Линейная алгебра

Сайт:	Электронное обучение ИРНИТУ	Напечатано::	Арбакова Анастасия Вячеславовна
Курс:	Математика 1 семестр (Линейная алгебра)	Дата:	Понедельник, 7 Июнь 2021, 04:15
Книга:	Линейная алгебра		

Описание

Даны основные понятия и определения. Рассмотрены операции над матрицами.

Оглавление

1. Матрицы

а

Processing math: 13%

1.1. Основные определения

Определение. *Матрицей* из m строк и n столбцов называется таблица чисел (i=1,2,...,m - номер строки; j=1,2,...,n - номер столбца) вида:

A= $\left[a_{ij}\right]=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Матрица A имеет *размер* $m \times n$ и называется *прямоугольной*. Числа a_{ij} называются ее *элементами*; при этом элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ образуют *главную диагональ* матрицы.

Пример. Матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ содержит две строки и четыре столбца и является прямоугольной. Ее размер: 2×4 ; главную диагональ образуют элементы 2 и 0.

Определение. При $m = n$ матрица называется *квадратной*. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей *n-го порядка*.

Пример. Матрица $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 0 & 11 & 4 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ содержит три строки и три столбца, следовательно, является квадратной третьего порядка. Ее главную диагональ составляют элементы 2, 11 и 9.

Определение. Квадратная матрица называется *диагональной,* если все ее элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю.

Определение. Если у диагональной матрицы, каждый элемент главной диагонали равен единице, то такая матрица называется *единичной* и обозначается *буквой* E.

Пример. Матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ диагональная матрица третьего порядка, матрица $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ единичная матрица третьего порядка.

Определение. Если все элементы квадратной матрицы, расположенные выше (или ниже) главной диагонали равны нулю, то такая матрица называется *треугольной*.

Пример. Матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ - треугольные матрицы третьего порядка.

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается *буквой* O.

Определение. Матрица, полученная из данной матрицы A путем замены строк на столбцы с соответствующими номерами, называется *транспонированной* к данной и обозначается A^T. При этом справедливо свойство: $\left(A^T\right)^T = A$.

Пример. Если матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; если $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, то $B^T=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -6 \\ -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Кроме того, различают матрицы, которые имеют одну строку или один столбец. Такие матрицы называют *векторами.*

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ - вектор-строка размера 1×5; $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ - вектор- столбец размера 3×1.

Определение. Матрицы *равны,* если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны, то есть:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}, \quad i = \overline{1,\ m}, \quad j = \overline{1,\ n}.$$

Processing math: 13%

1.2. Операции над матрицами

Рассмотрим операции, которые можно производить над матрицами:

- **Сложение** (операция справедлива для матриц одинакового размера)

Суммой двух матриц $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $i = \overline{1,\ m}$, $j = \overline{1,\ n}$.

Для данной операции справедливы свойства: 1. $A + B = B + A$; 2. $(A + B) + C = A + (B + C)$; 3. $A + O = A$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Операция вычитания матриц определяется аналогично.

При транспонировании справедливо равенство: $(A + B)^T = A^T + B^T$.

- **Умножение на число**

Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ на число α называется матрица $B = \left(b_{ij}\right)$, элементы которой $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, где $i = \overline{1,\ m}$, $j = \overline{1,\ n}$.

Для данной операции справедливы свойства: 1. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$; 2. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$; 3. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$, где $\alpha, \beta = const$

Пример. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, α=-3, тогда $\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -3 & -6 \\ -12 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

- **Умножение матриц** (операция справедлива для квадратных матриц одного размера, а также для тех прямоугольных, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, а именно, : $(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$)

Произведением матрицы $\boldsymbol{A}$ на матрицу B называется матрица C, элементы которой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Другими словами, чтобы получить элемент c_{ij} матрицы $C = A \cdot B$, надо элементы i-ой строки матрицы $\boldsymbol{A}$ почленно умножить на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B, результат сложить.

Для данной операции справедливы свойства: 1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$; 2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; 3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
4. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B$, где $\alpha = const$

Примеры.

1. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, а матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, тогда $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$;

2. Если матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, а матрица $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, то операция $A \cdot B$ не определена, так как число столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ равно трем и не совпадает с числом строк матрицы B, которое равно двум;

3. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а матрица $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, тогда $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 11 & 33 \end{pmatrix}$, а матрица $B \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 38 & 26 \end{pmatrix}$.

Итак, произведение $A \cdot B$ может быть не равно произведению $B \cdot A$ (а иногда - невозможно).

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы называются *перестановочными*.

При транспонировании справедливо равенство: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Processing math: 13%

1.3. Практическое занятие по теме "Матрицы"

Пример 1.1 Найти матрицу $4 \cdot A - 5 \cdot B - 2 \cdot E$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, Е-единичная матрица

*Решение***:** Найдем матрицы

$$4 \cdot A = \begin{pmatrix} -8 & 20 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \quad 5 \cdot B = \begin{pmatrix} -15 & 5 \\ -20 & 10 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 2 \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} 4 \cdot A - 5 \cdot B = \begin{pmatrix} -8 - (-15) & 20 - 5 \\ 4 - (-20) & 12 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 24 & 2 \end{pmatrix} 4 \cdot A - 5 \cdot B - 2 \cdot E = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 22 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: 4·A-5·B-2·E=515220

Пример 1.2 Найти произведение матриц, если A=-12101-1-121, B=3-11

*Решение***:** Произведение матриц B·A возможно, так как в матрице B-три столбца, а в матрице A- три строки. Матрица произведение C=B·A будет иметь размер 1×3. Заполним матрицу -строку C элементами:

C=B·A=3-11·-12101-1-121=-3+0-16-1+23+1+1=-4 7 5
Ответ: B·A=-475
Пример 1.3 Найти ((A-B)·C)T, если A=-12130-2114, B=2-104513-21, C=25314-3

Решение: Найдем произведение (A-B)·C
A-B=-12130-2114-2-104513-21=-331-1-5-3-233(A-B)·C=-331-1-5-3-233·25314-3=-6+9+4-15+3-3-2-15-12-5-5+9-4+9+12-10+3-9=7-15-29-117-16
Осталось транспонировать полученную матрицу:
((A-B)·C)T=7-2917-15-1-16
Ответ: ((A-B)·C)T=7-2917-15-1-16
Пример 1.4 Найти сумму элементов первого столбца матрицы C=AT·B, если A=231-2, B=-350421

*Решение***:** Транспонируем матрицу A

AT=213-2

Произведение матриц ATB возможно, так как в матрице AT-два столбца, а в матрице B- две строки. Матрица произведение C=AT·B будет иметь размерность 2×3. Заполним матрицу C элементами:

C=AT·B=213-2·-350421=-6+410+20+1-9-815-40-2=-2121-1711-2

-2 и -17 являются элементами первого столбца, следовательно -2+(-17)=-19

Замечание: Элементы второго и третьего столбцов матрицы C=AT·B нас не интересовали, значит, их можно было не рассчитывать.

