Теория вероятностей.

Основные понятия.

Определение. **Событием** называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта..

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

Определение. События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Определение. **Полной группой событий** называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. **Достоверным событием** называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Определение. События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

Определение. **Вероятностью** события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10};$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

<u>Определение.</u> Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие **геометрической вероятности**, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства).

Так если на отрезке длиной L выделен отрезок длины l, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок l равна отношению l/L.

<u>Операции над событиями.</u>

<u>Определение.</u> События А и В называются **равными**, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.

<u>Определение.</u> Объединением или **суммой** событий A_k называется событие А, которое означает появление **хотя бы одного** из событий A_k.

$$A = \bigcup_k A_k$$

<u>Определение.</u> Пересечением или **произведением** событий A_k называется событие А, которое заключается в осуществлении **всех** событий A_k.

$$A = \bigcap_k A_k$$

<u>Определение.</u> Разностью событий А и В называется событие С, которое означает, что происходит событие А, но не происходит событие В.

$$C = A \setminus B$$

<u>Определение.</u> Дополнительным к событию А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А **не происходит.**

<u>Определение.</u> Элементарными исходами опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется **пространством элементарных событий**.

Теорема (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Следствие 1: *Если события* $A_1, A_2, ..., A_n$ *образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$$

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$$

Следствие 2: *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице*.

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Определение. Событие А называется **независимым** от события В, вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется **условной вероятностью** события В.

$$\boxed{P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)}$$

Теорема. (Умножения вероятностей) *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.*

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)}$$

Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$\boxed{P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})}$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться n событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$\boxed{P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n}$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие А, появление хотя бы одной червонной карты – событие В. Таким образом нам надо определить вероятность события С = А + В.

Кроме того, события А и В – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$

Пример. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что не выпадет 6 очков - $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков равна $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

Пример. В барабане револьвера находятся 4 патрона из шести в произвольном порядке. Барабан раскручивают, после чего нажимают на спусковой крючок два раза. Найти вероятности хотя бы одного выстрела, двух выстрелов, двух осечек.

Вероятность выстрела при первом нажатии на курок (событие А) равна $P(A)=\frac{4}{6}$, вероятность осечки - $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$. Вероятность выстрела при втором нажатии на курок зависит от результата первого нажатия.

Так если в первом случае произошел выстрел, то в барабане осталось только 3 патрона, причем они распределены по 5 гнездам, т.к. при втором нажатии на курок напротив ствола не может оказаться гнездо, в котором был патрон при первом нажатии на курок.

Условная вероятность выстрела при второй попытке - $P(B/A)=\frac{3}{5}$, если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A})=\frac{4}{5}$ - если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз - $P(\overline{B}/A)=\frac{2}{5}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{1}{5}$ - если в первый раз была осечка.

Рассмотрим вероятности того, что во втором случае произойдет выстрел (событие В) или произойдет осечка (событие $\overline{B}$) при условии, что в первом случае произошел выстрел (событие А) или осечка (событие $\overline{A}$).

$P(B)=P(A)P(B/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{15}=0{,}4$ - два выстрела подряд

$P(B)=P(\overline{A})P(B/\overline{A})=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{15}\approx 0{,}267$ - первая осечка, второй выстрел

$P(\overline{B})=P(A)P(\overline{B}/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}\approx 0{,}267$ - первый выстрел, вторая осечка

$P(\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}\approx 0{,}067$ - две осечки подряд

Эти четыре случая образуют полную группу событий (сумма их вероятностей равна единице)

Анализируя полученные результаты, видим, что вероятность хотя бы одного выстрела равна сумме $P_1=\frac{6}{15}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{14}{15}\approx 0{,}933$

Теперь рассмотрим другой случай. Предположим, что после первого нажатия на курок барабан раскрутили и опять нажали на курок.

Вероятности первого выстрела и первой осечки не изменились - $P(A)=\frac{4}{6}$, $P(\overline{A})=\frac{2}{6}$. Условные вероятности второго выстрела и осечки вычисляются из условия, что напротив ствола может оказаться то же гнездо, что и в первый раз.

Условная вероятность выстрела при второй попытке - $P(B/A)=\frac{3}{6}$, если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A})=\frac{4}{6}$ - если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз - $P(\overline{B}/A)=\frac{3}{6}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{2}{6}$ - если была осечка.

Тогда:

$P(B)=P(A)P(B/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{9}\approx 0{,}333$ - два выстрела подряд

$P(B)=P(\overline{A})P(B/\overline{A})=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{9}\approx 0{,}222$ - первая осечка, второй выстрел

$P(\overline{B})=P(A)P(\overline{B}/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{9}\approx 0{,}333$ - первый выстрел, вторая осечка

$P(\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{9}\approx 0{,}111$ - две осечки подряд

В этом случае вероятность того, что произойдет хотя бы один выстрел, равна $P_2=\frac{3}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{8}{9}\approx 0{,}889$

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Обозначим попадание в цель первым стрелком – событие А, вторым – событие В, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$.

$$P(A)=0{,}7;\quad P(\overline{A})=0{,}3;\quad P(B)=0{,}8;\quad P(\overline{B})=0{,}2.$$

Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет равна

$$P(A)P(\overline{B})=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14$$

Вероятность того, что второй стрелок попадет в цель, а первый – нет равна

$$P(\overline{A})P(B)=0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}24$$

Тогда вероятность попадания в цель только одним стрелком равна

$$P=0{,}14+0{,}24=0{,}38$$

Тот же результат можно получить другим способом – находим вероятности того, что оба стрелка попали в цель и оба промахнулись. Эти вероятности соответственно равны:

$$P(A)P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56;\quad P(\overline{A})P(\overline{B})=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06.$$

Тогда вероятность того, что в цель попадет только один стрелок равна:

$$P=1-0{,}56-0{,}06=0{,}38.$$

Пример. Вероятность того, что взятая наугад деталь из некоторой партии деталей, будет бракованной равна 0,2. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей 2 окажется не бракованными.

Обозначим бракованную деталь – событие А, не бракованную – событие $\overline{A}$.

$$P(A)=0{,}2;\quad P(\overline{A})=0{,}8;$$

Если среди трех деталей оказывается только одна бракованная, то это возможно в одном из трех случаев: бракованная деталь будет первой, второй или третьей.

$$P=P(A)P(\overline{A})P(\overline{A})+P(\overline{A})P(A)P(\overline{A})+P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)$$

$$P=3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}384$$

Пример. Вероятности того, что нужная деталь находится в первом, втором, третьем или четвертом ящике, соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Найти вероятности того, что эта деталь находится: а) не более, чем в трех ящиках; б) не менее, чем в двух ящиках.

а) Вероятность того, что данная деталь находится во всех четырех ящиках, равна

$$P = P_1 P_2 P_3 P_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}3024.$$

Вероятность того, что нужная деталь находиться не более, чем в трех ящиках равна вероятности того, что она не находится во всех четырех ящиках.

$$P(A) = 1 - P = 1 - 0{,}3024 = 0{,}6976\,.$$

б) Вероятность того, что нужная деталь находится не менее, чем в двух ящиках, складывается из вероятностей того, что деталь находиться только в двух ящиках, только в трех ящиках, только в четырех ящиках. Конечно, эти вероятности можно посчитать, а потом сложить, однако, проще поступить иначе. Та же вероятность равна вероятности того, что деталь не находится только в одном ящике и имеется вообще.

Вероятность того, что деталь находится только в одном ящике, равна

$$P = P_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 P_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 P_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 P_4$$

$$P = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$$
$$= 0{,}0036 + 0{,}0056 + 0{,}0096 + 0{,}0216 = 0{,}0404$$
$$Q = 1 - 0{,}0404 = 0{,}9596$$

Вероятность того, что нужной деталь нет ни в одном ящике, равна:

$$P_0 = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024$$
$$Q_0 = 1 - 0{,}0024 = 0{,}9976$$

Искомая вероятность равна $P(B) = Q \cdot Q_0 = 0{,}9596 \cdot 0{,}9976 = 0{,}9573.$

Формула полной вероятности.

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А.*

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)}$$

Фактически эта формула **полной вероятности** уже использовалась при решении примеров, приведенных выше, например, в задаче с револьвером.

Доказательство.

Т.к. события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий, то событие А можно представить в виде следующей суммы:

$$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i$$

Т.к. события $H_1, H_2, ..., H_n$ несовместны, то и события AH_i тоже несовместны. Тогда можно применить теорему о сложении вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$$

При этом $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)$

Окончательно получаем: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$

Теорема доказана.

Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16;$
- для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36;$
- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64;$

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}$$

Формула Бейеса. (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие А, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события А, т.е. условные вероятности $P(H_i / A)$.

<u>Теорема.</u> *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$$\boxed{P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}}$$

Эта формула называется **формулой Бейеса**.

<u>Доказательство.</u>

По Теореме умножения вероятностей получаем:

$$P(A)P(H_i / A) = P(H_i)P(A/H_i)$$

Тогда если $P(A) \neq 0$, $\quad P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$.

Для нахождения вероятности P(A) используем формулу полной вероятности.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Если до испытания все гипотезы равновероятны с вероятностью $P(H_i) = p$, то формула Бейеса принимает вид:

$$\boxed{P(H_i / A) = \frac{P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)}}$$

<u>Повторение испытаний.</u>
<u>Формула Бернулли.</u>

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие А, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события А**.

Допустим, что событие А наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n испытаний событие А наступило ровно m раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в формуле Бернулли. (Якоб Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик)

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие А наступает с вероятностью $P(A) = p$, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Обозначим A_i – наступление события А в испытании с номером i. Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате n опытов событие А наступает ровно m раз, то остальные n-m раз это событие не наступает. Событие А может появиться m раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m. Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m (1-p)^{n-m}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли:**

$$\boxed{P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}}$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в m испытаниях событие в вероятностью p наступает ровно n раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5} = p^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744$$

<u>Случайные величины.</u>

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

<u>Определение.</u> **Случайной величиной** называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

<u>Определение.</u> **Дискретной случайной величиной** называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).
Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

<u>Определение.</u> **Непрерывной случайной величиной** называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

<u>Закон распределения дискретной случайной величины.</u>

<u>Определение.</u> Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**.

