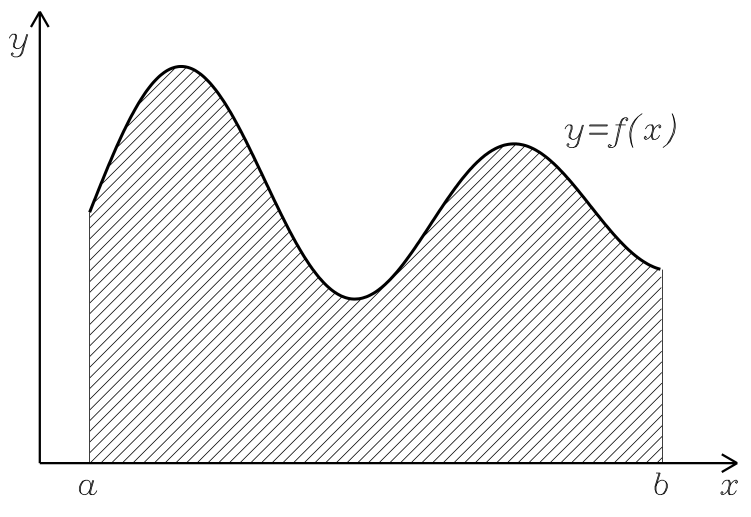
Министерство образования Российской Федерации
Иркутский Государственный Технический Университет

Практические занятия по высшей математике

I курс



$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Издательство
Иркутского Государственного Технического Университета
2007

Практические занятия по математике для студентов I курса.
Коллектив кафедры математики ИрГТУ под редакцией В.Г. Власова.

Оглавление

Введение

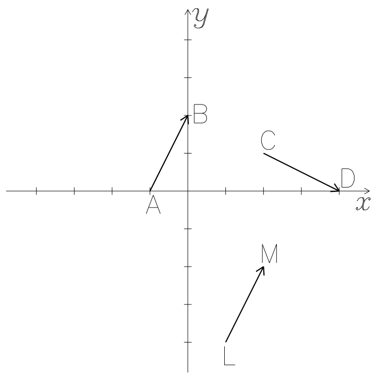
Настоящее учебное пособие представляет собой конспект практических занятий по математике для студентов первого курса технических и экономических специальностей. Каждое занятие посвящено определённой теме, по которой даны примеры с решениями, а также примеры для самостоятельного решения с ответами. Необходимо отметить, что имеющийся в пособии теоретический материал имеет целью лишь напомнить некоторые сведения по теме занятия. Приступать к решению примеров следует только после изучения лекционного материала. Для удобства читателя после списка литературы указываются главы и параграфы или страницы, которые рекомендуется изучить, прежде чем приступать к решению примеров по соответствующему разделу математики.

Семестр I

Занятие 1. Декартова система координат и векторы.

Пример 1.1. Построить и сравнить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{LM}$, если $A = (-1; 0)$, $B = (0; 2)$, $C = (2; 1)$, $D = (4; 0)$, $L = (1; -4)$, $M = (2; -2)$.

► В декартовой системе координат отложим точки и, соединив соответствующие пары, построим векторы.



Очевидно, что все векторы одной длины.

Кроме того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{LM}$, так как они совмещаются параллельным переносом.

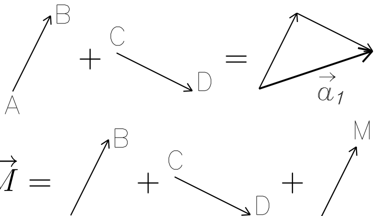
$\overrightarrow{AB} = (1; 2)$, $\overrightarrow{CD} = (2; -1)$, $\overrightarrow{LM} = (1; 2)$.

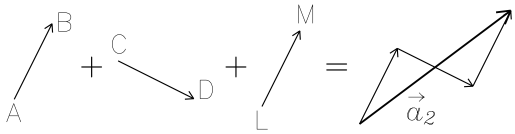
Координаты вектора получаются вычитанием из координат конечной точки координат начальной точки.

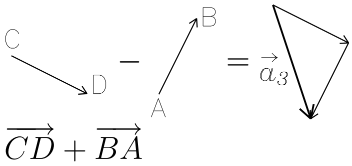
Очевидно, что $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{LM}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Длина вектора $|\overrightarrow{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. ◄

Пример 1.2. Построить векторы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$, где исходные векторы заданы в примере 1.1. Найти координаты результирующих векторов и их длины.

► $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} =$  $= \overrightarrow{a_1}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{LM} =$  $= \overrightarrow{a_2}$.

$\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} =$  $= \overrightarrow{a_3}$.

$\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{a_1}.$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{LM}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\overrightarrow{a_2}.$

$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\overrightarrow{a_3}.$

$|\overrightarrow{a_1}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}.$

$|\overrightarrow{a_2}|=\sqrt{4^2+3^2}=5.$

$|\overrightarrow{a_3}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}.$ ◀

Пример 1.3. Найти единичные векторы, сонаправленные с $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, где исходные векторы заданы в примере 1.2.

▶ $\overrightarrow{e_a}\upuparrows\overrightarrow{a}$, $|\overrightarrow{e_a}|=1$, $\overrightarrow{e_a}=?$

Чтобы получить вектор единичной длины (орт), нужно поделить вектор на его длину.

$\overrightarrow{e_a}=\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}\qquad\Longrightarrow\qquad|\overrightarrow{e_a}|=\left|\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}\right|=1$, тогда

$\overrightarrow{e_{a_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{e_{a_2}}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix};\ \overrightarrow{e_{a_3}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}.$ ◀

Пример 1.4. Дано: $|\overrightarrow{a}|=13$, $|\overrightarrow{b}|=19$, $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=24$. Найти $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$.

▶ $\left.\begin{aligned}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})^2=a^2+b^2+2\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\\(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})^2=a^2+b^2-2\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\end{aligned}\right\}\qquad\Longrightarrow$

$(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})^2=2a^2+2b^2-(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})^2=2\cdot169+2\cdot361-576=2\cdot530-576=484.$

Значит, $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=22.$ ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 1.5. Построить и сравнить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{LM}$, если $A=(-2;1)$, $B=(0;2)$, $C=(2;1)$, $D=(-4;-2)$, $L=(1;-4)$, $M=(2;-2)$.

Пример 1.6. Найти векторы $\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{a_3}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}$, где исходные векторы заданы в примере 1.5. Найти координаты результирующих векторов и их длины.

Пример 1.7. Найти единичные векторы, сонаправленные с $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, где исходные векторы заданы в примере 1.6.

Пример 1.8. Дано: $|\overrightarrow{a}|=1$, $|\overrightarrow{b}|=23$, $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=30$. Найти $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$.

Ответ: $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=4\sqrt{10}.$

Занятие 2. Вычисление определителей путем понижения их порядка.

Пример 2.1. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$.

► $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 = 2$. ◄

Пример 2.2. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix}$.

► $\Delta = \operatorname{tg}^2\varphi + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$. ◄

Пример 2.3. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 15 & 17 \\ 0 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

► *Определитель с нулевым треугольником, примыкающим к диагонали, равен произведению диагональных элементов.*

$\Delta = 2 \cdot (-1) \cdot 3 = -6$. ◄

Пример 2.4. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 14 & 5 \\ -20 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

► $\Delta = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$. ◄

Пример 2.5. Используя формулу

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}, \tag{1}$$

где миноры M_{ik}, являющиеся определителями $(n-1)$-го порядка, получаются из Δ_n вычеркиванием i-й строки и k-го столбца, вычислить, положив $i = 1$, следующие определители:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot 5 + (-1)^{1+2} \cdot (-2) \cdot 1 = 17$. ◄

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} +$

$+(-1)^{1+3} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-7) - 7 \cdot (21 - 25) - 2 \cdot 5 = -10$. ◄

в) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} +$

$$+(-1)^{1+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2\\ 1 & -3 & 0\\ 5 & 0 & 4\end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1\\ 1 & -3 & -1\\ 5 & 0 & 0\end{vmatrix} = -(4\cdot(-4)+3\cdot 4-2\cdot 0)-$$

$$-(0\cdot(-4)-4-2\cdot 5)+2(0\cdot(-12)-4\cdot 4-2\cdot 15) = -77. \blacktriangleleft$$

Определители 3-го порядка в данном случае вычислялись по формуле (1), причем строку брали ту, в которой наибольшее количество нулей.

Пример 2.6. Вычислить определитель, сделав в каком-либо ряду все элементы, кроме одного, равными нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 20 & 80\\ -5 & 3 & -34 & -23\\ 1 & 1 & 3 & -7\\ -9 & 2 & 8 & -15\end{vmatrix} = \{\text{из первой строки вынесем } 10\} =$$

$$= 10\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 8\\ -5 & 3 & -34 & -23\\ 1 & 1 & 3 & -7\\ -9 & 2 & 8 & -15\end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l}\text{1-ю строку умножим соответственно на 3, 1, 2}\\ \text{и сложим со 2-й, 3-й, 4-й строками}\\ \text{соответственно согласно свойству, имеем}\end{array}\right\} =$$

$$= 10\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 8\\ 4 & 0 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 15 & 1\\ -3 & 0 & 32 & 1\end{vmatrix} = \{\text{по формуле (1), положив в ней } k=2,\text{ получим}\} =$$

$$= 10\cdot(-1)^{1+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1\\ 4 & 15 & 1\\ -3 & 32 & 1\end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l}\text{оставляем без изменения 1-ю строку и,}\\ \text{умножив ее на (-1), прибавляем ко}\\ \text{2-й и 3-й}\end{array}\right\} =$$

$$= 10\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1\\ 0 & 13 & 0\\ -7 & 30 & 0\end{vmatrix} = \{\text{по формуле (1), положив } i=1,\ k=3\} =$$

$$= 10\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 13\\ -7 & 30\end{vmatrix} = 10\cdot[0-(-7)\cdot 13] = 10\cdot 91 = 910. \blacktriangleleft$$

Пример 2.7. Приведением к треугольному виду, вычислить определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2\\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1\\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9\\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3\\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1\end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l}\text{5-й столбец сложим с 1-м,}\\ \text{этот же столбец, умноженный}\\ \text{на 3 — со вторым, умноженный}\\ \text{на 2 — с третьим, умноженный}\\ \text{на 8 — с четвертым столбцом}\end{array}\right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2\\ 0 & 7 & 4 & 11 & 1\\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9\\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot(-12)\cdot(-22)\cdot(-1) = -5544. \blacktriangleleft$$

Задания для самостоятельной работы.

Пример 2.8. Вычислить определители, разложив их по элементам 1-й строки:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2\\ 2 & 8 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}.$

Ответ: -36.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: 54.

Пример 2.9. Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: 48.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Ответ: 20.

Занятие 3. Действия над матрицами и нахождение ранга матрицы.

Пример 3.1. Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти: $C = 2A + 3B$.

► Здесь A и B — прямоугольные матрицы размерности (2×3). Сначала находим $2A$ и $3B$, а потом их сумму:

$$C = 2A + 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 12 & 9 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+0 & 6+12 & 4+9 \\ 0+6 & 2+3 & -2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 18 & 13 \\ 6 & 5 & -8 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Пример 3.2. Дано:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Найти $C = A + B$.

► а) Здесь A и B — квадратные матрицы 2-го порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Здесь A и B — прямоугольные матрицы размерности (2×3). Складываем их соответствующие элементы:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-4 & -3+1 \\ 2+3 & -4+0 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

в) Здесь A и B — квадратные матрицы 3-го порядка. Складываем их соответствующие элементы:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2-5 & 1+3 & 3+16 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+7 & 3+10 & 8+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 13 & 8 \end{pmatrix}.$$

г) Эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как A есть матрица размерности (3×2), а B — размерности (2×3). Складывать можно только матрицы одинаковой размерности. ◄

Пример 3.3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $k = 3$. Найти $k \cdot A$.

► Умножаем каждый элемент матрицы A на 3, получаем:

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Пример 3.4. Найти $3A-2B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

► Сначала находим произведение A на $k_1=3$ и B на $k_2=-2$:

$3A=\begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix}$, $-2B=\begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем сумму полученных матриц:

$$3A-2B=\begin{pmatrix} 6-8 & -12+2 & 0+4 \\ -3+0 & 15+6 & 3-10 \\ 0-4 & 9+0 & -21+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -3 & 21 & -7 \\ -4 & 9 & -13 \end{pmatrix}. ◄$$

Пример 3.5. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB и BA.

► $A\cdot B=\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \boxed{3} & 4 & 5 \\ \boxed{6} & 0 & -2 \\ \boxed{7} & 1 & 8 \end{pmatrix}=$

{первая строка матрицы A прикладывается к первому столбцу матрицы B, соответствующие элементы перемножаются, а произведения складываются; затем та же процедура повторяется для каждой строки матрицы A и каждого столбца матрицы B}

$$=\begin{pmatrix} \boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7} & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8 \\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение $B\cdot A$ не существует, так как число столбцов первой матрицы (B) не совпадает с числом строк второй матрицы (A). ◄

Пример 3.6. Дано: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. Найти: $A+B$, A^T+B, A^T+B^T, $A+B^T$.

Транспонированной к матрице $A=(a_{ij})$ называется матрица $A^T=(a^T_{ij})$ такая, что $a^T_{ij}=a_{ji}$, $\forall i,j$ (то есть, все строки которой равны соответствующим столбцам матрицы A).

► $A+B$ — не имеет смысла (так как размерности матриц A и B не совпадают).

$A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

$A^T+B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$, $A+B^T=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 15 \end{pmatrix}$.

A^T+B^T — не имеет смысла. ◄

Пример 3.7. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=-2x^2+5x+9$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

▶ $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot3 & 3\cdot2+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$-2A^2 = -2\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$,

$5A = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$,

$9E = 9\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Итак, $f(A) = \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$. ◀

Пример 3.8. Найти произведение AB, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

▶ $A_{4\times3} \cdot B_{3\times2} = C_{4\times2}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0\cdot3+(-1)\cdot2+2\cdot1 & 0\cdot1+(-1)\cdot1+2\cdot0 \\ 2\cdot3+1\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+0\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+7\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+7\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}.$$

Если в этом примере мы попытаемся найти произведение $B \cdot A$, то убедимся, что это невозможно. Для прямоугольных матриц справедливы следующие правила:

1) *Умножение матрицы A на матрицу B имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.*

2) *В результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в 1-й матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во 2-й матрице.* ◀

Пример 3.9. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований.

▶ *Рангом матрицы называют наибольший порядок отличного от нуля определителя, порожденного этой матрицей.*

Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim$ {умножим 2-ю строку на 2 и вычтем 1-ю строку; умножим 3-ю строку на 2 и вычтем 1-ю строку} $\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \sim$ {прибавим к 3-й строке 2-ю строку, умноженную на 3} $\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Полученная ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит, ее ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы также равен 2.

Ответ: $r_A = 2$. ◀

Пример 3.10. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований.

► $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim$ {прибавим ко 2-й строке 1-ю строку, умноженную на (-2)}$\sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim$ {прибавим к 3-й строке 1-ю строку, умноженную на (-5)}$\sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \end{pmatrix} \sim$ {вычтем из 3-й строки 2-ю строку} $\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Следовательно, $r_A = 2$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 3.11. Найти ранг матрицы:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Ответ: $r_A = 3$.

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

Ответ: $r_B = 2$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ: $r_C = 2$.

4) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ: $r_D = 3$.

Пример 3.12. Найти линейную комбинацию матриц $5A - 3B + 2C$, где

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -20 & -7 & 8 \\ 28 & 19 & -6 \\ -5 & 18 & 27 \end{pmatrix}$.

Пример 3.13. Найти произведения матриц AB и BA (если это возможно):

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 14 \\ 5 & -22 & -11 \\ -18 & 19 & -32 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -18 & -2 & 16 \\ -13 & -13 & -5 \\ -18 & -9 & -2 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, BA — не существует.

Пример 3.14. Привести матрицу к ступенчатому виду:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 3.15. Найти линейную комбинацию матриц $3A - 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$.

Пример 3.16. Найти произведения матриц AB и BA (если это возможно):

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$.

Пример 3.17. Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17 \end{pmatrix}$.

Ответ: $r_A = 2$.

Пример 3.18. Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $r_A = 2$.

Занятие 4. Исследование и решение систем алгебраических уравнений по формулам Крамера

Пример 4.1. Исследовать на совместность и, в случае совместности, решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

► Исследуем систему на совместность; найдем ранги основной и расширенной матриц системы

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 8 & -1 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right),$$

$r_A - r_B = 3$, $r = n = 3$.

Ранги основной и расширенной матриц равны; по теореме Кронекера-Капелли система совместна. Так как ранг совпадает с числом неизвестных, то система имеет единственное решение.

Решим систему по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. ◄

Пример 4.2. Исследовать систему на совместность и, в случае совместности, решить ее:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 & = 3 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 & = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 & = 4 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 & = 7 \end{cases}$$

► Найдем ранги основной и расширенной матриц

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 4 \\ 7 & -5 & -9 & 10 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 26 & 10 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

$r_A = 3$, $r_B = 4$.

$r_A \neq r_B$, значит, система несовместна по теореме Кронекера-Капелли.

Ответ: нет решений. ◄

Пример 4.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24 \end{cases}$

► Исследуем на совместность:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 15 \\ 9 & 8 & 7 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$r_A = r_B = 2.$

По теореме Кронекера-Капелли система совместна. Ранг меньше числа неизвестных: $r < n = 3$, значит, система имеет бесчисленное множество решений, при этом число свободных параметров $n - r = 3 - 2 = 1$.

Найдем неизвестные по формулам Крамера. Сначала обозначим $x_3 = C$ и подставим в систему:

$$x_3 = C \quad + \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 - 3C \\ 4x_1 + 5x_2 = 15 - 6C \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 - 3C & 2 \\ 15 - 6C & 5 \end{vmatrix} = -3C, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 - 3C \\ 4 & 15 - 6C \end{vmatrix} = 6C - 9.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = C, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3 - 2C, \ x_3 = C.$$

Ответ: $x_1 = C$, $x_2 = 3 - 2C$, $x_3 = C$. ◄

Пример 4.4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$

► Исследуем на совместность:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -6 \\ 3 & 10 & 8 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -10 \\ 0 & 4 & -1 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right).$$

$r_A = r_B = 3.$

Ранги равны, по теореме Кронекера-Капелли система совместна. Ранг равен числу неизвестных: $r = n = 3$, значит, система имеет единственное решение.

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \\ -8 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 12, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 8 \end{vmatrix} = -18, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & - \\ 3 & 10 & -8 \end{vmatrix} = 12.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -3, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$. ◄

Пример 4.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

► Исследуем на совместность:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$r_A = 2$, $r_B = 3$.

$r_A \neq r_B$, система несовместна по теореме Кронекера-Капелли.

Ответ: решений нет. ◀

Задания для самостоятельной работы.

Исследовать системы на совместность и в случае совместности решить их по формулам Крамера.

Пример 4.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 49 \\ x_1 + x_3 = 26 \\ 2x_2 + 9x_3 = 11 \end{cases}$

Ответ: $(25; 1; 1)$.

Пример 4.7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$

Ответ: нет решений.

Пример 4.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

Ответ: $(C + 2; -C - 1; C)$.

Пример 4.9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 21 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 13 \end{cases}$

Ответ: $(2; 3; -1; 0)$.

Пример 4.10. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5 \end{cases}$

Ответ: $(2; 0; 1; -1)$.

Занятие 5. Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений (матричный метод, метод Гаусса).

Решение систем $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ производится по формуле $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$, где A — невырожденная квадратная матрица, A^{-1} — обратная матрица, $a^{-1}_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j}M_{ji}}{|A|}$.

Пример 5.1. Решить систему $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ -x+4y+z=3 \end{cases}$.

► $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Прежде чем решать систему, исследуем ее на совместность, для этого найдем r_A и r_B:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

$r_A = r_B = 3$. Система совместна и имеет единственное решение.

Вычислим определитель матрицы A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3-10-12-9+20+2 = -6.$

$a^{-1}_{11} = \dfrac{(-1)^{1+1}}{-6}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{23}{-6}$, $a^{-1}_{12} = \dfrac{(-1)^{1+2}}{-6}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{4}{-6}$,

$a^{-1}_{13} = \dfrac{(-1)^{1+3}}{-6}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{7}{-6}$, $a^{-1}_{21} = \dfrac{(-1)^{2+1}}{-6}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{-10}{-6}$,

$a^{-1}_{22} = \dfrac{(-1)^{2+2}}{-6}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{-2}{-6}$, $a^{-1}_{23} = \dfrac{(-1)^{2+3}}{-6}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{-2}{-6}$,

$a^{-1}_{31} = \dfrac{(-1)^{3+1}}{-6}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \dfrac{19}{-6}$, $a^{-1}_{32} = \dfrac{(-1)^{3+2}}{-6}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = \dfrac{2}{-6}$,

$a^{-1}_{33} = \dfrac{(-1)^{3+3}}{-6}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \dfrac{5}{-6}$,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 23 & -10 & 19 \\ 4 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 23 & -10 & 19 \\ 4 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -69+0+57 \\ -12+0+6 \\ -21+0+15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ◀

Пример 5.2. Решить систему $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = -5 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$.

▶ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Проверка на совместность:

$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$.

$r_A = r_B = 3 \Longrightarrow$ система совместна и имеет единственное решение.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 1 + 4 - 2 - 4 = 3.$

Вычисляем обратную матрицу: $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{x} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 + 15 - 6 \\ 4 + 0 + 2 \\ 5 - 15 + 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. ◀

Пример 5.3. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$.

▶ Запишем систему в виде расширенной матрицы и с помощью элементарных преобразований приведем к ступенчатому виду, так чтобы в левом нижнем углу получился нулевой треугольник:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim$ {прибавим ко 2-й строке 1-ю строку, умноженную на (-3)} $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim$ {прибавим к 3-й строке 1-ю строку, умноженную на (-4)} $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right) \sim$ {прибавим к 3-й строке 2-ю строку, умноженную на (-5)}

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right)$, $r_A = r_B$, система совместна.

Перепишем систему в виде $\begin{cases} x+y-z= & 0 \\ \quad -y+4z= & 5 \\ \qquad -11z= & -22 \end{cases} \Longrightarrow z = 2$, тогда последовательно найдем $-y+8=5 \Longrightarrow y=3$ и $x+3-2=0 \Longrightarrow x=-1$.

Проверка: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. ◀

Пример 5.4. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ x-2y+2z=-5 \\ 7x+y+z=14 \end{cases}$.

▶ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & 1 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & 1 & 14 \end{array}\right) \sim$ {прибавим ко 2-й строке 1-ю строку, умноженную на (-2)} $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 7 & 1 & 1 & 14 \end{array}\right) \sim$ {прибавим к 3-й строке 1-ю строку, умноженную на (-7)} $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 15 & -13 & 49 \end{array}\right) \sim$ {прибавим к 3-й строке 2-ю строку, умноженную на (-3)} $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$, $r_A = r_B$, система совместна.

Перепишем систему в виде $\begin{cases} x-2y+2z= & -5 \\ \quad 5y-5z= & 15 \\ \qquad 2z= & 4 \end{cases} \Longrightarrow z=2$, $5y-10=15 \Longrightarrow y=5$ и $x-10+4=-5 \Longrightarrow x=1$.

Проверка: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. ◀

Задания для самостоятельной работы.

Решить систему уравнений методом Гаусса и матричным методом:

Пример 5.5. $\begin{cases} 3x+2y-z=-6 \\ -x+5z=12 \\ 5x-y+3z=-5 \end{cases}$

Ответ: $x=-2$, $y=1$, $z=2$.

Пример 5.6. $\begin{cases} x - 2y - 4z = -11 \\ 3x - 3y + z = -1 \\ 4x + y - 2z = 2 \end{cases}$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$.

Пример 5.7. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 9 \\ x - 5y - 3z = 3 \\ 4x + 4y - 2z = 16 \end{cases}$

Ответ: $x = 2$, $y = 1$, $z = -2$.

Пример 5.8. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $x_3 = 3$.

Пример 5.9. $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$.

Пример 5.10. $\begin{cases} 4x - 2y - z = 4 \\ -x + 3y - z = -6 \\ x - 2y + 2z = 7 \end{cases}$

Ответ: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

Занятие 6. Скалярное произведение векторов. Вектор в косоугольном базисе.

Пример 6.1. Что больше, $|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})|$ или $a \cdot b$?

► Так как $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a \cdot b \cdot \cos\alpha$ и $|\cos\alpha| \le 1$, то $|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})| \le a \cdot b$. ◄

Пример 6.2. Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

► $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{\imath} + a_y\overrightarrow{\jmath} + a_z\overrightarrow{k} = a(\cos\alpha\,\overrightarrow{\imath} + \cos\beta\,\overrightarrow{\jmath} + \cos\gamma\,\overrightarrow{k})$.

$|\overrightarrow{a}| = a = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$, тогда $\overrightarrow{a} = \sqrt{14}\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{-3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$.

Ответ: $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma = -\dfrac{3}{\sqrt{14}}$. ◄

Пример 6.3. Даны векторы $\overrightarrow{a} = (1; 2; -3; 4)$, $\overrightarrow{b} = (0; 1; 4; 3)$. Найти их скалярное произведение.

► $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 2.$

Ответ: $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 2$. ◄

Пример 6.4. Даны векторы $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Найти вектор $\overrightarrow{d}$ в базисе $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$.

► $\overrightarrow{d}_{\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\}} = \lambda_1\overrightarrow{a} + \lambda_2\overrightarrow{b}$, где $\lambda_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$,

$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_x & b_x \\ d_y & b_y \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_x & d_x \\ a_y & d_y \end{vmatrix}$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -14$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11$.

Ответ: $\overrightarrow{d}_{\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\}} = -14\overrightarrow{a} + 11\overrightarrow{b}$. ◄

Пример 6.5. Даны векторы $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Найти вектор $\overrightarrow{d}$ в базисе $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$.

► $\overrightarrow{d}_{\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\}} = \lambda_1\overrightarrow{a} + \lambda_2\overrightarrow{b} + \lambda_3\overrightarrow{c}$, где $\lambda_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{-6}{-6} = 1,\ \lambda_{2,3} = 0.$$

Ответ: $\overrightarrow{d}_{\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\}} = \overrightarrow{a}$. ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 6.6. Вычислить $a = (2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath})\overrightarrow{\jmath} + (\overrightarrow{\jmath} - 2\overrightarrow{k})\overrightarrow{k} + (\overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{k})^2$.
Ответ: $a = 2$.

Пример 6.7. Разложить вектор $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ по базису $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$, если $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\overrightarrow{d}_{\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\}} = 2\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}$.

Пример 6.8. Разложить вектор $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ по базису $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$, если $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\overrightarrow{d}_{\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\}} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

Пример 6.9. Даны векторы $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Найти вектор $\overrightarrow{d}$ в базисе $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$.

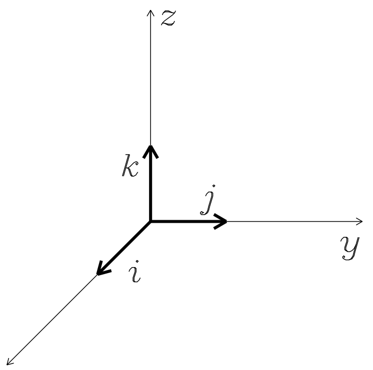
Ответ: нет решения, так как векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ линейно зависимы (компланарны).

Пример 6.10. Даны векторы $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Найти вектор $\overrightarrow{d}$ в базисе $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$.

Ответ: $\overrightarrow{d}_{\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\}} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Занятие 7. Векторное и смешанное произведения векторов.

Пример 7.1. Найти $\overrightarrow{a}$, если $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}] - [\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k}] + [\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}]$.



►
$\overrightarrow{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$
$\overrightarrow{\imath} \times \overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\jmath} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{\imath}.$
$\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}] - [\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k}] + [\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}] =$
$= \overrightarrow{\imath} \times \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{\imath} \times \overrightarrow{k} - \overrightarrow{\jmath} \times \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} \times \overrightarrow{k} + \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} =$
$= \overrightarrow{k} - \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k} - \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{\imath} + 0 = 2\overrightarrow{k} - 2\overrightarrow{\imath} = 2(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{\imath}).$ ◄

Пример 7.2. Дано: $|\overrightarrow{a}| = 10$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, скалярное произведение $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 12$. Вычислить модуль векторного произведения $|[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}]|$.

► $|[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}]| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$.

Используя скалярное произведение $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$, вычислим

$\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = \dfrac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \dfrac{12}{10 \cdot 2} = \dfrac{3}{5},$

$\sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})} = \pm\sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \pm\dfrac{4}{5},$

$|[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}]| = 10 \cdot 2 \cdot \dfrac{4}{5} = 16.$ ◄

Пример 7.3. Известны координаты трех точек: $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; 2; 1)$. Вычислить $[\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$.

► Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BC} = (2; 0; 2)$, $\overrightarrow{CA} = (-1; -3; 1)$, $-2\overrightarrow{CA} = (2; 6; -2)$, $\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA} = (0; -6; 4)$, $\overrightarrow{CB} = (-2; 0; -2)$.

Поскольку $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, то

$[\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -6 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{\imath} - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{\jmath} + \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} =$
$= 12\overrightarrow{\imath} - 8\overrightarrow{\jmath} - 12\overrightarrow{k}.$ ◄

Пример 7.4. Сила $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{\jmath} + 4\overrightarrow{k}$ приложена к точке $B(1;2;3)$. Найти момент этой силы относительно точки $A(3;2;-1)$.

► Момент силы вычисляется по формуле $\overrightarrow{M}_{\overrightarrow{BA}} = [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{F}]$; $\overrightarrow{BA} = (2;0;-4)$.

$$\overrightarrow{M}_{\overrightarrow{BA}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \overrightarrow{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \overrightarrow{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} =$$

$$= -8\overrightarrow{\imath} - 12\overrightarrow{\jmath} - 4\overrightarrow{k}.$$ ◄

Пример 7.5. Установить, компланарны ли векторы $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} - 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{\imath} - 4\overrightarrow{\jmath} + 4\overrightarrow{k}$.

► *Если векторы компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$ — *смешанное произведение векторов.*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

Векторы не компланарны. ◄

Пример 7.6. Вычислить объем треугольной пирамиды, вершины которой имеют координаты $A_1(6;1;1)$, $A_2(4;6;6)$, $A_3(4;2;0)$, $A_4(1;2;6)$.

► *Объем пирамиды* $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|$.

$\overrightarrow{A_1A_2} = (-2;5;5)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (-2;1;-1)$, $\overrightarrow{A_1A_4} = (-5;1;5)$.

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 78.$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot 78 = 13.$$ ◄

Пример 7.8. Даны вершины тетраэдра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

► $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} H$, $H = \dfrac{V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}}$.

Объем пирамиды $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$. Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB} = (2;-2;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (4;0;6)$, $\overrightarrow{AD} = (-7;-7;7)$.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{matrix}\right\| = \frac{7}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{7}{6}\left\|\begin{matrix} -1 & -5 & -3 \\ 10 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{7}{6}\left|1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{154}{3}.$$

$S_{\text{осн}} = S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$ — *площадь треугольника.*

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|-12\overrightarrow{\imath} - 24\overrightarrow{\jmath} + 8\overrightarrow{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14, \qquad H = \frac{V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot \frac{154}{3}}{14} = 11. \blacktriangleleft$$

Задания для самостоятельной работы.

Пример 7.9. Раскрыть скобки и упростить выражение $2\vec{i} \cdot [\vec{j} \times \vec{k}] + 3\vec{j} \cdot [\vec{i} \times \vec{k}] + 4\vec{k} \cdot [\vec{i} \times \vec{j}]$.

Ответ: 3.

Пример 7.10. Сила $\vec{F} = (3; 2; -4)$ приложена к точке $A(2; -1; 1)$. Определить момент этой силы относительно начала координат.

Ответ: $\vec{M}_O = (2; 11; 7)$.

Пример 7.11. Построить треугольник с вершинами $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; 2; 0)$. Вычислить его площадь и высоту BD.

Ответ: $S = 7\sqrt{5}$, $BD = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

Пример 7.12. Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны, и разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ: $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

Пример 7.13. Показать, что точки $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; 3; 0)$, $D(5; 0; -6)$ лежат в одной плоскости.

Пример 7.14. Построить пирамиду с вершинами $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(2; 3; 8)$, вычислить ее объем и высоту, опущенную на грань ABC.

Ответ: $V = 14$, $h = \sqrt{14}$.

Пример 7.15. Упростить: $2(\vec{i}, [\vec{j} \times \vec{k}]) + 3(\vec{j}, [\vec{i} \times \vec{k}]) + 4(\vec{k}, [\vec{i} \times \vec{j}])$.

Ответ: 3.

Пример 7.16. Установить, лежат ли точки $A(3; 5; 4)$, $B(8; 7; 4)$, $C(5; 10; 4)$, $D(0; 0; 0)$ в одной плоскости.

Ответ: не лежат.

Пример 7.17. Даны две силы, приложенные к точке $M(0; 1; 3)$: $\vec{f_1} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{f_2} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Найти момент их равнодействующей относительно точки $A(-1; -1; 2)$.

Ответ: $2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Пример 7.18. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(4; 2; 5)$, $B(0; 7; 2)$, $C(0; 2; 7)$, $D(1; 5; 0)$.

Ответ: $\dfrac{35}{3}$.

Занятие 8. Уравнения прямой и плоскости.

Пример 8.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3,4)$, если направляющий вектор прямой $\overrightarrow{a}=(1,-1,2)$.

▶ *Каноническое уравнение прямой:* $\dfrac{x-x_0}{a_x}=\dfrac{y-y_0}{a_y}=\dfrac{z-z_0}{a_z}$.

$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$. ◀

Пример 8.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(2,3,4)$ и $B(1,2,5)$.
▶ Направляющий вектор прямой $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,1)$ и
$\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$. ◀

Пример 8.3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3,4)$ перпендикулярно плоскости zOx.

▶ Направляющим вектором этой прямой является по условию $\overrightarrow{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ и каноническое уравнение $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{0}\Longrightarrow\begin{cases}x=2\\z=4\end{cases}$ — уравнение прямой в общем виде. ◀

Пример 8.4. Пусть дан треугольник с вершинами $A_1(2,1,0)$, $A_2(3,2,0)$, $A_3(1,2,2)$. Найти уравнения прямых, лежащих вдоль сторон треугольника.

▶ A_1A_2: $\overrightarrow{A_1A_2}=(1,1,0)\Longrightarrow\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-0}{0}\Longrightarrow\begin{cases}x-y-1=0\\z=0\end{cases}$ — прямая вдоль стороны A_1A_2.

A_2A_3: $\overrightarrow{A_2A_3}=(-2,0,2)\Longrightarrow\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-0}{2}\Longrightarrow\begin{cases}x+z-3=0\\y=2\end{cases}$ — прямая вдоль стороны A_2A_3.

A_3A_1: $\overrightarrow{A_3A_1}=(1,-1,-2)\Longrightarrow\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-0}{-2}\Longrightarrow\begin{cases}x+y-3=0\\2x+z-4=0\end{cases}$ — прямая вдоль стороны A_3A_1. ◀

Пример 8.5. Найти уравнение плоскости, проходящей через вершины треугольника, заданного в Примере 8.4.

▶ *Уравнение плоскости, проходящей через три точки:* $\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$

$$\begin{vmatrix}x-2 & y-1 & z\\3-2 & 2-1 & 0\\1-2 & 2-1 & 2\end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix}=$$
$=2(x-2)-2(y-1)+2z=2x-2y+2z-2=0.$

Ответ: $x-y+z-1=0$. ◀

Пример 8.6. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $2x - 3y + 4z - 12 = 0$ от координатных осей.

► Поделим уравнение на 12:

$\frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \Longrightarrow$ отрезки $a = 6$, $b = -4$, $c = 3$.

Уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, *где* a, b, c *— отрезки, отсекаемые плоскостью от координатных осей.*

Ответ: $a = 6$, $b = -4$, $c = 3$. ◄

Пример 8.7. Найти расстояние от точки $A(3,1,5)$ до плоскости, заданной в Примере 8.6.

► $d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ *— расстояние от точки* (x_0, y_0, z_0) *до плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$.

$d = \frac{2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 - 12}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{11}{\sqrt{29}}$. ◄

Пример 8.8. Записать уравнение и построить плоскость:

а) параллельную плоскости OYZ и проходящую через точку $M_0(6,-2,3)$;

б) проходящую через ось OZ и точку $M(3,4,2)$;

в) параллельную оси OY и проходящую через две точки $M_1(2,-1,1)$ и $M_2(3,2,4)$;

г) проходящую через точку $M(2,3,1)$ и имеющую нормальный вектор $\overrightarrow{n}(3,-2,4)$;

д) проходящую через точку $C(2,3,-4)$ параллельно двум векторам $\overrightarrow{a}(-2,1,-1)$ и $\overrightarrow{b}(1,-3,-1)$.

►

а) Плоскость, параллельная OYZ, имеет нормальный вектор $\overrightarrow{n}(1;0;0)$.

$1(x-6) + 0(y+2) + 0(z-3) = 0 \Longrightarrow x - 6 = 0$.

б) Имеем три точки, принадлежащие плоскости: $O(0,0,0)$, $M(3,4,2)$, $Z(0,0,1)$.

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ или $\begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x - 3y = 0$.

в) Рассмотрим три компланарных вектора: $\overrightarrow{Y}(0,1,0)$, $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$. Смешанное произведение этих векторов равно нулю, то есть $\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{Y} = 0$, где $M(x,y,z) \in \alpha$ (текущая точка лежит в заданной плоскости α), $\overrightarrow{M_1M}(x-2, y+1, z-1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(1,3,3)$.