Ответ: сумма элементов первого столбца матрицы C=AT·B равна -19

Пример 1.5 Найти сумму элементов главной диагонали матрицы C=A·B, если A=51-1201, B=320-114

Решение: Произведение матриц A·B возможно, так как в матрице A-два столбца, а в матрице B- две строки. Матрица произведение C=A·B будет иметь размер 3×3. Заполним матрицу C элементами главной диагонали:

C=51-1201·320-114=15-1a12a13a21-2+2a23a31a320+4=14a12a13a210a23a31a324

Следовательно 14+0+4=18

Ответ: сумма элементов главной диагонали матрицы C=A·B равна 18

Задания для домашней работы:

1. Найти матрицу 13·A-2·BT, если A=327-96-1218 B=2-1132-1

Ответ: -33-1-2-68

2. Найти произведение матриц A·B и B·A, если A=211032 B=0315-11

Ответ: A·B=012117, B·A=09621611-221

3.Вычислить: A·B-C2, если A=342105, B=201305, C=1304

Ответ: 9729

4. Вычислить: (A-A^{T})2, если A=11-13-12250

Ответ: -13-96-9-13-66-6-18

5. Найти произведение элементов главной диагонали матрицы AT·B

A=2-1-3, B=3-21

Processing math: 13% ы 6; 2; -3; произведение -36

2. Определители

м

Processing math: 13%

2.1. Понятие определителей и их свойства

Пусть заданы некоторые числа a11, a12, a21, a22 .

Определение. Число вида a11·a22 - a12·a21 называется *определителем* (или *детерминантом*) второго порядка. Записывается и обозначается в виде: Δdet=a11a12a21a22=a11·a22-a12·a21 , где aij i,j=1, 2 - элементы определителя, причем i - номер строки, j - номер столбца. Различают элементы первой строки: a11, a12; второй строки: a21, a22; первого столбца: a11, a21; второго столбца: a12, a22 , а элементыa11, a22 образуют главную диагональ.

Примеры: 1. Δ=3 5-2 1=3·1-5·-2=3+10=13;

2. Решить уравнение: cos8x -sin5xsin8x cos5x=0.

Решение: вычислим определитель, приравняем его нулю и решим уравнение:

cos8x·cos5x--sin5x·sin8x=0cos8x·cos5x+sin8x·sin5x=0cos8x-5x=0cos3x=03x=π2+πn, n∈Zx=π6+πn3, n∈Z

Ответ: x=π6+πn3, n∈Z.

Свойства определителей

(справедливы для определителей второго, третьего и высших порядков)

1. Величина определителя *не изменится*, если строки заменить на столбцы с соответствующими номерами (такая операция называется транспонированием.
2. Величина определителя *меняет знак*, если поменять местами две строки (или два столбца).
3. Общий множитель строки (или столбца) можно выносить за знак определителя.
4. Величина определителя *равна нулю*, если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю.
5. Величина определителя *равна нулю*, если элементы двух строк (или двух столбцов) соответственно равны.
6. Величина определителя *равна нулю*, если элементы двух строк (или двух столбцов) соответственно пропорциональны.
7. Если каждый элемент какой-либо строки (или столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то и определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей.
8. Величина определителя *не изменится*, если элементы какой-либо строки (или столбца) сложить с элементами другой строки (или столбца) умноженными на любой общий множитель, не равный нулю.
9. Величина определителя *равна* сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения (см. ниже); свойство 9 называют *разложением определителя по элементам строки (или столбца)*.

Определение. Число вида a11a22a33+a12a23a31+a13a21a32-a13a22a31-a11a23a32-a12a21a33 называется *определителем* (или *детерминантом*) третьего порядка. Записывается и обозначается в виде: Δ=a11 a12 a13a21 a22 a23a31 a32 a33 . Здесь различают первую, вторую и третью строки, а также первый, второй и третий столбец. Число aij называется элементом определителя. Первый индекс i указывает на номер строки, второй индекс j - на номер столбца. Или иначе: элемент aij находится на пересечении i - ой строки и j - ого столбца. Элементы a11, a22, a33 образуют главную диагональ, а элементы a13, a22, a31 - побочную диагональ.

Определение. Минором Mij некоторого элемента определителя aij называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания i - ой строки и j - ого столбца.

Пример. Пусть дан определитель третьего порядка Δ=1 2 345 678 9 , тогда M23=1 27 8=8-14=-6, а M11=5 68 9=45-48=-3.

Определение. Алгебраическим дополнением Aij некоторого элемента определителя aij называется его минор, взятый со знаком -1i+j, то есть Aij = -1i+j Mij .

Примеры. 1. Пусть определитель Δ=2 -1 30 12-321 , тогда A31=-13+1-1 312=-2-3=-5, а A23=-12+32 -1-3 2=-4-3=-1 .
2. Если Δ=5-43 1, то A11=1; A12=-3; A21=4; A22=5.

Определение. *Определителем* n - ого порядка называется число, записанное в виде:

Δ=a11 a12 … a1na12a22…a2n…………an1an2…ann=ai1·Ai1 + ai2·Ai2 + … + ain·Ain=∑j=1naij·Aij.

Если в данном определителе Δ, например: ai2, ai3, … , ain равны нулю, то его вычисление сводится к вычислению одного определителя (n-1) - ого порядка. Таким образом, применяя свойства 8 и 9, вычисление определителя, например четвертого порядка, можно свести к вычислению определителя второго порядка.

Пример. Вычислить определитель Δ=1 4 2 223114124-1013 , применяя свойства 8 и 9.

Решение: так как a42=0, применяя свойства 8 и 9, получим в четвертой строке вместо -1 и 3 нули. С этой целью элементы третьего столбца сложим с соответствующими элементами первого столбца, результат запишем в первый столбец; затем элементы третьего столбца домножим на (-3) и сложим с соответствующими элементами четвертого столбца, результат запишем в четвертый столбец, получим:
Δ=3 42 -4331-2612-20010=1·-14+3·3 4 -433-261-2=(используя свойство 3) =-1·3·-21 4 2131211=6·1 4 2131211=(получим теперь нули в первом столбце: с этой целью элементы первой строки умножим на (-1) и сложим с соответствующими элементами второй строки, результат запишем во вторую строку; затем элементы первой строки умножим на (-2) и сложим с соответствующими элементами третьей строки, результат запишем в третью строку) =61 4 20-1-10-7-3=6·-11+1-1 -1-7-3=6·(-1·-3--1·-7)=6·3-7=6·(-4)=-24.

Ответ: -24

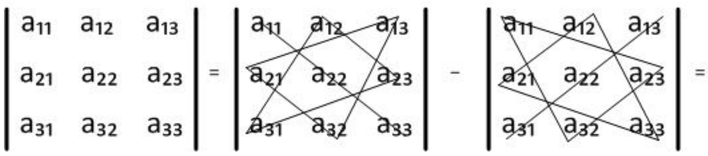
Processing math: 13%

2.2. Основные приемы вычисления определителей третьего порядка

Рассмотрим основные способы вычисления определителей *третьего* порядка. К ним относятся:

- Правило "Звездочка" (иначе правило Саррюса или правило треугольников).

Вычисления проводят по следующей схеме:



=a11·a22·a33+a12·a23·a31+a13·a21·a32-a13·a22·a31-a12·a21·a33-a11·a23·a32 .

- Разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки.

a11a12 a13a21 a22 a23a31 a32 a33=a11·A11 + a12·A12 + a13·A13 = a11·a22 a23a32 a33 -a12·a21 a23a31 a33 + a13·a21 a22a31 a32 =
=a11·a22·a33-a23·a32-a12·a21·a33-a23·a31+a13·a21·a32-a22·a31=
=a11·a22·a33-a11·a23·a32-a12·a21·a33+a12·a23·a31+a13·a21·a32-a13·a22·a31= (перегруппируем)=
=a11·a22·a33+a12·a23·a31+a13·a21·a32-a13·a22·a31-a12·a21·a33-a11·a23·a32.
!!! *Заметим, что определитель третьего порядка* ***можно раскладывать*** *по любой из трех строк (или по любому из трех столбцов), используя свойство 9. В приоритете - строки и столбцы, элементы которых равны нулю.*

Processing math: 13%

2.3. Практическое занятие по теме "Определители"

Пример 1 Вычислить определитель 512-12-1-311 а) по правилу треугольника; б) разложением по элементам первой строки;

Решение: а) Воспользуемся правилом треугольника

Δ=512-12-1-311=5·2·1+(-1)·1·2+1·(-1)·(-3)-(-3)·2·2-1·(-1)·1-5·1·(-1)=10-2+3+12+5+1=29

б) Разложение по элементам первой строки

Δ=512-12-1-311=5·A11+1·A12+2·A13=5·(-1)1+1·2-111+(-1)1+2·-1-1-31+2·(-1)1+3-12-31= =5·(2-(-1))-1·(-1-3)+2·(-1+6)=15+4+10=29

__Замечание:__ Величина определителя характеризует матрицу и не зависит от способа расчёта

Ответ: 29

Пример 2 Вычислить определители, пользуясь методом понижения порядка а) 2313-2-17-52, б)124-21-33-42

Решение:

а) К элементам второй строки прибавим соответствующие элементы первой строки, а из элементов третьей строки вычтем удвоенные элементы первой строки

2313-2-17-52=2315103-110

Разложим определитель по элементам третьего столбца, получим

2315103-110=1·A13+0·A23+0·A33=513-11=-55-3=-58

б) К элементам второй строки прибавим удвоенные элементы первой строки, а из элементов третьей строки вычтем утроенные элементы первой строки

124-21-33-42=1240550-10-10

Определитель содержит пропорциональные строки, значит по свойству величина его равна нулю

Ответ: а)-58; б) 0

Пример 3 Вычислить определитель 13432-2120112-3201 а) разложением по первому столбцу; б) используя метод приведения к треугольному виду;

Решение:

а) Вычислять определитель разложением по первому столбцу удобнее, так как среди элементов первого столбца есть нуль

13432-2120112-3201=1·A11+2A21-3A41=-212112201+2·(-1)2+1343112201-3·(-1)4+1343-212112==(-2+4-4-1)-2·(3+16-6-4)+3·(6-6+8-3-6+16)=-3-18+45=24

б) Из элементов второй строки вычтем удвоенные элементы первой строки; к элементам третьей строки прибавим утроенные элементы первой строки, получим

13432-2120112-3201=13430-8-7-401120111210

Поменяем местами вторую и третью строку, изменив при этом знак определителя (свойство)

13430-8-7-401120111210=-134301120-8-7-40111210

К элементам третьей строки прибавим элементы второй строки, умноженные на 8; из элементов четвертой строки вычтем элементы второй строки , умноженные на 11

-134301120-8-7-40111210=-1343011200112001-12

Вынесем знак минус из элементов четвёртой строки и выполним сложение третьей и четвёртой строки третьей строки

134301120011200-112=134301120011200024=24

Все элементы, лежащие по одну сторону от главной диагонали равны нулю, поэтому определитель равен произведению элементов его главной диагонали.

Ответ: 24

Пример 4 Найти определитель матрицы Sin 7xCos7x-Cos7xSin7x

Решение:

Δ=Sin7xCos7x-Cos7xSin7x=Sin27x+Cos27x=1

Ответ: 1

Пример 5 Решить неравенство 2x2-73x21<1

Решение: Раскроем определитель 2x2-7-6x-1<0; приведём подобные слагаемые 2x2-6x-8<0. Разложим квадратный трёхчлен на множители 2(x+1)·(x-4)<0.

Решая это неравенство методом интервалов, получим x∈(-1;4)

Ответ: x∈(-1;4)

Пример 6 Решить уравнение x-23x2-123-21=0

Решение: Раскроем определитель: 2-x-4x+18+3x-6+4x-8=0; приведём подобные слагаемые 2x+6=0. Решая уравнение, получаем x=-3

Ответ: x=-3

Задания для домашней работы:

1. Вычислить определитель 1-3-1-27232-4 а) по правилу треугольника; б) разложением по элементам первой строки;

Ответ: -1

2. Вычислить определить *3122-11-351* используя метод понижения порядка

Ответ: -9

3. Вычислить определитель 12-132-2120-312314-2 используя а) метод разложения по строке (столбцу); б) метод приведения к треугольному виду

Ответ: 85

4. Найти определитель матрицы 4-23+53-54+2

Ответ: 10

5. Решить неравенство 2x+2-111-25-3x>0

Ответ: x∈(-6;-4)

6 Доказать равенство Cosα1012Cosα1012Cosα=Cos3α

7 Решить уравнение x2133-5x7x2-1=-24

Ответ: x1=-1 x2=35

3. Невырожденные матрицы

а

Processing math: 13%

3.1. Понятие обратной матрицы

Рассмотрим квадратную матрицу n - ого порядка A=a11 a12 … a1na21 a22 … a2n…………an1an2…ann. Любой квадратной матрице может быть поставлено в соответствие число, являющееся ее определителем, в данном случае ΔA=a11 a12 …a1na21 a22 … a2n…………an1 an2…ann.

Определение. Квадратная матрица называется *невырожденной,* если ее определитель не равен нулю.

Определение. Матрица вида A*=A11 A21 … An1A12 A22 …An2…………A1nA2n…Ann, где Aij - алгебраические дополнения к элементам aij матрицы А, называется *союзной* для матрицы А.

Определение. Матрица A-1 называется *обратной* для матрицы А, если справедливы равенства: A·A-1=A-1·A=E. Матрицы A, A-1 и E являются квадратными матрицами одного порядка.

Теорема. Для того чтобы матрица имела обратную необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, то есть ΔA≠0.

Доказательство:

1. Необходимость: пусть для матрицы *A* существует обратная матрица A-1 , докажем, что ΔA≠0.

Используем метод "от противного", пусть ΔA=0, тогда ΔA·A-1=ΔA·ΔA-1=0, что невозможно по определению, так как ΔA·A-1=ΔE=1. Следовательно, ΔA≠0.

2. Достаточность: пусть матрица A=a11 a12 a13a21a22a23a31a32a33 и ее определитель ΔA≠0, докажем, что A-1 существует.

Составим матрицу *B*, заменяя в матрице *A*, каждый элемент aij его алгебраическим дополнением деленным на ΔA, получим:
B=A11ΔA A12ΔA A13ΔAA21ΔAA22ΔA A23ΔAA31ΔA A32ΔA A33ΔA, транспонируя матрицу B, получим
союзную B*=A11ΔA A21ΔA A31ΔA A12ΔA A22ΔA A32ΔA A13ΔA A23ΔA A33ΔA .

Найдем произведение матриц A·B*=a11 a12 a13a21a22a23a31a32a33 A11ΔA A21ΔA A31ΔA A12ΔA A22ΔA A32ΔA A13ΔA A23ΔA A33ΔA ==a11·A11+a12·A12+a13·A13ΔA a11·A21+a12·A22+a13·A23ΔA a11·A31+a12·A32+a13·A33ΔAa21·A11+a22·A12+a23·A13ΔA a21·A21+a22·A22+a23·A23ΔA =(легко видеть, что на главной диагонали находятся единицы, а остальные элементы равны нулю) = E.

Таким образом : A·B*=E ⇒ B*=A-1 ⇒ A-1 =1ΔA·A11 A21 A31 A12 A22 A32 A13 A23 A33 =1ΔA·A*.

Пример. Дана матрица A=1 234 . Найти A-1.

Решение: вычислим определитель матрицы ΔA=1 234=4-6=-2 ≠0 ⇒обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы: A11=-11+1·4=4 A12=-11+2·3=-3 A21=-12+1·2=-2 A22=-12+2·1=1, тогда союзная матрица A*=4 -2-31, и, следовательно, обратная матрица A-1=-12·4 -2-31=-2132-12=-211,5-0,5.

