ВВЕДЕНИЕ

При изучении явлений природы важным моментом является исследование переходных процессов, которые описывают динамику переходов из одного состояния объекта исследования в другое. Такие процессы представляются последовательной цепочкой, связывающей друг с другом каким-либо образом явления, происходящие во времени или в пространстве. Наличие причинно-следственных связей явлений обуславливают характер протекания процессов в природе и определяют однозначное направление течения времени. Нет связи явлений (взаимодействия) – нет течения времени. Одним из способов исследования природы является моделирование явлений и процессов с помощью математических уравнений и некоторых условий, накладываемых на них. Эти уравнения устанавливают связи между физическими величинами, характеризующими рассматриваемые явления. Такие связи воспринимаются нами как законы, определяющие данные явления. Эти уравнения составляются с учетом общих законов сохранения количества материи, сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и так далее. Как правило, не удается найти прямой зависимости между исследуемыми величинами, но если можно найти зависимость между ними и скоростями их изменения, то в этом случае в уравнение связи будут входить производные и такие уравнения будут дифференциальными. Оговорим сразу, что будем рассматривать связи только двух величин, одна из которых определятся как независимая переменная, а вторая как функция. В этом случае рассматриваются так называемые обыкновенные дифференциальные уравнения. Решение же дифференциальных уравнений со многими независимыми переменными относится к разделу, который называется математической физикой.

Подчеркнем так же, что исследуются только непрерывные, то есть эволюционные процессы. Прерывные (революционные) процессы, связанные с разрывами физических величин, рассматриваются в теории катастроф или, как ее называют за рубежом, теории бифуркаций. Точное или приближенное решение ДУ является важной теоретической и практической задачей. Однако иногда достаточно установить общие закономерности решения, такие как его периодичность, возрастание или убывание решения от временной или пространственной переменной, как меняется решение от малых изменений начальных условий и так далее.

В данном учебном пособии излагаются методы решения динамических задач в механике, электротехнике и гидродинамике и простейшие способы исследования и анализа этих решений. Даны элементы вариационного исчисления для получения экстремалей некоторых функционалов методом решения ДУ.

Теория рядов имеет огромное практическое приложение, так как позволяет делать вычисление значений функций в любой заданной точке с любой степенью точности. Других методов решения данной задачи просто нет. Ряды бывают числовыми, которые, в свою очередь, делятся на знакоположительные и знакопеременные, и функциональными. Функциональные ряды в конечном счете при определенном значении независимой переменной сводятся к числовым рядам. Функциональные ряды используются для решения дифференциальных уравнений, вычисления не берущихся в элементарных функциях интегралов, интерполяции сложных функций и так далее.

Из всего многообразия функциональных рядов остановимся на изучении степенных и тригонометрических как наиболее часто встречающихся в инженерной практике. Вы уже встречались с конечными степенными рядами, а именно с многочленом Тейлора (Маклорена). Теперь нашей задачей является исследование свойств и приложений бесконечных, но счетных рядов.

Другим важным приложением теории рядов являются ряды Фурье, с помощью которых изучаются периодические явления в природе. Кроме того данные ряды лежат в основе теории передачи информации. Даны элементы вариационного исчисления для получения экстремалей некоторых функционалов методом решения ДУ. Напомним, что многие практические решения дифференциальных уравнений, как правило, обозначаются через специальные ортогональные функции, которые, в свою очередь, представляются функциональными рядами.

В связи с важностью решения практических задач данные функции табулируются, то есть их значения при различных значениях параметров заносятся в таблицы. Вычисление значений таких функций важно для понимания законов окружающего нас мира.

ГЛАВА 1
ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Общие понятия о дифференциальных уравнениях (ДУ)

Рассмотрим одну из задач гидродинамики.

Пример. Цилиндрический резервуар с горизонтальной осью имеет в длину размер 6 метров и диаметр 4 метра. За сколько времени вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через отверстие радиуса 1/12 метра, сделанное в дне резервуара. Скорость истечения воды определена экспериментально и описывается формулой $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, где h – уровень воды в резервуаре и g есть ускорение свободного падения, равное 9,8 м/с^2. Данная задача приводит к дифференциальному уравнению вида $y' = f(x, \acute{o})$.

Дифференциальные уравнения (ДУ) являются математическим аппаратом для исследования динамики процессов и явлений, протекающих в окружающем нас мире. Как показала практика, ДУ являются более или менее точной математической моделью реальных процессов, протекающих в природе. Составляя и решая ДУ, мы получаем представление о законах природы. Зная законы, можно прогнозировать реальные процессы при других условиях и параметрах, что важно для практической, производственной деятельности человека. Таким образом, каждый исследователь и в частности инженер должен уметь составлять дифференциальные уравнения, решать их и делать анализ полученного решения. ДУ n-ого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные до n-ой включительно

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (1.1)$$

Если это уравнение разрешено относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \qquad (1.2)$$

то такую форму называют нормальной.

Порядок ДУ определяется порядком наивысшей производной, входящей в данное уравнение. Например, известное дифференциальное уравнение И. Ньютона, описывающее движение материального тела массы m под действием приложенных к нему l внешних сил $\vec{F}_i(t), (i = \overline{1, l})$, имеет вид

$$m\,\vec{S}''(t) = \sum_{i=1}^{l} \vec{F}_i(t, \vec{S}(t), \vec{S}'(t)), \qquad (1.3)$$

где $\left|\vec{S}(t)\right|$ – пройденный телом путь и t – время движения является ДУ второго порядка. Здесь $\vec{S}''(t)$ есть вектор ускорения тела, $\vec{S}'(t)$ есть вектор его скорости. Так как мы рассматриваем искомую функцию одного аргумента, то ДУ для нее называются обыкновенными. Если же искомая функция зависит от нескольких переменных, то для ее получения необходимо решать ДУ в частных производных. Этот раздел математики называется математической физикой и будет Вами изучаться в дальнейшем.

Р*ешением ДУ* называется функция $y=\varphi(x)$, определенная в интервале $x\in(a,b)$ вместе со своими производными до n-ого порядка включительно и такая, что подстановка ее в ДУ превращает его в тождество по x на этом интервале. Рассмотрим ДУ первого порядка $F(x,y,y')=0$ или $y'=f(x,y)$, записанные в неявной и в явной (нормальной) форме относительно производной. Начнем с решения простейшего ДУ: $y'=f(x)$, когда правая часть уравнения не зависит от функции. Очевидно, что решение этого ДУ сводится к вычислению неопределенного интеграла, который, как известно, определен с точностью до постоянной С: $y=\int f(x)dx+C$.

Видно, что решение любого ДУ первого порядка сводится к однократному интегрированию, поэтому ***общим решением*** ДУ будет функция вида $y=\varphi(x,C)$. Геометрической иллюстрацией общего решения является семейство интегральных кривых (рис. 1.1). Отметим, что решение ДУ в форме $\hat{O}(x,y)=0$ называют его ***общим интегралом***.

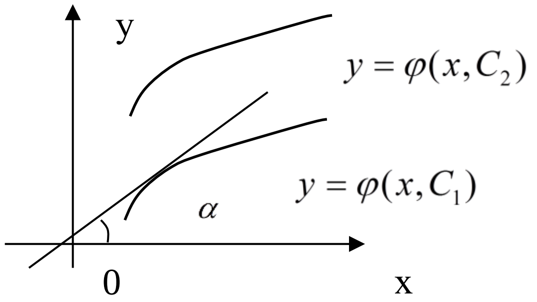

Рис. 1.1. Семейство интегральных кривых

Интегральная кривая решения ДУ $y'=f(x,\acute{o})$ обладает тем свойством, что в каждой ее точке угол наклона касательной α определяется значением функции $f(x,y)$ в этой точке. Таким образом, уравнение $y'=f(x,y)$ задает поле направлений на плоскости *XOY*. На основании этого свойства построен графический способ получения приближенного решения ДУ первого порядка. В плоскости *XOY* рисуются линии уровня $f(x,y)=const$ и на них отмечаются направления касательных $y'=const$ к линии уровня. Причем это направление сохраняется для всех точек этого уровня. Метод так и называется ***метод изоклин*** (сохранения наклона). Проведя несколько линий уровня и определяя для каждой наклон касательной (отмечают штрихом), можно по ним примерно провести интегральные кривые. Чем больше проведено линий различного уровня и больше штрихов, показывающих направление касательной к интегральной кривой, тем точнее решение.

Пример. Решить графически $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = k \\ \mathrm{tg}\,\alpha = k \end{cases}$. Задавая ряд значений κ = 0, 1, 2, 4, ..., получим соответствующие углы наклона касательных $\alpha = 0^0, 45^0, 64^0, 72^0, 76^0, ...$ к уравнениям окружности с радиусами 1, 2, 3,…. Соединяя линии уровня интегральными кривыми с учетом их наклона к каждому уровню, получим несколько приближенных решений, представленных на рис. 1.2.

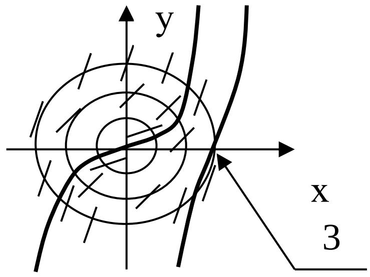

Рис. 1.2. Иллюстрация метода изоклин

Заметим, что переменные *x* и *y* равноправны, поэтому иногда проще решить ***эквивалентное*** (имеющее одинаковое решение) дифференциальное уравнение

$$x'(y) = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{1.4}$$

Придавая произвольной постоянной С определенное значение, можно получить ***частное решение*** ДУ. Частное решение получается с помощью начальных условий в виде задания пары чисел (x_0, y_0) таким образом, что $y\big|_{x_0} = y_0$, ($y(x_0) = y_0$). Для простейшего ДУ $y' = f(x)$ получаем $y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + C$ и при $y(x_0) = y_0$, получаем $y_0 = C$.

В отличие от общего решения частное решение только одно, и представлено одной интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0). Решение ДУ с заданными начальными условиями называется решением задачи Коши.

Пример. Решить $y' = -\dfrac{x}{y}$ при $y(3) = 4$.

Решение. Представив производную в форме Лейбница $y' = \dfrac{dy}{dx}$, разделим переменные $ydy = -xdx.$ Причем $y \neq 0$. Далее интегрируем обе части уравнения и получаем общее решение $x^2 + y^2 = C$. Частное решение получается, когда из начального условия определим $C = 3^2 + 4^2 = 25$.

Ответ: $x^2 + y^2 = 5^2$.

1.2. Теорема Коши.

Как уже отмечалось в начале главы, ДУ служат инструментом исследования процессов, происходящих в природе. Из опыта мы знаем, что законы однозначны и устойчивы (повторяемы), поэтому естественно потребовать, чтобы решения ДУ тоже были единственны и полностью определяли исследуемый закон протекания процесса. Не должно быть, чтобы один и тот же процесс описывался по-разному в равных условиях опыта.

Сформулируем теорему существования и единственности решения ДУ. Приведем ее без доказательств. Пусть дано ДУ в нормальной форме $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ определена в некоторой области $(x, y) \in D$ на XOY и точка $M_0(x_0, y_0)$ тоже принадлежит области D.

Теорема Коши

1. Если $f(x, y)$ есть непрерывная функция обоих своих переменных в области D, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, то уравнение $y' = f(x, y)$ ***имеет решение*** (решение существует) $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$.

2. Если $f(x, y)$ непрерывная функция и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ относительно переменной y, то это решение ***единственно.***

Таким образом, через точку (x_0, y_0) проходит только одна интегральная кривая (рис. 1.3). Это утверждение имеет локальный характер, поскольку $f(x, y)$ непрерывна в точке M_0 (x_0, y_0) и ее окрестности. Но это не отменяет того факта, что возможно существует другое решение $y = y_1(x_0)$, проходящее через точку (x_0, y_1).

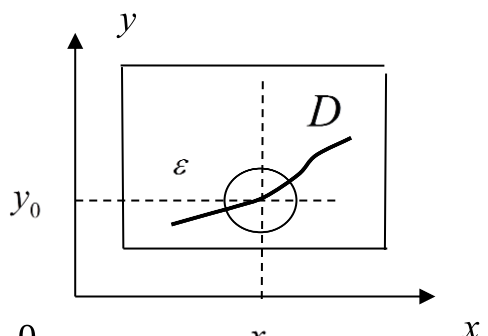

Рис. 1.3. Иллюстрация единственности решения задачи Коши

Точки, в которых условие единственности нарушается, называются ***особыми.*** Через них или вообще не проходят интегральные кривые или проходят не менее двух интегральных кривых. Решение ДУ $y = \psi(x)$ называется особым, если в каждой его точке нарушается свойство единственности решения (значение $\frac{\partial f}{\partial y}$ – неограниченно или не определено). График особого решения называется ***особой интегральной кривой***. Особое решение нельзя получить из общего ни при каких значениях постоянной С. Геометрически это огибающая семейства интегральных кривых, определяемых общим интегралом

$$\Phi\ (x, y, C) = 0. \tag{1.5}$$

Отметим еще раз, что особое решение проходит через точки, где производная правой части $\frac{\partial f}{\partial y}$ неограниченна или не определена.

Отметим так же, что теорема Коши формулирует достаточное условие существования и единственности обыкновенного решения ДУ с начальными условиями. Но существуют решения, когда это условие нарушается, а решение, тем не менее, существует и единственно. Примером может служить решение ДУ: $y' = \frac{1}{y^2}$. Действительно, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y^2}) = -\frac{2}{y^3} \to \infty$ при $y \to 0$, но решение эквивалентного ДУ $x'(y) = y^2$ дает непрерывные интегральные кривые $x = \frac{y^3}{3} + C$.

Теорема Коши формулирует необходимые условия существования особого решения ($\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$), но не достаточные, так как не все решения являются особенными. Классификацию особых точек и методы получения особых решений рассмотрим далее.

Рассмотрим типовые решения ДУ первого порядка. Заметим, что не существует общего метода решения. Обычно рассматриваются отдельные виды ДУ и для каждого вида применяются свои специфические методы решения.

ГЛАВА 2
РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Отметим, что это основной вид ДУ, так как другие виды приводятся к нему. Итак, дано $y' = f(x, y)$ и выполняется $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, где

$f_2(y)\neq 0$ и непрерывна по переменной y в интервале *(c,d)*, а $f_1(x)$ непрерывна по x в интервале *(a,b)*. Разделенные переменные

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \qquad (1.6)$$

можно непосредственно интегрировать $\int\frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$.

Если поставлена задача Коши, то C определяется из начальных условий. Отметим, что $f_2(y)=0$ тоже является решением данного типа ДУ, поэтому необходимо не потерять это решение. Заметим, что дифференциалы переменных не должны быть в знаменателях выражений, так как ДУ приводится к интегральному виду.

Пример. Найти общее решение ДУ $y' = 5yx^2$.

Решение. $\frac{dy}{dx} = 5yx^2 \Rightarrow \frac{dy}{y} = 5x^2dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = 5\int x^2dx + \ln C \Rightarrow \ln y = \frac{5}{3}x^3 + \ln C$.

Ответ: $\begin{cases} y = Ce^{\frac{5}{3}x^3} \\ y = 0 \end{cases}$.

Пример. Найти частное решение ДУ $y'\text{ños}\, x = \frac{y}{\ln y}$, $y(0)=1$.

Решение. $\ln y\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\text{ños}\, x} \Rightarrow (\ln y)^2 = 2\ln\left|\ \mathrm{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\ \right| + C$. При $x = 0$, $y = 1$, С = 0.

Ответ: $y = e^{\sqrt{2\ln\left|\mathrm{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\ \right|}}$.

Пример. Найти общее решение $x^2(y^2-4)dx + ydy = 0$.

Решение. Переменные разделяются, каждая к своему дифференциалу $\frac{ydy}{y^2-4} = -xdx$. Видно, что y = –2 и y = 2 тоже являются решениями ДУ. Решение представлено на рис. 1.4.

Ответ: $\begin{cases} y = \pm\sqrt{4+Ce^{-x^2}} \\ y = \pm 2 \end{cases}$

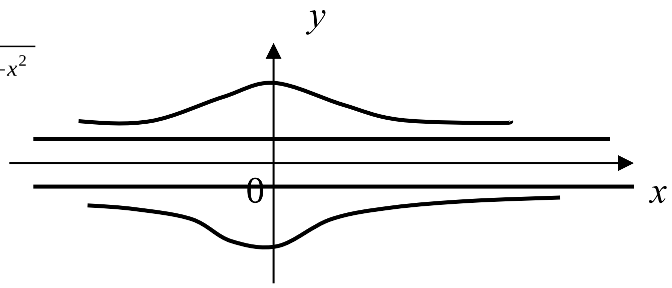

Рис. 1.4. Общее и особое решения ДУ $x^2(y^2-4)dx + ydy = 0$.

Пример. Найти частное решение $yy' + xe^y = 0, \quad y(1) = 0.$

Решение. $e^{-y}ydy = -xdx \Rightarrow -e^{-y}y - e^{-y} = -\frac{x^2}{2} + C$. При $x = 1$ и $y = 0$ получаем –1 = –1/2 + C. Отсюда следует, что C = –1/2.

Ответ: $e^{-y}(1+y) = \frac{x^2+1}{2}$.

Пример. Какую форму должна иметь однородная вертикальная колонна с круглым сечением, чтобы давление удерживаемого ею груза и ее собственного веса, приходящегося на единицу площади горизонтального сечения, было всюду одинаково. Это условие отсутствия в колонне внутренних напряжений, приводящих колонну к саморазрушению.

Решение. Сделаем вспомогательный рисунок колонны с грузом и выберем систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила вдоль колонны, а ось ординат была перпендикулярна ей (рис. 1.5). Начало координат выберем в основании груза. Вес груза и вес колонны на уровне x определится как

$$P(x) = P_g + \gamma \cdot \pi \int_0^x y^2(x)dx,$$

где γ – удельный вес материала колонны Объем колонны определяется как объем тела вращения линии $y(x)$ вокруг оси x. Условие отсутствия внутренних напряжений в колонне запишется как уравнение

$$\frac{P_g + \gamma \cdot \pi \int_0^x y^2(x)dx}{\pi \cdot y^2(x)} = \frac{P_g}{\pi \cdot r^2} = Const,$$

где r – радиус колонны в основании груза.