$\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ или $\begin{vmatrix} x+2 & z-1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$3x - 6 - z + 1 = 0, 3x - z + 7 = 0$.

г) $3(x-2) - 2(y-3) + 4(z-1) = 0 \Longrightarrow 3x - 2y + 4z - 4 = 0$.

д) Найдем $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$.

Отсюда получаем $-4(x-2) - 3(y-3) + 5(z+4) = 0 \Longrightarrow -4x - 3y + 5z - 3 = 0$ или $4x + 3y - 5z + 3 = 0$. ◄

Пример 8.9. Вычислить угол между плоскостями α_1: $2x + 3y - z + 15 = 0$ и α_2: $3x - 5y - 9z + 1 = 0$.

► $\overrightarrow{N}_1(2,3,-1)$, $\overrightarrow{N}_2(3,-5,-9)$.
$\cos\varphi = \dfrac{2\cdot 3 + 3\cdot(-5) - 1\cdot(-9)}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+(-5)^2+(-9)^2}} = 0 \Longrightarrow \alpha_1 \perp \alpha_2$. ◄

Пример 8.10. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями α_1: $3x+6y+2z-15=0$ и α_2: $3x+6y+2z+13=0$.

► На α_1 возьмем точку M_0, положив $x=0$, $y=0$, тогда $z=7.5$, $M_0(0,0,7.5)$. Найдем расстояние от точки M_0 до плоскости α_2:
$d = \dfrac{|2\cdot 7.5+13|}{\sqrt{9+36+4}} = \dfrac{28}{7} = 4$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 8.11. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат следующими прямыми:
а) $5x-y-10=0$;
б) $2x+7y+28=0$;
в) $3x-2=0$;
г) $2y+5=0$.
Ответ: а) $a=2$, $b=-10$; б) $a=-14$, $b=-4$; в) $a=\dfrac{2}{3}$; г) $b=-\dfrac{5}{2}$.

Пример 8.12. Какие углы образует каждая пара прямых:
а) $2x+y-5=0$ и $x-2y+3=0$;
б) $x+1=0$ и $x-1=0$;
в) $3x+2y-5=0$ и $6x+4y+9=0$.
Ответ: а) 90°; б) 0°; в) 0°.

Пример 8.13. Как расположены следующие плоскости?
а) $2x+3y-5=0$;
б) $3z+2=0$;
в) $x+2y-3z=0$;
г) $y-5z=0$;
д) $3x-2y+z-6=0$.
Ответ: а) параллельна оси OZ; б) параллельна плоскости XOY; в) проходит через начало координат; г) проходит через ось OX; д) отсекает отрезки $a=2$, $b=-3$, $c=6$.

Пример 8.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(5;-2;3)$ и $M_2(6;1;0)$ перпендикулярно плоскости $3x-y+2z+15=0$.
Ответ: $3x-11y-10z-7=0$.

Пример 8.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2,1,-1)$ и $M_2(2,3,4)$ перпендикулярно плоскости $x-2y+3z+5=0$.
Ответ: $4x-5y+2z-1=0$.

Занятие 9. Геометрические приложения уравнений прямой и плоскости.

Пример 9.1. Определить, при каких значениях B:

а) плоскости $x - 4y + z - 1 = 0$ и $2x + By + 10z - 3 = 0$ будут параллельны;

б) прямая $x = 3t - 2$, $y = Bt + 1$, $z = t$ параллельна прямой $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z = 0; \end{cases}$.

в) прямая $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-5}{-6} = \dfrac{z+5}{6}$ перпендикулярна плоскости $Bx + 2y - 2z - 4 = 0$;

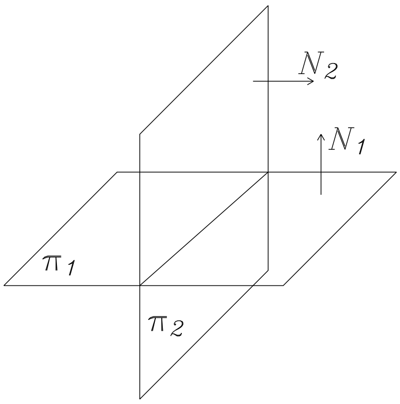
г) плоскости $\sqrt{2}x - y + 3z + \sqrt{2} = 0$ и $2x - \sqrt{2}y + 3\sqrt{2}z + B = 0$ совпадают.

►

а) $\pi_1 \perp \pi_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{N}_1 \perp \overrightarrow{N}_2 \Longrightarrow \overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2 = 0$.

$\overrightarrow{N}_1 = (1; -4; 1)$, $\overrightarrow{N}_2 = (2; B; 10)$.

$\overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2 = 1 \cdot 2 - 4 \cdot B + 1 \cdot 10 = 12 - 4B$. $12 - 4B = 0 \Longrightarrow B = 3$.

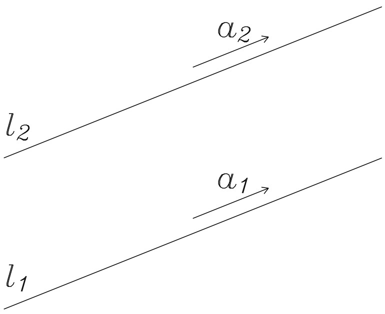


б) $l_1 \| l_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{a}_1 \| \overrightarrow{a}_2$.

$\overrightarrow{a}_1 = (3; B; 1)$. Так как $\overrightarrow{a}_2 = [\overrightarrow{N}_1 \times \overrightarrow{N}_2]$, то $\overrightarrow{a}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -6\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$.

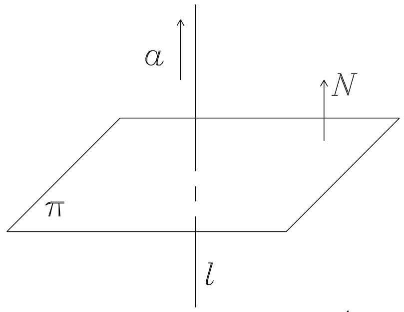
Векторы коллинеарны, если их проекции подобны.

Из $\overrightarrow{a}_1 \| \overrightarrow{a}_2$ получаем $\dfrac{3}{-6} = \dfrac{B}{4} = \dfrac{1}{-2}$, $B = -2$.

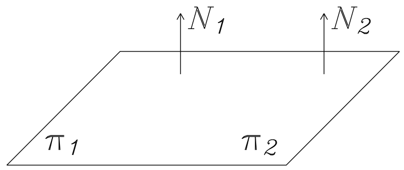


в) $l \perp \pi \Longleftrightarrow \overrightarrow{a} \| \overrightarrow{N}$.

$\overrightarrow{a} = (3; -6; 6)$, $\overrightarrow{N} = (B; 2; -2)$. $\overrightarrow{a} \| \overrightarrow{N} \Longrightarrow \dfrac{3}{B} = \dfrac{-6}{2} = \dfrac{6}{-2} \Longrightarrow B = -1$.



г) π_1 совпадает с $\pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.
$\overrightarrow{N}_1 = (\sqrt{2}; -1; 3)$, $D_1 = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{N_2} = (2; -\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$, $D_2 = B$.
$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{-1}{-\sqrt{2}} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{B} \Longrightarrow B = 2.$



Ответ: а) $B = 3$; б) $B = -2$; в) $B = -1$; г) $B = 2$. ◀

Пример 9.2. Найти угол между

а) двумя прямыми $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = t \end{cases}$;

б) двумя плоскостями $3y - z = 0$ и $2y + z - 1 = 0$;

в) прямой $\begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $4x - 8y + z - 3 = 0$.

▶

а) $\overrightarrow{a}_1 = (1; -2; 3)$, $\overrightarrow{a}_2 = (1; 2; 1)$, тогда
$\cos\varphi = \dfrac{(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2)}{|\overrightarrow{a}_1| \cdot |\overrightarrow{a}_2|} = \dfrac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = 0 \Longrightarrow \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}.$

б) $\overrightarrow{N}_1 = (0; 3; -1)$, $\overrightarrow{N}_2 = (0; 2; 1)$,
$|\overrightarrow{N}_1| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{N}_2| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,
$\cos\varphi = \dfrac{(\overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2)}{|\overrightarrow{N}_1| \cdot |\overrightarrow{N}_2|} = \dfrac{|3 \cdot 2 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}.$

в) $\overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} - 2\overrightarrow{k},$

$\overrightarrow{a} = (0; 2; 2)$, $\overrightarrow{N} = (4; -8; 1)$,
$\sin\varphi = \dfrac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{N})}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{N}|} = \dfrac{|0 \cdot 4 + 2 \cdot (-8) - 2 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{81}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \varphi_3 = \dfrac{\pi}{4}.$

Ответ: а) $90°$; б) $45°$; в) $45°$. ◀

Пример 9.3. Найти точку M_2, симметричную точке $M_1(2;7;1)$ относительно плоскости $x-4y+z+7=0$.

► $\overrightarrow{N}=(1;-4;1)$.

Запишем параметрические уравнения прямой M_1M_2, перпендикулярной к данной плоскости: $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-4t+7 \\ z=t+1 \end{cases}$.

Точку M пересечения прямой и плоскости получим, если решим совместно уравнения прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x=t+2 \\ y=-4t+7 \\ z=t+1 \\ x-4y+z+7=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=t+2 \\ y=-4t+7 \\ z=t+1 \\ t+2+16t-28+t+1+7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=1 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases}$$

$M(1;3;0)$ — середина отрезка M_1M_2, тогда

$1=\dfrac{2+x_2}{2}$, $3=\dfrac{7+y_2}{2}$, $0=\dfrac{1+z_2}{2}$.

Отсюда $x_2=0$, $y_2=-1$, $z_2=-1$, $M_2(0;-1;-1)$ — искомая точка.

Ответ: $M_2(0;-1;-1)$. ◄

Пример 9.4. Построить пирамиду, ограниченную плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями. Вычислить: а) объем пирамиды; б) длину высоты, проведенной из начала координат на заданную плоскость.

► а) Преобразуем общее уравнение данной плоскости в уравнение плоскости в отрезках: $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{-4}+\dfrac{z}{2}=1$,

$a=6$, $b=-4$, $c=2$ — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат OX, OY, OZ соответственно. Если за основание пирамиды взять треугольник, лежащий в плоскости XOY (он прямоугольный, с катетами, равными 6 и 4 единиц), то ее высота будет равна 2. Тогда $V=\dfrac{1}{6}\cdot 4\cdot 6\cdot 2=8$.

б) Длина высоты OH — это расстояние от начала координат до плоскости $2x-3y+6z-12=0$. Согласно формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ получим

$$|OH|=\frac{|2\cdot 0-3\cdot 0+6\cdot 0-12|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{12}{\sqrt{49}}=\frac{12}{7}\simeq 1.71.$$

Ответ: а) $V=8$; б) $|OH|\simeq 1.71$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 9.5. При каких значениях A

1) плоскость $Ac+3y-5z+1=0$ параллельна прямой $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{1}$;

2) плоскости $3x+y+Az+2=0$ и $6x+2y-2z+3=0$ параллельны.

Ответ: 1) $A=-1$; 2) $A=-1$.

Пример 9.6. Вычислить угол между координатной плоскостью xOy и плоскостью $x-z=0$.

Ответ: 45°.

Пример 9.7. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $2x - y + 2z + 9 = 0$ и $4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

Ответ: $\dfrac{13}{2}$.

Пример 9.8. Установить взаимное расположение прямой и плоскости и в случае их пересечения найти координаты точки пересечения:

а) $x = 8t + 3$, $y = 2t + 1$, $z = 3t + 4$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$;

б) $\begin{cases} 4x - 5z - 3 = 0 \\ 4y - z - 11 = 0 \end{cases}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Ответ: а) прямая лежит в плоскости; б) прямая и плоскость пересекаются в точке $M(2; 3; 1)$.

Пример 9.9. Найти точки пересечения плоскости $2x - 3y + z + 3 = 0$ с осями координат.

Ответ: $\left(-\dfrac{3}{2}; 0; 0\right)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; -3)$.

Пример 9.10. Вычислить угол между двумя прямыми $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \\ 3x + 4y + 7z = 0 \end{cases}$

Ответ: 0°.

Занятие 10. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.

Пример 10.1. Решить уравнение $AX = B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

▶ *Решением уравнения $AX = B$ является $X = A^{-1}B$, если обратная матрица A^{-1} существует.*

1. $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

2. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. ◀

Пример 10.2. Найти X, если $BXC^{-1} = A$.

▶ $B^{-1}(BXC^{-1})C = B^{-1}AC \Longrightarrow X = B^{-1}AC$. ◀

Пример 10.3. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

▶ *Собственные числа являются решениями характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, то есть* $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$

а собственные векторы равны $\overrightarrow{x}^{(i)} = C_i \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_i - a_{11} \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = 1, 2.$

$\overrightarrow{x}^{(1)} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{x}^{(2)} = C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_{1,2} = 1, 2$, $\overrightarrow{x}^{(1)} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. ◀

Пример 10.4. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

▶ $\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 6 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5.$

$\overrightarrow{x}^{(1)} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 - 2) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{x}^{(2)} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 - 2) \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$; $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_{1,2} = 0, 5$, $\overrightarrow{x}^{(1)} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. ◀

Пример 10.5. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

▶

1) Составим характеристическое уравнение линейного оператора A:

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$

$(4-\lambda)^2(-7-\lambda) - 90 - 90 - 12(-7-\lambda) + 27(4-\lambda) + 25(4-\lambda) = 0.$

Раскрывая скобки, получим уравнение $-\lambda^3 + \lambda^2 = 0$, $\lambda^2(\lambda - 1) = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 1$.

2) Найдем собственные векторы для каждого собственного значения. Система при $\lambda_{1,2} = 0$:

$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ и $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

Решаем ее методом Гаусса:

$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \sim$ {прибавим ко 2-й строке, умноженной на 4, 1-ю строку, умноженную на (-5); прибавим к 3-й строке, умноженной на 4, 1-ю строку, умноженную на (-6)} $\sim$ $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Выберем базисный минор: $M_2 = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, x_1, x_2 — базисные переменные, x_3 — свободная переменная, обозначим $x_3 = C$; выразим базисные переменные через свободную переменную C:

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad\;\; -3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{2x_3}{3} = \dfrac{2}{3}C \\ x_1 = \dfrac{x_3}{3} = \dfrac{C}{3} \end{cases}$$

Следовательно, собственный вектор $\overrightarrow{x}^{(1,2)} = \left(\dfrac{C}{3}; \dfrac{2C}{3}; C\right) = C\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; 1\right)$, C — произвольная постоянная.

Система при $\lambda_3 = 1$ имеет вид $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Решаем ее методом Гаусса: $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \sim$ {прибавим ко 2-й строке, умноженной на 3, 1-ю строку, умноженную на (-5); прибавим к 3-й строке, умноженной на 3, 1-ю строку, умноженную на (-6)$\}$ $\sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

выбираем базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, x_1, x_2 — базисные переменные, $x_3 = C$ — свободная; выразим базисные переменные через свободную:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 = C \\ x_1 = x_3 = C \end{cases}$$

Следовательно, собственный вектор $\overrightarrow{x}^{(3)} = (C; C; C) = C(1; 1; 1)$, где C — произвольная постоянная.

Ответ: $\lambda_{1,2} = 0$, $\overrightarrow{x}^{(1,2)} = C\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$; $\lambda_3 = 1$, $\overrightarrow{x}^{(3)} = C(1; 1; 1)$. ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 10.6. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_{1,2} = -2, 7$, $\overrightarrow{x}^{(1)} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 10.7. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_{1,2,3} = -1$, $\overrightarrow{x}^{(1,2,3)} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Пример 10.8. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$, $\overrightarrow{x}^{(1)} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x}^{(2,3)} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Занятие 11. Классификация уравнений II-го порядка, канонические уравнения.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:
$Q(x,y)+Ax+By+D=0$, где $Q(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ — *квадратичная форма.*

Каноническая квадратичная форма имеет вид:
$Q(x',y')=\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2$.

Тип кривой второго порядка определяется знаком выражения

$$\lambda_1\lambda_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{cases} >0-\textit{эллипс} \\ =0-\textit{парабола} \\ <0-\textit{гипербола}\end{cases}$$

Пример 11.1. Определить тип кривой $y^2-4xy+5x^2-8x+105y-11=0$.

► $\lambda_1\lambda_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5\end{vmatrix}=1>0$.

Ответ: эллипс. ◄

Пример 11.2. Определить тип кривой $y-x+12xy+4x^2+8+9y^2=0$.

► $\lambda_1\lambda_2=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9\end{vmatrix}=0$.

Ответ: парабола. ◄

Пример 11.3. Построить кривую $x^2-2x+y^2=0$.

► 1. $\lambda_1\lambda_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}=1>0$ — эллипс.

2. Приведем уравнение к каноническому виду.

При $a_{12}=0$ приведение к каноническому виду осуществляется параллельным переносом системы координат.

$x^2-2x+1-1+y^2=0\Longrightarrow(x-1)^2+y^2=1$.

Ответ: это окружность с центром $(1;0)$ и $R=1$. ◄

Пример 11.4. Построить кривую $x=2+\sqrt{4-y^2}$.

► ОДЗ: $x\ge 2$, $-2\le y\le 2$.

Возведем в квадрат: $(x-2)^2=4-y^2\Longrightarrow(x-2)^2+y^2=4\Longrightarrow$

Ответ: это правая половина окружности с центром $(2;0)$ и $R=2$. ◄

Пример 11.5. Найти полуоси эллипса $x^2=8y-4y^2$.

►

1. $\lambda_1\lambda_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4\end{vmatrix}=4>0$ — эллипс.

2. Приведем к каноническому виду:

$$x^2+4(y^2-2y+1-1)=0\Longrightarrow x^2+4(y-1)^2=4\Longrightarrow\frac{x^2}{4}+(y-1)^2=1.$$

Так как уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, *где a и b — полуоси эллипса*, то $a=2$, $b=1$.

Ответ: $a=2$; $b=1$. ◄

Пример 11.6. Получить уравнение асимптот гиперболы $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$.

► $\dfrac{16x^2}{144} - \dfrac{9y^2}{144} = 1 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \Longrightarrow \left(\dfrac{x}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1.$

$y_{\text{ас}} = \pm\dfrac{b}{a}x$ — *уравнение асимптот гиперболы* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Ответ: $y_{\text{ас}} = \pm\dfrac{4}{3}x$. ◄

Пример 11.7. Найти координаты фокусов и эксцентриситет кривой $2x^2 - 4x - 7y^2 - 12 = 0$.

► $2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 7y^2 - 12 = 0 \Longrightarrow 2(x-1)^2 - 7y^2 = 14 \Longrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{7} - \dfrac{y^2}{2} = 1 \Longrightarrow$
$a = \sqrt{7}$, $b = \sqrt{2}$.

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ — *эксцентриситет гиперболы, а* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ — *фокусное расстояние гиперболы.*

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7 + 2} = 3$, $\varepsilon = \dfrac{3}{\sqrt{7}} > 1$,

$x' = x - x_0$, $x = x' + x_0$,

$F_1(-c + x_0; 0) = F_1(-2; 0)$, $F_2(c + x_0; 0) = F_2(4; 0)$.

Ответ: $F_1(-2; 0)$, $F_2(4; 0)$, $\varepsilon = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 11.8. Определить типы кривых:

а) $y^2 + 4x + 3x^2 - \dfrac{3}{2}xy = 0$

Ответ: эллипс.

б) $2y + 4x^2 + 2y^2 + 12xy = 0$

Ответ: гипербола.

Пример 11.9. Получить уравнение асимптот гиперболы $x^2 - 4x - 4y^2 = 0$.

Ответ: $y = \pm\dfrac{x+2}{2}$.

Пример 11.10. Найти координаты вершины параболы $x^2 - 12y - 36 = 0$.

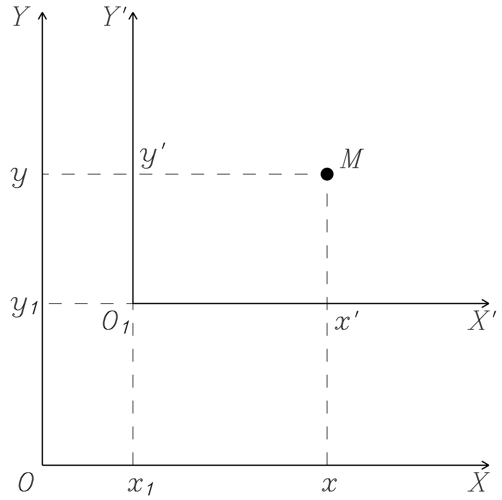
Ответ: $(0; 3)$.

Занятие 12. Параллельный перенос кривых второго порядка.

Общее уравнение плоской кривой второго порядка, при отсутствии поворота, можно записать в следующем виде:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Классификация кривых второго порядка в этом упрощенном случае имеет вид:
если $A \cdot C > 0$ *— это* **эллипс***;*
если $A \cdot C < 0$ *— это* **гипербола***;*
если $A \cdot C = 0$ *— это* **парабола**.



Слагаемые $2Dx$ и $2Ey$ возникают при *параллельном переносе* системы координат. В каноническом уравнении кривой второго порядка эти слагаемые отсутствуют. Система координат $x'O_1y'$ получена параллельным переносом системы координат xOy (оси "старой" и "новой" систем параллельны и одинаково направлены). Начало O_1 "новой" системы координат имеет в "старой" системе координаты (x_1, y_1). Возьмем произвольную точку M.

Вопрос: *Как связаны координаты точки* M *в "старой"* (x, y) *и "новой"* (x', y') *системах координат?*

Ответ: *Из рисунка видно, что* $x = x_1 + x'$, $y = y_1 + y'$. *То есть:*

$$x' = x - x_1, \qquad y' = y - y_1.$$

Выясним теперь, как связаны друг с другом уравнения одной и той же кривой в "старых" и "новых" координатах.

Пример 12.1. Дана кривая $x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 4 = 0$. Найти параллельный перенос системы координат, при котором уравнение кривой примет канонический вид. Построить эту кривую.

► Введем "новую" систему координат (x', y'). Заменим x и y на x' и y': $x = x_1 + x'$, $y = y_1 + y'$. Получаем:

$(x_1 + x')^2 + 9(y_1 + y')^2 - 4(x_1 + x') + 18(y_1 + y') + 4 = 0,$

раскроем скобки и сгруппируем по степеням x' и y':

$x'^2 + 9y'^2 + x'(2x_1 - 4) + y'(18y_1 + 18) + x_1^2 + 9y_1^2 - 4x_1 + 18y_1 + 4 = 0.$

Так как в каноническом виде не должно быть слагаемых с x' и y', коэффициенты при этих слагаемых должны быть равны нулю:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4 = 0, & x_1 = 2, \\ 18y_1 + 18 = 0, & y_1 = -1. \end{cases}$$

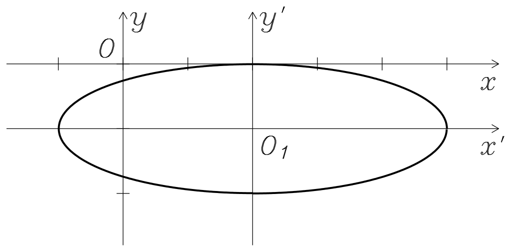
Здесь $(2; -1)$ — координаты начала координат “новой” системы координат, в которой уравнение кривой принимает вид:

$x'^2 + 9y'^2 + x' \cdot 0 + y' \cdot 0 + 4 + 9 - 8 - 18 + 4 = 0,$

$x'^2 + 9y'^2 = 9,$

$\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{1} = 1.$

Это уравнение эллипса с полуосями $a = 3$, $b = 1$. Построим график.



◀

Привести кривую к каноническому виду можно также выделяя полные квадраты по переменным x и y.

Пример 12.2. Построить гиперболу $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$. Записать уравнения ее асимптот.

Вопрос: Почему это уравнение гиперболы?

Ответ: Из общего уравнения кривой второго порядка видно, что $A = 9$, $C = -25$, тогда $A \cdot C = -225 < 0$ — следовательно, это гипербола.

▶ Выделим полные квадраты по переменным x и y:

$9(x^2 - 2x + 1) - 9 - 25(y^2 + 4y + 4) + 100 - 316 = 0,$

откуда

$9(x - 1)^2 - 25(y + 2)^2 = 225.$

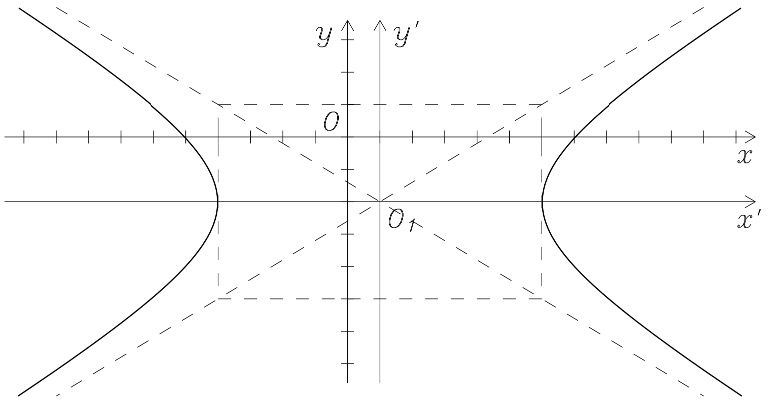
Разделим обе части уравнения на 225:

$\dfrac{(x-1)^2}{25} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1.$

Введем новую систему координат с началом в точке $(1; -2)$, получающуюся из старой параллельным переносом. Тогда $x' = x - 1$, $y' = y + 2$. Уравнение кривой в новой системе координат принимает вид:

$\dfrac{x'^2}{25} - \dfrac{y'^2}{9} = 1.$

Полуоси гиперболы $a = 5$, $b = 3$. Асимптоты гиперболы $y' = \pm\dfrac{b}{a}x' = \pm\dfrac{3}{5}x'$. В “старой” системе координат уравнения асимптот $(y + 2) = \pm\dfrac{3}{5}(x - 1)$, откуда $y = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{13}{5}$ и $y - -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{7}{5}$. Нарисуем график кривой:



◄

Пример 12.3. Постройте параболу $y = \dfrac{6x - x^2 - 13}{2}$. Найдите ее фокус и директрису.

► Преобразуем уравнение к виду $2y + x^2 - 6x + 13 = 0$ и выделяем полный квадрат по переменной x:

$2y + (x^2 - 6x + 9) - 9 + 13 = 0,$

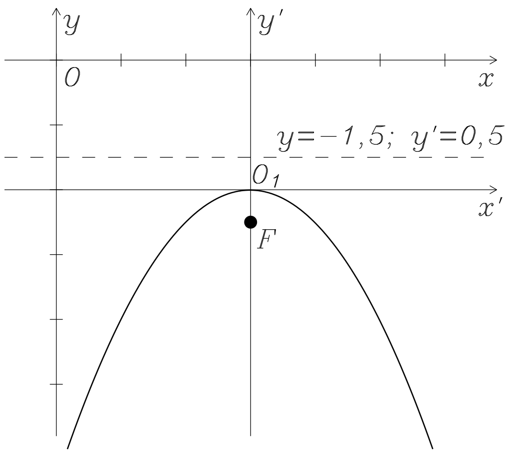
откуда получаем

$(x - 3)^2 = -2(y + 2).$

Произведем параллельный перенос осей координат: $x' = x - 3$, $y' = y + 2$. Новое начало координат $O_1(3; -2)$. Уравнение параболы в новых координатах приобретает вид:

$x'^2 = -2y'^2.$

Так как $x'^2 = 2py'^2$, то $p = -1$. Строим параболу.



Координаты фокуса $F(0; -0{,}5)$, уравнение директрисы $y' = 1/2/$ В исходной системе координат xOy координаты фокуса $F(3; -2{,}5)$, уравнение директрисы $y = -1{,}5$. ◄

Пример 12.4. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$.

► $(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 8y + 16) - 16 - 11 = 0,$

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36.$

Центр окружности в точке $(3; -4)$, радиус окружности $R = 6$. ◄

Пример 12.5. Привести к каноническому виду кривые:

а) $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0;$

б) $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 6 = 0;$

в) $4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0.$

▶
а) $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0$.
Выделяем полные квадраты:
$(x^2 + 4x + 4) - 4 + 2(y^2 - 2y + 1) - 2 = 0$,
$(x + 2)^2 + 2(y - 1)^2 = 6$,
$\dfrac{(x + 2)^2}{6} + \dfrac{(y - 1)^2}{3} = 1$.
Это эллипс с центром в точке $(-2; 1)$ и полуосями $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$.
б) $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 6 = 0$.
Выделяем полные квадраты:
$4(x^2 - 2x + 1) - 4 - (y^2 + 6y + 9) + 9 - 6 = 0$,
$4(x - 1)^2 - (y + 3)^2 = 1$,
$\dfrac{(x - 1)^2}{1/4} - \dfrac{(y - 3)^2}{1} = 1$.
Это гипербола с центром в точке $(1; -3)$ и полуосями $a = 1/2$, $b = 1$.
в) $4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0$.
Выделяем полные квадраты:
$4\left(x^2 + x + \dfrac{1}{4}\right) - 1 + 2y - 1 = 0$,
$4\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 2(y + 1)$,
$\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}(y + 1)$.
Это парабола с центром в точке $(-0{,}5; -1)$ и параметром $p = 1/4$. ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 12.6. Найти координаты фокусов эллипса $3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$.

Пример 12.7. Найти уравнения асимптот гиперболы $2x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 6 = 0$.

Пример 12.8. Построить кривые:
а) $3x^2 - 2y^2 + 6x - 4y - 1 = 0$;
б) $2x^2 + 6x + 3y + 6 = 0$.

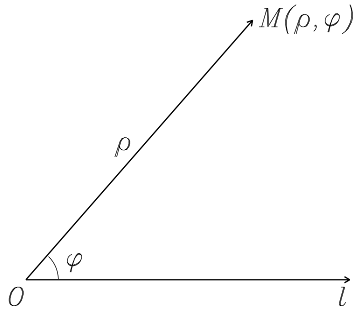
Занятие 13. Полярная система координат.

Полярная система координат на плоскости определяется заданием некоторой точки O, луча l, исходящего из этой точки, и единицы масштаба. Точка O называется полюсом, а луч l — полярной осью.

Если выбрать декартову систему координат так, чтобы ее начало O совпадало с полюсом полярной системы, а ось OX шла по полярной оси l, то между полярными координатами (ρ, φ) и декартовыми координатами (x, y) каждой точки M будет осуществляться следующая связь:

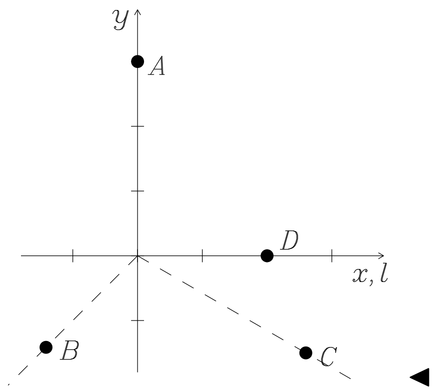
$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi, \tag{2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{3}$$



Пример 13.1. Построить точки, заданные своими полярными координатами: $A\left(3; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2; \dfrac{5\pi}{4}\right)$, $C\left(3; -\dfrac{\pi}{6}\right)$, $D(2; 0)$.

► *Точка M задается полярными координатами ρ и φ, ρ — полярный радиус $(0 \le \rho < \infty)$, φ — полярный угол $(-\infty < \varphi < \infty)$.*



◄

Пример 13.2. В полярной системе координат даны точки $M_1\left(4; \dfrac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(3; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(6; -\dfrac{\pi}{6}\right)$. Найти их декартовы координаты.

► Подставляя полярные координаты в формулы (2), найдем декартовы координаты данных точек.

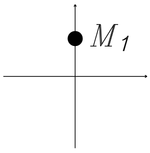
M_1: $x = 4\cos\dfrac{\pi}{4} = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, $y = 4\sin\dfrac{\pi}{4} = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, $M_1(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

M_2: $x = 3\cos\dfrac{\pi}{2} = 4 \cdot 0 = 0$, $y = 3\sin\dfrac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 = 3$, $M_2(0; 3)$.

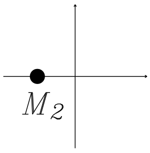
M_3: $x = 6\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, $y = 6\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$, $M_3(3\sqrt{3}; -3)$. ◀

Пример 13.3. В декартовой системе координат даны точки $M_1(0;2)$, $M_2(-1;0)$, $M_3(-\sqrt{3};1)$, $M_4(-1;-1)$, $M_5(1;\sqrt{3})$. Найти их полярные координаты.

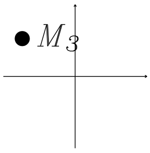
▶ Используя формулы (3), имеем:



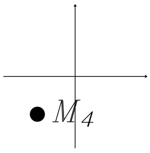
M_1: $\rho = \sqrt{0^2+2^2} = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{0} = \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $M_1\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$.



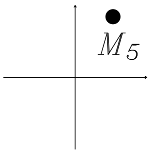
M_2: $\rho = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{0}{-1} = 0$, $\varphi = \pi$, $M_2(1;\pi)$.



M_3: $\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{-\sqrt{3}}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, $M_3\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$.



M_4: $\rho = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{-1} = 1$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ или $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, $M_4\left(\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}\right)$.



M_5: $\rho = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $M_5\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$. ◀

Пример 13.4. Найти полярное уравнение прямой $x = 1$.

▶ *В полярных координатах линия задается уравнением* $\Phi(\rho,\varphi) = 0$ *(или* $\rho = \rho(\varphi)$*), связывающим полярные координаты ее текущей точки.*

Используя формулу (2), найдем, что для данной прямой полярные координаты связаны условием $\rho\cos\varphi = 1$ или

$\rho = \frac{1}{\cos\varphi}$.

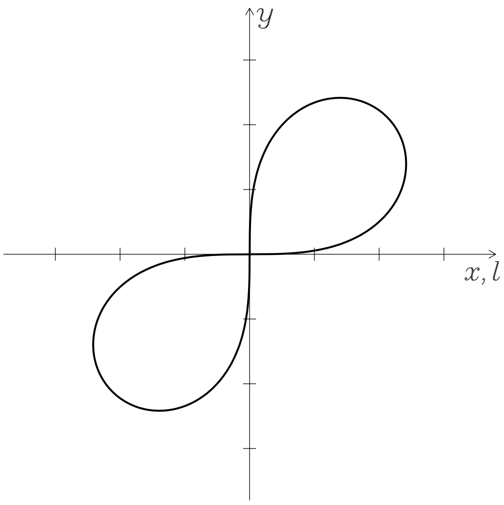
Это и есть уравнение данной прямой. Поскольку ρ — величина положительная, угол φ должен меняться так, чтобы $\cos\varphi$ был положителен, то есть находиться в I и IV четвертях. ◀

Пример 13.5. Дано полярное уравнение линии $\rho^2 = 9\sin 2\varphi$. Построить эту линию по точкам, задавая значения угла φ через промежуток $\pi/12$. Найти ее декартово уравнение.

▶ Так как левая часть данного уравнения неотрицательна, то угол φ может изменяться только в тех пределах, для которых $\sin 2\varphi \ge 0$, то есть $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ и $\pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$. Для вычисления значений ρ (ограничиваясь точностью 0,01) составим таблицу.

$\rho = \sqrt{9\sin 2\varphi} = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$.

N точек	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$
2φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π
$\sin 2\varphi$	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0
$\rho = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$	0	2,12	2,79	3	2,79	2,12	0	0	2,12	2,79	3	2,79	2,12	0



Построенная линия носит название *лемнискаты Бернулли*. Найдем ее уравнение в декартовой системе координат. Для этого воспользуемся формулой $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$. Подставим эту формулу в уравнение линии: $\rho^2 = 9\sin 2\varphi = 18\sin\varphi\cos\varphi$ и выразим ρ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ через x и y:

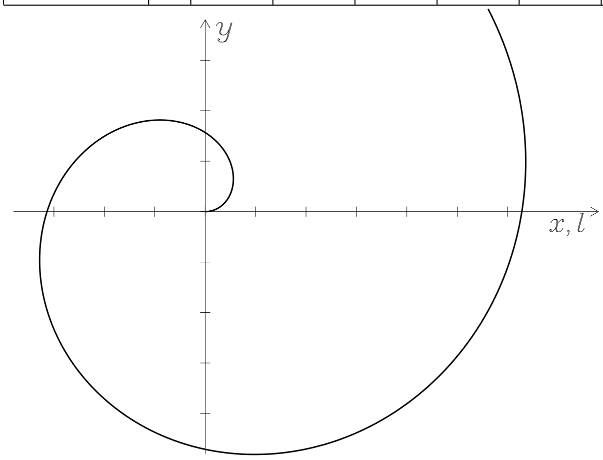
$$(\sqrt{x^2+y^2})^2 = 18\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$x^2+y^2 = \frac{18xy}{x^2+y^2},\ (x^2+y^2)^2 = 18xy. \blacktriangleleft$$

Пример 13.6. Построить линию $\rho = a\varphi$ в полярных координатах, приняв $a = 1$.

► Составим таблицу значений ρ:

N точек	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	0	0.52	1.05	1.57	2.09	2.62	3.14	3.67	4.19	4.71	5.24	5.76	6.28



Таким образом, мы получили линию, которая называется *спиралью Архимеда.* ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 13.7. Найти полярное уравнение прямой $x\sqrt{3}+y-2=0$.
Ответ: $\rho\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$.

Пример 13.8. Найти полярное уравнение окружности $x^2+y^2=9$.
Ответ: $\rho=3$.

Пример 13.9. Построить по точкам, задавая значения угла φ через промежуток $\pi/12$, линию $\rho=2\cos 2\varphi$. Написать декартово уравнение этой линии.
Ответ: $(x^2+y^2)^{3/2}=2(x^2-y^2)$.

