Раздел 1 Элементы теории множеств

Сайт:	Электронное обучение ИРНИТУ	Напечатано::	Арбакова Анастасия Вячеславовна
Курс:	Дискретная математика для студентов специальностей АСУ,ЭВМ	Дата:	Понедельник, 7 Июнь 2021, 04:32
Книга:	Раздел 1 Элементы теории множеств		

Оглавление

Этот раздел, по существу, служит развернутым словарем для всех остальных разделов. Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества.

§ 1. Основные понятия теории множеств

Понятие <множество>, как и любое другое исходное понятие математической теории не является строго определяемым. Его синонимами являются <совокупность>, <семейство>, <класс>, <система>, <собрание>, <ансамбль>, <коллекция> и др.

Например, Кантор, основатель теории множеств, дал такое определение: <под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью>.

Примеры множеств:

· множество столов в комнате;

· множество всех атомов на Марсе;

· множество всех рыб в океане;

· множество футболистов команды <Сибскана>

· множество всех футбольных команд

В математике рассматриваются:

· множество точек (например, окружности),

· множество чисел (например, действительных)

· множество всех решений уравнения ***sinx=0,5***

· множество всех чисел вида $\pi/2 \pm k\pi, \quad где \quad k \in N$

Определение 1.1. Предметы (объекты), составляющие данное множество, называют его ***элементами.*** При этом никаких ограничений на природу элементов множества не накладывается. Предполагается только, что для любых двух элементов данного множества имеется возможность выяснить, различны они или одинаковы.

Тот факт, что элемент *x* принадлежит множеству **A** (*x* является элементом множества **A**), записывается так: $x \in \mathbf{A}$. Если же *x* не является элементом множества **A** (*x* не принадлежит множеству **A**), то пишут $x \notin \mathbf{A}$. Таким образом, принадлежность - это отношение между элементами и множествами, при этом предполагается, что для любого конкретного элемента и любого конкретного множества можно определить, принадлежит этот элемент данному множеству или нет.

Существенным в понятии **<множество>** является то, что мы объединяем некоторые предметы в одно целое. Георг Кантор (1845–1918), немецкий математик, создатель теории множеств, так подчеркнул это обстоятельство: <Множество есть многое, мыслимое нами как единое>. Чтобы наглядно представить понятие <множество>, академик Н.Н. Лузин (1883–1950) предложил следующий образ. Представим прозрачную непроницаемую оболочку, нечто вроде плотно закрытого непроницаемого мешка. Предположим, что внутри этой оболочки заключены все элементы *x* данного множества **A** и что кроме них внутри оболочки никаких других предметов нет. Эта оболочка с предметами *x,* находящимися внутри нее, и может служить образом множества **A**, составленного из элементов *x*. Сама же прозрачная оболочка, охватывающая все элементы (и ничего другого кроме них), довольно хорошо изображает тот факт объединения элементов *x,* в результате которого создается множество **A**.

Понятие множества — одно из основных понятий современной математики. Понятия и теоремы теории множеств обладают большой общностью, так как элементы множеств могут быть различной природы, а потому одни и те же утверждения, касающиеся множеств, можно истолковать как утверждения о точках, натуральных числах, молекулах и т.д.

Определение 1.2. Множество называется ***конечным,*** если оно состоит из конечного числа элементов, и ***бесконечным*** — в противоположном случае.

Возможны различные ***способы задания множеств***.

Один из них состоит в том, что дается **полный список** (полный перечень) элементов, входящих в данное множество. Так, множество учеников класса определяется списком в журнале. Если множество **A** конечное, состоящее из элементов $a_1, \dots,$

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js = $\{a_1, \dots, a_n\}$. **В** частности, $\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a.

Но этот способ применим лишь к конечным множествам, да и то не ко всем. Например, множество рыб в океане конечно, однако задать их списком, перечислить их трудно. К бесконечным множествам данный способ вовсе не применим. Множество всех целых чисел таким способом задать нельзя.

Имеется другой, универсальный способ задания множеств. Это - **задание с помощью характеристического свойства множества A,** т.е. такого свойства, которым обладают все элементы множества **A** и не обладают элементы, не принадлежащие **A**.

Пример. Z - множество всех целых чисел, то , $6 \in \mathbf{Z}$, $1/2 \notin \mathbf{Z}$,"крокодил" не принадлежит **Z**.

Окружность радиуса 2 с центром в начале координат - это множество всех таких *x,* что *x* есть точка плоскости и *x* находится на расстоянии в две единицы от начала координат.

Если *P*(*x*) - некоторое свойство, то предполагается, что оно определяет некоторое множество **A,** состоящее из всех тех элементов *x,* которые удовлетворяют свойству *P*(*x*)*. **В** этом случае множество **A** обозначают так:
A = {*x*| *P*(*x*)} или **A** = {*x*: *P*(*x*)}. Например, если **A** = {a_1, ... , a_n}, то оно может быть определено с помощью характеристического свойства следующим образом: **A** = {*x*| *x* = a_1 или *x* = a_2, или ... или *x* = a_n}. Множество всех сенаторов США может быть определено с помощью характеристического свойства так: {*x*| *x* — сенатор}, и это задание экономнее задания данного множества с помощью списка всех сенаторов.

Третий способ задания множества – это **порождающая процедура.** Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо из других объектов. Элементами множества считаются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры. Примером служит множество всех чисел вида $\pi / 2 \pm k\pi, \quad где \quad k \in N$

Ясно, что существуют множества, состоящие из трех, двух или одного элемента. Например, множество родителей любого человека двухэлементное. Однако иногда приходится рассматривать и множество, не содержащее ни одного элемента. Оно называется ***пустым*** и обозначается $\emptyset$. При задании множества характеристическим свойством не всегда известно, существует ли элемент с таким свойством. Например, мы говорим о множестве решений какого-либо уравнения, которое может и не иметь решения, т.е. это множество решений уравнения пустое. Более того, часто бывает очень трудно выяснить, является ли пустым данное множество. Неизвестно, например, до сих пор, является ли пустым множество всех натуральных *n* > 2 таких, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ имеет положительное целочисленное решение (проблема Ферма).

Введем понятие <подмножество>.

Определение 1.3. Пусть **A** и **B** — непустые множества. Если каждый элемент множества **A** является вместе с тем и элементом множества **B,** то **A** называют ***подмножеством множества* B** (или **A** содержится в **B,** или **B** содержит **A,** или **A** включено в **B** и обозначают $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. Положим, по определению, что пустое множество $\emptyset$ есть подмножество любого множества **B****, в том числе и пустого.

Пример Пусть, например, **C** — множество всех комплексных чисел; **R** — множество всех действительных чисел; **Q** — множество всех рациональных чисел; **Z** — множество всех целых чисел; **N** — множество всех натуральных чисел. Тогда $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$.

Понятие подмножества определяет отношение между двумя множествами — отношение включения. Отметим простейшие свойства введенного отношения включения:

1) $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}$, т. е. любое множество **A** является подмножеством самого себя (рефлексивность);

2) если $\mathbf{A}_1 \subseteq \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_2 \subseteq \mathbf{A}_3$, то $\mathbf{A}_1 \subseteq \mathbf{A}_3$ (транзитивность).

Чтобы в множестве **A** выделить подмножество **B,** добавляют к характеристическому признаку множества **A** то или иное дополнительное свойство *P*(*x*) и обозначают это так: **B** = {$x \in A$| *P*(*x*)}. Например, {$x \in R$| *x* > 0} — множество всех положительных действительных чисел.

Введем наряду с отношением включения множеств еще одно отношение — отношение равенства множеств.

Определение 1.4. Пусть **A** и **B** — два множества. Множества **A** и **B** называются ***равными***, если каждый элемент множества **A** является вместе с тем и элементом множества **B,** и обратно, каждый элемент множества **B** является и элементом множества **A**. Другими словами, множества **A** и **B** называются равными, если выполняются два включения: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$. Отношение равенства двух множеств, очевидно, удовлетворяет следующим условиям:

1) **A** = **A** (рефлексивность);

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

2) если **A** = **B** и **B** = **C**, то **A** = **C** (транзитивность).

Отметим, что пустое множество единственно. Действительно, пусть и $\varnothing_1$ и $\varnothing_2$ — два пустых множества. Так как для любого множества **A** имеем, что $\varnothing \subseteq \mathbf{A}$, то взяв в качестве **A** множество $\varnothing_1$, получим $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$, а взяв в качестве **A** множество $\varnothing_2$, получим $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$. Отсюда $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

Если $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ и $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, то **A** называют *собственным подмножеством множества* **B** и обозначают $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Введенное отношение $\subset$ называется *отношением строгого включения*. Например, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Отношение строгого включения удовлетворяет следующему свойству: если $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}_2 \subset \mathbf{A}_3$, то $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_3$ (транзитивность).

Определение 1.5. Пусть **A** — множество. Совокупность всех подмножеств множества **A** обозначают через **P**(**A**) и называют ***булеаном множества A***. Ясно, что $\varnothing \in \mathbf{P}(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \in \mathbf{P}(\mathbf{A})$. Если, например, **A** = {*a*, *b*}, то **P**(**A**) = {∅, {*a*}, {*b*}, **A**}.

---

* Это предположение называют *принципом абстракции* или *принципом свертывания*.

** Это хорошо согласуется с определением подмножества в случае, когда **A** и **B** непусты.

§2. Операции над множествами

2.1. Основные теоретико-множественные операции

Во всех рассуждениях о нескольких множествах будем предполагать, что они являются подмножествами некоторого фиксированного множества , которое назовем *универсальным*, *универсумом или пространством** и обозначать **E** (или I). На практике это множество часто явно не указывают, предполагая, что в случае необходимости оно может быть восстановлено.

Определение 2.1. ***Пересечением множеств*** **A** и **B** называется множество, обозначаемое **A** ∩ **B** и состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат обоим множествам **A** и **B**.

Это определение символически можно записать так:

$$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{x \mid x\in\mathbf{A}\ \&\ x\in\mathbf{B}\}.$$

Например, $\{1,2,5\}\cap\{1,5,6\}=\{1,5\}$; $\{1,3\}\cap\{2,4,5\}=\varnothing$. Если **A** — множество всех четных чисел; **B** — множество всех простых чисел, то $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{2\}$. Если **A** — множество студентов мужского пола; **B** — множество мужчин старше 20 лет, то **A** ∩ **B** — множество студентов мужского пола старше 20 лет.

Определение 2.2. ***Объединением множеств*** **A** и **B** называется множество, обозначаемое и состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств **A**, **B**.

Это определение символически можно записать так: $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\{x \mid x\in\mathbf{A}\vee x\in\mathbf{B}\}$.