!!! *Заметим, что при нахождении **союзной** матрицы, для матрицы **второго** порядка, достаточно поменять местами элементы, стоящие на главной диагонали, а у элементов, находящихся на побочной диагонали, поменять знак.*

Рассмотрим некоторые матричные уравнения и их решение (матрица X - матрица неизвестных):

1. *A·X=B ⇒ X=A-1·B.*
2. *X·A=B ⇒ X=B·A-1.*
3. *A·X·C=B ⇒ X=A-1·B·C-1.*

Примеры нахождения обратной матрицы, для матрицы третьего порядка, смотрите в практическом занятии по данной теме (подраздел 3.3)

3.2. Ранг матриц и его вычисление

Пусть дана матрица A размера m×n: A=a11 a12 ... a1na21a22...a2n............am1 am1 ... am1.
Выделим в матрице k произвольных строк и k столбцов (k≤m; k≤n) , получим определитель k - ого порядка, который называется *минором* k - ого порядка матрицы A . Матрица A может иметь cmk·cnk миноров k - ого порядка, где cmk=m!k!·m-k!; cnk=n!k!·n-k! .

Вообще, матрица A может иметь миноры различных порядков: первого (просто ее элемент), второго, и так далее. Некоторые из них будут равны нулю, некоторые - нет.

Пример. Матрица *A=1-34211* имеет миноры первого порядка: 1, -3, 4, 2; миноры второго порядка: 1-321, 1421, -3411.

Определение. *Базисным минором* матрицы называется не равный нулю минор k - ого порядка при условии, что все миноры матрицы более высоких порядков ((к+1), (к+2), . . .) равны нулю.

!!! *Базисных миноров может быть несколько, но они обязательно не равны нулю, имеют один порядок.*

Определение. Наивысший порядок базисного минора матрицы Aназывается *рангом матрицы* и обозначается r, rA, rg A, rang A.

Например*:* Ранг матрицы A=123369 , rA=1, так как все миноры второго порядка равны нулю (см. свойство 6 определителей);

а у матрицы B=123-169, rB=2, так как в этой матрице есть минор второго порядка 12-16=6+2=8≠0.

Нахождение ранга

- **Метод окаймляющих миноров** (или **метод окаймления**) заключается в том, что при вычислении ранга переходят от миноров меньших порядков к минорам больших порядков, например*:* пусть дана матрица A=10-103-51-1-310-52. Один из ее миноров первого порядка M1=1≠0; окаймляющий его минор второго порядка, например, минор M2=103-5=-5≠0; теперь найдем окаймляющий минор третьего порядка, например, M3=10-13-51-310-5=25-30+15-10=0, выберем другое окаймление: M3=1003-5-1-3102=-10+10=0. Так как больше миноров третьего порядка составить нельзя, делаем вывод, что rA=2. При этом минор M2=103-5 - один из базисных миноров матрицы.
- **Метод элементарных преобразований.**

Так как метод окаймляющих миноров достаточно трудоемок, то при вычислении ранга удобно использовать метод *элементарных преобразований*, то есть преобразований не меняющих ранга матрицы. К ним относятся:

1. Транспонирование матрицы.
2. Перестановка строк (или столбцов).
3. Умножение всех элементов строки (или столбца) на число α≠0.
4. Сложение элементов строки (или столбца) с соответствующими элементами другой строки (или столбца), умноженными на одно и то же число α≠0.
5. Вычеркивание строки (или столбца) целиком состоящей из нулей, или из элементов пропорциональных (равных) элементам какой-либо строки (или столбца).

!!! При этом, *ранг* исходной матрицы *равен числу не нулевых строк* матрицы, приведенной к треугольному виду.
Примеры вычисления ранга методом элементарных преобразований смотрите в практическом занятии по данной теме (подраздел 3.3).

Processing math: 13%

3.3. Практическое занятие по теме"Обратная матрица. Ранг матриц."

Пример 1 Проверить является ли матрица A=1-34056-112 невырожденной
Решение: Найдём определитель матрицы
det A=1-34056-112=10+18+20-6=42
Определитель матрицы не равен нулю, следовательно матрица является невырожденной
Ответ: Матрица является невырожденной
Пример 2 Определить при каких значениях x существует матрица обратная данной A=3522-13x+211
Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдем определитель матрицы
detA=3522-13x+211=-3+4+15x+30+2x+4-9-10=17x+16
Если 17x+16≠0 ;   x≠-1617 то матрица является невырожденной, имеет обратную
Ответ: x≠-1617
Пример 3 Найти матрицу обратную данной 103537325
Решение: Найдем определитель матрицы
det A=103537325=15+30-27-14=4
так как определитель матрицы не равен нулю, то обратная матрица существует.
Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы
A11=(-1)1+13725=15-14=1   A12=(-1)1+25735=-(25-21)=-4A13=(-1)1+35332=10-9=1   A21=(-1)2+10325=-(0-6)=6A22=(-1)2+21335=5-9=-4   A23=(-1)2+31032=-(2-0)=-2A31=(-1)3+10337=0-9=-9   A32=(-1)3+21357=-(7-15)=8A33=(-1)3+31053=3-0=3
Составим союзную матрицу из алгебраических дополнений
A*=16-9-4-481-23
Получим обратную матрицу
A-1=1det A·A*=14·16-9-4-481-23=1464-94-1-1214-2434
Убедимся, что матрица A-1 является обратной к матрице A
1416-9-4-481-23·103537325=14·1+30-2718-183+42-45-4-20+24-12+16-12-28+401-10+9-6+63-14+15==14400040004=100010001
Ответ: обратная матрица 1464-94-1-1214-2434
Пример 4 Решить матричное уравнение X·A=B, если A=2-354, B=134-2
Решение: Решением этого матричного уравнения является матрица X2×2, которая определяется по формуле X=B·A-1. Найдем A-1
det A=2-354=8-(-15)=23A11=(-1)2·4=4   A12=(-1)3·5=-5A21=(-1)3·(-3)=3   A22=(-1)4·2=2A-1=123·43-52
Найдем матрицу X
X=134-2·123·43-52=123·4-153+616+1012-4=123·-119268=-11239232623823
Выполним проверку
123·-119268·2-354=123-22+4533+3652+40-78+32=123236992-46=134-2
Ответ: X=-11239232623823
Пример 5 Найти ранг матрицы A=-81-7-5-21-3-111-11
Решение: Матрица A имеет размерность 3×4, значит r(A)≤3. Вычислим все миноры третьего порядка
-81-7-21-311-1=8+14-3+7-2-24=0-81-5-21-1111=-8+10-1+5-8+2=01-7-51-3-11-11=-3+5+7-15-1+7=0-8-7-5-2-3-11-11=24-10+7-15+8-14=0
Все миноры третьего порядка равны нулю. Среди миноров второго порядка есть ненулевые, например, -81-21=-8-(-2)=-6≠0.
Следовательно r(A)=2.
Ответ: r(A)=2
Пример 6 Найти ранг матрицы A=15235-340126-83-7-12-315947 методом элементарных преобразований
Решение: Первую строку умножаем на (-3) и складываем со второй и четвёртой строкой; первую строку умножаем на 6 и складываем с третьей строкой
A=-15235-340126-83-7-12-315947~-152350-11-6-8-13022151118003-5-8
Вторую строку умножаем на 2 и складываем с третьей строкой,
-152350-11-6-8-13022151118003-5-8~-152350-11-6-8-13003-5-8003-5-8
По свойству получаем нулевую строку
~-152350-11-6-8-13003-5-8003-5-8~-152350-11-6-8-13003-5-800000~-152350-11-6-8-13003-5-8
Матрица приведена к ступенчатому виду. Число ненулевых строк матрицы, приведенной к ступенчатому виду, равно рангу матрицы A, т.е r(A)=3
Ответ: r(A)=3
Пример 7 Вычислить ранг матрицы A=13-4-4-123121-7-5 методом окаймляющих миноров
Решение: Имеем минор второго порядка M2=13-12=5≠0. Для M2 окаймляющими будут лишь два минора третьего порядка, а именно:
M3=13-4-12321-7=-14+4+18+16-3-21=0M3=13-4-12121-5=-10+4+6+16-1-15=0
Оба минора равны нулю, поэтому r(A)=2
Ответ: r(A)=2
Задания для домашней работы
1 Найти матрицу, обратную к матрице а) A=2-133-46122   б) A=121211131. Сделайте проверку
Ответ: а) A-1=2-0,8-0,60-0,10,3-10,50,5   б) A-1=-211-1015-1-3
2. Найти ранг матрицы а) A=315-112322-12-3   б) B=4-5211-1203-23-324-15-72-23
Ответ: r(A)=2; r(B)=2
3. Решить матричное уравнение а) 1325·X=-13012-1   б) X·3243=2-33024
Ответ: а)X= 8-9-3-341   б) X=18-139-6-108