Занятие 14. Комплексные числа.

Пример 14.1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -3 + 4i$.

1. Выписать действительные и мнимые части чисел z_1 и z_2.

2. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.

3. Изобразить данные числа геометрически.

► $z = a + bi$ — *алгебраическая форма комплексного числа.*

$a = \operatorname{Re} z$ — *действительная часть,*

$b = \operatorname{Im} z$ — *мнимая часть,*

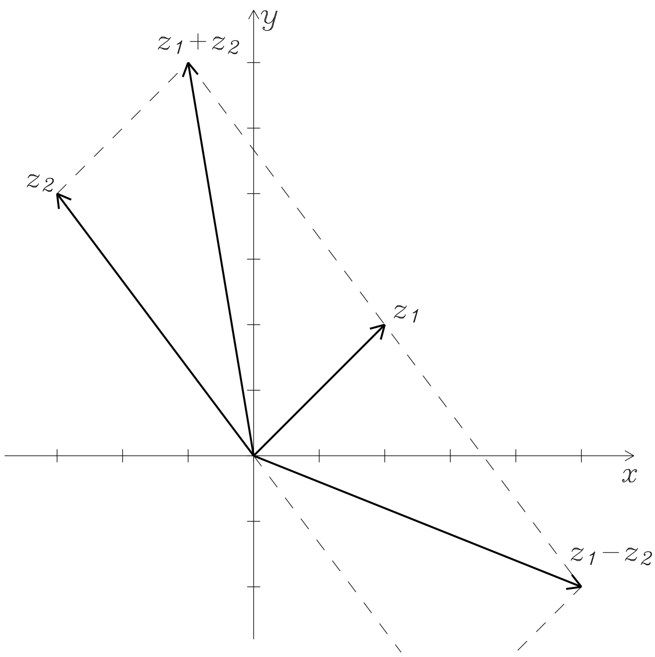
i — *мнимая единица,* $i^2 = -1$.

1. Итак, $\operatorname{Re} z_1 = 2$, $\operatorname{Im} z_1 = 2$, $\operatorname{Re} z_2 = -3$, $\operatorname{Im} z_2 = 4$.

2. $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$.

$z_1 + z_2 = (2 - 3) + (2 + 4)i = -1 + 6i$, $z_1 - z_2 = (2 - (-3)) + (2 - 4)i = 5 - 2i$.

3. *Комплексное число* $z = a + bi$ *можно изобразить точкой* $M(a; b)$ *на комплексной плоскости.*



$z_1 + z_2$ — сумма векторов, $z_1 - z_2$ — разность векторов. ◄

Пример 14.2. Дано: $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -3 + 4i$. Найти: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 \cdot z_1^*$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

► *Умножаем числа как двучлены, учитывая, что* $i^2 = -1$.

$z_1 \cdot z_2 = (2 + 2i)(-3 + 4i) = -6 + 8i - 6i + 8i^2 = -14 + 2i$.

$z^* = a - ib$, *если* $z = a + ib$.

$z_1^* = 2 - 2i$ — сопряженное комплексное число для $z_1 = 2 + 2i$.

$z_1 \cdot z_1^* = (2 + 2i)(2 - 2i) = 2^2 - (2i)^2 = 4 + 4 = 8$.

Произведение сопряженных комплексных чисел есть число действительное.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*}$.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(2 + 2i)(-3 - 4i)}{(-3 + 4i)(-3 - 4i)} = \dfrac{-6 - 8i - 6i - 8i^2}{(-3^2 - (4i)^2} = \dfrac{2 - 14i}{9 + 16} = \dfrac{2}{25} - \dfrac{14}{25}i$. ◄

Пример 14.3. Изобразить на комплексной плоскости числа и представить их в тригонометрической и показательной формах: $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_3 = -5$, $z_4 = -2i$.

► $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — *тригонометрическая форма комплексного числа.*

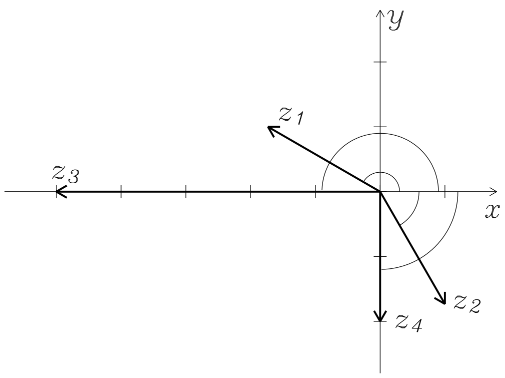
$z = re^{i\varphi}$ — *показательная форма комплексного числа.*

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — *модуль комплексного числа. Геометрически это длина радиус-вектора.*

φ — *аргумент комплексного числа,* $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$.

$-\pi \le \arg z \le \pi$ — *главное значение аргумента.*

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{для внутренних точек I и IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi, & \text{для II четверти,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \pi, & \text{для III четверти.} \end{cases}$$



Итак, $z_1 = -\sqrt{3} + i$ — II четверть. $r_1 = |z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$.

$\varphi_1 = \arg z_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{-\sqrt{3}} + \pi = -\dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{5}{6}\pi$.

$z_1 = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi + \sin\dfrac{5}{6}\pi\right) = 2e^{\frac{5}{6}\pi i}$.

$z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ — IV четверть. $r_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$.

$\varphi_2 = \arg z_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\dfrac{\pi}{3}$.

$z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

$z_3 = -5$ — на оси OX. $r_3 = |z_3| = 5$, $\varphi_3 = \arg z_3 = \pi$. $z_3 = -5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi) = 5e^{\pi i}$.

$z_4 = -2i$ — на оси OY. $r_4 = |z_4| = 2$, $\varphi_4 = \arg z_4 = -\dfrac{\pi}{2}$.

$z_4 = -2i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$. ◄

Пример 14.4. Для чисел z_1 и z_2 примера 14.3 выполнить действия $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^6 в тригонометрической или показательной формах.

► $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$,

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$,

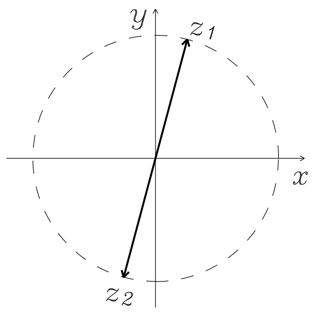
$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{n\varphi i}$.

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 2 \left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right] = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}e^{\left(\frac{5}{6}\pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)i} = e^{\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{3}\right)i} = e^{i\frac{7}{6}\pi} = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},$$
$$z_1^6 = 2^6\left(\cos 6 \cdot \frac{5}{6}\pi + i\sin 6 \cdot \frac{5}{6}\pi\right) = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) = -64. \blacktriangleleft$$

Пример 14.5. Найти $\sqrt{-\sqrt{3}+i}$.

$\blacktriangleright$ $z = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$ (см. пример 14.3).

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$
$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
$$\sqrt{-\sqrt{3}+1} = \sqrt{2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi}{2}\right),\ k = 0, 1.$$



$$k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right),$$
$$k = 1 \qquad \Rightarrow \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{5}{6}\pi + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{5}{6}\pi + 2\pi}{2}\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i\sin\frac{17}{12}\pi\right).$$

Корни являются точками на окружности радиусом $R = \sqrt{2}$, симметричными относительно начала координат. $\blacktriangleleft$

Задания для самостоятельной работы.

Пример 14.6. $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}$. Записать $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$.

Ответ: $\operatorname{Re} z = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{5}{7}$.

Пример 14.7. Найти $(1+i)^8 \cdot (1 - i\sqrt{3})^6$.

Ответ: 1024.

Пример 14.8. Решить уравнение $z^2 + i = 0$.

Ответ: $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Занятие 15. Последовательность и ее предел.

Пример 15.1. Выписать пять первых членов последовательности
$\{x_n\} = \left\{\dfrac{n^3 - n + 1}{n^4 + n^2 + 1}\right\}$.

► Придавая n значения 1, 2, 3, 4, 5, получаем
$x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$, $x_3 = \dfrac{25}{91}$, $x_4 = \dfrac{61}{275}$, $x_5 = \dfrac{121}{651}$. ◄

Пример 15.2. Написать какую-нибудь формулу для общего члена последовательности, если известны ее первые пять членов:

$3 \cdot 2,\ 5 \cdot 2^2,\ 7 \cdot 2^3,\ 9 \cdot 2^4,\ 11 \cdot 2^5, \ldots$

► Числа 3, 5, 7, 9, 11 образуют арифметическую прогрессию с первым членом 3 и разностью 2. Ее n-й член равен $3 + 2(n-1) = 2n+1$. Общий же член геометрической прогрессии $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ выражается формулой 2^n. Поэтому можно выбрать в качестве искомой формулы

$x_n = (2n+1) \cdot 2^n$.

Разумеется, эта формула не является единственной. Например, формула

$x_n = (2n+1) \cdot 2^n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

тоже удовлетворяет условию задачи. Вообще, зная конечное число членов последовательности, нельзя однозначно найти формулу для ее общего члена. ◄

Пример 15.3. Доказать, что числовая последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{n^2+1}\right\}$ возрастает.

► Мы имеем $x_n = 1 - \dfrac{1}{n^2+1}$. Так как $(n+1)^2 > n^2$, то $\dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n^2}$ и

$$x_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1} > 1 - \frac{1}{n^2+1} = x_n.$$

Итак, $a_{n+1} > a_n$, значит, последовательность возрастает. ◄

Пример 15.4. Доказать, что числовая последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n^3+1}{n^3+4}\right\}$ ограничена.

► Мы имеем $\dfrac{n^3+1}{n^3+4} = 1 - \dfrac{3}{n^3+4}$, поэтому $0 < \dfrac{n^3+1}{n^3+4} < 1$, *то есть,* $0 < x_n < 1$. *Это означает, что последовательность ограничена.* ◄

Пример 15.5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ имеет предел, равный 1.

► Надо доказать, что, *какое бы $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, для него найдется натуральное число N, такое что для всех $n > N$ имеет место неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$.*

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$, то для отыскания N достаточно решить неравенство $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Отсюда, $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ и, следовательно, за N можно принять целую часть от $\dfrac{1}{\varepsilon}$: $N = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$; мы тем самым доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. ◄

Пример 15.6. Пользуясь определением, доказать, что последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n^3+n+5}\right\}$ есть *бесконечно малая, то есть, что* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

► Мы должны показать, что *для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать число* $N(\varepsilon)$, *такое, что для всех* $n > N$ *величина* $|x_n| < \varepsilon$. Имеем $|x_n| = \dfrac{1}{n^3+n+5} < \dfrac{1}{n^3}$. Для каждого n, удовлетворяющего неравенству $\dfrac{1}{n^3} < \varepsilon$, то есть для $n > \dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$, будет справедливо неравенство $|x_n| < \varepsilon$. Следовательно, за N можно взять целую часть $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$, то есть $E\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right)$. ◄

Пример 15.7. Пусть q — число, удовлетворяющее условию $|q| > 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, то есть что последовательность $\{q^n\}$ бесконечно большая.

► Так как $|q| > 1$, то, положив $|q| = 1+h$, видим, что $h > 0$. Тогда, по биному Ньютона,

$$|q^n| = |q|^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3 + \ldots$$

Так как все слагаемые в последней сумме положительны, то $|q^n| > n \cdot h$. Последовательность $\{n \cdot h\}$ бесконечно большая. Значит, и $\{q^n\}$ — бесконечно большая последовательность, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$. ◄

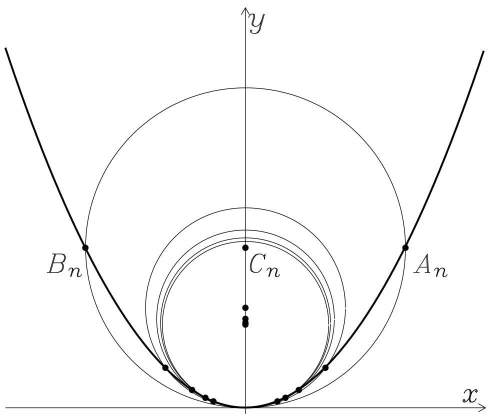
Пример 15.8. Найти предел последовательности, заданной общим членом:

$$x_n = \frac{n^2}{2n^2+1} + \frac{\sqrt{n}+2}{n+3}.$$

► Применим теорему о пределе суммы и найдем предел каждого слагаемого. При $n \to \infty$ числитель и знаменатель каждого слагаемого стремятся к бесконечности, и мы не можем непосредственно применить теорему о пределе частного. Поэтому преобразуем x_n, разделив числитель и знаменатель первого слагаемого на n^2, а второго на n. Затем, применяя теорему о пределе частного и о пределе суммы, найдем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\dfrac{1}{n^2}} + \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{3}{n}} = \frac{1}{2}. \text{ ◄}$$

Пример 15.9. На графике функции $y = x^2$ задаются точки A_n и B_n с абсциссами соответственно $\dfrac{1}{n}$ и $-\dfrac{1}{n}$. Через A_n, B_n и начало координат проводится окружность с центром в точке C_n. Найти предел последовательности точек C_n.



► Центры окружностей расположены на оси ординат. Их уравнения записываются в виде

$x^2 + (y - y_n)^2 = y_n^2,$

где y_n — ордината центра n-й окружности. Подставляя $x = \dfrac{1}{n}$, $y = \dfrac{1}{n^2}$ и упрощая, получим

$y_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right).$

Отсюда получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{1}{2}$. Точки C_n стремятся к точке $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. ◄

Пример 15.10. $x_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n-5}\right)^3$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

► $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^3 = \left[\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{n}\right)}\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$ ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 15.11. Написать первые 5 членов последовательностей, если

а) $x_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n^2}$

Ответ: $0, \dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{8}, 0.$

б) $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$

Ответ: $1, 0, -1, 0, 1.$

Пример 15.12. По заданным первым членам подобрать формулу общего члена:

а) $\sqrt{1\cdot 2}, \sqrt{2\cdot 3}, \sqrt{3\cdot 4}, \sqrt{4\cdot 5}, \ldots$

Ответ: $a_n = \sqrt{n(n+1)}.$

б) $\dfrac{1}{1}, -\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}\right)^2, \left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right)^3, -\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right)^4, \ldots$

Ответ: $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n!)^n}.$

Пример 15.13. Найти пределы последовательностей, пользуясь теоремами о пределах суммы, произведения, частного:

а) $x_n = \dfrac{1 - n - n^3}{(3n+1)^3}$

Ответ: $-\dfrac{1}{27}.$

б) $x_n = \sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 - 4n + 3}$

Ответ: 3.

Пример 15.14. Формулируя определение предела последовательности, студент вместо “для любого $\varepsilon > 0$” сказал “для любого ε”. Существуют ли последовательности, обладающие пределом при таком определении?

Ответ: нет, так как при $\varepsilon < 0$ неравенство $|a_{n-1} - a_n| < \varepsilon$ невозможно.

Пример 15.15. Формулируя определение предела, студент вместо “найдется такое N”, сказал “при всех N”. Какие последовательности имеют предел при таком определении?

Ответ: последовательность вида $a, a, a, a, \ldots a$.

Пример 15.16. Написать первые 5 членов последовательности, общий член которых имеет вид:

а) $x_n = \dfrac{n!}{n^n + 1}$;

б) $x_n = \cos \dfrac{\pi n}{2}$.

Пример 15.17. По заданным первым членам последовательностей подобрать одну из формул общего члена:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2\sqrt{2}}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{4\sqrt{2}}, \ldots$

Ответ: $x_n = \dfrac{2n-1}{2^{n/2}}$.

б) $\dfrac{3}{2^2 3^2}, -\dfrac{5}{3^2 4^2}, \dfrac{7}{4^2 5^2}, -\dfrac{9}{5^2 6^2}, \ldots$

Ответ: $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

Пример 15.18. Найти пределы последовательностей, пользуясь теоремами о пределах суммы, произведения, частного:

а) $x_n = \dfrac{3-n}{2n+1} - \dfrac{3n^2+2}{4n^2+1}$

Ответ: $-\dfrac{5}{4}$.

б) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt{n}}$

Ответ: 1.

Занятие 16. Замечательные пределы. Непрерывность функции и точки разрыва.

Пример 16.1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$.

► *Первый замечательный предел:*

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$ *или* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=k.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\dfrac{1}{3}\cdot 5=\dfrac{5}{3}.$ ◄

Пример 16.2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

► $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}{x\cdot x}=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$ ◄

Пример 16.3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}x$.

► $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos x}{\sin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1.$ ◄

Пример 16.4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

► *Второй замечательный предел:*

$\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=(1^\infty)=e$ *или* $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=(1^\infty)=e.$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}=(1^\infty)=\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}=e.$ ◄

Пример 16.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

► $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\{\text{делим многочлены}\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x}=(1^\infty)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}}=e^2.$ ◄

Пример 16.6. Исследовать на непреывность и найти точки разрыва функции $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

► Функция $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ не определена в точке $x=1$, поэтому эта точка является точкой разрыва.

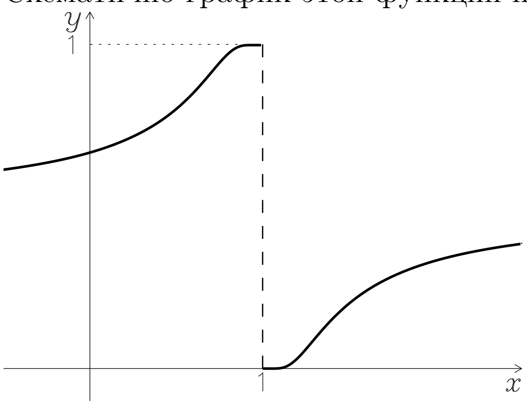
Находим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\dfrac{1}{1+2^{-\infty}}=\dfrac{1}{1+0}=1,$

$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\dfrac{1}{1+2^{\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0.$

Пределы слева и справа существуют, но не равны между собой, поэтому точка $x = 1$ является точкой разрыва I-го рода (скачок).

Схематично график этой функции имеет вид:



◀

Пример 16.7. Исследовать на непреывность и найти точки разрыва функции $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$.

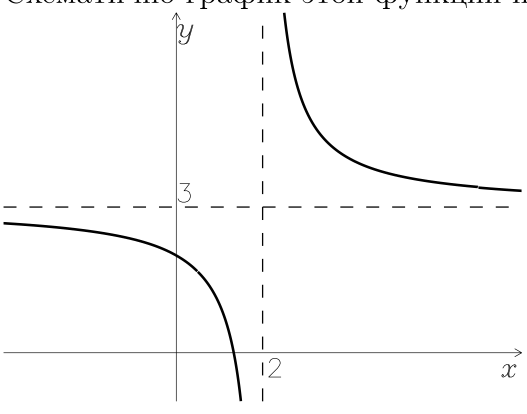
▶ Функция $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ не определена в точке $x = 2$, поэтому эта точка является точкой разрыва.

$\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{3x-4}{x-2} = \dfrac{2}{-0} = -\infty, \qquad \lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{3x-4}{x-2} = \dfrac{2}{+0} = +\infty,$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-4}{x-2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-\dfrac{4}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = \dfrac{3-0}{1-0} = 3.$

Точка $x = 2$ является точкой разрыва II рода.

Схематично график этой функции имеет вид:



◀

Пример 16.8. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции:

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \le 1, \\ x+2, & \text{если } 1 < x < 2, \\ 4, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

▶ Функция определена во всех точках. Исследуем непрерывность в точках $x = 1$ и $x = 2$.

$f(1) = x^2\big|_{x=1} = 1,\ \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1,\ \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 3.$

Если $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, *то функция имеет в точке* $x = x_0$ *разрыв I рода.*

Следовательно, функция имеет в точке $x = 1$ разрыв I рода.

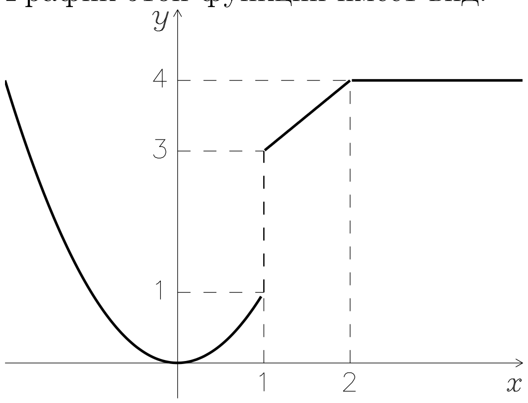
$f(2) = 4$, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$,

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 4 = 4$.

Если $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, *то функция в точке* $x = x_0$ *непрерывна.*

Следовательно, функция в точке $x = 2$ непрерывна.

График этой функции имеет вид:



◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 16.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x}$.

Ответ: 3.

Пример 16.10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

Ответ: $e^{\frac{9}{2}}$.

Пример 16.11. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y = \dfrac{x}{x^2-4}$.

Ответ: $x = \pm 2$ — точки разрыва II рода.

Пример 16.12. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y = e^{\frac{1}{x+1}}$.

Ответ: $x = -1$ — точка разрыва II рода.

Занятие 17. Вычисление пределов с помощью таблицы эквивалентных функций.

Пример 17.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x}$.

► $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\sin 3x \cdot \sin x}{\arcsin^2 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\cdot 3x\cdot x}{(3x)^2} = -\dfrac{2}{3}$.

Функции $f(x)$ *и* $g(x)$ *эквивалентны в окрестности точки* x_0, *если* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Эквивалентность обозначается так: $f(x) \underset{x\to x_0}{\simeq} g(x)$.

$\sin kx \underset{x\to 0}{\simeq} kx, \qquad \arcsin kx \underset{x\to 0}{\simeq} kx$. ◄

Пример 17.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} \frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}$.

► $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} \frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{7}{4}x}{-2x} = -\dfrac{7}{8}$.

$\operatorname{arctg} kx \underset{x\to 0}{\simeq} kx, \qquad e^{kx} - 1 \underset{x\to 0}{\simeq} kx$. ◄

Пример 17.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

► $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

$\sin(x-3) \underset{x\to 3}{\simeq} (x-3)$. ◄

Пример 17.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

► $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{x^2}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

$\cos x \underset{x\to 0}{\simeq} 1 - \dfrac{x^2}{2}, \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\simeq} x$. ◄

Пример 17.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x-e}$.

► $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x-e} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - \ln e}{x-e} = \lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln \dfrac{x}{e}}{x-e} = \lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln\left[1+\left(\dfrac{x}{e}-1\right)\right]}{x-e} =$

$= \lim\limits_{x\to e} \dfrac{\dfrac{x}{e}-1}{x-e} = \dfrac{1}{e}\lim\limits_{x\to e} \dfrac{x-e}{x-e} = \dfrac{1}{e}$. ◄

Пример 17.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right)\cdot x$.

► $\lim\limits_{x\to\infty} \left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right)\cdot x = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln a}{x}\cdot x = \ln a$.

$a^x - 1 = e^{x\ln a} - 1 \underset{x\to 0}{\simeq} x\ln a$. ◄

Пример 17.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

► $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Введем бесконечно малую $\alpha=\pi-x$, тогда $x=\pi-\alpha$.

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin 2(\pi-\alpha)}{\sin 3(\pi-\alpha)}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin(2\pi-2\alpha)}{\sin(3\pi-3\alpha)}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{-\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{-2\alpha}{3\alpha}=-\dfrac{2}{3}$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Вычислить пределы:

Пример 17.8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{4x+8}$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

Пример 17.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

Пример 17.10. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 6x}$.

Ответ: $-\dfrac{5}{6}$.

Пример 17.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32x^5-x^8}}{e^{5x}-1}$.

Ответ: $\dfrac{2}{5}$.

Занятие 18. Производные произведения, частного и сложных функций.

Пример 18.1. Найти производную функции $y = (x^3 + 4x - 5) \cdot \cos 4x$.
► $y = (x^3 + 4x - 5) \cdot \cos 4x$.
$(u \cdot v)' = u'v + uv'$, $\quad (x^n)' = nx^{n-1}$, $\quad C' = 0$ $(C = \text{const})$,
$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ $\ [u = u(x)]$.
$y' = (x^3+4x-5)' \cdot \cos 4x + (x^3+4x-5) \cdot (\cos 4x)' = (3x^2+4)\cos 4x - 4(x^3+4x-5)\sin 4x$. ◄

Пример 18.2. Найти производную функции $y = 3^x \cdot \arcsin 4x$.
► $y = 3^x \cdot \arcsin 4x$.
$(a^u)' = (e^{u \ln a})' = a^u \ln a \cdot u'$, $\quad (\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
$y' = (3^x)' \cdot \arcsin 4x + 3^x \cdot (\arcsin 4x)' = 3^x \ln 3 \cdot \arcsin 4x + 3^x \cdot \dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$. ◄

Пример 18.3. Найти производную функции $y = (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x$.
► $y = (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x$.
$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad (\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ $\ [u = u(x)]$.
$y' = (1+x^2)' \cdot \operatorname{arctg} x + (1+x^2) \cdot (\operatorname{arctg} x)' = 2x \operatorname{arctg} x + (1+x^2) \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = 2x \operatorname{arctg} x + 1$. ◄

Пример 18.4. Найти производную функции $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.
► $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $\quad (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\quad (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$$y' = \frac{(\operatorname{tg} x)' \cdot \sqrt{x} - \operatorname{tg} x \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \sqrt{x} - \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{\cos^2 x} - \dfrac{\operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{2x - \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}{2x\sqrt{x}\cos^2 x} = \frac{2x - \dfrac{\sin x \cdot \cos^2 x}{\cos x}}{2x\sqrt{x}\cos^2 x} = \frac{2x - \dfrac{1}{2}\sin 2x}{2x\sqrt{x}\cos^2 x} = \frac{4x - \sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}.$$

$\sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$. ◄

Пример 18.5. Найти производную функции $y = \ln(x^3 + 7x + 2)$.
► $y = \ln(x^3 + 7x + 2)$.
$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
$y' = \dfrac{(x^3+7x+2)'}{x^3+7x+2} = \dfrac{3x^2+7}{x^3+7x+2}$. ◄

Пример 18.6. Найти производную функции $y = 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)}$.
► $y = 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)}$.
$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, $\qquad (\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$, $\qquad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.
$y' = 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)} \ln 3 \cdot [\operatorname{tg}^4(x^2+5x)]' = 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)} \ln 3 \cdot 4 \operatorname{tg}^3(x^2+5x) \cdot [\operatorname{tg}(x^2+5x)]' =$
$= 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)} \ln 3 \cdot 4 \operatorname{tg}^3(x^2+5x) \cdot \dfrac{(x^2+5x)'}{\cos^2(x^2+5x)} =$
$= 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)} \ln 3 \cdot 4 \operatorname{tg}^3(x^2+5x) \cdot \dfrac{2x+5}{\cos^2(x^2+5x)}$. ◄

Пример 18.7. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{1-x} \cdot e^{-3x}$.
► $y = \sqrt[3]{1-x} \cdot e^{-3x}$.
$(e^u)' = e^u \cdot u'$.
$y' = (\sqrt[3]{1-x})' \cdot e^{-3x} + \sqrt[3]{1-x} \cdot (e^{-3x})' =$
$= \left[(1-x)^{\frac{1}{3}}\right]' \cdot e^{-3x} + \sqrt[3]{1-x} \cdot e^{-3x} \cdot (-3x)' =$
$= \dfrac{1}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (1-x)' \cdot e^{-3x} + \sqrt[3]{1-x} \cdot e^{-3x} \cdot (-3) =$
$= \dfrac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-1) \cdot e^{-3x} + \sqrt[3]{1-x} \cdot e^{-3x} \cdot (-3) =$
$= -\dfrac{e^{-3x}}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} - 3\sqrt[3]{1-x} \cdot e^{-3x} = -e^{-3x}\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} + 3\sqrt[3]{1-x}\right) =$
$= -e^{-3x} \cdot \dfrac{1+9(1-x)}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} = -\dfrac{e^{-3x}(10-9x)}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$. ◄

Пример 18.8. Найти производную функции $y = \ln \sin \dfrac{2x+4}{x+1}$.
► $y = \ln \sin \dfrac{2x+4}{x+1}$.
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $\qquad \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.

$$y' = \frac{\left(\sin \dfrac{2x+4}{x+1}\right)'}{\sin \dfrac{2x+4}{x+1}} = \frac{\cos \dfrac{2x+4}{x+1} \cdot \left(\dfrac{2x+4}{x+1}\right)'}{\sin \dfrac{2x+4}{x+1}} =$$

$$= \operatorname{ctg} \frac{2x+4}{x+1} \cdot \frac{(2x+4)' \cdot (x+1) - (2x+4) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \operatorname{ctg} \frac{2x+4}{x+1} \cdot \frac{2(x+1)-(2x+4)}{(x+1)^2} =$$

$$= \operatorname{ctg} \frac{2x+4}{x+1} \cdot \frac{2x+2-2x-4}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2x+4}{x+1}. \text{ ◄}$$

Задания для самостоятельной работы.

Найти производные следующих функций:

Пример 18.9. $y = \sin^3(x^2+3x+1)$.
Ответ: $y' = 3\sin^2(x^2+3x+1) \cdot \cos(x^2+3x+1) \cdot (2x+3)$.

Пример 18.10. $y = \arcsin(e^{x^2})$.
Ответ: $y' = \dfrac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$.

Пример 18.11. $y = \sqrt{x} \cdot \cos^2 x$.
Ответ: $y' = \dfrac{\cos^2 x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot \sin 2x$.

Пример 18.12. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^3}$.
Ответ: $y' = \dfrac{x - 3(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^4(1+x^2)}$.

Пример 18.13. $y = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln\cos x$.
Ответ: $y' = \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} - \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x$.

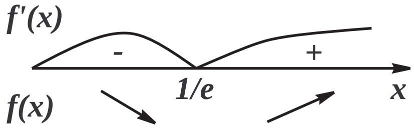
Занятие 19. Нахождение областей возрастания и убывания функций. Уравнения касательной и нормали.

Если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает в точке x_0.
Если $f'(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ убывает в точке x_0.

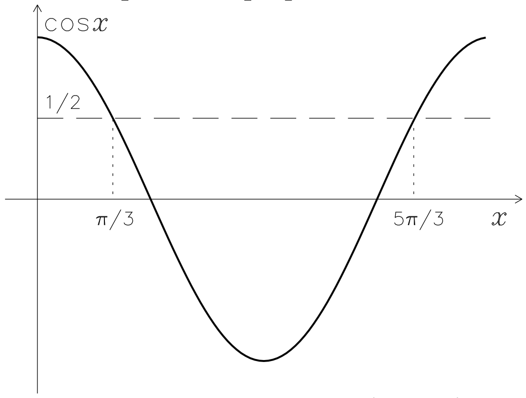
Пример 19.1. Найти интервалы возрастания и убывания функций:
а) $y = \dfrac{1}{2x}$.
► $x \in (-\infty; 0) \cup (0, +\infty)$.

Найдем производную функции: $y' = -\dfrac{1}{2x^2}$. Очевидно, что $y' < 0$ на всей области определения. Следовательно, функция убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$. ◄

б) $f(x) = x \ln x$.
► $x \in (0; \infty)$, $f'(x) = \ln x + 1$.
$f'(x) = \ln x + 1 = 0 \Longrightarrow \ln x = -1, x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.
Исследуем знак производной на $\left(0; \dfrac{1}{e}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{e}; \infty\right)$:



На $\left(0; \dfrac{1}{e}\right)$ функция убывает, на $\left(\dfrac{1}{e}; \infty\right)$ функция возрастает. ◄
в) $f(x) = x(1 + \sqrt{x})$ ($\sqrt{x} > 0$, используется арифметическое значение).
► $x \in [0; +\infty)$, $f'(x) = (x + x^{3/2})' = 1 + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.
$f'(x) > 0$ при $x \in [0; +\infty)$.
Функция возрастает на всей области определения $[0; +\infty)$. ◄
г) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sin x$ на $[0; 2\pi]$.
► $x \in [0; 2\pi]$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \cos x$.
$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \cos x < \dfrac{1}{2}$.
Рассмотрим на графике:



$f'(x) = \dfrac{1}{2} - \cos x > 0$ на $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right)$,

$f'(x) = \dfrac{1}{2} - \cos x < 0$ на $\left(0; \dfrac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\dfrac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$.

На $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right)$ функция возрастает,

на $\left(0; \dfrac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\dfrac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$ функция убывает. ◀

Пусть $y = f(x)$ — уравнение некоторой кривой, а $M(x_1; y_1)$ — точка, принадлежащая данной кривой.

Геометрический смысл производной состоит в том, что $f'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha = k_{\text{кас}}$, $k_{\text{кас}}$ — угловой коэффициент касательной. Уравнение касательной к данной кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_1; y_1)$ имеет вид:

$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$, *где* $y_1 = f(x_1)$.

Нормалью к кривой в точке $M(x_1; y_1)$ называется перпендикуляр к касательной, проведенный через точку касания. Уравнение нормали имеет вид:

$y - y_1 = -\dfrac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$.

Пример 19.2. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y = \dfrac{3x-4}{2x-3}$ в точке $M(2; 2)$.

► Для определения углового коэффициента касательной найдем производную:

$y' = \dfrac{3(2x-3) - 2(3x-4)}{(2x-3)^2} = -\dfrac{1}{(2x-3)^2}$, $k_{\text{кас}} = y'(2) = -1$, $k_{\text{норм}} = 1$.

$y - 2 = -(x - 2)$, $x + y - 4 = 0$ — уравнение касательной,

$y - 2 = x - 2$, $x - y = 0$ — уравнение нормали. ◀

Пример 19.3. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$ в точке $x = 1$.

► Найдем ординату точки касания: $1 - 2y^2 + 5 + y - 5 = 0$, $-2y^2 + y + 1 = 0$,

$y_1 = 1$, $y_2 = -\dfrac{1}{2}$, $M_1(1; 1)$, $M_2\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Найдем производную функции: $3x^2 - 4xy^2 - 4x^2yy' + 5 + y' = 0$,

$y'(1 - 4x^2y) = 4xy^2 - 3x^2 - 5$, $y' = \dfrac{4xy^2 - 3x^2 - 5}{1 - 4x^2y}$.

Найдем угловые коэффициенты касательных и нормалей в точках M_1 и M_2:

$k_{\text{кас}} = y'(1; 1) = \dfrac{4}{3}$, $k_{\text{норм}} = -\dfrac{3}{4}$;

$k_{\text{кас}} = y'\left(1; -\dfrac{1}{2}\right) = -7$, $k_{\text{норм}} = \dfrac{1}{7}$.

$y - 1 = \dfrac{4}{3}(x - 1)$, $4x - 3y - 1 = 0$ — уравнения касательной в точке $M_1(1; 1)$;

$y - 1 = -\dfrac{3}{4}(x - 1)$, $3x + 4y - 7 = 0$ — уравнения нормали в точке $M_1(1; 1)$.

$y + \dfrac{1}{2} = -7(x - 1)$, $14x + 2y - 13 = 0$ — уравнения касательной в точке $M_2\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$;

$y + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{7}(x - 1)$, $2x - 14y - 9 = 0$ уравнения нормали в точке $M_2\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$. ◀

Пример 19.4. Определить, в какой точке касательная к параболе $y = x^2 + 3x - 5$ параллельна прямой $7x - y + 3 = 0$.

► *Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны.*

Найдем угловой коэффициент касательной к параболе в точке $x = x_0$:

$k_1 = y'(x_0) = 2x_0 + 3$.

$k_2 = 7$ — угловой коэффициент заданной прямой.

$k_1 = k_2 \Longrightarrow 2x_0 + 3 = 7$, $x_0 = 2$, $y_0 = y(x_0) = 5$.

В точке $(2; 5)$ касательная параллельна данной прямой. ◄

Пример 19.5. Под какими углами пересекаются гипербола $y = \dfrac{1}{x}$ с параболой $y = \sqrt{x}$?.

► *За угол между кривыми принимается угол между касательными к кривым, проведенными через их общую точку.*

Найдем точку пересечения кривых: $\dfrac{1}{x} = \sqrt{x}$, $x^{3/2} = 1$, $x = 1$.

Далее найдем угловые коэффициенты касательных в точке $x = 1$:

$k_1 = y_1'(1) = \left(\dfrac{1}{x}\right)'_{x=1} = -1$, $k_2 = y_2'(1) = (\sqrt{x})'_{x=1} = \dfrac{1}{2}$.

Подставляя значения угловых коэффициентов в формулу $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$, вычисляем $\operatorname{tg}\varphi$:

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\dfrac{1}{2} + 1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 3$, $\varphi = \operatorname{arctg} 3$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 19.6. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

а) $f(x) = x^3e^{-x}$.

Ответ: на $(-\infty; 3)$ функция возрастает, на $(3; +\infty)$ — убывает.

б) $f(x) = (x^2 - 1)^{3/2}$.

Ответ: на $(1; +\infty)$ функция возрастает, на $(-\infty; -1)$ — убывает.

в) $f(x) = \ln\sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arctg} x$.

Ответ: на $(-\infty; -1)$ функция убывает, на $(-1; +\infty)$ — возрастает.

г) $f(x) = (2 - x)(x + 1)^2$.

Ответ: на $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ функция убывает, на $(-1; 1)$ — возрастает.

Пример 19.7. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = 2\sqrt{2}\sin x$ в точке $M\left(\dfrac{\pi}{4}; 2\right)$.

Ответ: $2x - y + 2 + \dfrac{\pi}{2} = 0$ — уравнение касательной, $x + 2y - 4 - \dfrac{\pi}{4} = 0$ — уравнение нормали.

Пример 19.8. Определить, под каким углом кривая $y = \dfrac{x - 1}{1 + x^2}$ пересекает ось абсцисс.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

Пример 19.9. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$ а) параллельна прямой $y = 4x - 5$; б) перпендикулярна прямой $2x - 6y + 5 = 0$?