Например, $\{1,2\}\cup\{2,3,4,5\}=\{1,2,3,4,5\}$. Если $\mathbf{R}_{>0}$ — множество всех положительных действительных чисел,$\mathbf{R}_{>0}$ — множество всех отрицательных действительных чисел, то $\mathbf{R}_{>0}\cup\mathbf{R}_{<0}$ — множество всех действительных чисел, кроме 0. Если $\mathbf{R}_{<1}$ — множество всех действительных чисел меньше 1, то $\mathbf{R}_{>0}\cup\mathbf{R}_{<1}$ — множество всех действительных чисел.

Отметим, что [объединение множеств](#) **A** и **B** называют иногда суммой и обозначают **A** + B, а их пересечение — произведением и обозначают **AB**.

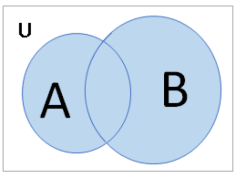
Определение 2.3. ***Разностью множеств*** **A** и **B** называют множество, обозначаемое **A\B** и состоящее из элементов, принадлежащих множеству **A** и не принадлежащих множеству **B**.

Определение 2.4. Пусть **A** — подмножество множества **E**. ***Дополнением множества*** **A *в множестве*** **E** называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов из **E**, которые не принадлежат **A**, и обозначают $\overline{\mathbf{A}}$.

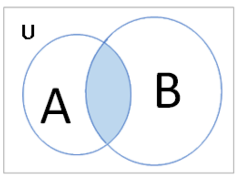
Пример. Если **E** — множество всех целых чисел, **A** — множество всех четных чисел, то $\overline{\mathbf{A}}$ — множество всех нечетных чисел. Если **E** — множество всех людей, **A** — множество всех мужчин, то $\overline{\mathbf{A}}$ — множество всех женщин.

Определение 2.5. Введенные операции объединения, пересечения и разности являются двуместными. Операция дополнения является одноместной.

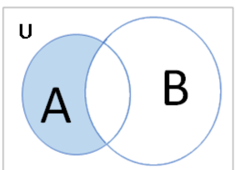
Операции объединения, пересечения, разности и дополнения множеств допускают очень наглядное [граф](#)ическое истолкование с помощью так называемых кругов Эйлера (или диаграмм Венна). Универсальное множество **E** изображается при этом множеством точек некоторого прямоугольника, а его подмножества — в виде круга (или какой-нибудь другой простой области внутри этого прямоугольника).



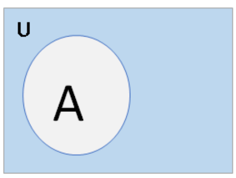
a) A∪B



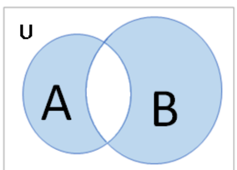
b) A∩B



c) A\B



d) $\overline{\mathrm{A}}$



e) AΔB

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

2.2 Булева алгебра подмножеств множества E

Определение 2.6. Пусть **P**(**E**) — совокупность всех подмножеств множества **E**. **P**(**E**) замкнуто относительно операций объединения, пересечения и дополнения множеств, т.е. производя эти операции над элементами множества **P**(**E**), получаем элементы, принадлежащие **P**(**E**). Множество **P**(**E**) с введенными операциями $\bigcup, \bigcap, \overline{}$ называют ***булевой алгеброй подмножеств множества*** **E**.

Подобно тому, как сложение и умножение чисел удовлетворяют известным законам коммутативности ассоциативности и дистрибутивности, операции объединения, пересечения и дополнения в алгебре подмножеств подчинены аналогичным законам, а также ряду других. Выпишем основные законы, которым подчиняются эти операции:

Примеры.

1) $\overline{\overline{A}} = A;$

$\left.\begin{array}{l} 2)\ A\bigcap B = B\bigcap A; \\ 3)\ A\bigcup B = B\bigcup A; \end{array}\right\}$ (законы коммутативности)

$\left.\begin{array}{l} 4)\ (A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C); \\ 5)\ (A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C); \end{array}\right\}$ (законы ассоциативности)

$\left.\begin{array}{l} 6)\ A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C); \\ 7)\ A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C); \end{array}\right\}$ (законы дистрибутивности)

$\left.\begin{array}{l} 8)\ \overline{A\bigcap B} = \overline{A}\bigcup\overline{B}; \\ 9)\ \overline{A\bigcup B} = \overline{A}\bigcap\overline{B}; \end{array}\right\}$ (законы Де Моргана)

$\left.\begin{array}{l} 10)\ A\bigcap A = A; \\ 11)\ A\bigcup A = A; \end{array}\right\}$ (законы идемпотентности)

12) $A\bigcap E = A;$

13) $A\bigcup \varnothing = A;$

14) $A\bigcup \overline{A} = E;$

15) $A\bigcap \overline{A} = \varnothing.$

$\left.\begin{array}{l} 16)\ \mathbf{A}\bigcup(\mathbf{A}\bigcap\mathbf{B}) = \mathbf{A} \\ 17)\ \mathbf{A}\bigcap(\mathbf{A}\bigcup\mathbf{B}) = \mathbf{A} \end{array}\right\}$ (Законы поглощения)

Универсальным методом доказательства вышеприведенных равенств является доказательство, основанное на определении равенств двух множеств, т.е. два множества **A** и **B** равны тогда и только тогда, когда выполнены два включения: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$. Приведем доказательства некоторых из этих соотношений.

Чтобы доказать 7), достаточно проверить два включения:

7а) $\mathbf{A}\bigcup(\mathbf{B}\bigcap\mathbf{C}) \subseteq (\mathbf{A}\bigcup\mathbf{B})\bigcap(\mathbf{A}\bigcup\mathbf{C});$

7б) $(\mathbf{A}\bigcup\mathbf{B})\bigcap(\mathbf{A}\bigcup\mathbf{C}) \subseteq \mathbf{A}\bigcup(\mathbf{B}\bigcap\mathbf{C}).$

Доказательство 7а). Пусть $x \in \mathbf{A}\bigcup(\mathbf{B}\bigcap\mathbf{C})$. Тогда $x \in \mathbf{A}$ или $x \in \mathbf{B}\bigcap\mathbf{C}$. Если $x \in \mathbf{A}$, то $x \in \mathbf{A}\bigcup\mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{A}\bigcup\mathbf{C}$, а следовательно, x является элементом пересечения этих множеств. Если $x \in \mathbf{B}\bigcap\mathbf{C}$, то $x \in \mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{C}$. Значит, $x \in \mathbf{A}\bigcup\mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{A}\bigcup\mathbf{C}$, так что и в этом случае x есть элемент их пересечения.

Доказательство 7б). Пусть $x \in (\mathbf{A}\bigcup\mathbf{B})\bigcap(\mathbf{A}\bigcup\mathbf{C})$. Тогда $x \in \mathbf{A}\bigcup\mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{A}\bigcup\mathbf{C}$. Следовательно, $x \in \mathbf{A}$ или же $x \in \mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{C}$. Из этого вытекает, что $x \in \mathbf{A}\bigcup(\mathbf{B}\bigcap\mathbf{C})$.

Равенство 7 с помощью кругов Эйлера наглядно представлено на рис.

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

§ 3. Отношения

В математике (да и не только в математике) для обозначения связи между предметами или понятиями используют термин <отношение>. Например, отношение <меньше> в множестве действительных чисел, отношение подобия треугольников, отношение равенства дробей, отношение делимости в множестве целых чисел, отношение включения подмножеств некоторого множества, отношения родства и старшинства в множестве людей и т.д.. Это примеры отношений между двумя элементами (понятиями), так называемых бинарных отношений.

Можно рассмотреть отношения и между тремя, четырьмя и более элементами. Например, отношение <точка A лежит между точками B и C>, отношение между целыми числами a, b, c, d, если они образуют пропорцию a:b = c:d, отношение между действительными числами (a_1, ..., a_n), заключающееся в том, что их сумма равна 0, т.е. $a_1 + \ldots + a_n = 0$.

Пока мы будем рассматривать только бинарные отношения. Определим понятие <бинарное отношение> через понятия <множество> и <упорядоченная пара>. При этом будем исходить из следующих соображений: бинарное отношение используется в связи с парами некоторых элементов, рассматриваемых в определенном порядке, оно касается существования определенной связи между некоторыми парами.

Если известен перечень всех упорядоченных пар, для которых имеет смысл говорить о данном отношении, то для каждой такой пары можно сказать, находится или не находится она в данном отношении. Следовательно, можно полностью охарактеризовать отношение, зная множество всех пар и подмножеств тех пар, которые находятся в данном отношении. Рассмотрим, например, отношение <меньше> в множестве натуральных чисел

***N** = {1, 2, ...}. Здесь мы имеем дело с упорядоченными парами натуральных чисел, т.е. элементами множества $\mathbf{N}^2$, а подмножество тех пар, которые находятся в отношении <меньше>, состоит из пар вида {(1, 2), ..., (1, n), ..., (2, 3), ..., (2, n), ..., (3, 4), ..., (3, n), ...}. Пара (a, b) из $\mathbf{N}^2$ тогда и только тогда принадлежит этому подмножеству, когда a **<** b. Значит, отношение <меньше> в множестве натуральных чисел можно отождествить с указанным подмножеством множества $\mathbf{N}^2$.*

3.1. Бинарные отношения

Определение 3.1. ***Бинарным отношением, определенным на паре множеств*** **A** и **B**, называется любое подмножество их декартова произведения **A × B**.

Если $—\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ бинарное отношение, а упорядоченная пара (*a*, *b*), где ,$a \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{B}$, принадлежит **R**, то это записывают либо (согласно определению), либо **R**(*a*, *b*), либо *a***R***b*. Обозначение *a***R***b* исходит из обозначений вида $a = b$, $a < b$, и др.

Если $—\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ бинарное отношение и **A** = **B**, то **R** называют *бинарным отношением, определенным на множестве* **A** (вместо того, чтобы говорить, что **R** — бинарное отношение, определенное на паре множеств **A**, **A**).

Так как бинарные отношения — множества, то имеет смысл говорить об их равенстве (как о равенстве множеств), и об отношении включения, а именно: два бинарных отношения $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ равны тогда и только тогда, когда любая пара (*a*, *b*) из $\mathbf{R}_1$ принадлежит вместе с тем и $\mathbf{R}_2$, и обратно: любая пара (*a*, *b*) из $\mathbf{R}_2$ принадлежит и $\mathbf{R}_1$. Аналогично, тогда и только тогда, когда любая пара (*a*, *b*) из $\mathbf{R}_1$ принадлежит вместе с тем и $\mathbf{R}_2$.

Определение 3.2. Пусть — бинарное отношение, определенное на паре множеств **A**, **B**. *Областью определения отношения* **R** называется совокупность всех таких , что хотя бы для одного . *Областью значений отношения* **R** называют множество всех таких , что хотя бы для одного элемента .