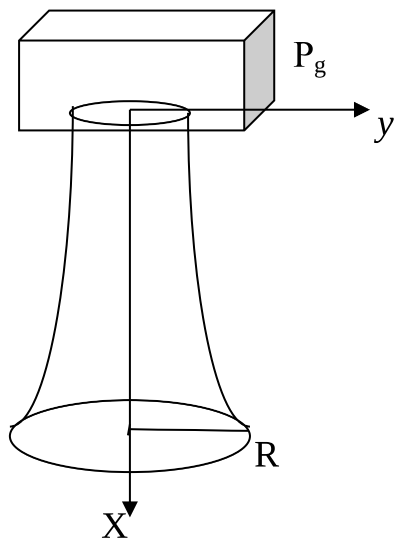

Рис. 1.5. Колонна с грузом

Умножаем данное выражение на $\pi \cdot y^2(x)$, дифференцируем по x и получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dy}{y} = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot r^2}{2P_g}dx$ с начальным условием $y(0)$ = r. Решение этого ДУ имеет вид $y(x) = r \cdot e^{\alpha \cdot x}$, где $\alpha = \frac{\pi \gamma r^2}{2P_g}$, то есть представляет экспоненциальную зависимость. Можно сделать предположение, что в древней Греции все цилиндрические колонны с постоянным радиусом просто саморазрушились с течением времени.

Пример. Рассмотрим процесс распространения информации. Одна фирма выпустила новую продукцию и дала об этом рекламное объявление. Из полного числа возможных покупателей N получили рекламную информацию N_0 покупателей. В дальнейшем информация о товаре среди покупателей распространялась только посредством их общения. Найти скорость распространения информации о товаре и определить возможную динамику его продажи (задача о выгодности рекламы).

Решение. Обозначим число покупателей, не слышавших о рекламе товара как *x*, $x \in (N_0, N)$. Тогда скорость информации за счет общения клиентов будет пропорциональна как числу таких покупателей *x*, так и числу потенциальных покупателей ($N - x$), до которых информация еще не дошла.

$\frac{dx}{dt} \propto x(N-x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = kx(N-x)$ с начальным условием $x = N_0$ при $t = 0$.

Здесь введено обозначение *k* – коэффициент коммуникабельности. После разделения переменных и интегрирования, получаем

$$\frac{dx}{x(N-x)} = kdt \Rightarrow \frac{1}{N}\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x}\right)dx = kt + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + C \quad при \quad t = 0 \quad C = \frac{1}{N}\ln\frac{N_0}{N-N_0}.$$

Окончательно получим ответ $x = \dfrac{N}{1 + \dfrac{N-N_0}{N_0}e^{-Nkt}}$.

В экономике график этой функции называется логистической кривой и описывает эффект насыщения спроса на какой-либо товар с течением некоторого времени. Здесь так же учитывается зависимость от степени начальной информированности $\frac{N}{N_0}$, которую можно интерпретировать как задачу о выгоде рекламы продаваемого товара. Действительно, если была проведена интенсивная реклама товара ($N_0 \to N$), то, как видно из графика (рис. 1.6), товар будет быстро продаваться и можно быстро окупить затраты на его производство и можно снова начать его воспроизводство.

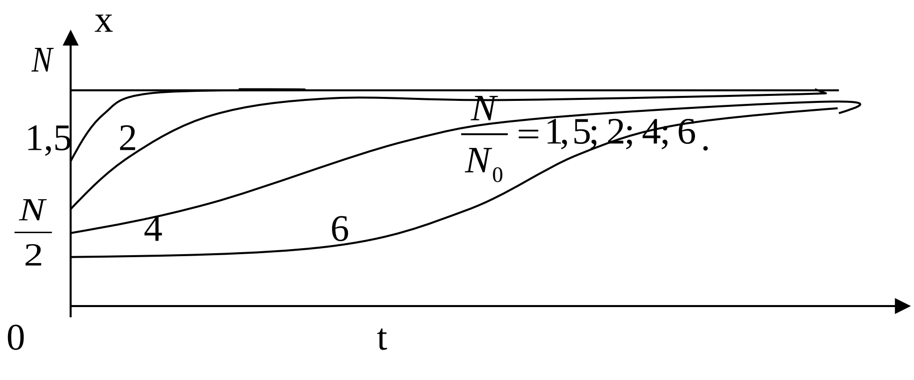

Рис. 1.6. Логистические кривые

С другой стороны, экономя на рекламе ($N_0 \to 0$), увеличиваем срок реализации товара. Фирма, выпускающая товар, может быть уже разорилась, а ее товары все еще в продаже. Кривая описывает процесс насыщения рынка товаром и инерцию того же рынка к появлению нового товара.

Пример. Решить ДУ: $y' = \sin(x+y)$.

Решение. Уравнение не является ДУ с разделяющими переменными, но может быть к нему приведено. Введем новую переменную $z = x + y$. и ДУ получим в виде $z' - 1 = \sin z$, $\dfrac{dz}{1+\sin z} = dx$.

Умножим ДУ и разделим его на $(1-\sin z)$, получим $\dfrac{1-\sin z}{\cos^2 z} dz = dx$. Решение имеет вид $\operatorname{tg} z - \dfrac{1}{\cos z} = x + C$. Осталось перейти к старым переменным.

Ответ: $\operatorname{tg}(x+y) - \dfrac{1}{\cos(x+y)} = x + C.$

2.2. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ есть однородная функция своих переменных измерения порядка n, если выполняется

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y). \qquad (2.1)$$

Примером может служить функция 2-ого порядка $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, *где правая часть уравнения может быть представлена как функция отношения аргументов, называется однородным ДУ нулевого порядка.* Данное ДУ устанавливает связь углов наклона касательной к интегральной кривой и полярного угла координаты текущей точки на этой кривой (рис. 2.1), где $\operatorname{tg}\alpha = f(\operatorname{tg}\theta)$.

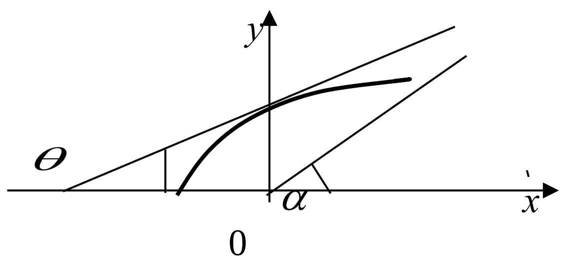

Рис. 2.1. Угол наклона касательной к интегральной кривой

Для решения таких ДУ рекомендуется ввести вспомогательную переменную $u=\frac{y}{x}$, после чего данное уравнение сводится к ДУ с разделяющими переменными $u'x+u=f(u)\Rightarrow\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$.

Пример. Найти общее решение $(x^2+2xy)dx+xydy=0$.

Решение. Поделим все уравнение на x^2dx. Видно, что это однородное уравнение, поэтому делаем замену $y=ux$. Получаем

$$(1+2\frac{y}{x})+\frac{y}{x}y'=0\Rightarrow\left\{\frac{y}{x}=u\right\}\Rightarrow(1+2u)+u(u'x+u)=0\Rightarrow$$

$$1+2u+u^2=-uxu'\Rightarrow\frac{udu}{u^2+2u+1}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{(u+1-1)du}{(u+1)^2}\Rightarrow$$

$$\ln(u+1)+\frac{1}{u+1}=-\ln x+\ln C.$$

Возвращаемся к старой переменной y и получаем общее решение в виде $\ln\left(\frac{y+x}{x}\right)+\frac{x}{y+x}=\ln\left(\frac{C}{x}\right)$.

Пример. Найти частное решение $y'=\frac{x+y}{x-y}$, при $y(1)=\sqrt{3}$.

Решение.

$$xu'+u=\frac{1+u}{1-u}\Rightarrow xu'=\frac{1+u^2}{1-u}\Rightarrow\frac{(1-u)du}{1+u^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)=\ln x+\ln C.$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=\ln xC.$$

При $x=1, y=\sqrt{3}$ получаем $\ln C=\frac{\pi}{3}-\ln 2$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}+\frac{\pi}{3}-\ln 2$.

2.3. Линейные уравнения и уравнение Бернулли

Линейное дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции и производной имеет следующий вид

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{2.2}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции от переменной x в той области D, в которой требуется проинтегрировать ДУ. Отметим, что при $q(x)=0$ уравнение превращается в ДУ с разделяющими переменными. Данное ДУ решается двумя стандартными методами, а именно методом Бернулли и более универсальным методом Лагранжа, который позволяет решать линейные ДУ не только первого порядка.

Вначале рассмотрим ***метод Бернулли***. Представляем искомую функцию в виде произведения двух неизвестных функций $y = u \cdot v$, тогда ДУ примет вид

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x). \tag{2.3}$$

Представим данное уравнение системой двух уравнений, полагая сумму, например, второго и третьего слагаемого в левой части уравнения равной нулю $\begin{cases} u(v' + p(x)v) = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$

Очевидно, что $u \neq 0$. Решаем последовательно два уравнения с разделяющимися переменными. Так как начальное ДУ первого порядка, то одну из двух полученных произвольных постоянных полагают равной нулю.

Пример. Решить задачу Коши $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$ при условии $y(0) = 0.$

Решение. Поделив все уравнение на $\cos^2 x$, видим, что это линейное ДУ.

$$y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \Rightarrow \begin{cases} v' + \dfrac{v}{\cos^2 x} = 0, u \neq 0, \\ u'v = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}. \end{cases} \Rightarrow \ln v = -\operatorname{tg} x + C.$$

Полагаем C = 0 и получаем для функции решение $v = e^{-\operatorname{tg} x}$, которое подставляем во второе ДУ. Получим ДУ $du = e^{\operatorname{tg} x} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$, решение которого, после интегрирования по частям, дает следующий результат $u = (\operatorname{tg} x - 1)e^{\operatorname{tg} x} + C$. Получим общее решение в виде $y = uv = \operatorname{tg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{tg} x}$. Частное решение определяется при $x = 0$ и $y = 0$ как C = 1.

Ответ: $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$.

Пример. Найти общее решение ДУ $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x.$.

Решение. $\begin{cases} v' + \dfrac{xv}{1-x^2} = 0, u \neq 0, \\ u'v = \arcsin x + x. \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{xdx}{1-x^2} \Rightarrow v = \sqrt{1-x^2}$. Далее

$$du = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow u = \frac{\arcsin^2 x}{2} - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Ответ: $y = \sqrt{1-x^2}\left(\dfrac{\arcsin^2 x}{2} - \sqrt{1-x^2} + C\right).$

Рассмотрим решение ДУ ***методом Лагранжа***, который имеет и другое название – ***метод вариации произвольных постоянных***. Решение разбивается на два этапа.

1. Сначала решается ДУ без правой части $y' + p(x)y = 0$,

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

2. Предполагаем, что уравнение $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, где C(x) является уже функцией от x и является решением линейного ДУ с правой частью.

3. Подставляем это решение в ДУ и получаем уравнение для определения $C'(x)$, а затем и $C(x)$. Согласно намеченному плану получим

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \quad \Rightarrow \quad C(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Таким образом, получим табличное решение, имеющееся в любом справочнике по математике

$$y = e^{-\int p(x)dx}(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx). \qquad (2.4)$$

Пример. Решить уравнение $y = xy' + y'\ln y$.

Решение. Данное ДУ является нелинейным относительно функции y, но линейным относительно независимой переменной x. Поэтому переходим к решению эквивалентного ДУ, где x является функцией, а y – независимой переменной $x'(y) - \frac{1}{y}x = \frac{\ln y}{y}$. (*)

Решим ДУ **методом Лагранжа.**

Ищем решение в виде $x(y) = C(y)y$. Подставляем это решение в ДУ(*) и получаем

$$C'(y)y + C(y) - \frac{C(y)y}{y} = \frac{\ln y}{y} \quad \Rightarrow \quad C'(y) = \frac{\ln y}{y^2} \quad \Rightarrow \quad C(y) = C - \frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y}.$$

Окончательный ответ имеет вид $x = Cy - \ln y - 1$.

Дифференциальное уравнение Бернулли имеет следующий вид:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad (2.5)$$

и является нелинейным ДУ относительно y. Отметим, что при $n = 1$ оно превращается в ДУ с разделяющими переменными, а при $n = 0$ превращается в линейное ДУ.

Существуют три способа решения ДУ Бернулли.

1. При $n \geq 2$ делают замену $z = y^{1-n}$ и сводят данное уравнение к линейному ДУ: $z' + p(x)(1-n)z = (1-n)q(x)$.

2. Решают методом Бернулли.

3. Решают методом Лагранжа.

Рекомендуется сразу решать двумя последними методами. Покажем это на примере.

Пример. Решить ДУ $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$.

Решение 1. Делаем рекомендуемую замену $z = y^{-3}$, $\quad y = z^{-\frac{1}{3}}$. Получим $-\dfrac{1}{3} z^{-\frac{4}{3}} z' + \dfrac{z^{-\frac{1}{3}}}{x} = x^2 z^{-\frac{4}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad z' - 3\dfrac{z}{x} = -3x^2$,

которое можно легко решить, например, методом Бернулли

$$\begin{cases} u'v = -3x^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{v} = 3\dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad v = x^3 \\ v' - 3\dfrac{v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\ln(\dfrac{x}{C})^3 \quad \Rightarrow \quad z = -x^3 \ln(\dfrac{x}{C})^3. \end{cases}$$

Ответ: $y = -\dfrac{1}{x\sqrt[3]{\ln(\frac{x}{C})^3}}$.

Решение 2. Сразу решаем данное уравнение **методом Бернулли** $y = u \cdot v$.

$$\begin{cases} v' = -\dfrac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{1}{x} \\ u' = x^2 u^4 v^3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{u^4} = \dfrac{1}{x} dx \quad \Rightarrow \quad u = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{\ln(\frac{x}{C})^3}}. \end{cases}$$

Ответ: $y = -\dfrac{1}{x\sqrt[3]{\ln(\frac{x}{C})^3}}$.

Решение 3. Применим **метод Лагранжа**.

1. $y' + \dfrac{y}{x} = 0 \qquad \Rightarrow \quad$ 2.) $y = \dfrac{C(x)}{x}$

$$C'(x) = \frac{C^4(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dC(x)}{C^4(x)} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3C^3(x)} = \ln x - \ln C.$$

Ответ: $y = -\dfrac{1}{x\sqrt[3]{\ln(\frac{x}{C})^3}}$.

2.4. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение ***в полных дифференциалах*** имеет вид

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,, \tag{2.6}$$

при этом выполняется равенство $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Действительно покажем это. Так как

$$P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad \Rightarrow \quad dU = 0 \quad \Rightarrow U = C = Const\,.$$

Таким образом, ДУ в полных дифференциалах можно непосредственно интегрировать с помощью так называемого криволинейного интеграла 2 рода, который не зависит от пути интегрирования и поэтому контур интегрирования можно выбрать параллельно осям координат.

Пример. Решить ДУ $(x - y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0$ при $y(0) = 0$.

Решение. Так как выполняется $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1,\ \ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1,$ то это ДУ в полных дифференциалах. Интегрируем по контуру, изображенному на рис. 2.2. Получаем $\int\limits_0^x (x-1)dx + \int\limits_0^y (e^y + x)dy = C \Rightarrow \ \dfrac{x^2}{2} - x + e^y + xy - 1 = C$ при $C = 0$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}x^2 + xy - x - 1 + e^y = 0$.

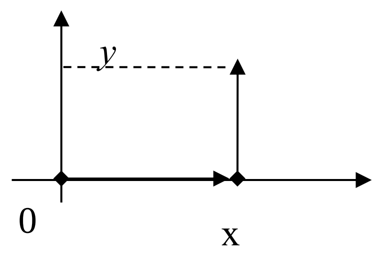

Рис. 2.2. Контур интегрирования

Заметим, что если условие $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ не выполняется, то в некоторых случаях можно свести ДУ к форме в полных дифференциалах с помощью так называемого интегрального множителя вида

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dx} \quad \text{или} \quad \mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dy}. \tag{2.7}$$

Покажем это для второго выражения. Действительно умножим ДУ на этот множитель $\mu(x)P(x,y)dx+\mu(x)Q(x,y)dy=0$ и потребуем, чтобы выполнялось соотношение $\frac{\partial\mu(x)P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\mu(x)Q(x,y)}{\partial x}$. Получим ДУ для определения данного интегрального множителя $Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})\mu$, решением которого является выражение $\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dy}$.

Пример. Решить ДУ $(x\sin y+y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy=0$.

Решение. $\frac{\partial P}{\partial y}=x\cos y+\cos y-y\sin y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\cos y$. Видно, что равенство $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ не выполняется. Определяем интегрирующий множитель $\mu=e^{\int\frac{x\cos y-y\sin y}{x\sin y-y\sin y}dx}=e^{x}$. Новые функции $P(x,y)=e^{x}(x\sin y+y\cos y),\quad Q(x,y)=e^{x}(x\cos y-y\sin y)$ удовлетворяют данному равенству. Интегрируем полученное уравнение $\int\limits_0^x e^{x}(x\sin y+y\cos y)dx+\int\limits_0^y e^{x}(x\cos y-y\sin y)dy=C$. Так как в первом интеграле контур интегрирования идет вдоль значения $y = 0$, то он не дает вклада в решение.

Ответ: $x\sin y+y\cos y+\sin y=-Ce^{-x}$.

Пример. Решить ДУ $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$.

Решение. Это уравнение в полных дифференциалах. Покажем как его можно решить, сведя его к однородному ДУ. Решением является $\begin{cases}x+y=2\\x-y=-4\end{cases}\Rightarrow\quad\Delta=-2\quad\Rightarrow\quad x=-1,\quad y=3$. Делаем замену переменных $z=x+1,\quad t=y-3,\quad dz=dx,\quad dy=dt$. ДУ превращается в однородное $(z+t)dz=(z-t)dt,$ которое решается заменой $z=ut\quad\Rightarrow\quad u't=\frac{1-2u-u^2}{1+u}\quad\Rightarrow-\frac{1}{2}\ln(1-2u-u^2)=\ln t+\ln C$. Возвращаемся к старым переменным и получаем $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+xy+4y-2x=C.$ Тот же самый ответ можно получить, непосредственно интегрируя ДУ методом решения ДУ в полных дифференциалах.

ГЛАВА 3

Приложения ДУ к задачам физики и геометрии

Рассмотрим приложения ДУ первого порядка к задачам геометрии, физики, теоретической механики и других разделов науки и техники.