Ответ: а) $(2;4)$; б) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

Пример 19.10. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 + 4x$ параллельна оси OX?

Ответ: $(-2;-4)$.

Пример 19.11. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

а) $f(x) = xe^{-x}$.

Ответ: на $(-\infty;1)$ функция возрастает, на $(1;+\infty)$ — убывает.

б) $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Ответ: на $(-\infty;0)$, $(2;+\infty)$ функция возрастает, на $(0;2)$ — убывает.

в) $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{x+2}$.

Ответ: на $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(4;+\infty)$ функция убывает, на $(0;4)$ — возрастает.

г) $f(x) = \dfrac{e^x}{(x+3)^2}$.

Ответ: на $(-\infty;-3)$, $(-1;+\infty)$ функция убывает, на $(-3;-1)$ — возрастает.

Пример 19.12. Показать, что парабола $y = \dfrac{x^2}{2e}$ касается кривой $y = \ln x$, найти точку касания.

Пример 19.13. Написать уравнение касательной к кривой $y = \dfrac{2}{4+x}$ в точке $x = 2$.

Ответ: $y = -\dfrac{x}{2} + 2$.

Пример 19.14. Написать уравнение касательной и нормали к окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью OX.

Ответ: в точке $(-3;0)$: $x + 2y + 3 = 0$ — уравнение касательной, $2x - y + 6 = 0$ — уравнение нормали; в точке $(-1;0)$: $x - 2y + 1 = 0$ — уравнение касательной, $2x + y + 2 = 0$ — уравнение нормали.

Пример 19.15. Под каким углом пересекаются кривые $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x$?

Ответ: $\operatorname{arctg} 3$.

Занятие 20. Применение дифференциала для приближенных вычислений. Производные высших порядков.

Пример 20.1. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{16{,}64}$.

► Воспользуемся формулой $f(x_1) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Здесь $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Полагаем $x_0 = 16$, тогда $x_1 = 16{,}64$ и $\Delta x = 0{,}64$.

$f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{32}$.

$\sqrt[4]{16{,}64} \simeq 2 + \dfrac{1}{32}\cdot 0{,}64 = 2 + 0{,}02 = 2{,}02$. ◄

Пример 20.2. Найти приближенное значение $\sin 29^\circ$.

► Здесь $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$.

Полагаем $x_0 = 30^\circ$, тогда $x_1 = 29^\circ$ и $\Delta x = -1^\circ$.

В радианах $\Delta x = \dfrac{-1^\circ\pi}{180^\circ} \simeq -\dfrac{3{,}14}{180} \simeq -0{,}017$.

$f(x_0) = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, $f'(x_0) = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$.

$\sin 29^\circ \simeq \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-0{,}017) \simeq 0{,}5 - 0{,}866\cdot 0{,}017 \simeq 0{,}5 - 0{,}015 = 0{,}485$. ◄

Пример 20.3. Найти производные второго порядка от следующих функций:

а) $y = (5-2x)^4$;

б) $y = (1+x^2)\cdot \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

► Производной n-го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $n-1$-го порядка.

Пусть $y = f(x)$ *и* $y' = f'(x)$, *тогда* $y'' = (y')' = f''(x), \ldots\ y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x)$.

а) $y = (5-2x)^4$.

$y' = 4(5-2x)^3\cdot(-2) = -8\cdot(5-2x)^3$.

$y'' = -8\cdot 3(5-2x)^2\cdot(-2) = 48\cdot(5-2x)^2$.

б) $y = (1+x^2)\cdot\operatorname{arctg} x$.

$y' = 2x\cdot\operatorname{arctg} x + (1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2} = 2x\cdot\operatorname{arctg} x + 1$.

$y'' = 2\operatorname{arctg} x + \dfrac{2x}{1+x^2}$.

в) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x\cdot\ln x}{x^4} = \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

$$y'' = \frac{-2\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3 - (1-2\ln x)\cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-2x^2 - 3x^2\cdot(1-2\ln x)}{x^6} =$$

$$= \frac{-x^2(2+3(1-2\ln x))}{x^6} = -\frac{5-6\ln x}{x^4}. \blacktriangleleft$$

Пример 20.4. Найдите y''', если
а) $y = \sin^2 x$;
б) $y = x \cdot e^{-x}$.
$\blacktriangleright$
а) $y = \sin^2 x$.
$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.
$y'' = 2\cos 2x$.
$y''' = -4\sin 2x$.
б) $y = x \cdot e^{-x}$.
$y' = e^{-x} - x \cdot e^{-x}$.
$y'' = -e^{-x} - (1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x}) = -2e^{-x} + x \cdot e^{-x}$.
$y''' = 2e^{-x} + e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(3-x)$. $\blacktriangleleft$

Пример 20.5. Найдите $y^{(n)}$, если
а) $y = e^{-\frac{x}{a}}$;
б) $y = \cos x$.
$\blacktriangleright$
а) $y = e^{-\frac{x}{a}}$.
$y' = e^{-\frac{x}{a}} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}$.
$y'' = -\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2}e^{-\frac{x}{a}}$.
$y''' = \frac{1}{a^2}e^{-\frac{x}{a}}\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a^3}e^{-\frac{x}{a}}$.
. . . .
$y^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{1}{a^n}e^{-\frac{x}{a}}$.
б) $y = \cos x$.
$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
$y'' = -\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$.
$y''' = \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right)$.
$y^{(4)} = \cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right)$.
. . . .
$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$. $\blacktriangleleft$

Задания для самостоятельной работы.

Найти приближенные значения:

Пример 20.6. $\operatorname{arctg} 0{,}97$
Ответ: $0{,}771$.

Пример 20.7. $\ln 0{,}9$
Ответ: $-0{,}1$.

Пример 20.8. $\sqrt[3]{26{,}19}$
Ответ: 2,97.

Пример 20.9. $\cos 31^\circ$
Ответ: 0,8575.

Пример 20.10. $\operatorname{tg} 46^\circ$
Ответ: 1,0349.

Пример 20.11. $(1{,}015)^5$
Ответ: 1,077.

Найдите производные второго порядка:

Пример 20.12. $y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$
Ответ: $-\dfrac{x}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}$.

Пример 20.13. $y = -\dfrac{3}{x^2 - 5}$
Ответ: $-\dfrac{6(3x^2 + 5)}{(x^2 - 5)^2}$.

Пример 20.14. $y = \operatorname{tg} x$
Ответ: $\dfrac{3\sin x}{\cos^3 x}$.

Найдите производные третьего порядка:

Пример 20.15. $y = x \ln x$
Ответ: $-\dfrac{1}{x^2}$.

Пример 20.16. $y = \dfrac{x}{6(x + 1)}$
Ответ: $\dfrac{1}{(x + 1)^4}$.

Пример 20.17. $y = \arcsin x$
Ответ: $\dfrac{1 + 2x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^5}}$.

Пример 20.18. Найти $y^{(n)}$, если $y = 2^x$.
Ответ: $2^x \cdot (\ln 2)^n$.

Пример 20.19. Показать, что функция $y = e^x + 2e^{2x}$ удовлетворяет уравнению $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Занятие 21. Дифференцирование параметрических и неявных функций.

Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями
$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, *то*
$y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ *или* $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$.

Если функция y аргумента x задана неявно, то есть $F(x,y) = 0$ (y не разрешено относительно x), то для нахождения производной надо продифференцировать уравнение $F(x,y) = 0$, при этом считаем y сложной функцией от x.

Пример 21.1. Найти производную от y по x, если $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$.
► Найдем $x'_t = a \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) = -3a\sin t\cos^2 t$ и $y'_t = b \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t = 3b\sin^2 t\cos t$.
Так как $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, то $y'_x = \dfrac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\sin t\cos^2 t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$.
Ответ: $y'_x = -\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$. ◄

Пример 21.2. Найти производную от y по x, если $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$.
► $x'_t = 3a \cdot \dfrac{1\cdot(1+t^3) - 3t^2\cdot t}{(1+t^3)^2} = 3a \cdot \dfrac{1+t^3-3t^3}{(1+t^3)^2} = \dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$,
$y'_t = 3a \cdot \dfrac{2t(1+t^3) - 3t^2\cdot t^2}{(1+t^3)^2} = 3a \cdot \dfrac{2t+2t^4-3t^4}{(1+t^3)^2} = \dfrac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$,
Тогда $y'_x = \dfrac{\dfrac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{\dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}} = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.
Ответ: $y'_x = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. ◄

Пример 21.3. Найти угловые коэффициенты касательных к линии $x = t - t^4$, $y = t^2 - t^3$ в точке $(0;0)$.
► Найдем значения t, при которых $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$:
$\begin{cases} t - t^4 = 0 \\ t^2 - t^3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow t_1 = 0$ и $t_2 = 1$.
Вычислим $x'_t = 1 - 4t^3$ и $y'_t = 2t - 3t^2$, тогда $y'_x = \dfrac{2t-3t^2}{1-4t^3}$.
Вычислим значения y'_x при $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$, получим $y'_x(0) = \dfrac{0}{1} = 0$ и $y'_x(1) = \dfrac{2-3}{1-4} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.
Ответ: 0; $\dfrac{1}{3}$. ◄

Пример 21.4. Убедиться в том, что функция, заданная параметрически уравнениями $x = 2t + 3t^2$, $y = t^2 + 2t^3$, удовлетворяет соотношению $y = (y')^2 + 2(y')^3$, $\left(y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$.

▶ Найдем $x'_t = 2 + 6t$ и $y'_t = 2t + 6t^2$,
тогда $y'_x = \dfrac{2t + 6t^2}{2 + 6t} = \dfrac{t(2 + 6t)}{2 + 6t} = t$.
Подставим y и y'_x в соотношение, получим:
$t^2 + 2t^3 = t^2 + 2t^3 \Longrightarrow 0 \equiv 0$.
Ответ: функция удовлетворяет соотношению. ◀

Пример 21.5. Найти y' из уравнения $x^4 + y^4 = x^2 y^2$.
▶ Продифференцируем обе части уравнения по x:
$4x^3 + 4y^3 y' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy'$.
Перенесем слагаемые, содержащие y' в левую часть равенства, а не содержащие — в правую:
$4y^3 y' - 2x^2 yy' = 2xy^2 - 4x^3$.
Вынесем y' за скобку:
$y'(4y^3 - 2x^2 y) = 2xy^2 - 4x^3$.
Выразим y' из полученного равенства, сократив левую и правую части на 2:
$y' = \dfrac{xy^2 - 2x^3}{2y^3 - x^2 y} = \dfrac{x(y^2 - 2x^2)}{y(2y^2 - x^2)}$.
Ответ: $y' = \dfrac{x(y^2 - 2x^2)}{y(2y^2 - x^2)}$. ◀

Пример 21.6. Найти y' из уравнения $\dfrac{y}{x} = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$.
▶ Дифференцируем равенство:
$$\frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{y - y'x}{y^2}.$$
Переносим выражение из правой части в левую и выносим общий множитель:
$$(y'x - y)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0 \Longrightarrow y'x - y = 0 \Longrightarrow y' = \frac{y}{x}.$$
Ответ: $y' = \dfrac{y}{x}$. ◀

Пример 21.7. Показать, что функция $xy - \ln y = 1$ удовлетворяет соотношению $y^2 + (xy - 1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.
▶ Продифференцируем заданную неявно функцию:
$$y + xy' - \frac{y'}{y} = 0 \Longrightarrow y^2 + xyy' - y' = 0 \Longrightarrow y^2 + (xy - 1)y' = 0.$$
Ответ: функция удовлетворяет соотношению. ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 21.8. Найти производные y'_x:
1) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$
Ответ: $\dfrac{2^{x-y}(2^y - 1)}{1 - 2^x}$.
2) $\cos(xy) = x$
Ответ: $-\dfrac{1 + y \sin xy}{x \sin xy}$.

3) $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$

Ответ: $-\dfrac{3x^2 + 2axy + by^2}{ax^2 + 2bxy + 3y^2}$.

4) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

Ответ: $\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$.

5) $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$

Ответ: $\dfrac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$.

6) Найти угловой коэффициент касательной к линии $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$ в точке $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$.

Пример 21.9. Найти производные y'_x:

1) $y = \cos(x + y)$

Ответ: $-\dfrac{\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$.

2) $y = 1 + xe^y$

Ответ: $\dfrac{e^y}{2 - y}$.

3) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = 5x$

Ответ: $\dfrac{5x^2 \cos^2 \frac{y}{x} + y}{x}$.

4) $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$

Ответ: $\dfrac{t}{2}$.

5) $x = \dfrac{1 + t^2}{t^2 - 1}$, $y = \dfrac{1}{t^2 - 1}$

Ответ: $\dfrac{1 + t^2}{t(2 + 3t - t^2)}$.

6) Вычислить y'_x при $t = \dfrac{\pi}{4}$, $x = 2\ln(\operatorname{ctg} t) + 1$, $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$

Ответ: 0.

Занятие 22. Подготовка к экзамену (I семестр).

Пример 22.1. Решить систему $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -2x+y+2z=1 \\ -x+3y+z=3 \end{cases}$

▶

1. Исследование:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$r_A=r_B=2$, $n-r=3-2=1$ — один свободный параметр.

2. Решение:

$$z=C \quad + \quad \begin{cases} x+2y-z=2 \\ -2x+y+2z=1 \\ -x+3y+z=3 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x+2y=2+C \\ -2x+y=1-2C \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=5,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2+C & 2 \\ 1-2C & 1 \end{vmatrix}=2+C-2+4C=5C,\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 2+C \\ -2 & 1-2C \end{vmatrix}=1-2C+4+2C=5.$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{5C}{5}=C,\ y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{5}{5}=1,\ z=C.$$

3. Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ 1 \\ C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Ответ: $\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} C \\ 1 \\ C \end{pmatrix}$. ◀

Пример 22.2. Найти уравнение плоскости, ортогональной прямой: $x=1$; $y=2z+4$ и проходящей через точку $A(-2,3,5)$.

▶ Уравнение прямой задано в общем виде. Запишем каноническое уравнение этой прямой:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2z+4 \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x=1 \\ \dfrac{y}{2}=z+2 \end{cases}\Longrightarrow\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}.$$

Направляющий вектор прямой, равный по условию примера нормальному вектору плоскости, равен $\overrightarrow{N}=(0,2,1)$. В результате уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, имеет вид:

$0\cdot(x+2)+2(y-3)+1(z-5)=0\Longrightarrow$

Ответ: $2y+z-11=0$. ◀

Пример 22.3. Найти площадь треугольника, если координаты его вершин равны $A(1,1,1)$, $B(2,0,1)$, $C(0,1,2)$.

▶ $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$S_\triangle = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}|-\vec{\imath}-\vec{\jmath}-\vec{k}| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $S_\triangle = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ◄

Пример 22.4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-3x^2-x+3}$.

► $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-3x^2-x+3} = \dfrac{0}{0} = \{$числитель и знаменатель дроби разлагаем на множители$\}$ $= \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2(x-3)-(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x^2-1} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$. ◄

Пример 22.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

► $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{0}{0} = \{$преобразуем выражение к выражению для I-го замечательного предела, для этого предварительно избавляемся от иррациональности в знаменателе$\}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}+1)\sin(x-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = 2\cdot 1 = 2$. ◄

Пример 22.6. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x}\right)^x$.

► $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x}\right)^x = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^\infty = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^x = 1^\infty = \{$преобразуем выражение ко II-му замечательному пределу$\}$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^{-\frac{2}{3}x}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^{-\frac{2}{3}x}\right)^{-\frac{3}{2}} =$

$= e^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$. ◄

Пример 22.7. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}^3 2x$.

► $y = \operatorname{tg}^3 2x \Longrightarrow (u^n)'$.

$y' = 3\operatorname{tg}^2 2x\cdot(\operatorname{tg} 2x)' = \{(\operatorname{tg} 2x)' \Longrightarrow (\operatorname{tg} u)'\} = 3\operatorname{tg}^2 2x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)' =$

$= \{(2x)' \Longrightarrow (c\cdot u)'\} = 6\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}$. ◄

Пример 22.8. Найти производную функции $y = \ln(3-4x)$.

► $y = \ln(3-4x) \Longrightarrow (\ln u)'$.

$y' = \dfrac{1}{3-4x}\cdot(3-4x)' = \{(3-4x)' \Longrightarrow (u-v)'\} = -\dfrac{4}{3-4x}$. ◄

Пример 22.9. Найти производную функции $y = \sin(2^x)$.

► $y = \sin(2^x) \Longrightarrow (\sin u)'$.

$y' = \cos(2^x)\cdot(2^x)' = \{(2^x)' \Longrightarrow (a^x)'\} = \ln 2\cdot 2^x\cdot\cos(2^x)$. ◄

Пример 22.10. Найти производную функции $y = \arccos\dfrac{3}{x}$.

► $y = \arccos\dfrac{3}{x} \Longrightarrow (\arccos u)'$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)' = \left\{\left(\frac{3}{x}\right)' = \left(3\cdot\frac{1}{x}\right)' \Longrightarrow (c\cdot u)'\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x^2}}} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3x}{\sqrt{x^2-9}\cdot x^2} = -\frac{3}{x\sqrt{x^2-9}}. \blacktriangleleft$$

Пример 22.11. Найти производную функции $\sin 3xy = x^2 + y$.

► Данная функция неявная, дифференципуем обе части по переменной x:

$\cos 3xy \cdot (3y + 3xy') = 2x + y'$,

$3xy'\cos 3xy - y' = 2x - 3y\cos 3xy$,

$y'(3x\cos 3xy - 1) = 2x - 3y\cos 3xy$,

$y' = \dfrac{2x - 3y\cos 3xy}{3x\cos 3xy - 1}$. ◄

Пример 22.12. Найти производную функции $\begin{cases} y = \dfrac{t}{2} \\ x = \arcsin t \end{cases}$.

► Функция задана параметрически.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{t}{2}\right)'_t}{(\arcsin t)'_t} = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}. \blacktriangleleft$$

Задания для самостоятельной работы.

При подготовке к экзамену рекомендуем прорешать задания для самостоятельной работы из предыдущих двадцати одного занятия, хотя бы по два примера из каждого.

Семестр II

Занятие 1. Вычисление пределов с помощью правила Лопиталя.

Правило Лопиталя. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой этой точки; $\varphi'(x) \neq 0$ для всех точек этой окрестности, $x \neq x_0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$), то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Итак, правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Если $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, в свою очередь, представляет собой неопределенность $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя можно применить второй раз, третий и т.д. (при условии выполнения соответствующих ограничений на функции $f'(x)$, $\varphi'(x)$, $f''(x)$, $\varphi''(x)$ и т.д.)

Для раскрытия неопределенностей вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ необходимо их сначала привести к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, а затем применить правило Лопиталя.

Неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0 можно найти, предварительно вычислив предел от логарифма функции. Если нужно найти $\lim\limits_{x\to x_0} u^v$, то обозначим $y = u^v$, прологарифмируем: $\ln y = v \ln u$ и найдем $\lim\limits_{x\to x_0} \ln y$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} y = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \ln y}$.

Пример 1.1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$, используя правило Лопиталя.

► $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-3x^2+2)'}{(x^3-4x^2+3)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-6x}{3x^2-8x} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{5}$. ◄

Пример 1.2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$, используя правило Лопиталя.

► $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-e^{-x})'}{[\ln(1+x)]'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\dfrac{1}{1+x}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ответ: 2. ◄

Пример 1.3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$, используя правило Лопиталя.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(6x)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{\cos x}=6.$$

Ответ: 6. ◀

Пример 1.4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$, используя правило Лопиталя.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(\sqrt{x+1}-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\frac{5}{\dfrac{1}{2}}=5\cdot 2=10.$$

Ответ: 10. ◀

Пример 1.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x}$, используя правило Лопиталя.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^3}-1)'}{(\sin^3 x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}\cdot 3x^2}{3\sin^2 x\cdot\cos x}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}}_{\text{I класс.}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

Ответ: 1. ◀

Пример 1.6. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$, используя правило Лопиталя.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

Ответ: 0. ◀

Пример 1.7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$, используя правило Лопиталя.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x\right)'}{[\ln(1-x)]'}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{-1}{1-x}}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos^2\dfrac{\pi}{2}x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{\left(\cos^2\dfrac{\pi}{2}x\right)'}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2\cos\dfrac{\pi}{2}x\left(-\sin\dfrac{\pi}{2}x\right)\cdot\dfrac{\pi}{2}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Ответ: ∞. ◀

Пример 1.8. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$, используя правило Лопиталя.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{[(x-1)\ln x]'}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}(x-1)+\ln x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)'}{\left(\dfrac{x-1}{x}+\ln x\right)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$. ◀

Пример 1.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg} x\right)$, используя правило Лопиталя.

► $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg} x\right) = \{\infty-\infty\} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x} = 0.$

Ответ: 0. ◀

Пример 1.10. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$, используя правило Лопиталя.

► $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \{\infty\cdot 0\} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x} = \dfrac{0}{\infty} = 0.$

Ответ: 0. ◀

Пример 1.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$, используя правило Лопиталя.

► $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x = \{0\cdot\infty\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(\operatorname{tg} x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{0}{1} = 0.$

Ответ: 0. ◀

Пример 1.12. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{1/x}$, используя правило Лопиталя.

► $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{1/x} = \{\infty^0\}.$

Обозначим $y=(x+2^x)^{1/x}$, прологарифмируем: $\ln y = \dfrac{1}{x}\ln(x+2^x)$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln y = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\ln(x+2^x) = \{0\cdot\infty\} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+2^x)}{x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[\ln(x+2^x)]'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x+2^x}\cdot(1+2^x\ln 2)}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2^x\ln 2}{x+2^x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+2^x\ln 2)'}{(x+2^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x\ln^2 2}{1+2^x\ln 2} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2^x\ln^2 2)'}{(1+2^x\ln 2)'} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x\ln^3 2}{2^x\ln^2 2} = \ln 2$, тогда

$\lim\limits_{x\to\infty} y = e^{\ln 2} = 2.$

Ответ: 2. ◀

Пример 1.13. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$, используя правило Лопиталя.

► $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x} = \{1^\infty\}$.

Обозначим $y = (\cos x)^{1/x}$, прологарифмируем: $\ln y = \dfrac{1}{x}\ln\cos x = \dfrac{\ln\cos x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\ln y = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln\cos x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$, тогда $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

Ответ: 1. ◄

Пример 1.14. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$, используя правило Лопиталя.

► $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{1+\ln x}} = \{0^0\}$.

Обозначим $y = x^{\frac{1}{1+\ln x}}$, прологарифмируем: $\ln y = \dfrac{1}{1+\ln x}\cdot\ln x = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\ln y = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+\ln x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{(1+\ln x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x} = 1$, тогда

$\lim\limits_{x\to 0} y = e^1 = e$.

Ответ: e. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 1.15. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{x^3-3x-2}$

Ответ: $\dfrac{13}{9}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$

Ответ: 1.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$

Ответ: 0,18.

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$

Ответ: 0.

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_2 x}{2^x}$

Ответ: 0.

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

Ответ: 0.

ж) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\pi-2x}\right)$

Ответ: ∞.

з) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x)$

Ответ: 1.

и) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg}\pi x)$

Ответ: $\dfrac{1}{\pi}$.

к) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)$

Ответ: 1.

л) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$

Ответ: 1.

м) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$

Ответ: e^{-2}.

н) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x}$

Ответ: 1.

Пример 1.16. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-2x+1}{x^{20}-4x+3}$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x}{5x^3+x^2-7x+3}$

Ответ: $\dfrac{1}{5}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$

Ответ: 1.

г) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

Ответ: 1.

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$

Ответ: e^{-6}.

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)$

Ответ: 0.

Занятие 2. Нахождение областей возрастания и убывания функции. Экстремумы, наибольшее и наименьшее значения функций.

Пример 2.1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 3x - 4$ и ее экстремумы.

► Функция определена на всей числовой оси. Найдем ее производную:

$f(x) = 3x^2 - 3$,

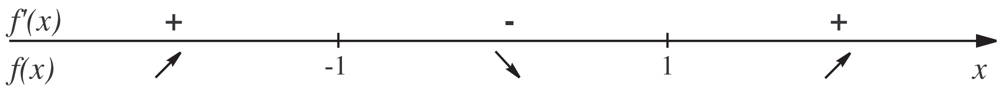
приравняем ее к нулю:

$3x^2 - 3) = 0$,

$3(x-1)(x+1) = 0$,

$x_1 = -1$; $x_2 = 1$ — критические точки.

Проверим, существуют ли в них экстремумы. Найдем знаки производной на полученных интервалах:



Известно, что функция $f(x)$ возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) > 0$ и убывает, когда $f'(x) < 0$. Значит, данная функция $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и убывает при $x \in (-1; 1)$. Так как, проходя через точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, производная $f'(x)$ меняет знак, то эти точки являются точками экстремума, а именно:

$x_1 = -1$ — точка максимума, поскольку $f'(x)$, проходя через нее, меняет знак с "+" на "-";

$x_2 = 1$ — точка минимума, поскольку $f'(x)$, проходя через нее, меняет знак с "-" на "+".

Найдем экстремумы функции:

$f_{\max}(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 4 = -2$

$f_{\min}(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 4 = -6$

Ответ: $A(-1; -2)$ — максимум функции;

$B(1; -6)$ — минимум функции;

функция возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

функция убывает при $x \in (-1; 1)$. ◄

Пример 2.2. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = 3x^4 + 4x^3 + 5$ и ее экстремумы, применяя 1-е и 2-е достаточное условия экстремума.

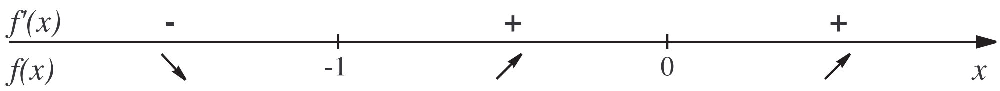
► Функция определена на всей числовой прямой. Найдем критические точки функции, для этого найдем ее производную и приравняем ее к нулю:

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$,

$12x^2(x+1) = 0$,

$x_1 = -1$, $x_2 = 0$ — критические точки.

Применим 1-е достаточное условие экстремума, для этого найдем знаки производной на полученных интервалах:



Мы видим, что, проходя через точку $x_1 = -1$, производная поменяла знак с "-" на "+", значит, точка $x_1 = -1$ является точкой минимума функции. Найдем минимум функции: $f_{\min}(-1) = 3 \cdot (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^3 + 5 = 3 - 4 + 5 = 4$.

Проходя через точку $x_2 = 0$, производная знак не изменила, значит, в этой точке экстремума нет.

Применим 2-е достаточное условие экстремума, для этого найдем вторую производную: $f''(x) = 36x^2 + 24x$.

Теперь вычислим значения второй производной в найденных критических точках:
$f''(-1) = 36 \cdot (-1)^2 + 24 \cdot (-1) = 36 - 24 = 12 > 0 \Longrightarrow$ в этой точке существует минимум.
$f''(0) = 36 \cdot 0 + 24 \cdot 0 \Longrightarrow$ экстремума в этой точке не существует.
Ответ: $A(-1; 4)$ — минимум функции;
$f(x)$ возрастает при $x \in (-1; +\infty)$;
$f(x)$ убывает при $x \in (-\infty; -1)$. ◄

Пример 2.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ на отрезке $[0; 3]$.

► Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, так как $x^2 - 2x + 2 > 0$ $\forall x \in (-\infty; +\infty)$.

Найдем критические точки функции, для этого вычислим производную и приравняем ее к нулю:
$f'(x) = \ln'(x^2 - 2x + 2) = \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}$;
$\dfrac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} = 0$, получаем $x = 1 \in [0; 3]$;
найдем значения функции в полученной критической точке и на концах заданного отрезка:
$f(0) = \ln 2$,
$f(1) = \ln 1 = 0$,
$f(3) = \ln 5$,
наименьшим из найденных значений является 0, наибольшим — $\ln 5$.
Ответ: $f_{\text{наим}}(1) = 0$;
$f_{\text{наиб}}(3) = \ln 5$. ◄

Пример 2.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$ на отрезке $[0; 5]$.

► Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой.
$f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} = 0$,
получаем две критические точки:
$x_1 = -1 \notin [0; 5]$,
$x_2 = 1 \in [0; 5]$,
вычисляем значения функции в точке $x = 1$ и на концах отрезка, то есть
$f(0) = 0$;
$f(1) = \dfrac{3}{2}$;
$f(5) = \dfrac{15}{26}$.
Наименьшим из этих значений является 0, наибольшим — $\dfrac{3}{2}$.
Ответ: $f_{\text{наим}}(0) = 0$;
$f_{\text{наиб}}(1) = \dfrac{3}{2}$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 2.5. Найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы: $f(x) = (x-2)^2(x+2)$.

Ответ: $A\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{256}{27}\right)$ — максимум; $B(2;0)$ — минимум; функция возрастает при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup (2;+\infty)$; функция убывает при $x \in \left(-\dfrac{2}{3}; 2\right)$.

Пример 2.6. Найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы: $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 4)$.

Ответ: $A(1; \ln 3)$ — максимум; функция возрастает при $x \in (1;+\infty)$; функция убывает при $x \in (-\infty; 1)$.

Пример 2.7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x + 3\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-1;1]$.

Ответ: $f_{\text{наим}}(-1) = -4$; $f_{\text{наиб}}(1) = 4$.

Пример 2.8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ на отрезке $[-1;1]$.

Ответ: $f_{\text{наим}}(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2}$; $f_{\text{наиб}}(0) = 1$.

Пример 2.9. Найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы:

1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 7$.

Ответ: $A(1;7)$ — максимум; $B(5;-25)$ — минимум; функция возрастает при $x \in (-\infty;1) \cup (5;+\infty)$; функция убывает при $x \in (1;5)$.

2) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Ответ: $A\left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$ — минимум; $B\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$ — максимум; функция возрастает при $x \in (-1;1)$; функция убывает при $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

3) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Ответ: $A\left(e; \dfrac{1}{e}\right)$ — максимум; функция возрастает при $x \in (0;e)$; функция убывает при $x \in (e;+\infty)$.

4) $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)\cdot x^2}$.

Ответ: $A\left(-2; \sqrt[3]{4}\right)$ — максимум; функция возрастает при $x \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$; функция убывает при $x \in (-2;0)$.

Пример 2.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке:

1) $f(x) = 5x^3 + 2x$, $x \in [0;2]$

Ответ: $f_{\text{наим}}(0) = 0$; $f_{\text{наиб}}(2) = 44$.

2) $f(x) = x^{1/3}$, $x \in [1;8]$

Ответ: $f_{\text{наим}}(0) = 0$; $f_{\text{наиб}}(8) = 2$.

Занятие 3. Нахождение областей выпуклости вверх и вниз, точек перегиба. Асимптоты.

Пример 3.1. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ на выпуклость и точки перегиба.

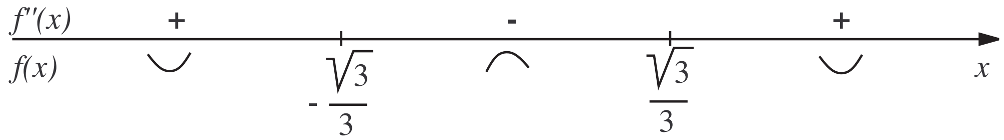
► Функция определена на всей числовой оси. Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю:

$f''(x) = \dfrac{6\left(x^2 - \dfrac{1}{3}\right)}{(x^2+1)^3}$;

$\dfrac{6\left(x^2 - \dfrac{1}{3}\right)}{(x^2+1)^3} = 0$;

$x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ — критические точки второго порядка.

Выясним, являются ли они точками перегиба, для этого найдем знаки второй производной на полученных интервалах:



Функция выпукла вниз при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$; выпукла вверх при $x \in \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

При переходе через найденные критические точки $f''(x)$ меняет знак, значит, они являются точками перегиба.

$f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{3}{4}$; $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{3}{4}$.

Ответ: $A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{3}{4}\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{3}{4}\right)$ — перегибы функции; функция выпукла вниз при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$; функция выпукла вверх при $x \in \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. ◄

Пример 3.2. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$.

► Область определения функции — вся числовая ось, кроме точки $x = 3$. В ней и будем искать вертикальную асимптоту.

Вычислим односторонние пределы:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 3-0} \frac{x+3}{x-3} = -\infty \\ &\lim_{x\to 3+0} \frac{x+3}{x-3} = +\infty \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 3 \text{ — уравнение вертикальной асимптоты.}$$

Найдем наклонную асимптоту в виде $y = kx + b$.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{(x-3)\cdot x} = 0;$

$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x-3} = 1.$

Так как $k = 0$, то имеем частный случай — горизонтальную асимптоту, заданную уравнением $y_{\text{ас}} = 1$.

Другой способ нахождения наклонной асимптоты: найдем эквивалентную $f(x)$ в бесконечно удаленной точке. Так как

$$\begin{array}{r|l} -\;x+3 & x-3 \\ \cline{2-2} x-3 & 1 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

то $f(x) = 1 + \dfrac{6}{x-3}$ и $f(x) \underset{x\to\infty}{\simeq} 1$. Следовательно, $y_{\text{ас}} = 1$.

Ответ: $x = 3$ — вертикальная асимптота;

$y = 1$ — горизонтальная асимптота. ◄

Пример 3.3. Найти асимптоты графика функции $f(x) = x \cdot e^x$.

► Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, значит, вертикальных асимптот график не имеет.

Найдем наклонные асимптоты:

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cdot e^x}{x} = +\infty$, значит, при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты не существует.

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\cdot e^x}{x} = 0;$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x = 0,$

значит, при $x \to -\infty$ существует горизонтальная асимптота, заданная уравнением $y = 0$.

Ответ: $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$. ◄

Пример 3.4. Исследовать на выпуклость, точки перегиба и асимптоты функцию $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$.

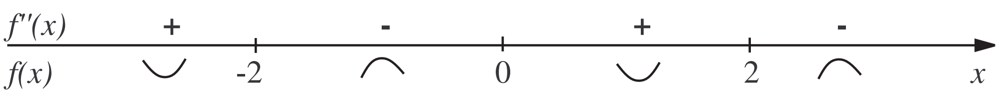
► Область определения функции — вся числовая ось, кроме точек $x = -2$ и $x = 2$.

Для нахождения точек перегиба найдем вторую производную функции и приравняем ее к нулю:

$f''(x) = \dfrac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}$

$\dfrac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3} = 0;$

получим $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ — критические точки второго порядка. Чтобы выяснить, будут ли они точками перегиба, необходимо вычислить знаки второй производной на полученных интервалах:



При $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$ функция выпукла вниз; при $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$ функция выпукла вверх.

Вторая производная, проходя через точки $x_1 = -2$ и $x_3 = 2$, меняет знак, но они не являются точками перегиба, так как не входят в область определения. Точка $x_2 = 0$ является точкой перегиба. $f(0) = 0$ — перегиб функции.

Вертикальные асимптоты функции будем искать в точках разрыва второго рода, то есть в точках $x = -2$ и $x = 2$. Найдем в них односторонние пределы:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty \\ &\lim_{x\to -2+0} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = -2 \text{ — уравнение вертикальной асимптоты.}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty \\ &\lim_{x\to 2+0} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 2 \text{ — уравнение вертикальной асимптоты.}$$

Найдем наклонную асимптоту в виде $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(4-x^2)\cdot x} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{4-x^2} = 0.$$

Значит, $y = -x$ — уравнение наклонной асимптоты. Так как $k \neq 0$, то горизонтальных асимптот график не имеет.

Ответ: $O(0;0)$ — точка перегиба;
функция выпукла вверх при $x \in (-2;0) \cup (2;+\infty)$;
функция выпукла вниз при $x \in (-\infty;-2) \cup (0;2)$;
$x = -2$, $x = 2$ — уравнения вертикальных асимптот;
$y = -x$ — уравнение наклонной асимптоты. ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 3.5. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 6x - 9$

Ответ: $f(x)$ выпукла вниз при $x \in (-\infty;-2) \cup (4;+\infty)$; $f(x)$ выпукла вверх при $x \in (-2;4)$; $A(-2;-165)$, $B(4;-753)$ — перегибы функции.

2) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Ответ: $f(x)$ выпукла вверх при $x \in (-1;1)$; $f(x)$ выпукла вниз при $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$; $A\left(-1;e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $B\left(1;e^{-\frac{1}{2}}\right)$ — перегибы функции.

3) $f(x) = x \cdot \ln^2 x$

Ответ: $f(x)$ выпукла вверх при $x \in \left(0;\frac{1}{e}\right)$; $f(x)$ выпукла вниз при $x \in \left(\frac{1}{e};+\infty\right)$; $A\left(\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$ — перегиб функции.

Пример 3.6. Найти асимптоты графика функций:

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Ответ: $x = 1$ — вертикальная асимптота; $y = x + 1$ — наклонная асимптота.

2) $f(x) = e^{\frac{1}{2-x}}$

Ответ: $x = 2$ — вертикальная асимптота; $y = 1$ — горизонтальная асимптота.

3) $f(x) = \dfrac{4e^{x^2} - 1}{e^{x^2}}$
Ответ: $y = 4$ — горизонтальная асимптота.

Пример 3.7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:
1) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$
Ответ: функция выпукла вверх при $x \in (-\infty; 0)$; функция выпукла вниз при $x \in (0; +\infty)$; перегибов нет.
2) $f(x) = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$
Ответ: функция выпукла вверх при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; функция выпукла вниз при $x \in (-1; 1)$; $A(-1; 1)$, $B(1; 1)$ — перегибы функции.
3) $f(x) = x^5 + \dfrac{10}{3}x^4 - 7x + 5$
Ответ: функция выпукла вверх при $x \in (-\infty; -2)$; функция выпукла вниз при $x \in (-2; +\infty)$; $A\left(-2; -41\dfrac{1}{3}\right)$ — перегиб функции.