Примеры.

1.Пусть **A** = {a_1, a_2}, **B** = {b_1, b_2}. Выпишем все бинарные отношения, определенные на паре множеств **A**, **B**, т.е. все подмножества множества . Их число равно 2^4 = 16:

$$
\begin{aligned}
&R_1 = \varnothing; \quad R_2 = \{(a_1, b_1)\}; \quad R_3 = \{(a_1, b_2)\};\\
&R_4 = \{(a_2, b_1)\}; \quad R_5 = \{(a_2, b_2)\}; R_6 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\};\\
&R_7 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1)\}; \quad R_8 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\};\\
&R_9 = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1)\}; \quad R_{10} = \{(a_1, b_2), (a_2, b_2)\};\\
&R_{11} = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2)\}; R_{12} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1)\};\\
&R_{13} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2)\}; R_{14} = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\};\\
&R_{15} = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}; \quad R_{16} = A \times B.
\end{aligned}
$$

Областью определения для бинарного отношения $\mathbf{R}_1$ является пустое множество, для $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$, $\mathbf{R}_6$ **—** одноэлементное множество {a_1}, для $\mathbf{R}_4$, $\mathbf{R}_5$, $\mathbf{R}_{11}$ — {a_2}, а для остальных — все множество **A**. Областью значений для бинарного отношения $\mathbf{R}_1$ служит пустое множество, для $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_4$, $\mathbf{R}_7$ — одноэлементное множество {b_1}, для $\mathbf{R}_3$, $\mathbf{R}_5$, $\mathbf{R}_{10}$ — {b_2}, для остальных — все множество **B**.

2.Пусть **A** ={1, 2, 3}, **B** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Следующее подмножество множества **A** × **B** {(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (2, 2); (2, 4); (2, 6); (3, 3); (3, 6)} может быть задано короче (словесно) как отношение <*a* является делителем *b*>, где , $a \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{B}$. Область определения этого отношения совпадает с **A**, а область значений - с **B**.

3.Область определения бинарного отношения {(2, 1), (2, 4), (3, 3),(3, 7)} — множество {2, 3}, а область значений — {1, 3, 4, 7}.

3.2. N-арные отношения

Как уже упоминалось выше, можно рассматривать отношения и между тремя, четырьмя и более элементами. Например, отношение <точка *A* лежит между точками *B* и *C*>, отношение между целыми числами *a*, *b*, *c*, *d*, если они образуют пропорцию *a*:*b* = *c*:*d*, отношение между действительными числами

(a_1, ..., a_n), заключающееся в том, что их сумма равна 0, т.е. $a_1 + \ldots + a_n = 0$.

Понятие *n*-арного (*n*-местного) отношения вводится по аналогии с понятием бинарного отношения.

Определение 3.3. Пусть $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ — непустые множества. Всякое подмножество **R** их декартова произведения

$\mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{A}_n$ называется *n*-арным отношением, определенным на системе множеств $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ т.е. $R \subseteq \mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{A}_n$.

Если $\mathbf{A}_1 = \ldots = \mathbf{A}_n = \mathbf{A}$, то отношение **R**, определенное на системе множеств $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, называют *n*-арным (*n*-местным) отношением, определенным на множестве **A** (вместо того, чтобы говорить: <*n*-арное отношение, определенное на системе множеств **A**, ..., **A**>).

При n = 2 приходим к известному понятию бинарного отношения. При n = 3 используют термин тернарное отношение.

Пример. Пусть **A** – множество дней учебного года, **B**= {8-00,14-00}, **C** - множество аудиторий ИРНИТУ, **D** - множество учебных групп ИРНИТУ, **E** - множество учебных дисциплин, изучаемых в ИРНИТУ, **X** - множество преподавателей ИРНИТУ. Тогда расписание экзаменов – 6-арное отношение, определенное на множестве **A×B×C×D×E×X.**

3.3. Способы задания бинарного отношения

Так как бинарное отношение это множество пар элементов, то то для их задания можно использовать **все способы задания множеств.** Примеры таких заданий мы использовали выше.

Бинарные отношения иногда удобно изображать **графически.** Один способ состоит в том, что элементы $x \in A$ и $y \in B$, связанные отношением , соединяются стрелками.

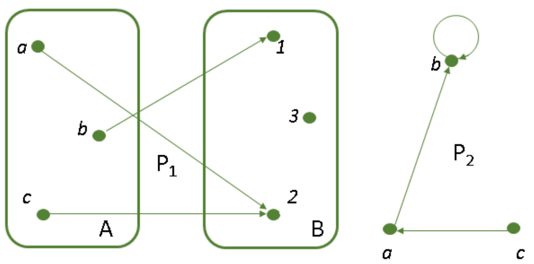


Рис.7

Пример. На рис. 7 графически показаны отношение R1 = {(a, 2), (b,1), (c, 2)} между множествами *A* = {a, b, c} и *B* — {1,2,3}, а также отношение

R2 = {(a, b), (b,b), (c, a)} на множестве *A*.

В некоторых случаях удобно задавать бинарное отношение **с помощью матрицы.** Рассмотрим два конечных множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ и бинарное отношение P $A \times B$. Определим *матрицу* $[P] = (p_{ij})$ размера m × n бинарного отношения *P* по следующему правилу:

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

§ 4. Операции над бинарными отношениями

4.1. Теоретико-множественные операции

*Так как бинарные отношения, определенные на фиксированной паре множеств **A**, **B**, являются подмножествами **A** × **B**, то над ними можно производить все теоретико-множественные операции.*

*Так, если **R, S** — два бинарных отношения, определенных па паре множеств **A**, **B**, то для любых* $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S}),$ *, тогда и только тогда, когда **aRb** или **aSb**;* $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S})\boldsymbol{b}$ *тогда и только тогда, когда **aRb и aSb;*** $\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{b}$ *тогда и только тогда, когда **не aRb.***

Примеры.

1.Рассмотрим отношение равенства =, определенное на множестве N натуральных чисел, т.е. совокупность всех диагональных пар: (1, 1), (2, 2),... . Тогда дополнением (в множестве N^2) этого отношения является отношение неравенства, обозначаемое обычно ≠. Отношение ≤ совпадает с объединением отношений $<$ и $=$; а пересечение этих отношений — пустое (всюду ложное) отношение; объединение отношений ≤ и $>$ является всюду истинным отношением, т.е. совпадает с N^2; объединение отношений $<$ и $>$ есть отношение ≠.

2.Объединение отношений <x является отцом y> и <x является матерью y> есть отношение <x является родителем (отцом или матерью) y>, а объединением отношений <x является мужем y> и <x является женой y> служит отношение <x и y — супруги>.

*Помимо теоретико-множественных операций над отношениями важное значение имеют **еще две операции над ними: обращение и умножение отношений.***

4.2. Обращения бинарного отношения

Определение 4.1. *Пусть R — бинарное отношение, определенное на паре множеств A, B. Отношением, обратным к бинарному отношению R, называется отношение, определенное на паре множеств B и A и состоящее из всех тех и только тех пар (b, a), для которых (a,b) ∈ R.*

Бинарное отношение, обратное к отношению R, будем обозначать R^{-1}. Таким образом, $R^{-1} \subseteq B \times A$.

Примеры.

1. Если $<$ — отношение порядка на множестве N натуральных чисел, то $<^{-1}$ — отношение $>$.

2. Пусть A — множество английских слов, B — множество русских слов, а R — такое отношение, определенное на паре множеств A, B, что aRb тогда и только тогда, когда b — возможный перевод слова a , т.е. R — англо-русский словарь. Тогда R^{-1} — русско-английский словарь.

3. Если R- бинарное отношение <x является родителем y>, то R^{-1} - отношение <x является ребенком (сыном или дочерью) y>.

4.3. Произведение (композиция)бинарных отношений

Определение 4.2. *Пусть P_1 — бинарное отношение, определенное на паре множеств A, B, а P_2 — бинарное отношение, определенное на паре множеств B, C. Произведением (или композицией) отношений P_1 и P_2 называется бинарное отношение, определенное на паре множеств A и C и состоящее из всех тех и только тех пар (a, c) , для которых существует элемент x из B такой, что aP_1x и xP_2c (Рис.8).*

Произведение бинарных отношений и обозначим через $\boldsymbol{P_1 \circ P_2}$ или $\boldsymbol{P_1P_2}$. Таким образом, $\boldsymbol{P_1P_2} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{C}$ и $\boldsymbol{a(P_1P_2)c}$ тогда и только тогда, когда существует элемент такой, что $\boldsymbol{a\ P_1x}$ и $\boldsymbol{x\ P_2\ c}$.

§5.Матрица бинарного отношения.

*Рассмотрим два конечных множества A = {a_1, a_2, ..., a_m}, B = {b_1, b_2,...,b_n} и бинарное отношение «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mi»P«/mi»«mo»§#8838;«/mo»«mi»A«/mi»«mo»§#215;«/mo»«mi»B«/mi»«/mrow»«/mstyle»«/math». Определим **матрицу [P]** = (p_{ij}) размера m × n бинарного отношения P по следующему правилу:*

$$p_{ij} = \begin{cases} 1,\ если\ (a_i,\ b_j) \in P \\ 0,\ если\ (a_i,\ b_j) \notin P \end{cases}$$

Полученная матрица содержит полную информацию о связях между элементами и позволяет представлять эту информацию графически и на компьютере. Заметим, что любая матрица, состоящая из нулей и единиц, является матрицей некоторого бинарного отношения.

Пример.