Задача 1. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 1), если для любого отрезка [1; *x*] площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей кривой, в два раза больше произведения координат точки М (*x; y*) на кривой (*x* > 0, *y* > 0).

Решение. По условию задачи выполняется $\int\limits_1^x f(x)dx = 2xy$. После его дифференцирования получаем дифференциальное уравнение $y = 2y + 2xy' \quad \Rightarrow \quad y' = -\dfrac{y}{2x}$. Решение которого имеет вид $y = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$ и так как из начального условия следует, что $y(1) = 1$, то C = 1.

Ответ: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, представлен на рис. 3.6.

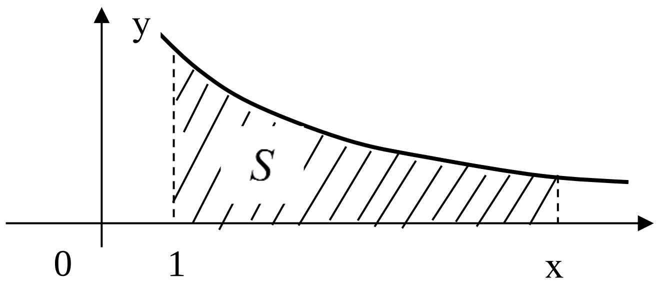

Рис. 3.6. Иллюстрация к задаче о поиске уравнения кривой

Задача 2. Решить задачу о динамике тока (переходные процессы в электрической цепи) при включении и выключении напряжения в цепи. Схема цепи дана.

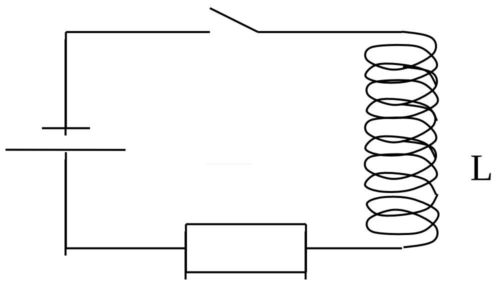

Рис. 3.7. Иллюстрация к задаче о динамике тока в электрической цепи

Решение. По закону Кирхгофа $\varepsilon = RJ + L\dfrac{dJ}{dt}$, при $J(0) = 0$. ДУ имеет вид $\dfrac{dJ}{dt} + \dfrac{R}{L}J = \dfrac{\varepsilon}{L}$. Решим его, допустим, методом Лагранжа.

$$\text{I.}\ \frac{dJ}{dt}+\frac{R}{L}J+0 \quad \Rightarrow J=Ce^{-\frac{R}{L}t},\ \text{II}.\ C'(t)e^{-\frac{Rt}{L}}=\frac{\varepsilon}{L}\Rightarrow J=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Из решения видно, что после включения цепи в сеть она не сразу входит в рабочий режим, что демонстрирует рис. 3.8 слева. После выключения сети начальные условия имеют вид $\varepsilon=0,$ и решение описывает падения силы тока в цепи (рис. 3.8 – справа).

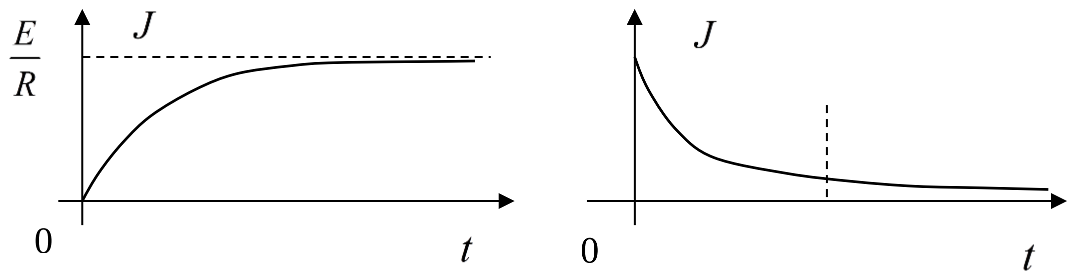

Рис. 3.8. Динамика изменения силы тока в цепи при ее замыкании (слева) и размыкании (справа)

Задача 3. Рассмотрим процесс радиоактивного распада элементов. Пусть имеется первоначальное количество радиоактивного вещества. Требуется установить временной закон распада, дающий возможность определять оставшееся количество вещества в любой момент времени.

Экспериментально установлено, что скорость радиоактивного распада прямо пропорциональна количеству нераспавшегося вещества. Известно так же, что с течением времени количество данного вещества уменьшается, поэтому ДУ имеет вид $\frac{dM}{dt}=-kM$. Разделяя переменные и интегрируя левую и правую часть уравнения, получаем экспоненциальный закон изменения массы нераспавшегося радиоактивного вещества $M=M_0e^{-kt}$. Здесь M_0 начальное количество вещества при t = 0. Характеристикой скорости распада принято считать время полураспада $T_{\frac{1}{2}}$. Поскольку $\frac{M_0}{2}=M_0e^{-kT_{\frac{1}{2}}}$, то $T_{\frac{1}{2}}=\ln\frac{2}{k}$, где коэффициент пропорциональности k определяет интенсивность распада.

Задача 4. Рассмотрим движение тела переменной массы (формула К. Циолковского). Масса летящей ракеты постепенно уменьшается, поскольку топливо, сгорая, выбрасывается в сопло ракеты, в результате чего ракета, в силу закона сохранения количества движения, движется в заданном направлении.

Решение. В силу второго закона И. Ньютона имеем $\frac{d\overline{P}}{dt}=\overline{F}$, где $\overline{P}=m\overline{v}$ – вектор импульса тела, а $\overline{F}$ – вектор внешней силы, действующей на тело. В случае поступательного прямолинейного движения получим уравнение Мещерского $m\dfrac{dv}{dt}=F-u\dfrac{dm}{dt}$, где u – относительная скорость отделяющейся массы газа. Будем считать, что эта величина постоянна и определяется конструкцией двигателя ракеты и энергетикой топлива. Второе слагаемое справа в уравнении Мещерского называется реактивной силой. Внешней силой, связанной с земным тяготением и сопротивлением воздуха, пренебрежем по сравнению с реактивной силой. Тогда считая, что $m=M+m_0\varphi(t)$, где М – масса ракеты без топлива m_0 – начальная масса топлива и $\varphi(t)$ – закон изменения массы топлива, получим ДУ с начальными условиями $v(0)=0,\quad \varphi(0)=1$ $\quad \dfrac{dv(t)}{dt}=\dfrac{um_0}{M+m_0\varphi(t)}\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ и его решение $v(t)=u\ln\dfrac{M+m_0}{M+m_0\varphi(t)}$. Полному сгоранию топлива соответствует значение $\varphi(T)=0$, где Т – время активного полета. Максимальная скорость, которую может развить ракета, определяется, как $v_{\max}=u\ln\dfrac{M+m_0}{M}$. Данное выражение называется формулой К. Циолковского.

Задача 5. Человек идет вдоль берега реки и тянет за собой лодку за веревку постоянной длины a, прикрепленной к носу лодки. Определить траекторию движения лодки.

Решение. Рассмотрим данную задачу на плоскости. Пусть человек находится в текущей точке М(0, y) и идет вдоль оси OY, лодка в точке Р(x, y) и направляется как к берегу, так и вдоль него.

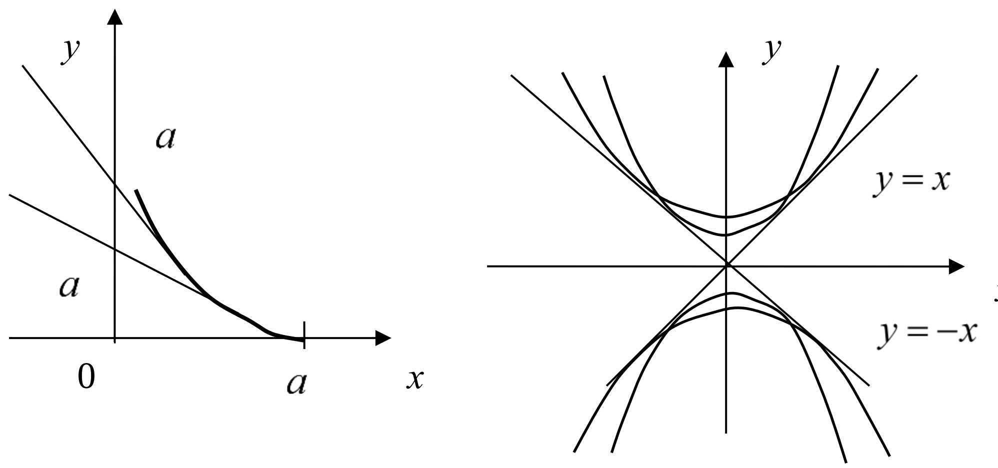

Рис. 3.9. Траектория движения лодки (слева), общее и особые решения ДУ $x(y')^2-2yy'+x=0$ (справа)

Из условия задачи понятно, что веревка является касательной к траектории движения лодки. Принимая во внимание геометрический смысл производной, получим ДУ $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$. Разделяя переменные, получим решение $y = a\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$, которое задает известную плоскую кривую, а именно ***трактрису*** (рис. 3.9 – слева).

Пример. Решить ДУ: $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$.

Решение. $y'_{1,2} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$. Однородное ДУ решается заменой $y = ux$.

Получим $u'x = \pm\sqrt{u^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \pm\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln/u + \sqrt{u^2 - 1}/ = \pm\ln x + \ln C.$

$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2, \quad y + \sqrt{y^2 - x^2} = C$. Оба уравнения последовательно возводим в квадрат и определяем решение *y(x*). Общее решение имеет одинаковый вид для двух решений $y = \frac{Cx^2}{2} + \frac{1}{2C}$. Особое решение имеет вид (рис. 3.10 справа) $(u = \pm 1) \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$.

Таким образом, через область, где y' принимает вещественные значения, проходят две интегральные кривые. Результат можно обобщить на ДУ первого порядка *n*-ой степени.

ГЛАВА 4
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

4.1. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим решение ДУ второго порядка сводящихся к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть имеется ДУ второго порядка в нормальной форме

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{4.1}$$

Возможны следующие 4 типа решения в зависимости от структуры правой части данного уравнения.

1. Правая часть не содержит функцию и ее производную $y'' = f(x)$. Тогда решение получается с помощью двукратного интегрирования.

Пример. Решить ДУ $y'' = x^2$.

Решение. $y' = \frac{x^3}{3} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2$.

Пример. Решить в общем виде ДУ $y''(1 + x^2) + 2xy' = x^3$.

Решение.

$$(y'(1+x^2))' = x^3. \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^4}{4(1+x^2)} + \frac{C_1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + (C_1 + \frac{1}{4})arctgx + C_2.$$

2. Правая часть не содержит функции, $y'' = f(x, y')$. Необходимо сделать следующую замену

$$\begin{cases} y' = P \\ P' = f(x, P) \end{cases} \tag{4.2}$$

и таким образом получить систему двух ДУ первого порядка.

Пример. Решить в общем виде ДУ $(1+e^x)y'' + y' = 0$.

Решение. $\begin{cases} y' = P \\ P' = -\dfrac{P}{1+e^x} \end{cases}$. Решаем второе ДУ, являющееся уравнением с разделяющимися переменными. $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{dx}{1+e^x} \quad \Rightarrow \quad P = C_1(1+e^{=x})$.

Теперь можно перейти к решению первого уравнения системы $y' = C_1(1+e^{-x})$.

Получим ответ: $y = -C_1e^{=x} + C_1x + C_2$.

Пример. Найти решение в общем виде ДУ $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$.

Решение. $\begin{cases} y' = P \\ P' + \dfrac{P}{x} = x. \end{cases}$ Последнее уравнение системы является линейным и решается, например, методом Бернулли, $P = uv$. Тогда имеем еще одну систему $\begin{cases} u'v = x \\ v' + \dfrac{v}{x} = 0 \end{cases}$, решение которой $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{x^3}{3} + C_1$ имеет вид $P = \dfrac{1}{x}(\dfrac{x^3}{3} + C_1)$. Таким образом, решение первого уравнения первой системы дает искомый ответ: $y = \dfrac{x^3}{9} + C_1 \ln x + C_2$.

3. Правая часть не зависит от независимой переменной x, $y'' = f(y, y')$. Делаем замену второй производной так, что бы перейти от переменных (*x, y*) к переменным (*y, P*), $y'' = \dfrac{dP}{dx} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dP}{dy} = P\dfrac{dP}{dy}$. Тогда ДУ сводится к решению системы

$$\begin{cases} y' = P \\ P\dfrac{dP}{dx} = f(y, P) \end{cases}. \tag{4.3}$$

Пример. Найти решения ДУ: $yy'' + (y')^3 = (y')^2$.

Решение. $\begin{cases} y' = P \\ yP\dfrac{dP}{dy} = P^3 - P^2 \end{cases}$. Видно, что $P = 0$ является особым решением этого ДУ. Обыкновенное решение получаем

$$\frac{dP}{P(1-P)} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{P-1} = C_1 y \quad \Rightarrow$$
$$P = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y} \quad \Rightarrow \frac{(1 + C_1 y)dy}{C_1 y} = dx.$$

Ответ: $\begin{cases} \dfrac{1}{C_1}\ln y + y = x + C_2 \\ y = C_3 \end{cases}$.

Пример. Найти решение ДУ: $2yy'' + (y')^2 = 0$.

Решение. $\begin{cases} y' = P \\ 2yP\dfrac{dP}{dy} = -P^2 \end{cases}$. При $P \neq 0$, получаем решение второго ДУ

$$2yP\frac{dP}{dy} = -P^2 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{dP}{P} = -\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln P^2 = -\ln y + \ln C_1^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$$
$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2.$$

4. Правая часть является однородным уравнением относительно y, $y'' = f(x, \dfrac{y'}{y})$. В этом случае рекомендуется замена $y' = yz$, $(x,\ y) \Rightarrow (x, z)$.

Пример. Решить ДУ: $xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$.

Решение.
$$\begin{cases} y' = yz \\ xz' - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad z = C_1 x \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = C_1 x$$
$$\ln y = C_1\frac{x^2}{2} + \ln C_2 \quad \Rightarrow \quad y = C_2 e^{C_1\frac{x^2}{2}}.$$

4.2. Геометрическая и физическая интерпретация ДУ второго порядка

Рассмотрим геометрическую интерпретацию ДУ второго порядка
$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{4.4}$$

Как известно, кривизна кривой $y = y(x)$ в каждой ее точке может быть вычислена по формуле
$$K = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.5}$$

Обозначим через α угол, который касательная к кривой образует с осью OX, тогда получим $y' = \operatorname{tg}\alpha$ и $y'' = K(1+(y')^2)^{3/2} = K(1+tg^2\alpha)^{3/2} = \dfrac{K}{\cos^3\alpha}$ (4.6)
и дифференциальное уравнение 2-го порядка запишется в виде

$$F\left(x,\ y,\ \operatorname{tg}\alpha,\ K\sec^3\alpha\right)=0. \tag{4.7}$$

Таким образом, с геометрической точки зрения дифференциальное уравнение второго порядка в каждой точке интегральной кривой задает соотношение между направлением кривой и ее кривизной в этой точке. Если задать координаты некоторой точки интегральной кривой и направление ее в этой точке, т.е. задать начальные условия

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\Big|_{x=x_0} = y_0', \tag{4.8}$$

то определится направление кривой и кривизна кривой в этой точке.

Физическая иллюстрация ДУ второго порядка заключается в том, что путь тела, пройденного под воздействием некоторой внешней силы, будет зависеть как от скорости, так и от ускорения. Например, путь, пройденный телом, под воздействием силы тяжести, определяется выражением $S = v_0 t + \dfrac{gt^2}{2}$, где v_0 есть начальная скорость падения.

4.3. Теорема Коши для ДУ высших порядков

Фундаментальная система решений линейных однородных ДУ

Пусть имеется ДУ *n*-го порядка в нормальном виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{4.9}$$

с общим решением $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ или общим интегралом $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$. При задании начальных условий задача получения частного решения называется задачей Коши.

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'\ ,...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{4.10}$$

Частное решение существует и единственно (Теорема Коши), если $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ определена и непрерывна относительно всех своих переменных и все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial y''}, ..., \dfrac{df}{\partial y^{(n-1)}}$ тоже непрерывны.

Рассмотрим решение ДУ высших порядков на примере линейных ДУ второго порядка, имеющих большое практическое применение. Отметим, что обобщение на ДУ более высоких порядков достаточно просто. Линейным ДУ второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \tag{4.11}$$

Здесь $f(x)$ называется правой частью ДУ. Если $f(x)=0$, то ДУ называется однородным, относительно y, y', y'' или без правой части. Если функции $a_1(x),\ a_2(x),\ f(x)$ непрерывны по переменной x, то ДУ с начальными условиями $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$ имеет два разных решения, каждое из которых единственно (рис. 4.1).

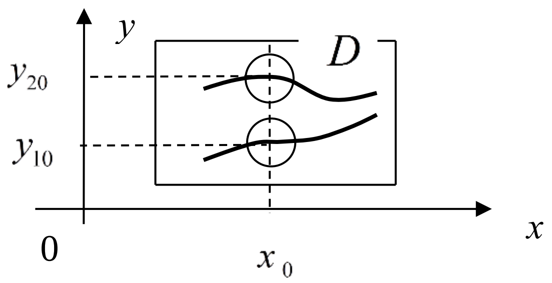

Рис. 4.1. Иллюстрация решения неоднородного ДУ второго порядка (два разных решения)

Рассмотрим структуру решения однородного ДУ ($f(x)=0$). Исключим из рассмотрения не представляющее интереса тривиальное решение $y = 0$.

Теорема 1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного однородного ДУ второго порядка, то их линейная композиция $y=C_1y_1+C_2y_2$ так же будет решением данного ДУ.

