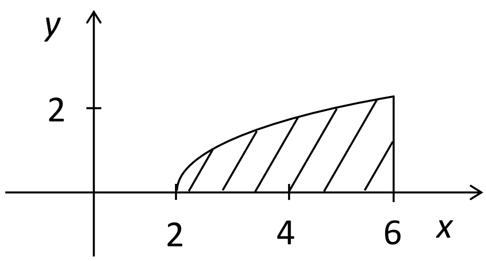
«Определённый интеграл»
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Тема: Вычисление определенного интеграла по формуле Лейбница-Ньютона.
Интегрирование по частям в определенном интеграле.
Замена переменной в определенном интеграле.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл и построить фигуру, площадь которой выражается с помощью этого интеграла:

$$\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx = \int_2^6 (x-2)^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_2^6 = \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}\Big|_2^6 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3}-0\right) = \frac{16}{3} = S \ -$$

– площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x-2},\ x=6,\ y=0$. Построим эту фигуру.



Пример 2. Вычислить:

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin\ \ln x\Big|_1^{\sqrt{e}} = \arcsin\ \ln\sqrt{e} - \arcsin\ \ln 1 =$$
$$= \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin\ 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 3. $\displaystyle\int_0^{1/3} \operatorname{arctg} 3x\,dx = \left|\begin{matrix}\text{интеграл берется по формуле интегрирования}\\ \text{по частям для определенного интеграла}\end{matrix}\right| =$

$$= \left\{\begin{matrix} u=\operatorname{arctg} 3x,\ du=\dfrac{3dx}{1+9x^2},\\ dv=dx,\ v=x.\end{matrix}\right\} = x\cdot\operatorname{arctg} 3x\Big|_0^{1/3} - \int_0^{1/3}\frac{3x\,dx}{1+9x^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 1 - 0 - \frac{3}{18}\ln\left(1+9x^2\right)\Big|_0^{1/3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{3}{18}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{12} - \frac{3}{18}\ln 2.$$

Пример 4.

$$\int_1^e \frac{\ln x\,dx}{x^3} = \left|\text{ интеграл берется по формуле интегрирования по частям }\right| =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u=\ln x, & du=\dfrac{1}{x}dx, \\ dv=\dfrac{dx}{x^3}, & v=\dfrac{x^{-2}}{-2}. \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e x^{-3}dx = \frac{-\ln e}{2e^2} + \frac{\ln 1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^e =$$

$$= -\frac{1^1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}.$$

Пример 5.

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left\{\begin{matrix}\text{сделаем замену переменной по формуле } x=t^2; \\ dx=2t\,dt \text{ и пересчитаем пределы интегрирования:}\end{matrix} \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ t & 0 & 2 \end{array}\right\} = \int_0^2 \frac{2t\,dt}{t+1} =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\int_0^2\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = \left(2t-2\ln|t+1|\right)\Big|_0^2 = 4-2\ln 3-0+2\ln 1 = 4-2\ln 3$$

.

Пример 6.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3} = \left\{\begin{matrix}\text{сделаем замену переменной} \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t, \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\dfrac{2dt}{1+t^2};\end{matrix} \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \dfrac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \left(t=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1\right)\right\} =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\left(\dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2}+3\right)} = \int_0^1 \frac{2dt}{2-2t^2+3+3t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt5}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt5}$$

.

Самостоятельная работа

Пример 7. $\displaystyle\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx = \frac{1}{2}\frac{(2x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^8 + \frac{x^{4/3}}{4/3}\Big|_0^8 = 33\frac{1}{3}.$

Пример 8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cdot\sin x\,dx = -x\cdot\cos x\,\Big|_0^{\pi/2} + \sin x\,\Big|_0^{\pi/2} = 0+1=1.$

Пример 9. $\displaystyle\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = 2\int_2^3\left(t^2-1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_2^3 = \frac{32}{3}.$

Домашнее задание

Пример 1. $\int\limits_1^4 \left(2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$. **Ответ:** 21.

Пример 2. $\int\limits_1^e \ln x\, dx$. **Ответ:** 1.

Пример 3. $\int\limits_0^1 x^2 \cdot e^x dx$. **Ответ:** $e-2$.

Пример 4. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}-1}$. **Ответ:** $7+2\ln 2$.

Пример 5. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. **Ответ:** $2-\ln 2$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными границами. Интегралы от разрывных функций.