Матрица бинарного отношения «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mi»§#1056;«/mi»«mo»§#8838;«/mo»«mo»§#160;«/mo»«msup»«mi»§#1040;«/mi»«mn»2«/mn»«/msup»«/mrow»«/mstyle»«/math» , A = {1,2,3}, заданного на рис. 9, имеет вид «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»P«/mi»«/mfenced»«mo»=«/mo»«mfenced»«mtable»«mtr»«mtd»«mn»1«/mn»«/mtd»«mtd»«mn»1«/mn»«/mtd»«mtd»«mn»1«/mn»«/mtd»«/mt

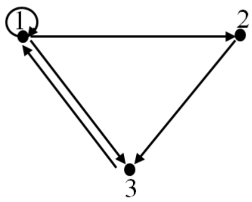


Рис.9

Основные свойства матриц бинарных отношений:

1. Если «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mi»P«/mi»«mo»,«/mo»«mi»Q«/mi»«mo»§#8838;«/mo»«mo»§#160;«/mo»«mi»§#1040;«/mi»«mo»§#215;«/mo»«mi»§#1042;«/mi»«r «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mrow»«mi»P«/mi»«mo»§#8745;«/mo»«mi»Q«/mi»«/mrow»«/mfenced»«mo»=«/mo»«mfenced»«mrow»«msub»«mi»p«/mi»«mrow»«mi»i«/mi»«mi» где сложение осуществляется по правилам 0 + 0 = 0, 1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1, а умножение - обычным образом. Итак, «math style=¨font-family: TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mrow»«mi»P«/mi»«mo»§#8746;«/mo»«mi»Q«/mi»«/mrow»«/mfenced»«mo»=«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»P«/mi»«/mfenced»«mo»+«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»Q«/mi»«/mfenced»«/mrow»«/mstyle»«/math», а матрица «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mo mathsize=¨20px¨»[«/mo»«mi mathsize=¨20px¨»P«/mi»«mo mathsize=¨20px¨»§#8745;«/mo»«mi mathsize=¨20px¨»Q«/mi»«mo mathsize=¨20px¨»]«/mo»«/math» получается перемножением соответствующих элементов из [P] и [Q]: «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mrow»«mo»[«/mo»«mi»P«/mi»«mo»§#8745;«/mo»«mi»Q«/mi»«mo»]«/mo»«/mrow»«mo»=«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»P«/mi»«/mfenced»«mo»§#183;«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»Q«/mi»«/mfenced»«/mrow»«/mstyle»«/math».

Пример.

Пусть «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mo»[«/mo»«mi»§#1056;«/mi»«mo»]«/mo»«mo»§#160;«/mo»«mo»=«/mo»«mfenced»«mtable»«mtr»«mtd»«mn»1«/mn»«/mtd»«mt матрицы отношений P и Q. Тогда

«math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mo»[«/mo»«mi»§#1056;«/mi»«mo»§#8746;«/mo»«mi»Q«/mi»«mo»]«/mo»«mo»§#160;«/mo»«mo»=«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»P«/mi»«/mfenced»«mo»+«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»Q«/mi»«/mfenced»«mo»=«/mo»«mfenced»«mtable»«mtr»«mtd»«mn»1«/mn»«/mtd»«mtd»«mn»0«/mn»«/mtd»«mtd»«mn»1«/mn»«/mtd»«/mt linebreak=¨newline¨/»«mo»[«/mo»«mi»§#1056;«/mi»«mo»§#8745;«/mo»«mi»Q«/mi»«mo»]«/mo»«mo»§#160;«/mo»«mo»=«/mo»«mo»[«/mo»«mi»P«/mi»«mo

2. Если «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mi»P«/mi»«mo»§#8838;«/mo»«mi»A«/mi»«mo»§#215;«/mo»«mi»B«/mi»«mo»,«/mo»«mo»§#160;«/mo»«mi»Q«/mi»«mo»§#8838;« open=¨[¨ close=¨]¨»«mrow»«mi»P«/mi»«mo»§#8728;«/mo»«mi»Q«/mi»«/mrow»«/mfenced»«mo»=«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»P«/mi»«/mfenced»«mo»§#183;«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»Q«/mi»«/mfenced»«/mrow»«/mstyle»«/math», где умножение матриц [P] и [Q] производится по обычному правилу умножения матриц, но произведение и сумма элементов из [P] и [Q] - по определенным в п. 1 правилам.

Пример.

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

«math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mi»§#1045;«/mi»«mi»§#1089;«/mi»«mi»§#1083;«/mi»«mi»§#1080;«/mi»«mo»§#160;«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»P«/mi»«/mfenced»«mo»=«/mo»«mfenced»«mtable»«mtr»«mtd»«mn»0«/mn»«/mtd»«mtd»«mn»1«/mn»«/mtd»«mtd»«mn»0«/mn»«/mtd»«/mtı
open=¨[¨
close=¨]¨»«mi»Q«/mi»«/mfenced»«mo»=«/mo»«mfenced»«mtable»«mtr»«mtd»«mn»0«/mn»«/mtd»«mtd»«mn»1«/mn»«/mtd»«/mtr»«mtr»«mtd»«mn»1«/mn»
open=¨[¨
close=¨]¨»«mrow»«mi»P«/mi»«mo»§#8728;«/mo»«mi»Q«/mi»«/mrow»«/mfenced»«mo»=«/mo»«mfenced»«mtable»«mtr»«mtd»«mn»0«/mn»«/mtd»«mtd»«mı

3. Матрица обратного отношения P^{-1} равна транспонированной матрице отношения P: $[P^{-1}] = [P]^{T}$.

4. Если «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mi»P«/mi»«mo»§#8838;«/mo»«mi»Q«/mi»«mo»,«/mo»«mo»§#160;«/mo»«mo»[«/mo»«mi»§#1056;«/mi»«mo»]«/mo»«mo»§#160;«

5. Матрица тождественного отношения единична:

«math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mrow»«mi»i«/mi»«msub»«mi»d«/mi»«mi»A«/mi»«/msub»«/mrow»«/mfenced»«mo»=«/mo»«mfenced»«mtable»«mtr»«mtd»«mn»1«/mn»«/mtd»«n

6. Пусть «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mi»§#1056;«/mi»«mo»§#160;«/mo»«mo»§#8838;«/mo»«mo»§#160;«/mo»«msup»«mi»§#1040;«/mi»«mn»2«/mn»«/msup»«mo»§#1 - рефлексивное бинарное отношение на множестве A. Матрица рефлексивного отношения имеет вид

«math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mo»[«/mo»«mi»§#1056;«/mi»«mo»]«/mo»«mo»=«/mo»«mfenced»«mtable»«mtr»«mtd»«mn»1«/mn»«/mtd»«mtd»«mo»§#8943;«/r

7. Пусть «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mi mathsize=¨20px¨»§#1056;«/mi»«mo mathsize=¨20px¨»§#160;«/mo»«mo mathsize=¨20px¨»§#8838;«/mo»«mo mathsize=¨20px¨»§#160;«/mo»«msup»«mi mathsize=¨20px¨»§#1040;«/mi»«mn mathsize=¨20px¨»2«/mn»«/msup»«mo mathsize=¨20px¨»§#160;«/mo»«/math»– симметричное бинарное отношение на множестве A. Тогда $[P]^{T} = [P]$.

8. Если отношение P антисимметрично, то это означает, что в матрице «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mo»§#160;«/mo»«mo»[«/mo»«mi»§#1056;«/mi»«mo»§#160;«/mo»«mo»§#8745;«/mo»«msup»«mi»§#1056;«/mi»«mrow»«mo»-«/m все элементы вне главной диагонали являются нулевыми.

9. Если отношение P транзитивно, то это означает, что «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mi»P«/mi»«mo»§#176;«/mo»«mi»P«/mi»«mo»§#8838;«/mo»«mi»P«/mi»«mo».«/mo»«/mrow»«/mstyle»«/math»

Пример.

Проверим, какими свойствами обладает отношение «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mi mathsize=¨20px¨»§#1056;«/mi»«mo mathsize=¨20px¨»§#160;«/mo»«mo mathsize=¨20px¨»§#8838;«/mo»«mo mathsize=¨20px¨»§#160;«/mo»«msup»«mi mathsize=¨20px¨»§#1040;«/mi»«mn mathsize=¨20px¨»2«/mn»«/msup»«mo mathsize=¨20px¨»§#160;«/mo»«/math», A = {1,2,3}, изображенное на рис. 10.

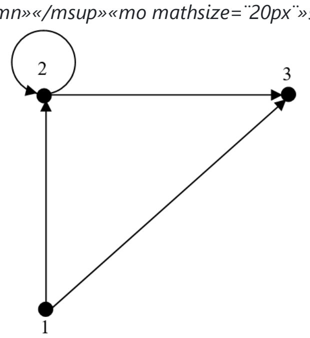


Рис. 10

*Составим матрицу отношения P: «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mo»[«/mo»«mi»§#1056;«/mi»«mo»]«/mo»«mo»§#160;«/mo»«mo»=«/mo»«mfenced»«mtable»«mtr»«mtd»«mn»0«/mn»«/mtd»«mt Так как в матрице [P] на главной диагонали имеются нулевые элементы, отношение P **не рефлексивно**. Несимметричность матрицы [P] означает, что отношение P **не симметрично**. Для проверки антисимметричности вычислим матрицу «math style=¨font-family:TimesNewRoman ¨xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mo»[«/mo»«mi»§#1056;«/mi»«mo»§#160;«/mo»«mo»§#8745;«/mo»«mo»§#160;«/mo»«msup»«mi»§#1056;«/mi»«mrow»«mo»-«/m Имеем «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»P«/mi»«/mfenced»«mo»§#183;«/mo»«msup»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mi»P«/mi»«/mfenced»«mi»T«/mi»«/msup»«mo»=«/mo»«mfenced»«mtable»«mtr»«mtd»«mn»0«/mn»«/mtd»«mtd»«mn»1«/mn»«/mtd»«mtd»«mn*

*Поскольку в полученной матрице все элементы, стоящие вне главной диагонали, нулевые, отношение P **антисимметрично**.*

Так как «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mo»[«/mo»«mi»§#1056;«/mi»«mo»§#8728;«/mo»«mi»§#1056;«/mi»«mo»]«/mo»«mo»§#160;«/mo»«mo»=«/mo»«mo»§#160;«/mo»

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js *-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mo mathsize=¨20px¨»[«/mo»«mi* *mathsize=¨20px¨»§#1056;«/mi»«mo mathsize=¨20px¨»§#8728;«/mo»«mi mathsize=¨20px¨»§#1056;«/mi»«mo mathsize=¨20px¨»]«/mo»«mo mathsize=¨20px¨»§#160;«/mo»«mo mathsize=¨20px¨»§#8838;«/mo»«mo mathsize=¨20px¨»§#160;«/mo»«mo mathsize=¨20px¨»[«/mo»«mi mathsize=¨20px¨»§#1056;«/mi»«mo mathsize=¨20px¨»]«/mo»«/math» , т. е. Р является* ***транзитивным*** *отношением.*

◄ Предыдущая: § 4. Операции над бинарными отношениями Следующая: §6.Функция (отображение). ►
Перейти на...

§6.Функция (отображение)

Понятие <функция> вам известно из курса высшей математики. <Отображение> - другое название этого понятия, больше используемое в <функциональном анализе>.

