Практическое занятие 2
Отыскание частного решения ДУ первого порядка

Пусть имеется ДУ первого порядка в нормальной форме и начальные условия $y(x_0)=y_0$, для определения значения произвольной постоянной. Рассмотрим частное решение ДУ

$$y' = f(x,y).$$

Теорема Коши.

Частное решение ДУ первого порядка существует и единственно, если $f(x,y)$ определена и непрерывна относительно своих переменных (x,y) и все частные производные также непрерывны.

Пример 1. Найти частное решение ДУ первого порядка $y' = x^5, y(1)=1.$ Иначе, решить задачу Коши.

Решение. Интегрируем правую часть уравнения по переменной *x* :

$y=\dfrac{x^6}{6}+C_1 \quad \Rightarrow \quad 1=\dfrac{1^4}{6}+C_1, C_1=\dfrac{5}{6}$. Получили частное решение ДУ:

$y=\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{5}{6}$; Ответ: $y=\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{5}{6}$;

Пример 2. Найти решение задачи Коши ДУ первого порядка с начальными условиями $y(0)=1$, , $y'=\dfrac{7}{(2-x)^8}$.

Решение. Интегрируем правую часть уравнения по переменной *x* и используем начальные условия:

$y=\dfrac{1}{(2-x)^7}+C_1 \quad \Rightarrow \quad 1=\dfrac{1}{128}+C_1, C_1=\dfrac{127}{128}$

Частное решение задачи Коши с начальными условиями $y(0)=1$, ,. имеет вид: $y=\dfrac{1}{(2-x)^7}+\dfrac{127}{128}$

Ответ: $y=\dfrac{1}{(2-x)^7}+\dfrac{127}{128}$

Пример 3. Найти решение задачи Коши ДУ первого порядка с разделяющимися переменными и начальными условиями $y(e)=e$,
$(y+ylnx)dx+(x-xy)dy=0.$

Решение. В первом и втором слагаемых вынесем общие множители и преобразуем исходное уравнение к виду с разделенными переменными:

$$\frac{1}{x}(1+lnx)dx = -\frac{1}{y}(1-y)dy$$

Интегрируем левую часть уравнения по переменной x, а правую часть уравнения по переменной y. Получаем общий интеграл ДУ:

$$\left(lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2\right) = -lny + y + C$$

Подставляем начальные условия в общее решение и получаем значение произвольной постоянной С:

$$\left(lne + \frac{1}{2}(lne)^2\right) = -lne + e + C, \text{ С}=\frac{5}{2} - e.$$

Частный интеграл имеет вид: $\left(lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2\right) = -lny + y + \frac{5}{2} - e$

Ответ: $\left(lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2\right) = -lny + y + \frac{5}{2} - e$