Вычислить несобственные интегралы или исследовать на сходимость.

Пример 1.

$$\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^3}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^{-1}x^{-3}dx=\lim_{a\to-\infty}\left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_a^{-1}=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{(-1)^2}-\frac{1}{a^2}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(1-\frac{1}{\infty}\right)=-\frac{1}{2},$$

т. е. интеграл сходится.

Пример 2.

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b\ln x\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln^2 b}{2}-\frac{\ln^2 1}{2}\right)=\frac{\ln^2\infty}{2}=\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

Пример 3.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{(x+1)^2+1}+\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_a^0+$$

$$+\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^b=\lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(a+1))+\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}(b+1)-\operatorname{arctg}1)=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(-\infty)+\operatorname{arctg}(\infty)-\frac{\pi}{4}=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi,$$ т. е. интеграл сходится.

Пример 4.

$$\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = \left\{ x = 2 - \text{точка разрыва функции } f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \right\} = \lim_{a\to 2} \int_a^3 (x-2)^{-2}\, dx =$$

$$= \lim_{a\to 2} \frac{(x-2)^{-1}}{-1}\Bigg|_a^3 = -\lim_{a\to 2} \frac{1}{x-2}\Bigg|_a^3 = -\lim_{a\to 2}\left[\frac{1}{3-2} - \frac{1}{a-2}\right] = -\left(1 - \frac{1}{0}\right) = \infty,$$

т. е. интеграл расходится.

Пример 5.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ x = \pm 1 - \text{точка разрыва функции } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right\} = \lim_{b\to 1} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$= \lim_{b\to 1} \arcsin x\Big|_0^b = \lim_{b\to 1}[\arcsin b - \arcsin 0] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, т. е. интеграл сходится.

Пример 6.

$$\int_2^4 \frac{dx}{x-3} = \left\{ x = 3 - \text{точка разрыва функции } f(x) = \frac{1}{x-3} \right\} = \lim_{a\to 3} \int_2^a \frac{dx}{x-3} + \lim_{a\to 3} \int_a^4 \frac{dx}{x-3} =$$

$$= \lim_{a\to 3} \ln|x-3|\Big|_2^a + \lim_{a\to 3} \ln|x-3|\Big|_a^4 = \lim_{a\to 3}\big[\ln|a-3| - \ln|-1|\big] + \lim_{a\to 3}\big[\ln 1 - \ln|a-3|\big] = -\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

Пример 7. Доказать, что интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^2+1)\cdot e^x}$ сходится.

Так как $\frac{1}{(x^2+1)\cdot e^x} \le \frac{1}{x^2+1}$ при $x \ge 1$ и интеграл $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2+1} =$

$= \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ сходится, то исходный интеграл тоже сходится по теореме 1.

Пример 8. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2x^3} \quad \left\{ f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2x^3} - \text{функция разрывная в точке } x{=}0 \right\}.$$

При $x \ge 0$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2x^3} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, т. к. несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{a\to 0} \int_a^1 x^{-\frac{1}{3}} dx =$

$= \lim_{a\to 0} \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_a^1 = \frac{2}{3} \lim_{a\to 0}\left[1 - a^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{2}{3}$, т. е. сходится, то сходится и исходный интеграл по теореме 2.

Самостоятельная работа

Пример 9. $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln^3 x)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln^2 x}\Big|_e^{\infty} = \frac{1}{2}$.

Пример 10. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$.

Пример 11. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x \ln x} = \infty$ – расходится.

Домашнее задание

Пример 1. $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2}$. **Ответ:** 1.

Пример 2. $\int\limits_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx$. **Ответ:** $\frac{1}{3}$**.**

Пример 3. $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{x\,dx}{1+x^2}$. **Ответ:** ∞ (расходится).

Пример 4. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **Ответ:** $\sqrt{3}$.

Пример 5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{12}$.

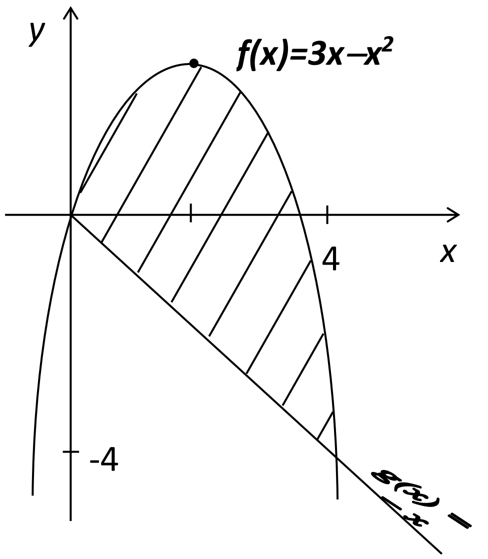
Пример 6. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^2+4}{x} dx$. **Ответ:** ∞ (расходится).