В классическом курсе математического анализа определение функции дается следующим образом:

Пусть X, Y — непустые множества. Если каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что задано ***отображение множества X в множество Y*** *или задана* ***функция, определенная на множестве X со значениями в множестве Y.***

Отображение множества X в Y обозначим буквой f. Если f — отображение X в Y, то это символически записывают так:

$$f: X \to Y \text{ или } X \xrightarrow{f} Y$$

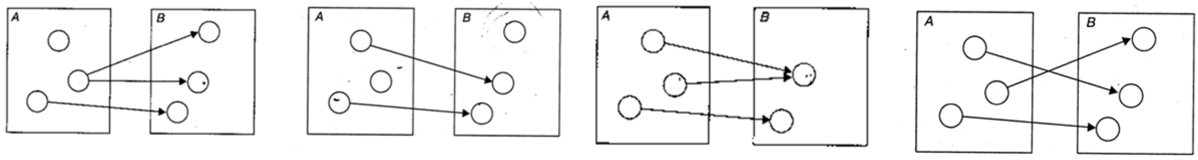
Каждому элементу $x \in X$ при отображении f: X → Y соответствует некоторый элемент из множества Y, который называется ***образом элемента x при отображении f*** *и обозначается f (x). Если y — образ элемента x при отображении f: X → Y, то это записывают так:*

$$y = f(x) \text{ или } f: x \to y.$$

Элемент x называют ***прообразом элемента y при отображении f: X → Y.***

Определить понятие <функция> можно используя понятие ***бинарного отношения.***
Определение 6.1. *Бинарное отношение f, определенное на паре непустых множеств A и B, называется* ***функцией, определенной на множестве A со значениями в B (или отображением из A в B)*** *, если для любого элемента x ∈ A существует один и только один элемент y ∈ B, удовлетворяющий условию x f y.*

Другими словами, отношение f , заданное на паре непустых множеств A и B, является функцией из A в B, если из того, что $(x, y_1) \in f$ и $(x, y_2) \in f$ следует $y_1 = y_2$.



а) не функция б) функция в) функция г) функция

Примеры.

а) *Следующие бинарные отношения между x и y, заданные на множестве R действительных чисел, являются функциями (отображениями R в себя):*
1) $x^2 = y$; 2) $|x| = y$; 3) $2x + 3y = 12$
б) *Отношение < на множестве Z всех целых чисел не есть отображение Z в себя, ибо для каждого целого числа x существует не одно, а бесконечно много целых чисел y таких, что x < y.*
в) *Бинарное отношение между x и y, определенное на множестве R действительных чисел условием : $x^2 + y^2 = 25$, не является отображением R в себя. Действительно, если |x| > 5, то в R нет такого y, которое с x было бы связано соотношением $x^2 + y^2 = 25$. Для |x| < 5 в R есть элемент y такой, который связан с x соотношением $x^2 + y^2 = 25$, но он не единствен (число таких y равно 2).*
г) *Следующие отношения, определенные на множестве R действительных чисел, не являются отображениями R в себя: 1) $x = y^2$;2) x =|y|.*
д) *Отношение <x является отцом y>, заданное на множестве людей, не является отображением.*
е) *Отношение <x является сыном y>, определенное на множестве людей мужского пола, является отображением этого множества в себя. Если данное отношение рассматривать определенным на множестве всех людей, то оно не есть отображение.*
ж) *Отношение равенства на произвольном множестве A является отображением множества A в себя. Оно называется тождественным, или единичным, отображением A в себя.*
Определение 6.2. *Два отображения F: X → Y и G: X → Y называются* ***равными*** *(обозначение F = G), если F(x) = G(x) для любого элемента $x \in X$ (т.е. если результаты их действия одинаковы).*

Определение 6.3. *Пусть F: X → Y — отображение, а A — непустое подмножество множества X.* ***Образом множества A*** *при отображении F называют совокупность образов всех элементов множества A и обозначают F(A). Другими словами, $F(A) = \{F(x)\ x \in A\}$. Ясно, что $F(A) \subseteq Y$. В частности, для $F(X) = \{F(x)\ x \in X\}$ имеем $F(X) \subseteq Y$.*

Определение 6.4. *Пусть F: X → Y — отображение и $A \subseteq X$. Отображение, которое каждому элементу $x \in A$, рассматриваемому как элемент из X, ставит в соответствие $F(x) \in Y$, называется сужением, или ограничением, F на A и обозначается F_A или F/A.*

Пример. *Найдем все отображения множества X = {x_1, x_2, x_3} в множество Y = {y_1, y_2}, и для каждого такого отображения найдем образ множества X.*

Отображения F: X → Y в случае, когда X — конечное множество, зададим таблицей, состоящей из двух строк. В верхней строке запишем элементы множества X, а под ними — их образы из множества Y.

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ & & \end{pmatrix}$

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

…, что $F(x_1)=y_1$, $F(x_2)=y_2$, $F(x_3)=y_3$,

Выпишем все отображения множества X в Y:

§ 7. Отношения эквивалентности и порядка

7.1 Отношение эквивалентности

Определение 7.1. *Бинарное отношение α, определенное на множестве A, называется **отношением эквивалентности** или просто **эквивалентностью** на множестве A, если α рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Примеры отношений эквивалентности:

1) *отношение подобия в множестве треугольников в евклидовой плоскости;*

2) *отношение равенства в произвольной системе множеств;*

3) *отношение равночисленности, т.е. иметь одинаковое число элементов в системе конечных множеств;*

4) *отношение равносильности в множестве формул логики высказываний;*

5) *отношение «учиться в одной группе» в множестве студентов факультета кибернетики;*

6) *отношение сравнимости по модулю n в множестве всех целых чисел. Это отношение для любого натурального n определяется так: x сравнимо с y по модулю n (обозначается: x ≡ y(mod n)), если x – y делится на n.*

*Пусть F: A → B — отображение. Отношение σ, определяемое следующим образом: «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«msub»«mi»x«/mi»«mn»1«/mn»«/msub»«mi»§#963;«/mi»«msub»«mi»x«/mi»«mn»2«/mn»«/msub»«mo»§#8660;«/mo»«mi»F«/mi»« , является отношением эквивалентности на A. Оно называется **ядерной эквивалентностью отображения F**.*

Пусть σ — отношение эквивалентности на множестве A, и пусть «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mi»a«/mi»«mo»§#8712;«/mo»«mi»A«/mi»«/mrow»«/mstyle»«/math».

Определение 7.2. *Множество всех таких элементов «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mi»x«/mi»«mo»§#8712;«/mo»«mi»A«/mi»«/mrow»«/mstyle»«/math», что xσa истинно, называют **смежным классом множества** A по эквивалентности σ, или **классом эквивалентности**, и обозначают $[a]_{\sigma}$.*

Другими словами, $[a]_{\sigma}$ = { | xσa}. Вместо $[a]_{\sigma}$ часто пишут [a], если относительно σ нет никаких неясностей.

ТЕОРЕМА 7.1. *Свойство I: . Свойство II: если aσb, то [a] = [b].*

Доказательство. *Свойство I вытекает из рефлексивности. Докажем свойство II. Пусть aσb. Требуется доказать, что [a] = [b]. Для этого достаточно проверить два включения: и . Проверим первое из этих включений. Пусть , тогда xσa. Из xσa и данного условия aσb, в силу транзитивности σ, получаем xσb, т.е. . Итак, включение проверено. Докажем обратное включение: . Пусть , тогда xσb. В силу симметричности из данного в теореме 6 условия aσb следует bσa. Тогда из условий xσb и bσa, в силу транзитивности σ, вытекает, что xσa, т.е. . Следовательно, и обратное включение тоже доказано. Итак, [a] = [b], если aσb. Теорема доказана.*

Содержательный смысл свойства II состоит в том, что любой класс определяется однозначно своим представителем, т.е. любые элементы из одного класса равноправны при определении этого класса.

Отметим, что свойство II допускает обращение, а именно: если [a] = [b], то aσb. Действительно, пусть [a] = [b]. Тогда по свойству I . Следовательно, aσb.

Таким образом, мы доказали лемму 1.

Лемма 7.1. *Условия aσb и [a] = [b] равносильны.*

Докажем еще одно нужное в дальнейшем утверждение, вытекающее из свойства II.

Лемма 7.2. *Любые два смежных класса множества A по эквивалентности σ либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. *Пусть [a] и [b] — два смежных класса, , . Тогда по свойству II [c] = [a] и [c] = [b]. Следовательно, [a] = [b], что и требовалось доказать.*

Из леммы 2 вытекает, что различные смежные классы не имеют общих элементов.

Определение 7.3. *Совокупность всех различных смежных классов множества A по эквивалентности σ называется фактор-множеством множества A по эквивалентности σ и обозначается A/σ.*

Еще раз отметим, что лемма 1 утверждает, что условие aσb на множестве A равносильно равенству [a] = [b] в фактор-множестве A/σ. Это простое утверждение часто используется в математике, ибо позволяет переходить от классов эквивалентности множества A к элементам фактор-множества A/σ.

Определение 7.4. *Каноническим отображением множества A на фактор-множестве A/σ по эквивалентности σ называется отображение, которое каждому элементу ставит в соответствие содержащий его смежный класс $[a]_{\sigma}$.*

 ие сюръективно.

Отношения эквивалентности произвольного множества тесно связаны с понятием разбиения этого множества.

Определение 7.5. *Разбиением (или расслоением) множества A называется система S непустых подмножеств множества A таких, что каждый элемент из A принадлежит одному и только одному подмножеству из системы S.*

Из определения 7.5 вытекает, что любые два подмножества из S не имеют общих элементов (не пересекаются). Поэтому система S непустых подмножеств множества A является разбиением множества A, если любые два различных множества из S не пересекаются и любой элемент из A попадает в одно (а тогда и только в одно) подмножество из семейства S.

Подмножества из S называются смежными классами (или слоями) разбиения S.

Рассмотрим связи между отношениями эквивалентности некоторого множества и его разбиениями.

ТЕОРЕМА 7.2. *Если σ — отношение эквивалентности на множестве A, то совокупность всех различных смежных классов множества A по эквивалентности σ является разбиением множества A.*

Доказательство. *Из свойства I классов эквивалентности вытекает, что каждый элемент содержится в смежном классе [a] и, кроме того, что каждый смежный класс [a] не пуст. Далее, по лемме 2, различные смежные классы по эквивалентности σ не имеют общих элементов (не пересекаются). Теорема доказана.*

ТЕОРЕМА 7.3. *Пусть S — разбиение множества A, а σ — бинарное отношение на множестве A такое, что, по определению, xσy ( ) истинно тогда и только тогда, когда в S есть подмножество M, для которого , . Тогда σ — отношение эквивалентности на множестве A. Эта эквивалентность σ называется эквивалентностью, отвечающей разбиению S.*

Доказательство. *Для доказательства теоремы надо проверить, что отношение σ, определенное на множестве A, рефлексивно, симметрично и транзитивно. Ясно, что σ симметрично. Далее, σ рефлексивно, ибо каждый элемент попадает в некоторый класс разбиения, а тогда xσx для любого . Осталось проверить, что σ транзитивно. Пусть xσy и yσz. Это означает, что x и y попадают в один класс разбиения, скажем M_1, а y и z тоже попадают в один класс разбиения, скажем M_2. Так как элемент y принадлежит M_1 и M_2, то, по определению разбиения, $M_1 = M_2$. Следовательно, x и z лежат в одном классе разбиения и, значит, xσz. Теорема доказана.*

ТЕОРЕМА 7.4. *Для любого множества A существует взаимно однозначное соответствие между множеством разбиений множества A и множеством отношений эквивалентности на A.*

7.2 Отношение порядка

Определение 7.6. *Бинарное отношение ρ, определенное на множестве A, называется частичным порядком, или отношением частичного порядка, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1) xρx для любого (рефлексивность);

2) из xρy и yρz следует xρz для любых (транзитивность);

3) из xρy и yρx следует x = y для любых (антисимметричность).