Докажем это. Продифференцируем два раза линейную композицию и подставим эти производные в ДУ и перегруппируем. Итак, получим $y'=C_1y'_1+C_2y'_2$, $y''=C_1y''_1+C_2y''_2$. Далее $(C_1y''_1+C_2y''_2)+a_1(x)$ $(C_1y'_1+C_2y'_2)+a_2(x)\,(C_1y_1+C_2y_2)=C_1(y''_1+a_1(x)y'_1+a_2(x)y_1)+$ $+C_2(y''_2+a_1(x)y'_2+a_2(x)y_2)=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0\equiv 0$, то есть $y=C_1y_1+C_2y_2$ действительно удовлетворяет ДУ. Напомним, что линейно независимыми функциями называются функции, для которых выполняется условие ни при каких значениях произвольных постоянных, $C_i\neq 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i \neq 0, \quad (i=\overline{1,n}). \tag{4.12}$$

Видим, что $y=C_1y_1+C_2y_2\neq 0$. Более простым в употреблении критерием линейной независимости двух функций является выполнение условия

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq Const, \quad x\in[a,b]. \tag{4.13}$$

Это означает, что одно решение нельзя выразить через другое.

Линейная композиция независимых решений $y=C_1y_1+C_2y_2$ называется ***общим решением*** линейных однородных ДУ второго порядка. При решении задачи Коши коэффициенты C_1, C_2 определяются однозначно. Действительно, пусть заданы начальные условия $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0$.

Тогда выполняется $\begin{cases} y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} \\ y'_0 = C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} \end{cases}$, где $y_1(x_0)=y_{10},\ y'_1(x_0)=y'_{10}$ и то же самое для второго решения. Очевидно, чтобы система имела решения, необходимо чтобы ее определитель был отличен от нуля. Его называют определителем Вронского или ***Вронскианом*** и обозначают как

$$W=\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{4.14}$$

Линейно независимые решения определяются по правилу Крамера $C_1=\dfrac{1}{W}\begin{vmatrix} y_0 & y_{20} \\ y'_0 & y'_{20} \end{vmatrix}$ и $C_2=\dfrac{1}{W}\begin{vmatrix} y_{10} & y_0 \\ y'_{10} & y'_0 \end{vmatrix}$.

Если $W\neq 0$, то систему линейно независимых решений {y_1, y_2 } называют ***фундаментальной***. Если $W=0$, то это означает, что решения линейно зависимы $\dfrac{y_{10}}{y_{20}}=\dfrac{y'_{10}}{y'_{20}}$ (в определителе имеются пропорциональные строчки).

Это определение можно обобщить (без доказательства) на линейное однородное ДУ n-го порядка. Фундаментальной системой решений называют систему n линейно независимых решений линейного однородного ДУ n-го порядка, для которой выполняется условие $W\neq 0$.

Пример. Доказать, что отношение двух линейно независимых решений ДУ $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ с непрерывными коэффициентами не может иметь точек локального экстремума.

Решение. Имеем функцию в виде отношения $\varphi(x)=\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}$, где $y_1(x),\ y_2(x)$ – фундаментальная система решений. Тогда $\varphi'(x)=\dfrac{y'_2y_1-y_2y'_1}{y_1^2}=\dfrac{W}{y_1^2}\neq 0$, так как $W\neq 0$ и, таким образом, $\varphi(x)$ не имеет стационарных точек, в которых могли быть ее экстремальные значения.

4.4. Структура решения линейного неоднородного ДУ

Рассмотрим структуру решения линейного неоднородного ДУ

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x). \tag{4.15}$$

Теорема 2. Общее решение линейного ДУ с правой частью можно представить как сумму общего решения соответствующего однородного ДУ, и какого-нибудь частного решения данного неоднородного ДУ

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\varphi(x). \tag{4.16}$$

Здесь $\varphi(x)$ есть частное решение, $\varphi''+a_1(x)\varphi'+a_2(x)\varphi\equiv f(x)$.

Покажем это. Пусть $\Phi(x)=C_1y_1+C_2y_2$ – общее решение однородного ДУ. Подставим в заданное ДУ функцию $y=\Phi(x)+\varphi(x)$ и получим

$$\Phi''+a_1\Phi'+a_2\Phi+\varphi''+a_1\varphi'+a_2\varphi\equiv f\ .$$

Таким образом, структура решения является линейной композицией общего и частного решений. Можно обобщить (без доказательств) данную теорему на линейное неоднородное ДУ *n*-го порядка. Так, его решение будет иметь вид

$$y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+...+C_ny_n+\varphi, \tag{4.17}$$

где $\varphi(x)$ есть частное решение.

Заметим, что решение ДУ, когда $a_1(x),\ a_2(x)$ есть некоторые функции переменной *x*, достаточно сложны и специфичны и точных решений очень немного. Зато наиболее просто решаются и имеют достаточно большое прикладное значение (например, в теории электрических цепей, радиотехнике, электронике и т. д.) ДУ с постоянными коэффициентами, когда $a_1,\ a_2$ являются постоянными.

Решение линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами

Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y''+a_1y'+a_2y=0\ . \tag{4.18}$$

Существует достаточно простой метод его решения, а именно метод характеристик, когда решение ищется в виде показательной функции $y=e^{kx}$. После подстановки его в ДУ и сокращения на экспоненциальный множитель получаем ***характеристическое алгебраическое уравнение***

$$k^2+a_1k+a_2=0. \tag{4.19}$$

Квадратное уравнение имеет два корня, определяющие виды решения.

1. ***Корни действительные и разные*** $k_1\neq k_2$, тогда общее решение ищется в форме

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}\ . \tag{4.20}$$

Покажем, что решения $y_1=e^{k_1x},\quad y_2=e^{k_2x}$ линейно независимы ($W\neq 0$).

$$W=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x}\end{vmatrix}=(k_2-k_1)e^{(k_1+k_2)x}\neq 0\ .$$

Пример. Найти решение задачи Коши ДУ $y''-2y'-3y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2-2k-3=0$ и имеет корни $k_1=-1,\quad k_2=3$. Общее решение определяется следующим образом $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$. Частное решение задачи Коши определяется из системы с начальными условиями $\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 2 = -C_1 + 3C_2 \end{cases}$ и имеет вид $y = \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{3}{4}e^{3x}$.

2. ***Корни действительные и одинаковые*** $k_1 = k_2 = k$. Тогда общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}. \tag{4.21}$$

Покажем, что два данных решения линейно независимы, действительно

$$W = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx}(1+kx) \end{vmatrix} = e^{2kx} \neq 0.$$

Покажем так же, что выражение $y = xe^{kx}$ тоже является решением ДУ. Используем теорему Виета для кратных корней $a_1 = -2k,\ \ a_2 = k^2$. Находим первую и вторую производные от $y = xe^{kx}$ $y' = e^{kx} + kxe^{kx},\ \ y'' = (2k + k^2)e^{kx}$. Подставляем это решение в ДУ и получаем тождество $e^{kx}(2k + k^2x - 2k(1+kx) + k^2x) \equiv 0$, что и требовалось показать.

Пример. Решить задачу Коши $y'' - 2y' + y = 0,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет кратные корни $k = 1$. Общее решение $y = (C_1 + C_2x)e^x$. Частное решение определяем из начальных условий $\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 + C_1 = -1 \end{cases}$.

Ответ: $y = (1 - 2x)e^x$.

3. Корни комплексно сопряжены $k_1 = \alpha - i\beta, k_2 = \alpha + i\beta$, тогда решение имеет стандартный вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x), \tag{4.22}$$

где коэффициенты C_1 и C_2 в общем случае комплексны. Здесь использована формула Эйлера

$$e^{\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x. \tag{4.23}$$

Покажем, что в этом случае решения линейно независимы и для этого надо показать, что $W \neq 0$. Итак имеем

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Пример. Решить ДУ $y'' - 2y' + 10y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k + 10 = 0$ и имеет решения $k_1 = 1 - i3, k_2 = 1 + i3$. Общее решение $y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. Все вышеизложенное можно обобщить на решение линейных и однородных ДУ n-ого порядка.

Пример. Каким должны быть порядок и структура ДУ, если его частное решение имеет вид $y = x^3 + e^x + \sin x$?

Решение. Поскольку одно из решений представлено как x^3, то должно быть 4 кратных корня со значениями $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. При значениях $C_1 = C_2 = = C_3 = 0$, $C_4 = 1$ получим желаемое решение. Решение типа $y = e^x$ дают два корня $k_5 = 1\,(C_5)$, $k_6 = 0\,(C_6 = 0)$. Решение типа $y = \sin x$ образуется с помощью двух комплексно сопряженных корней $k_{7,8} = 0 \pm i \quad (C_7 = 0, C_8 = 1)$. Таким образом, характеристическое уравнение имеет следующий вид $k^4 k(k-1)(k^2+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad k^8 - k^7 + k^6 - k^5 = 0$, а, соответствующее, ДУ наименьшего порядка имеет вид $y^{(8)} - y^{(7)} + y^{(6)} - y^{(5)} = 0$.

Начальные условия определяются из данного решения с помощью получения семи производных при подстановке в них значения $x = 0$. Например, $y(0) = 1$, $y'(0)=(3x^2+e^x+\cos x)=2$ и так далее (получить самостоятельно).

Пример. Найти вид линейного однородного ДУ, у которого фундаментальная система решений имеет функции $x, \quad \sin x, \quad \cos x$

Решение. Составляем общее решение и дифференцируем его три раза. Получим систему уравнений. Умножив первое уравнение на –1, второе и четвертое на x, все полученные уравнения просуммируем.

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \sin x \\ y' = C_1 - C_2 \sin x + C_3 \cos x \\ y'' = \quad -C_2 \cos x - C_3 \sin x \\ y''' = \quad C_2 \sin x - C_3 \cos x \end{cases}.$$

Ответ: $y''' - \frac{1}{x} y'' + y' - \frac{1}{x} y = 0$. Покажем, что данные решения независимы.

$$W = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x(\cos^2 x + \sin^2 x) = x \neq 0.$$

Пример. Даны фундаментальные решения ДУ $y = \{x, x^2, e^x\}$.

Какое ДУ наименьшего порядка имеет данное решение?

Решение. По аналогии с предыдущим примером составляем общее решение $y = C_1(x + x^2) + C_2 e^x + C_3$. Дифференцируем и исключаем C_1, C_2, C_3.

Ответ: $y'''(x^2 - 2x + 2) - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$

В заключение лекции познакомимся с более общим правилом составления ДУ. Пусть имеется система линейно независимых функций решения ДУ заданных на отрезке $x \in [a,b]$ $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, тогда ДУ, для которого данная система функций является фундаментальной, имеет вид

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ...... & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ,..... & y_n'(x) & y'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & .... & y_n^{(n)}(x) & y^n(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ...... & y_n(x) & 0 \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ,..... & y_n'(x) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & .... & y_n^{(n)}(x) & y^n(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Последний определитель получается путем дифференцирования строчек и их вычитанием из последующих строчек. Таким образом, ДУ можно представить как

$$y^{(n)}(x) \cdot W = 0. \tag{4.24}$$

Пример. Составить ДУ, для которого функции e^{-x}, e^{x}, являются фундаментальной системой решений. Видно, что W = 1.

Решение. $\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - y = 0$.

ГЛАВА 5

Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

5.1. Метод Лагранжа

Рассмотрим стандартные методы решения линейных неоднородных ДУ второго порядка и более высокого порядка. Существуют два метода решения.

1. ***Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных***. Пусть ДУ в форме

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{5.1}$$

где a_1, a_2 - постоянные. Заметим, что метод Лагранжа позволяет в некоторых случаях получить решение, когда $a_1(x), a_2(x)$ являются непрерывными функциями. Как известно, решение этого уравнения должно состоять из суммы общего решения без правой части и частного решения с правой частью. Общее решение имеет вид $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Предположим, что это решение удовлетворяет и неоднородному ДУ, но при этом коэффициенты $C_1(x)$ и $C_2(x)$ становятся непрерывными функциями от переменного x. Найдем условия, которым будут удовлетворять эти функции.

Итак, решаем последовательно две задачи. Первая – это нахождение общего решения соответствующего однородного ДУ. Вторая задача заключается в составлении решения данного ДУ в форме

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{5.2}$$

и определении функций $C_1(x), C_2(x)$. Идея подхода аналогична методу понижения порядка ДУ второго порядка и сводится к решению двух ДУ, но уже первого порядка. Находим первую производную от $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ и получим выражение $y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$.

Положим, что $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$ и найдем вторую производную $y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x)$ и, наконец, подставим y, y' *и* y'' в начальное ДУ, перегруппируем и получим $C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$. Видно, что первые два слагаемых равны тождественно нулям, так как функции $y_1(x), \quad y_2(x)$ являются решениями однородного ДУ. Оставшееся уравнение входит в систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}, \tag{5.3}$$

определяющую функции $C_1(x), C_2(x)$. Если Вронскиан системы

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5.4}$$

то решение единственное и определяется по правилу Крамера

$$C_1' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad \text{и} \quad C_1' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}. \tag{5.5}$$

Заметим, что если дано линейное неоднородное ДУ высшего порядка, например, третьего порядка, то достаточно просто получить систему уравнений для определения решения в виде $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0''$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_3'(x)y_3(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_3'(x)y_3'(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + C_3'(x)y_3''(x) = f(x). \end{cases} \tag{5.6}$$

Пример. Решить ДУ в общем виде $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$.

Решение.

1. Характеристическое уравнение однородного ДУ $k^2 - 4k + 3 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, \quad k_2 = 3$. Общее решение ДУ без правой части имеет вид $y_{общ} = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Переходим к решению второй части задачи.

2. Представляем решение не однородного ДУ в виде $y=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{3x}$. $\begin{cases} C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{3x}=0 \\ C_1'(x)e^x+3C_2'(x)e^{3x}=e^{2x} \end{cases}$. Вычтем уравнения и получим $C_2'(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$, которое проинтегрируем и получим $C_2(x)=C_2-\frac{1}{2}e^{-x}$. Из первого уравнения системы получим $C_1(x)=C_1-\frac{1}{2}e^x$. После подстановки в решение I получим окончательный ответ: $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-e^{2x}$. Видно, что ответ состоит из суммы общего решения и частного решений.

Пример. Решить ДУ в общем виде $y''+4y=Ctg\,2x$.

Решение.

1. Характеристическое уравнение однородного ДУ имеет вид и корни $k^2+4=0,\quad k=\pm 2i$. Общее решение однородного уравнения может быть представлено $y_0=C_1 cos\ 2x\ +C_2\ sin\ 2x$. Предполагаем, что решение данного ДУ имеет форму $y=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x$. Составим систему уравнений для отыскания функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

$$C'1(x)\ cos\ 2x + C'2(x)\ sin\ 2x = 0$$

$$-2\ C'_1(x)\ sin\ 2x + 2C'_2(x)\ cos\ 2x = e^{2x}\ ,\text{тогда}\ C'_2= -Cctg2x,\ C'_1= -1/2\ cos\ 2x$$

$$C_1(x)=C_1-\frac{1}{4}\sin 2x. \qquad C_2'(x)=\frac{1}{2}\cos 2x\ \mathrm{ctg}\,2x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sin^2 2x}{\sin 2x}$$

$$C_2(x)=C_2+\frac{1}{2}\ln/\ \mathrm{tg}\ x/+\frac{1}{4}\cos 2x.$$

Окончательный ответ: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{2}\ln/\ \mathrm{tg}\ x/\cdot\sin 2x$.

Отметим, что метод Лагранжа приводит иногда к очень сложным и даже не берущимся интегралам от достаточно просто устроенных правых частей ДУ, поэтому существует и другой метод решения.

5.2. Метод неопределенных коэффициентов для специальной правой части ДУ

Суть метода состоит в подборе частного решения, когда правую часть ДУ можно представить в специальной форме. Если правые части ДУ состоят из алгебраических композиций степенных, показательных и тригонометрических функций, то разработано достаточно много методов подбора частного решения. Рассмотрим только некоторые из них.

I. Пусть правая часть ДУ имеет вид $f(x)=P_n(x)e^{mx}$, (5.7) где $P_n(x)$ – полином *n*-ого порядка с заданными коэффициентами. Тогда частное решение неоднородного ДУ ищется в виде $y_ч = x^k Q_n(x)e^{mx}$, где $Q_n(x)$ – полином *n*-ого порядка, только с неизвестными коэффициентами. Величина *k* определяется из условия кратности корней характеристического уравнения и значением величины *m* из правой части ДУ. Возможны следующие варианты:

$$
\begin{aligned}
&\text{а) } \kappa_1 \neq \kappa_2 \neq m\text{, то } k = 0;\\
&\text{б) } \kappa_1 \neq \kappa_2,\ \kappa_1 \text{ или } \kappa_2 = m\text{, то } k = 1;\\
&\text{в) } \kappa_1 = \kappa_2 = m\text{, то } k = 2.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Пример. Решить ДУ $y'' - 2y' + y = (1+x)e^x$.

Решение. В правой части ДУ содержится полином первой степени. Корни характеристического уравнения $\kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ и общее решение в этом случае имеет вид $y = (C_1 + C_2x)e^x$. Так как корни кратные и равны 1, а значение степени показателя в правой части ДУ также равно $m = 1$, то выбираем вариант (в) и частное решение ищем в форме $y_ч = x^2(Ax + B)e^x$. Находим первую и вторую производную частного решения и подставляем в ДУ $y'_ч = (2Ax^2 + 2xB + x^2A + Ax^3 + Bx^2)e^x$,
$y''_ч = (2Ax + 2B + 2Ax + 2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + Ax^2 + 2Ax^2 +$
$+ 2Bx + Ax^2 + Ax^3 + Bx^2)e^x$.

После сокращения на e^x, получим алгебраическое уравнение
$6Ax + 2B + 2Ax^2 + 4xB + 4Ax^2 + Ax^3 + Bx^2 - 4Ax^2 - 4Bx - 2Ax^2 - 2Ax^3 - Bx^2 +$
$+ Ax^3 = 1 + x$.

Сравнивая коэффициенты в правой и левой частях уравнения при одинаковых степенях *x*, получаем систему для определения неопределенных коэффициентов A и B x^3 $0 = 0$

x^2 · $0 = 0$. Получим $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{2}$.

x^1 · $6A = 1$. Частное решение имеет вид

x^0 · $2B = 1$. $y_ч = \frac{x^2}{2}(x + \frac{1}{3})e^x$.

Ответ: $y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{x^2}{2}(x + \frac{1}{3})e^x$.