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ № 3,4

Тема: Приложения определенного интеграла к задачам геометрии.

1. Вычисление площадей плоских фигур.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - x^2$ и $y = -x$.



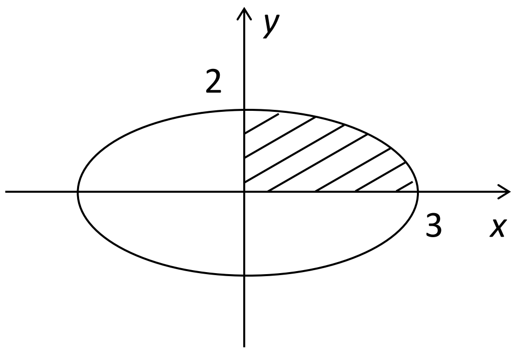
$$3x - x^2 = -x,$$
$$x^2 - 4x = 0,$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4,$$
$$y_1 = 0, \quad y_2 = -4.$$

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx =$$

$$= \int_0^4 \left(3x - x^2 + x \right) dx = \int_0^4 \left(4x - x^2 \right) dx =$$

$$2x^2 - \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.



Параметрические уравнения эллипса

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \qquad dx = -3\sin t dt.$$

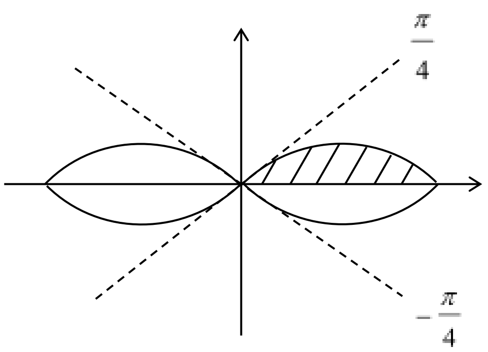
$$S = 4\int_0^3 y \cdot dx = 4\int_{\pi/2}^0 2\sin t \cdot (-3\sin t) dt = 24\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 24 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= 12\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 6\pi.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$.

$$r = 0 \to \cos 2\varphi = 0 \to 2\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \to \varphi_{1,2} = \pm\frac{\pi}{4}.$$

$$\varphi = 0 \to r = 2.$$



$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 4\cos 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Bigg|_0^{\pi/4} = 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - 0 \right) = 4.$$

2. Вычисление длины дуги кривой.

Пример 4. Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, абсциссы концов которой $x_1=3$ и $x_2=8$.

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_3^8\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_3^8\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_3^8(1+x)^{\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right|_3^8=\frac{38}{3}.$$

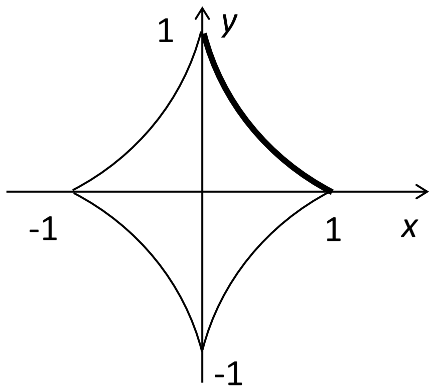
Пример 5. Вычислить длину астроиды $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t,\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$.

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\begin{Bmatrix}x_t'=3\cos^2 t\cdot(-\sin t)\\ y_t'=3\sin^2 t\cdot\cos t\end{Bmatrix}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{9\cos^4 t\cdot\sin^2 t+9\sin^4 t\cdot\cos^2 t}\,dt=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^2 t\cdot\sin^2 t\cdot\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\,dt=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}3\cos t\cdot\sin t\,dt=4\cdot\frac{3}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2}=6\sin^2\frac{\pi}{2}=6.$$



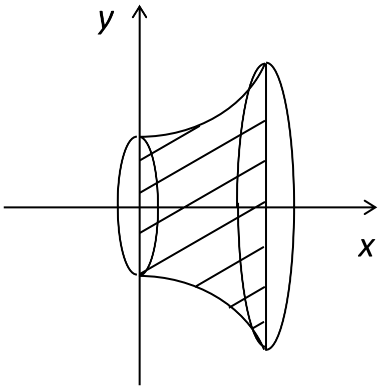
Пример 6. Вычислить длину первого витка логарифмической спирали $\rho=e^\varphi$.