Множество A, на котором задан какой-нибудь частичный порядок, называется частично упорядоченным.

Примерами отношения частичного порядка являются: отношение включения на множестве подмножеств некоторого множества; отношение ≤ на множестве действительных чисел; отношение «x делит y» на множестве натуральных чисел.

Частичный порядок на множестве A будем обозначать символом ≤, и если a ≤ b для некоторых элементов , то будем говорить, что a меньше или равно b, а также, что a содержится в b или равно b. Если a ≤ b и a ≠ b, то будем писать a < b и говорить, что a строго меньше b или a строго содержится в b.

Определение 7.7. *Элементы a, b множества A называются сравнимыми относительно частичного порядка ≤ на этом множестве, если a ≤ b или b ≤ a.*

Определение 7.8. *Пусть A — частично упорядоченное множество с частичным порядком ≤. Элемент называется наибольшим элементом, если x ≤ a для любого . Элемент называется наименьшим элементом, если b ≤ x для любого . Наибольший элемент часто называют единицей, а наименьший — нулем.*

Частично упорядоченное множество может обладать или не обладать наименьшим или наибольшим элементом. Приведем соответствующие примеры. Множество действительных чисел с обычным отношением ≤ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Множество неотрицательных действительных чисел имеет наименьший элемент (число 0), но не имеет наибольшего элемента. Множество неотрицательных целых чисел с отношением делимости в качестве отношения частичного порядка (т.е. m ≤ n тогда и только тогда, когда m делит n) имеет наименьший элемент (число 1) и наибольший элемент (число 0).

Однако если частично упорядоченное множество обладает наибольшим (наименьшим) элементом, то он единственный.

Лемма 7.3. *В любом частично упорядоченном множестве имеется не более одного наибольшего (наименьшего) элемента.*

Доказательство. *Пусть a_1, a_2 — два наибольших элемента частично упорядоченного множества A. Так как a_1 — наибольший элемент множества A, то $a_2 \le a_1$. Так как a_2 — наибольший элемент множества A, то $a_1 \le a_2$. В силу антисимметричности отношения ≤ из условий $a_1 \le a_2$ и $a_2 \le a_1$ следует $a_1 = a_2$. Утверждение о единственности наименьшего элемента доказывается аналогично.*

Определение 7.9. *Максимальным элементом частично упорядоченного множества A называется такой элемент , что каждый элемент x из A* Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js *ими словами, если A не содержит элементов, строго больших a. Минимальным элементом частично упорядоченного множества A называется такой элемент , что каждый элемент x из A либо не сравним с b, либо b ≤ x, т.е. если A не содержит* *элементов, строго меньших b.*

В отличие от наибольшего (наименьшего) элемента частично упорядоченное множество может содержать несколько максимальных (минимальных) элементов. Так, например, в множестве целых положительных чисел, отличных от 1, с отношением делимости в качестве отношения частичного порядка (т.е.
$m \le n$ тогда и только тогда, когда m делит n) минимальными элементами являются простые числа.

Лемма 7.4. *Всякий [наибольший элемент]() частично упорядоченного множества является максимальным, а всякий наименьший — минимальным.*

Обратное, вообще говоря, не имеет места. Действительно, предыдущий пример показывает, что в множестве целых положительных чисел, отличных от 1, с отношением делимости минимальными элементами являются простые числа, а наименьшего элемента нет.

Определение 7.10. *Пусть a, b — элементы частично упорядоченного множества A. Элемент a называется непосредственно меньшим (непосредственно предшествующим) для элемента b, а b — непосредственно большим (непосредственно следующим) за a, если $a < b$ и не существует элемента , который удовлетворял бы отношению $a < x < b$.*

Другими словами, непосредственно следующий за a элемент — это минимальный элемент множества $\{x| \ a < x\}$, а непосредственно предшествующий для a элемент — это максимальный элемент множества $\{x| \ x < a\}$.

Ясно, что элемент частично упорядоченного множества может вообще не иметь непосредственно следующего (непосредственно предшествующего), а может иметь их несколько.

Строение конечных частично упорядоченных множеств задается иногда при помощи диаграмм. С этой целью [элементы множества]() изображаются точками, расположенными на разных горизонталях, причем большие элементы располагаются выше меньших. Линиями соединяют только непосредственно большие элементы с непосредственно меньшими. Тогда можно без труда определить, какой из любых двух элементов больше: элемент b оказывается большим a тогда и только тогда, когда на диаграмме от b можно перейти к a по опускающимся вниз линиям. Действительно, если $a < b$, то b может быть непосредственно большим a. В противном случае найдется элемент x_1 такой, что $a < x_1 < b$. Через конечное число шагов придем к отношению $a < x_1 < \ldots < x_n = b$, причем каждый из элементов $a, x_1, \ldots, x_n, b$ непосредственно следует за предыдущим. Таким образом, если непосредственно большие элементы соединять линиями с непосредственно меньшими элементами и если $a < b$, то от b к a можно перейти по опускающимся вниз линиям. Обратное тоже верно в силу транзитивности отношения $<$.

Совокупность подмножеств трехэлементного множества, частично упорядоченная посредством отношения включения , представлена на рис.14. Точка, расположенная на самом низком уровне, изображает пустое множество; точки, расположенные на следующем (втором снизу) уровне, — одноэлементные подмножества и т.д.

Определение 7.11. *Частичный порядок на множестве A называется линейным порядком, если любые два элемента из A сравнимы относительно $\le$. Множество A, на котором задан какой-либо [линейный порядок](), называется линейно упорядоченным множеством, или [цепь]()ю. Примером линейно упорядоченного множества может служить множество всех действительных чисел с обычным отношением $\le$.*

Отметим, что в случае линейно упорядоченного множества его максимальный (минимальный) элемент является также наибольшим (наименьшим).

Пусть A — частично упорядоченное множество с отношением $\le$, а B — его подмножество. Тогда ограничение отношения $\le$ на подмножество B, т.е. отношение xpy $x \le y$ ( ), является частичным порядком на B. Обычно его обозначают тем же символом, что и заданный частичный порядок на A. Таким образом, любое подмножество B частично упорядоченного множества A относительно отношения $\le$ есть частично упорядоченное. Более того, если A — линейно упорядоченное множество, то и B линейно упорядочено.

ТЕОРЕМА 7.5. *Следующие свойства частично упорядоченного множества A равносильны:*

1) (условие минимальности). Всякое непустое подмножество множества A является частично упорядоченным множеством, содержащим минимальные элементы;

2) (условие индуктивности). Если все минимальные [элементы множества]() A обладают некоторым свойством P и из того, что все элементы x из A, удовлетворяющие условию $x < a$, обладают свойством P, вытекает, что элемент a также обладает свойством P, то свойством P обладают все [элементы множества]() A;

3) (условие обрыва убывающих цепей). Для всякой цепочки $a_1 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$ элементов из A найдется такой номер n, что $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.

Доказательство. *Проверим 1) 2).*

Пусть выполнены посылки условия индуктивности. Обозначим через M множество всех тех элементов x из A, которые не обладают свойством P. Пусть, вопреки доказываемому, $M \ne$. Тогда ввиду 1) в M имеется минимальный элемент a. По условию этот элемент не может быть минимальным элементом частично упорядоченного множества A. Пусть $x < a$, тогда и, следовательно, обладает свойством P. Но тогда a обладает свойством P по условию. Противоречие.

Проверим 2) 3). Условимся считать, что элемент обладает свойством P, если всякая убывающая цепочка, начинающаяся с элемента a, обрывается, т.е. удовлетворяет условию 3). Всякий минимальный элемент обладает свойством P, так как для соответствующей цепочки имеем $m = a_1 = a_2 = \ldots$. Если таков, что все $x < a$ обладают свойством P, то рассмотрим цепочку $a = a_1 \ge a_2 \ge \ldots$. Если знаки равенства стоят не всюду, то пусть i — такой номер, что $a_1 = \ldots = a_{i-1}$ и $a_{i-1} > a_i$. Но тогда элемент a_i обладает свойством P, т.е. цепочка $a_i \ge a_{i+1} \ge \ldots$, а потому и цепочка $a_1 \ge \ldots \ge a_i \ge a_{i+1} \ge \ldots$ обрываются. Таким образом, элемент a обладает свойством P. В силу условия индуктивности 2) все [элементы множества]() A обладают свойством P. Это и означает, что A удовлетворяет условию 3).

Проверим 3) 1). Пусть, вопреки доказываемому, подмножество M множества A является частично упорядоченным множеством без минимальных элементов. Пусть a_1 — произвольный элемент множества M и пусть уже построена цепочка $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ элементов из M. Так как a_n не минимален в M, то в M существует элемент $a_{n+1} < a_n$. Таким образом, получаем бесконечную цепочку $a_1 > \ldots > a_n > \ldots$, не удовлетворяющую условию 3). Противоречие.

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

Определение 7.12. *Линейно упорядоченное множество, удовлетворяющее условию минимальности (а следовательно, и остальным условиям теоремы), называется вполне упорядоченным множеством.*

Примерами вполне упорядоченных множеств являются конечное линейно упорядоченное множество и множество натуральных чисел, упорядоченное естественным образом. Множество всех целых чисел относительно естественного порядка не будет вполне упорядоченным, так как оно не имеет наименьшего элемента. Однако оно станет вполне упорядоченным, если установить порядок следующим образом: $1 < 2 < 3 < \dots < 0 < -1 < -2 < -3 < \dots$. Другим примером не вполне упорядоченной цепи служит отрезок $[0, 1]$, ибо, например, интервал $]1/2, 1[$ не содержит минимального элемента.

Очевидно, что каждое подмножество вполне упорядоченного множества вполне упорядочено.

Отметим, что элементы вполне упорядоченного множества носят название трансфинитных чисел, или трансфинитов, и что метод трансфинитной индукции, широко используемый в математике, основан на условии индуктивности 2) теоремы 12.