2. Пусть правая часть ДУ имеет вид

$$f(x) = a\sin\beta x + b\cos\beta x \tag{5.9}$$

и если число $i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде

$$y = A\sin\beta x + B\cos\beta x. \tag{5.10}$$

Если же $i\beta$ является корнем, то

$$y = x\,(\mathrm{A}\sin\beta\mathrm{x} + \mathrm{B}\cos\beta\mathrm{x})\,. \qquad (5.11).$$

3. Пусть правая часть ДУ имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x) \qquad (5.12)$$

и если число $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$\mathrm{y} = e^{\alpha x}(R_n(\mathrm{x})\sin\beta\mathrm{x} + \mathrm{R_m}(\mathrm{x})\cos\beta\mathrm{x})\,. \qquad (5.13)$$

Если же одно из $\alpha \pm i\beta$ является корнем, то частное решение неоднородного ДУ имеет вид

$$\mathrm{y} = xe^{\alpha x}(R_n(\mathrm{x})\sin\beta\mathrm{x} + \mathrm{R_m}(\mathrm{x})\cos\beta\mathrm{x})\,. \qquad (5.14)$$

Здесь $P_n(x),\quad Q_m(x)$ – заданные полиномы с известными коэффициентами, а полиномы $R_n(x),\ R_m(x)$ – соответствующие по порядку полиномы, только с неизвестными коэффициентами.

Пример. Решить ДУ $y'' + 6y' + 10y = 80e^x\cos x.$

Решение. I. $k^2 + 6k + 10 = 0,\quad \Rightarrow k_{1,2} = -3 \pm i$. Корни разные, комплексно сопряженные, и ни один из них по параметрам не совпадает с параметрами правой части ДУ: $\alpha = 1,\ \alpha \neq -3,\ \beta = 1$. Поэтому частное решение ищем в виде $\acute{o}_{\div} = \mathring{a}^{x}(A\cos x + B\sin x)$.

Определяем значения A и B, подставляя в ДУ, которое рассматриваем как тождество. Находим первую и вторую производные частного решения

$$\acute{o}'_{\div} = 2Be^x(\cos x + \sin x)\,,\ \acute{o}'_{\div} = 4Be^x\cos x\,.$$

Тогда ДУ после сокращения на e^x превратится в соотношение $4BCosx + 12B(\cos x + \sin x) + 10(A\cos x + B\sin x) \equiv 80\cos x$. Отсюда получим уравнение при Cos *x*: 8 B +16 A = 80 и уравнение при Sin *x* 16 B – 8A = 0. Решение этой системы дает значения A = 4, B = 2. Таким образом, частное решение ДУ имеет вид $y_{\div} = e^x 2(2\cos x + \sin x)$.

Ответ: $y = e^{-3x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 2e^x(2\cos x + \sin x).$

Пример. Решить задачу Коши $y'' + y = x\cos x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

Решение. I. $k^2 + 1 = 0,\quad k_{1,2} = \pm i.$ II. $\alpha = 0, \beta = 1$. Общее решение однородного ДУ имеет вид $\acute{o}_{\hat{i}\,\acute{a}\grave{u}} = \tilde{N}_1\cos x + C_2\sin x$. Один из корней совпадает с параметрами правой части ДУ, поэтому частное решение выбираем в виде

$$y_{\div} = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)\,.$$

После определения производных и подстановки в ДУ после достаточно громоздких выкладок (провести самостоятельно) получаем, что

A = 0, B =1, C $=\frac{1}{2}$, $D=0$. С учетом начальных условий $C_1=0, \quad C_2+1=2,$ получаем конечный ответ $y=\sin x+x\cos x+\frac{1}{2}x^2\sin x.$

5.3. Уравнение Эйлера. Неоднородное уравнение Эйлера

Уравнением Эйлера называется ДУ вида $a_0x^n y^{(n)}+a_1x^{(n-1)}y^{(n-1)}+...+a_n y=0,$ где $a_i, \quad i=\overline{0,n}$ – постоянные. Замены вида

$$y=x^k, \quad y=e^t, \tag{5.16}$$

преобразуют уравнение в линейное ДУ с постоянными коэффициентами.

Пример. Решить ДУ $x^2y''+2xy'-6y=0$.

Решение 1. Решение ищем в виде $y=x^k, \quad y'=kx^{k-1}, \quad y''=k(k-1)x^{k-2}$, которые подставим в данное ДУ и получим характеристическое уравнение $x^k[k(k-1)+2k-6]=0, x\neq 0, \quad k^2+k-6=0$, которое имеет корни $k_1=-3, \quad k_2=2$. Общее решение имеет вид $y_{общ}=C_1x^{-3}+C_2x^2$.

Решение 2. $x=e^t, \quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t}, \quad y''=\frac{dy'}{dx}=e^{-t}(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t}-\frac{dy}{dt}e^{-t})$.

После подстановки в ДУ получаем $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y=0.$

Характеристическое уравнение имеет тот же вид $k^2+k-6=0$ и те же корни, так как $t=\ln x,$ получаем тот же ответ: $y_{общ}=C_1x^{-3}+C_2x^2$.

В заключение решим неоднородное ДУ Эйлера для специальной правой части вида $f(x)=x^2P_m(\ln x).$

Пример. Решить ДУ: $x^2y''-xy'+2y=x\ln x, \quad x>0.$

Решение.

1. Сделаем замену $y=x^k$ и получим характеристическое уравнение $k^2-2k+2=0, \quad k_{1,2}=1\pm i$. Корни комплексно сопряженные и не соответствуют параметрам правой части ДУ. Тогда $y_{îâù}=\tilde{N}_1\tilde{o}\cos\ln x+C_2x\sin\ln x$, так как $x^{1\pm i}=xe^{\pm i\ln x}$.

2. Частное решение выбираем в виде $y_ч=x(A\ln x+B)$. Определяем первую и вторую производные и подставляем их в ДУ $y_ч'=A\ln x+B+A, \quad y_ч''=\frac{A}{x}.$

Получим тождество $\frac{A}{x}x^2-x(A\ln x+B+A)+2Ax\ln x+2Bx\equiv x\ln x,\Rightarrow$

$$\Rightarrow Ax\ln x-Bx+2B\equiv x\ln x.$$

Видно, что A = 1 и B = 0. Таким образом, решение данного ДУ имеет вид: $y = x(C_1 \cos\ln x + C_2 \sin\ln x) + x\ln x$.

ГЛАВА 6

Системы дифференциальных уравнений

6.1. Нормальная система ДУ. Теорема о структуре решения систем ДУ

Системой ДУ n-ого порядка называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимые переменные t и функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t),\ldots,x_n(t)$ и их производных по t. Очевидно, что число независимых уравнений должно быть равно числу неизвестных функций и суммарный порядок высших производных должен быть равен числу неизвестных функций. Действительно, покажем, что любое ДУ n-ого порядка можно представить системой n уравнений и наоборот. Например, имеем ДУ третьего порядка $x''' = f(t, x, x', x'')$. Обозначим

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = f(t, x, y, z) \end{cases}. \tag{6.1}$$

Таким образом, ДУ 3-ого порядка свелось к системе трех ДУ первого порядка.

Пример. Решить систему ДУ

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = x - y + z. \end{cases} \tag{6.2}$$

Решение. Перейдем к функции одной переменной t, $x'' = y', \quad x''' = z'$. Тогда система ДУ перепишется как одно уравнение $x''' - x'' + x' - x = 0$, которое является линейным и однородным ДУ третьего порядка и решается методом характеристик $k^3 - k^2 + k - 1 = 0, \quad k_1 = 1, k_2 = -i, k_3 = i$. Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t, \\ y = x' = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t, \\ z = x'' = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t. \end{cases}$$

Отметим, что в данном примере мы применили так называемый метод исключения. С методами решения систем ДУ познакомимся в дальнейшем. Рассмотрим систему ДУ в нормальной форме

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ ...., \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases} \quad (6.3)$$

Решением системы ДУ называется совокупность функций $x_1(t), x_2(t),...x_n(t)$, которые при подстановке в данную систему превращают все уравнения в тождества. Сформулируем без доказательств теорему Коши о существовании и единственности решения нормальной системы ДУ. Если правые части нормальной системы ДУ в окрестности точек t_0 , x_{10}, x_{20},…, x_{n0} непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,n}$, то существует единственная система функций $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, являющаяся решением системы ДУ и удовлетворяющая начальным условиям

$$x_1(t_0) = x_{10},\ x_2(t_0) = x_{20}, ...,\ x_n(t_0) = x_{n0}, \quad (6.4)$$

которые заданы как

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, ..., C_n) \\ x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, ..., C_n) \\ .... \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases} \Rightarrow t \to t_0 \Rightarrow \begin{cases} x_{10} = \varphi_1(t_0, C_1, C_2, ..., C_n) \\ x_{20} = \varphi_2(t_0, C_1, C_2, ..., C_n) \\ .... \\ x_{n0} = \varphi_n(t_0, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases}. \quad (6.5)$$

Исключая C_i,, получаем решение

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(t) \\ x_2 = \psi_2(t) \\ .... \\ x_n = \psi_n(t). \end{cases} . \quad (6.6)$$

Пример. Решить систему ДУ: $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \end{cases}$, при $x(1) = y(1) = 0$.

Решение. После интегрирования получим $x(t) = t + C_1$, $y(t) = t^2 + C_2$. Исключая параметр t, получаем решение $y = (x - C_1)^2 + C_2$. С учетом начальных условий $y = (x + 1)^2 - 1$. Если проинтерпретировать эту задачу как движение материального тела со скоростью $v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$ под действием силы, придающей телу ускорение $a = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2} = \sqrt{0 + 4} = 2$, то тело движется по параболе.

6.2. Метод исключения и метод интегрируемых комбинаций

Рассмотрим решения некоторых простейших систем ДУ. Иногда можно решить несложную систему ДУ двумя методами, а именно методом интегрируемых комбинаций или методом исключения.

Начнем с метода интегрируемых комбинаций.

Пример. Решить задачу Коши для системы ДУ: $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2x+3y} \\ y' = \dfrac{y}{2x+3y} \end{cases}$ при начальных условиях $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Решение. Поделив данные уравнения, получим первую интегрируемую комбинацию и первое решение $\dfrac{x'}{y'} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \Rightarrow y = C_1 x$. Далее, умножив первое уравнение на 2, а второе на 3, складываем их и получаем вторую интегрируемую комбинацию $2x' + 3y' = 1$ и ее решение, $(2+3C_1)dx = dt \Rightarrow (2+3C_1)x = t + C_2$. Для начальных условий получим $C_1 = 2$ и $C_2 = 8$ и получим ответ: $\begin{cases} x = \dfrac{t+8}{8} \\ y = \dfrac{t+8}{4} \end{cases}$ или как $y = 2x$.

Пример. Решить в общем виде систему ДУ: $\begin{cases} x' = x^2 + xy \\ y' = xy + y^2 \end{cases}$.

Решение. Первая интегрируемая комбинация определяется сложением уравнений, а вторая их делением. Имеем $x' + y' = (x+y)^2$ и определяем первое решение $x + y = -\dfrac{1}{t + C_1}$. Далее получим $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow y = C_2 x$.

Ответ: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{(1+C_2)(t+C_1)} \\ y = -\dfrac{C_2}{(1+C_2)(t+C_1)} \end{cases}$.

Рассмотрим метод исключения, когда систему ДУ заменяем одним ДУ порядка, равным сумме порядков высших производных в системе.

Пример. Решить задачу Коши для системы ДУ: $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ при $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

Решение. Дифференцируем первое ДУ системы $x'' = 2x' + y'$, $x'' = 2x' + x + 2y$ и, подставляя y из первого ДУ системы, получим линейное и неоднородное ДУ для одной функции $x'' - 4x' + 3x = 0$, которое решается методом характеристик, $k^2-4k+3=0$. Получим корни $k_1=1, k_2=3$ и общее решение имеет вид $x_{общ}=C_1e^t+C_2e^{3t}$. Подстановка $x_{общ}$ в $y=x'-2x$ дает возможность определить $y_{общ}$ и из начальных условий получить $C_1 = -1$, $C_2 = 2$. Окончательный ответ:

$$\begin{cases} x=-e^t+2e^{3t} \\ y=e^t+2e^{3t}. \end{cases}$$

Сформулируем две теоремы о структуре решения систем линейных ДУ. Дадим их без доказательств по аналогии с теоремами о структуре решения линейного, однородного и неоднородного ДУ n-ого порядка. Для простоты изложения рассмотрим формирование структуры системы ДУ на примере системы трех уравнений. Итак, дана система как операторное уравнение $\bar{x}'=\widehat{A}\bar{x}$, где $\bar{x}=(x,y,z)^T$ и $\widehat{A}$ – оператор в матричной форме.

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z \\ z'=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \end{cases}. \tag{6.7}$$

Здесь коэффициенты a_{ij} в общем случае могут быть функциями переменной t.

Теорема 1. Если известны три решения данной системы $\bar{x}_1=(x_1,y_1,z_1)^T, \bar{x}_2=(x_2,y_2,z_2)^T$ и $\bar{x}_3=(x_3,y_3,z_3)^T$, то общее решение линейной и однородной системы ДУ третьего порядка будет иметь вид

$$\begin{aligned} x&=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3 \\ y&=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3 \\ z&=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Если определитель Вронского $W\neq 0$, то задача Коши решается однозначно и решение будет единственным. Действительно, если заданы начальные условия $x(t_0)=x_0,\ y(t_0)=y_0,\ z(t_0)=z_0$ и

$$W=\begin{vmatrix} x_{10} & x_{20} & x_{30} \\ y_{10} & y_{20} & y_{30} \\ z_{10} & z_{20} & z_{30} \end{vmatrix}\neq 0, \tag{6.9}$$

то все постоянные C_1, C_2 и C_3 определяются по правилу Крамера. Напомним, что система решений называется фундаментальной, если $W\neq 0$, когда решения линейно независимы.

Теорема 2. Пусть дана линейная, неоднородная система ДУ

$$\bar{x}'(t) = \widehat{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{g}(t) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + g_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + g_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + g_3 \end{cases}. \tag{6.10}$$

Решение этой системы будет состоять из суммы общего решения соответствующей однородной системы и какого-либо частного решения неоднородной системы

$$\bar{x} = C_1\bar{x}_1 + C_2\bar{x}_2 + C_3\bar{x}_3 + \bar{\varphi}, \tag{6.11}$$

где $\bar{\varphi}(t)$ – частное решение, $\bar{\varphi}'(t) \equiv \widehat{A}(t)\bar{\varphi}(t) + \bar{g}(t)$.

6.3. Матричные методы решения линейных систем ДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим матричный способ решения систем линейных ДУ с постоянными коэффициентами. Этот способ сводится к вычислению собственных значений и собственных векторов матрицы системы ДУ, $\bar{x}' = \widehat{A}\bar{x}$.

I. Дано $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$ с постоянными a_{ij}. (6.12)

Общее решение системы ДУ имеет вид

$$\bar{x}_{общ} = C_1\bar{x}_1 + C_2\bar{x}_2 + C_3\bar{x}_3. \tag{6.13}$$

Эту систему можно свести к одному линейному ДУ третьего порядка, которое решается методом характеристик. Будем искать решение системы в виде $\bar{x} = \bar{k}e^{rt}$. В этом случае получим характеристическое уравнение вида $r\bar{x} = \widehat{A}\bar{x}$, его можно представить однородным уравнением $(\widehat{A} - r\widehat{E})\bar{k} = \bar{0}$. Как известно из линейной алгебры, решения этого уравнения есть, их бесконечное множество, если определитель левой части уравнения равен нулю (в определителе есть линейно зависимые строчки) $\det(\widehat{A} - r\widehat{E}) = 0,$ где E – единичная матрица.

Таким образом, получим

$$\begin{cases} (a_{11} - r)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - r)k_2 + a_{23}k_3 = 0 \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33} - r)k_3 = 0 \end{cases} \tag{6.14}$$

и характеристическое уравнение определится следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-r & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-r \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.15)$$

в виде алгебраического уравнения третьего порядка $r^3 + Br^2 + Cr + D = 0$.

Возможны 4 варианта решения.

1. Все три корня действительны и разные и тогда общее решение выбирается в форме

$$\bar{x}_{общ} = C_1\bar{k}_1 e^{r_1 t} + C_2\bar{k}_2 e^{r_2 t} + C_3\bar{k}_3 e^{r_3 t}. \qquad (6.16)$$

2. Все корни действительны и два из них кратные, например, $r_2 = r_3$, тогда

$$\bar{x}_{общ} = C_1\bar{k}_1 e^{tr_1} + C_2\bar{k}_2 e^{tr_2} + C_3 t\bar{k}_3 e^{tr_3}. \qquad (6.17)$$

3. Все корни действительны и все одинаковы, $r_1 = r_2 = r_3 = r$.

$$\bar{x}_{общ} = C_1\bar{k}_1 e^{tr} + C_2 t\bar{k}_2 e^{tr} + C_3 t^2\bar{k}_3 e^{tr}. \qquad (6.18)$$

4. Один корень действительный и два корня комплексно сопряженные $к_{2,3} = \alpha \pm i\beta$, то $\bar{x}_{общ} = C_1\bar{k}_1 e^{tr} + C_2 t\bar{k}_2 e^{tr} + C_3 t^2\bar{k}_3 e^{tr}$. (6.19)

Для каждого корня определяется собственный вектор $\bar{k}$.

Пример. Решить в общем виде $\begin{cases} x' = z \\ y' = -4x - y - 4z \\ z' = -y \end{cases}$.

Решение. Определим корни характеристического уравнения. Решение ищем в форме $x = k_1 e^{rt}, \quad y = k_2 e^{rt}, \quad z = k_3 e^{rt}$. Получим

$$\begin{cases} k_1 r = k_3 \\ k_2 r = -4k_1 - k_2 - 4k_3 \\ k_3 r = -k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 r \quad - k_3 = 0 \\ 4k_1 + k_2(1+r) + 4k_3 = 0 \\ \quad k_2 + k_3 r = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Из последней системы уравнений видно: чтобы решение существовало, необходимо выполнение условия $\Delta = \begin{vmatrix} r & 0 & -1 \\ 4 & 1+r & 4 \\ 0 & 1 & r \end{vmatrix} = 0$, откуда следует $r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0, \quad r_1 = -2, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = 2$. Находим собственные векторы. Для корня $r_1 = -2$ из системы (*) получим

$$\begin{cases} 2k_1 + k_3 = 0 \\ 4k_1 - k_2 + 4k_3 = 0 \\ k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases}.$$

Так как две строчки пропорциональны, то отбросим одну из них, а именно вторую. Положив $k_3^{(1)} = 2,$ получим значения $k_1^{(1)} = -1, \quad k_2^{(1)} - 4$.

