Функции многих переменных

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если в области D задана непрерывная функция двух переменных

Z = f(x,y) и точка $M_0(x_0, y_0) \in D$,то уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$\mathbf{Z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).}$$

Уравнение нормали к поверхности в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{(y - y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{Z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

Пример 1.

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности эллиптического параболоида:

Z = $x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ в точке $M_0(1,1,1)$

Решение: находим выражения частных производных

$Z'_x = 2x - 2y - 1 \quad Z'_y = -2x + 2y + 2.$

Числовые значения производных в точке M_0 (1,1,1) будут :

$Z'_x(1,1,1) = -1;\ Z'_y(1,1,1) = 2.$

Запишем уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1,1,1)$:

$Z-1$= -1(x-1)+2(y-1), после преобразования уравнение плоскости примет вид**: x - 2 y + z = 0.**

Уравнение нормали в точке $M_0(1,1,1)$примет вид :

$$\frac{(x - 1)}{-1} = \frac{(y - 1)}{2} = \frac{(z - 1)}{-1}$$

Пример 2. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности параболоида Z= $1 + x^2 + y^2$ в точке M_0 (1,1,3)

Решение: находим выражения частных производных

Z'_x = 2x; Z'_y = $2y$.

Числовые значения производных в точке M_0 (1,1,3) будут :

$Z'_x(1,1,3) = 2;\ Z'_y(1,1,3) = 2.$

Запишем уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1,1,3)$:

$Z-3$= 2(x-1)+2(y-1), после преобразования уравнение плоскости примет вид**: 2x + 2 y – z - 1 = 0.**

Уравнение нормали в точке $M_0(1,1,3)$примет вид :

$$(x-1)/_2 = (y-1)/_2 = (z-3)/_{-1}$$

Пример 3. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности Z= $(x^2 + y^2)$ в точке M_0 (1,0,0)

Решение: находим выражения частных производных

$Z'_x = \frac{2x}{(x^2+y^2)}$; $Z'_y = \frac{2y}{(x^2+y^2)}$.

Числовые значения производных в точке M_0 (1,0,0) будут :

$Z'_x(1,0,0) = 2;\ Z'_y(1,0,0) = 0.$

Запишем уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1,0,0)$:

$Z-0$ = 2(x-1)+0(y-0), после преобразования уравнение плоскости примет вид**: 2x - z - 2 = 0.**

Примеры для самостоятельной работы:

1. . Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности Z= sinx·cosy в точке M_0 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$
2. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ в точке $M_0(1, 1, 1)$.
3. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности параболоида z = $\frac{x^2+y^2}{4}$ точке $M_0(2,2,2)$.

Исследование функции двух переменных на экстремум

Если в области D задана непрерывная функция двух переменных

Z = f(x,y) и в точке $M_0(x_{0,}y_0)$ є D функция имеет локальный экстремум(максимум или минимум), то в этой точке либо обе ее частные производные равны нулю $\boldsymbol{f'_x(x_0, y_0) = 0}$; $\mathbf{f'_y}(\boldsymbol{x_0, y_0})$ **= 0** ($M_0(x_{0,}y_0)$−стационарная точка), либо одна из них не существует($M_0(x_{0,}y_0)$−критическая точка).

Необходимые условия существования экстремума

Пример.1 Найти координаты стационарных точек заданной функции

$$\boldsymbol{z = x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y + 1}$$

Вычислим частные производные заданной функции:

z'_x= *2x - 4y,* z'_y= *-4x +10y – 2.*

В точке локального экстремума либо обе ее частные производные равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0$; $f'_y(x_0, y_0)$ = 0 ($M_0(x_{0,}y_0)$−стационарная точка), либо одна из них не существует($M_0(x_{0,}y_0)$−критическая точка).

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 10y - 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2y \\ -8y + 10y - 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Определили координаты одной стационарной точки M_0(2, 1).