Графическое представление этой таблицы называется **многоугольником распределения.** При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения.

Вероятности пяти попаданий из пяти возможных, четырех из пяти и трех из пяти были найдены <u>выше</u> по формуле Бернулли и равны соответственно:

$$P_{5,5} = 0{,}01024, \quad P_{4,5} = 0{,}0768, \quad P_{3,5} = 0{,}2304$$

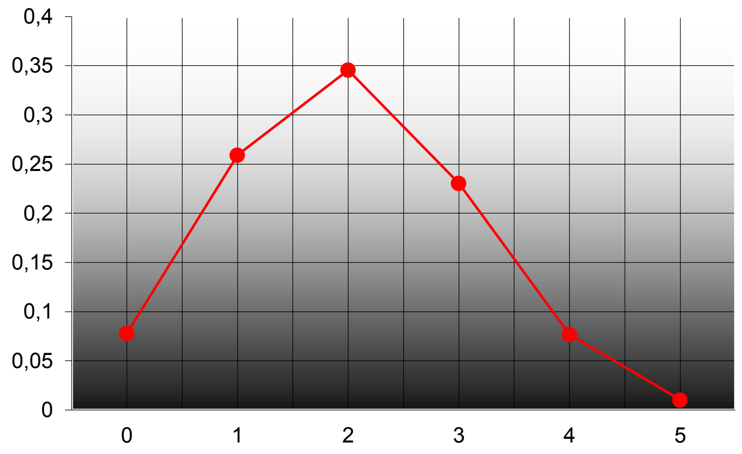
Аналогично найдем:

$$P_{2,5} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456$$

$$P_{1,5} = \frac{5!}{1!\cdot 4!}0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}2592$$

$$P_{0,5} = \frac{5!}{0!\cdot 5!}0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}6^5 = 0{,}0778$$

Представим графически зависимость числа попаданий от их вероятностей.



При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности.

Пример. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания в мишень при одном выстреле.

Если обозначить p – вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле, то вероятность промаха при одном выстреле, очевидно, равна $(1 - p)$.

Вероятность трех промахов из трех выстрелов равна $(1 - p)^3$. Эта вероятность равна 1 – 0,875 = 0,125, т.е. в цель не попадают ни одного раза.

Получаем: $(1-p)^3 = 0{,}125$; $\quad 1-p = 0{,}5$; $\quad p = 0{,}5$.

Пример. В первой коробке содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй коробке 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой коробки наугад извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наугад берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Вероятность того, что взятый из первой коробки шар белый - $P_1(Б) = 0{,}8$, что не белый - $P_1(НБ) = 0{,}2$.

Вероятность того, что взятый из второй коробки шар белый - $P_2(Б) = 0{,}2$, что не белый - $P_2(НБ) = 0{,}8$.

Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из первой коробки и вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из второй коробки, равны 0,5.

Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из первой коробки, и он белый - $p_1 = 0{,}5 \cdot P_1(Б) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4$.

Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из второй коробки, и он белый - $p_2 = 0{,}5 \cdot P_2(Б) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$.

Вероятность того, что повторно будет выбран белый шар, равна

$$P = p_1 + p_2 = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5.$$

Пример. Имеется пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наугад выбранной винтовки.

Вероятность того, что выбрана винтовка с оптическим прицелом, обозначим $P_0 = \frac{3}{5}$, а вероятность того, что выбрана винтовка без оптического прицела, обозначим $P_{БО} = \frac{2}{5}$.

Вероятность того, что выбрали винтовку с оптическим прицелом, и при этом цель была поражена $P_1 = P_0 \cdot P(ПЦ/O)$, где *P(ПЦ/О)* – вероятность поражения цели из винтовки с оптическим прицелом.

Аналогично, вероятность того, что выбрали винтовку без оптического прицела, и при этом цель была поражена $P_1 = P_{БО} \cdot P(ПЦ/БО)$, где *P(ПЦ/БО)* – вероятность поражения цели из винтовки без оптического прицела.

Окончательная вероятность поражения цели равна сумме вероятностей P_1 и P_2, т.к. для поражения цели достаточно, чтобы произошло одно из этих несовместных событий.

$$P = P_1 + P_2 = 0{,}95 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}57 + 0{,}28 = 0{,}85$$

Пример. Трое охотников одновременно выстрелили по медведю, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым стрелком, если вероятности попадания для этих стрелков равны соответственно 0,3, 0,4, 0,5.

В этой задаче требуется определить вероятность гипотезы уже после того, как событие уже совершилось. Для определения искомой вероятности надо воспользоваться формулой Бейеса. В нашем случае она имеет вид:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)}$$

В этой формуле H_1, H_2, H_3 – гипотезы, что медведя убьет первый, второй и третий стрелок соответственно. До произведения выстрелов эти гипотезы равновероятны и их вероятность равна $\frac{1}{3}$.

$P(H_1/A)$ – вероятность того, что медведя убил первый стрелок при условии, что выстрелы уже произведены (событие А).

Вероятности того, что медведя убьет первый, второй или третий стрелок, вычисленные до выстрелов, равны соответственно:

$$P(A/H_1) = p_1 q_2 q_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}09$$
$$P(A/H_2) = q_1 p_2 q_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}14$$
$$P(A/H_3) = q_1 q_2 p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}21$$

Здесь $q_1 = 0{,}7$; $q_2 = 0{,}6$; $q_3 = 0{,}5$ – вероятности промаха для каждого из стрелков, рассчитаны как $q = 1 - p$, где p – вероятности попадания для каждого из стрелков.

Подставим эти значения в формулу Бейеса:

$$P(H_1 / A) = \frac{0{,}09}{0{,}44} = \frac{9}{44}.$$

Пример. Последовательно послано четыре радиосигнала. Вероятности приема каждого из них не зависят от того, приняты ли остальные сигналы, или нет. Вероятности приема сигналов равны соответственно 0,2, 0,3, 0,4, 0,5. Определить вероятность приема трех радиосигналов.

Событие приема трех сигналов из четырех возможно в четырех случаях:

$$P_A = p_1 p_2 p_3 q_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}012$$
$$P_B = p_1 p_2 q_3 p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}018$$
$$P_C = p_1 q_2 p_3 p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}028$$
$$P_D = q_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}048$$

Для приема трех сигналов необходимо совершение одного из событий A, B, C или D. Таким образом, находим искомую вероятность:

$$P = 0{,}012 + 0{,}018 + 0{,}028 + 0{,}048 = 0{,}106.$$

Пример. Двадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся знает ответы только на 35 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос одного билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

В общей сложности имеется 40 вопросов (по 2 в каждом из 20 билетов). Вероятность того, что выпадает вопрос, на который ответ известен, очевидно, равна $\frac{35}{40}$.

Для того, чтобы сдать экзамен, требуется совершение одного из трех событий:

1) Событие А – ответили на первый вопрос (вероятность $\frac{35}{40}$) и ответили на второй вопрос (вероятность $\frac{34}{39}$). Т.к. после успешного ответа на первый вопрос остается еще 39 вопросов, на 34 из которых ответы известны.

$$P(A) = \frac{35}{40} \cdot \frac{34}{39} = 0{,}7628$$

2) Событие В – на первый вопрос ответили (вероятность $\frac{35}{40}$), на второй – нет (вероятность $\frac{5}{39}$), на третий – ответили (вероятность $\frac{34}{38}$).

$$P(B) = \frac{35}{40} \cdot \frac{5}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0{,}1004$$

3) Событие С – на первый вопрос не ответили (вероятность $\frac{5}{40}$), на второй – ответили (вероятность $\frac{35}{39}$), на третий – ответили (вероятность $\frac{34}{38}$).

$$P(C) = \frac{5}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0{,}1004$$

Вероятность того, что при заданных условиях экзамен будет сдан равна:

$$P = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}9636$$

Пример. Имеются две партии однородных деталей. Первая партия состоит из 12 деталей, 3 из которых - бракованные. Вторая партия состоит из 15 деталей, 4 из которых – бракованные. Из первой и второй партий извлекают по две детали. Какова вероятность того, что среди них нет бракованных деталей.

Вероятность оказаться не бракованной для первой детали, извлеченной из первой партии, равна $p_1 = \frac{9}{12}$, для второй детали, извлеченной из первой партии при условии, что первая деталь была не бракованной - $p_2 = \frac{8}{11}$.

Вероятность оказаться не бракованной для первой детали, извлеченной из второй партии, равна $p_3 = \frac{11}{15}$, для второй детали, извлеченной из второй партии при условии, что первая деталь была не бракованной - $p_4 = \frac{10}{14}$.

Вероятность того, что среди четырех извлеченных деталей нет бракованных, равна:

.

$$P = \frac{9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 14} = 0{,}2857$$

Рассмотрим тот же пример, но несколько с другим условием.

Пример. Имеются две партии однородных деталей. Первая партия состоит из 12 деталей, 3 из которых - бракованные. Вторая партия состоит из 15 деталей, 4 из которых – бракованные. Из первой партии извлекаются наугад 5 деталей, а из второй – 7 деталей. Эти детали образуют новую партию. Какова вероятность достать из них бракованную деталь?

Для того, чтобы выбранная наугад деталь была бы бракованной, необходимо выполнение одного из двух несовместных условий:

1) Выбранная деталь была из первой партии (вероятность - $\frac{5}{12}$) и при этом она – бракованная (вероятность - $\frac{3}{12}$). Окончательно:

$$p_1 = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} = 0{,}1041;$$

2) Выбранная деталь была из второй партии (вероятность - $\frac{7}{12}$) и при этом она – бракованная (вероятность - $\frac{4}{15}$). Окончательно:

$$p_2 = \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{15} = 0{,}1556;$$

Окончательно, получаем: $p = p_1 + p_2 = 0{,}2597$.