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{[f(\varphi)]^2+[f'(\varphi)]^2}\,d\varphi=\begin{Bmatrix}f(\varphi)=e^\varphi\\ f'(\varphi)=e^\varphi\end{Bmatrix}=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2\varphi}+e^{2\varphi}}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\cdot e^\varphi d\varphi=$$

$$=\sqrt{2}\cdot e^\varphi\Big|_0^{2\pi}=\sqrt{2}\left(e^{2\pi}-1\right).$$

3. Вычисление объемов тел.

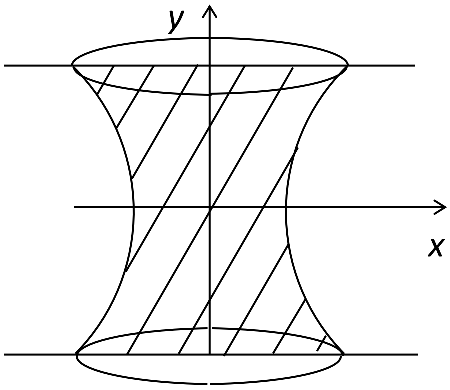
Пример 7. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси О*x* фигуры, ограниченной линиями $y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$.



$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

Пример 8. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси О*y* фигуры, ограниченной линиями $x^2 - y^2 = 4, \quad y = \pm 2$.



$$V_y = \pi\int_c^d x^2dy = \left\{x^2 = 4 + y^2\right\} =$$

$$= \pi\int_{-2}^{2}\left(4 + y^2\right)dy = 2\pi\int_0^2\left(4 + y^2\right)dy =$$

$$= 2\pi\left(4y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi\left(8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi.$$

Самостоятельная работа

Пример 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной аркой циклоиды $\begin{cases} x = 1 - \cos t, \\ y = t - \sin t \end{cases}$ и осью О*x*. Ответ: $S = 3\pi$.

Пример 10. Вычислить длину кардиоиды $r = 1 - \cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$. Ответ: $l = 8$.

Пример 11. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси О*x* фигуры, ограниченной линиями $y = x^2,\ \ x = y^2$. Ответ: $\dfrac{3\pi}{10}$.

Домашнее задание

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$. Ответ: $S = \dfrac{125}{6}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = \sin 2\varphi$. Ответ: $S = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Вычислить длину дуги кривой $y = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x-1)^3}$ между точками с абсциссами $x_1 = 2$ и $x_2 = 8$. Ответ: $l = \dfrac{56}{3}$.

4. Вычислить длину кардиоиды $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$. Ответ: 16.

5. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ и осью Ox ($0 \le t \le 2\pi$).

Ответ: $V = 5\pi^2$.

6. Вычислить объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^3$ вокруг:

а) оси Ox. Ответ: $V_x = \dfrac{4\pi}{21}$.

б) оси Oy. Ответ $V_y = \dfrac{4\pi}{15}$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант 1

1. Вычислить:

$$\int_1^3 x\cdot\sqrt[3]{x^2-1}\,dx;\quad \int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^4 x};\quad \int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^{\infty} x\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}dx;\quad \int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};\quad \int_0^2\frac{x^3dx}{x^4-1};\quad \int_4^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi,\quad y=0.$$

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением

$$\rho=1-\sin\varphi,\qquad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{6}.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оy фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $x=2$, $y=0$.

Вариант 2

1. Вычислить:

$$\int_0^1\frac{x\,dx}{1+x^4};\quad \int_0^{13}\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt[3]{2x+1}};\quad \int_0^{x/3} x\cdot\cos x\,dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln x};\quad \int_0^3\frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}};\quad \int_{-\infty}^0 x\cdot e^{2x^2}dx;\quad \int_0^4\frac{dx}{(x-3)^3}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho=2(1-\cos\varphi)$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-2x^2+4x$.

