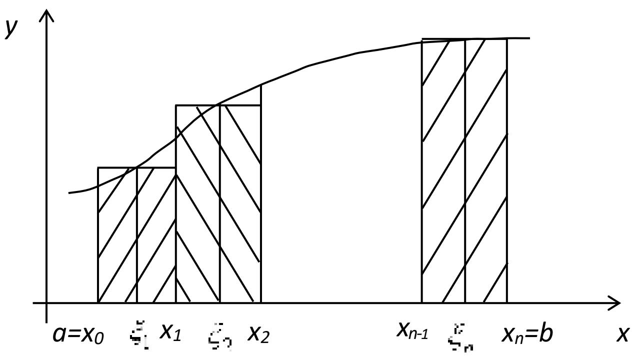
# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## Лекция 1

### 1. Определение. Свойства

К понятию определенного интеграла приводит задача вычисления площади под графиком функции.

Пусть $y = f(x) \geq 0$ – непрерывная функция задана на замкнутом интервале $[a,b]$. Возьмем произвольное разбиение на $n$ отрезков отрезка $[a,b]$ точками $x_i$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Для каждого $[x_{i-1}, x_i]$ берем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.




$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ – площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников с основаниями $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и высотами $f(\xi_i)$.

Обозначив $\max_i (x_i - x_{i-1}) = \lambda$, считаем, что если $\lambda \to 0$, $n \to \infty$, то $S_n \to S$ – площади под графиком функции.

$$S = \lim_{\lambda = \max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Обычно $\lambda$ называют диаметром разбиения.

***Определение.*** Пусть $f(x)$ задана на $[a,b]$. Разделим $[a,b]$ произвольными точками $x_i$ на $n$ отрезков: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Выберем произвольную точку $\xi_i$ на $[x_{i-1}, x_i]$, составим сумму, которую называют интегральной:

$$\sigma_n = \sigma_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \text{ , где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1} .$$

Предел (если он существует), к которому стремится интегральная сумма $\sigma_n$ при $\lambda = \max_i \Delta x_i \to 0$, называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на $[a,b]$ и обозначается следующим образом:

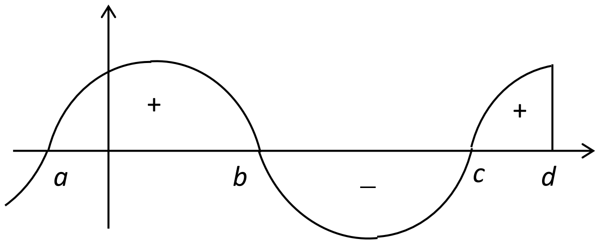
$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx . \qquad (2.1)$$

***Утверждение.*** Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\lim_{\lambda \to 0} \sigma_n$ существует и не зависит от способа разбиения $[a,b]$ и выбора точек $\xi_i$.

Таким образом первым применил предельный переход для вычисления площади под графиком функции $y = x^2$ еще Архимед.

Заметим, если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, так как это – площадь под графиком функции.

В самой записи $\int\limits_a^b f(x)dx$ $x$ называют глухой переменной, которая может быть заменена любой другой. Очевидно, что




$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0;$$

$$\int\limits_b^c f(x)dx < 0;$$

$$\int\limits_c^d f(x)dx > 0.$$

Тогда для $f(x) = \lambda$ $\int\limits_a^b \lambda dx = \lambda(b-a)$ – площадь прямоугольника при $\lambda > 0$, отрицательное значение площади при $\lambda < 0$.

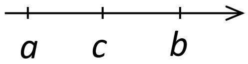
***Утверждение.*** $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$ по определению, $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ по определению.