Пример. В урне 3 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают наугад два шара. Найти вероятность того, что эти шары не одного цвета.

Событие, состоящее в том, что выбранные шары разного цвета произойдет в одном из двух случаев:

1) Первый шар белый (вероятность - $\frac{3}{8}$), а второй – черный (вероятность - $\frac{5}{7}$).

2) Первый шар черный (вероятность - $\frac{5}{8}$), а второй – белый (вероятность - $\frac{3}{7}$).

Окончательно получаем: $p = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$.

Биноминальное распределение.

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину Х.

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,...}$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется **биноминальным**.

Пример. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1. Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных.

$$P_4(0) = \frac{4!}{0!\cdot 4!} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561$$

2) Одна нестандартная.

$$P_4(1) = \frac{4!}{1!\cdot 3!} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$$

3) Две нестандартные детали.

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486$$

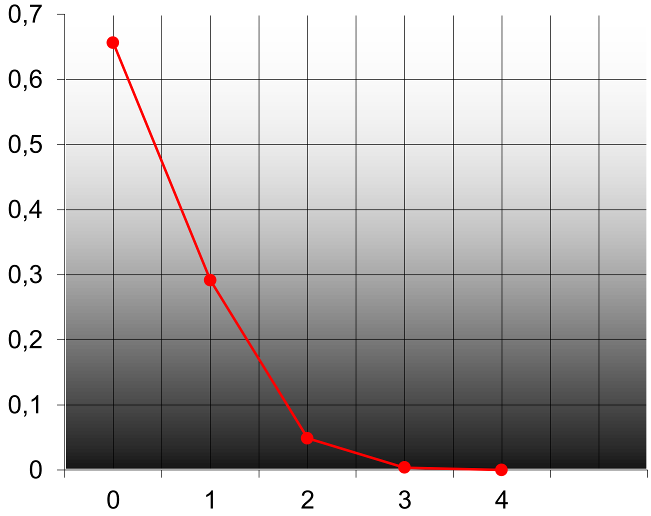
4) Три нестандартные детали.

$$P_4(3) = \frac{4!}{3!\cdot 1!} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036$$

5) Четыре нестандартных детали.

$$P_4(4) = \frac{4!}{4!\cdot 0!} 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001$$

Построим многоугольник распределения.



Пример. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

Каждая игральная кость имеет три варианта четных очков – 2, 4 и 6 из шести возможных, таким образом, вероятность выпадения четного числа очков на одной кости равна 0,5.

Вероятность одновременного выпадения четных очков на двух костях равна 0,25.

Вероятность того, что при двух испытаниях оба раза выпали четные очки на обеих костях, равна:

$$P_2(2) = \frac{2!}{0!\cdot 2!} 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^0 = 0{,}0625$$

Вероятность того, что при двух испытаниях один раз выпали четные очки на обеих костях:

$$P_2(1) = \frac{2!}{1!\cdot 1!} 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}375$$

Вероятность того, что при двух испытаниях ни одного раза не выпаде четного числа очков на обеих костях:

$$P_2(0) = \frac{2!}{0!\cdot 2!} 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}5625$$

<u>Распределение Пуассона.</u>

Пусть производится n независимых испытаний, в которых появление события А имеет вероятность p. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события А в каждом испытании мало ($p \le 0{,}1$), то для нахождения вероятности появления события А k раз находится следующим образом.

Сделаем важное допущение – произведение np сохраняет постоянное значение:

$$np = \lambda$$

Практически это допущение означает, что среднее число появления события в различных сериях испытаний (при разном n) остается неизменным.

По формуле Бернулли получаем:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Найдем предел этой вероятности при $n \to \infty$.

$$P_n(k) \cong \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Получаем формулу **распределения Пуассона:**

$$\boxed{P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$$

Если известны числа λ и k, то значения вероятности можно найти по соответствующим таблицам распределения Пуассона.

Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание существует, если ряд, стоящий в правой части равенства, сходится абсолютно.

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

$$M(C) = C$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(Cx) = CM(x)$$

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Пусть производится n независимых испытаний, вероятность появления события А в которых равна p.

Теорема. *Математическое ожидание М(Х) числа появления события А в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.*

$$M(X) = np$$

Однако, математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания.

Это отклонение равно разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием. При этом математическое ожидание отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль.

Определение. Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Пример. Для рассмотренного выше примера закон распределения случайной величины имеет вид:

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Математическое ожидание случайной величины равно:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}5625 = 1{,}5$$

Возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (0 - 1{,}5)^2 = 2{,}25$$
$$[x_2 - M(X)]^2 = (1 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$$
$$[x_3 - M(X)]^2 = (2 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$$

Тогда

$[X-M(X)]^2$	2,25	0,25	0,25
p	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсия равна:

$$D(X) = 2{,}25 \cdot 0{,}0625 + 0{,}25 \cdot 0{,}375 + 0{,}25 \cdot 0{,}5625 = 0{,}375$$

Однако, на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, т.к. приводит при большом количестве значений случайной величины к громоздким вычислениям.

Поэтому применяется другой способ.

Вычисление дисперсии.

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Доказательство. С учетом того, что математическое ожидание M(X) и квадрат математического ожидания $M^2(X)$ – величины постоянные, можно записать:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] =$$

$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

$$\boxed{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2}$$

Применим эту формулу для рассмотренного выше примера:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
p	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}5625 = 2{,}625$$

$$D(X) = 2{,}625 - [1{,}5]^2 = 0{,}375$$

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C) = 0$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Справедливость этого равенства вытекает из свойства 2.

Теорема. *Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в каждом испытании.*

$$\boxed{D(X) = npq}$$

Среднее квадратическое отклонение.

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}$$

Теорема. *Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.*

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)}$$

Пример. Завод выпускает 96% изделий первого сорта и 4% изделий второго сорта. Наугад выбирают 1000 изделий. Пусть X – число изделий первого сорта в данной выборке. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Выбор каждого из 1000 изделий можно считать независимым испытанием, в котором вероятность появления изделия первого сорта одинакова и равна p = 0,96.

Таким образом, закон распределения может считаться биноминальным.

$$m_x = pn = 1000 \cdot 0{,}96 = 960;$$

$$D_x = npq = 1000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 38{,}4;$$

Пример. Найти дисперсию дискретной случайной величины Х – числа появлений события А в двух независимых испытаниях, если вероятности появления этого события в каждом испытании равны и известно, что М(Х) = 0,9.

Т.к. случайная величина Х распределена по биноминальному закону, то

$$M(X) = np = 2p = 0{,}9; \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}45;$$

$$D(X) = npq = 2p(1-p) = 2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 0{,}495.$$

Пример. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события А в каждом испытании. Найти вероятность появления события А, если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна 0,63.

По формуле дисперсии биноминального закона получаем:

$$D(X) = npq = 3p(1-p) = 0{,}63;$$

$$3p^2 - 3p + 0{,}63 = 0$$
$$p^2 - p + 0{,}21 = 0;$$
$$p_1 = 0{,}7; \quad p_2 = 0{,}3;$$

Пример. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа каждого из приборов равны соответственно $p_1=0{,}3;\ p_2=0{,}4;\ p_3=0{,}5;\ p_4=0{,}6.$ Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

Принимая за случайную величину число отказавших приборов, видим что эта случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3 или 4.

Для составления закона распределения этой случайной величины необходимо определить соответствующие вероятности. Примем $q_i = 1 - p_i$.

1) Не отказал ни один прибор.

$$p(0) = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}084.$$

2) Отказал один из приборов.

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 0{,}302.$$

3) Отказали два прибора.

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4 = 0{,}38.$$

4) Отказали три прибора.

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}198.$$

5) Отказали все приборы.

$$p(4) = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}036.$$

Получаем закон распределения:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математическое ожидание:

$$M(X) = 0{,}302 + 2\cdot 0{,}38 + 3\cdot 0{,}198 + 4\cdot 0{,}036 = 1{,}8.$$

$$M(X^2) = 0{,}302 + 4\cdot 0{,}38 + 9\cdot 0{,}198 + 16\cdot 0{,}036 = 4{,}18.$$

Дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4{,}18 - 3{,}24 = 0{,}94.$$

Функция распределения.

Во всех рассмотренных выше случаях случайная величина определялась путем задания значений самой величины и вероятностей этих значений.

Однако, такой метод применим далеко не всегда. Например, в случае непрерывной случайной величины, ее значения могут заполнять некоторый произвольный интервал. Очевидно, что в этом случае задать все значения случайной величины просто нереально.

Даже в случае, когда это сделать можно, зачастую задача решается чрезвычайно сложно. Рассмотренный только что пример даже при относительно простом условии (приборов только четыре) приводит к достаточно неудобным вычислениям, а если в задаче будет несколько сотен приборов?

Поэтому встает задача по возможности отказаться от индивидуального подхода к каждой задаче и найти по возможности наиболее общий способ задания любых типов случайных величин.

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т.е. $X < x$, обозначим через F(x).