Вариант 3

1. Вычислить:

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx; \quad \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}; \quad \int_0^1 x\cdot\operatorname{arctg}\,x\,dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_{-\infty}^{-3} \frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}; \quad \int_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+4}; \quad \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^4}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 6(t-\sin t), \\ y = 6(1-\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad y = 0.$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 3\left(1+\sin\varphi\right)$, $\quad -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sin x$, $y = \sin x$ $\left(0 \le x \le \pi\right)$.

Вариант 4

1. Вычислить:

$$\int_0^2 x\cdot e^{\frac{x}{2}}dx; \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2 x}; \quad \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}; \quad \int_0^{\infty} \frac{(x+3)dx}{x^2+4}; \quad \int_2^3 \frac{dx}{(2x-5)^3}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 6(1+\cos\varphi)$.

4. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = \left(t^2-2\right)\cdot\sin t + 2t\cdot\cos t, \\ y = \left(2-t^2\right)\cdot\cos t + 2t\cdot\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

Вариант 5

1. Вычислить:

$$\int_0^{1/2} \arcsin x\,dx; \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{3+2\sin x}; \quad \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{4+x^6}; \quad \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot e^{4x^3} dx; \quad \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1-\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad y = 0.$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 6(1+\sin\varphi)$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y = \sin^2 x$, $\quad x = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad y = 0$.

Вариант 6

1. Вычислить:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}; \quad \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx; \quad \int_0^3 x \cdot e^{-\frac{2x}{3}} dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}; \quad \int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \int_0^1 \frac{dx}{(2x-1)^3}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 4\sin 3\varphi$.

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = e^t \cdot (\cos t + \sin t), \\ y = e^t \cdot (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оy фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $\quad y = x^2$.

Вариант 7

1. Вычислить:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi\right)}{1+\operatorname{tg}\varphi} d\varphi; \quad \int_1^e \frac{\ln x\, dx}{x^2}; \quad \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_{-3}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}; \quad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x\, dx}{1+4x^2}; \quad \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\rho = 4\cdot\cos 4\varphi, \quad -\frac{\pi}{8} \le \varphi \le \frac{\pi}{8}.$$

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = 3(t-\sin t), \\ y = 3(1-\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Вариант 8

1. Вычислить:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}; \quad \int_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{5-4x}}; \quad \int_0^1 x^3\cdot e^{-x^2} dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}; \quad \int_e^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln^4 x}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+10}; \quad \int_{2,5}^{3} \frac{dx}{\sqrt{2x-5}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{cases} x = 10(t-\sin t), \\ y = 10(1-\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad y = 0.$$

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением

$$\rho = 4(1-\sin\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = y^2$.

Вариант 9

1. Вычислить:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt{4-\ln^2 x}}; \quad \int_0^{\pi} x\cdot\sin 4x dx; \quad \int_1^4 \frac{dx}{(4+x)\cdot\sqrt{x}}.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^4 \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}; \quad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{9x^2+1}dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13}; \quad \int_0^2 \frac{x^2dx}{8-x^3}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} \quad (y \ge 2), \quad y = 2.$$

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением

$$\rho = 5\cdot e^{\frac{5\varphi}{12}}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оy фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = x$.

Вариант 10

1. Вычислить:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}; \quad \int_1^e \sqrt{x}\cdot\ln x dx; \quad \int_2^7 \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{3x-5}; \quad \int_0^{1/3} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx; \quad \int_1^e \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-8x+20}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 3(t-\sin t), \\ y = (1-\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad y = 0.$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 8\cdot\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оy фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 1$, $x = 0$.

Вариант 11

1. Вычислить:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx; \quad \int_1^6 \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}; \quad \int_0^{\pi} x \cdot \cos 6x dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 4x}{1+16x^2}; \quad \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}; \quad 6\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^3}{4}} dx; \quad \int_{4,5}^5 \frac{dx}{\sqrt{(2x-9)^3}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 6\cos^3 \dfrac{\varphi}{3}, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x = \pm 1$.

Вариант 12

1. Вычислить:

$$\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx; \quad \int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1} dx; \quad \int_0^1 x \cdot e^{5x} dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_3^7 \frac{dx}{(x-6)^3}; \quad \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^4-16}; \quad \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+18}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 4\sin 2\varphi$.

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t, \\ y = 6\sin t - 8\cos t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y = 6\cos x, \quad y = 3\cos x, \quad x = 0 \quad (x \ge 0)$.