Processing math: 13%

4. Системы линейных уравнений

a

Processing math: 13%

4.1. Исследование систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

Пусть дана неоднородная система m линейных уравнений с n неизвестными (переменными):

a11·x1 + a12·x2 +... +a1n·xn=b1a21·x1 + a22·x2 +... +a2n·xn=b2. . . . . .am1·x1 + am2·x2 +... +amn·xn=bm (1), тогда матрица A=a11 a12...a1na21a22...a2n...........am1am2...amn называется матрицей системы, а A¯=a11a12⋯a1nb1a21a22...a2nb2..............am1am2...amnbm называется расширенной матрицей системы.

Определение. Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Теорема Кронекера-Капелли. Для *совместности* системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы, то есть: rA=rA.

Теорема о ранге. Если rA=rA=r, то существует ровно r линейно-независимых решений системы уравнений (1).

Таким образом:

1. Если rA=rA=n (числу неизвестных), то система имеет *единственное* решение.
2. Если rA=rA=k<n, то система имеет *множество* решений. В этом случае n уравнений системы заменяют k базисными уравнениями, тогда k переменных будут базисными (основными), а остальные n-k - свободными (любые числа ∈R).
3. Если rA<rA , то система несовместна, то есть решений не имеет.

Примеры. Исследовать системы на совместность. В случае совместности найти решение.

1.

3x- y+ z= 62x+2y+3z=-1 2y- z=-53x+3y- z=-4 x- y- 3z= 0.

Для нахождения ранга применим к расширенной матрице системы метод элементарных преобразований, предварительно поменяем местами первую и пятую строки:

A¯=1 -1 -302 2 3 -102-1 -533-1-43-116~

1. Элементы первой строки умножим на (-2), сложим почленно с элементами второй строки, результат запишем во 2 строку;
2. Элементы первой строки умножим на (-3), сложим почленно с элементами четвертой строки, результат запишем в 4 строку;
3. Элементы первой строки умножим на (-3), сложим почленно с элементами пятой строки, результат запишем в 5 строку;

~1-1-30049-102-1-5068-402106~поменяем местами вторую и третью строки~1-1-3002-1-5049-1068-402106~

4. Элементы второй строки умножим на (-2), сложим почленно с элементами третьей строки, результат запишем в 3 строку;
5. Элементы второй строки умножим на (-3), сложим почленно с элементами четвертой строки, результат запишем в 4 строку;
6. Элементы второй строки умножим на (-1), сложим почленно с элементами пятой строки, результат запишем в 5 строку;

~1-1-3002-1-500119001111001111~вычеркнем пятую строку, а третью умножим на (-1) и сложим с четвертой почленно, результат запишем в 4 строку ~

~1-1-3002-1-5001190002⇒rA=3, rA¯=4 ⇒ система несовместна, решений нет.

2.3x1+4x2+2x3=82x1-4x2-3x3=-1x1+5x2+x3=0

Исследуем систему на совместность, применяя к расширенной матрице системы метод элементарных преобразований, предварительно поменяем местами первую и строки:

A=15102-4-3-13428~

1. Элементы первой строки умножим на (-2), сложим почленно с элементами второй строки, результат запишем во 2 строку;
2. Элементы первой строки умножим на (-3), сложим почленно с элементами третьей строки, результат запишем в 3 строку;

~15100-14-5-10-11-18~умножим 2 строку на 11, а 3 строку на (-14) и сложим их почленно, результат запишем в 3 строку ~

~15100-14-5-100-41-123~умножим 2 строку на (-1), а 3 строку разделим на (-41) ~1511014510013⇒rA=rA=3=числу неизвестных, следовательно система совместна и имеет единственное решение. Найдем его. Преобразованной матрице соответствует система уравнений:

x1+5x2+x3=0 14x2+5x3=1 x3=3⇒Из последнего уравнения x3=3, подставим это значение во второе уравнение системы, получим:

14x2+15=1⇒14x2=-14⇒x2=-1,

подставляя найденные значения x3=3 и x2=-1 в первое уравнение, найдем значение x1-5+3=0⇒x1=2.

Итак, решение системы: 2; -1; 3.

!!! Такой метод решения называется **методом Гаусса** (методом последовательного исключения неизвестных). При этом: приведение системы к треугольному виду называется **прямым ходом метода Гаусса**, а отыскание неизвестных - **обратным ходом метода Гаусса**.

Processing math: 13%

4.2. Решение однородных систем

Рассмотрим однородную систему трех линейных уравнений с тремя переменными: a11·x1+a12·x2+a13·x3=0a21·x1+a22·x2+a23·x3=0a31·x1+a32·x2+a33·x3=0(2). Обозначим определитель системы Δ=a11 a12 a13a21a22a23a31a32a33 . Тогда:

- Если Δ≠0, то система имеет *единственное нулевое* решение, то есть: x1=x2=x3=0.
- Если Δ=0, то система имеет бесчисленное множество решений. При этом, если существует минор второго порядка не равный нулю, то имеем две базисные (основные, зависимые) переменные и одну свободную (не основную, не зависимую) переменную, то есть два неизвестных системы выражаются через третье, принимающее любое значение. Если все миноры второго порядка равны нулю, то, следовательно, в системе будет одна базисная переменная и две - свободных, при этом одно неизвестное системы будет выражаться через два других, принимающих любые значения.

Примеры. Решить системы однородных уравнений:

1. 2x+ y - z = 0 3x+ y+ z = 0 x +y -2z = 0. Вычислим определитель системы Δ=2 1 -131111-2=-4+1-3+1+6-2=-1≠0 ⇒система имеет единственное нулевое решение, то есть x=y=z=0.

Ответ: 0; 0; 0

2. 2x + y - z=0-4x-2y+ 2z=010x+ 5y -5z=0. Вычислим определитель системы Δ=2 1 -1-4-2 2105-5=0 (по 5 свойству определителей) ⇒система имеет множество решений. Так как все миноры второго порядка равны нулю (по 5 свойству определителей), то будем иметь одну базисную переменную и две свободных. Воспользуемся первым уравнением системы, из которого выразим базисную переменную y через свободные переменные x и z:

2x+ y- z=0 ⇒ y=z-2x; положим x=t, z=p; t, p∈R, тогда *общее решение* системы будет иметь вид: x=t; y=p-2t; z=p, где t, p∈R.