Определение. Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения также называют **интегральной функцией**.
Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

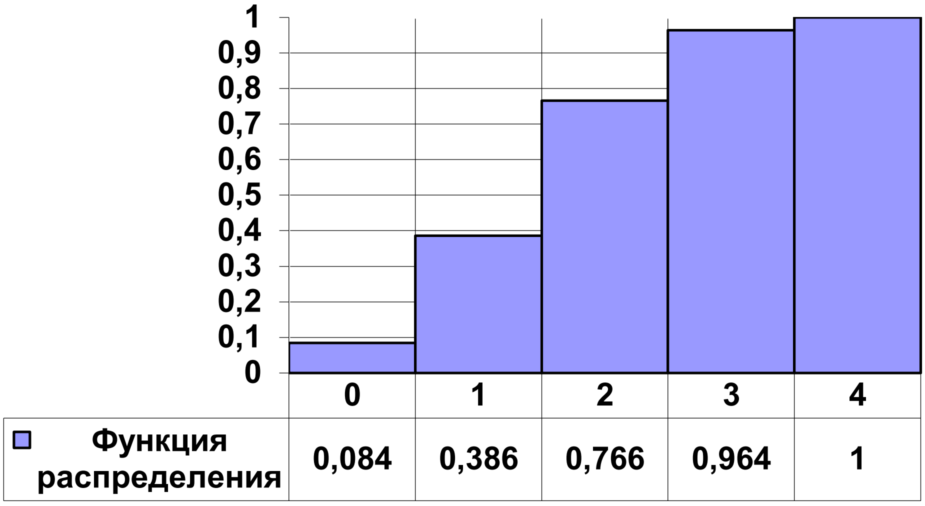
Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Так для примера, рассмотренного выше, функция распределения будет иметь вид:



Свойства функции распределения..

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].

$$0 \le F(x) \le 1$$

2) F(x) – неубывающая функция.

$$F(x_2) \ge F(x_1) \text{ при } x_2 \ge x_1$$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина Х примет одно определенное значение, равна нулю.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

Плотность распределения.

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

<u>Определение.</u> Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения F(x).

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения также называют **дифференциальной функцией**. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки *x* при повторении опытов.

После введения функций распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

<u>Определение.</u> Случайная величина X называется **непрерывной**, если ее функция распределения F(x) непрерывна на всей оси OX, а плотность распределения f(x) существует везде, за исключением(может быть, конечного числа точек.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

<u>Теорема.</u> *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.*

$$\boxed{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$

Доказательство этой теоремы основано на определении плотности распределения и третьем свойстве функции распределения, записанном выше.

Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения f(x) и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx}$$

<u>Свойства плотности распределения.</u>

1) Плотность распределения – неотрицательная функция.

$$f(x) \ge 0$$

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от - ∞ до ∞ равен единице.

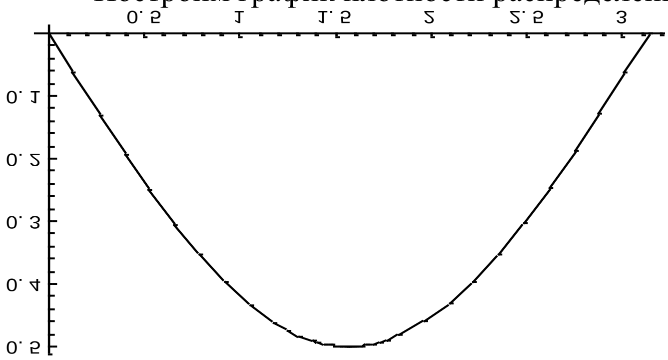
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Пример. Случайная величина подчинена закону распределения с плотностью:

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x, & \textit{при} \quad 0 \le x \le \pi \\ 0, & \textit{при} \quad x < 0 \quad \textit{или} \quad x > \pi \end{cases}$$

Требуется найти коэффициент *a*, построить график функции плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина попадет в интервал от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Построим график плотности распределения:



Для нахождения коэффициента *a* воспользуемся свойством $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} a\sin xdx + \int_{\pi}^{\infty} 0dx = a\int_{0}^{\pi} \sin xdx = -a\cos x\Big|_{0}^{\pi} = 2a = 1;$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

Находим вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.

Пример. Задана непрерывная случайная величина *x* своей функцией распределения *f(x)*.

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 2x, & \textit{при} \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & \textit{при} \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Требуется определить коэффициент А, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина *x* попадет в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

Найдем коэффициент А.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \frac{A\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Найдем функцию распределения:

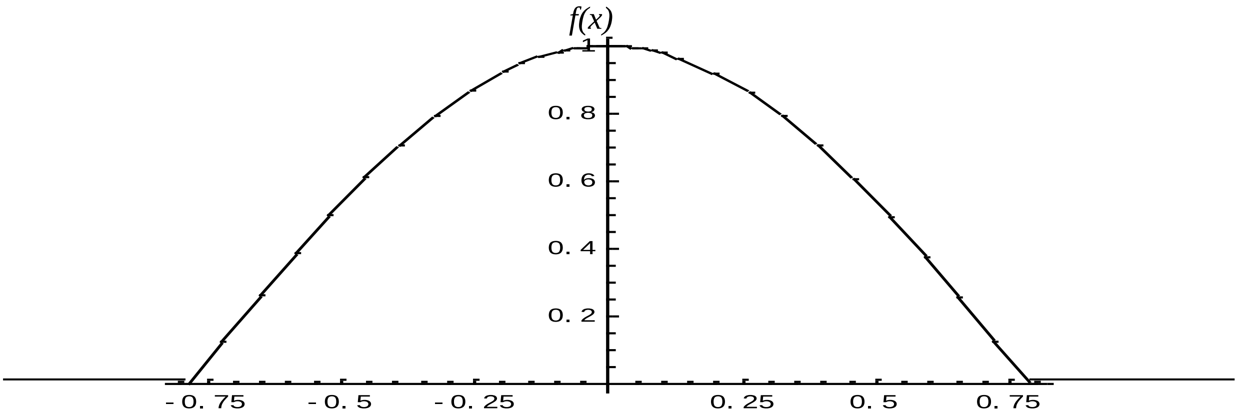
1) На участке $x < -\frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

2) На участке $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2xdx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}.$

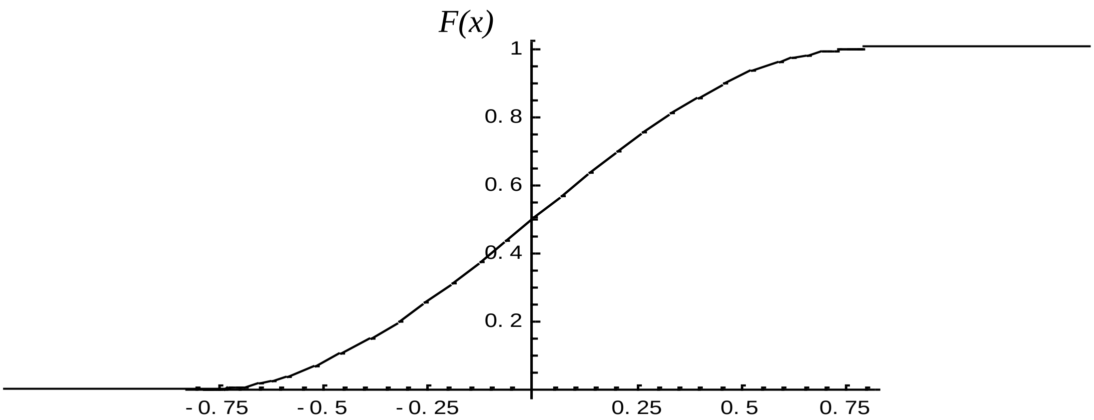
3) На участке $x > \frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{x} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$

Итого: $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & при \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$; $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin 2x + 1}{2}, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}; \\ 1, & при \quad x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Построим график плотности распределения:



Построим график функции распределения:



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{2} 0 dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067;$$

Ту же самую вероятность можно искать и другим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3)+1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения *f(x)*. Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [*a*,*b*].

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл

$$\boxed{M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx}$$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то математическое ожидание находится по формуле:

$$\boxed{M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}$$

При этом, конечно, предполагается, что несобственный интеграл сходится.

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

$$\boxed{D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx}$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:

$$\boxed{D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2}$$

<u>Определение.</u> Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии.

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}$$

<u>Определение.</u> Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины мода – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум.

$$f(M_0) = \max .$$

Если многоугольник распределения для дискретной случайной величины или кривая распределения для непрерывной случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется **двухмодальным** или **многомодальным**.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется **антимодальным**.

<u>Определение.</u> Медианой M_D случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины.

$$P(X < M_D) = P(X > M_D)$$

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения делится пополам.

Отметим, что если распределение одномодальное, то мода и медиана совпадают с математическим ожиданием.

<u>Определение.</u> Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k.

$$\boxed{\alpha_k = M[X^k].}$$

Для дискретной случайной величины: $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины: $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$.

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.

<u>Определение.</u> Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - m_x)^k$.

$$\boxed{\mu_k = M[(X - m_x)^k]}$$

Для дискретной случайной величины: $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины: $\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^k f(x)dx$.

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии. Центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения.

Определение. Отношение центрального момента третьего порядка к среднему квадратическому отклонению в третьей степени называется **коэффициентом асимметрии**.

$$\boxed{a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}}$$

Определение. Для характеристики островершинности и плосковершинности распределения используется величина, называемая **эксцессом**.

$$\boxed{C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3}$$

Кроме рассмотренных величин используются также так называемые абсолютные моменты:

Абсолютный начальный момент: $\beta_k = M[|X|^k]$.

Абсолютный центральный момент: $\nu_k = M[|X-m_x|^k]$.

Абсолютный центральный момент первого порядка называется **средним арифметическим отклонением**.

Пример. Для рассмотренного выше примера определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2xdx + \int\limits_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2xdx = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos 2xdx; \\ du = dx; & v = \dfrac{\sin 2x}{2}; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{x\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{2}dx = \frac{\cos 2x}{4}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0.$$

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\cos 2xdx + \int\limits_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\cos 2xdx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \cos 2xdx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{\sin 2x}{2}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} x\sin 2xdx = \left\{\begin{matrix} u = x; & \sin 2xdx = dv; \\ du = dx; & v = -\dfrac{\cos 2x}{2}; \end{matrix}\right\} = \frac{\pi^2}{16} +$$

$$+ \frac{x\cos 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\sin 2x}{4}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = 0{,}1163.$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0{,}1163 - 0 = 0{,}1163.$$

Пример. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают обратно и шары перемешивают. Приняв за случайную величину X число извлеченных белых шаров, составить закон распределения этой величины, определить ее математическое ожидание и дисперсию.