Таким образом, первый собственный вектор определится как $\bar{k}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Для корня $r_2 = -1$ по аналогии получим $\begin{cases} -k_1 - k_3 = 0 \\ k_2 - k_3 = 0 \end{cases}$. Положив

$k_3^{(1)} = -1,$ получим $k_1^{(1)} = 1, \quad k_2^{(1)} - 1$. Второй вектор определяется $\bar{k}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Наконец для корня $r_2 = -2$ получим собственный вектор $\bar{k}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Общее решение имеет вид $\bar{x}_{общ} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$.

Пример. Решить систему ДУ: $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + 3x_2 \end{cases}$.

Решение. Получим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 5-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0$,

$r^2 - 8r + 16 = 0, \quad r_1 = r_2 = 4$, корни кратные и тогда $x_{1общ} = (C_1 + C_2 t)e^{4t}$, второе решение ищем в виде выражения $x_{2общ} = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{4t}$. Оба решения подставляем, допустим, в первое уравнение, превратив его в тождество. Сократив на общую показательную функцию, получим систему уравнений для определения коэффициентов α_1, α_2 при различных степенях t

$$\{4C_1 + 4C_2 t + C_2 = 5(C_1 + C_2 t) - (\alpha_1 + \alpha_2 t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4C_1 + C_2 = 5C_1 - \alpha_1 \\ 4C_2 = 5C_2 - \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = C_1 - C_2 \\ \alpha_2 = C_2 \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} x_{1общ} = (C_1 + C_2 t)e^{4t} \\ x_{2общ} = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^{4t} \end{cases}$.

Пример. Решить систему ДУ: $\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} -(7-r)k_1+k_2=0 \\ -3k_1-(5+r)k_2=0 \end{cases}$. Характеристическое уравнение определяется $\begin{vmatrix} r+7 & -1 \\ 2 & r+5 \end{vmatrix}=0,\quad r^2+12r+37-0,\quad r_1=-6-i,\quad r_2=-6+i$. Найдем собственные векторы. Для $r=-6-i,$ получим $\begin{cases} -(1-i)k_1+k_2=0 \\ 2k_1+(i+1)k_2=0 \end{cases}$. Из первого уравнения при $k_1=1,\quad k_2=1-i$ получим первый собственный вектор $\bar{k}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$. Для $r=-6+i$ получим второй собственный вектор $\bar{k}^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

Ответ: $\bar{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}e^{-6t}\cos t+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}e^{-6t}\sin t$.

Пример. Решить неоднородную систему ДУ методом Лагранжа

$$\begin{cases} x'=-2x-4y+1+4t \\ y'=-x+y+\dfrac{3}{2}t^2 \end{cases}.$$

Решение.

I. Решение соответствующей однородной системы ДУ дает

$$\begin{cases} k_1(r+2)+4k_2=0 \\ k_1+k_2(r-1)=0, \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta=\begin{vmatrix} r+2 & 4 \\ 1 & r-1 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad r^2+r-6=9,\quad r_1=-3, r_2=2.$$

Для $r=-3$ получим $\bar{k}^{(1)}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ и для $r=2$ $\bar{k}^{(2)}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Общее решение имеет вид $x_{общ}=4N_1a^{-3t}-C_2e^{2t}$; $y_{общ}=N_1a^{-3t}+N_2e^{2t}$.

II. Предполагаем, что неоднородное уравнение имеет ту же форму решения, но бывшие постоянные C_1 и C_2 будут функциями переменной t. Подставляем это решение в начальную неоднородную систему и получим тождество, из которого можно будет найти функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$. Пропуская громоздкие, но достаточно простые выкладки, получим

$$\begin{cases} 4C_1'e^{-3t}-C_2'e^{2t}=1+4t \\ C_1'e^{-3t}+C_2'e^{2t}=\dfrac{3}{2}t^2 \end{cases}.$$

Складывая уравнения, получим $5C_1'=(1+4t+\dfrac{3}{2}t^2)e^{3t}$. Умножая второе уравнение на 4 и вычитая первое уравнение из второго, получим $5C_2'=(6t^2-4t-1)e^{-2t}$. После двух интегрирований по частям каждого выражения получим ответ для заданной системы ДУ

$$\begin{cases} x = 4C_1e^{-3t} - C_2e^{2t} + t + t^2 \\ y = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} - \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}.$$

ГЛАВА 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

7.1. Приложение ДУ и систем ДУ к задачам геометрии, физики и теоретической механики

Если стационарные процессы в природе описываются алгебраическими уравнениями, системами алгебраических уравнений или трансцендентными уравнениями, то динамические, переходные процессы описываются только с помощью дифференциальных уравнений. Рассмотрим ряд задач, демонстрирующих разнообразие приложений ДУ к описанию явлений окружающего мира во времени и пространстве. Отметим, что обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) описывают изменения некоторой характеристики процесса только по одной из выбранных координат. Тем не менее, методы ОДУ дали возможность исследовать и понять законы многих природных явлений, технологических процессов, связанных с человеческой деятельностью. Можно сказать, что тот комфорт, который получило человечество (транспорт, современные дома, средства связи и так далее) связано с активным применением математического аппарата ОДУ. Итак, рассмотрим только некоторые прикладные задачи ДУ первого и второго порядков и проанализируем их решение.

Пример 7.1. Цилиндрический резервуар с горизонтальной осью имеет в длину размер 6 метров и диаметр 4 метра. За сколько времени вода, заполняющая резервуар вытечет из него через отверстие радиуса 1/12 метра сделанное на дне резервуара. Скорость истечения воды определена экспериментально и описывается формулой $v = 0{,}6\sqrt{2gh},$ где h – уровень воды в резервуаре и g есть ускорение свободного падения, равное 9,8 м/с^2.

Решение. Прежде всего сделаем поясняющий рисунок (рис.7.1).

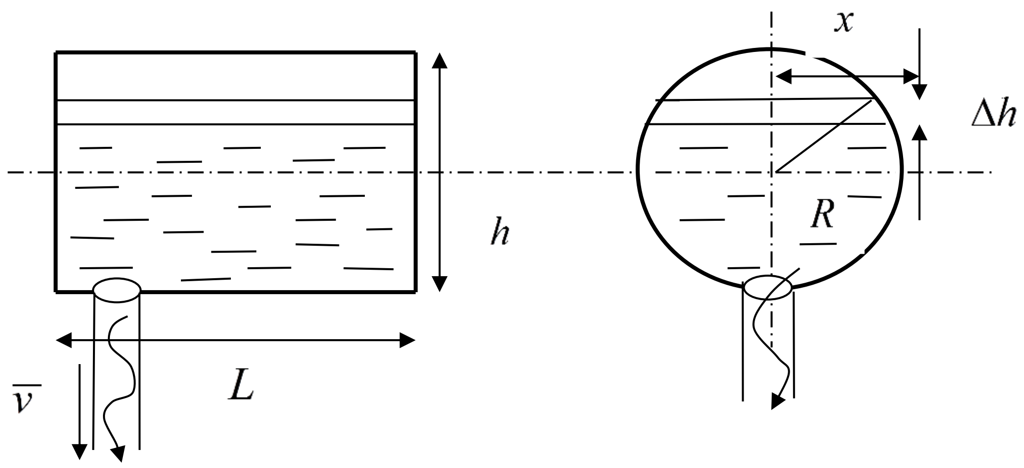

Рис. 7.1. Поясняющий рисунок к примеру 7.1

Объем вытекшей воды за время Δt определится диаметром отверстия в резервуаре и скоростью падающей воды $\Delta V = 0{,}6\sqrt{2gh}\cdot\Delta t\cdot\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$.

Потери воды в резервуаре можно определить как

$$\Delta V = l\cdot 2x\cdot\Delta h = 2l\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(h-\frac{d}{2}\right)^2}\Delta h = 2l\Delta h\sqrt{h(d-h)}.$$

Приравнивая выражения, получим ДУ с разделяющимися переменными $0{,}3\sqrt{2g}\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2\Delta t = l\sqrt{d-h}\Delta h$. После интегрирования получим ответ $t=\dfrac{4l}{0{,}45\sqrt{2gd}}\approx 40\text{сек}.$

Пример 7.2. Найти дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее параболы, у которых огибающей является ось ОХ.

Решение. Уравнение такой параболы известно и оно имеет вид $y = px^2$. Продифференцируем это уравнение и получим $y' = 2px,\quad y'' = 2p$. Исключим параметр p и получим ДУ: $y = y''x^2$.

Пример 7.3. Пуля входит в доску толщиной 10 сантиметров со скоростью 200 метров в секунду и, пробивая ее, выходит со скоростью 50 метров в секунду. Найти время движения пули в доске, если сила сопротивления движению пули пропорциональна квадрату скорости.

Решение. Составляем уравнение движения пули с сопротивлением $F_c = -kv^2$ по закону Ньютона $m\cdot x'' = -k(x')^2$ с начальными условиями x(0) = 0 и $x'(0) = 200$ м/сек. Обозначим постоянную задачи как $\alpha = \dfrac{k}{m}$, получим ДУ $x'' = -\alpha(x')^2$, которое решается методом понижения порядка

$$\begin{cases} x' = P \\ P' = -\alpha P^2 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{1}{\alpha t + C_1}, \quad x = \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha t + C_1) + C_2 .$$

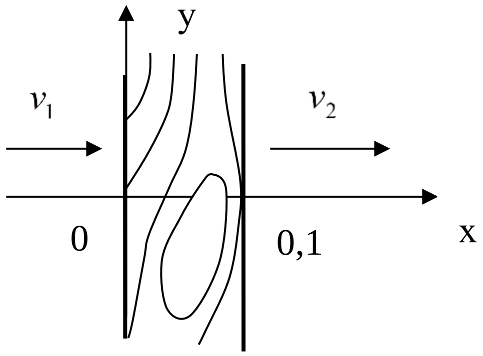

Рис. 7.2. Иллюстрация к примеру 7.3

Из начальных условий получим $C_1 = \frac{1}{200}$ и соотношение $0{,}1\alpha = \ln\frac{\alpha t + C_1}{C_1} = \ln\frac{200}{50} = \ln 4 \;\Rightarrow\; \alpha = 20\ln 2, \quad C_2 = 0.$ Из условия $\frac{1}{\alpha t + C_1} = 50 \;\Rightarrow\; \alpha t = \frac{1}{50} - \frac{1}{200} = \frac{3}{200} \;\Rightarrow\; t = \frac{3}{200 \cdot 20\ln 2}$.

Ответ: $t \approx 10^{-3}$ сек.

Пример 7.4. Сосуд типа стакан, наполненный водой, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси ОУ. Вода в сосуде образует воронкообразную полость, граница которой описывается уравнением $y = \varphi(x)$. Найти форму этой поверхности.

Решение. Рассмотрим частицу воды с массой m на поверхности воды. Пусть вращение происходит вдоль оси ОХ, как показано на рис 7.3. В этом случае равнодействующая сил тяжести mg и центробежной силы инерции $m\omega^2 x$ ортогональна поверхности вращения. Из равенства сил должно выполняться соотношение $\mathrm{tg}\varphi = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g} \;\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$, которое будет линейным ДУ.

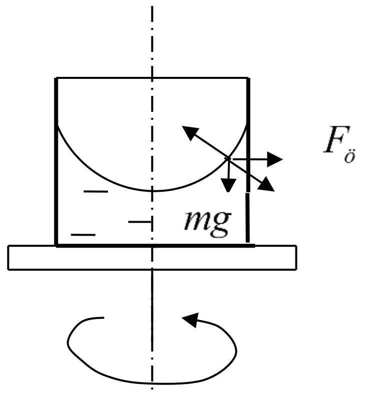

Рис. 7.3. Иллюстрация к примеру 7.4

Его решение с начальным условием $y(0) = 0$ будет параболой, $y = \dfrac{\omega^2 x^2}{2g}$. Таким образом, границей полости является парабола, сама полость является параболоидом вращения.

Рассмотрим классическую задачу движения небесных тел, важную для принципиального понимания нами законов окружающего мира. Попробуем объяснить природу наблюдаемого нами периодического и непериодического движения небесных тел.

Уравнение Ньютона, описывающее движение материального тела, например планеты, в центральном поле тяготения Солнца, является квадратичной формой относительно скоростей и координат, поэтому логично ожидать, что траектория движения материального тела будет кривой второго порядка на плоскости, то есть эллипсом, гиперболой или параболой.

Задача о движении небесных тел. Небесные тела будем рассматривать как материальные точки. Будем рассматривать взаимодействие только двух тел, хотя на самом деле в Солнечной системе движутся несколько планет. Если ввести полярные координаты r и φ, связанные с Солнцем, то можно свести задачу о движении двух тел к задаче движения тела в центральном поле притяжения другого тела. Для этого поместим начало координат в центре инерции двух тел (обозначим $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$) $m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 = \bar{0}$ и получим $\bar{r}_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\bar{r}$, $\bar{r}_2 = -\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\bar{r}$. В этом случае функция Лагранжа, описывающая систему двух тел, запишется следующим образом: $L = \dfrac{m_1\dot{\bar{r}}_1^2}{2} + \dfrac{m_2\dot{\bar{r}}_2^2}{2} - U(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) = \dfrac{m\dot{\bar{r}}^2}{2} - U(r)$, где $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ является приведенной массой. Функция Лагранжа описывает движение одного тела с массой m во внешнем поле U, симметричном относительно неподвижного начала координат. Сила тяготения Ньютона определяется как $F = -\dfrac{dU}{dr} = \dfrac{\alpha}{r^2}$, где α – положительная постоянная (притяжение тел). Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тел есть $U = -\dfrac{\alpha}{r}$. Траекторию движения тела можно получить из решения уравнения Лагранжа $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, $\left(i = \overline{1{,}2}\right)$, $\dot{q} \equiv \dfrac{dq}{dt}$, где $q_1 = r$ и $q_2 = \varphi$ – обобщенные координаты. Функция Лагранжа для данной задачи имеет вид $L = \dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$ и не содержит координаты φ, поэтому такая координата называется циклической. Для неё уравнение движения Лагранжа перепишется ($\dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0$) в виде закона сохранения – момента импульса $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = 0$. Отсюда получаем закон сохранения момента импульса $\overline{M} = [\bar{r}, \bar{p}] = const$ или в полярной системе координат $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left|\overline{M}\right| = mr^2\dot{\varphi} = const$.

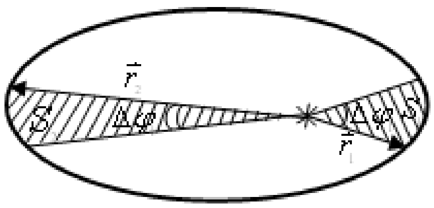

Рис. 7.4. Иллюстрация к задаче о движении небесных тел

Следовательно, планета движется по плоской траектории (орбите), перпендикулярной $\overline{M}$ и содержит траектории обоих тел. В данном случае траектории планеты и Солнца. Отметим, что выражение $\dfrac{1}{2}r^2\Delta\varphi = \Delta S$ является площадью сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиус-векторами и элементом дуги траектории, поэтому сохранение момента импульса интерпретируется как постоянство скорости в секторе. Таким образом, за равные промежутки времени радиус-вектор тела описывает равные площади (рис. 7.4). Это формулировка так называемого ***второго закона Кеплера.***

Теперь используем закон сохранения энергии

$$\frac{dE}{dt} = 0,\ \text{где}\quad \mathrm{E} = \sum_{i=1}^{2}(\mathrm{q}_\mathrm{i}^{'}\frac{\partial L}{\partial q_i^{'}} - L) = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2) + U(r),\quad \text{Å} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r).$$

Таким образом, ДУ имеет вид $\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(r)\right)-\frac{M^2}{m^2r^2}}$ или $dt=\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)-\frac{M^2}{m^2r^2}}}$. Сделаем замену $d\varphi=\frac{M}{mr^2}dt$, используя закон сохранения момента движения $\left|\bar{M}\right|=mr^2\dot{\varphi}=const$, и получим ДУ $d\varphi=\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)-\frac{M^2}{m^2r^2}}}$. После интегрирования дифференциального уравнения с разделяющими переменными получим уравнение траектории в полярной системе координат $\varphi=\int\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left(E-U(r)\right)-\frac{M^2}{r^2}}}+const$. Здесь величина $M^2/2mr^2$ называется центробежной энергией. Так как $U(r)=-\frac{\alpha}{r}$, то график «эффективной» потенциальной энергии $U^{эфф}=-\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2}$ имеет минимум при $r=\frac{M^2}{\alpha m}$. Получим $U_{\min}^{эфф}=-\alpha^2\frac{m}{2M^2}$.

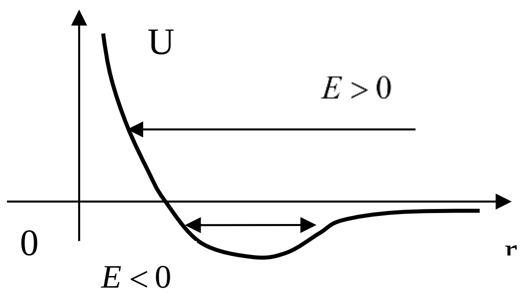

Рис. 7.5. График «эффективной» потенциальной энергии

Приводим интеграл к табличному интегралу
$$\varphi=-\int\frac{d(\frac{M}{r}-\frac{m\alpha}{M})}{\sqrt{(2mE+\frac{m^2\alpha^2}{M^2})-(\frac{m\alpha}{M}-\frac{M}{r})^2}}+C,\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arccos\frac{x}{a}+C.$$

Из рис. 7.5 видно, что при $E\geq 0$ движение тела инфинитно (неограниченно) и тела удаляются друг от друга. При $E<0$ движение тел ограничено (финитно) и тяготеющие тела находятся как бы в связанном состоянии. Формулу траектории получим в виде

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + const.$$

Выбираем начало отсчета $const = 0$ и, вводя обозначения $p = \frac{M^2}{m\alpha}$ и $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$, перепишем формулу траектории тела в поле центральных сил в следующем виде $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$, где p и e есть параметр и эксцентриситет орбиты, соответственно. При $E < 0$ и $e < 1$ получаем уравнение эллипса, где большая и малая оси определяются следующим образом $a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$, $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$. Наименьшее и наибольшее расстояния до центра поля (один из фокусов) определяются следующим образом соответственно $r_{\min} = a(1-e), \quad r_{\max} = a(1+e)$.