### *Свойства определенного интеграла*

**1.** Линейность

$$\int\limits_a^b \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right)dx = \lambda\int\limits_a^b f(x)dx + \mu\int\limits_a^b g(x)dx.$$

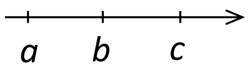
**2.** Если отрезок интегрирования $[a,b]$ разбит на две части точкой $c$



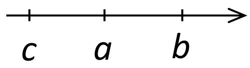

, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Если точка $c$ вне $[a,b]$




или




и при этом $f(x)$ непрерывна на $[a,c]$ или $[c,b]$ соответственно, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

**3.** Если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

**4.** Если на $[a,b]$ $f(x) \geq \varphi(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

**5.** ***Теорема о среднем.*** Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то найдется, по крайней мере, одна точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

***Доказательство:***

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она принимает на $[a,b]$ свои наибольшее $M$ и наименьшее $m$ значения: $m \leq f(x) \leq M$, по свойству 4:

$$\int\limits_a^b mdx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b Mdx \Rightarrow m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Разделим последние неравенства на $(b-a)$:

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M.$$

Пусть $\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu$, значит $m \leq \mu \leq M$, но $f(x)$ непрерывна, поэтому на $[a,b]$ принимает все значения, т. е. существует точка $\xi$, такая, что $f(\xi) = \mu$, значит $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. Что и требовалось доказать.

# Лекция 2

## 2. Определенный интеграл с переменной верхней границей

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a,b]$. $x \in [a,b]$, тогда $\int\limits_a^x f(x)dx = I(x)$.

Удобнее обозначить $\int\limits_a^x f(t)dt = I(x)$.

$$I(x+\Delta x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt; \quad \Delta I = I(x+\Delta x) - I(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int\limits_x^a f(t)dt = \{\text{по теореме о среднем}\} = f(c)\cdot\Delta x, \text{ где } c \in [x, x+\Delta x].$$

$$I'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\left\{\begin{matrix}\Delta x\to 0\\ c\to x\end{matrix}\right\}=f(x).$$

Получили, что $I'(x)=f(x)$, значит $I(x)$ – одна из первообразных $f(x)$, тогда $I(x)=F(x)+c$.

Но $\int\limits_a^a f(x)dx=0$, тогда

$I(a)=F(a)+c=0\Rightarrow c=-F(a)$

$I(b)=F(b)+c=F(b)-F(a)$, получили

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b. \qquad (2)$$

Полученная формула Ньютона-Лейбница стыкует понятие определенного и неопределенного интегралов и считается центральной формулой анализа.

***Следствия:*** 1) $\left(\int\limits_a^y f(x)dx\right)_y'=f(y)$;

2) $\left(\int\limits_a^{\varphi(y)} f(x)dx\right)_y'=f(\varphi(y))\cdot\varphi_y'$;

3) $\left(\int\limits_y^b f(x)dx\right)_y'=-f(y)$;

4) $\left(\int\limits_{\psi(y)}^b f(x)dx\right)_y'=-f(\psi(y))\cdot\psi_y'$;

5) $\left(\int\limits_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x)dx\right)_y'=f(\varphi(y))\cdot\varphi_y'-f(\psi(y))\cdot\psi_y'$.

## 3. Замена переменной в определенном интеграле

Нужно вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$, $f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$. $x=\varphi(t)$ – непрерывна на $[\alpha,\beta]$, при этом $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ и существует $t=\varphi^{-1}(x)$; тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(x(t))\cdot x'(t)dt$.

***Пример 1.***

$$\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{e^x-1}=t, & dx=\dfrac{2tdt}{t^2+1}. \\ e^x=t^2+1, & \\ x=\ln(t^2+1), & \end{array}\right\} = \int\limits_{\sqrt{e^{\ln 2}-1}}^{\sqrt{e^{2\ln 2}-1}} \frac{2tdt}{(t^2+1)\cdot t} =$$

$$=2\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\, t\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{3} - 2\,\mathrm{arctg}\,1 = 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

***Пример 2.***

$$\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx = \left\{\begin{array}{ll} u=x, & du=dx, \\ \cos x dx = d\sin x, & \\ v=\sin x. & \end{array}\right\} = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\sin x dx =$$

$$=\pi\sin\pi - 0\cdot\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -1-1=-2.$$

# Лекция 3

## 4. Несобственные интегралы

### *4.1. Интегралы с бесконечными границами.*

Понятие определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ дается в предположении, что отрезок интегрирования $[a,b]$ конечен, а функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Возникает необходимость рассмотреть случай, когда $f(x)$ задана на $[a,\infty)$ или (и) имеет разрыв второго рода.