Пример 3.8. Найти асимптоты графика функций:
1) $f(x) = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$
Ответ: $x = 0$ — вертикальная асимптота; $y = -2x$ — наклонная асимптота.
2) $f(x) = (x - 1) \cdot e^{4x+2}$
Ответ: $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$.
3) $f(x) = e^{\frac{1}{5+x}}$
Ответ: $x = -5$ — вертикальная асимптота; $y = 1$ — горизонтальная асимптота.

Занятие 4. Исследование функции и построение ее графика.

Для исследования функции находим:

1. Область определения.
2. Характерные особенности функции: четность, периодичность, знакопостоянство, точки пересечения с осями координат.
3. Асимптоты: вертикальные, горизонтальные и наклонные.
4. Интервалы монотонности, экстремумы.
5. Интервалы выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.
6. Строим график функции.

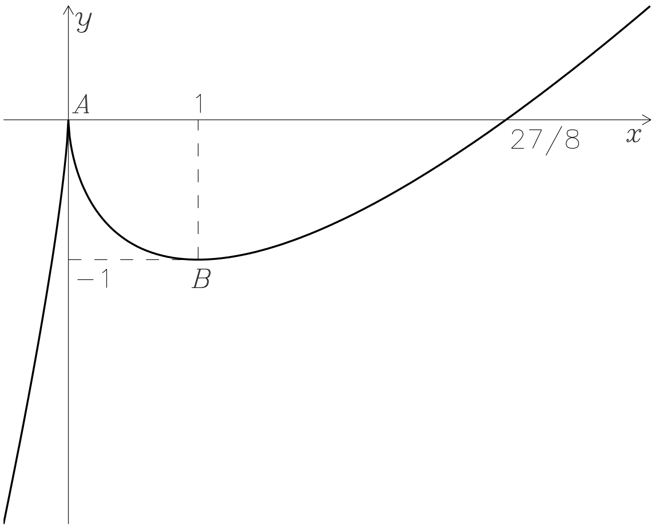
Пример 4.1. Исследовать функцию $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.
▶ 1) $D:\ x \in (-\infty; \infty)$
2) Функция не является ни четной, ни нечетной.
$f(0) = 0$;
$y = 0 \Longrightarrow 2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Longrightarrow x^3(8x - 27) = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{27}{8},\ f\left(\dfrac{27}{8}\right) = 0.$
3) Функция не имеет точек разрыва II рода, поэтому не имеет вертикальных асимптот.
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = 2,$
$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} (2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x) = -\infty$, значит, наклонных асимптот тоже нет.
4) $f'(x) = 2 - 3 \cdot \dfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = 2 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2(\sqrt[3]{x} - 1)}{\sqrt[3]{x}},$
критические точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < \infty$
f'	$+$	не существует	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$y_{\max} = y(0) = 0$	$\searrow$	$y_{\min} = y(1) = -1$	$\nearrow$

5) $f''(x) == 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}-1} = \dfrac{2}{3} x^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}.$
Критическая точка второго порядка: $x = 0$.

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < \infty$
f''	$+$	не существует	$+$
f	$\smile$	нет перегиба	$\smile$

6) При построении графика функции следует обратить внимание на то, что точка A — точка максимума — является точкой излома графика (в ней производная не существует и нельзя провести касательную, параллельную оси абсцисс, в отличие от B — точки минимума).



◀

Пример 4.2. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

▶ 1) $D: \ x \in (0; \infty)$.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной.

$f(1) = 0$.

3) $x = 0$ — вертикальная асимптота;

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = 0;$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

4) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$,

$1 - \ln x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = e$ — критическая точка.

x	$0 < x < e$	e	$e < x < \infty$
f'	$+$	0	$-$
f	↗	$y_{\max} = y(e) = \dfrac{1}{e}$	↘

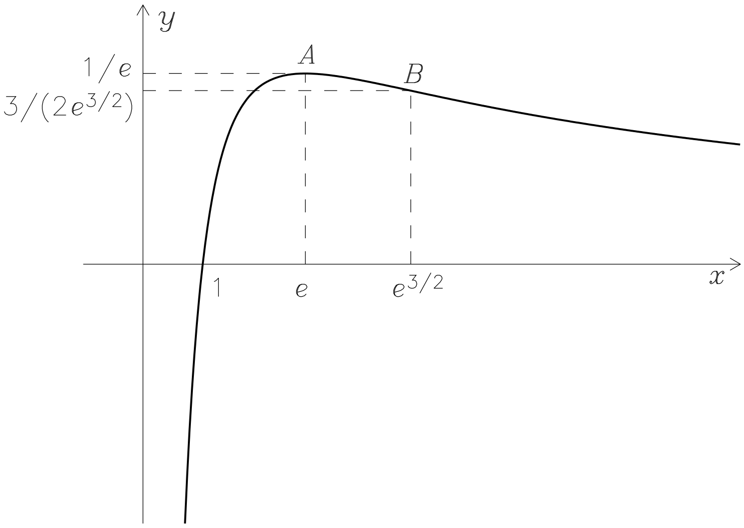
Точка $A\left(e; \dfrac{1}{e}\right)$ — точка максимума.

5) $f''(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$,

$2\ln x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow x = e^{3/2}$ — критическая точка второго порядка.

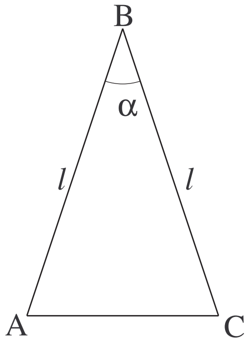
x	$0 < e^{3/2}$	$e^{3/2}$	$e^{3/2} < x < \infty$
$f''-$	0	$+$	
f	⌒	$f(e^{3/2}) = \dfrac{3}{2e^{3/2}}$ – перегиб	⌣

Точка $B\left(e^{3/2}; \dfrac{3}{2e^{3/2}}\right)$ — точка перегиба.

б) 

◀

Пример 4.3. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна l. Определить максимальную площадь такого треугольника.



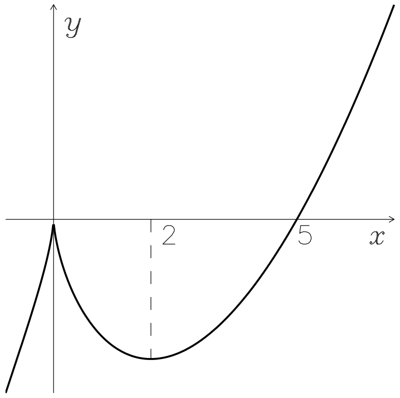
▶
$S_\triangle = \dfrac{l^2 \sin\alpha}{2}$,
$S'_\triangle = \dfrac{l^2 \cos\alpha}{2}$,
$S'_\triangle = 0$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.
Так как $0 < \alpha < \pi$,

x	$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
S'	$+$	0	$-$
S	$\nearrow$	$S\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{l^2}{2}$	$\searrow$

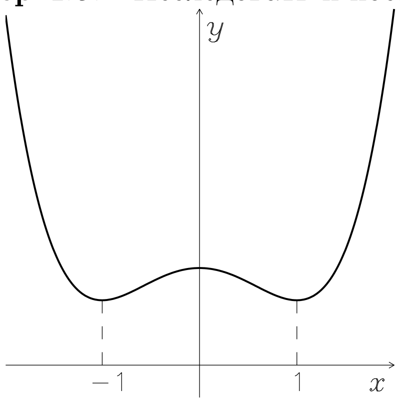
Ответ: $\max S_\triangle = S_\triangle\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{l^2}{2}$. ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 4.4. Исследовать и построить график функции $y = \sqrt[3]{x^2}(x-5)$.

Ответ: 

Пример 4.5. Исследовать и построить график функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Ответ: 

Пример 4.6. Решеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры площадки.

Ответ: 30 м × 60 м.

Пример 4.7. Исследовать и построить график функции $y = 3x^2 - 2x + 4$.

Пример 4.8. Исследовать и построить график функции $y = 1 + 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$.

Пример 4.9. Исследовать и построить график функции $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Пример 4.10. Исследовать и построить график функции $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$.

Пример 4.11. Исследовать и построить график функции $y = e^{-x^2}$.

Пример 4.12. Исследовать и построить график функции $y = x^2 e^{-x}$.

Пример 4.13. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3, так чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Ответ: 4 м × 4 м × 2 м.

Пример 4.14. Какой из равнобедренных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

Ответ: равносторонний.

Занятие 5. Неопределенный интеграл. Замена переменной.

$$\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x \ (a = \mathrm{const})$$
$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int \varphi(x)\mathrm{d}x$$
$$\int u^n \mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$$

Пример 5.1. Найти $\int \left(2x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{x^4} + 1\right)\mathrm{d}x$.

$$\blacktriangleright \int \left(2x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{x^4} + 1\right)\mathrm{d}x = 2\int x^3\mathrm{d}x - 2\int x^{2/3}\mathrm{d}x + 3\int x^{-4}\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x =$$
$$= 2\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^{5/3}}{5/3} + 3\cdot\frac{x^{-3}}{-3} + x + C = \frac{x^4}{2} - \frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x^3} + x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 5.2. Найти $\int \frac{\ln^2 x\mathrm{d}x}{x}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{\ln^2 x\mathrm{d}x}{x} = \left\{u = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}\right\} = \int u^2\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 5.3. Найти $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

$$\blacktriangleright \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left\{u = \operatorname{arctg} x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right\} = \int u^{1/3}\mathrm{d}u = {\frac{3/4}{u}}^{4/3} + C =$$
$$= \frac{3}{4}(\operatorname{arctg} x)^{4/3} + C. \blacktriangleleft$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

Пример 5.4. Найти $\int \frac{\cos 2x\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^2 2x + 3}}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{\cos 2x\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^2 2x + 3}} = \{u = \sin 2x,\ \mathrm{d}u = 2\cos 2x\mathrm{d}x\} = \int \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u^2+3}} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\sin 2x + \sqrt{\sin^2 2x + 3}| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 5.5. Найти $\int \frac{(2x-1)\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x + x^2}}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{(2x-1)\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x + x^2}} = \{u = 1 - x + x^2,\ \mathrm{d}u = (-1+2x)\mathrm{d}x\} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{1-x+x^2} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 5.6. Найти $\int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{\sqrt{9-e^{4x}}}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{\sqrt{9-e^{4x}}} = \{u = e^{2x},\ \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x\} = \int \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{9-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{e^{2x}}{3} + C. \blacktriangleleft$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C;$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$$

Пример 5.7. Найти $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x(2\operatorname{ctg} x + 3)}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x(2\operatorname{ctg} x+3)} = \left\{u = 2\operatorname{ctg} x + 3,\ \mathrm{d}u = \frac{2\mathrm{d}x}{-\sin^2 x}\right\} = \int \frac{\mathrm{d}u}{-2u} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|2\operatorname{ctg} x + 3| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 5.8. Найти $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-25}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-25} = \{u = x^2,\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x\} = \int \frac{\mathrm{d}u}{2(u^2-25)} = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{x^2-5}{x^2+5}\right| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 5.9. Найти $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^6+5}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^6+5} = \{u = x^3,\ \mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x\} = \int \frac{\mathrm{d}u}{3(u^2+(\sqrt{5})^2)} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{\sqrt{5}} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 5.10. Найти $\int \frac{2-3x}{x^2+2}\mathrm{d}x$.

$$\blacktriangleright \int \frac{2-3x}{x^2+2}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} - 3\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\ln|x^2+2| + C =$$
$$= \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\ln|x^2+2| + C. \blacktriangleleft$$

$$\int e^u\mathrm{d}u = e^u + C;$$
$$a^u\mathrm{d}u = \int \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

Пример 5.11. Найти $\int e^{\arcsin 2x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$.

$$\blacktriangleright \int e^{\arcsin 2x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}} = \left\{u = \arcsin 2x,\ \mathrm{d}u = \frac{2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}\right\} = \int \frac{e^u\mathrm{d}u}{2} =$$

$= \dfrac{1}{2}e^{\arcsin 2x} + C.$ ◄

Пример 5.12. Найти $\int 2^x \cdot 3^x \mathrm{d}x$.

► $\displaystyle\int 2^x \cdot 3^x \mathrm{d}x = \int 6^x \mathrm{d}x = \frac{6^x}{\ln 6} + C.$ ◄

Пример 5.13. Найти $\displaystyle\int e^{-2x}\left(1 + \frac{e^{2x}}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x$.

► $\displaystyle\int e^{-2x}\left(1 + \frac{e^{2x}}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x = \int e^{-2x}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2}e^{-2x} + 2\sqrt{x+1} + C.$ ◄

$$\int \sin u \mathrm{d}u = -\cos u + C;$$
$$\int \cos u \mathrm{d}u = \sin u + C.$$

Пример 5.14. Найти $\int \sin(3x-1)\mathrm{d}x$.

► $\displaystyle\int \sin(3x-1)\mathrm{d}x = \{u = 3x - 1,\ \mathrm{d}u = 3\mathrm{d}x\} = \int \sin u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{3} = -\frac{1}{3}\cos(3x-1) + C.$ ◄

Пример 5.15. Найти $\displaystyle\int \cos(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

► $\displaystyle\int \cos(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \left\{u = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}\right\} = \int \cos u \mathrm{d}u = \sin(\ln x) + C.$ ◄

Пример 5.16. Найти $\displaystyle\int \frac{\sin 2x \mathrm{d}x}{\cos x}$.

► $\displaystyle\int \frac{\sin 2x \mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{2\sin x \cos x \mathrm{d}x}{\cos x} = 2\int \sin x \mathrm{d}x = -2\cos x + C.$ ◄

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

Пример 5.17. Найти $\displaystyle\int \frac{5 - \cos^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

► $\displaystyle\int \frac{5 - \cos^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 5\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \cos x \mathrm{d}x = 5\operatorname{tg} x - \sin x + C.$ ◄

Пример 5.18. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 \frac{x}{3}}$.

► $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 \frac{x}{3}} = \left\{u = \frac{x}{3},\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{3}\right\} = \int \frac{3\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = -3\operatorname{ctg}\frac{x}{3} + C.$ ◄

Пример 5.19. Найти $\int \operatorname{tg}^2 x\mathrm{d}x$.

► $\int \operatorname{tg}^2 x\mathrm{d}x = \left\{1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}\right\} = \displaystyle\int \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x =$
$= \displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C.$ ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 5.20. Найти $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x}\mathrm{d}x$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{2} + 3\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\ln|x| + C$.

Пример 5.21. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{(1-8x)^2}}$.

Ответ: $-\dfrac{5}{24}\sqrt[5]{(1-8x)^3} + C$.

Пример 5.22. Найти $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{3x^2+4}$.

Ответ: $\dfrac{1}{6}\ln(3x^2+4) + C$.

Пример 5.23. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{6-5x^2}}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\dfrac{\sqrt{5x}}{\sqrt{6}} + C$.

Пример 5.24. Найти $\displaystyle\int e^{5-4x}\mathrm{d}x$.

Ответ: $-\dfrac{1}{4}e^{5-4x} + C$.

Пример 5.25. Найти $\displaystyle\int \frac{3\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-3}}$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}\ln|2x + \sqrt{4x^2-3}| + C$.

Пример 5.26. Найти $\displaystyle\int \cos^4 2x \cdot \sin 2x\mathrm{d}x$.

Ответ: $-\dfrac{1}{10}\cos^5 2x + C$.

Пример 5.27. Найти $\displaystyle\int \operatorname{ctg}(3x-2)\mathrm{d}x$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\ln|\sin(3x-2)| + C$.

Пример 5.28. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$.

Ответ: $\dfrac{1}{5}\ln|\arcsin 5x| + C$.

Пример 5.29. Найти $\displaystyle\int (\cos(2-5x) + \sin 10x)\mathrm{d}x$.

Ответ: $-\dfrac{1}{5}\sin(2-5x) - \dfrac{1}{10}\cos 10x + C$.

Пример 5.30. Найти $\displaystyle\int 2^{3+\cos 2x} \cdot \sin 2x \mathrm{d}x$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2\ln 2} \cdot 2^{3+\cos 2x} + C$.

Пример 5.31. Найти $\displaystyle\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

Ответ: $8\ln|x+\sqrt{x^2-1}| - 13\sqrt{x^2-1} + C$.

Пример 5.32. Найти $\displaystyle\int \frac{\sin 2x \mathrm{d}x}{\cos^2 2x - 3}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\cos 2x - \sqrt{3}}{\cos 2x + \sqrt{3}}\right| + C$.

Пример 5.33. Найти $\displaystyle\int \frac{e^x \mathrm{d}x}{e^{2x}+5}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{e^x}{\sqrt{5}} + C$.

Пример 5.34. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3+\ln x}}$.

Ответ: $2\sqrt{3+\ln x} + C$.

Занятие 6. Вычисление определенных интегралов.

Формула Ньютона-Лейбница.

Если для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ может быть найдена ее первообразная $F(x)$, то методом вычисления определенного интеграла является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{4}$$

При интегрировании четных и нечетных функций в симметричных пределах интегрирования можно использовать формулу:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{если } f(x) \ - \ \text{четная функция}, \\ 0, & \text{если } f(x) \ - \ \text{нечетная функция}. \end{cases} \tag{5}$$

Пример 6.1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^2\mathrm{d}x$.

► Подынтегральная функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[1;4]$ имеет первообразную $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Тогда по формуле (4) имеем:

$\int\limits_1^4 x^2\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \dfrac{4^3}{3} - \dfrac{1^3}{3} = 21.$ ◄

Пример 6.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-4}^{-2} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

► Подынтегральная функция имеет "почти табличный" вид. Для нахождения первообразной выделим "полный квадрат" в знаменателе:

$5 - 4x - x^2 = -(x^2+4x+4) + 4 + 5 = -(x+2)^2 + 9.$

$\int\limits_{-4}^{-2} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int\limits_{-4}^{-2} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \int\limits_{-4}^{-2} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}} =$

$= \arcsin\dfrac{x+2}{3}\Big|_{-4}^{-2} = \arcsin 0 - \arcsin\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \arcsin\dfrac{2}{3}.$ ◄

Пример 6.3. Найти значение интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)\mathrm{d}x$.

► Это также "почти табличный" интеграл. Для нахождения первообразной и использования формулы Ньютона-Лейбница применим формулу понижения степени

$\cos^2 u = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2u).$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-0-\frac{1}{4}\left[\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\frac{\pi}{3}\right]=$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\pi+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right).\ ◀$$

Пример 6.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$.

► Учитывая, что подынтегральная функция нечетная:
$$\frac{-x}{((-x)^2+1)^2}=-\frac{x}{(x^2+1)^2},$$
следует, что $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=0.$

Результат можно получить, используя формулу Ньютона-Лейбница:
$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x^2+1}\Big|_{-1}^{1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0.\ ◀$$

Задания для самостоятельной работы.

Пример 6.5. Найти $\int\limits_1^{\sqrt{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Пример 6.6. Найти $\int\limits_1^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\mathrm{d}x$.

Ответ: $\frac{7}{4}$.

Пример 6.7. Найти $\int\limits_0^{1}\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$.

Пример 6.8. Найти $\int\limits_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$.

Пример 6.9. Найти $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Пример 6.10. Найти $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}$.

Ответ: $\ln\frac{4}{3}$.

Метод замены переменной интегрирования.
Если функция $x=\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем

$$a=\varphi(\alpha), \qquad b=\varphi(\beta), \tag{6}$$

то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{7}$$

— формула замены переменной интегрирования.
Отметим, что:

1. *Функцию $\varphi(t)$ следует подобрать так, чтобы подстановка ее вместо x в подынтегральное выражение позволила получить более простой интеграл.*

2. *Новые пределы интегрирования надо находить из соотношений (6).*

3. *При вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется.*

Пример 6.11. Вычислить интеграл $\int\limits_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{5+2\sqrt{x}}$ с помощью замены переменной.

► Применим подстановку $\sqrt{x}=t$. Тогда $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. Находим новые пределы интегрирования:

x	1	9
$t=\sqrt{x}$	1	3

Применяя формулу (7), получим

$$\int\limits_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{5+2\sqrt{x}} = \int\limits_1^3 \frac{2t\mathrm{d}t}{5+2t} = \int\limits_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}\mathrm{d}t = \int\limits_1^3 \left(1-\frac{5}{2t+5}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= t\Big|_1^3 - 5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3 = 3-1-\frac{5}{2}(\ln 11-\ln 7) = 2-\frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}. \blacktriangleleft$$

Пример 6.12. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+2\cos x}$ с помощью замены переменной.

► Положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда получаем $x = 2\operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Пределы интегрирования:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	0	1

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+2\cos x} = \int\limits_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\limits_0^1 \frac{2}{t^2+5}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}. \blacktriangleleft$$

Пример 6.13. Вычислить интеграл $\int\limits_2^3 x(3-x)^7\mathrm{d}x$.

► Полагая $t = 3-x$, получаем $x = 3-t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Пределы интегрирования:

x	2	3
t	1	0

$$\int\limits_2^3 x(3-x)^7\mathrm{d}x = \int\limits_1^0 (3-t)\cdot t^7\cdot(-\mathrm{d}t) = \int\limits_0^1 (3-t)t^7\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 (3t^7-t^8)\mathrm{d}t =$$

$$= \left(\frac{3}{8}t^8 - \frac{1}{9}t^9\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{8}-\frac{1}{9} = \frac{19}{72}. \blacktriangleleft$$

Пример 6.14. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

► Пусть $x = \frac{1}{t}$. Тогда $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,

x	1	2
t	1	$\frac{1}{2}$

. Получаем

$$\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int\limits_1^{1/2} \frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}} = -\int\limits_1^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}} =$$

$$= \int\limits_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|\Big|_{1/2}^1 = \ln\frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{7}}. \blacktriangleleft$$

Пример 6.15. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\mathrm{d}x$.

► Используем подстановку $\sqrt{e^x-1} = t$, $e^x - 1 = t^2$, $e^x\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$,

x	0	$\ln 5$
t	0	2

. Получаем

$$\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \frac{t \cdot 2t\mathrm{d}t}{t^2 + 4} = 2\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right) \mathrm{d}t = 2\left(t - 2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2 =$$
$$= 2(2 - \operatorname{arctg} 1) = 4 - \pi. \blacktriangleleft$$

Задания для самостоятельной работы.

Пример 6.16. Найти $\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

Ответ: $4 - 2\ln 3$.

Пример 6.17. Найти $\int\limits_0^1 \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 6.18. Найти $\int\limits_0^5 x \cdot \sqrt{x+4}\mathrm{d}x$.

Ответ: $\frac{506}{15}$.

Пример 6.19. Найти $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x + \cos x}$.

Ответ: $\ln 2$.

Пример 6.20. Найти $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 2\sin^2 x}$.

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Пример 6.21. Найти $\int\limits_0^{\pi} (2x + \sin 2x)\mathrm{d}x$.

Ответ: π^2.

Пример 6.22. Найти $\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{2x - 3}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\ln 7$.

Пример 6.23. Найти $\int\limits_{1/2}^1 \sqrt{4x - 2}\mathrm{d}x$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Пример 6.24. Найти $\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2x \cdot \cos 8x \mathrm{d}x$.

Ответ: $-\dfrac{11}{30}$.

Пример 6.25. Найти $\int\limits_0^{\pi} \left(\cos^3 x - \dfrac{3}{4}\cos x\right) \mathrm{d}x$.

Ответ: 0.

Пример 6.26. Найти $\int\limits_1^{3} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 + 6x + 10}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 0{,}08$.

Пример 6.27. Найти $\int\limits_1^{e^2} \dfrac{\ln^3 x}{3x}$.

Ответ: $\dfrac{4}{3}$.

Пример 6.28. Найти $\int\limits_0^{1} \dfrac{4\operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} \mathrm{d}x$.

Ответ: $\dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

Пример 6.29. Найти $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{5\mathrm{d}x}{1 + \cos x}$.

Ответ: 5.

Пример 6.30. Найти $\int\limits_1^{2} 3x(1 - x)^{17} \mathrm{d}x$.

Ответ: $-\dfrac{37}{114}$.

Пример 6.31. Найти $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5 - 4x}}$.

Ответ: $\dfrac{1}{6}$.

Пример 6.32. Найти $\int\limits_1^{16} \dfrac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt[4]{x}}$.

Ответ: $\dfrac{4}{3}\ln\dfrac{9}{2}$.

Занятие 7. Интегрирование по частям.

Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u$$

Пример 7.1. Проинтегрировать $\int x\cos 3x\mathrm{d}x$.

$$\blacktriangleright \int x\cos 3x\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = x, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v = \cos 3x\mathrm{d}x, & v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right\} =$$

$$= x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \int\frac{1}{3}\sin 3x\mathrm{d}x = \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 7.2. Проинтегрировать $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$.

$$\blacktriangleright \int x^2\ln x\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u\ln x, & \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x, & v = \dfrac{x^3}{3} \end{array}\right\} = \frac{x^3}{3}\ln x - \int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right). \blacktriangleleft$$

Пример 7.3. Проинтегрировать $\int\arcsin 2x\mathrm{d}x$.

$$\blacktriangleright \int\arcsin 2x\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = \arcsin 2x, & \mathrm{d}u = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, & v = x \end{array}\right\} =$$

$$= x\arcsin 2x - \int\frac{2x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}} = x\arcsin 2x - 2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot 2\sqrt{1-4x^2} + C =$$

$$= x\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 7.4. Вычислить $\int\limits_0^2 x^2e^{x/2}\mathrm{d}x$.

$\blacktriangleright$ Формула интегрирования по частям в этом примере используется дважды.

$$\int\limits_0^2 x^2e^{x/2}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = x^2, & \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v = e^{x/2}\mathrm{d}x, & v = 2e^{x/2} \end{array}\right\} = 2x^2e^{x/2}\Big|_0^2 - 4\int\limits_0^2 xe^{x/2}\mathrm{d}x =$$

$$= 8e - 0 - 4\int\limits_0^2 xe^{x/2}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = x, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v = e^{x/2}\mathrm{d}x, & v = 2e^{x/2} \end{array}\right\} =$$

$$= 8e - 4\left(x \cdot 2e^{x/2}\Big|_0^2 - 2\int\limits_0^2 e^{x/2}\mathrm{d}x\right) = 8e - 4\left(4e - 0 - 4e^{x/2}\Big|_0^2\right) =$$

$$= 8e - 16e + 16(e-1) = 8e - 1. \blacktriangleleft$$

Пример 7.5. Вычислить $\int\limits_0^\pi e^{-x}\cos x\mathrm{d}x$.

$\blacktriangleright$ Формула интегрирования по частям в этом примере используется дважды.

$$\int\limits_0^\pi e^{-x}\cos x\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = e^{-x}, & \mathrm{d}u = -e^{-x}\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x, & v = \sin x \end{array}\right\} = e^{-x}\sin x\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi e^{-x}\sin x\mathrm{d}x =$$

$$= 0 - 0 + \int\limits_0^\pi e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = e^{-x}, & \mathrm{d}u = -e^{-x}\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x, & v = -\cos x \end{array}\right\} =$$

$$= -e^{-x}\cos x\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi e^{-x}\cos x\mathrm{d}x = e^{-\pi} + 1 - \int\limits_0^\pi e^{-x}\cos x\mathrm{d}x.$$

Возвращаемся к исходному интегралу и получаем уравнение

$$\int\limits_0^\pi e^{-x}\cos x\mathrm{d}x = e^{-\pi} + 1 - \int\limits_0^\pi e^{-x}\cos x\mathrm{d}x,$$

$$2\int\limits_0^\pi e^{-x}\cos x\mathrm{d}x = e^{-\pi} + 1,$$

$$\int\limits_0^\pi e^{-x}\cos x\mathrm{d}x = \frac{e^{-\pi}+1}{2}. \blacktriangleleft$$

Пример 7.6. Вычислить $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\mathrm{d}x$.

$$\blacktriangleright \int x\,\mathrm{arctg}\,x\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}\,x, & \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}, \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}\,x) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x(x^2+1) - \frac{1}{2}x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 7.7. Вычислить $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\cos^2 4x}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{x\mathrm{d}x}{\cos^2 4x} = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 4x}, & v = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg} 4x \end{array} \right\} = x \cdot \frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x - \frac{1}{4}\int \operatorname{tg} 4x\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{4}\operatorname{tg} 4x + \frac{1}{16}\ln|\cos 4x| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 7.8. Вычислить $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x$.

$$\blacktriangleright \int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}, \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^3} = x^{-3}\mathrm{d}x, & v = \dfrac{x^{-2}}{-2} \end{array} \right\} = \frac{x^{-2}}{-2}\ln x\Big|_0^e + \frac{1}{2}\int\limits_1^e x^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x^2}\Big|_1^e + \frac{1}{2}\int\limits_1^e x^{-3}\mathrm{d}x = -\frac{\ln e}{2e^2} + \frac{\ln 1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{2}\Big|_1^e = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}\left(e^{-2} - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right). \blacktriangleleft$$

Задания для самостоятельной работы.

Пример 7.9. Найти $\int (2x-1)\sin 4x\mathrm{d}x$.

Ответ: $-\frac{1}{4}(2x-1)\cos 4x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$.

Пример 7.10. Найти $\int \sqrt{x}\ln x\mathrm{d}x$.

Ответ: $\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} + C$.

Пример 7.11. Найти $\int (x^2+1)\cos x\mathrm{d}x$.

Ответ: $(x^2+1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$.

Пример 7.12. Найти $\int\limits_0^{1/3} \operatorname{arctg} 3x\mathrm{d}x$.

Ответ: $\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\ln 2$.

Пример 7.13. Найти $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

Пример 7.14. Найти $\int e^{2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

Ответ: $\frac{2}{17}e^{2x}\left(4\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) + C$.

Занятие 8. Интегрирование рациональных дробей.

Для интегрирования рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *выполняют 3 шага:*

1. *Если исходная дробь* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— неправильная, то выделяют целую часть:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ *— целая часть и* $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ *— остаточная (правильная) дробь.*

2. *Исходная дробь* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *(если она изначально была правильной) или остаточная дробь* $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ *разлагается на простейшие дроби*

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(x-b)^l} +$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m} + \ldots$$

с последующим вычислением коэффициентов.

3. *Интегрируются целая часть и каждая из простейших дробей.*

Пример 8.1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x$.

▶ Подынтегральная дробь правильная, поэтому
$\dfrac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x-2}$,
$A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1) = 2x-3$.
Коэффициенты удобно найти методом частных значений. Полагаем
$x = 1 \Longrightarrow A\cdot 0 + B\cdot 1\cdot(-1) + C\cdot 0 = 2-3 \Longrightarrow -B = -1 \Longrightarrow B = 1$,
$x = 2 \Longrightarrow A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 2\cdot 1 = 1 \Longrightarrow 2C = 1 \Longrightarrow C = \dfrac{1}{2}$,
$x = 0 \Longrightarrow A\cdot(-1)\cdot(-2) + B\cdot 0 + C\cdot 0 = -3 \Longrightarrow 2A = -3 \Longrightarrow A = -\dfrac{3}{2}$.
$\displaystyle\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2}\right)\mathrm{d}x =$
$= -\dfrac{3}{2}\ln|x| + \ln|x-1| + \dfrac{1}{2}\ln|x-2| + C$.
Ответ: $-\dfrac{3}{2}\ln|x| + \ln|x-1| + \dfrac{1}{2}\ln|x-2| + C$. ◀

Пример 8.2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{5x^3-9x^2-22x-8}{x^3-4x}\mathrm{d}x$.

► Подынтегральная дробь неправильная, поэтому выделяем целую часть:

$$\begin{array}{l|l} 5x^3+9x^2\text{-}22x\text{-}8 & x^3\text{-}4x \\ \cline{2-2} \underline{5x^3 \quad\ \text{-}20x} & 5 \\ \quad 9x^2\text{-}\ 2x\text{-}8 & \end{array}$$

$\displaystyle\frac{5x^3-9x^2-22x-8}{x^3-4x} = 5+\frac{9x^2-2x-8}{x(x-2)(x+2)}$,

$\displaystyle\frac{9x^2-2x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$,

$A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2) = 9x^2-2x-8$.

Коэффициенты найдем методом частных значений:

$x=0 \Longrightarrow -4A=-8 \Longrightarrow A=2$,

$x=2 \Longrightarrow 8B=24 \Longrightarrow B=3$,

$x=-2 \Longrightarrow 8C=32 \Longrightarrow C=4$.

$\displaystyle\int \frac{5x^3-9x^2-22x-8}{x^3-4x}\mathrm{d}x = \int\left(5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}\right)\mathrm{d}x =$

$= 5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C$.

Ответ: $5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C$. ◄

Пример 8.3. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)^2}$.

► $\displaystyle\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$,

$x = A(x+1)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+1)$,

$x = x^2(A+C)+x(2A+B)+(A-B-C)$.

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2 & A+C=0 \\ x & 2A+B=1 \\ x^0 & A-B-C=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow A=\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{2},\ C=-\frac{1}{4}.$$

$\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)^2} = \int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}-\frac{\frac{1}{4}}{x+1}\right)\mathrm{d}x =$

$\displaystyle= \frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\frac{(x+1)^{-1}}{-1}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2(x+1)}+C$.

Ответ: $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2(x+1)}+C$. ◄

Пример 8.4. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{4x-1}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x$.

► $\displaystyle\frac{4x-1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$,

$A(x^2+4)+x(Bx+C) = 4x-1$,

$x^2(A+B)+Cx+4A = 4x-1$,

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2 & A+B=0 \\ x & C=4 \\ x^0 & 4A=-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{4},\ C=4.$$

$$\int \frac{4x-1}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{1}{4}x+4}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{4}\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+4} + 4\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} =$$
$$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C = -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{8}\ln(x^2+4) + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{8}\ln(x^2+4) + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$ ◀

Пример 8.5. Вычислить интеграл $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\mathrm{d}x.$

▶ $\frac{3x+2}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3},$

$A(x+1)^3 + Bx(x+1)^2 + Cx(x+1) + Dx = 3x+2,$

$A=2,\ B=-2,\ C=-2,\ D=1,$

$$\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}\mathrm{d}x = 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x} - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1} - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} + \int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3} =$$
$$= 2\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C.$$

Ответ: $2\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C.$ ◀

Пример 8.6. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}\mathrm{d}x.$

▶ Выделяем целую часть:

$$\begin{array}{l|l} x^4+3x^2-5 & x^3+2x^2+5x \\ \hline x^4+2x^3+5x^2 & x-2 \\ \hline \quad -2x^3-2x^2-5 & \\ \quad -2x^3-4x^2-10x & \\ \hline \qquad 2x^2+10x-5 & \end{array}$$

$$\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x} = x-2+\frac{2x^2+10x-5}{x(x^2+2x+5)},$$
$$\frac{2x^2+10x-5}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5},$$

$Ax^2 + 2Ax + 5A + Bx^2 + Cx = 2x^2 + 10x - 5,$

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2 & A+B=2 \\ x & 2A+C=10 \\ x^0 & 5A=-5 \end{array}\right\} \Longrightarrow A=-1,\ B=3,\ C=12,$$

$$\int\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}\mathrm{d}x = \int\left[(x-2) - \frac{1}{x} + \frac{3x+12}{x^2+2x+5}\right]\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| + \int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)+9}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x + 9\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+4} =$$
$$= \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

Ответ: $\frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$ ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 8.7. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{(x-4)\mathrm{d}x}{x^2-5x+6}$.
Ответ: $2\ln|x-2| - \ln|x-3| + C$.

Пример 8.8. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x$.
Ответ: $x + \dfrac{1}{x} + 3\ln|x-1| - \ln|x| + C$.

Пример 8.9. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-1}$.
Ответ: $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{4}\ln|x-1| - \dfrac{1}{4}\ln|x+1| + C$.

Пример 8.10. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$.
Ответ: $\dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \dfrac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

Пример 8.11. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}\mathrm{d}x$.
Ответ: $2\ln|x+1| - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

Занятие 9. Интегрирование иррациональных выражений.

Пример 9.1. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2 - x + 3}}$.

► Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ после выделения полного квадрата под корнем сводятся к табличным:

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{k^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{k} + C$, *если* $a < 0$;

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 \pm k^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm k^2}| + C$, *если* $a > 0$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2 - x + 3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| x - \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}} \right| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 9.2. Найти $\displaystyle\int \frac{(x+4)\mathrm{d}x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$.

► Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\mathrm{d}x$ после выделения полного квадрата под корнем сводятся к табличным:

$\displaystyle\int \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{k^2 \pm u^2}} = \pm\sqrt{k^2 \pm u^2} + C$;

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{k^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{k} + C$, *если* $a < 0$;

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 \pm k^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm k^2}| + C$, *если* $a > 0$.

$$\int \frac{(x+4)\mathrm{d}x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} =$$
$$= \{3 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 3) = -[(x^2 + 2x + 1) - 4] = -[(x+1)^2 - 4] = 4 - (x+1)^2,$$
$$= x + 1 = t,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t,\ x = t - 1\} =$$
$$= \int \frac{(t+3)\mathrm{d}t}{\sqrt{4 - t^2}} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{4 - t^2}} + 3\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4 - t^2}} = -\sqrt{4 - t^2} + 3\arcsin\frac{t}{2} + C =$$
$$= -\sqrt{4 - (x+1)^2} + 3\arcsin\frac{x+1}{2} + C = -\sqrt{3 - 2x - x^2} + 3\arcsin\frac{x+1}{2} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 9.3. Найти $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$.

► Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\mathrm{d}x$ вычисляются с помощью тригонометрической подстановки $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$.

$$\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^4}\mathrm{d}x =$$
$$= \left\{x = 4\sin t,\ \mathrm{d}x = 4\cos t\mathrm{d}t,\ \sin t = \frac{x}{4},\ 16 - x^2 = 16 - 16\sin^2 t = 16\cos^2 t\right\} =$$
$$= \int \frac{4\cos t \cdot 4\cos t\mathrm{d}t}{4^4 \cdot \sin^4 t} = \frac{1}{16}\int \frac{\cos^2 t\mathrm{d}t}{\sin^4 t} = \frac{1}{16}\int \frac{\cos^2 t\mathrm{d}t}{\sin^2 t \cdot \sin^2 t} = \frac{1}{16}\int \mathrm{ctg}^2\, t\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t} =$$

$$= -\frac{1}{48}\operatorname{ctg}^3 t + C = -\frac{1}{48}\frac{(\sqrt{16-x^2})^3}{x^3} + C,$$

так как $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \dfrac{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}}{x/4} = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x}$. ◀

Пример 9.4. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9+x^2}}$.

▶ Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\mathrm{d}x$ решаются с помощью подстановки $x = a\operatorname{tg} t$ или $x = a\operatorname{ctg} t$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9+x^2}} = \left\{x = 3\operatorname{tg} t,\ \mathrm{d}x = 3\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t},\ \operatorname{tg} t = \frac{x}{3},\ 9+x^2 = 9+9\operatorname{tg}^2 t = \frac{9}{\cos^2 t}\right\} =$$

$$= \int \frac{3\mathrm{d}t}{\cos^2 t\cdot 9\operatorname{tg}^2 t\cdot \dfrac{3}{\cos t}} = \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t\cdot\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{9}\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin^2 t} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \sin^{-2} t\cos t\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\frac{\sin^{-1} t}{-1} + C = -\frac{1}{9\sin t} + C = -\frac{\sqrt{9+x^2}}{9x} + C,$$

так как $\dfrac{1}{\sin^2 t} = 1 + \operatorname{ctg}^2 t$, отсюда

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}} = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}} = \frac{x/3}{\sqrt{\dfrac{x^2}{9}+1}} = \frac{x\cdot 3}{3\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}.$$ ◀

Пример 9.5. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

▶ Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\mathrm{d}x$ решаются с помощью подстановки $x = \dfrac{a}{\sin t}$ или $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \left\{x = \frac{1}{\sin t},\ \mathrm{d}x = -\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin^2 t},\ \sin t = \frac{1}{x},\right.$$

$$\left. x^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2 t} - 1 = \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \operatorname{ctg}^2 t\right\} =$$

$$= \int \frac{-\cos t\mathrm{d}t}{\sin^2 t\cdot\dfrac{1}{\sin^2 t}\cdot\dfrac{\cos t}{\sin t}} = -\int \sin t\mathrm{d}t = \cos t + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C,$$

так как $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. ◀

Пример 9.6. Найти $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}\mathrm{d}x$.

▶ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}\mathrm{d}x = \{x+2 = t^2,\ x = t^2-2,\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t,\ t = \sqrt{x+2}\} =$

$$= \int\frac{t\cdot 2t\mathrm{d}t}{t^2-2+3} = 2\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}\mathrm{d}t = 2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 2\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right) = 2(t - \operatorname{arctg} t) + C = 2(\sqrt{x+2} - \operatorname{arctg}\sqrt{x+2}) + C. \blacktriangleleft$$

Пример 9.7. Найти $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{x - \sqrt[3]{x^2}}$.

► Здесь x входит в подынтегральную функцию под радикалами с показателями 2 и 3. Наименьшее общее кратное показателей 6. Делаем подстановку $x = t^6$.

$$\int \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{x - \sqrt[3]{x^2}} = \{x = t^6,\ \mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t,\ t = \sqrt[6]{x}\} =$$

$$= \int \frac{t^3 \cdot 6t^5\mathrm{d}t}{t^6 - t^4} = 6\int \frac{t^8\mathrm{d}t}{t^4(t^2-1)} = 6\int \frac{t^4\mathrm{d}t}{t^2-1} = 6\int \frac{(t^4-1)+1}{t^2-1}\mathrm{d}t =$$

$$= 6\int \left(\frac{t^4-1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = 6\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C. \blacktriangleleft$$

Задания для самостоятельной работы.

Пример 9.8. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Ответ: $\ln|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+5}| + C$.

Пример 9.9. Найти $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

Ответ: $\dfrac{2x+1}{2} + \sqrt{2x+1} + \ln|\sqrt{2x+1}+1| + C$.

Пример 9.10. Найти $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

Ответ: $2\left(\arcsin\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\right) + C$.

Пример 9.11. Найти $\displaystyle\int \frac{(3x+4)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+6x+13}}$.

Ответ: $3\sqrt{x^2+6x+13} - 5\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}| + C$.

Пример 9.12. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{9+x^2})^3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{9}\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C$.

Занятие 10. Интегрирование тригонометрических выражений.

Пример 10.1. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{8-4\sin x+7\cos x}$.

▶ Интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ вычисляется с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. В этом случае $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{8-4\sin x+7\cos x}=\int \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(8-4\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+7\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int \frac{2\mathrm{d}t}{8+8t^2-8t+7-7t^2}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-8t+15}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-4)^2-1}=\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-3}\right|+C. ◀$$

Пример 10.2. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$.

▶ Подынтегральная функция четная относительно $\sin x$ и $\cos x$, поэтому применима подстановка $\operatorname{tg} x=t$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}=\left\{\operatorname{tg} x=t,\ \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\mathrm{d}t\right\}=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+5)}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-4t+5}=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-2)^2+1}=$$

$$=\operatorname{arctg}(t-2)+C=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x-2)+C. ◀$$

Пример 10.3. Найти $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$.

▶ Подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$, поэтому применяем подстановку $\cos x=t$.

$$\int \frac{\sin^3 x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}=\{\cos x=t,\ -\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\}=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin x\mathrm{d}x}{\cos^{2/3}x}=$$

$$=-\int(1-t^2)\cdot t^{-2/3}\mathrm{d}t=-\int(t^{-2/3}-t^{4/3})\mathrm{d}t=-\left(3t^{1/3}-\frac{3}{7}t^{7/3}\right)+C=$$

$$=\frac{3}{7}\sqrt[3]{\cos^7 x}-3\sqrt[3]{\cos x}+C. ◀$$

Пример 10.4. Найти $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{4\sin^2 x-1}$.

▶ Подынтегральная функция нечетная относительно $\cos x$, поэтому применяем подстановку $\sin x=t$.

$$\int \frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{4\sin^2 x-1}=\{\sin x=t,\ \cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\}=\int\frac{\cos^2 x\cdot\cos x\mathrm{d}x}{4\sin^2 x-1}=$$

$$=\int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x\mathrm{d}x}{4\sin^2 x-1}=\int\frac{(1-t^2)\mathrm{d}t}{4t^2-1}=$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{4t^2-4}{4t^2-1}\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\int \frac{(4t^2-1)-3}{4t^2-1}\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\int \left(1-\frac{3}{4t^2-1}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(t-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+1}\right|\right)+C = \frac{3}{16}\ln\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}\right| - \frac{1}{4}\sin x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 10.5. Найти $\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$.

$\blacktriangleright$ Если в интеграле $\int \sin^n x\cos^m x\mathrm{d}x$ n и m — четные и положительные, то можно применить метод понижения степени:

$\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$,

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$.

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x = \int \sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x\cos^2 x\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x\mathrm{d}x + \int \sin^2 2x\cos 2x\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\mathrm{d}x + \frac{\sin^3 2x}{6}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{6}\right)+C. \blacktriangleleft$$

Пример 10.6. Найти $\int \mathrm{tg}^3 x\mathrm{d}x$.

$\blacktriangleright$ Применяем равенство $1+\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. Отсюда $\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$.

$$\int \mathrm{tg}^3 x\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}\, x\cdot\mathrm{tg}^2 x\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}\, x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}\, x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \mathrm{tg}\, x\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 10.7. Найти $\int \mathrm{ctg}^4 x\mathrm{d}x$.

$\blacktriangleright$ Из равенства $1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ имеем $\mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1$.

$$\int \mathrm{ctg}^4 x\mathrm{d}x = \int \mathrm{ctg}^2 x\cdot\mathrm{ctg}^2 x\mathrm{d}x = \int \mathrm{ctg}^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int \mathrm{ctg}^2 x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \mathrm{ctg}^2 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} + \int \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x + \mathrm{ctg}\, x + x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 10.8. Найти $\int \sin 3x\cos 2x\mathrm{d}x$.

$\blacktriangleright$ Применим формулу $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$.

$$\int \sin 3x\cos 2x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(\sin x+\sin 5x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \sin x\mathrm{d}x + \int \sin 5x\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{1}{5}\cos 5x\right)+C. \blacktriangleleft$$

Задания для самостоятельной работы.

Пример 10.9. Найти $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

Ответ: $\dfrac{1}{8}\left(x-\dfrac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$

Пример 10.10. Найти $\displaystyle\int \cos^3 x\sin^2 x\mathrm{d}x.$

Ответ: $\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C.$

Пример 10.11. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}.$

Ответ: $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}+C.$

Пример 10.12. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3+4\sin x}.$

Ответ: $\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C.$

Пример 10.13. Найти $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^3 x\mathrm{d}x.$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|+C.$

Пример 10.14. Найти $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\mathrm{d}x}{\cos x-3}.$

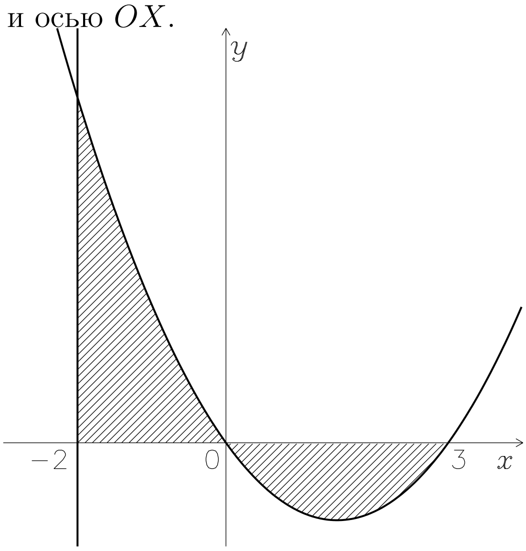
Ответ: $\dfrac{\cos^2 x}{2}+3\cos x+8\ln|\cos x-3|+C.$

Занятие 11. Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление площади в декартовых координатах:

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

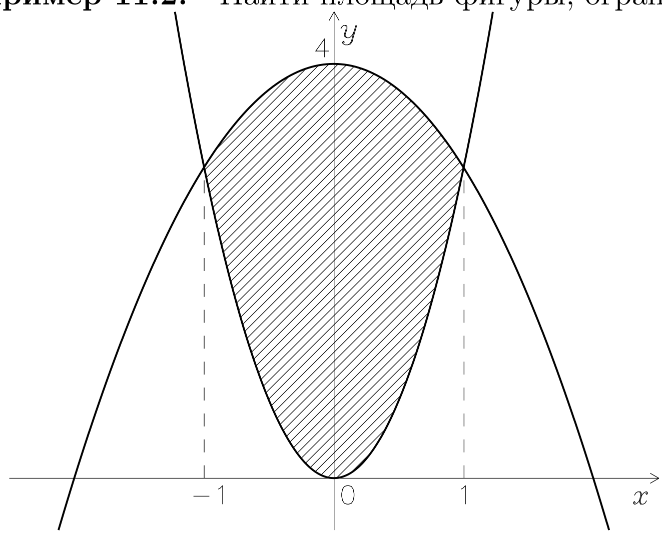
Пример 11.1. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 3x$, прямой $x = 2$ и осью OX.



►

$$S = \int_{-2}^{0} (x^2 - 3x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{3} (x^2 - 3x)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{3} = \frac{79}{6}. \blacktriangleleft$$

Пример 11.2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 3x^2$.



►

$$S = 2\int_{0}^{1} (4 - x^2 - 3x^2)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} (4 - 4x^2)\mathrm{d}x = 2\left(4x - \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{16}{3}. \blacktriangleleft$$

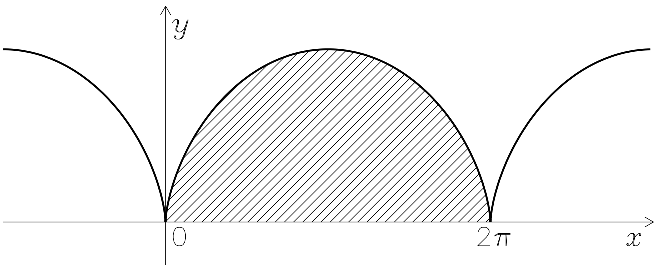
Вычисление площади фигуры, если функция задана параметрически:

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = f(t) \end{cases}$, $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$, $a \le x \le b$, $t_1 \le t \le t_2$.

Площадь фигуры равна:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot \varphi'(t) \mathrm{d}t.$$

Пример 11.3. Определить площадь, ограниченную одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$



►

$$S = \int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t) \cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \mathrm{d}t = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\mathrm{d}t =$$

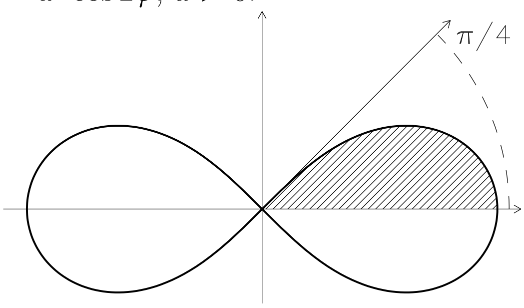
$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) \mathrm{d}t = a^2 \left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2. \blacktriangleleft$$

Вычисление площади в полярных координатах:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2 \mathrm{d}\varphi$$

Пример 11.4. Вычислить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $a > 0$.



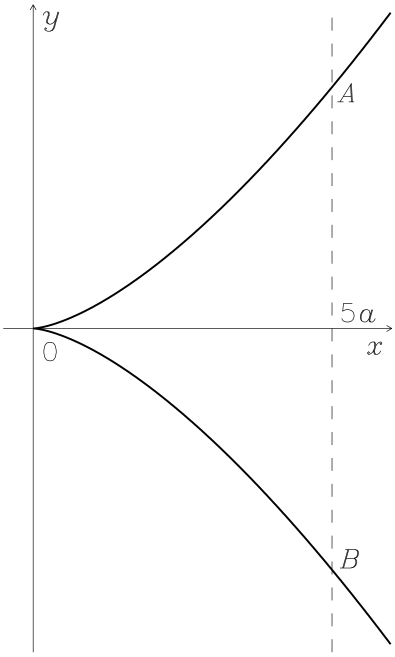
►

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi = 2a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi = a^2 \sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = a^2. \blacktriangleleft$$

Длина дуги кривой в декартовых координатах:

$$L_{AB} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

Пример 11.5. Найти длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 5a$.



►
$y = \dfrac{1}{\sqrt{a}}x^{3/2}$, $y' = \dfrac{3}{2\sqrt{a}}x^{1/2}$.

$$L = 2\int\limits_0^{5a} \sqrt{1 + \frac{9}{4a}x}\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{4a}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{9}{4a}x\right)\Bigg|_0^{5a} = \frac{670}{27}a. \ ◄$$

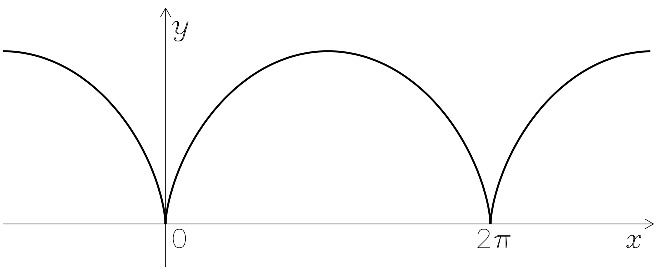
Длина дуги кривой, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\mathrm{d}t$$

Пример 11.6. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$



►

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \mathrm{d}t = a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \mathrm{d}t =$$

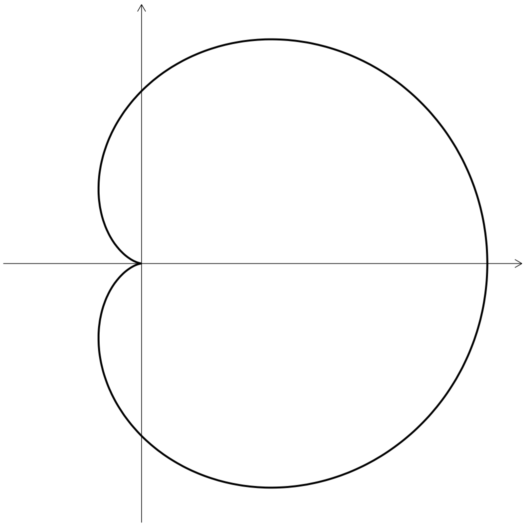
$$= a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)} \mathrm{d}t = a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} \mathrm{d}t = 2a \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t = 4a \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$= 4a(-\cos\pi + \cos 0) = 8a.$ ◀

Длина дуги кривой в полярных координатах.
$r = r(\varphi$

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2} \mathrm{d}\varphi$$

Пример 11.7. Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.



▶

$$L = 2 \int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} \mathrm{d}\varphi = 2a \int\limits_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = 4a \int\limits_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} \mathrm{d}\varphi =$$

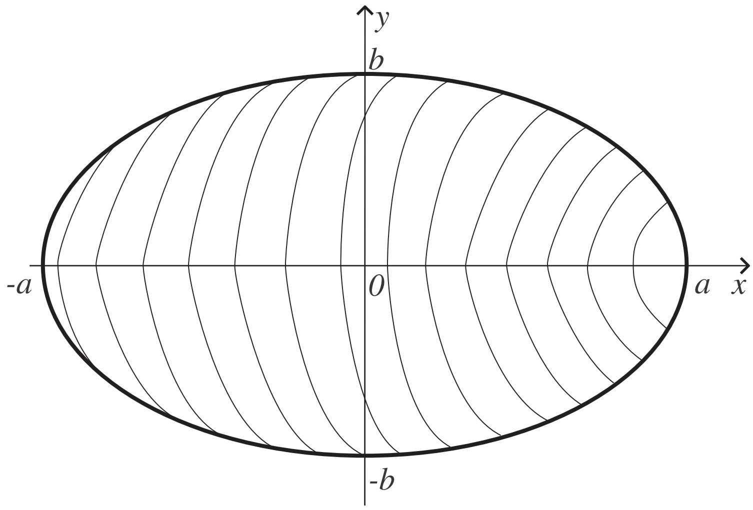
$$= 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Bigg|_0^{\pi} = 8a.$$ ◀

Объем тел вращения:

$$V_{OX} = \pi \int\limits_a^b f^2(x) \mathrm{d}x$$

$$V_{OY} = \pi \int\limits_c^d \varphi^2(y) \mathrm{d}y.$$

Пример 11.8. Вычислить объем тела, получаемого вращением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси OX.



►
$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

$V = 2\pi \int\limits_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\mathrm{d}x = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int\limits_0^a (a^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a =$

$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2.$ ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 11.9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x$ и параболой $y = 2 - x^2$.
Ответ: $\frac{9}{2}$.

Пример 11.10. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$.
Ответ: $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$.

Пример 11.11. Найти длину дуги прямой $y = x$ от точки $(0, 0)$ до точки $(2, 2)$.
Ответ: $2\sqrt{2}$.

Пример 11.12. Найти объем фигуры, полученной при вращении окружности $x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси OX.
Ответ: $\frac{32}{3}\pi$.

Пример 11.13. Определить площадь, заключенную между параболами $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.
Ответ: 9.

Пример 11.14. Найти площадь, ограниченную эллипсом $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.
Ответ: πab.

Пример 11.15. Вычислить длину дуги цепной линии $y = 2(e^{x/4} + e^{-x/4})$ от $x = 0$ до $x = 4$.

Ответ: $2(e - e^{-1})$.

Пример 11.16. Вычислить длину дуги кривой $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = 3\pi$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}\pi a$.

Пример 11.17. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной астроидой $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

Ответ: $\dfrac{32}{105}\pi a^3$.

Занятие 12. Исследование и вычисление несобственных интегралов.

Несобственный интеграл с неограниченным пределом интегрирования (I рода) по определению — $\int\limits_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$*, если функция непрерывна на промежутке* $(a;+\infty)$*. Если такой предел существует, то говорят, что интеграл* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *сходится. Если предел не существует или он бесконечен, то интеграл* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *расходится.*

Если функция непрерывна на промежутке $(-\infty;b)$*, то несобственный интеграл определяется аналогично:* $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода:

1. *Если на промежутке* $[a;+\infty)$ *непрерывные функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяют условию* $0 \le f(x) \le \varphi(x)$*, то из сходимости интеграла* $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$*, а из расходимости интеграла* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *следует расходимость интеграла* $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$.

2. *Если существует предел* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$ ($f(x) > 0$ *и* $\varphi(x) > 0$)*, то интегралы* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *и* $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ *одновременно оба сходятся или оба расходятся (то есть, ведут себя одинаково в смысле сходимости).*

Несобственный интеграл от неограниченной функции (II рода) по определению $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$*, где* $f(x)$ *непрерывна на промежутке* $[a;b)$ *и имеет бесконечный разрыв при* $x = b$*. Если данный предел существует, то несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *сходится. Если же данный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *расходится.*

Аналогично, если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x = a$, то полагают $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$.

Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода:

1. *Если на промежутке $[a;b]$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x = b$ имеют разрыв и удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$.*

2. *Пусть на промежутке $[a;b]$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют разрыв при $x = b$. Если существует предел $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ одновременно оба сходятся или оба расходятся.*

Пример 12.1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_1^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

► $\int\limits_1^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_1^b x^{-2}\mathrm{d}x = -\lim\limits_{b \to \infty} \dfrac{1}{x}\Big|_1^b = -(0-1) = 1$, интеграл сходится. ◄

Пример 12.2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_{-\infty}^0 \cos x\mathrm{d}x$.

► $\int\limits_{-\infty}^0 \cos x\mathrm{d}x = \lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^0 \cos x\mathrm{d}x = \lim\limits_{a \to -\infty} \sin x\Big|_a^0 = 0 - \lim\limits_{a \to -\infty} \sin a$, интеграл расходится, так как предел $\lim\limits_{a \to -\infty} \sin a$ не существует. ◄

Пример 12.3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_1^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

► $\int\limits_1^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_1^b \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \lim\limits_{b \to \infty} \ln b = \infty$, интеграл расходится. ◄

Пример 12.4. Сходится ли интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+3^x)}$?

► При $x \geq 1$ имеем $\frac{1}{x^2(1+3^x)} < \frac{1}{x^2}$. Но интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$ сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+3^x)}$ также сходится (и его значение меньше 1). ◄

Пример 12.5. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

► Интеграл $\int\limits_1^\infty \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\mathrm{d}x$ сходится, так как сходится интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$ ◄

Пример 12.6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

► При $x = 0$ функция $y = \frac{1}{x^2}$ имеет бесконечный разрыв.

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\bigg|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty.$$

Интеграл расходится. ◄

Пример 12.7. Сходится ли интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$?

► Функция $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ имеет на отрезке $[0;1]$ единственный разрыв в точке $x = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = 0 - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon$ расходится. И, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$, то интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ также расходится. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 12.8. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость: $\int\limits_0^\infty e^{-4x}\mathrm{d}x$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

Пример 12.9. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость: $\displaystyle\int\limits_{13}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

Ответ: Расходится.

Пример 12.10. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \cos 3x\mathrm{d}x$.

Ответ: Расходится.

Пример 12.11. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость: $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}$.

Ответ: $\ln 2$.

Пример 12.12. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость: $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Пример 12.13. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость: $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$.

Ответ: Расходится.

Пример 12.14. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

Пример 12.15. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость: $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Ответ: Расходится.

Занятие 13. Решение простейших дифференциальных уравнений и метод изоклин.

Краткая сводка формул по теме:

Дифференциальное уравнение первого порядка связывает между собой независимую переменную x, искомую (неизвестную) функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, то есть $F(x,y,y')=0$. Данное уравнение может принимать вид:

$y'=f(x,y)$ *или*

$\mathrm{d}y=f(x,y)\mathrm{d}x$, *а также*

$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ *(дифференциальная форма).*

Задача отыскания решения уравнения $F(x,y,y')=0$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется задачей Коши. Геометрически это равносильно следующему: требуется найти интегральную кривую уравнения $F(x,y,y')=0$, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0)$.

Уравнение $y'=f(x,y)$ устанавливает связь (зависимость) между координатами точки (x,y) и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, $y'=f(x,y)$ дает совокупность направлений (поле направлений) на плоскости Oxy. Это геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка.

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется изоклиной. Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых. Уравнение изоклины можно получить, если положить $y'=k$, то есть $f(x,y)=k$.

Решением дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y=\varphi(x)$; общим решением является $y=\varphi(x,C)$, где C — произвольная постоянная; частным решением называется функция $y=\varphi(x,C_0)$, где $C=C_0$. В неявном виде общее решение дифференциального уравнения первого порядка записывается как $\Phi(x,y,C)=0$. Это общий интеграл уравнения.

Уравнение вида $P_1(x)Q_1(y)\mathrm{d}x+P_2(x)Q_2(y)\mathrm{d}y=0$ называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение вида $\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}\mathrm{d}x+\dfrac{Q_1(y)}{Q_2(y)}\mathrm{d}y=0$ называется дифференциальным уравнением с разделенными переменными. Общий интеграл уравнения с разделенными переменными находится почленным интегрированием: $\displaystyle\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}\mathrm{d}y=C$.

Пример 13.1. Показать, что функция $y=(x+C)e^x$ является решением дифференциального уравнения $y'-y=e^x$.

► Находим производную данной функции: $y'=e^x+(x+C)e^x$. Теперь подставим значения y и y' в данное уравнение: $e^x+(x+C)e^x-(x+C)e^x=e^x$. Получили тождество $e^x=e^x$. Следовательно, функция $y=(x+C)e^x$ является решением уравнения $y'-y=e^x$. ◄

Пример 13.2. Показать, что функция $y=-\dfrac{2}{x^2}$ является решением дифференциального уравнения $xy^2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0$.

► Сначала находим $\mathrm{d}y$: $\mathrm{d}y=\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)'_x\mathrm{d}x=\dfrac{4}{x^3}\mathrm{d}x$. Подставим значения y и $\mathrm{d}y$ в данное уравнение, получим тождество: $x \cdot \left(-\dfrac{2}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \dfrac{4}{x^3}\mathrm{d}x = 0$, то есть $0 = 0$. Значит, функция $y = -\dfrac{2}{x^2}$ — действительно решение исходного уравнения. ◀

Пример 13.3. Показать, что функция $x^2 - xy + y^2 = C$ является решением дифференциального уравнения $(x - 2y)y' - 2x + y = 0$.

▶ Найдем производную неявной функции, для чего продифференцируем обе части уравнения $x^2 - xy + y^2 = C$ по x:

$2x - y - xy' + 2yy' = 0$, откуда $y' = \dfrac{y - 2x}{2y - x}$, $x \neq 2y$.

Подставим полученное выражение для y' в данное дифференциальное уравнение:

$(x - 2y) \cdot \dfrac{y - 2x}{2y - x} - 2x + y = 0.$

Уравнение обращается в тождество, то есть функция $x^2 - xy + y^2 = C$ является интегралом исходного уравнения. ◀

Пример 13.4. Решить задачу Коши: $y' = \sin 5x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

▶ Проинтегрируем обе части уравнения:

$y = \displaystyle\int \sin 5x \mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$

Теперь найдем частное решение уравнения. Подставив $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $y = 1$ в найденное решение, получим искомое значение C: $1 = -\dfrac{1}{5}\cos\dfrac{5\pi}{2} + C$, откуда $C = 1$. Таким образом, решением задачи Коши является функция $y = -\dfrac{1}{5}\cos 5x + 1$. ◀

Пример 13.5. Составить дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых: $y = Cx^3$.

▶ Продифференцировав по x равенство $y = Cx^3$, получим $y' = 3Cx^2$. Кроме того, очевидно, $C = \dfrac{y}{x^3}$. Подставляя это выражение для C в равенство $y' = 3Cx^2$, получаем искомое дифференциальное уравнение: $y' = 3 \cdot \dfrac{y}{x^3} \cdot x^2$, то есть $xy' = 3y$. ◀

Пример 13.6. С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

▶ Уравнение изоклин этого дифференциального уравнения $y' = 2x$ будет $2x = k$, то есть, изоклинами будут прямые, параллельные оси Oy ($x = k/2$). В точках прямых проведем отрезки, образующие с осью Ox один и тот же угол α, тангенс которого равен k.

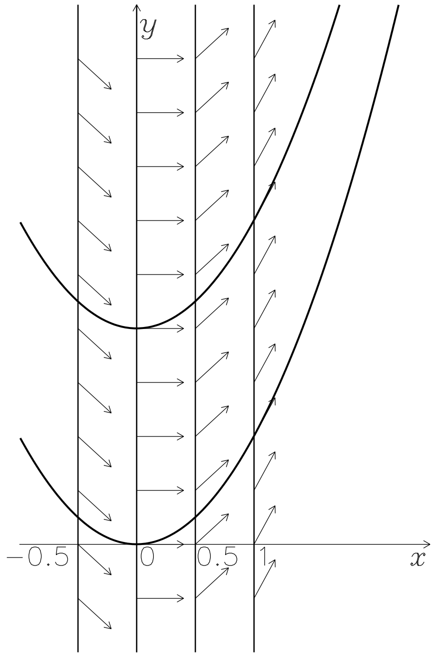
Так, при $k = 0$ имеем $x = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$;

при $k = 1$ уравнение изоклины $x = \dfrac{1}{2}$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = 45°$;

при $k = -1$ уравнение изоклины $x = -\dfrac{1}{2}$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = -45°$;

при $k = 2$ уравнение изоклины $x = 1$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \simeq 63°$ и т.д.

Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклоненных к оси Ox под определенным углом, по их направлениям строим линии. Они, как видно, представляют собой семейство парабол.



◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 13.7. Проверить, является ли функция $y = \dfrac{1}{3(x+1)}$ решением дифференциального уравнения $y' = 3y^2$.

Ответ: Нет.

Пример 13.8. Проверить, является ли функция $\nu = \dfrac{c}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{a}}\right)$ решением дифференциального уравнения $a\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} + b\nu - c = 0$.

Ответ: Да.

Пример 13.9. Решить задачу Коши: $y' = 2x + 1$, $y(2) = 5$.

Ответ: $y = x^2 + x - 1$.

Пример 13.10. Решить дифференциальное уравнение: $(1+y)\mathrm{d}x - (1-x)\mathrm{d}y = 0$.

Ответ: $(1-x)(1+y) = C$.

Пример 13.11. Решить дифференциальное уравнение: $\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x + y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y = 0$.

Ответ: $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$.

Пример 13.12. Решить дифференциальное уравнение: $xyy' = 1 - x^2$.

Ответ: $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$.

Пример 13.13. Построить поле направлений и приближенным образом (методом изоклин) построить интегральные кривые для уравнения $y' = x - 1$.

Ответ: параболы с вершиной при $x = 1$.

Занятие 14. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения.

Если уравнение вида

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{8}$$

после преобразования может быть записано в виде

$$f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x + \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)\mathrm{d}y = 0, \tag{9}$$

то оно называется уравнением с разделяющимися переменными. Исключив из рассмотрения точки, в которых $\varphi_1(x) = 0$ *и* $f_2(y) = 0$, *и разделив обе части уравнения (9) на* $f_2(y)\varphi_1(x)$, *получим уравнение*

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\mathrm{d}x + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\mathrm{d}y = 0,$$

в котором, как говорят, переменные разделены. Общим интегралом уравнения будет

$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\mathrm{d}x + \int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\mathrm{d}y = C.$$

Пример 14.1. Проинтегрировать уравнение $(xy^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - x^2y)\mathrm{d}y = 0$.
► $y^2(x+1)\mathrm{d}x + x^2(1-y)\mathrm{d}y = 0$
Разделим переменные, поделив на y^2x^2:
$\dfrac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x + \dfrac{1-y}{y^2}\mathrm{d}y = 0$
Интегрируя, получим общий интеграл уравнения:
$\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x + \int\frac{1-y}{y^2}\mathrm{d}y = C$
$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int x^{-2}\mathrm{d}x + \int y^{-2}\mathrm{d}y - \int\frac{\mathrm{d}y}{y} = C$
$\ln x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} - \ln y = C$
$\boxed{\ln\dfrac{x}{y} - \dfrac{x+y}{xy} = C}$ — общее решение дифференциального уравнения.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями данного дифференциального уравнения. Однако они не получаются из общего интеграла ни при каком значении C. Следовательно, в ходе решения были потеряны интегральные кривые $x = 0$ и $y = 0$ (оси координат). Эта потеря произошла в том месте, где мы разделили на произведение x^2y^2, равное нулю вдоль интегральных кривых. ◄

Пример 14.2. Решить уравнение $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.
► Разделим переменные
$y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$

$\mathrm{d}y = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \mathrm{d}x$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} x \mathrm{d}x$

$\operatorname{ctg} y \mathrm{d}y = \operatorname{tg} x \mathrm{d}x$

Проинтегрируем обе части уравнения

$\displaystyle\int \operatorname{ctg} y \mathrm{d}y = \int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x$

$\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + C$

По свойствам логарифмов

$\ln|\sin y| = \ln \dfrac{C}{|\cos x|}$

Получаем окончательное решение уравнения:

$\boxed{\sin y = \dfrac{C}{\cos x}}$ — общее решение.

$y = 0$ также является решением уравнения. ◀

Пример 14.3. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1 + y^2)\mathrm{d}x = xy\mathrm{d}y$, если $y(2) = 1$.

▶ Разделим переменные

$\mathrm{d}x = \dfrac{xy\mathrm{d}y}{1 + y^2}$

$\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{y\mathrm{d}y}{1 + y^2}$

Проинтегрируем

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{y\mathrm{d}y}{1 + y^2}$

$\ln x + \ln C = \dfrac{1}{2}\ln(1 + y^2)$

$\ln Cx = \ln(1 + y^2)^{1/2}$

$\boxed{Cx = \sqrt{1 + y^2}}$ — общее решение дифференциального уравнения.

Найдем частное решение:

$C \cdot 2 = \sqrt{1 + 1^2}$

$C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Следовательно, частное решение имеет вид

$\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}x = \sqrt{1 + y^2}}$ ◀

Однородные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0,$$

которое можно преобразовать к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

называется однородным.

Подстановка $u\dfrac{y}{x}$, *где* u *— новая неизвестная функция, приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.*

Если $u = \dfrac{y}{x}$, *то* $y = ux$, $y' = u'x + u$.

Пример 14.4. Проинтегрировать уравнение $2x^2\mathrm{d}y = (x^2 + y^2)\mathrm{d}x$.

► Разделив обе части уравнения на $x^2\mathrm{d}x$, получим уравнение

$2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + \dfrac{y^2}{x^2}$

$2y' = 1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$

Введем замену $u = \dfrac{y}{x}$, $y' = u'x + u$

$2(u'x + u) = 1 + u^2$

Разделим переменные

$u'x + u = \dfrac{1 + u^2}{2}$

$u'x = \dfrac{1 + u^2}{2} - u$

$u'x = \dfrac{1 + u^2 - 2u}{2} = \dfrac{(u-1)^2}{2}$

$x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(u-1)^2}{2}$

$\dfrac{2\mathrm{d}u}{(u-1)^2} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

Проинтегрируем:

$\displaystyle\int \frac{2\mathrm{d}u}{(u-1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$

$\displaystyle 2\int (u-1)^{-2}\mathrm{d}u = \ln x + \ln C$

$2\dfrac{(u-1)^{-1}}{-1} = \ln x + \ln C$

$-\dfrac{2}{u-1} = \ln Cx$

Вернемся к прежним переменным

$-\dfrac{2}{\frac{y}{x} - 1} = \ln Cx$

$-\dfrac{2x}{y - x} = \ln Cx$

$\boxed{Cx = e^{-\frac{2x}{y-x}}}$ — общее решение дифференциального уравнения.

При разделении переменных мы делили на x и на $(u-1)^2$, что возможно при $x \neq 0$, $u \neq 1$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $x = 0$, $u = 1$, то есть $y = x$, также являются решениями данного уравнения, но они не входят в общий интеграл. ◄

Пример 14.5. Найти частное решение уравнения $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$ при $y(1) = e^{-1/2}$.

► $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$

$\dfrac{y}{x} = u$, $y' = u'x + u$

$u'x + u = u(1 + \ln u)$
$u'x = u + u\ln u - u$
$x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u\ln u$
$\dfrac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, $u\ln u \neq 0$, $x \neq 0$
Проинтегрируем:
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$
$\ln\ln u = \ln x + \ln C = \ln Cx$
$\ln u = Cx$
Заменив u через $\dfrac{y}{x}$, получим
$\ln\dfrac{y}{x} = Cx$ или $y = xe^{Cx}$
Подставив в общее решение начальные условия, определим C:
$e^{-1/2} = e^{C}$
$C = -\dfrac{1}{2}$
$\boxed{y = xe^{-\frac{1}{2}x}}$ — частное решение дифференциального уравнения. ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 14.6. Решить дифференциальное уравнение $\dfrac{yy'}{x} + e^{y} = 0$, $y(1) = 0$.
Ответ: $2e^{-y}(y + 1) = x^2 + 1$.

Пример 14.7. Решить дифференциальное уравнение $e^{1+x^2}\operatorname{tg} y\mathrm{d}x - \dfrac{e^{2x}}{x-1}\mathrm{d}y = 0$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.
Ответ: $2\ln|\sin y| = e^{(x-1)^2} - 1$.

Пример 14.8. Решить дифференциальное уравнение $xy'\sin(y/x) + x = y\sin(y/x)$.
Ответ: $Cx = e^{\cos(y/x)}$.