Из определения вполне упорядоченного множества вытекает, что оно всегда содержит наименьший элемент 0. Далее, во вполне упорядоченном множестве A для всякого элемента α, который не является наибольшим в A, имеется единственный непосредственно следующий за α элемент (т.е. наименьший элемент множества $\{x | \alpha < x\}$). Естественно обозначить непосредственно следующий за 0 элемент через 1, непосредственно следующий за 1 элемент через 2 и т.д.

Определение 7.13. *Элемент a вполне упорядоченного множества A, не имеющий непосредственно предшествующего, называется предельным.*

Наименьший элемент 0 любого вполне упорядоченного множества может служить примером предельного элемента. Другим, менее тривиальным примером может служить 0 в рассмотренном выше вполне упорядоченном множестве целых чисел.

Условимся еще о следующих обозначениях. Если α — элемент вполне упорядоченного множества A, то через $\alpha + 1$ будем обозначать непосредственно следующий за α элемент (который, как отмечалось выше, существует, если только α не является наибольшим элементом в A). Далее, множество $\{x | x < \alpha\}$ будем обозначать $[0, \alpha[$ и называть начальным отрезком. При этом символ $[0, 0[$ будет означать пустое множество.

ТЕОРЕМА 7.6. *Если α — [предельный элемент](#) вполне упорядоченного множества, то .*

Доказательство. *Проверим сначала, что . Пусть . Так как между γ и $\gamma + 1$ нет элементов, то $\gamma + 1 \le \alpha$. Однако равенство, в силу предельности α, невозможно, поэтому $\gamma + 1 \le \alpha$. Таким образом, и требуемое включение проверено.*

Обратное включение очевидно. Теорема доказана.

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

§ 8. Понятие мощности множества

8.1. Конечные и бесконечные множества.

Рассматривая различные множества, мы замечаем, что иногда можно, если не фактически, то хотя бы примерно, указать число элементов в данном множестве. Таковы, например, множество всех вершин некоторого многогранника, множество всех простых чисел, не превосходящих данного числа, множество всех молекул воды на Земле и т. д. Каждое из этих множеств содержит конечное, хотя, быть может, и неизвестное нам число элементов. С другой стороны, существуют множества, состоящие из бесконечного числа элементов. Таково, например, множество всех натуральных чисел, множество всех точек на прямой, всех кругов на плоскости, всех многочленов с рациональными коэффициентами и т. д. При этом, говоря, что множество бесконечно, мы имеем в виду, что из него можно извлечь один элемент, два элемента и т. д., причем после каждого такого шага в этом множестве еще останутся элементы.Два конечных множества мы можем сравнивать по числу элементов и судить, одинаково это число или же в одном из множеств элементов больше, чем в другом. Спрашивается, можно ли подобным же образом сравнивать бесконечные множества? Иначе говоря, имеет ли смысл, например, вопрос о том, чего больше: кругов на плоскости или рациональных точек на прямой, функций, определенных на отрезке [0, 1], или прямых в пространстве, и т. д.?

Посмотрим, как мы сравниваем между собой два конечных множества. Можно, например, сосчитать число элементов в каждом из них и, таким образом, эти два множества сравнить. Но можно поступить и иначе, именно, попытаться установить биекцию, т. е. взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств, иначе говоря, такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества отвечает один и только один элемент другого, и наоборот. Ясно, что взаимно однозначное соответствие между двумя конечными множествами можно установить тогда и только тогда, когда число элементов в них одинаково. Например, чтобы проверить, одинаково ли число студентов в группе и стульев в аудитории, можно, не пересчитывая ни тех, ни других, посадить каждого студента на определенный стул. Если мест хватит всем и не останется ни одного лишнего стула, т. е. если будет установлена биекция между этими двумя множествами, то это и будет означать, что число элементов в них одинаково.

Заметим теперь, что если первый способ (подсчет числа элементов) годится лишь для сравнения конечных множеств, второй (установление взаимно однозначного соответствия) пригоден и для бесконечных.

8.2. Счетные множества.

*Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел. Назовем **счетным множеством** всякое множество, элементы которого можно биективно сопоставить со всеми натуральными числами. Иначе говоря, счетное множество — это такое множество, элементы которого можно занумеровать в бесконечную последовательность:*

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Примеры.

***1. Множество всех целых чисел.** Установим соответствие между всеми целыми и всеми натуральными числами по следующей схеме:*

0 - 1 1 –2 2...,

1 2 3 4 5 ....

вообще, неотрицательному числу $n \geq 0$ сопоставим нечетное число $2n+1$, а отрицательному $n < 0$—четное число $2|n|$:

$n \leftrightarrow 2n + 1$ *при* $n \geq 0$,

$n \leftrightarrow 2|n|$ *при* $n < 0$.

***2. Множество всех четных положительных чисел.** Соответствие очевидно: $n \leftrightarrow 2n$.*

***3. Множество 2, 4, 8, . .., 2^n, ... степеней числа 2.** Здесь соответствие также очевидно. Каждому числу 2^n сопоставляется число n.*

*4. Рассмотрим более сложный пример, а именно, покажем, что **множество всех рациональных чисел** счетно. Каждое рациональное число однозначно записывается в виде несократимой дроби $\alpha=p/q$, $q > 0$. Назовем сумму $|p|+q$ высотой рационального числа α. Ясно, что число дробей с данной высотой n конечно. Например, высоту 1 имеет только число 0/1, высоту 2— числа 1/1 и —1/1, высоту 3—числа 2/1, 1/2, —2/1 и —1/2 и т. д. Будем нумеровать все рациональные числа по возрастанию высоты, т. е. сперва выпишем числа высоты 1, потом—числа высоты 2 и т. д. При этом всякое рациональное число получит некоторый номер, т. е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми натуральными и всеми рациональными числами.*

*[Бесконечное множество](), не являющееся счетным, называется **несчетным множеством.***

Установим некоторые общие свойства счетных множеств.

1. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

***Доказательство.** Пусть А—счетное множество, а В— его подмножество. Занумеруем [элементы множества]() А: $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$*

Пусть $a_{n1}, a_{n2}, \dots$ — те из них, которые входят в В. Если среди чисел $n_1, n_2, \dots$ есть наибольшее, то В конечно, в.. противном случае В счетно, поскольку его члены $a_1, a_2, \dots$ занумерованы числами 1,2,...

2. Сумма любого конечного или счетного множества счетных-множеств есть снова счетное множество.

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

Доказательство. *Пусть A_1, A_2, ... — счетные множества. Мы можем считать, что они попарно не пересекаются, так как иначе мы рассмотрели бы вместо них множества A_1, $A_2 \backslash A_1$,. Аз$\backslash$(A_1 U A_2), ...—каждое из которых не более чем счетно,— имеющие ту же самую сумму, что и множества a_1, A_2, ... Все-элементы множеств* ***A_1,*** *A_2, ... можно записать в виде следующей бесконечной таблицы:*

a_{11} a_{12} a_{13} a_{14}...

a_{21} a_{22} a_{23} a_{24}....

a_{31} a_{32} a_{33} a_{34}...

a_{41} a_{42} $a_{43}$$a$ $_{44}$...

....

где в первой строке стоят элементы множества A_1, во второй— элементы множества A_2 и т. д. Занумеруем теперь все эти элементы <по диагоналям>, т. е. за первый элемент примем a_{11}, за второй a_{12}, за третий a_{21} и т. д., двигаясь в порядке, указанном стрелками на следующей таблице:

Ясно, что при этом каждый элемент каждого из множеств получит определенный номер, т. е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми элементами всех множеств A_1 A_2, ... и всеми натуральными числами. Наше утверждение доказано.

3. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Доказательство. *Пусть М—бесконечное множество. Выберем в нем произвольный элемент a_1. Поскольку М бесконечно, в нем найдется элемент a_2, отличный от a_1, затем найдется элемент а.з, отличный от a_1и от a_2 и т. д. Продолжая этот процесс (который не может оборваться из-за <нехватки> элементов, ибо М бесконечно), мы получаем счетное подмножество*

А={a_1, a_2, ..., a_n...}

множества М. Предложение доказано.

Это предложение показывает, что среди бесконечных множеств счетные являются <самыми маленькими>. Ниже мы выясним, существуют ли несчетные бесконечные множества.

8.3. Эквивалентность множеств.

Сравнивая те или иные бесконечные множества с натуральным рядом, мы пришли к понятию счетного множества. Ясно, что множества можно сравнивать не только с множеством натуральных чисел; установление взаимнооднозначного соответствия (биекции) позволяет сравнивать между собой любые два множества. Введем следующее определение.

Определение 8.1. *Два множества, М и N, называются эквивалентными (обозначение М ~ N), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.*

Понятие эквивалентности применимо к любым множествам, как конечным, так и бесконечным. Два конечных множества эквивалентны между собой тогда (и только тогда), когда число элементов у них одинаково. Определение счетного множества можно теперь сформулировать следующим образом: множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел. Ясно, что два множества, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой; в частности, любые два счетных множества эквивалентны между собой.

Примеры. *1.Множества точек на любых двух отрезках [a, b] и [c, d] эквивалентны между собой. Из рис. 5 ясно, как установить между ними биекцию. Именно, точки p и q соответствуют друг другу, если они являются проекциями одной и той же точки r вспомогательного отрезка ef.*

2. Множество всех точек на расширенной комплексной плоскости эквивалентно множеству всех точек на сфере. Биекцию а —^ z можно установить, например, с помощью стереографической проекции (рис. 6).

3. Множество всех чисел в интервале (0, 1) эквивалентно множеству всех точек на прямой. Соответствие можно установить, например, с помощью функции

Y=1/πarctgx+1/2.

Рассматривая примеры, приведенные здесь и в п. 2, можно заметить, что иногда бесконечное множество оказывается эквивалентным своей истинной части. Например, натуральных чисел оказывается <столько же>, сколько и всех целых или даже всех рациональных; на интервале (0, 1) <столько же> точек, сколько и на всей прямой, и т. д. Это явление характерно для бесконечных множеств. Действительно, в п. 2 (свойство 3) мы показали, что из всякого бесконечного множества М можно выбрать счетное подмножество; пусть А== {a_1, a_2, ..., a_n ...} такое подмножество.

Разобьем его на два счетных подмножества

A_1={a_1,a_3,a_5,....} и A_2={a_2,a_4,a_6....}

и установим между A и A_1 взаимно однозначное соответствие. Это соответствие можно затем продолжить до взаимно однозначного соответствия между множествами AU(M\A)=M и a_1 U (M\ A) =M \ A_2, отнеся каждому элементу из M \ A сам этот элемент. Между тем множество M\A не совпадает с M, т. е. является собственным подмножеством для M. Мы получаем, таким образом, следующее предложение:

Всякое бесконечное множество эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

Это свойство можно принять за определение бесконечного множества.

8.4. Несчетность множества действительных чисел.

