_a^в - \int_a^в \nu\,du$.

Несобственные интегралы – это интегралы вида $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{в} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, $\int_a^в f(x)dx$ (если $f(x)$ имеет разрыв на [а, в]).

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} P > 1 & \text{сходится} \\ P \le 1 & \text{расходится} \end{cases}$$

$$\int_a^{\infty} e^{-\kappa x}dx = \begin{cases} \kappa > 0 & \text{сходится} \\ \kappa \le 0 & \text{расходится} \end{cases}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^m} = \begin{cases} m > 1 & \text{сходится} \\ m \le 1 & \text{расходится} \end{cases}$$

$$\int_a^{в} \frac{dx}{(в-x)^p} = \begin{cases} P < 1 & \text{сходится} \\ P \ge 1 & \text{расходится} \end{cases}$$

Приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции $S = \int_a^b f(x)dx$.

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $(f_1(x) \le f_2(x))$, прямыми $x = a$ и $x = b$, $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

Площадь криволинейной трапеции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $y(t) \geq 0$, $t \in [t_1, t_2]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t) dt$.

Площадь криволинейного сектора $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$.

Длина дуги кривой

Если линия задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, в]$ $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$