Т.к. шары в каждом опыте возвращаются обратно и перемешиваются, то испытания можно считать независимыми (результат предыдущего опыта не влияет на вероятность появления или непоявления события в другом опыте).

Таким образом, вероятность появления белого шара в каждом опыте постоянна и равна $P_Б = \frac{6}{10} = 0{,}6.$

Таким образом, в результате пяти последовательных испытаний белый шар может не появиться вовсе, появиться один раз, два, три, четыре или пять раз.

Для составления закона распределения надо найти вероятности каждого из этих событий.

1) Белый шар не появился вовсе: $P_Б(0) = (1 - P_Б)^5 = 0{,}0102.$

2) Белый шар появился один раз: $P_Б(1) = C_5^1 P_Б^1 (1 - P_Б)^4 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} 0{,}6 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}0768$

3) Белый шар появиться два раза: $P_Б(2) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}2304.$

4) Белый шар появиться три раза: $P_Б(3) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456.$

5) Белый шар появиться четыре раза: $P_Б(4) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^1 = 0{,}2592.$

6) Белый шар появился пять раз: $P_Б(5) = 0{,}6^5 = 0{,}0778.$

Получаем следующий закон распределения случайной величины X.

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
p(x)	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0778

$$M(X) = 0{,}0768 + 2 \cdot 0{,}2304 + 3 \cdot 0{,}3456 + 4 \cdot 0{,}2592 + 5 \cdot 0{,}0778 = 3{,}0002.$$

$$M(X^2) = 0{,}0768 + 4 \cdot 0{,}2304 + 9 \cdot 0{,}3456 + 16 \cdot 0{,}2592 + 25 \cdot 0{,}0778 = 10{,}201.$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 10{,}201 - 9{,}0012 = 1{,}1998.$$

При решении практических задач зачастую точно найти закон распределения случайной величины довольно сложно. Однако, все происходящие процессы, связанные со случайными величинами, можно разделить на несколько типов, каждому из которых можно поставить в соответствие какой – либо закон распределения.

Выше были рассмотрены некоторые типы распределений дискретной случайной величины такие как биноминальное распределение и распределение Пуассона.

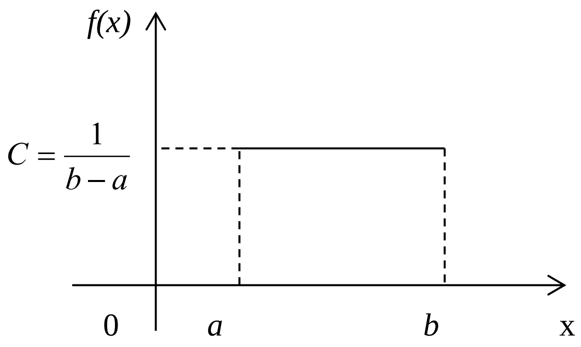
Рассмотрим теперь некоторые типы законов распределения для непрерывной случайной величины.

Равномерное распределение.

Определение. Непрерывная случайная величина имеет **равномерное** распределение на отрезке [*a*, *b*], если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Постоянная величина С может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения.

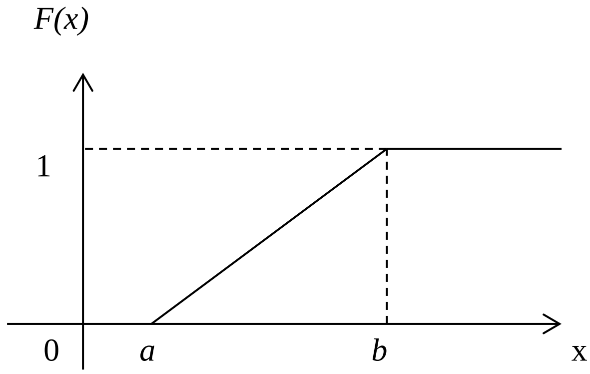


Получаем $C = \dfrac{1}{b-a}$.

Найдем функцию распределения *F(x)* на отрезке [*a*,*b*].

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a \le x \le b \\ 1, & при \quad x > b \end{cases}$$



Для того, чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны.

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, подчиненной равномерному закону распределения.

$$m_x = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$m_{x^2} = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Показательное распределение.

Определение. **Показательным (экспоненциальным)** называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины Х, которое описывается плотностью

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x \ge 0 \end{cases}}$$

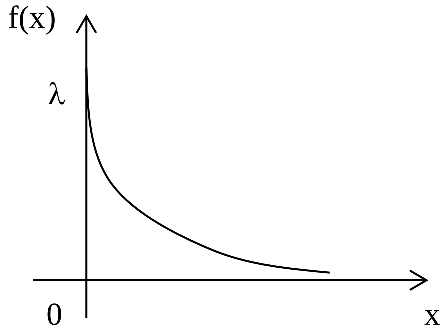
где λ - положительное число.

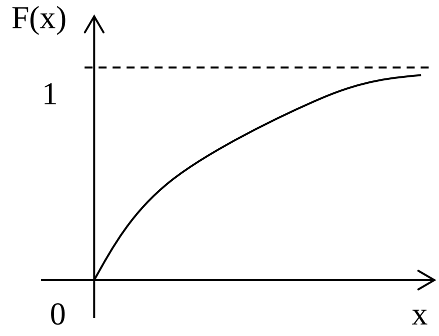
Найдем закон распределения.

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\lambda\int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}.$$

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & при \quad x\ge 0\end{cases}}$$

Графики функции распределения и плотности распределения:





Найдем математическое ожидание случайной величины, подчиненной показательному распределению.

$$m_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left\{\begin{matrix}u=x; & e^{-\lambda x}dx=dv;\\ du=dx; & -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}=v;\end{matrix}\right\}=\lambda\left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right)=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx=-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

Результат получен с использованием того факта, что

$$xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}-0=\left\{\begin{matrix}По \quad правилу\\ Лопиталя\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\lambda e^{\lambda x}}=0.$$

Для нахождения дисперсии найдем величину $M(X^2)$.

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int\limits_{0}^{\infty}\lambda x^2 e^{-\lambda x}dx$$

Дважды интегрируя по частям, аналогично рассмотренному случаю, получим:

$$M(X^2)=\frac{2}{\lambda^2};$$

Тогда $D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=\dfrac{1}{\lambda^2}.$

Итого: $\boxed{M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.}$

Видно, что в случае показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны.

Также легко определить и вероятность попадания случайной величины, подчиненной показательному закону распределения, в заданный интервал.

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Показательное распределение широко используется в теории надежности.

Допустим, некоторое устройство начинает работать в момент времени $t_0=0$, а через какое– то время t происходит отказ устройства.
Обозначим T непрерывную случайную величину – длительность безотказной работы устройства.
Таким образом, функция распределения $F(t) = P(T<t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t.
Вероятность противоположного события (безотказная работа в течение времени t) равна $R(t) = P(T>t) = 1 - F(t)$.

Определение. **Функцией надежности** $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы устройства в течение времени t.

Часто на практике длительность безотказной работы подчиняется показательному закону распределению.

Вообще говоря, если рассматривать новое устройство, то вероятность отказа в начале его функционирования будет больше, затем количество отказов снизится и будет некоторое время иметь практически одно и то же значение. Затем (когда устройство выработает свой ресурс) количество отказов будет возрастать.

Другими словами, можно сказать, что функционирование устройства на протяжении всего существования (в смысле количества отказов) можно описать комбинацией двух показательных законов (в начале и конце функционирования) и равномерного закона распределения.

Функция надежности для какого- либо устройства при показательном законе распределения равна:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Данное соотношение называют **показательным законом надежности**.

Важным свойством, позволяющим значительно упростить решение задач теории надежности, является то, что вероятность безотказной работы устройства на интервале времени t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t.

Таким образом, безотказная работа устройства зависит только от интенсивности отказов λ и не зависит от безотказной работы устройства в прошлом.

Так как подобным свойством обладает только показательный закон распределения, то этот факт позволяет определить, является ли закон распределения случайной величины показательным или нет.

Нормальный закон распределения.

Определение. **Нормальным** называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};}$$

Нормальный закон распределения также называется **законом Гаусса**.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Можно легко показать, что параметры m_x и σ_x, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины X.

Найдем функцию распределения *F(x)*.

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx}$$

График плотности нормального распределения называется **нормальной кривой** или **кривой Гаусса**.

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

1) Функция определена на всей числовой оси.

2) При всех x функция распределения принимает только положительные значения.

3) Ось ОХ является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента x, значение функции стремится к нулю.

4) Найдем экстремум функции.

$$y'=-\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=0; \qquad x=m;$$

Т.к. при $y'>0$ при $x<m$ и $y'<0$ при $x>m$, то в точке $x=m$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5) Функция является симметричной относительно прямой $x=a$, т.к. разность $(x-a)$ входит в функцию плотности распределения в квадрате.

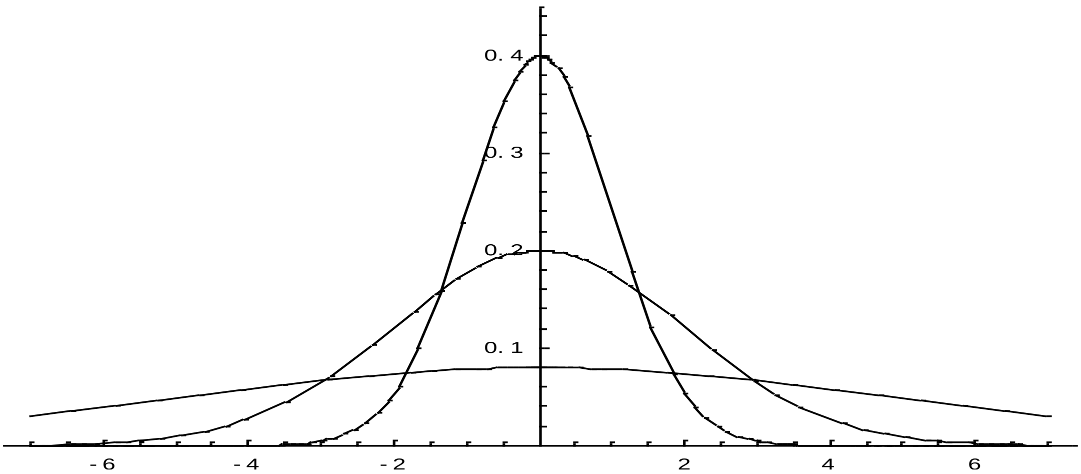
6) Для нахождения точек перегиба графика найдем вторую производную функции плотности.