Итак, пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,\infty)$. Для любого $[a,b]$ интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует, тогда $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Данный предел называется несобственным интегралом, а если он является конечным числом, то говорят, что интеграл сходится. Если предела не существует, интеграл расходится.

Аналогично:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx,$$ где с – любая точка $-\infty < c < \infty$.

Последний интеграл сходится, если сходятся оба несобственных интеграла справа.

***Пример 1.*** $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to\infty}\ln b-\ln 1=\infty$, данный интеграл расходится.

***Пример 2.*** $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}x^{-\alpha}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b=$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1\\ \infty, & \alpha<1\end{cases};$$

тогда получаем $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}\begin{cases}\text{сходится, если } \alpha>1,\\ \text{расходится, если } \alpha\le 1.\end{cases}$

### *4.2. Интеграл от разрывных функций.*

Пусть теперь $y=f(x)$ – непрерывна на $[a,b)$, а в точке $b$ имеет разрыв второго рода. Для любого $\varepsilon>0$, такого, что $a<b-\varepsilon$, интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ определен, а $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)dx=\int\limits_a^{b}f(x)dx$ называется несобственным интегралом от разрывной функции, он сходится, если предел существует.

Аналогично, если $f(x)$ имеет разрыв в точке $a$, то $\int\limits_a^{b}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a-\varepsilon}^{b}f(x)dx$.

Если функция имеет разрыв второго рода в некоторой внутренней точке $x=c$ отрезка $[a,b]$, то $\int\limits_a^{b}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx$.

Для сходимости левого интеграла оба интеграла справа должны сходиться.

***Пример.*** $\int\limits_a^{b}\frac{dx}{(b-x)^p}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}(b-x)^{-p}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\frac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{b-\varepsilon}=$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}-\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-p}}{p-1}, & \text{если } p<1\\ \infty, & \text{если } p>1\end{cases};$$

так как $\int\limits_a^{b}\frac{dx}{b-x}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(-\ln|b-x|\right)\Big|_a^{b-\varepsilon}=\infty$ расходится, то

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \quad \begin{cases} \text{сходится, если } p<1, \\ \text{расходится, если } p \ge 1. \end{cases}$$

***Теорема 1.*** Пусть на $[a,\infty)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и $0 \le \varphi(x) \le f(x)$, тогда:

если $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^\infty \varphi(x)dx$;

если $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^\infty f(x)dx$.

***Теорема 2.*** Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a,b)$ и $0 \le \varphi(x) \le f(x)$, тогда:

если $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то и $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходится,

если $\int_a^b \varphi(x)dx$ расходится, то $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

***Пример.*** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ исследовать на сходимость.

На $[0;1)$ выполняется $\frac{1}{\left(1-x^4\right)^{1/3}} \le \frac{1}{\left(1-x\right)^{1/3}}$, а $\int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x\right)^{1/3}}$ сходится, так как $p = 1/3$,

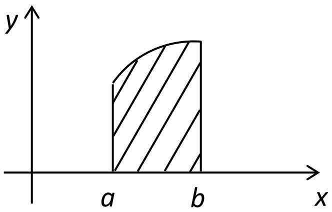
значит и $\int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x^4\right)^{1/3}}$ сходится по теореме 2.