Вариант 13

1. Вычислить:

$$\int_2^3 x \cdot \sqrt[3]{x^2-3} dx; \quad \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x}; \quad \int_0^{e-2} \ln(x+2) dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{-\frac{x^2}{3}}dx\,;\quad \int_0^4 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}\,;\quad \int_0^4 \frac{x^3dx}{x^4-81}\,;\quad \int_3^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-4}}\,.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}\cos^3 t, \\ y=\dfrac{1}{3}\sin^3 t, \end{cases} \qquad 0\le t\le \frac{\pi}{2}\,.$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 2\sin^4\dfrac{\varphi}{4},\ \ 0\le\varphi\le\pi$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=e^{-2x}$, $x=0$, $y=0$.

Вариант 14

1. Вычислить:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{9+x^4}\,;\quad \int_0^{8/3} \frac{x-1}{\sqrt{3x+1}}dx\,;\quad \int_0^{\pi/6} x\cdot\sin xdx\,.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}\,;\quad \int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{25-x^2}}\,;\quad \int_{-\infty}^0 x\cdot e^{-\frac{x^2}{6}}dx\,;\quad \int_0^7 \frac{dx}{(x-5)^3}\,.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t. \end{cases}$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 5(1+\cos\varphi)$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=2-x^2$, $y=x$, $x=0$.

Вариант 15

1. Вычислить:

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{2}{x}}dx}{x^2}\,;\quad \int_0^{3/2} \sqrt{9-x^2}dx\,;\quad \int_0^{1/2} x\cdot\operatorname{arctg}\,2x\,dx\,.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{xdx}{\left(5x^2+3\right)^3};\quad \int_{1}^{e}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{\ln^3 x}};\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+8x+17};\quad \int_{4}^{9}\frac{dx}{(x-6)^4}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x=7(t-\sin t), \\ y=7(1-\cos t), \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi .$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho=5(1+\sin\varphi)$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оy фигуры, ограниченной линиями $y^2+x-4=0$, $x=0$.

Вариант 16

1. Вычислить:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}};\quad \int_{5}^{10}\frac{\sqrt{x-1}+3}{\sqrt{x-1}-3}dx;\quad \int_{0}^{1}x\cdot e^{-4x}dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_{0}^{1}\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^6}};\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+18};\quad \int_{0}^{\infty}\frac{x+4}{x^2+16}dx;\quad \int_{3}^{4}\frac{dx}{(2x-7)^2}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=4\sin t. \end{cases}$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho=7e^{7\varphi}$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{7}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оy фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=0$, $x=2$.

Вариант 17

1. Вычислить:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin xdx}{5+4\cos x};\quad \int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{16+9x}};\quad \int_0^1\ln\left(x^2+1\right)dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_7^8\frac{dx}{(x-7)^2};\quad \int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{8+x^6};\quad \int_{-\infty}^0 x^4\cdot e^{-x^5}dx;\quad \int_0^4\frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x=12(t-\sin t), \\ y=12(1-\cos t), \end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho=6(1-\sin\varphi)$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y=(x-2)^2$, $y=4$.

Вариант 18

1. Вычислить:

$$\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt[3]{4x^2-1}};\quad \int_0^{\pi/2}\frac{\sin xdx}{3+\sin^2 x};\quad \int_0^1 x\cdot e^{-7x}dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-8x+25};\quad \int_0^{3/2}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{9-x^2}};\quad \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}3x}{4+9x^2}dx;\quad \int_0^1\frac{dx}{(3x-1)^3}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=8\sin 3\varphi$.

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x=e^t(\cos 2t+\sin 2t), \\ y=e^t(\cos 2t-\sin 2t), \end{cases}\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $xy=4$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

Вариант 19

1. Вычислить:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1+tg^2\varphi}{(1+tg\varphi)^2}\,d\varphi; \quad \int_1^e \frac{\ln x dx}{x^4}; \quad \int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_{-4}^{\infty} \frac{dx}{(x+4)^2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+25}; \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{arctg^2 2x}{49+4x^2}\,dx; \quad \int_4^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\rho = 6\cos 4\varphi, \quad -\frac{\pi}{8} \le \varphi \le \frac{\pi}{8}.$$

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6}, \\ y = 4 - \dfrac{t^4}{4}, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оy фигуры, ограниченной линиями $y^2 + 8x = 16$, $x = 0$.