Пример.2 Найти координаты стационарных точек заданной функции

$$\boldsymbol{z = -2x^2 + 16x - 3y^2 + 12y + 7}$$

Вычислим частные производные заданной функции:

z'_x= *- 4x+16,* z'_y= *- 6y +1 2.*

В точке локального экстремума либо обе ее частные производные равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0$; $f'_y(x_0, y_0)$ = 0 ($M_0(x_{0,}y_0)$−стационарная точка), либо одна из них не существует($M_0(x_{0,}y_0)$−критическая точка).

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x + 16 = 0 \\ -6y + 1\,2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Определили координаты одной стационарной точки M_0(4, 2).

Достаточные условия существования экстремума

Пусть в окрестности критической точки $M_0(x_{0,}y_0)$ функция f(x,y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Введем обозначения: A = $f''_{xx}(x_0, y_0)$, B = $f''_{xy}(x_0,y_0)$, C = $f''_{yy}(x_0, y_0)$.

Рассмотрим выражение: D = AC - B^2.

Если D > 0, то в точке $M_0(x_{0,}y_0)$ функция f(x,y) имеет экстремум,

если A < 0, то максимум, если A > 0, то минимум.

Если D < 0, то в точке $M_0(x_{0,}y_0)$ функция f(x,y) не имеет экстремума.

Если D = 0, требуются дополнительные исследования.

Пример.1

Найти экстремум функции f(x, y) $= x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$.

Решение: Найдем частные производные по x и y, чтобы вычислить координаты стационарной точки: f'_x= 2x + y - 3; f'_y = 2y + x – 6.

Решим систему двух линейных уравнений: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 2y + x - 6 = 0 \end{cases}$

Получим координаты стационарной точки $M_0(0{,}3)$. Найдем частные производные второго порядка функции f(x,y): $f''_{xx} = 2, f''_{xy} = 1,$
$f''_{yy} = 2,$
тогда в стационарной точке $M_0(0;3)$ параметры принимают значения: A = 2, B = 1, C = 2, D = 3 > 0, следовательно в точке $M_0(0{,}3\ )$ имеется экстремум и это минимум, т.к. A = 2 > 0. Вычислим минимальное значение функции: $f_0(0;3) = -9$.

Пример.2

Найти экстремум функции f(x, y) $= {}^1/_2\, xy + (47 - x - y)({}^x/_3 + {}^y/_4)$.

Решение:

Найдем частные производные по x и y, чтобы вычислить координаты стационарной точки: $f'_x = {}^{y}/_{2} - \left({}^{x}/_{3} + {}^{y}/_{4}\right) + {}^{1}/_{3}\,(47 - x - y)$;

$$f'_y = {}^{x}/_{2} - \left({}^{x}/_{3} + {}^{y}/_{4}\right) + {}^{1}/_{4}\,(47 - x - y).$$

Решим систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} {}^{x}/_{2} - \left({}^{x}/_{3} + {}^{y}/_{4}\right) + {}^{1}/_{4}\,(47 - x - y) = 0 \\ {}^{y}/_{2} - \left({}^{x}/_{3} + {}^{y}/_{4}\right) + {}^{1}/_{3}\,(47 - x - y) = 0 \end{cases}$$

Для упрощения вычислений удобно привести оба уравнения к общему знаменателю – 12. Система примет вид:

$$\begin{cases} y + 8x = 188 \\ x + 6y = 141 \end{cases}$$

Получим координаты стационарной точки $M_0(21; 20)$. Найдем частные производные второго порядка функции f(x,y): $f''_{xx} = -{}^{2}/_{3}$,

$f''_{xy} = -{}^{1}/_{12}$,

$f''_{yy} = -{}^{1}/_{2}$,

тогда в стационарной точке $M_0(21; 20)$ параметры принимают значения: A = $-{}^{2}/_{3}$, B = $-{}^{1}/_{12}$, C = $-{}^{1}/_{2}$, D > 0, следовательно в точке

$M_0(21, 20)$ имеется экстремум и это максимум, т.к. A = $-{}^{2}/_{3} < 0$.

Вычислим максимальное значение функции: $f_0(21; 20) = 282$.

Примеры для самостоятельной работы:

1. Найти экстремум функции f(x, y) = $x^3 + y^3 - 15xy$
2. Найти экстремум функции f(x, y) = $-x^2 + 5x - y^2 - 2y + xy$.