Пример 14.9. Решить дифференциальное уравнение $xyy' = y^2 + 2x^2$.
Ответ: $y^2 = 4x^2\ln Cx$.

Пример 14.10. Решить дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.
Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2 + y^2}$.

Занятие 15. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка
$y' + P(x)y = Q(x)$
и уравнение Бернулли
$y' + P(x)y = y^n Q(x)$
где $P(x)$, $Q(x)$ *— непрерывные функции, решаются с помощью подстановки*
$y = uv$

Пример 15.1. Решить уравнение $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$.
► $y = uv$, $y' = u'v + uv'$
$u'v + uv' - uv \operatorname{ctg} x = \sin x$
$u'v + u(v' - v \operatorname{ctg} x) = \sin x$
Положим $v' - v \operatorname{ctg} x = 0$, тогда $u'v = \sin x$.
Решим первое из полученных уравнений:
$\dfrac{v'}{v} - \operatorname{ctg} x = 0$
$\dfrac{\mathrm{d}v}{v} - \operatorname{ctg} x \mathrm{d}x = 0$
$\ln|v| - \ln|\sin x| = 0,$
$v = \sin x$
Полученное значение v подставим во второе уравнение:
$u' \sin x = \sin x$
$u' = 1$
$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$
$u = x + C$
Следовательно, $y = uv = (x + C)\sin x$. ◄

Пример 15.2. Решить уравнение $y' - y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$.
► $y = uv$, $y' = u'v + uv'$
$u'v + uv' - uv \operatorname{tg} x = \cos^2 x$
$u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \cos^2 x$
$\begin{cases} v' - v \operatorname{tg} x = 0 \\ u'v = \cos^2 x \end{cases}$
$\dfrac{\mathrm{d}v}{v} - \operatorname{tg} x \mathrm{d}x = 0$
$\ln|v| + \ln|\cos x| = 0$
$v = \dfrac{1}{\cos x}$
$\dfrac{u'}{\cos x} = \cos^2 x$
$\mathrm{d}u = \cos^3 x \mathrm{d}x$
$u = \displaystyle\int (1 - \sin^2 x)\mathrm{d}\sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$
$y = uv = \dfrac{1}{\cos x}\left(\sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + C\right)$. ◄

Пример 15.3. Решить уравнение $xy' - 2y + x^2 = 1$ при $y(1) = 4$.

► $y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{x} - x$

$y = uv$, $y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \dfrac{2}{x}uv = \dfrac{1}{x} - x$

$u'v + u\left(v' - \dfrac{2v}{x}\right) = \dfrac{1-x^2}{x}$

$\begin{cases} v' - \dfrac{2v}{x} = 0 \\ u'v = \dfrac{1-x^2}{x} \end{cases}$

$\dfrac{\mathrm{d}v}{v} - \dfrac{2\mathrm{d}x}{x} = 0$

$\ln|v| - 2\ln|x| = 0$

$v = x^2$

$u'x^2 = \dfrac{1-x^2}{x}$

$\mathrm{d}u = \dfrac{1-x^2}{x^3}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^3} - \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

$u = -\dfrac{1}{2x^2} - \ln|x| + C$

$y = uv = -\dfrac{1}{2} - x^2\ln|x| + Cx^2.$

Подставим в найденное общее решение начальные данные:

$4 = -\dfrac{1}{2} - \ln 1 + C$

$C = \dfrac{9}{2}$

Получим частное решение:

$y = -\dfrac{1}{2} - x^2\ln|x| + \dfrac{9}{2}x^2.$ ◄

Пример 15.4. Решить уравнение $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x.$

► Это уравнение Бернулли, $n = \dfrac{1}{2}$.

$y = uv$, $y' = u'v + uv'$

$u'v + u\left(v' - \dfrac{2xv}{1+x^2}\right) = \dfrac{4\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x$

$\begin{cases} v' - \dfrac{2xv}{1+x^2} = 0 \\ u'v = \dfrac{4\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x \end{cases}$

$\dfrac{\mathrm{d}v}{v} - \dfrac{2x\mathrm{d}x}{1+x^2} = 0$

$\ln|v| - \ln|1+x^2| = 0$

$v = 1 + x^2$

$u'(1+x^2) = 4\operatorname{arctg} x\sqrt{u}$

$\dfrac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \dfrac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\operatorname{arctg} x \cdot \mathrm{d}(\operatorname{arctg} x)$

$\sqrt{u} = \operatorname{arctg}^2 x + C$

$u = (\operatorname{arctg}^2 x + C)^2$
$y = uv = (1 + x^2)(\operatorname{arctg}^2 x + C)^2$. ◄

Пример 15.5. Решить уравнение $2x \cos^2 y \mathrm{d}x + (2y - x^2 \sin 2y)\mathrm{d}y = 0$.
► Разделим на $2x \cos^2 y \mathrm{d}y$:
$x' - x \operatorname{tg} y = -\dfrac{y}{\cos^2 y} \cdot x^{-1}$
— уравнение Бернулли относительно x, $n = -1$.
$x = uv$, $x' = u'v + uv'$
$u'v + u(v' - v \operatorname{tg} y) = -\dfrac{y}{\cos^2 y}\dfrac{1}{uv}$
$\begin{cases} v' - v \operatorname{tg} y = 0 \\ u'v = -\dfrac{y}{\cos^2 y}\dfrac{1}{uv} \end{cases}$
$\dfrac{\mathrm{d}v}{v} - \operatorname{tg} y \mathrm{d}y = 0$
$\ln |v| + \ln |\cos y| = 0$
$v = \dfrac{1}{\cos y}$
$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\dfrac{1}{\cos y} = -\dfrac{y}{\cos^2 y}\dfrac{1}{u}\cos y$
$u\mathrm{d}u + y\mathrm{d}y = 0$
$u^2 = C^2 - y^2$
$x^2 = u^2v^2 = \dfrac{C^2 - y^2}{\cos^2 y}$. ◄

Пример 15.6. Решить уравнение $y'x + y = -xy^2$.
► $y' + \dfrac{y}{x} = -y^2$
— это уравнение Бернулли, $n = 2$.
$y = uv$, $y' = u'v + uv'$
$u'v + u\left(v + \dfrac{v}{x}\right) = -u^2v^2$
$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0 \\ u'v = -u^2v^2 \end{cases}$
$\dfrac{\mathrm{d}v}{v} + \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = 0$
$\ln |v| + \ln |x| = 0$
$v = \dfrac{1}{x}$
$u'\dfrac{1}{x} = -\dfrac{u^2}{x^2}$
$-\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$
$\dfrac{1}{u} = \ln |x| + C$
$u = \dfrac{1}{\ln |x| + C}$
$y = uv = \dfrac{1}{x(\ln |x| + C)}$. ◄

Пример 15.7. Решить уравнение $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}$.
$\blacktriangleright$ $y = uv$, $y' = u'v + uv'$
$u'v + u(v' + 2xv) = 2x^2e^{-x^2}$
$$\begin{cases} v' + 2xv = 0 \\ u'v = 2x^2e^{-x^2} \end{cases}$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{v} + 2x\mathrm{d}x = 0$$
$\ln|v| + x^2 = 0$
$v = e^{-x^2}$
$u'e^{-x^2} = 2x^2e^{-x^2}$
$\mathrm{d}u = 2x^2\mathrm{d}x$
$$u = \frac{2x^3}{3} + C$$
$$y = uv = e^{-x^2}\left(C + \frac{2x^3}{3}\right).$$ $\blacktriangleleft$

Пример 15.8. Решить уравнение $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$.
$\blacktriangleright$ $y' + \dfrac{x}{x^2 + a^2}y = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$
— линейное неоднородное уравнение.
$y = uv$, $y' = u'v + uv'$
$$u'v + u\left(v' + \frac{xv}{x^2 + a^2}\right) = \frac{1}{a^2 + x^2}$$
$$\begin{cases} v' + \dfrac{xv}{x^2 + a^2} = 0 \\ u'v = \dfrac{1}{a^2 + x^2} \end{cases}$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{x\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = 0$$
$$\ln|v| + \frac{1}{2}\ln|x^2 + a^2| = 0$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$
$$u' \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{x^2 + a^2}$$
$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$
$u = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$
$$y = uv = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}(C + \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|).$$ $\blacktriangleleft$

Задания для самостоятельной работы.

Пример 15.9. Решить дифференциальное уравнение $y' + 2y = 4x$.
Ответ: $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$.

Пример 15.10. Решить дифференциальное уравнение $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.
Ответ: $y = (x + C)(1 + x^2)$.

Пример 15.11. Решить дифференциальное уравнение $y' + y = \cos x$.
Ответ: $y = Ce^{-x} + \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

Пример 15.12. Решить дифференциальное уравнение $y' + 2xy = 2x^3y^3$.
Ответ: $\dfrac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Пример 15.13. Решить дифференциальное уравнение $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$.
Ответ: $y(x + C) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Пример 15.14. Решить дифференциальное уравнение $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.
Ответ: $y = \dfrac{x^4}{4} \ln^2 Cx$.

Занятие 16. Дифференциальные уравнения II порядка, допускающие понижение порядка.

Будем рассматривать уравнения вида

I. $y^{(n)} = f(x)$

II. $F(x, y', y'') = 0$

III. $F(y, y', y'') = 0$

Следует помнить, что

- *Решение уравнения вида (I) находится последовательным n-кратным интегрированием.*
- *Порядок уравнения вида (II), не содержащего в явной форме искомую функцию, можно понизить с помощью подстановки $y' = z(x)$ и, следовательно, $y'' = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z'(x)$.*
- *Порядок уравнения вида (III), не содержащего в явной форме независимую переменную, понижаем, используя подстановку $y' = z(y)$ и, следовательно, $y'' = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ $\Longrightarrow$ $y'' = z'(y) \cdot z$.*

Пример 16.1. Решить уравнение $y''' = \cos 2x$.

► Это уравнение вида (I), поэтому его общее решение найдем последовательным интегрированием данного уравнения:

$y'' = \displaystyle\int \cos 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$

$y' = \displaystyle\int \left(\frac{1}{2}\sin 2x + C_1\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2$

$y = \displaystyle\int \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$

Ответ: $y = -\dfrac{1}{8}\sin 2x + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$. ◄

Пример 16.2. Найти частное решение уравнения $y'' = x(1 - x^2)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

► Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$y' = \displaystyle\int x(1 - x^2)\mathrm{d}x = \int (x - x^3)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C_1$

$y = \displaystyle\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C_1\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20} + C_1 x + C_2$

Воспользуемся начальными условиями:

$2 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{20} + C_1 + C_2$ и

$1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + C_1$

Тогда $C_1 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ и $C_2 = 2 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{20} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{17}{15}$.

Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{20} + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{17}{15}$.

Ответ: $y = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{20} + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{17}{15}$. ◄

Пример 16.3. Решить уравнение $xy'' = y'$.

► Данное уравнение имеет вид (II), так как не содержит явно искомую функцию y. Положим $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$ и подставим в уравнение. Получим $xz' = z$ — уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решим его:

$x \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z$

$\dfrac{\mathrm{d}z}{z} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$

$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|$

$z = xC_1$

Так как $z = y'$, то

$y' = xC_1$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xC_1$

$\mathrm{d}y = C_1 x \mathrm{d}x$

$\displaystyle\int \mathrm{d}y = \int C_1 x \mathrm{d}x$

$y = C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2$

Ответ: $y = C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2$. ◄

Пример 16.4. Найти частное решение уравнения $2yy'' = (y')^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(-1) = 4$, $y'(-1) = 1$.

► Так как данное уравнение не содержит явно независимую переменную и имеет вид (III), то понизим его порядок, положив $y' = z(y)$, $y'' = z'(y) \cdot z$. Получим:

$2y \cdot z \cdot z' = z^2$

Поделим на $z \neq 0 \Longrightarrow$

$2y \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = z$ — дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем:

$\dfrac{\mathrm{d}z}{z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y}$

$\ln|z| = \dfrac{1}{2}\ln|y| + \ln C_1$

$z = C_1\sqrt{y}$

Так как $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z$, то:

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1\sqrt{y}$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = C_1\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = C_1 \int \mathrm{d}x$

$2\sqrt{y} = C_1 x + C_2$ — общий интеграл уравнения.

Воспользуемся начальными условиями:

$2 \cdot \sqrt{4} = C_1 \cdot (-1) + C_2$ и

$1 = C_1 \cdot \sqrt{4}$,

тогда $C_1 = \dfrac{1}{2}$, $C_2 = 4 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2}$. Следовательно, искомый частный интеграл имеет вид $2\sqrt{y} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2} \implies \sqrt{y} = \dfrac{1}{4}(x+9)$.

Ответ: $\sqrt{y} = \dfrac{1}{4}(x+9)$ или $y = \dfrac{1}{16}(x+9)^2$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 16.5. Решить дифференциальное уравнение $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Ответ: $y = x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 x + C_2$.

Пример 16.6. Решить дифференциальное уравнение $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Ответ: $y = -\ln|\cos x|$.

Пример 16.7. Решить дифференциальное уравнение $xy'' = y' \cdot \ln \dfrac{y'}{x}$.

Ответ: $\dfrac{1}{C_1}\left(xe^{xC_1+1} - \dfrac{1}{C_1}e^{xC_1+1}\right) + C_2$.

Пример 16.8. Решить дифференциальное уравнение $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

Ответ: $\dfrac{1}{1-y} = C_1 x + C_2$ или $y = 1 - \dfrac{1}{C_1 x + C_2}$.

Пример 16.9. Решить дифференциальное уравнение $y'' = x \sin x$.

Ответ: $y = -x\sin x - 2\cos x + C_1 x + C_2$.

Пример 16.10. Решить дифференциальное уравнение $y''' = \dfrac{6}{x^3}$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 3$.

Ответ: $y = 3\ln|x| - 2x + 4$.

Пример 16.11. Решить дифференциальное уравнение $y'' = y' + x$.

Ответ: $y = C_1 e^x - \dfrac{x^2}{2} - x + C_2$.

Пример 16.12. Решить дифференциальное уравнение $yy'' = (y')^2$.

Ответ: $y = C_2 e^{C_1 x}$.

Занятие 17. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{10}$$

где $y^{(i)}$, $i = \overline{i,n}$ — i-я производная искомой функции y, a_i, $i = \overline{i,n}$ — постоянные коэффициенты, $a_i \in \mathbb{R}$.

Для нахождения общего решения уравнения (10) составляют характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{11}$$

где $k \in \mathbb{C}$, то есть i-й производной функции y сопоставляется k^i.

Решая уравнение (11), получаем n корней k_i, среди которых могут быть простые и кратные вещественные корни и простые и кратные комплексно-сопряженные корни. Общее решение ($y_{\text{о.р.}}$) находится в зависимости от вида корней характеристического уравнения в виде суммы функций:

1. *Если k_i — простой действительный корень, то ему в общем решении соответствует слагаемое вида*
$$Ce^{k_i x} \tag{12}$$
2. *Если k_i — действительный корень кратности m, то ему соответствует слагаемое*
$$e^{k_i x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}) \tag{13}$$
3. *Каждой паре простых комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения $\alpha \pm \beta i$ соответствует слагаемое вида*
$$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \tag{14}$$
4. *Каждой паре комплексно сопряженных корней кратности s соответствует слагаемое*
$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_s x^{s-1}) \cos \beta x + (C_1' + C_2' x + C_3' x^2 + \ldots + C_s' x^{s-1}) \sin \beta x] \tag{15}$$

Пример 17.1. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' - 6y = 0$.
► Составим характеристическое уравнение, соответствующее данному:
$k^2 - 5k - 6 = 0$
Его корни можно найти по теореме Виета:
$k_1 = -1$, $k_2 = 6$ — они вещественные, простые.
k_1 соответствует $C_1 e^{k_1 x} = C_1 e^{-x}$,
k_2 соответствует $C_2 e^{k_2 x} = C_2 e^{6x}$.
Ответ: $y_{\text{о.р.}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}$. ◄

Пример 17.2. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.
► Составим характеристическое уравнение:
$k^2 - 4k + 4 = 0$
$(k - 2)^2 = 0$
Корнем этого уравнения является $k = 2$ — корень кратности 2 ($m = 2$). Этому корню, согласно формуле (13), соответствует слагаемое $e^{2x}(C_1 + C_2 x)$.
Ответ: $y_{\text{о.р.}} = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$. ◄

Пример 17.3. Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = 0$.

► Составим характеристическое уравнение:

$k^2 + 9 = 0$

$k^2 = -9$

$k_{1,2} = \pm 3i$

Уравнение имеет два простых комплексно-сопряженных корня. Согласно формуле (14), им соответствует слагаемое $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$. Так как для $k_{1,2} = \pm 3i$ $\alpha = 0$, $\beta = 3$, получаем $y = e^{0 \cdot x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

Ответ: $y_{\text{о.р.}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. ◄

Пример 17.4. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 25y = 0$.

► Составим характеристическое уравнение:

$k^2 + 6k + 25 = 0$

$D = 6^2 - 4 \cdot 25 = -64$

$k_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \dfrac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i.$

Уравнение имеет два простых комплексно-сопряженных корня. Его решение записываем в соответствии с формулой (14).

Ответ: $y_{\text{о.р.}} = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$. ◄

Пример 17.5. Найти общее решение уравнения $y^{IV} + 4y'' + 4y = 0$.

► Составим характеристическое уравнение:

$k^4 + 4k^2 + 4 = 0$

$(k^2 + 2)^2 = 0$

$k_{1,2}^2 + 2 = 0$

$k_{1,2}^2 = -2$

$k_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$

Характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня кратности $s = 2$. Согласно формуле (15), им соответствует слагаемое

$e^{0 \cdot x}[(C_1 + C_2 x) \cos \sqrt{2}x + (C_3 + C_4 x) \sin \sqrt{2}x] = (C_1 + C_2 x) \cos \sqrt{2}x + (C_3 + C_4 x) \sin \sqrt{2}x.$

Ответ: $y_{\text{о.р.}} = (C_1 + C_2 x) \cos \sqrt{2}x + (C_3 + C_4 x) \sin \sqrt{2}x$. ◄

Пример 17.6. Найти общее решение уравнения $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$.

► Составим характеристическое уравнение:

$k^4 - 13k^2 + 36 = 0$ — биквадратное уравнение.

$k^2 = t \implies t^2 - 13t + 36 = 0$

По теореме Виета $t_1 = 4$, $t_2 = 9$

$\implies k_{1,2}^2 = 4$, $k_{1,2} = \pm 2$,

$k_{3,4}^2 = 9$, $k_{3,4} = \pm 3$.

Таким образом, все корни уравнения — простые вещественные числа.

Ответ: $y_{\text{о.р.}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$. ◄

Пример 17.7. Найти общее решение уравнения $y^{IV} - 9y = 0$.

► Составим характеристическое уравнение:

$k^4 - 9 = 0$

$(k^2 - 3)(k^2 + 3) = 0$

$$k^2 - 3 = 0 \qquad k^2 + 3 = 0$$
$$k_{1,2} = \pm\sqrt{3} \qquad k_{3,4} = \pm i\sqrt{3}$$

Два корня — простые вещественные, им соответствуют слагаемые $C_1 e^{\sqrt{3}x}$ и $C_2 e^{-\sqrt{3}x}$. Два других корня — простые комплексно-сопряженные, им соответствует слагаемое $e^{0\cdot x}(C_3 \cos\sqrt{3}x + C_4 \sin\sqrt{3}x) = C_3 \cos\sqrt{3}x + C_4 \sin\sqrt{3}x$.

Ответ: $y_{\text{о.р.}} = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + C_3 \cos\sqrt{3}x + C_4 \sin\sqrt{3}x$. ◄

Пример 17.8. Найти частное решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

► Найдем сначала общее решение уравнения. Составим характеристическое уравнение:
$k^2 - 3k + 2 = 0$
$k_1 = 1$, $k_2 = 2$
$\Longrightarrow\ y_{\text{о.р.}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ — общее решение уравнения.
Подставим начальные условия:
$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 1$
$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$, $y'(0) = C_1 e^0 + 2C_2 e^0 = C_1 + 2C_2 = -1$.
Решим полученную систему уравнений:
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = -1 \end{cases}$$
Вычтем из второго уравнения первое: $C_2 = -2 \implies C_1 - 2 = 1$, $C_1 = 3$.
Ответ: $y = 3e^x - 2e^{2x}$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 17.9. Решить уравнение $y'' + 4y = 0$.
Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Пример 17.10. Решить уравнение $y'' - 10y' + 25y = 0$.
Ответ: $y = e^{5x}(C_1 + C_2 x)$.

Пример 17.11. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = 0$.
Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$.

Пример 17.12. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 0$.
Ответ: $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Пример 17.13. Решить уравнение $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$.
Ответ: $y = C_1 + C_2 x + e^{2x}(C_3 + C_4 x)$.

Занятие 18. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью специального вида.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \tag{16}$$

Общим решением y уравнения (16) является сумма его произвольного частного решения u и общего решения y_0 однородного уравнения, соответствующего (16).

Общее решение y_0 находится с помощью решения характеристического уравнения (см. Занятие 17).

Для нахождения u применима следующая теорема:

Если правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}[\mathcal{P}_n(x)\cos\beta x + \mathcal{Q}_m(x)\sin\beta x], \tag{17}$$

где $\mathcal{P}_n(x)$ и $\mathcal{Q}_m(x)$ — многочлены порядков n и m, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$u = x^r e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x], \tag{18}$$

где $P_l(x)$, $Q_l(x)$ — многочлены порядка l с неопределенными коэффициентами, $l = \max(n, m)$, r — кратность корня $\alpha + i\beta$ в характеристическом уравнении, соответствующем однородному уравнению.

Коэффициенты многочленов определяются при подстановке u в уравнение (16).

Рассмотрим некоторые частные случаи вида правой части в уравнении (16):

1. *$f(x) = e^{\alpha x}\mathcal{P}_n(x)$ (это означает, что в (2) $\beta = 0$). При этом возможны варианты:*

   (a) *α не является корнем характеристического уравнения. В этом случае*

   $$u = e^{\alpha x} P_n(x), \tag{19}$$

   где $P_n(x)$ — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

   (b) *α — корень характеристического уравнения кратности r. В этом случае*

   $$u = x^r e^{\alpha x} P_n(x). \tag{20}$$

Пример 18.1. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 3y = (8x^2 + 84x)e^x$.

► $y = y_0 + u$, где y_0 — решение уравнения $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$k^2 + 4k + 3 = 0$

$k_1 = -1$, $k_2 = -3$

$\Longrightarrow\ y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

Найдем u:

$f(x) = (8x^2 + 84x)e^x$,

$\mathcal{P}_2(x) = 8x^2 + 84x$,

$\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, согласно (19),

$u = e^x P_2(x) = e^x(Ax^2 + Bx + C)$, где A, B, C — неопределенные постоянные коэффициенты. Для их нахождения подставим u в исходное уравнение:

$u' = e^x(Ax^2 + Bx + C) + e^x(2Ax + B) = e^x[Ax^2 + (B + 2A)x + (B + C)]$,

$u'' = e^x[Ax^2+(B+2A)x+(B+C)]+e^x(2Ax+B+2A) = e^x[Ax^2+(B+4A)x+(2B+2A+C)]$,

тогда из уравнения $y'' + 4y' + 3y = (8x^2 + 84x)e^x$ получим

$e^x[Ax^2+(B+4A)x+(2B+2A+C)]+4e^x[Ax^2+(B+2A)x+(B+C)]+3e^x(Ax^2+Bx+C) =$
$= (8x^2 + 84x)e^x$.

Поскольку $e^x \neq 0$, сократим на e^x и приведем подобные слагаемые:

$x^2(A+4A+3A)+x(4A+B+8A+4B+3B)+(2A+2B+C+4B+4C+3C) = 8x^2+84x$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 8A = 8 \\ x^1 & 12A + 8B = 84 \\ x^0 & 2A + 6B + 8C = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad A = 1,\ B = 9,\ C = -7.$$

$\Longrightarrow \quad u = e^x(x^2 + 9x - 7)$.

Ответ: $y = y_0 + u = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + e^x(x^2 + 9x - 7)$. ◄

Пример 18.2. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 9y = 14e^{-3x}$.

► y_0 — решение уравнения $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$k^2 + 6k + 9 = 0$

$(k + 3)^2 = 0$

$k_{1,2} = -3$ — корень кратности 2.

$\Longrightarrow \quad y_0 = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$.

Найдем u: $f(x) = 14e^{-3x}$, $\alpha = -3$ — корень кратности 2 в характеристическом уравнении, $14 = \mathcal{P}_0 \implies$

$u = x^2Ae^{-3x}$.

Подставим в исходное уравнение:

$u' = 2Axe^{-3x} + Ax^2 \cdot (-3) \cdot e^{-3x} = e^{-3x}(2Ax - 3Ax^2)$

$u'' = e^{-3x}(9Ax^2 - 12Ax + 2A)$

$\Longrightarrow \quad e^{-3x}(9Ax^2 - 12Ax + 2A) + 6e^{-3x}(2Ax - 3Ax^2) + 9Ax^2e^{-3x} = 14e^{-3x} \implies A = 7$.

Таким образом, $u = 7x^2e^{-3x}$ и $y = e^{-3x}(C_1 + C_2x) + 7x^2e^{-3x}$.

Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 + C_2x + 7x^2)$. ◄

2. *$f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ (то есть в (2) $\alpha = 0$, а $\mathcal{P}_n(x)$, $\mathcal{Q}_n(x)$ — многочлены нулевой степени). Возможны случаи:*

   (a) *$\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения. В этом случае*

   $$u = A\cos\beta x + B\sin\beta x, \tag{21}$$

   где A и B — неопределенные коэффициенты.

   (b) *$\pm\beta i$ — корень характеристического уравнения кратности r. В этом случае*

   $$u = x^r(A\cos\beta x + B\sin\beta x). \tag{22}$$

Пример 18.3. Решить уравнение $y'' - 4y' + 5y = 2\cos x + 6\sin x$.
► $y = y_0 + u$
y_0 — решение уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$.
$k^2 - 4k + 5 = 0$
$D = 16 - 20 = -4$
$k_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$
$\implies y_0 = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
Найдем u. Поскольку $\beta = 1$ и число $\pm i$ не является корнем характеристического уравнения, то
$u = A\cos x + B\sin x$
Подставляем в исходное уравнение:
$u' = -A\sin x + B\cos x$
$u'' = -A\cos x - B\sin x$
$-A\cos x - B\sin x - 4\cdot(-A\sin x + B\cos x) + 5\cdot(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x + 6\sin x$
Сравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$:
$\sin x: \quad -B + 4A + 5B = 6 \implies 4B + 4A = 6$
$\cos x: \quad -A - 4B + 5A = 2 \implies 4A - 4B = 2$
В результате получаем $A = 1$, $B = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, $u = \cos x + \dfrac{1}{2}\sin x$.
Ответ: $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2 \sin x) + \cos x + \dfrac{1}{2}\sin x$. ◄

Пример 18.4. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = 12\cos 2x$.
► y_0 — решение уравнения $y'' + 4y = 0$
$k^2 + 4 = 0$
$k_{1,2} = \pm 2i$
$\implies y_0 = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x$
Найдем частное решение: $f(x) = 12\cos 2x$, число $\pm i\beta = \pm 2i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1
$\implies u = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$
Подставляя u в исходное уравнение и сравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, получим:
$\begin{cases} A = 0 \\ B = 3 \end{cases}$
$\implies u = x\cdot 3\sin 2x$.
Ответ: $y = C_1\cos 2x + (C_2 + 3x)\sin 2x$. ◄

Если правая часть представляет собой сумму нескольких функций рассматриваемых видов, то u находим с помощью теоремы о наложении решений как сумму частных решений, соответствующих этим функциям.

Пример 18.5. Найти решение уравнения $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.
► Найдем y_0:
$y'' + y = 0$
$k^2 + 1 = 0$
$k_{1,2} = \pm i$

$\Longrightarrow \; y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Найдем u: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$f_1(x) = xe^x$,

$f_2(x) = 2e^{-x}$.

Решение уравнения $y'' + y = xe^x$ будем искать в виде $u_1 = (Ax + B)e^x$, а решение уравнения $y'' + y = 2e^{-x}$ — в виде $u_2 = Ce^{-x}$, поскольку числа $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = -1$ не являются корнями характеристического уравнения. Таким образом,

$u = u_1 + u_2 = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}$.

Подставляя в уравнение получим,

$u' = Ae^x + (Ax + B)e^x + C \cdot (-e^{-x}) = (Ax + A + B)e^x - Ce^{-x}$

$u'' = (Ax + 2A + B)e^x + Ce^{-x}$

$\Longrightarrow \; (Ax + 2A + B)e^x + Ce^{-x} + (Ax + B)e^x + Ce^{-x} = xe^x + 2e^{-x}$.

Сравнивая коэффициенты при функциях xe^x, e^x и e^{-x}, получим:

$$\begin{array}{rl} xe^x: & 2A = 1 \\ e^x: & 2A + 2B = 0 \\ e^{-x}: & 2C = 2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = 1.$$

Таким образом, $u = \dfrac{1}{2}(x - 1)e^x + e^{-x}$.

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{2}(x - 1)e^x + e^{-x}$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 18.6. Определить вид u для уравнения $y'' - y = e^x \cdot x \cdot \sin x$.
Ответ: $u = e^x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$.

Пример 18.7. Определить вид u для уравнения $y'' + 2y' + y = x^2 \cdot e^{-x} \cdot \cos x$.
Ответ: $u = e^{-x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x]$.

Пример 18.8. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.
Ответ: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \dfrac{1}{5}e^{4x}$.

Пример 18.9. Определить вид u для уравнения $y'' - 3y' = 1 + e^x + \cos x + \sin x$.
Ответ: $u = Ax + Be^x + C\cos x + D\sin x$.

Пример 18.10. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 10y = 80e^x \cos x$.
Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^x(2\cos x + \sin x)$.

Занятие 19. Решение неоднородных дифференциальных уравнений II порядка методом вариации произвольной постоянной.

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{23}$$

— неоднородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами p и q.

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{24}$$

— однородное дифференциальное уравнение II порядка, для которого составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{25}$$

решая которое, получаем решение однородного уравнения (24):

$$y_0 = C_1y_1 + C_2y_2,$$

где C_1 и C_2 — постоянные, y_1 и y_2 — линейно независимые решения уравнения (24).

Метод вариации произвольной постоянной применяется, если в правой части уравнения (23) функция $f(x)$ — не специального вида. Тогда частное решение уравнения (23) будем искать в виде

$$u = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

а общее решение уравнения (23) будет

$$y = y_0 + u.$$

Для отыскания неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ будем составлять систему двух уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x), \end{cases}$$

откуда по формуле Крамера $C_k'(x) = \dfrac{\Delta_k}{W[y_1, y_2]}$, где $W[y_1, y_2]$ — определитель Вронского.

Пример 19.1. Найти общее решение неоднородного уравнения II порядка:
$y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

► Заметим, что правая часть этого уравнения $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ — дробная, не специального вида. Сначала решаем однородное уравнение $y'' - 2y' + y = 0$, для которого характеристическое уравнение имеет вид:

$k^2 - 2k + 1 = 0,$

$k_1 = k_2 = 1,$

тогда $y_0 = C_1e^x + C_2e^x x$, где $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^x x$ — два линейно независимых решения однородного уравнения.

Частное решение данного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$u = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$.

Составим систему для нахождения неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'xe^x = 0 \\ C_1'e^x + C_2'(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x^2+1} \end{cases}$$

Оба уравнения можно поделить на e^x, получим:

$$\begin{cases} C_1' + C_2'x = 0 \\ C_1' + C_2'(1+x) = \dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

Теперь вычтем из второго уравнения системы первое и получим:

$$C_2'(x)(1+x-x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$C_2(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$$

Подставим найденное значение $C_2'(x)$ в первое уравнение системы и получим:

$$C_1'(x) = \frac{-x}{x^2+1}$$

$$C_1(x) = \int \frac{-x\mathrm{d}x}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет:

$$u = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\cdot e^x + \operatorname{arctg} x \cdot xe^x$$

Общее решение неоднородного уравнения $y = y_0 + u$.

Ответ: $y = C_1e^x + C_2xe^x - \dfrac{1}{2}e^x\ln(x^2+1) + xe^x \operatorname{arctg} x$. ◀

Пример 19.2. Найти общее решение неоднородного уравнения II порядка: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

► Решаем однородное уравнение $y'' + y = 0$, для которого характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm i$,

$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$, то есть $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде:

$u = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$

Составляем систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Для данной системы:

$$W[\cos x, \sin x] = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{W} = -\operatorname{tg} x \implies C_1(x) = \ln|\cos x|,$$

$$C_2'(x) = 1 \implies C_2(x) = x.$$

Таким образом, $u = \ln|\cos x|\cdot\cos x + x\cdot\sin x$.

Общее решение неоднородного уравнения $y = y_0 + u$.

Ответ: $y = \cos x(C_1 + \ln|\cos x|) + \sin x(C_2 + x)$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 19.3. Решить уравнение: $y'' + y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(1 + e^x) - \dfrac{1}{2}e^{-x}\ln(1 + e^x)$.

Пример 19.4. Решить уравнение: $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Ответ: $y = -\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|\cos x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + C_1\cos x + C_2\sin x$.

Пример 19.5. Решить уравнение: $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\cos x + \ln|\sin x| \cdot \sin x$.

Пример 19.6. Решить уравнение: $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x$.

Ответ: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \dfrac{1}{2}\sin 4x + (\ln|\operatorname{tg} x| + \cos 2x)\sin 2x$.

Занятие 20. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 20.1. Решить систему: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = 2y_1 + 3y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = 6y_1 - y_2 \end{cases}$.

► Данную систему решим матричным способом. Обозначим через $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ матрицу системы.

Составим характеристическое уравнение системы:
$\det(A - kE) = 0$
Тогда
$\begin{vmatrix} 2-k & 3 \\ 6 & -1-k \end{vmatrix} = 0$
Раскроем определитель:
$k^2 - k - 20 = 0$,
корни $k_1 = -4$, $k_2 = 5$ являются характеристическими числами матрицы.
Фундаментальная система решений: $\{e^{-4x}; e^{5x}\}$.

Найдем собственные векторы, определяемые уравнением $(A - k_iE)x^{(i)} = 0$. Подставим $k_1 = -4$ в одну из строк характеристического уравнения:
$(2+4)C_1 + 3C_2 = 0$
$6C_1 + 3C_2 = 0$ или
$C_2 = -2C_1$
Собственный вектор имеет вид $\begin{pmatrix} C_1 \\ -2C_1 \end{pmatrix}$.
При $k_2 = 5$:
$(2-5)C_1 + 3C_2 = 0$
$-3C_1 + 3C_2 = 0$
$C_1 = C_2$
Собственный вектор имеет вид $\begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$.
Составим общее решение системы:
$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -2C_1 \end{pmatrix} e^{-4x} + \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{5x} = \begin{pmatrix} C_1e^{-4x} + C_2e^{5x} \\ -2C_1e^{-4x} + C_2e^{5x} \end{pmatrix}$. ◄

Пример 20.2. Решить систему: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = 7y_1 + 3y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = 6y_1 + 4y_2 \end{cases}$.

► $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
Характеристическое уравнение матрицы системы:
$\begin{vmatrix} 7-k & 3 \\ 6 & 4-k \end{vmatrix} = 0$
или $k^2 - 11k + 10 = 0$,
его корни $k_1 = 1$, $k_2 = 10$ — характеристические числа матрицы.
Фундаментальная система решений: $\{e^{x}; e^{10x}\}$.

Собственные векторы:

при $k_1 = 1$: $6C_1 + 3C_2 = 0$, $C_2 = -2C_1$, собственный вектор $\begin{pmatrix} C_1 \\ -2C_1 \end{pmatrix}$;

при $k_2 = 10$: $-3C_1 + 3C_2 = 0$, $C_1 = C_2$, собственный вектор $\begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Общее решение системы:

$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -2C_1 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{10x} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{10x} \\ -2C_1 e^x + C_2 e^{10x} \end{pmatrix}$. ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 20.3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = 3y_1 + y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = 8y_1 + y_2 \end{cases}$

Ответ: $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} \\ 2C_1 e^{5x} - 4C_2 e^{-x} \end{pmatrix}$

Пример 20.4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = 8y_2 - y_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = y_1 + y_2 \end{cases}$

Ответ: $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 2C_1 e^{3x} - 4C_2 e^{-3x} \\ C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} \end{pmatrix}$

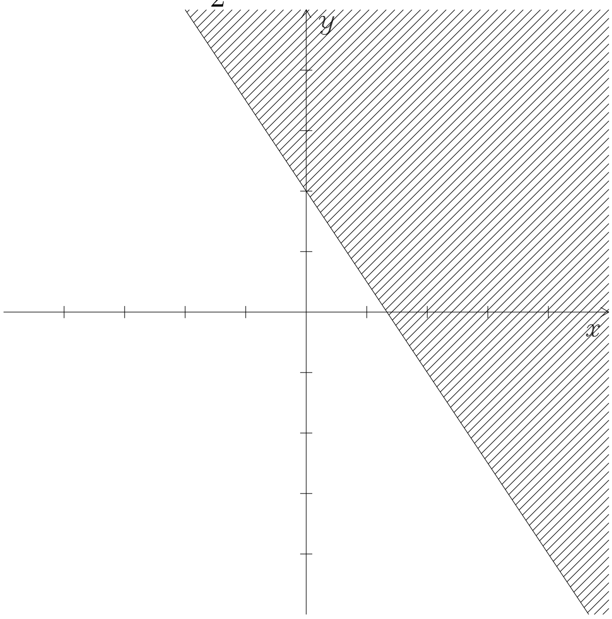
Занятие 21. Область определения и предел функции нескольких переменных. Частные производные и дифференциалы.