# Лекция 4

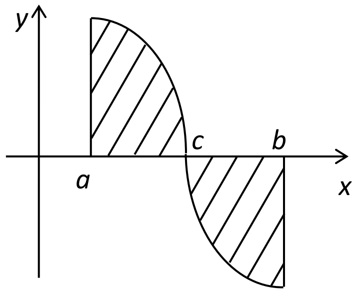
# 5. Приложения определенного интеграла

## 5.1. Вычисление площадей плоских фигур.

а) $f(x) \ge 0$




$$S = \int_a^b f(x)dx;$$

б) 


$$S=\int_a^b |f(x)|dx=\int_a^c f(x)dx-\int_c^b f(x)dx;$$

в) $f(x)\ge g(x)$ на $[a,b]$, площадь между ними $S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx$;

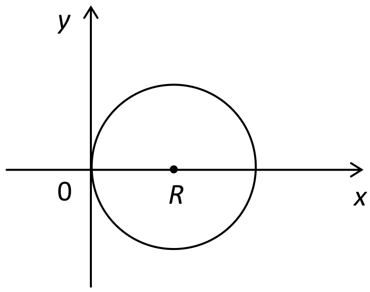
г) $r=f(\varphi)$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$, то $S=\dfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$;

д) $\begin{cases} x=x(t), \qquad x(\alpha)=a, \qquad x(\beta)=b, \\ y=y(t), \end{cases}$

$\alpha\le t\le\beta$,

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)dt.$$

***Пример 1.*** $r=2R\cos\varphi$




$$S=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4R^2\cos^2\varphi\,d\varphi=2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi=R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=R^2\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=R^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)+R^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)=\pi R^2.$$

***Пример 2.*** Найти площадь эллипса $\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=b\sin\varphi. \end{cases}$

Ввиду симметрии: $S=4\int_0^a ydx=4\int_{\pi/2}^0 b\sin\varphi(-a\sin\varphi)d\varphi=4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi=$

$$= 2ab\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = 2ab\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

**5.2. Вычисление объемов.**

а) Если тело спроектировано на ось *ox* на $[a,b]$, *S(x)* – площадь сечения, то $V = \int_a^b S(x)dx$.

б) Если тело образовано вращением вокруг оси *ox* криволинейной трапеции $a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$, то $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Если эту трапецию вращать вокруг оси *oy*, то $V_y = 2\pi\int_a^b x\cdot f(x)dx$.

в) Если тело образовано вращением вокруг оси *oy* криволинейной трапеции $c \le y \le d,\ 0 \le x \le \varphi(y)$, то $V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$.

Если эту трапецию вращать вокруг оси *ox*, то $V_x = 2\pi\int_c^d y\cdot\varphi(y)dy$.

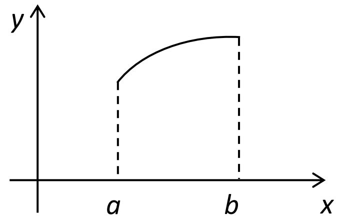
***Пример.*** Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Для каждого *x* в сечении получаем эллипс $\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$, площадь сечения $S(x)=\pi\, b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi\, bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, значит

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx = 2\int_0^a \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = 2\pi bc\left(a-\frac{a}{3}\right)=\frac{4\pi abc}{3}.$$

**5.3. Вычисление длины дуги кривой.**

а) $y = f(x)$,




$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx;$$

б) $\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t), \end{cases}$ $\quad \alpha \le t \le \beta, \quad L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt$ ;

в) $r = f(\varphi), \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \quad L = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(f_\varphi'\right)^2 + f^2}\,d\varphi.$

***Пример.*** Найти длину первой арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

В данном случае $0 \le t \le 2\pi, \quad x_t' = a(1 - \cos t), \quad y_t' = a \sin t$ ;

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\; dt = a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\; dt =$$

$$= a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\; dt = a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}}\; dt = 2a \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \cdot 2\left(-\cos \frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 4a\left(-\cos \pi + \cos 0\right) = 8a.$$