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\left[1-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right]$$

При $x = m + \sigma$ и $x = m - \sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, т.е. в этих точках функция имеет перегиб.

В этих точках значение функции равно $\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}$.

Построим график функции плотности распределения.



Построены графики при m =0 и трех возможных значениях среднего квадратичного отклонения $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ и $\sigma = 7$. Как видно, при увеличении значения среднего квадратичного отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается..

Если $a > 0$, то график сместится в положительном направлении, если $a < 0$ – в отрицательном.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ кривая называется **нормированной**. Уравнение нормированной кривой:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.}$$

Функция Лапласа.

Найдем вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Обозначим $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t$; $\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha$; $\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta$;

Тогда $P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\left[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\right]$

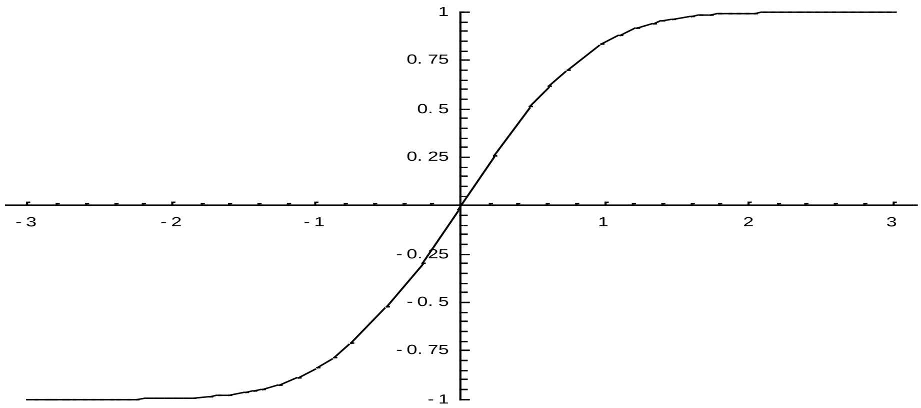
Т.к. интеграл $\int e^{-t^2}dt$ не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение функция

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt\,,}$$

которая называется **функцией Лапласа** или **интегралом вероятностей**.

Значения этой функции при различных значениях x посчитаны и приводятся в специальных таблицах.

Ниже показан график функции Лапласа.



Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1) Ф(0) = 0;

2) Ф(-x) = - Ф(x);

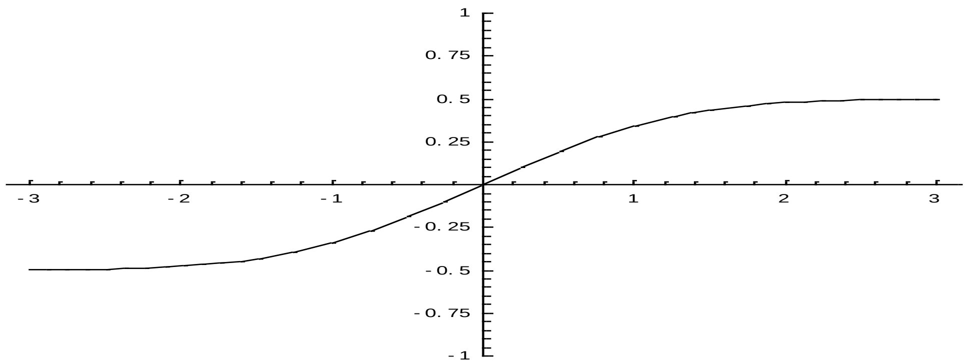
3) Ф(∞) = 1.

Функцию Лапласа также называют **функцией ошибок** и обозначают erf x.

Еще используется **нормированная** функция Лапласа, которая связана с функцией Лапласа соотношением:

$$\boxed{\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt;}$$

Ниже показан график нормированной функции Лапласа.



При рассмотрении нормального закона распределения выделяется важный частный случай, известный как **правило трех сигм**.

Запишем вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше заданной величины Δ:

$$P(|X-m|<\Delta)=\overline{\Phi}\left[\frac{m+\Delta-m}{\sigma}\right]-\overline{\Phi}\left[\frac{m-\Delta-m}{\sigma}\right]=\overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]-\overline{\Phi}\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right]=2\overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]$$

Если принять Δ = 3σ, то получаем с использованием таблиц значений функции Лапласа:

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\overline{\Phi}(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидание на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.

Это правило называется **правилом трех сигм**.

Не практике считается, что если для какой – либо случайной величины выполняется правило трех сигм, то эта случайная величина имеет нормальное распределение.

Пример. Поезд состоит из 100 вагонов. Масса каждого вагона – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожидание a = 65 т и средним квадратичным отклонением σ = 0,9 т. Локомотив может везти состав массой не более 6600 т, в противном случае необходимо прицеплять второй локомотив. Найти вероятность того, что второй локомотив не потребуется.

Второй локомотив не потребуется, если отклонение массы состава от ожидаемого (100·65 = 6500) не превосходит 6600 – 6500 = 100 т.

Т.к. масса каждого вагона имеет нормальное распределение, то и масса всего состава тоже будет распределена нормально.

Получаем:

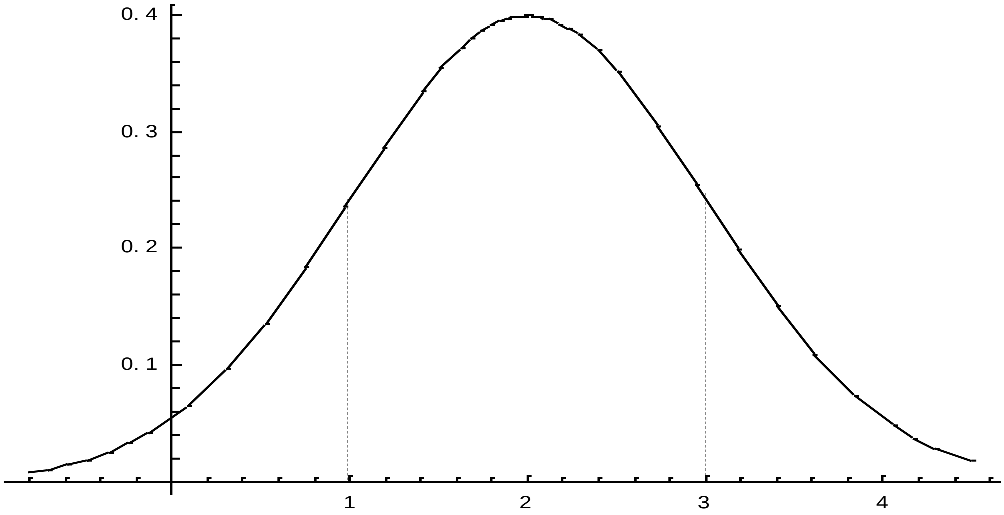
$$P(|X-M(X)|<100=2\overline{\Phi}\left[\frac{100}{100\sigma}\right]=2\overline{\Phi}[1{,}111]=2\cdot 0{,}3665=0{,}733$$

Пример. Нормально распределенная случайная величина Х задана своими параметрами – a *=2* – математическое ожидание и σ = 1 – среднее квадратическое отклонение. Требуется написать плотность вероятности и построить ее график, найти вероятность того, Х примет значение из интервала (1; 3), найти вероятность того, что Х отклонится (по модулю) от математического ожидания не более чем на 2.

Плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}};$$

Построим график:



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 3).

$$P(1<X<3)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi(0{,}7071)+\Phi(0{,}7071)\right]=0{,}6778.$$

Найдем вероятность отклонение случайной величины от математического ожидания на величину, не большую чем 2.

$$P(|X-2|<2)=\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\Phi(\sqrt{2})\approx 0{,}95.$$

Тот же результат может быть получен с использованием нормированной функции Лапласа.

$$P(|X-2|<2)=2\overline{\Phi}\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)=2\overline{\Phi}(2)=2\cdot 0{,}4772\approx 0{,}95.$$

Центральная предельная теорема Ляпунова.

Теорема. *Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

На практике для большинства случайных величин выполняются условия теоремы Ляпунова.

Закон больших чисел.

Неравенство Чебышева.

На практике сложно сказать какое конкретное значение примет случайная величина, однако, при воздействии большого числа различных факторов поведение большого числа случайных величин практически утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Этот факт очень важен на практике, т.к. позволяет предвидеть результат опыта при воздействии большого числа случайных факторов.

Однако, это возможно только при выполнении некоторых условий, которые определяются законом больших чисел. К законам больших чисел относятся теоремы Чебышева (наиболее общий случай) и теорема Бернулли (простейший случай), которые будут рассмотрены далее.

Рассмотрим дискретную случайную величину *X* (хотя все сказанное ниже будет справедливо и для непрерывных случайных величин), заданную таблицей распределения:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Требуется определить вероятность того, что отклонение значения случайной величины от ее математического ожидания будет не больше, чем заданное число ε.

Теорема. (Неравенство Чебышева) *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем* $1 - D(X)/\varepsilon^2$.

$$\boxed{P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2}$$

Доказательство этой теоремы приводить не будем, оно имеется в литературе.

Теорема Чебышева.