Область определения

Пример 21.1. Найти область определения функции $z = \ln(3x + 2y - 4)$.

► Аргумент логарифма должен быть положителен: $3x + 2y - 4 > 0$.

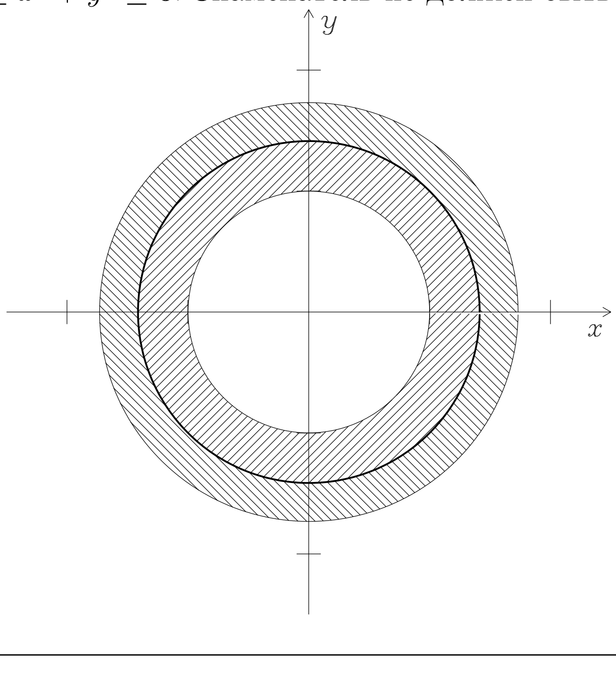
Отсюда $y > -\dfrac{3}{2}x + 2$.



Ответ: $y > -\dfrac{3}{2}x + 2$; $x \in (-\infty, \infty)$. ◄

Пример 21.2. Найти область определения функции $z = \dfrac{1}{\arcsin(x^2 + y^2 - 2)}$.

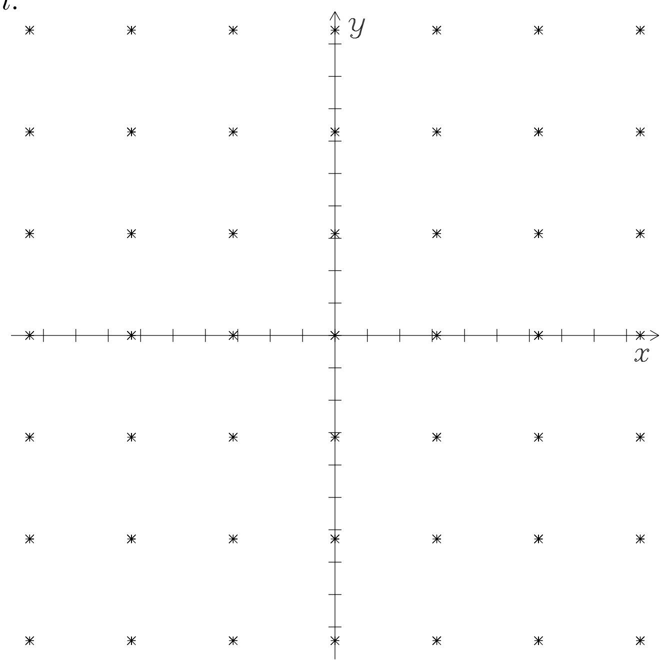
► Аргумент арксинуса должен быть заключен в пределах $-1 \le x^2 + y^2 - 2 \le 1$. Отсюда $1 \le x^2 + y^2 \le 3$. Знаменатель не должен быть равен нулю, то есть $x^2 + y^2 \ne 2$.



Итак, область определения — кольцо $1 \le x^2+y^2 \le 3$, с вырезанной из него окружностью $x^2+y^2=2$. ◄

Пример 21.3. Найти область определения функции $z = \sqrt{-\sin^2 x - \sin^2 y}$.
► Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $-\sin^2 x - \sin^2 y \ge 0$,
то есть,
$\sin^2 x + \sin^2 y \le 0$,
$\sin x = 0$ и $\sin y = 0$.
Это означает $x = n\pi$, $y = m\pi$, где n и m — целые числа.

Итак, область определения — множество точек $(n\pi, m\pi)$ с произвольными целыми m и n.



◄

Предел функции

Пример 21.4. Найти повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x}{x+y}$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+y}$ и на этой основе сделать вывод о существовании предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x+y}$.

► Имеем
$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$,
$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y} = 0$.
Повторные пределы разные, значит, двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x+y}$ не существует. ◄

Пример 21.5. Найти повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Что можно сказать о двойном пределе $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

► Имеем

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=0,$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\cdot 0}{0^2+y^2}=0.$

Повторные пределы равны, но, тем не менее, двойной предел не существует, поскольку при движении к точке $(0,0)$ по прямой, наклоненной к оси x под углом θ имеем $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ и $r\to 0$. Но предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

зависит от направления прямой — угла θ, то есть, предел по разным направлениям различен.

Ответ: Предел не существует. ◄

Частные производные

Пример 21.6. Вычислить для функции $z=(x-y)\ln(x+y)$ частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

► $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(x+y)+\dfrac{x-y}{x+y},$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\ln(x+y)+\dfrac{x-y}{x+y},$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{(-1)(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=\dfrac{x+y-2x}{(x+y)^2}=\dfrac{y-x}{(x+y)^2},$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=\dfrac{-x-y+2y}{(x+y)^2}=\dfrac{y-x}{(x+y)^2}.$

Как и должно быть, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. ◄

Дифференциал

Пример 21.7. Вычислить дифференциал функции $z=e^{xy}$.

► $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}\cdot y,$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}\cdot x.$

Отсюда $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\partial_x z+\partial_y z=e^{xy}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$. ◄

Пример 21.8. Вычислить дифференциал функции $u=\ln\dfrac{1}{r}$, где $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

► Имеем $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=-\dfrac{1}{2}\ln[(x-a)^2+(y-b)^2].$

Отсюда $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Ответ: $\mathrm{d}u = -\dfrac{(x-a)\mathrm{d}x+(y-b)\mathrm{d}y}{(x-a)^2+(y-b)^2}$. ◀

Задания для самостоятельной работы.

Пример 21.9. Найти области определения функций:

а) $z = \dfrac{1}{\sqrt{2y-4x^2+5x-1}}$;

б) $z = \ln(y^2 - \sin^2 x)$;

в) $z = \arcsin \dfrac{y}{\ln x}$;

г) $u = \sqrt{ax+by+cz}$;

д) $u = \ln \dfrac{z}{xy}$.

Пример 21.10. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x-y}{x+y}$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-y}{x+y}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x+y}$.

Пример 21.11. Вычислить частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функций:

а) $z = x^y$;

б) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$;

в) $z = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Пример 21.12. Показать, что для функции $z = yf(x^2-y^2)$, где $f(u)$ — произвольная функция, имеет место тождество $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

Пример 21.13. Вычислить полные дифференциалы для функций:

а) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2}$;

б) $z = \ln \dfrac{x+y}{x-y}$;

в) $z = \sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}$ ($\alpha = \mathrm{const}$).

Занятие 22. Полный дифференциал функции нескольких переменных. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности. Приближенные вычисления при помощи полного дифференциала.

Краткая сводка формул:
Полный дифференциал функции двух переменных:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{26}$$

Полный дифференциал функции n переменных:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{27}$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0):

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{28}$$

Уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0):

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \tag{29}$$

Равенство для приближенного вычисления значения функции:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \simeq f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \tag{30}$$

Пример 22.1. Найти полный дифференциал функции $u = \ln^2(x^2 + y^2 - z^2)$.
► Вначале находим частные производные по каждой переменной:
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2\ln(x^2 + y^2 - z^2) \cdot \dfrac{2x}{x^2 + y^2 - z^2}$,
$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\ln(x^2 + y^2 - z^2) \cdot \dfrac{2y}{x^2 + y^2 - z^2}$,
$\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2\ln(x^2 + y^2 - z^2) \cdot \dfrac{-2z}{x^2 + y^2 - z^2}$.
Согласно формуле (27), получаем:
$\mathrm{d}u = 4\ln(x^2 + y^2 - z^2) \cdot \dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y - z\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 - z^2}$. ◄

Пример 22.2. Найти уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке $M_0(1, 2, -1)$.

► Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(1, 2, -1)$:

$F'_x(x_0, y_0, z_0) = (3x^2 + yz)\big|_{M_0} = 1,$

$F'_y(x_0, y_0, z_0) = (3y^2 + xz)\big|_{M_0} = 11,$

$F'_z(x_0, y_0, z_0) = (3z^2 + xy)\big|_{M_0} = 5.$

Подставляя их в уравнения (28) и (29), получаем соответственно уравнение касательной плоскости:

$(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z - 1) = 0$

и каноническое уравнение нормали:

$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{11} = \dfrac{z+1}{5}$. ◄

Пример 22.3. Вычислить приближенно $(1.02)^{3.01}$.

► Рассмотрим функцию $z = x^y$. При $x_0 = 1$ и $y_0 = 3$ имеем $z_0 = 1^3 = 1$, $\Delta x = 1.02 - 1 = 0.02$, $\Delta y = 3.01 - 3 = 0.01$.

Находим полный дифференциал функции $z = x^y$ в любой точке:

$\mathrm{d}z = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y,$

вычисляем его значение в точке $M(1, 3)$ при данных приращениях $\Delta x = 0.02$ и $\Delta y = 0.01$: $\mathrm{d}z = 3 \cdot 1^2 \cdot 0.02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0.01 = 0.06$.

Тогда по формуле (30) получаем:

$z = (1.02)^{3.01} \simeq 1 + 0.06 = 1.06$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 22.4. Найти полные дифференциалы следующих функций:

а) $z = x^3 + xy^2 + x^2y$;

б) $z = e^{x^3 - y^3}$;

в) $u = \sin^2(xy^2z^3)$.

Ответ:

а) $\mathrm{d}z = (3x^2 + y^2 + 2xy)\mathrm{d}x + (2xy + x^2)\mathrm{d}y$;

б) $\mathrm{d}z = e^{x^3-y^3}(3x^2\mathrm{d}x - 3y^2\mathrm{d}y)$;

в) $\mathrm{d}u = \sin 2(xy^2z^3)(y^2z^3\mathrm{d}x + 2xyz^3\mathrm{d}y + 3xy^2z^2\mathrm{d}z)$.

Пример 22.5. Вычислить приближенно данные выражения, заменив приращения соответствующих функций их полными дифференциалами:

а) $(1.02)^3(0.97)^3$;

б) $\sqrt{(4.05)^2 + (2.93)^2}$.

Ответ:

а) 0.97;

б) 4.998.

Указание к решению: рассмотреть функции а) $z = x^3y^3$; б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пример 22.6. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

а) $xyz^2 + 2y^2 + 3yz + 4 = 0$ в точке $M_0(0, 2, -2)$;

б) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ в точке $M_0(1, -1, 1)$.

Ответ:

а) уравнение касательной плоскости: $8x + 2(y-2) + 6(z+2) = 0$,
уравнение нормали: $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+2}{6}$;
б) уравнение касательной плоскости: $2(x-1) - 4(y+1) + 6(z-1) = 0$,
уравнение нормали: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-1}{6}$.

Пример 22.7. Найти полные дифференциалы следующих функций:
а) $u = z \operatorname{arctg}(x/y)$;
б) $z = \operatorname{ctg}^3(xy^2 - y^3 + x^2y)$;
в) $z = e^{\cos^3(x^2-y^2)}$.
Ответ:
а) $\mathrm{d}u = \dfrac{yz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \dfrac{xz}{x^2+y^2}\mathrm{d}y + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\mathrm{d}z$;
б) $\mathrm{d}z = -3\dfrac{\operatorname{ctg}^2(xy^2 - y^3 + x^2y)}{\sin^2(xy^2 - y^3 + x^2y)}[(y^2 + 2xy)\mathrm{d}x + (2xy - 3y^2 + x^2)\mathrm{d}y]$;
в) $\mathrm{d}z = e^{\cos^3(x^2-y^2)} 3\cos^2(x^2 - y^2)[-\sin(x^2 - y^2)](2x\mathrm{d}x - 2y\mathrm{d}y)$.

Пример 22.8. Вычислить приближенно выражения:
а) $\sin 28^\circ \cos 61^\circ$;
б) $\sqrt{(1.04)^2 + (3.01)^2}$.
Ответ:
а) 0.227;
б) 3.185.
Указание к решению: от градусов перейти к радианам.

Пример 22.9. Найти уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $z = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}y^2$ в точке $M_0(3, 1, 4)$.
Ответ: уравнение касательной плоскости: $3x - y - z = 4$,
уравнение нормали: $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-4}{-1}$.

Занятие 23. Производная по направлению и градиент функции. Производная неявно заданной функции. Полная производная сложной функции.

Характеристиками скалярного поля являются производная по направлению и градиент.

Производная по направлению.

Производная по направлению $\overrightarrow{l}$ *определяет скорость изменения скалярного поля по данному направлению и вычисляется по формуле*

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

где $u = f(x, y, z)$ *— дифференцируемая функция,* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *— направляющие косинусы вектора* $\overrightarrow{l}$.

Производная по направлению равна нулю по направлению, касательному к поверхности уровня.

Градиент скалярного поля.

Градиентом скалярного поля, определяемого функцией $u = f(x, y, z)$, *называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются частные производные функции* $u = f(x, y, z)$, *то есть*

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\overrightarrow{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\overrightarrow{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

Градиент направлен по нормали к поверхности уровня и является вектором скорости наибыстрейшего изменения скалярного поля.

Пример 23.1. Найти производную функции $u = x^2y^2z^2$ в точке $A(1; -1; 3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(0; 1; 1)$ и градиент функции в точке A.

► $\left(\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right)_A = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_A \cos\alpha + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_A \cos\beta + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_A \cos\gamma$

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_A = (2xy^2z^2)_A = 18;$

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_A = (2x^2yz^2)_A = -18;$

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_A = (2x^2y^2z)_A = 6.$

$\overrightarrow{l} = \overrightarrow{AB} = (-1; 2; -2)$, $|\overrightarrow{l}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\dfrac{2}{3}$.

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right)_A = 18 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + (-18) \cdot \dfrac{2}{3} + 6 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = -22.$

$\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} < 0 \implies$ скалярное поле убывает.

$(\operatorname{grad} u)_A = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_A \overrightarrow{\imath} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_A \overrightarrow{\jmath} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_A \overrightarrow{k} = 18\overrightarrow{\imath} - 18\overrightarrow{\jmath} + 6\overrightarrow{k}$.

Ответ: $\left(\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right)_A = -22$; $(\operatorname{grad} u)_A = 18\overrightarrow{\imath} - 18\overrightarrow{\jmath} + 6\overrightarrow{k}$. ◄

Пример 23.2. Найти производную функции $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке $M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, принадлежащей окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$ по направлению окружности, а также модуль градиента функции в точке M.

► $\left(\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right)_M = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_M \cos\alpha + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_M \sin\alpha$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left[\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]_M = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)_M = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left(\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x}\right)_M = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)_M = \frac{1}{2}.$$

Найдем угловой коэффициент касательной к окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$:

$$y'_x = k_{\text{кас}} = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x - 2}{2y} = \frac{1 - x}{y}$$

$$(k_{\text{кас}})_M = (\operatorname{tg}\alpha)_M = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \alpha = \frac{\pi}{6},\ \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right|_M = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{grad} u|_M = -\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\imath} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\jmath};\ |\operatorname{grad} u|_M = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Ответ: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}\right|_M = -\dfrac{1}{2}$; $|\operatorname{grad} u|_M = 1$. ◄

Пример 23.3. Найти наибольшую скорость изменения скалярного поля, которое задается функцией $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ в точке $M(1; 1; 1)$.

► Градиент есть вектор наибольшей скорости изменения скалярного поля,

$$\max\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},\ \text{где } \overrightarrow{l} = \operatorname{grad} u.$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = (10xyz - 7y^2z + 5yz^2)_M = 8;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = (5x^2z - 14xyz + 5xz^2)_M = -4;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = (5x^2y - 7xy^2 + 10xyz)_M = 8.$$

$\max \dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{64 + 16 + 64} = \sqrt{144} = 12.$

Ответ: $\max \dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} = 12.$ ◄

Функция $z = f(x, y)$ называется неявной, если она задается уравнением $F(x, y, z) = 0$, не разрешенным относительно z.

Частные производные неявной функции z находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \qquad (F'_z \neq 0)$$

Пример 23.4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = a^2$.

► $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - a^2$

$F'_x = 2x - 2z$

$F'_y = 2y$

$F'_z = 2z - 2x$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2x - 2z}{2z - 2x} = 1$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y}{2z - 2x} = \dfrac{y}{x - z}$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{x - z}$. ◄

Пример 23.5. Найти полный дифференциал функции z, если $e^z = xyz$.

► $F(x, y, z) = e^z - xyz = 0$

$F'_x = -yz$; $F'_y = -xz$; $F'_z = e^z - xy = xyz - xy = xy(z - 1)$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = \dfrac{z}{x(z-1)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = \dfrac{z}{y(z-1)}$

$\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \dfrac{z\mathrm{d}x}{x(z-1)} + \dfrac{z\mathrm{d}y}{y(z-1)} = \dfrac{z(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)}{xy(z-1)}$.

Ответ: $\mathrm{d}z = \dfrac{z(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)}{xy(z-1)}$. ◄

Пример 23.6. Найти угол наклона касательной, проведенной к кривой $x^3 + y^3 - 2axy = 0$ в точке $x = y = a$, к положительному направлению оси OX.

► $y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -\dfrac{3x^2 - 2ay}{3y^2 - 2ax}$

$\operatorname{tg}\alpha = (y'_x)\Big|_{\substack{x=a\\y=a}} = -\dfrac{3a^2 - 2a^2}{3a^2 - 2a^2} = -1$;

$\operatorname{tg}\alpha = -1 \implies \alpha = 135^\circ = \dfrac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$. ◄

Пример 23.7. Найти $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, если $z = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$, где $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$.

► $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\cos\frac{x}{\sqrt{y}}}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot 6t + \frac{\cos\frac{x}{\sqrt{y}}}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\cdot\left(-\frac{x}{2y\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{y}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\left(6 - \frac{x}{2y}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{y}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\left(6 - \frac{x}{2y^2}\right), \text{ где } x = 3t^2,\ y = \sqrt{t^2+1}.$$

Ответ: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{\sqrt{y}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\left(6 - \frac{x}{2y^2}\right)$, где $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 23.8. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $(1; 1; 1)$ в направлении $\overrightarrow{l} = (\cos 45°; \cos 60°; \cos 60°)$, градиент в этой же точке и его длину.

Ответ: $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} = 2 + \sqrt{2}$; $\operatorname{grad} u = 2\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}$; $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{3}$.

Пример 23.9. Найти производную функции $z = \operatorname{arctg} xy$ в точке $(1; 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла и градиент функции в этой точке.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{l}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{grad} z = \frac{1}{2}\overrightarrow{\imath} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\jmath}$.

Пример 23.10. Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = \sqrt{xy}$ в точке $(4; 2)$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{l}} = |\operatorname{grad} z| = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{10}}{4} \simeq 0.79$.

Пример 23.11. $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$. Показать, что $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

Пример 23.12. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}$ в точке $(a; a)$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Занятие 24. Нахождение безусловного экстремума для функций нескольких переменных.

Краткая сводка формул.

Рассматривается функция $u = f(\overrightarrow{x})$, *где* $\overrightarrow{x}$ — *точка в* $\mathbb{R}^n$, *то есть* $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Точка, в которой все частные производные первого порядка обращаются в нуль, называется стационарной.

Следовательно, стационарные точки находятся из системы уравнений:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \end{array} \tag{31}$$

Стационарные точки, а также точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются критическими точками. В критических точках функция может иметь экстремум.

Ниже будут рассматриваться только стационарные точки.

$$H(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \text{ — матрица Гессе.}$$

Пусть $\overrightarrow{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — *стационарная точка.*

$$H(\overrightarrow{x}_0) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{nn} \end{pmatrix} \tag{32}$$

Очевидно, что $h_{ij} = h_{ji}$, *то есть матрица Гессе — симметричная матрица.*

Достаточные условия экстремума.

Если в стационарной точке выполняются неравенства:

$h_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} > 0$, $\ldots$, $\det H(\overrightarrow{x}_0) > 0$, *то в этой точке функция имеет локальный минимум.*

Если же знаки указанных миноров чередуются:

$h_{11} < 0$, $\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} < 0$, $\ldots$, $(-1)^n \det H(\overrightarrow{x}_0) > 0$, *то в стационарной точке функция имеет локальный максимум.*

Если рассматривается функция двух переменных, то чаще используются другие обозначения: $u = f(x, y)$, *где* (x, y) — *точка в* $\mathbb{R}^2$.

Пусть (x_0, y_0) — стационарная точка. В этом случае:
$h_{11} = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$, $h_{12} = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$, $h_{22} = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$.
Если $\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} < 0$, *то экстремума в стационарной точке нет.*

Пример 24.1. $f(\overrightarrow{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 + 5x_2^2 + 9x_3^2$, $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — точка в $\mathbb{R}^3$. Найти экструмум.

▶ Вычисляем частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 + 8x_3 + 10x_2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 4x_1 + 8x_2 + 18x_3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 4,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 10,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 8,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 18.$$

Для определения стационарных точек получаем систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 18x_3 = 0 \end{cases}$$

Так как система однородная и ее определитель не равен нулю, то решением является единственная точка $\overrightarrow{x} = (0, 0, 0)$ — стационарная точка.

Запишем матрицу Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{pmatrix}$$

Имеем: $h_{11} = 2 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 16 > 0$, $\det H = 128 > 0$.

Ответ: $\overrightarrow{x}_0 = (0, 0, 0)$ — точка локального минимума. ◀

Пример 24.2. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, (x, y) — точка в $\mathbb{R}^2$.

▶ Находим частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x,$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3,$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$
Для определения стационарных точек имеем систему:
$\begin{cases} 3(x^2 - y) = 0 \\ 3(y^2 - x) = 0 \end{cases}$
решением которой являются две точки: $(0,0)$ и $(1,1)$.
Для дальнейшего анализа вычислим матрицу Гессе:
$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$

В первой точке: $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $h_{11} = 0$, $\det H(0,0) = -9 < 0$. Следовательно, в точке $(0,0)$ экстремума нет.

Во второй точке: $H(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $h_{11} = 6 > 0$, $\det H(1,1) = 27 > 0$.

Ответ: В точке $(1,1)$ функция имеет локальный минимум, $f(1,1) = -1$. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Пример 24.3. $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$.
Ответ: $(-2,1)$ — точка минимума.

Пример 24.4. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 15xy$.
Ответ: $(0,0)$, $(5,5)$ — стационарные точки. В точке $(0,0)$ экстремума нет; $(5,5)$ — точка локального минимума.

Пример 24.5. $f(x,y) = xy^2(1 - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$.
Ответ: $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ — точка локального максимума.

Пример 24.6. $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — точка в $\mathbb{R}^3$. $f(\overrightarrow{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x1 + 6x_2 - 2x_3$.
Ответ: $(2,-3,1)$ — точка локального минимума.

Пример 24.7. $f(x,y) = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.
Ответ: $\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$ — точка локального минимума.

Пример 24.8. $f(x,y) = x^2 - 6xy + 10y^2 - 2x + 6y + 7$.
Ответ: $(1,0)$ — точка локального минимума.

Пример 24.9. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$.
Ответ: $(-4,-1)$ — точка локального максимума; $(4,1)$ — точка локального минимума.

Занятие 25. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Пусть рассматривается функция $z = f(x, y)$, аргументы x и y которой удовлетворяют условию $\varphi(x, y) = 0$, называемому уравнением связи. Точка (x_0, y_0) называется точкой условного максимума (минимума), если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек (x, y) из этой окрестности, удовлетворяющих условию $\varphi(x, y) = 0$, выполняется неравенство:

$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ *— максимум*

$(f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ *— минимум)*

Наиболее простым способом нахождения условного экстремума является сведение задачи к отысканию экстремума функции одной переменной.

Пример 25.1. Найти точки максимума и минимума функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$.

► Выразим из уравнения $3x + 2y = 11$ переменную $y(x)$ и подставим полученное выражение $y = \dfrac{11 - 3x}{2}$ в z. Получаем $z = x^2 + \dfrac{1}{2}(11 - 3x)^2$. Эта функция имеет единственный минимум при $x_0 = 3$, $y_0 = \dfrac{11 - 3x_0}{2} = 1$. Таким образом, $(3, 1)$ — точка условного экстремума. ◄

Пример 25.2. Найти условный экстремум функции $u = xyz$ относительно уравнений связи $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 6$.

► Разрешим уравнения связи относительно переменных x и y: $x = z + 6$, $y = -2z$. Подставим найденные значения x и y в выражение для u:

$u = -2z^2(z + 6)$

$u' = -6z(z + 4)$ — производная равна нулю при $z = 0$ и $z = -4$.

$u'' = -12(z + 2)$

$u''(0) = -24$, $u''(-4) = 24$

В точке $z = 0$ функция имеет максимум $u = 0$, а в точке $z = -4$ — минимум $u = -64$.

Следовательно, исходная функция при заданных ограничениях имеет один условный максимум $u(6, 0, 0) = 0$ и один условный минимум $u(2, 8, -4) = -64$. ◄

Если уравнение связи $\varphi(x, y) = 0$ нельзя разрешить относительно одной из переменных, для отыскания условного экстремума функции $z = f(x, y)$ ищется безусловный экстремум функции Лагранжа:

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.

Пример 25.3. Найти точки экстремума функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$, используя метод множителей Лагранжа.

► Составим функцию Лагранжа:

$L = x^2 + 2y^2 + \lambda(3x + 2y - 11)$.

Приравняем к нулю ее частные производные и получим систему уравнений, определяющих необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} 2x+3\lambda=0 \\ 4y+2\lambda=0 \\ 3x+2y-11=0 \end{cases}$$

Стационарная точка: $x=3$, $y=1$, $\lambda=-2$.

Достаточное условие экстремума:

$\mathrm{d}^2L=\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}x^2(a\xi^2+b\xi+c)<0.$

$b^2-4ac=0-4\cdot 2\cdot 4<0$, $a>0$.

Ответ: Точка условного минимума $(3,1)$. ◄

Пример 25.4. Найти условный экстремум функции $u=6-5x-4y$, если $x^2-y^2-9=0$.

► Функция Лагранжа:

$L(x,y,\lambda)=6-5x-4y+\lambda(x^2-y^2-9)$.

По необходимым условиям получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=-5+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-4-2\lambda y=0 \\ x^2-y^2-9=0, \end{cases}$$

из которой находим стационарные точки:

$x=-5$, $y=4$ при $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ и

$x=5$, $y=-4$ при $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

Проверим достаточное условие:

$a=\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda$, $b=2\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0$, $c=\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-2\lambda$,

$b^2-4ac=4\lambda^2>0$.

Поскольку достаточное условие не выполнено, то функция $u=6-5x-4y$ условного экстремума не имеет. ◄

Задания для самостоятельной работы.

Исследовать на условный экстремум функции:

Пример 25.5. $u=e^{xy}$ при условии $x+y-1=0$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ — точка максимума.

Пример 25.6. $u=xy$ при условии $x^2+y^2=1$.

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — точки максимума;

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — точки минимума.

Пример 25.7. $u=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ при условии $x+y=2c$ $(c>0)$.

Ответ: (c,c) — точка минимума.

Библиографический список

Основная литература

1. Бугров Л.С., Никольский С.М. – Дифференциальное исчисление: учеб. для инженеров техн. специальностей вузов, 3-е издание, испр. – М.: Наука, 1988. – 431 с.

2. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис, 1996. – 278 с.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике полный курс: 3-е издание. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 602 с.

4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами, 1 курс: 2-е издание, испр. – М.: Айрис-пресс, 2003-2004. – 572 с.

5. Лунгу К.Н. и др. под ред. Федина С.Н. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами, 2 курс, изд. 3-е, испр. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 589 с.

6. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. – Минск. Высшая шк., 1990, 2005. – 270 с.

7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Л. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для втузов в 2 частях. – М.: Высш. шк., 1986. – 303 с.

8. В.С. Шипачев. Высшая математика: учеб. для вузов, 5-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 479 с.

9. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов. Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. доп. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 470с.

Методические пособия

10. Коваленко Е.В., Власенко Л.Н. Элементы матричного исчисления и их применение: Пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2006. – 44 с.

11. Хващевская Л.Ф., Артеменко И.В. Элементы линейной алгебры: Методическое пособие. – Иркутск: Издательство ИрГТУ, 2004. – 59 с.

12. Лебедева Г.А. Векторная алгебра. Методические указания. Иркутск: Издательство ИрГТУ, 2002. – 31 с.

13. Бендич Н.Н., Кочеткова О.Н., Седых Е.И. Полярная система координат. Методические указания для практических занятий. – Иркутск: Издательство ИрГТУ, 2005. – 24 с.

14. Жижко Г.О, Обыкновенные дифференциальные уравнения. Методические указания и расчетные задания для самостоятельной работы студентов. Иркутск: Издательство ИрГТУ, 2006. – 32 с.

15. Рудых Н.В. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Методические указания для студентов всех специальностей. – Иркутск: Издательство ИрГТУ. – 2006. – 32с.

16. Исаева Г.А. Основы математики в экономике. Матричные игры. Пособие для студентов специальности "Национальная экономика". – Иркутск: Издательство ИрГТУ. – 2004. – 54с.

17. Лукьянова Е.А., Шульгина О.Н. Аналитическая геометрия в пространстве: Методические указания. – Иркутск: Издательство ИрГТУ, 2005. – 40 с.

18. Лебедева Г.А., Коваленко Е.В., Цицинкова Г.А. Пределы и непрерывность. Методические указания. – Иркутск: Издательство ИрГТУ, 2003. – 27 с.

Где найти указания к решению задач из отдельных разделов?

I. Линейная алгебра (семестр I, занятия 1-7)

Основная литература:

[2] стр. 8-32, 35;

[3] стр. 16-57;

[4] гл. 1 §1 №1.1.2-1.1.10, 1.1.20, 1.1.29, §2 №1.2.4, 1.2.29, 1.2.42, 1.2.50, §3 №1.3.1, 1.3.9, 1.3.12, §4 №1.4.1, 1.4.2, 1.4.27, 1.4.50; гл.2 §1 №2.1.2, 2.1.4, §2 №2.2.2, 2.2.18, §3 №2.3.3, 2.3.4, 2.3.11; гл. 3 §1 №3.1.1-3.1.12, 3.1.17, 3.1.19, §2 №3.2.2-3.2.9, §3 №3.3.1-3.3.11, §4 №3.4.1-3.4.13;

[6] ч.1 1. АЗ-1.1 – АЗ-1.4; 2. АЗ-2.1 – АЗ-2.3;

[7] ч.1 гл.1 §4 №178, 181, 182, 185, §5 №217, 218, 220, 221; гл. 2 §2 №240, 241, 244-253, 254-265; гл. 4 §1 №383, 384, §2 №394, 395, 396, 402, 405, §4 №428-430, 432, 438-440, §6 №445;

[8] стр. 259-272;

[9] гл.1, 2, 3.

Методические работы: [10, 11, 12, 16].

II. Аналитическая геометрия (семестр I, занятия 8-13)

Основная литература:

[2] стр. 40-62;

[3] стр. 58-86, 90-109;

[4] гл. 4 §1 №4.1.5-4.1.11, 4.1.48, 4.1.50, §2 №4.2.6, 4.2.52, 4.2.56, 4.2.64, §3 №4.3.1, 4.3.28, 4.3.60, 4.3.105, 4.3.106; гл.5 §2 №5.2.1, 5.2.2-5.2.6, 5.2.41, 5.2.41, §3 №5.3.2-5.3.6, 5.3.7, 5.3.26-5.3.27, §4 №5.4.1-5.4.8, §5 №5.5.11;

[6] ч.1 3. АЗ-3.1 – АЗ-3.3; 4. АЗ-4.1 – АЗ-4.3;
[7] ч.1 гл. 3 §1 №288-285, 317-326, §2 №345-348, 359-362, 368, 371-373;
[8] стр. 34-64, 222-252;
[9] гл. 4.
Методические работы: [13, 17].

III. Введение в анализ (семестр I, занятия 14-17)

Основная литература:
[1] стр. 32-119;
[2] стр. 66-80;
[3] стр. 116-161, 218-224;
[4] гл.6 §1 №6.1.1-6.1.12, §4 №6.4.14, 6.4.37, §5 №6.5.12; гл. 10 §1 №10.1.1-10.1.10, §2 №10.2.9, 10.2.12;
[6] ч.1 5. АЗ-5.1 – АЗ-5.4; ч.2 7. АЗ-7.1;
[7] ч.1 гл. 6 §2 №607-609, 612, 613, §4 №636-647, §5 №701-709, §6 №719-725; ч.2 гл. 3 §7 №439-444, 461, 462, 475, 476-484;
[8] стр. 10-30, 69-101;
[9] гл. 5, 6, 16.
Методические работы: [18].

IV. Дифференциальное исчисление (семестр I, занятия 18-21)

Основная литература:
[1] стр. 123-167;
[2] стр. 84-101;
[3] стр. 161-190;
[4] гл. 7 §1 №7.1.28-7.1.58, 7.1.65-7.1.68, 7.1.73-7.1.78, §2 №7.2.7-7.2.13, §3 №7.3.19-7.3.22, 7.3.24-7.3.27;
[6] ч.1 6. АЗ-6.1 – АЗ-6.6;
[7] ч.1 гл. 7 §1 №741-766, 892-903, 904-908, 909-912, 936-941, 961-968;
[8] стр. 104-125;
[9] гл. 7, 9.

V. Исследование функций (семестр II, занятия 1-4)

Основная литература:
[1] стр. 167-190;
[2] стр. 109-113;
[3] стр. 192-215;
[4] гл.7 §4 №7.4.1-7.4.7, 7.4.10;
[6] ч.1 6. АЗ-6.7 – АЗ-6.9;
[7] ч.1 гл. 7 §2 №982-987, 1001-1008, 1031-1040, 1066-1072, 1073-1077, 1082, 1083;
[8] стр. 127-151;
[9] гл. 8.

VI. Интегральное исчисление (семестр II, занятия 5-12)

Основная литература:

[1] стр. 195-260, 263-285;

[2] стр. 118-147;

[3] стр. 226-300;

[4] гл.8 §1 №8.1.16-8.1.26, 8.1.35-8.1.60, §2 №8.2.20-8.2.26, §3 №8.3.9-8.3.12, §4 №8.4.1-8.4.10, §5 №8.5.1-8.5.15; гл. 9 §1 №9.1.3-9.1.17, 9.1.86-9.1.89, §2 №9.2.1-9.2.8, 9.2.50, 9.2.55, §3 №9.3.1-9.3.4, 9.3.86, 9.3.92, 9.3.101, 9.3.142, 9.3.143, 9.3.165, 9.3.166, 9.3.219;

[6] ч.2 8. АЗ-8.1 – АЗ-8.7; 9. АЗ-9.1 – АЗ-9.5;

[7] ч.1 гл. 9 §1 №1306-1314, 1330-1337, 1343-1345, 1363-1369, §2 №1380-1386, 1396-1404, §3 №1419-1426, 1437-1439, §4 №1446-1450, 1451-1455, 1456,1457, 1458-1462, 1480-1483; гл.10 §1 №1512-1520, §2 №1541-1552, 1553-1558, §3 №1566-1568, §4 №1583-1585, §5 №1599, §6 №1608-1612, §7 №1613-1615, §8 №1622, 1623;

[8] стр. 159-215;

[9] гл. 10, 11.

VII. Дифференциальные уравнения (семестр II, занятия 13-20)

Основная литература:

[2] стр. 152-189;

[3] стр. 325-372;

[5] гл. 2 §1 №2.1.1-2.1.7, 2.1.13-2.1.15, §2 №2.2.1-2.2.3, §3 №2.3.2-2.3.6, §4 №2.4.1-2.4.6, §6 №2.6.1-2.6.6, 2.6.22, 2.6.32, 2.6.35, §7 №2.7.1-2.7.10, 2.7.19-2.7.24, 2.7.43-2.7.49, 2.7.50, 2.7.57, 2.7.77-2.7.84, 2.7.86, §8 №2.8.1, 2.8.2, 2.8.17, 2.8.18;

[6] ч.2 11. АЗ-11.1 – АЗ-11.8;

[7] ч.2 гл. 4 §1 №507-510, 545-548, 572-574, 597-602, §2 №643-646, 649-651, 656-658, §3 №689-694, 712-719, §5 №791-793, 795;

[8] стр. 416-449;

[9] гл. 12.

Методические работы: [14].

VIII. Функции нескольких переменных (семестр II, занятия 21-25)

Основная литература:

[1] стр. 290-357;

[2] стр. 194-218;

[3] стр. 304-323;

[4] гл.11 §1 №11.1.13, 11.1.14, 11.1.22-11.1.25, §2 №11.2.2, 11.2.11, §3 №11.3.2-11.3.10, 11.3.11-11.3.16, 11.3.18, §4 №11.4.1-11.4.11, §5 №11.5.3.-11.5.5, §6 №11.6.1-11.6.5, §7 №11.7.8-11.7.10;

[6] ч. 2 10. АЗ-10.1 – АЗ-10.4;

[7] ч.1 гл. 8 §1 №1155-1159, §2 №1178-1195, 1196-1199, 1214-1232, 1233-1241, 1242-1245, §3 №1273-1279, §4 №1283-1289, 1290-1292;

[8] стр. 284-304, 275-282;

[9] гл. 15.

Методические работы: [15].