Для нахождения частного решения достаточно положить, например: а) t=1; p=1 ⇒1; -1;1; б) t=12; p=0 ⇒ 12;-1; 0, и так далее.

Ответ: t; p-2t; p, t, p∈R.

Processing math: 13%

4.3. Решение неоднородных систем по формулам Крамера

Рассмотрим неоднородную систему трех линейных уравнений с тремя переменными: a11·x1+a12·x2+a13·x3=b1a21·x1+a22·x2+a23·x3=b2a31·x1+a32·x2+a33·x3=b3, (3). Обозначим определитель системы Δ=a11 a12 a13a21a22a23a31a32a33 .
Составим вспомогательные определители:

Δx1=b1a12a13b2a22a23b3a32a33 , Δx2=a11b1a13a21b2a23a31b3a33 и Δx3=a11a12b1a21a22b2a31a32b3.

Тогда:

- Если Δ≠0, то система имеет *единственное* решение, которое может быть найдено по **формулам** (методу) **Крамера** в виде: xi=ΔxiΔ, i=1, 3.
- Если Δ=0, но хотя бы один из Δxi≠0, то система несовместна, решений нет .
- Если Δ=0 и все Δxi=0, то система имеет бесчисленное множество решений. В этом случае говорят, что система не определена.

Примеры. Решить системы уравнений:
1. 3x1+4 x2 +2x3 = 8 2x1-4x2 -3x3 = -1 x1 +5x2 + x3 = 0. Вычислим определитель системы Δ=3 4 22-4-3151=-12-12+20+8-8+45=41≠0 ⇒система имеет единственное решение. Найдем его, используя метод Крамера. Составим и вычислим вспомогательные определители:
Δx1=8 4 2-1-4-3051=-32-10+4+120=82; Δx2=3 822-1-3101=-3-24+2-16=-41; Δx3=3 482-4-1150=-4+80+32+15=123.
Тогда: x1=Δx1Δ=8241=2; x2=Δx2Δ=-4141=-1; x3=Δx3Δ=12341=3.
Проверка: подставим найденные значения в систему уравнений, получим: 3·2+4·-1+2·3=82·2-4·-1-3·3=-12+5·-1+3=0⇒8=8-1=-10=0⇒0=00=00=0.
Ответ: 2; -1; 3
2. x+2y-4z=12x+y-5z=-1x-y-z=-2.
Вычислим определитель системы Δ=1 2 -421-51-1-1=-1-10+8+4+4-5=0. Составим и вычислим вспомогательные определители:
Δx=12-4-11-5-2 -1-1=-1+20-4-8-2-5=0; Δy=11-42-1-51 -2-1=1-5+16-4+2-10=0; Δz= 12121-11 -1-2=-2-2-2-1+8-1=0.

Итак, Δ=Δx=Δy=Δz=0. Следовательно система имеет множество решений. Найдем общее решение системы: так как минор второго порядка Δ=211-1=-2-1=-3≠0, то два неизвестных системы, например x и y, будем считать *базисными*, а неизвестную z - *свободной*. Выразим x и y через z. С этой целью, заменим систему двумя базисными уравнениями: 2x+y-5z=-1 x- y- z=-2, просуммируем уравнения почленно, исключая y, получим: 3x-6z=-3 ⇒3x=6z-3 ⇒x=2z-1. Теперь подставим найденное значение x во второе уравнение и выразим y: 2z-1-y-z=-2 ⇒z-y=-1 ⇒y=z+1. Пусть z=k, k∈R. Тогда x=2k-1; y=k+1; z=k, k∈R.

Ответ: 2k-1; k+1; k, k∈R.

Processing math: 13%

4.4. Решение систем матричным методом

Пусть дана неоднородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными: a11·x1+a12·x2+a13·x3=b1a21·x1+a22·x2+a23·x3=b2a31·x1+a32·x2+a33·x3=b3 3. Используем матричную запись системы уравнений. С этой целью обозначим матрицу коэффициентов при неизвестных (матрицу системы) за A=a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33 , вектор-столбец неизвестных за X=x1x2x3 , вектор-столбец свободных членов за B=b1b2b3. Тогда уравнение A·X=B 4 является матричной записью системы 3. Если матрица A не является вырожденной, то для нее существует обратная матрица A-1, при этом справедливы равенства: A-1·A·X=A-1·B ⇒ X=A-1·B, так как A-1·A=E. Итак:

X=A-1·B 5 - решение уравнения 4 в матричном виде.

Пример. Решить систему уравнений 2x + y =5 x +3z=16 5y-z=10матричным методом.

Решение. Введем обозначения: A=21010305-1, X=xyz, B=51610. Вычислим определитель матрицы системы: ΔA=21010305-1=1-30=-29≠0⇒обратная матрица существует. Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы системы:

A11=-11+1·035-1=-15; A12=-11+2·130-1=-1·-1=1; A13=-11+3·1005=5;

A21=-12+1·105-1=-1·-1=1; A22=-12+2·200-1=-2; A23=-12+3·2105=-1·10=-10;

A31=-13+1·1003=3; A32=-13+2·2013=-1·6=-6; A33=-13+3·2110=-1;

Составим союзную матрицу : A*=-15131-2-65-10-1 , тогда обратная матрица A-1=1-29·-15131-2-65-10-1 и, следовательно:

X=xyz=-129·-15131-2-65-10-1·51610=-129·-15·5+1·16+3·101·5-2·16-6·105·5-10·16-1·10=-129·-29-87-145=135. Итак, x=1; y=3; z=5.

Ответ: 1; 3; 5

Processing math: 13%

4.5. Практическое занятие по теме "Системы линейных уравнений"

Пример 1 Исследовать систему уравнений на совместность. Если система совместна, то найти её корни методом Гаусса

а) 2x1-3x2+x3=23x1+x2-3x3=15x1-2x2-2x3=4 б)x1-4x2+2x3+3x4=52x1-x2+2x3+x4=14x1-9x2+6x3+7x4=11

Решение:

а) Для данной системы уравнений составим матрицы

A=2-3131-35-2-2 ;   A~=2-31│231-3 │15-2-2 │4- расширенная матрица

Найдём ранг расширенной матрицы, для этого:

1 . первую строку разделим на 2;

2. первую строку умножаем на (-3) и складываем со второй строкой, результат записываем во вторую строку;

3. первую строку умножаем на (-5) и складываем с третьей строкой, результат записываем в третью строку;

2-31│231-3│15-2-2│4~1-3212│10112-92I-20112-92│1~1-3212│10112-92│-2000│3

Таким образом r(A)=2; r(A~)=3 система не совместна, решений не имеет

б) Составим расширенную матрицу и найдем её ранг. Для этого первую строку умножаем на (-2) и складываем со второй строкой, результат записываем во вторую строку;

первую строку умножаем на (-4) и складываем с третьей строкой, результат записываем в третью строку;

1-423 │52-121│14-967│11~1-423│507-2-5│-907-2-5│-9~1-423│507-2-5│-90000│0

Таким образом r(A)=2; r(A~)=2 система совместна и имеет множество решений решений (ранг совместной системы меньше числа неизвестных). Для отыскания решений матрицу запишем в виде системы

x1-4x2+2x3+3x4=5   7x2-2x3-5x4=-9

Минор 1-407=7≠0, тогда его можно принять за базисный. Следовательно базисными неизвестными являются x1; x2, а свободными неизвестными будут x3; x4Выразим базисные неизвестные через свободные

x1-4x2+2x3+3x4=57x2=-9+2x3+5x4x1-4x2+2x3+3x4=5x2=-97+27x3+57x4x1=-17-67x3-17x4x2=-97+27x3+57x4