В п. 2 мы привели примеры счетных множеств. Число этих примеров можно было бы увеличить. Кроме того, как мы показали, сумма конечного или счетного числа счетных множеств снова есть счетное множество.

Естественно возникает вопрос: а существуют ли вообще несчетные множества? Положительный ответ на него дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8.1. Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.

Доказательство. *Предположим, что дано какое-то счетное множество (всех или только некоторых) действительных чисел a, лежащих на отрезке [0, 1]:*

$$\left.\begin{array}{lllll}\alpha_1=0 & a_{11}a_{12}a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots\\ \alpha_2=0 & a_{21}a_{22}a_{23} & \dots & a_{2n} & \dots\\ \alpha_3=0 & a_{31}a_{32}a_{33} & \dots & a_{3n} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_n=0 & a_{n1}a_{n2}a_{n3} & \dots & a_{nn} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{array}\right\}(1)$$

Здесь a_{ik}— k-я десятичная цифра числа a_i. Построим дробь β =0, b_1b_2 ... b_n ... диагональной процедурой Кантора, а именно: за b_1 примем произвольную цифру, не совпадающую с a_{11}, за b_2- произвольную- ифру, не совпадающую с a_{22}, и т. д.; вообще, за b_n примем произвольную цифру, не совпадающую с a_{nn}. Эта десятичная дробь не может совпасть ни с одной дробью, содержащейся в перечне (1). Действительно, от α_1 дробь β отличается по крайней мере первой цифрой, от α_2 - второй цифрой и т. д.; вообще, так как $b_n \neq -a_{nn}$ для всех n, то дробь β отлична от любой из дробей α_i, входящих в перечень (1). Таким образом, никакое счетное множество действительных чисел, лежащих на отрезке [0.1] , не исчерпывает этого отрезка.

Приведенное доказательство содержит небольшой <обман>. Дело в том, что некоторые числа (а именно, числа вида $p/10^g$} могут быть записаны в виде десятичной дроби двумя способами:

с бесконечным числом нулей или с бесконечным числом девяток;. например,

1/2=5/10=0.5000...=0.4999...

Таким образом, несовпадение двух десятичных дробей еще не гарантирует различия изображаемых ими чисел.

Однако если дробь β строить осторожнее, так, чтобы она не содержала ни нулей, ни девяток, полагая, например, b_n = 2,. если a_{nn} = 1, и $b_n \neq 2$, то доказательство становится вполне корректным.

Итак, отрезок [0,1] дает пример несчетного множества. Приведем некоторые примеры множеств, эквивалентных отрезку [0,1]

1. Множество всех точек любого отрезка [a, b] или интервала (a,b).

2. Множество всех точек на прямой.

3. Множество всех точек плоскости, пространства, поверхности сферы, точек, лежащих внутри сферы, и т. д.

4. Множество всех прямых на плоскости.

5. Множество всех непрерывных функций одного или нескольких переменных.

В случаях 1 и 2 доказательство не представляет труда (см. примеры 1 и 3 п. 3). В остальных случаях непосредственное доказательство довольно сложно.

8.5. Теорема Кантора—Бернштейна.

Следующая теорема является одной из основных в теории множеств.

ТЕОРЕМА 8.4. *Пусть **A** и **B** — два произвольных множества. Если существуют взаимно однозначное отображение **f** множества **A** на подмножество $\mathbf{B_1}$ множества **B** и взаимно однозначное отображение **g** множества **B** на подмножество $\mathbf{A_1}$ множества **A**, то **A** и **B** эквивалентны.*

Доказательство. *Не ограничивая общности, можно считать, что **A** и **B** не пересекаются. Пусть x — произвольный элемент из **A**. Положим x = x_0 и определим последовательность элементов $\{x_n\}$ следующим образом. Пусть элемент x_n уже определен. Тогда, если n четно, то за x_{n+1} примем элемент из **B**, удовлетворяющий условию $g(x_{n+1}) = x_n$ (если такой элемент существует), а если n нечетно, то x_{n+1} - элемент из **A**, удовлетворяющий условию $f(x_{n+1}) = x_n$ (если он существует). Возможны два случая.*

1°. При некотором n элемента x_{n+1}, удовлетворяющего указанным условиям, не существует. Число n называется порядком элемента x.

2°. Последовательность $\{x_n\}$ бесконечна. Тогда x называется элементом бесконечного порядка.

*Разобьем теперь **A** на три множества: A_E, состоящее из элементов четного порядка, A_0—множество элементов нечетного порядка и A_I — множество всех элементов бесконечного порядка. Разбив аналогичным образом множество **B**, заметим, что **f** отображает A_E на B_0 и A_I на B_I, а g^{-1} отображает A_0 на B_E. Итак, взаимно однозначное отображение φ, совпадающее с **f** на A_E A_I и с g^{-1} на A_0, есть взаимно однозначное отображение всего **A** на все **B**.*

8.6. Понятие мощности множества.

*Если эквивалентны два конечных множества, то они состоят из одного и того же числа элементов. Если же эквивалентные между собой множества **M** и **N** произвольны, то говорят, что **M** и **N** имеют одинаковую мощность. Таким образом, мощность—это то общее, что есть у любых двух эквивалентных между собой множеств. Для конечных множеств понятие мощности совпадает с привычным понятием числа элементов множества. Мощность множества натуральных чисел (т. е. любого счетного множества) обозначается символом ℵ (читается: <алеф нуль>). Про множества, эквивалентные множеству всех действительных чисел отрезка [0, 1], говорят, что они имеют мощность континуума. Эта мощность обозначается символом с (или символом ℵ).*

Весьма глубокий вопрос о существовании мощностей, промежуточных между ℵ и с, будет затронут ниже в § 4. Как правило, бесконечные множества, встречающиеся в анализе, или счетны, или имеют мощность континуума.

Для мощностей конечных множеств, т. е. для натуральных чисел кроме понятия равенства имеются также понятия <больше> и <меньше>. Попытаемся распространить эти последние на бесконечные мощности.

*Пусть **A** и **B**—два произвольных множества, а m(A) и m(B)—их мощности. Тогда логически возможны следующие случаи:*

*1. А эквивалентно некоторой части множества **B**, а **B** эквивалентно некоторой части множества A.*

2. А содержит некоторую часть, эквивалентную B, но в B нет части, эквивалентной A.

3. B содержит некоторую часть, эквивалентную A, но в A нет части, эквивалентной B.

4. Ни в одном из этих двух множеств нет части, эквивалентной другому.

В первом случае множества A и B в силу теоремы Кантора — Бернштейна эквивалентны между собой, т. е. m(A)=m(B). Во втором случае естественно считать, что m(A)>m(B), а в третьем, что m(A)<m(B). Наконец, в четвертом случае нам пришлось бы считать, что мощности множеств A и B несравнимы между собой. Но на самом деле этот случай невозможен! Это следует из теоремы Цермело, о которой речь будет идти в § 4.

*Итак, любые два множества **A** и **B** либо эквивалентны между собой (и тогда m(A)=m(B), либо удовлетворяют одному из двух соотношений: m(A) < m(B) или m(A) > m(B).*

Мы отметили выше, что счетные множества—это <самые маленькие> из бесконечных множеств, а затем показали, что существуют и бесконечные множества, бесконечность которых имеет более <высокий порядок>,—это множества мощности континуума. А существуют ли бесконечные мощности, превосходящие мощность континуума? Вообще, существует ли какая-то <наивысшая> мощность или нет? Оказывается, верна следующая теорема.

***ТЕОРЕМА 8.5.** Пусть **M** — некоторое множество и пусть ₤ — множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества M. Тогда ₤ имеет мощность большую, чем мощность исходного множества M.*

***Доказательство.** Легко видеть, что мощность m множества ₤ не может быть меньше мощности m исходного множества M; действительно, <одноэлементные> подмножества из M образуют в ₤ часть, эквивалентную множеству M. Остается доказать, что мощности ₤ и m не совпадают. Пусть между элементами a,b,...множества M и какими-то элементами A, B, ... множества ₤ (т. е. какими-то подмножествами из M) установлено взаимно однозначное соответствие*

a ↔A, b ↔B, . . .

Покажем, что оно наверняка не исчерпывает всего ₤. Именно, сконструируем такое множество X M, которому не соответствует никакой элемент из M. Пусть X—совокупность элементов из M, не входящих в те подмножества, которые им соответствуют. Подробнее: если a↔A и aA, то элемент a мы не включаем в X, а если a ↔ A и a A, то мы включаем элемент a в X. Ясно, что X есть подмножество множества M, т. е. некоторый элемент из ₤. Покажем, что подмножеству X не может соответствовать никакой элемент из M. Допустим, что такой элемент x ↔ X существует; посмотрим, будет ли он содержаться в X или нет? Пусть xX; но ведь по определению в X входит всякий элемент, не содержащийся в подмножестве, которое ему соответствует, следовательно, элемент x должен быть включен в X. Обратно, предположив, что x содержится в X, мы получим, что x не может содержаться в X, так как в X включены только те элементы, которые не входят в соответствующие им подмножества. Итак, элемент x, отвечающий подмножеству X, должен одновременно и содержаться и не содержаться в X. Отсюда следует, что такого элемента вообще не существует, т. е. что взаимно однозначного соответствия между элементами множества M и всеми его подмножествами установить нельзя. Теорема доказана.

Итак, для любой мощности мы действительно можем построить множество большей мощности, затем еще большей и т. д., получая, таким образом, не ограниченную сверху шкалу мощностей.

***Замечание.** Мощность множества ₤ обозначают символом 2_m, где m — мощность M. (Читатель легко поймет смысл этого обозначения, рассмотрев случай конечного M.) Таким образом, предыдущую теорему можно выразить неравенством m << 2"[1]. В частности, при m = % получаем неравенство %<$2_{\%}$. Покажем, что $2_{\%}$ = %, т. е. покажем, что мощность множества всех подмножеств натурального ряда равна мощности континуума.*

Разобьем подмножества натурального ряда на два класса, Ћ и ®,—на те (классЋ), у которых дополнение бесконечно, и на те (класс ®), у которых оно конечно. К классу ® относится, в частности, сам натуральный ряд, ибо его дополнение пусто. Число подмножеств в классе ® счетно (доказать). Класс ® не влияет на мощность множества ₤. = Ћ U ®.

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

Между подмножествами класса Ћ и действительными числами ос из полусегмента [О, 1) можно установить взаимно однозначное соответствие. Именно, сопоставим подмножеству АЋ число α, 0≤α<1, с двоичным разложением

$$\alpha = e_1/2 + e_2/2^2 + \ldots + e_n/2^n + \ldots$$

где e_n = 1 или 0 в зависимости от того, принадлежит ли n множества А или нет. Проверку деталей предоставляем читателю.

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js