Таким образом, планета совершает движение по эллипсу как это показано на рис.7.6. Условие замкнутости траектории заключается в том, что при интегрировании r от минимального до максимального расстояния значение величины угла $\Delta\varphi = 2\pi\frac{m}{n}$ должно быть рациональным числом, где m и n – целые числа. Траектория замкнута, когда $m = n$. Примером траектории может быть траектория спутников УКВ связи (GPS, ГЛОНАСС).

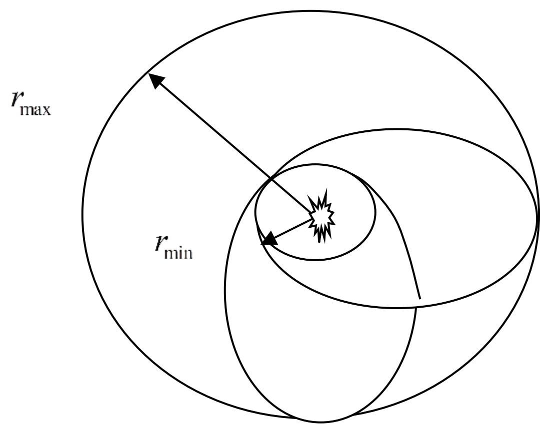

Рис. 7.6. Траектория спутников УКВ связи (GPS, ГЛОНАСС)

Получаем ***первый закон Кеплера*** – планеты Солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которого находится Солнце. ***Третий закон Кеплера*** гласит, что квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит этих планет $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{\gamma M_c} a^3$, M_c – масса Солнца и γ – гравитационная постоянная. При $E = 0$ и эксцентриситете $e = 1$ планета движется по параболе с расстоянием в перигелии $r_{\min} = \dfrac{p}{2}$. Этот случай имеет место, когда материальное тело, двигаясь по прямой в космическом пространстве, испытывает притяжение Солнца и траектория его движения изменяется. Например, это могут быть кометы, метеориты. При $E > 0$ и $e > 1$, движение также инфинитно (неограниченно) и траектория является гиперболой, огибающей центр поля притяжения (один из фокусов). Отметим, что рассмотренный механизм взаимодействия двух тел можно привлечь и для описания взаимодействия заряженных частиц.

В заключение приведем значения скоростей, которые необходимо сообщить материальному телу, чтобы оно стало космическим объектом.

Первая космическая скорость необходима для того, чтобы тело стало искусственным спутником Земли и имело эллиптическую орбиту. Отметим, что для выведения на эллиптические орбиты требуются достаточно большие скорости. Первая космическая скорость (минимальная) определяется $v_1 = \sqrt{\dfrac{\gamma M_з}{r}}$, где $M_з$ – масса Земли, r – радиус круговой орбиты. У поверхности Земли $v_1 = 8$ км/сек.

Второй космической скоростью называют наименьшую скорость, которую необходимо сообщить материальному телу, чтобы оно могло без воздействия дополнительных сил преодолеть земное притяжение и превратиться в искусственный спутник Солнца. Эту скорость называют параболической, так как она соответствует параболической траектории тела в поле тяготения Земли. Вторая космическая скорость определяется $v_2 = \sqrt{\dfrac{2\gamma M_з}{r}}$ $r = R$, где r – расстояние от места запуска тела до центра Земли. Значение второй космической скорости составляет 11,2 км/сек у поверхности Земли.

Третьей космической скоростью называется наименьшая скорость, которую необходимо сообщить телу, запускаемому с поверхности Земли для того, чтобы оно преодолело притяжение Солнца и покинуло Солнечную систему. Значение этой скорости $v_3 \approx 16{,}7$ км/сек.

Пример 7.5. Покажем, как ДУ находят применение в моделировании экономических отношений людей, предприятий. Рассмотрим простейшую модель естественного роста выпускаемой продукции в отсутствие конкуренции. Пусть имеется некоторая востребованная продукция по фиксированной цене *p*. Обозначим *Q(t)* количество этой продукции, реализованной за время *t*. Тогда доход от продажи равен $p \cdot Q(t)$. Часть этого дохода используется на инвестирование производства продукции (расширение производства) $I(t) = mpQ(t)$, где m – норма инвестиций. Если рынок не насыщен и происходит полная реализация продукции, то в результате инвестирования получают прирост дохода: $Q'(t) \propto I(t) \quad \Rightarrow \quad Q'(t) = lmpQ(t)$, где l – норма ускорения роста продукции. Решения этого ДУ дает при начальном условии $Q(t_0) = Q_0$ результат $Q(t) = Q_0 e^{k(t-t_0)}$ естественного роста количества продукции. Здесь $k = lmp$. Отметим, что этим же законом описывается, например, рост числа бактерий в неограниченной питательной среде и многие другие процессы (рис. 7.7).

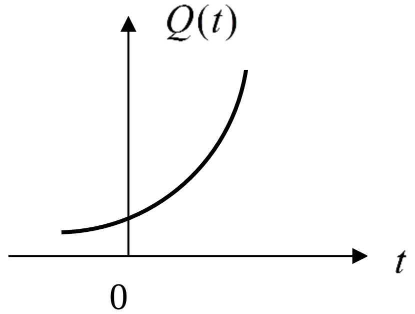

Рис. 7.7. График естественного роста количества продукции

7.2. Приложение ДУ и систем ДУ к задачам радиотехники

Пример 7.6. Усложним уже нами решенную задачу электротехники и добавим в цепь последовательно еще один двухполюсник – емкость (С) с разностью потенциалов на ее обкладках $\Delta\varphi = -\dfrac{q}{C}$, где $\dfrac{dq}{dt} = J$ и $q = \int J dt$.

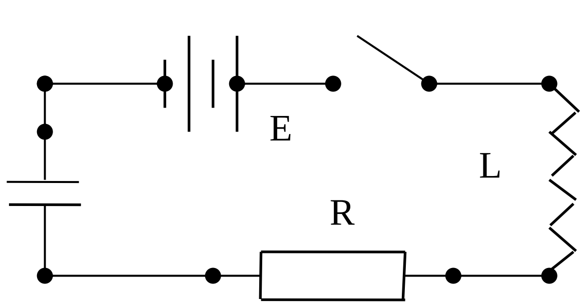

Рис. 7.8. Схема цепи колебательного контура

Получим колебательный контур (рис. 7.8), который описывается дифференциальным уравнением $\frac{d^2J}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dJ}{dt}+\frac{1}{LC}J=0$ с начальными условиями $J(0)=0,\frac{dJ}{dt}(0)=0$, что соответствует моменту замыкания цепи. Данное линейное уравнение с постоянными коэффициентами решается методом характеристик и имеет решение вида $J(t)=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}$, где $k_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}$. ***Рассмотрим некоторые частные решения.***

1. R = 0 (активного сопротивления току в цепи нет). Тогда корни характеристического уравнения имеют вид $k_{1,2}=\pm i\frac{1}{\sqrt{LC}}=\pm i\omega_0$ и общее решение $J(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$, а частное решение при начальном условии дает решение $J(t)=J_0\sin\omega_0 t$, где $J_0=\frac{a}{\omega_0}=u_0\sqrt{\frac{C}{L}}=\frac{u_0}{\tilde{R}}$, *здесь* $u_0=\Delta\varphi.$ и $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ называется собственной частотой колебательного контура, а $\tilde{R}=\sqrt{\frac{L}{C}}$ называется волновым сопротивлением. Из структуры решения видно, что оно описывает незатухающие колебания тока в колебательном контуре с частотой ω_0 и периодом $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$.

2. $\frac{1}{LC}>>\frac{R^2}{4L^2}$ (в цепи есть небольшое активное сопротивление). В этом случае, частное решение принимает вид $J(t)=J_0e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t,$ где $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\approx\omega_0$. Данное решение описывает затухающие колебания тока с частотой, близкой к собственной частоте колебательного контура и может быть представлено рис.7.9.

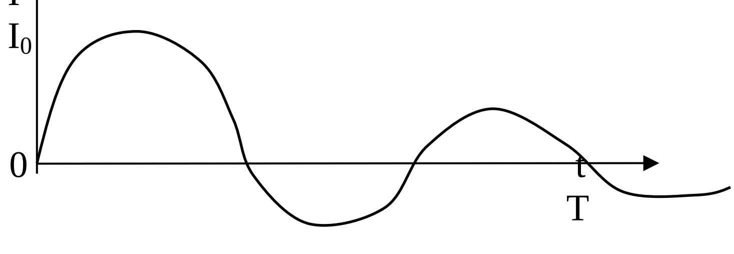

Рис. 7.9. Затухающие колебания тока после размыкания цепи

3. $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$. Характеристическое уравнение имеет кратный корень $k_1 = k_2 = -\frac{R}{2L}$, так что общее решение имеет вид $J(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}(A + Bt)$ и частное решение при значениях A = 0 и B = $a = \frac{u_0}{L} = \operatorname{tg}\varphi$, описывающее апериодическое решение, представленное на рис. 7.10.

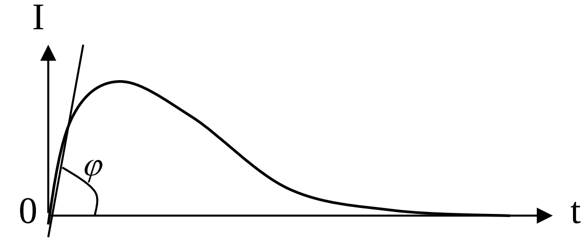

Рис. 7.10. Апериодическое решение задачи электротехники (пример 7.6)

Видно, что в некоторый момент времени ток достигает максимального значения, а затем затухает, что обусловлено разрядом конденсатора.

Пример 7.7. Рассмотрим колебательный контур заданной частоты. Пусть теперь в колебательный контур введен вместо электрической батареи генератор переменного напряжения с частотой ω_1. Таким образом, $\mathring{A} = \mathring{A}_0 \sin \omega_1 t$. Если дополнить колебательный контур антенной, как это показано на рис.7.11, то получится простейший передатчик электромагнитных волн фиксированной частоты. Закон Ома для этой цепи имеет вид

$$\frac{d^2J}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{LC}J = \frac{\omega_1 E_0}{L}\cos\omega_1 t.$$

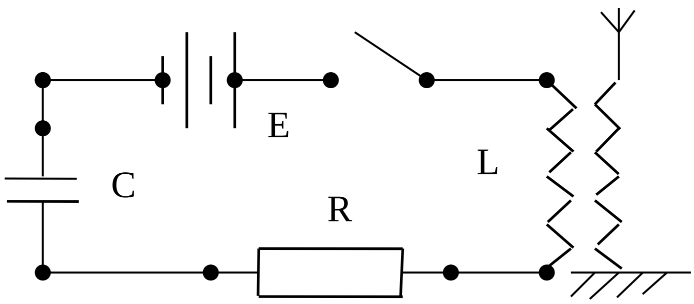

Рис. 7.11. Схема простейшего передатчика электромагнитных волн фиксированной частоты

Точное решение может быть получено лишь для идеального колебательного контура, когда R = 0. Решая неоднородное дифференциальное уравнение методом «вариации произвольных постоянных», получим следующее решение (провести самостоятельно) $J(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{E_0\omega_1}{L}\frac{\cos\omega_1 t}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)}$, где коэффициенты A и B определяются из начальных условий. Видно, что при приближении частоты генератора ω_1 к собственной частоте колебательного контура ω_0 последнее слагаемое в решении резко возрастает. Это явление носит название резонанса и лежит в основе работы данного радиотехнического устройства. Амплитуда тока в условиях резонанса может быть найдена при наличии в цепи активного сопротивления. Как показывают такие решения, например, методом операционного исчисления, когда с помощью преобразования Лапласа ДУ превращается в алгебраическое уравнение, амплитуда тока ограничена значениями активного $J = \dfrac{E_0\omega_1}{L\sqrt{(\omega_1^2-\omega_0^2)^2+\omega_1^2\dfrac{R^2}{L^2}}}$ сопротивления в контуре $J_{\max} = \dfrac{E_0}{R}$.

7.3. Приложение ДУ и систем ДУ к задачам экономики

Рассмотрим рынок реализации продукции в условиях конкуренции, когда есть несколько производителей той же продукции. В этом случае с ростом количества продукции ее цена падает. Примерный график $p(Q)$ представлен на рис. 7.12. Тогда получим $Q' = \alpha \cdot p(Q) \cdot Q$ и динамика процесса будет определяться уже второй производной по времени реализации $Q'' = \alpha\, p'(Q)Q + \alpha\, p(Q)Q'$. Здесь обозначено $\alpha = lm$.

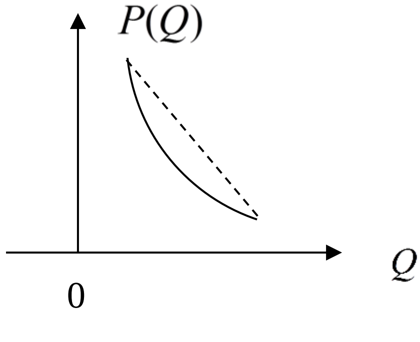

Рис. 7.12. Динамика процесса реализации продукции в условиях конкуренции

В экономике есть такое понятие как эластичность функции (цены, количество произведенного или проданного товара и т. д.), которое определяется отношением изменения цены к изменению количества товара $E(p) = \dfrac{dQ}{dp}\cdot\dfrac{p}{Q}$. Тогда ДУ перепишется в стандартной форме $Q'' = \alpha Q' \cdot p(Q)\cdot(1-\dfrac{1}{|E|})$. Видно, что при $|E|>1$, $Q''>0$ и $Q'<0$ ДУ описывает эластичное увеличение спроса на товар.

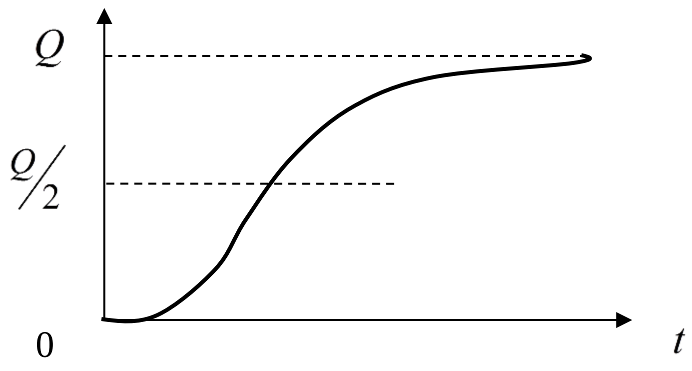

Рис. 7.13. График эластичного увеличения спроса на товар

Если выполняется соотношение $|E| < 1$, то имеет место не эластичный спрос. Решение ДУ зависит от характера функции p(Q). Если использовать модель линейного рынка $p(Q) = a - bQ$, получим ДУ второго порядка $Q'' - \alpha Q'(a - bQ) + \alpha bQ = 0$. Можно получить его общее решение в виде логистической кривой. Эта модель описывает такие экономические явления как инерцию рынка и его насыщение товаром. Отметим, что эта модель описывает так же и рост колонии бактерий в ограниченной питательной среде.

Покажем качественно «паутинную модель» торговли. На рис. 7.14 представлены кривые спроса D (demand) и предложения S (supply) в зависимости от цен p (price) ($D = p^{-a} + M, \quad S = p^{b} + N$)

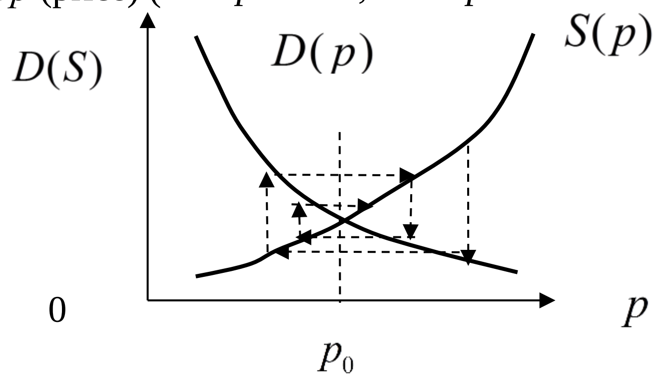

Рис. 7.14. Иллюстрация «паутинной модели» торговли

Видно, что торговля товаром – это итерационный процесс с выявлением в итоге многих торгов истинной цены товара p_0, когда сходятся цены спроса и предложения. Такой же процесс происходит на бирже ценных бумаг.

В заключение главы рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. Очевидно, что спрос и предложение определяются как текущими ценами на товар, так и тенденциями и темпами изменения цены. Рассмотрим математическую модель торговли, которая включает в себя линейные ДУ с непрерывными и дифференцируемыми коэффициентами.

Пример 7.8. Пусть функции спроса D и предложения S зависят от цены P следующим образом (взято для конкретных реальных рынков двух европейских стран) $\begin{matrix} D(t) = 3P'' - P' - 2P + 18 \\ S(t) = 4P'' + P' + 3P + 3. \end{matrix}$. Вторая производная отвечает за увеличение спроса за счет темпов прироста цены. Если $P'' > 0,$ то рынок увеличивает интерес к товару и наоборот. Быстрый рост цен отпугивает потенциальных покупателей, поэтому первая производная для спроса отрицательная. Предложение же усиливается в связи с увеличением цены и может превышать спрос. Рост цены так же увеличивает предложение, поэтому первая производная для функции предложения положительна. Требуется установить зависимость цены от времени. Так как на рынке всегда должно быть равновесие (D = S), то получаем ДУ для цены товара на этом рынке $P'' + 2P' + 5P = 15$, которое имеет характеристическое уравнение и решение $k^2 + 2k + 5 = 0,\quad k_{1,2} = -1 \pm 2i$. Общее решение однородного ДУ имеет вид $y = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$ Решение с учетом частного решения дает выражение $y = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$

Видно, что рынок колеблется около цены, равной значению 3 и быстро затухает около этого значения. Заметим, что таким же образом идут торги на биржах, когда одни брокеры играют на повышении цены на товар, а другие на понижении цены. В результате определяется истинная цена этого товара.