Теорема. *Если X_1, X_2, …, X_n- попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышаю постоянного числа C), то, как бы мало не было положительное число ε, вероятность неравенства*

$$\boxed{\left[\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right] < \varepsilon}$$

будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Т.е. можно записать:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1}$$

Часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. В этом случае теорема Чебышева несколько упрощается:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) = 1}$$

Дробь, входящая в записанное выше выражение есть не что иное как среднее арифметическое возможных значений случайной величины.

Теорема утверждает, что хотя каждое отдельное значение случайной величины может достаточно сильно отличаться от своего математического ожидания, но среднее арифметическое этих значений будет неограниченно приближаться к среднему арифметическому математических ожиданий.

Отклоняясь от математического ожидания как в положительную так и в отрицательную сторону, от своего математического ожидания, в среднем арифметическом отклонения взаимно сокращаются.

Таким образом, величина среднего арифметического значений случайной величины уже теряет характер случайности.

Теорема Бернулли.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равно p.

Возможно определить примерно относительную частоту появления события А.

Теорема. *Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события А постоянно, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний p достаточно велико.*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1}$$

Здесь m – число появлений события А. Из всего сказанного выше не следует, что с увеличением число испытаний относительная частота неуклонно стремится к вероятности p, т.е. $\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} = p$. В теореме имеется в виду только вероятность приближения относительной частоты к вероятности появления события А в каждом испытании.

В случае, если вероятности появления события А в каждом опыте различны, то справедлива следующая теорема, известная как **теорема Пуассона.**

Теорема. *Если производится n независимых опытов и вероятность появления события А в каждом опыте равна p_i, то при увеличении n частота события А сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_i.*

Теорема. (Теорема Муавра – Лапласа) *Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью p, то для любого интервала (α, β) справедливо соотношение:*

$$P\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right] = \overline{\Phi}(\beta) - \overline{\Phi}(\alpha)$$

где Y – число появлений события A в n опытах, q = 1 – p, Φ(x) – функция Лапласа, $\overline{\Phi}(x)$ - *нормированная функция Лапласа* .

Теорема Муавра – Лапласа описывает поведение биноминального распределения при больших значениях *n*.

Данная теорема позволяет существенно упростить вычисление по формуле биноминального распределения.

Расчет вероятности попадания значения случайной величины в заданный интервал $P(\alpha < Y < \beta) = \sum\limits_{\alpha < k < \beta} C_n^k p^k q^{n-k}$ при больших значениях *n* крайне затруднителен. Гораздо проще воспользоваться формулой:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}}\right)\right]$$

Теорема Муавра – Лапласа очень широко применяется при решении практических задач.

Пример. Вероятность наступления события А в каждом испытании равна 0,3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что в 10000 испытаниях отклонение относительной частоты появления события А от его вероятности не превзойдет по абсолютной величине 0,01.

В соответствии с неравенством Чебышева вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания будет меньше некоторого числа ε, ограничена в соответствии с неравенством $\boxed{P(|X - m_x| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}.}$

Надо определить математическое ожидание и дисперсию числа появления события А при одном опыте. Для события А случайная величина может принимать одно из двух значений: 1- событие появилось, 0- событие не появилось. При этом вероятность значения 1 равна вероятности *p*=0,3, а вероятность значения 0- равна вероятности ненаступления события А

$$q = 1 - p = 0{,}7.$$

По определению математического ожидания имеем:

$$m_x = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p = 0{,}3$$

Дисперсия: $D_x = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = pq = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$

В случае *n* независимых испытаний получаем $m_x = np$; $D_x = npq$; Эти формулы уже упоминались выше.

В нашем случае получаем: $m_x = 3000$; $D_x = 2100$;

Вероятность отклонения относительной частоты появления события А в *n* испытаниях от вероятности на величину, не превышающую ε=0,01 равна:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=P(|m-np|<n\varepsilon)=P(|m-m_x|<n\varepsilon)=P(|m-3000|<100)$$

Выражение полученное в результате этих простых преобразований представляет собой не что иное, как вероятность отклонения числа *m* появления события А от математического ожидания на величину не большую, чем δ=100.

В соответствии с неравенством Чебышева эта вероятность будет не меньше, чем величина $1-\frac{D_x}{\delta^2}=1-\frac{2100}{10000}=1-0{,}21=0{,}79.$

Пример. Сколько следует проверить деталей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,96, можно было ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты годных деталей от вероятности детали быть годной, равной 0,98, не превысит 0,02.

Условие задачи фактически означает, что выполняется неравенство:

$$P\left(\left|\frac{n}{m}-0{,}98\right|\le 0{,}02\right)\ge 0{,}96$$

Здесь *n*- число годных деталей, *m*- число проверенных деталей. Для применения неравенства Чебышева преобразуем полученное выражение:

$$P(|n-0{,}98m|\le 0{,}02m)\ge 1-\frac{D_x}{(0{,}02m)^2}\ge 0{,}96$$

После домножения выражения, стоящего в скобках, на *m* получаем вероятность отклонения по модулю количества годных деталей от своего математического ожидания, следовательно, можно применить неравенство Чебышева, т.е. эта вероятность должна быть не меньше, чем величина $1-\frac{D_x}{(0{,}02m)^2}$, а по условию задачи еще и не меньше, чем 0,96.

Таким образом, получаем неравенство $0{,}96\le 1-\frac{D_x}{(0{,}02m)^2}$. Как уже говорилось в предыдущей задаче, дисперсия может быть найдена по формуле $D_x=mpq$.

Итого, получаем: $D_x\le (0{,}02m)^2-0{,}96\cdot(0{,}02m)^2$; $m\cdot 0{,}98\cdot 0{,}02\le 0{,}04\cdot(0{,}02m)^2$;

$$m\ge\frac{0{,}98\cdot 0{,}02}{0{,}04\cdot 0{,}0004};\qquad m\ge 1225$$

Т.е. для выполнения требуемых условий необходимо не менее 1225 деталей.

Пример. Суточная потребность электроэнергии в населенном пункте является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 3000 кВт/час, а дисперсия составляет 2500. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход электроэнергии в этом населенном пункте будет от 2500 до 3500 кВт/час.

Требуется найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(2500\le X\le 3500)=?$$

Крайние значения интервала отклоняются от математического ожидания на одну и ту же величину, а именно – на 500. Тогда можно записать с учетом неравенства Чебышева:

$$P(2500 \le X \le 3500) = P(|X - m_x| \le 500) \ge 1 - \frac{D_x}{500^2}$$

Отсюда получаем:

$$P \ge 1 - \frac{2500}{250000} = 0{,}99$$

Т.е. искомая вероятность будет не меньше, чем 0,99.

Пример. Среднее квадратическое отклонение каждой из 2500 независимых случайных величин не превосходит 3. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий не превосходит 0,3.

Требуется найти вероятность

$$p = P\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{xi}}{n} \right| \le 0{,}3 \right)$$

Неравенство Чебышева в случае суммы случайных величин имеет вид:

$$\boxed{P\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{xi}}{n} \right| \le \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2 \varepsilon^2}}$$

Если среднее квадратическое отклонение не превосходит 3, то, очевидно, дисперсия не превосходит 9. Величина ε по условию задачи равна 0,3.

Тогда $p \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2 \varepsilon^2} = 1 - \frac{9n}{n^2 \cdot 0{,}09}$. Отсюда получаем при n=2500:

$$p \ge 1 - 0{,}04 = 0{,}96$$

Пример. Выборочным путем требуется определить среднюю длину изготавливаемых деталей. Сколько нужно исследовать деталей, чтобы с вероятностью, большей чем 0,9, можно было утверждать, что средняя длина отобранных изделий будет отличаться от математического ожидания этого среднего (средняя длина деталей всей партии) не более, чем на 0,001 см.? Установлено, что среднее квадратическое отклонение длины детали не превышает 0,04 см.

По условию если среднее квадратическое отклонение не превышает 0,04, то дисперсия, очевидно, не превышает $(0{,}04)^2$. Также по условию задано, что

$$p = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| \le 0{,}001\right) > 0{,}9$$

Если преобразовать соотношение, стоящее в скобках и после этого применить неравенство Чебышева, получаем:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - nm_x\right| \le 0{,}001n\right) \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2 \cdot 0{,}001^2} > 0{,}9$$

$$1 - \frac{n \cdot 0{,}04^2}{n^2 \cdot 0{,}001^2} > 0{,}9$$

$$0{,}1 \cdot 0{,}001^2 n > 0{,}04^2$$

$$n > \frac{0{,}04^2}{0{,}1 \cdot 0{,}001^2}$$

$$n > 16000$$

Т.е. для достижения требуемой вероятности необходимо отобрать более 16000 деталей.

Описанный подход, как видно, позволяет решить множество чисто практических задач.

Пример. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,2. Определить вероятность того, что среди 50 наугад выбранных деталей бракованных окажется не менее 6.

Для того, чтобы воспользоваться теоремой Муавра - Лапласа найдем математическое ожидание и дисперсию количества бракованных деталей в 50 – ти отобранных:

$$m_x = np = 50 \cdot 0{,}2 = 10$$
$$D_x = npq = 50 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 8$$

Фактически в задаче требуется определить вероятность того, что бракованных деталей будет не менее шести, но и, очевидно, не более 50- ти.

$$P(6 \le X \le 50) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{50-10}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{6-10}{\sqrt{16}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(10) + \Phi(1)\right) = 0{,}5 \cdot (1 + 0{,}8427) = 0{,}92135$$

Значения функции Лапласа находятся по таблице. Конечно, значения функции Лапласа Ф(10) в таблице нет, но т.к. в таблицах указано, что Ф(3)=1,0000, то все значения от величин, превышающих 3 также равны 1. Дополнительно см. Функция Лапласа.

Пример. Известно, что 60% всего числа изготавливаемых заводом изделий являются изделиями первого сорта. Приемщик берет первые попавшиеся 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них окажется из от 120 до 150 изделий первого сорта?