Придавая свободным неизвестным произвольные значения x3=t; x4=c, получим соответствующие значения базисных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

x1=-17-67t-17c;   x2=-97+27t+57c; t∈R; c∈R

Ответ: а) нет решений: б)x1=-17-67t-17c;   x2=-97+27t+57c; x3=t; x4=c t∈R; c∈R

Пример 2 Доказать, что система совместна и решить её методом а) Гаусса б) Крамера в) обратной матрицы 2x1-x2+2x3=-23x1-5x2+4x3=-11x1+2x2+x3=4

Решение:

Для исследования системы уравнений найдём её ранг

1. В расширенной матрице поменяли местами первую строку и третью

2 Первую строку умножили на (-3) и сложили со второй строкой, результат записали во вторую строку; Первую строку умножили на (-2) и сложили с третьей строкой, результат записали в третью строку

2-12│-23-54│-11121│4~121│43-54│-112-12│-2~121│40-111│-230-50│-10

Система совместна и имеет единственное решение. Для нахождения корней уравнения матрицу запишем в виде системы

x1+2x2+x3=4 -11x2+x3=-23   -5x2=-10

Из третьего уравнения определим x2=2. Подставляя найденное значение во второе и третье уравнение системы найдём x3=-1; x1=1

Для решения системы уравнения методом Крамера составим матрицы

A=2-123-54121; B=-2-114

Найдем определитель матрицы A

Δ=2-123-54121=-10+12-4+10-16+3=-5≠0

Определитель основной матрицы не равен нулю, значит система уравнений совместна и имеет решение. Последовательно заменяя в

Processing math: 13%

овый, второй, третий столбец столбцом свободных членов, получим

Δ1=-2-12-11-54421=10-44-16+40+16-11=-5Δ2=2-223-114141=-22-8+24+22-32+6=-10Δ3=2-1-23-5-11124=-40-12+11-10+44+12=5x1=Δ1Δ=-5-5=1 x2=Δ2Δ=-10-5=2x3=Δ3Δ=5-5=-1

Для обратной матрицы найдём алгебраические дополнения основной матрицы

A11=(-1)1+1-5421=-5-8=-13 A12=(-1)1+23411=-(3-4)=1A13=(-1)1+33-512=6+5=11 A21=(-1)2+1-1221=-(-1-4)=5A22=(-1)2+22211=2-2=0 A23=(-1)2+32-112=-(4+1)=-5A31=(-1)3+1-12-54=-4+10=6 A32=(-1)3+22234=-(8-6)=-2A33=(-1)3+32-13-5=-10+3=-7

Составим союзную матрицу A*=-135610-211-5-7

Составим обратную матрицу A-1=1Δ·A*=-15·-135610-211-5-7

По формуле X=A-1·B найдем корни

X=-15·-135610-211-5-7·-2-114=-15·26-55+24-2-8-22+55-28=12-1

Ответ: (1;2;-1)

Пример 3 Решить систему уравнений а) x1-x2+x3=02x1+x2+x3=0x1+2x2-3x3=0 б) x1-x2+2x3+5x4=03x1-2x2+x3-x4=02x1-x2-x3-6x4=0

Решение:

а) Найдем определитель системы

Δ=1-1121112-3=-3+4-1-1-2+6=3≠0

Система совместна и имеет единственное нулевое решение x1=x2=x3=0

б) Приведем матрицу системы к ступенчатому виду

1-1253-21-12-1-1-6~1-12501-5-1601-5-16~1-12501-5-160000

Перейдем от матрицы к системе уравнений

x1-x2+2x3+5x4=0 x2-5x3-16x4=0

Минор 1-101=1≠0, его можно принять за базисный. Тогда базисными неизвестными являются x1; x2, а свободными неизвестными будут x3; x4. Задавая свободным переменным произвольные значения x3=t; x4=c, получим соответствующие значения базисных неизвестных.x1=5t+16c; x2=3t+11c; t∈R; c∈R

Ответ: а)x1=x2=x3=0 б) x1=5t+16c; x2=3t+11c; x3=t; x4=c; t∈R; c∈R

Задания для домашней работы:

1. Доказать, что система совместна и решить её методом а) Гаусса б) Крамера в) обратной матрицы а) x1+2x2+x3=12x1+x2+x3=-1x1+3x2+x3=2б) 3x1+7x2+4x3=24x1+5x2+x3=102x1+4x2+3x3=16

Ответ: а) (-1;1;0) б) (3;1;2)

2. Решить систему уравнений а) 9x1-3x2+5x3+6x4=46x1-2x2+3x3+4x=53x1-x2+3x3+14x4=-8 б) x1+2x2+4x3-3x4=03x1+5x2+6x3-4x4=04x1+5x2-2x3+3x4=03x1+8x2+24x3-19x4=0

Ответ: x1=133+13c; x2=c; x3=-7; x4=0; c∈R

Processing math: 13%

5. Индивидуальные задания

Вариант 1.

1. Выполнить действия и найти матрицу 5CT+3E-A·B, если: A=02-1-2-12; B=433213; C=3-210.
2. Найти ранг матрицы A=1-120101-12110-1011-100220011, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=2102-10133210-1213 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 3x+2y-z=02x-y+3z=0x+y+-z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 2x+3y+5z=103x+7y+4z=3x+2y+2z=3 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 2.

1. Выполнить действия и найти матрицу A·B-2C, если A=2-10-22130-1; B=24-1371; C=-332154.
2. Найти ранг матрицы A=111622-11341-12523-6566 , используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=103-1-21-5222611-321 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 2x-2y+3z=0x+y-z=03x-y+3z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x+y+z=22x-y-6z=-13x-2y =8 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 3.

1. Выполнить действия и найти матрицу **2E-A·B** , если A=-12-3212301; B=2-21-20513-1.
2. Найти ранг матрицы A=11-2-12-131135424334-262, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=140-225133-1-122025 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 3x-y+2z=02x-y-z=04x-2y-2z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 2x-y+z=2x+3y-2z=23x+5y-z=7 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 4.

1. Выполнить действия и найти матрицу 3C-2B·A , если A=31-122-1; B=4-53-5-22; C=-2-11010-132.
2. Найти ранг матрицы A=1226-11102-3-123-1184-6-24 , используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=210-112-3230525-121 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 2x-y+3z=0x+2y-5z=0x+y-z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x-2y+3z=32x-y-z=23x+2y-3z=5 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 5.

1. Выполнить действия и найти матрицу **A·BT** , если: A=433213; B=02-13-2-120.
2. Найти ранг матрицы A=1-21-3-231-2542-23-1-63044-8, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=203-14125-21436302 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 5x+y-z=0x-y+z=0x+y-z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 3x-y-2z=11-2x+y+z=-6x-2y-3z=5 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 6.

1. Выполнить действия и найти матрицу A·B-2C·E, если A=-3295-74; B=-24-34-11; C=4-235.
2. Найти ранг матрицы B=04101481871018401717133 , используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=1234302105-22-1142 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений x+y+z=05x+4y+3z=010x+5y+z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 2x1+x2+x3=23x1-x2+2x3=-1-2x1-x2+2x3=4 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 7.

1. Выполнить действия и найти матрицу **2E-A·B** , если A=-12-3212301; B=2-21-20513-1.
2. Найти ранг матрицы B=21112-3104-10114565-122-15-63, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=10512-112012-2-1143 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 3x-y+2z=02x+3y-5z=0x+y+z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x+y+2z=-12x-y+2z=-44x+y+4z=-2 **тремя** способами:

   Processing math: 13%

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 8.