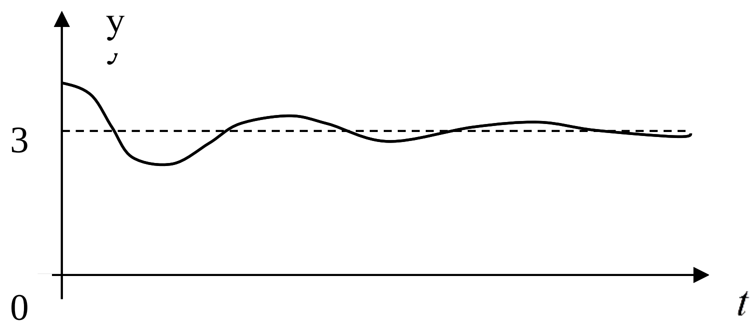

Рис. 7.15. Колебания цены относительно истинного значения 3 (пример 7.8)

Таким образом складывается цена товара на данном конкретном рынке.

ГЛАВА 8

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Остановимся на некоторых приближенных методах численного решения дифференциальных уравнений. Рассмотрим ДУ первого порядка с начальным условием:

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \ , \tag{9.1}$$

в котором $f(x,y)$ – непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные по переменным x и y. Решение этой задачи, называемой задачей Коши, есть функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая начальному условию и дифференциальному уравнению при $x \geq x_0$.

В некоторых случаях (уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные уравнения и уравнения Бернулли) удается найти точное решение задачи, однако в подавляющем большинстве случаев эта задача имеет только численное решение.

Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка с начальными условиями в точке $x = x_0$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}), \qquad y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1, \dots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \ .$$

Задача имеет точное решение только в случае, когда величины $y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$ входят линейно в функцию $f(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)})$ (линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами, имеющее стандартный метод решения). Во всех остальных случаях задача решается только численно.

Для численного решения такой задачи её сводят к системе из n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & z_1 \\ z_1' & = & z_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{n-2}' & = & z_{n-1} \\ z_{n-1} & = & f(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}) \ , \end{array} \right. \qquad \text{где:} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} z_1 & = & y' \\ z_2 & = & y'' \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{n-2} & = & y^{(n-2)} \\ z_{n-1} & = & y^{(n-1)} \ , \end{array} \right. \tag{9.2}$$

с начальными условиями: $y(x_0) = y_0, \ z_1(x_0) = y_1, \ \dots, \ z_{n-1}(x_0) = y_{n-1}$. Так как способы решения систем дифференциальных уравнений первого порядка не отличаются от способов решения отдельных уравнений, то далее мы будем рассматривать только приближенные методы решения задачи (9.1).

8.1. Метод степенных рядов

Известно, что любую дифференцируемую функцию можно разложить в ряд Тейлора. Разложим в ряд Тейлора решение задачи (9.1) в окрестности точки $x = x_0$

$$y(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y_0'''}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \quad (9.3)$$

Здесь y_0 задается начальным условием, $y_0' = f(x_0, y_0)$, коэффициент y_0'' определяется дифференцированием уравнения (9.1):

$$y_0'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|_{x_0, y_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{x_0, y_0} \cdot f(x_0, y_0), \quad (9.4)$$

а остальные коэффициенты $y_0^{(k)},\ k = 3, \ldots, n$ находятся дифференцированием. Если полученный таким образом ряд сходится, то точность решения зависит только от количества членов ряда, а погрешность определяется суммой отбрасываемых членов ряда.

Применение данного метода целесообразно в случае, когда требуется найти решение задачи (9.1) в небольшой окрестности точки $x = x_0$, так как при удалении от этой точки множители $(x - x_0)^k$ быстро растут и скорость сходимости ряда падает. Это значит, что нужно вычислять большее число членов ряда. Существует также некоторая критическая точка $x = x_{\text{кр}}$, при переходе через которую ряд перестает сходиться, что означает невозможность применения рассмотренного метода. Очевидно, что значение $x_{\text{кр}}$ определяется правой частью уравнения (9.1).

Пример. Решить методом степенных рядов задачу Коши: $y' = 1 + x - y$, $\quad y(0) = 1$, ограничиваясь пятью членами ряда.

Решение. Находим коэффициенты членов степенного ряда:

$$y(0) = 1; \quad y' = (1 + x - y)\big|_{x=0} = 0, \quad y'' = (1 - y')\big|_{x=0} = 1,$$

$$y''' = -y''\big|_{x=0} = -1, \quad y^{IV} = -y'''\big|_{x=0} = 1.$$

Выписываем решение, полагая $x_0 = 0$: $y(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$. Для оценки точности данного решения воспользуемся разложением экспоненты в ряд Маклорена

$$y(x) = e^{-x} + x = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \ldots + x =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \sum_{n=5}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Сравнивая две последние формулы, видим, что погрешность приближенного решения $\varepsilon(x)=\sum_{n=5}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$ тем меньше, чем меньше значение x.

8.2. Метод Эйлера. Модифицированный метод Эйлера

Метод Эйлера. Рассмотрим простейший итерационный метод решения задачи (9.1), называемый методом Эйлера. Для этого разобьем отрезок $[a,b]$, на котором будем искать решение, на такое количество подинтервалов, $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$, чтобы их размер, или шаг $h=x_{i+1}-x_i$, $i=0,1,2,...,n-1$, был много меньше размеров самого отрезка. Набор $x_0,x_1,...,x_n$ называется сеткой, а точки $x_i=x_0+ih$, $i=0,1,2,...,n-1$ называются узлами сетки. Обозначим $y(x_i)=y_i$ и, оставляя два первых члена в ряде при $\tilde{o}=\tilde{o}_1$, $x=x_1$, получим:

$$y_1=y_0+y_0'(x_1-x_0)=y_0+hf(x_0,y_0)\,. \tag{9.5}$$

Данное выражение является первым членом итерационной последовательности:

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i),\quad i=0,1,2,\dots\,, \tag{9.6}$$

которая геометрически означает замену исходной кривой $y(x)$ на ломаную прямую, состоящую из касательных к $y(x)$ в точках x_i,y_i. Формула (9.6) называется формулой Эйлера. Её погрешность не больше, чем первый из отбрасываемых в ряде членов: $\varepsilon(x_i)\approx\frac{y_i''}{2!}h^2$. Отсюда следует, что метод Эйлера на каждом шаге имеет квадратичную относительно величины этого шага погрешность, однако при практическом применении формулы Эйлера значение y_{i+1} находится с использованием ранее вычисленного значения y_i, что означает накапливание ошибки на каждом шаге. Погрешность в конечной точке интегрирования равна сумме погрешностей во всех промежуточных точках, число таких точек $n=\frac{b-a}{h}$, следовательно, суммарная погрешность метода Эйлера пропорциональна шагу интегрирования: $\varepsilon(x)\sim h$.

Для уменьшения погрешности используют две **модификации метода Эйлера:**

А. $$y_{i+1}=y_i+h\cdot f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+f_i\cdot\frac{h}{2}\right),\qquad i=0,1,2,\dots \tag{9.8}$$

Б. $$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\cdot[f_i + f(x_{i+1},\ y_i + f_i\cdot h)], \qquad i = 0,1,2,\ldots \tag{9.9}$$

которые являются попыткой сглаживания резких колебаний функции $f(x,y)$ либо путем вычисления её значения при промежуточном значении аргументов, либо путем усреднения значения функции на i-ом интервале.

Пример. Решить уже рассмотренную задачу обычным и модифицированным методами Эйлера на сетке: $x_i = x_0 + 0{,}1\cdot i$, $i = 0,1,\ldots,4$.

Решение. Полагаем $x_0 = 0,\quad y_0 = 1,\quad h = 0{,}1;\quad f(x,y) = 1 + x - y$:

Итерация	Узел сетки	Приближенное решение		Точное решение	Погрешность А	Погрешность Б
		Формула А	Формула Б			
0	$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	$y_0 = 1$	1	0	0
1	$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 1$	$y_1 = 1$	1,0048	0,0048	0,0002
2	$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 1{,}01$	$y_2 = 1{,}0193$	1,0187	0,0087	0,0006
3	$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 1{,}029$	$y_3 = 1{,}0416$	1,0408	0,0118	0,0008
4	$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 1{,}0561$	$y_4 = 1{,}0713$	1,0703	0,0142	0,001

Из таблицы видим, что модифицированный метод Эйлера на порядок точнее обычного.

8.3. Метод Рунге – Кутта

Если решение задачи (*) есть кривая с резкими выбросами, то для решения целесообразно применять методы повышенной точности. Пусть известно значение решения на предыдущей итерации $ó_i$. Оставляя в ряде Тейлора три члена, получим:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i). \tag{9.10}$$

Будем искать y_{i+1} в виде $y_{i+1} = y_i + a_1p_1 + a_2p_2$, где: $p_1 = hf(x_i, y_i),\quad p_2 = hf(x_i + bh,\ y_i + cp_1)$, a_1, a_2, b, c – неизвестные величины.

Разложим в ряд Тейлора функцию двух переменных $p_2(x,y)$:

$$p_2 = hf(x_i + bh, y_i + cp_1) = h\left[f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x}bh + \frac{\partial f_i}{\partial y}cp_1 + \ldots\right],$$ где

$$f_i = f(x_i, y_i),\quad \frac{\partial f_i}{\partial x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i,\,y=y_i}.$$

Получаем

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + a_1 h f_i + a_2 h\left[f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} bh + \frac{\partial f_i}{\partial y} chf_i \right] = \\
&= y_i + h(a_1 + a_2) f_i + h^2 a_2 \left(b\frac{\partial f_i}{\partial x} + cf_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right)
\end{aligned}
. \qquad (9.11)
$$

С другой стороны, формулу можно переписать в виде: $y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right)$, откуда получаем выражения, связывающие неизвестные $a_1, a_2, b, c: a_1 + a_2 = 1$, $a_2 b = \frac{1}{2}$, $a_2 c = \frac{1}{2}$, $a_1 = 1 - a_2$, $b = c = \frac{1}{2a_2}$.

Так как полученная система из трех уравнений имеет четыре неизвестные, то выберем значение одной из них (например a_2) так, чтобы остальные имели наиболее простой вид: $a_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad b = c = 1$. Окончательно получим

$$
y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \; p_1 = hf(x_i, y_i), \; p_2 = hf(x_i + h, y_i + p_1). \qquad (9.12)
$$

Данная формула на каждом шаге имеет кубичную относительно величины этого шага погрешность, что соответствует квадратичной суммарной погрешности на всем отрезке интегрирования, а изложенный метод называется методом Рунге – Кутты второго порядка точности. Если в ряде Тейлора оставить пять членов, то по аналогии можно получить расчетные формулы для метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности: $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4)$, где $p_1 = hf(x_i, y_i)$, $p_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{p_1}{2} \right)$,

$$
p_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{p_2}{2} \right), \quad p_4 = hf(x_i + h, y_i + p_3). \qquad (9.13)
$$

Рассмотренный метод Рунге – Кутты является самым распространенным численным методом решения задачи (9.1).

Пример. Решить ту же задачу методом Рунге – Кутты второго порядка точности на сетке: $x_i = x_0 + 0{,}1 \cdot i$, $i = 0, 1, , \ldots, 4$.

Решение. Полагаем $x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad h = 0{,}1; \quad f(x, y) = 1 + x - y$:

Итерация	Узел сетки	P_1	P_2	Решение по формуле В	Точное решение	Погрешность формулы В
0	$x_0 = 0$	0	0,01	1	1	0
1	$x_1 = 0{,}1$	0,01	0,019	1,0048	1,0048	0
2	$x_2 = 0{,}2$	0,019	0,0271	1,0187	1,0187	0
3	$x_3 = 0{,}3$	0,0271	0,0344	1,0408	1,0408	0
4	$x_4 = 0{,}4$	0,0344	0,041	1,0703	1,0703	0

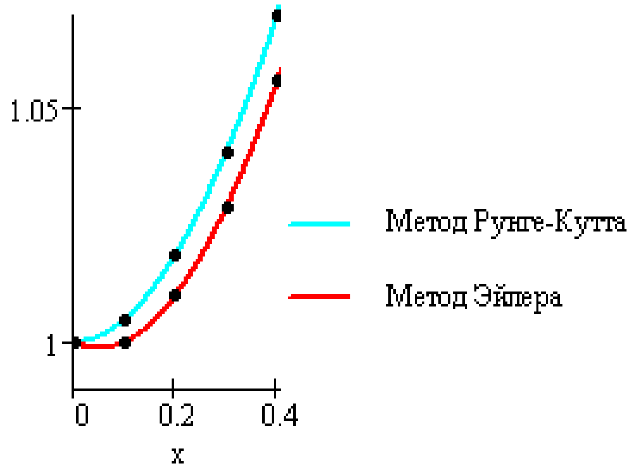

Рис. 9.1. Сравнение решения задачи методом Эйлера и методом Рунге – Кутта

Из таблицы видим, что метод Рунге – Кутты второго порядка точности для данного уравнения дает решение, совпадающее с точным.

На рис. 9.1 показаны решения задачи обычным методом Эйлера и методом Рунге – Кутта второго порядка точности. Видим, что решение методом Эйлера характеризуется некоторым запаздыванием на первом подинтервале значений x.

8.4. Реализация решения ДУ в программе MathCad

Для получения решение ДУ в программе MathCad необходимо получить приближенное решения задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(a) = c$ на отрезке $[a, b]$ и шаге интегрирования h различными численными методами и представить их графически, используя их интерполяцию кубическим сплайном. Решим ДУ методом Эйлера и методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности. Сравним полученные решения.

Пример. $y' = \cos(1{,}5y + x)^2$; $y(1) = 0{,}9$; $x \in [1; 2]$.

Решение. Для решения задачи методом Эйлера организуем итерационный процесс, используя формулу Эйлера:

$$a := 1 \qquad b := 2 \qquad h := 0.1 \qquad f(x, y) := \cos(1.5y + x)^2 + 1.4$$

$$i := 1 .. 11 \qquad X_i := a + (i - 1)\cdot h \qquad Y_1 := 0.9$$

$$i := 1 .. 10 \qquad Y_{i+1} := Y_i + h\cdot f(X_i, Y_i) \qquad .$$

Для решения задачи методом Рунге – Кутта 4-го порядка точности используем стандартный оператор **rkfixed**:

$$i := 1 .. 11 \qquad y_1 := 0.9 \qquad D(x, Y1) := f(x, Y1_1) \quad N := \frac{b - a}{h}$$

$$Y1 := \mathrm{rkfixed}(y, a, b, N, D) \qquad E_i := \left|Y1_{i,2} - Y_i\right|$$

Для графического представления полученных решений, интерполируем их кубическим сплайном, для чего используем стандартные операторы **cspline** и **interp**:

$$vs := \mathrm{cspline}(X, Y)$$

$$F(x) := \mathrm{interp}(vs, X, Y, x)$$

Для сравнения полученных решений выведем на печать массивы:

Y – решение методом Эйлера;

Y1 – решение методом Рунге – Кутта 4-го порядка точности;

E – абсолютная погрешность метода Эйлера относительно метода Рунге-Кутта.

$$Y = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.103 \\ 1.336 \\ 1.567 \\ 1.768 \\ 1.934 \\ 2.079 \\ 2.221 \\ 2.38 \\ 2.57 \\ 2.795 \end{pmatrix} \quad Y1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 1.1 & 1.109 \\ 1.2 & 1.345 \\ 1.3 & 1.574 \\ 1.4 & 1.771 \\ 1.5 & 1.933 \\ 1.6 & 2.076 \\ 1.7 & 2.219 \\ 1.8 & 2.381 \\ 1.9 & 2.578 \\ 2 & 2.808 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.006 \\ 0.009 \\ 0.007 \\ 0.003 \\ 0.001 \\ 0.003 \\ 0.002 \\ 0.001 \\ 0.007 \\ 0.012 \end{pmatrix}$$

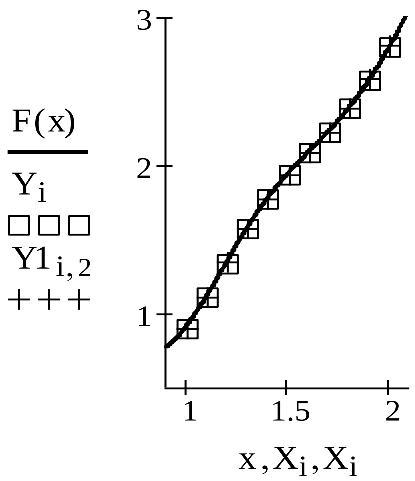

Рис. 9.2. Сравнение решений, полученных методом Эйлера и методом Рунге – Кутта

Из сравнения графиков решения можно сделать вывод о том, что для данного уравнения различие между решениями модифицированным методом Эйлера и методом Рунге – Кутта 4-го порядка точности расхождение не превышает 1,2 %. Поэтому решения Y_i (квадраты) и $Y_{i,2}$ (крестики) практически сливаются друг с другом на графике рис. 9.2.

Пример. Решим методом Эйлера ДУ: $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ при $y(0) = 1$ на отрезке [0; 1]. Определить значение $y(1)$.

Решение. Выберем шаг $h = 0{,}1$ и разделим данный отрезок на 10 интервалов. Разностное алгебраическое уравнение будет иметь вид $y_{i+1} = y_i + h\dfrac{x_i y_i}{x_i^2 + y_i^2}$.

Тогда, подставляя начальное условие y(0) = 1, получим цепочку значений y_i, $i = \overline{1{,}10}$: $y_1 = y_0 + h\dfrac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} = 1 + 0{,}1\dfrac{0 \cdot 1}{0+1} = 1$; $y_2 = 1 + 0{,}1\dfrac{0{,}1 \cdot 1}{0{,}01+1} = 1{,}01$;,

$y_3 = 1{,}01 + 0{,}1\dfrac{0{,}2 \cdot 1{,}01}{0{,}04 + 1{,}02} = 1.03$; $y_4 = 1{,}057$; $y_5 = 1{,}09$; $y_6 = 1{,}127$; $y_7 = 1{,}168$;

$y_8 = 1{,}20$; $y_9 = 1{,}25.$; $y_{10} = 1{,}297.$

Таким образом, получаем приближенное решение $y(1\ ) = 1{,}297$. Пример может быть решен точно, так как это неоднородное ДУ и решается заменой $y = u\,x$.

Ответ: $\ln y = \dfrac{x^2}{2y^2} + C$.

Из начального условия получим, что С = 0. Трансцендентное уравнение решается графически и имеет приближенное значение $y(1) = 1{,}3$, что достаточно хорошо совпадает с полученным решением.

.