Вероятность того, что деталь окажется первого сорта, равна, очевидно, 0,6. Математическое ожидание числа изделий первого сорта равно:

$$m_x = np = 200 \cdot 0{,}6 = 120$$

По теореме Муавра - Лапласа получаем:

$$P(120 \le X \le 150) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{150-120}{\sqrt{96}}\right) - \Phi\left(\frac{120-120}{\sqrt{96}}\right)\right) = \frac{1}{2}\big(\Phi(3{,}0619) + \Phi(0)\big) = 0{,}5 \cdot (1+0) = 0{,}5$$

Пример. Проверкой установлено, что 96% изделий служат не меньше гарантируемого срока. Наугад выбирают 15000 изделий. Найти вероятность того, что со сроком службы менее гарантируемого будет от 570 до 630 изделий.

Вероятность того, что срок службы изделия будет менее гарантированного равна:

$$1 – 0{,}96 = 0{,}04$$

Математическое ожидание числа таких изделий равно $m_x = np = 15000 \cdot 0{,}04 = 600$

По теореме Муавра - Лапласа получаем:

$$P(570 \le X \le 630) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{630-600}{\sqrt{1152}}\right) - \Phi\left(\frac{570-600}{\sqrt{1152}}\right)\right) = \frac{1}{2}\big(\Phi(0{,}88) - \Phi(-0{,}88)\big) =$$

$$= \Phi(0{,}88) = 2\overline{\Phi}(1{,}25) = 2 \cdot 0{,}3944 = 0{,}7888$$

<u>Система случайных величин.</u>

Рассмотренные выше случайные величины были одномерными, т.е. определялись одним числом, однако, существуют также случайные величины, которые определяются двумя, тремя и т.д. числами. Такие случайные величины называются двумерными, трехмерными и т.д.

В зависимости от типа, входящих в систему случайных величин, системы могут быть дискретными, непрерывными или смешанными, если в систему входят различные типы случайных величин.

Более подробно рассмотрим системы двух случайных величин.

<u>Определение.</u> Законом распределения системы случайных величин называется соотношение, устанавливающее связь между областями возможных значений системы случайных величин и вероятностями появления системы в этих областях.

<u>Определение.</u> Функцией распределения системы двух случайных величин называется функция двух аргументов *F(x, y)*, равная вероятности совместного выполнения двух неравенств *X<x, Y<y*.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Отметим следующие свойства функции распределения системы двух случайных величин:

1) Если один из аргументов стремится к плюс бесконечности, то функция распределения системы стремится к функции распределения одной случайной величины, соответствующей другому аргументу.

$$\lim_{y\to\infty} F(x,y) = F_1(x);$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x,y) = F_2(y);$$

2) Если оба аргумента стремятся к бесконечности, то функция распределения системы стремится к единице.

$$F(\infty,\infty) = 1;$$

3) При стремлении одного или обоих аргументов к минус бесконечности функция распределения стремится к нулю.

$$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0;$$

4) Функция распределения является неубывающей функцией по каждому аргументу.

5) Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, вычисляется по формуле:

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$

Плотность распределения системы двух случайных величин.

Определение. **Плотностью совместного распределения** вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная частная производная от функции распределения.

$$\boxed{f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}}$$

Если известна плотность распределения, то функция распределения может быть легко найдена по формуле:

$$\boxed{F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy}$$

Двумерная плотность распределения неотрицательна и двойной интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

По известной плотности совместного распределения можно найти плотности распределения каждой из составляющих двумерной случайной величины.

$$\boxed{f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}$$

$$F_1(x) = F(x,\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy; \quad F_2(y) = F(\infty,y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy;$$

Условные законы распределения.

Как было показано выше, зная совместный закон распределения можно легко найти законы распределения каждой случайной величины, входящей в систему.

Однако, на практике чаще стоит обратная задача – по известным законам распределения случайных величин найти их совместный закон распределения.

В общем случае эта задача является неразрешимой, т.к. закон распределения случайной величины ничего не говорит о связи этой величины с другими случайными величинами.

Кроме того, если случайные величины зависимы между собой, то закон распределения не может быть выражен через законы распределения составляющих, т.к. должен устанавливать связь между составляющими.

Все это приводит к необходимости рассмотрения условных законов распределения.

Определение. Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, называется **условным законом распределения**.

Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения так и плотностью распределения.

Условная плотность распределения вычисляется по формулам:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}$$

Условная плотность распределения обладает всеми свойствами плотности распределения одной случайной величины.

Условное математическое ожидание.

Определение. **Условным математическим ожиданием** дискретной случайной величины Y при X = x (x – определенное возможное значение X) называется произведение всех возможных значений Y на их условные вероятности.

$$M(Y/X = x) = \sum_{i=1}^{m} y_i p(y_i / x)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M(Y/X = x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy,$$

где *f(y/x)* – условная плотность случайной величины Y при X=x.

Условное математическое ожидание *M(Y/x)=f(x)* является функцией от *x* и называется **функцией регрессии X на Y.**

Пример. Найти условное математическое ожидание составляющей Y при X= x_1=1 для дискретной двумерной случайной величины, заданной таблицей:

Y	X			
	x_1=1	x_2=3	x_3=4	x_4=8
y_1=3	0,15	0,06	0,25	0,04
y_2=6	0,30	0,10	0,03	0,07

$$p(x_1) = 0{,}15 + 0{,}30 = 0{,}45$$
$$p(y_1 / x_1) = p(x_1, y_1) / p(x_1) = 0{,}15 / 0{,}45 = 1/3;$$
$$p(y_2 / x_1) = p(x_1, y_2) / p(x_1) = 0{,}30 / 0{,}45 = 2/3;$$

$$M(Y / X = x_1) = \sum_{j=1}^{2} y_j\, p(y_j / x_1) = y_1 p(y_1 / x_1) + y_2 p(y_2 / x_1) = 3/3 + 12/3 = 5.$$

Аналогично определяются условная дисперсия и условные моменты системы случайных величин.

<u>Зависимые и независимые случайные величины.</u>

Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того какое значение принимает другая случайная величина.
Понятие зависимости случайных величин является очень важным в теории вероятностей.
Условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям.
Определим необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих.*

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$$

Аналогичную теорему можно сформулировать и для плотности распределения:

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих.*

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

<u>Определение.</u> **Корреляционным моментом** μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин.

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Практически используются формулы:

Для дискретных случайных величин: $\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j)$

Для непрерывных случайных величин: $\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y)dxdy$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю.
Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X и Y. Этот факт является недостатком этой числовой характеристики, т.к. при различных единицах измерения получаются различные корреляционные моменты, что затрудняет сравнение корреляционных моментов различных случайных величин.
Для того, чтобы устранить этот недостаток применятся другая характеристика – коэффициент корреляции.

<u>Определение.</u> Коэффициентом корреляции *r_{xy}* случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин.

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю.

<u>Свойство:</u> Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий.

$$|\mu_{xy}| \le \sqrt{D_x D_y}$$

<u>Свойство:</u> Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы.

$$|r_{xy}| \le 1$$

Случайные величины называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля, и **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод о их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Часто по заданной плотности распределения системы случайных величин можно определить зависимость или независимость этих величин.

Наряду с коэффициентом корреляции степень зависимости случайных величин можно охарактеризовать и другой величиной, которая называется **коэффициентом ковариации**. Коэффициент ковариации определяется формулой:

$$k(X,Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$$

Пример. Задана плотность распределения системы случайных величин X и Y.

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(x^2+y^2+x^2y^2+1)}$$

Выяснить являются ли независимыми случайные величины X и Y.

Для решения этой задачи преобразуем плотность распределения:

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2(1+x^2))}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

Таким образом, плотность распределения удалось представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от *x*, а другая – только от *y*. Т.е. случайные величины X и Y независимы. Разумеется, они также будут и некоррелированы.

Линейная регрессия.

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y), где X и Y – зависимые случайные величины.

Представим приближенно одну случайную величину как функцию другой. Точное соответствие невозможно. Будем считать, что эта функция линейная.

$$Y\cong g(X)=\alpha X+\beta$$

Для определения этой функции остается только найти постоянные величины α и β.

Определение. Функция *g(X)* называется **наилучшим приближением** случайной величины Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y-g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение. Также функция *g(x)* называется **среднеквадратической регрессией** Y на X.

Теорема. *Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X вычисляется по формуле:*

$$\boxed{g(X)=m_y+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-m_x)}$$

в этой формуле $m_x=M(X)$, $m_y=M(Y)$, $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$, $\sigma_y=\sqrt{D(Y)}$, $r=\mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$ – коэффициент корреляции величин *X* и *Y*.

Величина $\boxed{\beta=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}$ называется **коэффициентом регрессии** *Y* на *X*.

Прямая, уравнение которой

$$\boxed{y-m_y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x),}$$

называется **прямой сренеквадратической регрессии** *Y* на *X*.

Величина $\sigma_y^2(1-r^2)$ называется **остаточной дисперсией** случайной величины *Y* относительно случайной величины *X*. Эта величина характеризует величину ошибки, образующейся при замене случайной величины *Y* линейной функцией *g(X)*=$\alpha X+\beta$.

Видно, что если $r=\pm 1$, то остаточная дисперсия равна нулю, и, следовательно, ошибка равна нулю и случайная величина *Y* точно представляется линейной функцией от случайной величины *X*.

Прямая среднеквадратичной регрессии *X* на *Y* определяется аналогично по формуле:

$$\boxed{x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y)}$$

Прямые среднеквадратичной регрессии пересекаются в точке (m_x, m_y), которую называют **центром совместного распределения** случайных величин *X* и *Y*.

Линейная корреляция.

Если две случайные величины *X* и *Y* имеют в отношении друг друга линейные функции регрессии, то говорят, что величины *X* и *Y* связаны **линейной корреляционной зависимостью**.

Теорема. *Если двумерная случайная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.*