1. Выполнить действия и найти матрицу **3С-2А·ВТ** , если А=5132; В=-111327; С=-1305-22 .
2. Найти ранг матрицы А=1-11231-122324323662-24 , используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=201-114322-32152-10 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 3x+2y-z=0x+2y+9z=0x+y+2z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x-2y+3z=62x+3y-4z=203x-2y-5z=6 **тремя** способами:

а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 9.

1. Выполнить действия и найти матрицу 5СТ+4А-1-2Е, если: А=02-2-1; С=-112-1 .
2. Найти ранг матрицы А=2-313113-1132-33030, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=123-120513-242032-2 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 2x+y+z=04x+3y+z=0x+y+3z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x+2y+z=32x+y-z=33x+3y-2z=2 **тремя** способами:

а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 10.

1. Выполнить действия и найти матрицу 3Е-А·В, если А=-1132-2-135-2; В=2-10-22130-1.
2. Найти ранг матрицы А=10014010250013612314324563277 , используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=21051-3243257061-1 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 4x+y+z=0x+3y+z=0x+y+2z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x-3y+5z=93x+y-2z=02x+2y+3z=3 **тремя** способами:

а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 11.

1. Выполнить действия и найти матрицу **3В·А-4С** , если А=31-1042-215; В=-131274; С=-10-10-10.
2. Найти ранг матрицы А=1-1112-1-1312333126, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=2530062173-123201 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 5x+4y+3z=0x+y+z=010x+5y+z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 5x-6y+4z=34x-5y+2z=13x-3y+2z=2 **тремя** способами:

а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 12.

1. Выполнить действия и найти матрицу 3СТ+2В·А , если А=31-122-1; В=4-53-5-22; С=-2-11010-132.
2. Найти ранг матрицы А=12262-3-123-1184-6-24 , используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=120-1-12-32303-141-21 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 3x-y+2z=02x+3y-5z=0x+y-z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 2x-y+5z=45x+2y+13z=23x-y+5z=0 **тремя** способами:

а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 13.

1. Выполнить действия и найти матрицу **2Е-А·ВТ** , если: А=233-241; В=20-1-313.
2. Найти ранг матрицы А=2111131111411111512341111, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=2-13-1102201112303 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 3x-y+2z=02x-y-z=04x-2y-2z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 5x+2y+3z=-22x-2y+5z=03x+4y+2z=-10 **тремя** способами:

а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 14.

1. Выполнить действия и найти матрицу А·ВТ+2С, если А=-2186-63; В=2-43-41-1; С=-4224.
2. Найти ранг матрицы В=121331-111312122-1-13 , используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=12-10201-123-126311 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений x+3y+z=04x+y+z=0x+y+2z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 2x1+x2+5x3=244x1+3x2+3x3=20x1+6x2+x3=6 **тремя** способами:

а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Processing math: 13%

1. Выполнить действия и найти матрицу **3E+B·A** , если A=-12-3212301; B=2-21-20513-1.
2. Найти ранг матрицы B=2-35714-62326-971032-3-11-151, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=1-1111233312122-1-13 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 2x+5y+z=0x+3y+2z=0x+2y-z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x+y+3z=32x-y-z=0x+5y+3z=11 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 16.

1. Выполнить действия и найти матрицу **2C+A·BT** , если A=7-234; B=-25-31; C=-13-22 .
2. Найти ранг матрицы A=1-1-1-61125242612136356 , используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=2102301-10213321-1 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 3x+2y+z=02x-y+3z=0x+y-z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 3x+5y-z=72x-y+z=2x+3y-2z=2 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 17.

1. Выполнить действия и найти матрицу 3E-2C+A·BT, если: A=2-34-271; B=32-231-2; C=-1210 .
2. Найти ранг матрицы A=1-123421-3-1-621-11-260284, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=-10122-321250312-15 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений -2x+y-3z=02x+y-5z=0x+y-z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x-2y-3z=5-2x+y+z=-63x-y-2z=11 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 18.

1. Выполнить действия и найти матрицу 3A·B-5E, если A=0-31-22-1354; B=14-20151-50
2. Найти ранг матрицы A=1-21-3-21353-22-11-154403-4 , используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=0-123154213-243260 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений x-y+z=05x+y-z=0x+y-z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 2x-y-z=2x-2y+3z=33x+2y-3z=5 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 19.

1. Выполнить действия и найти матрицу **2C-3A·B** , если A=-21213-1301; B=1-2003523-1; C-1020-12-170.
2. Найти ранг матрицы A=14100781841718401037131, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=-1142302105-221234 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 5x+4y+3z=0x+y+z=010x+5y+z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений -x+3y+2z=-1x+2y+z=2-x-2y+2z=4 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 20.

1. Выполнить действия и найти матрицу 3B·A+2CT , если A=-21-132-1; B=4-23-5-52; C=-201-11-1032.
2. Найти ранг матрицы A=104-12-15-6211112114565 , используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=2-112-11531051012-2 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 2x+3y-5z=03x-y+2z=0x+y+z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x+y+2z=-1-x+2y+2z=-4x+4y+4z=-2 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 21.

1. Выполнить действия и найти матрицу **2A·B-5E** , если: A=-322214; B=-130-303
2. Найти ранг матрицы A=13236-113221-123-222464, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=-101224311-32202-15 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 2x+y+z=09x+2y+z=0-x+2y+3z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 3x-2y-5z=6x-2y+3z=62x+3y-4z=20 **тремя** способами:

   а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 22.

1. Выполнить действия и найти матрицу (A·B)T+2CT, если A=-749-5-32; B=2-4341-1; C=5-3-4-2.
2. Найти ранг матрицы B=2-313-1113-12132-3430303 , используя метод элементарных преобразований.
3. Processing math: 13% определитель четвертого порядка Δ=1502-223024-23-1321 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений x+y-3z=02x+y+z=04x+3y-5z=0 .

5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x1+2x2+x3=33x1+3x2-2x3=22x1+x2-x3=3 **тремя** способами:

а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 23.

1. Выполнить действия и найти матрицу **E-4(A·B)T** , если A=13-23-1320-1; B=40-1-213-121.
2. Найти ранг матрицы B=610421917141268235301520576341, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=1324-22151-43-221-2-3 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений -5x+y+z=0x+y-7z=0x-6y+z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x+3y+2z=02x+3y+3z=23x-y-2z=2 **тремя** способами:

а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 24.

1. Выполнить действия и найти матрицу **2CT+3A·B** , если A=4-5-3-2; B=-22143-2; C=-243-5-14 .
2. Найти ранг матрицы A=4100152010631003214321 , используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=21301-3260251546-1 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 4x+y+z=0x+y+2z=0x+3y+z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений 2x+2y+3z=3x-3y+5z=93x+y-2z=0 **тремя** способами:

а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.

Вариант 25.

1. Выполнить действия и найти матрицу 3CT-2A-1-2E, если: A=5-3-42; C=-7-3511 .
2. Найти ранг матрицы A=113232-11-15312-17311237, используя метод элементарных преобразований.
3. Вычислить определитель четвертого порядка Δ=2033-11-1112260-131 , получив нули в какой-либо строке (или столбце).
4. Решить систему уравнений 4x+y+z=0x+3y+z=0x+y+2z=0 .
5. Решить линейную неоднородную систему уравнений x+5y+3z=11x+y+3z=32x-y-z=0 **тремя** способами:

а) методом Крамера; **б)** методом Гаусса; **в)** матричным методом.