Вариант 20

1. Вычислить:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^4 x}}; \quad \int_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}; \quad \int_0^5 x \cdot e^{-\frac{x}{5}}dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_7^9 \frac{dx}{(x-8)^2}; \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+e)\cdot \ln^4(x+e)}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+34}; \quad \int_{3,5}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x-7}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 6\sin 4\varphi$.

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-5x}$, $x = 0$, $y = 0$.

Вариант 21

1. Вычислить:

$$\int_1^e \frac{\sqrt[4]{(1+\ln x)^3}}{x}dx; \quad \int_0^{\pi/3} x\cdot\sin 3x dx; \quad \int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\cdot\sqrt{x+1}}.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}; \quad \int_0^\infty \frac{arctg^3 4x}{16x^2+1}dx; \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+8x+32}; \quad \int_0^4 \frac{3x^2dx}{\sqrt{64-x^3}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 9(1+\cos\varphi)$.

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = e^{2t}\cdot\cos 2t, \\ y = e^{2t}\cdot\sin 2t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = (x-5)^2$, $y^2 = x-5$.

Вариант 22

1. Вычислить:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2x+\sin 2x}dx; \quad \int_0^{e-1} \sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1)dx; \quad \int_0^5 \frac{\sqrt{x+4}+1}{\sqrt{x+4}-1}dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{4x-3}; \quad \int_0^{1/4} \frac{\arcsin^2 4x}{\sqrt{1-16x^2}}dx; \quad \int_1^e \frac{dx}{x\cdot\ln^5 x}; \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-10x+26}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 12\cos t + 5\sin t, \\ y = 5\cos t - 12\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \quad y = 0.$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho = \dfrac{4}{\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{6}\right)}$, $\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 1$.

Вариант 23

1. Вычислить:

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x dx}{\sin x}; \quad \int\limits_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{x+4}}; \quad \int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin \frac{x}{6} dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^5 \frac{x}{2}}{4+x^2} dx; \quad \int\limits_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{32-x^5}}; \quad \int\limits_{-\infty}^0 x^2 \cdot e^{\frac{x^3}{8}} dx; \quad \int\limits_8^{10} \frac{dx}{(x-9)^6}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

4. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 4\cos^3 \dfrac{\varphi}{3}, \quad 0 \le \varphi \le \pi$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оy фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{x^2}{2}, \quad y = \dfrac{x^3}{8}$.

Вариант 24

1. Вычислить:

$$\int\limits_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx; \quad \int\limits_2^{10} \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x-2}}; \quad \int\limits_0^5 x \cdot e^{x/5} dx.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int\limits_4^{10} \frac{dx}{(x-8)^3}; \quad \int\limits_0^3 \frac{x^3 dx}{81-x^4}; \quad \int\limits_{e+1}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)\cdot \ln(x-1)}; \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+10x+29}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 10(1-\sin\varphi)$.

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = 10\sin t + 8\cos t, \\ y = 8\sin t - 10\cos t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y = 6\cos x, \quad y = 8\cos x, \quad x = 0 \quad (x \ge 0)$.

Вариант 25

1. Вычислить:

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\sin 2x}{2x-\cos 2x}\,dx\,; \quad \int\limits_{1}^{6} \frac{dx}{(x+5)\cdot\sqrt{x+3}}\,; \quad \int\limits_{0}^{\pi} x\cdot\cos 7x\,dx\,.$$

2. Исследовать на сходимость:

$$\int\limits_{0}^{2} \frac{\arcsin^3 \dfrac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\,; \quad \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(8x^2+1\right)^3}}\,; \quad \int\limits_{-\infty}^{0} x^3\cdot e^{x^4}\,dx\,; \quad \int\limits_{7}^{9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-8}}\,.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\rho = 6\sin 6\varphi\,, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}\,.$$

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = 9(t-\sin t), \\ y = 9(1-\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy = 4\,,\quad x = 1\,,\quad y = 0\,.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Лань, 2003.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в уравнениях и задачах. Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1997.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1972.
5. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989.
6. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н. Сборник задач по высшей математике, 1 курс. – М.: Айрис-пресс, 2003.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1985. – Т. 1.
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1. – М.: Рольф, 2000.
9. Рябушко А.А., Бархатов В.В. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. – Минск: Высшая школа, 1990. – Ч. 1.
10. Шипачев В.С. Высшая математика. – М., Высшая школа, 2002.