Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт информационных технологий и анализа данных
наименование института

Отделение прикладной математики и информатики
наименование отделения

Отчет по дисциплине
«Вычислительная математика»
по теме:
«Численное дифференцирование и интегрирование»

Выполнил студент группы АСУб-20-2 ________ Арбакова А.В.
Шифр группы Подпись И.О. Фамилия

Проверил преподаватель ________ И.А. Огнёв
Подпись И.О. Фамилия

Отчет по НИР защищен с оценкой ____

Иркутск 2021 г.

ЗАДАНИЕ

Вариант: 6

Условия задания:

Вычислить приближенно интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, воспользовавшись той из формул приближенного интегрирования, которая потребует меньшего объема вычислений. Вычислить определенный интеграл точно и сравнить с приближенным его значением.

Задания варианта:

6. $\int_0^1 \sqrt{1+xdx}$

Алгоритм метода вычислений:

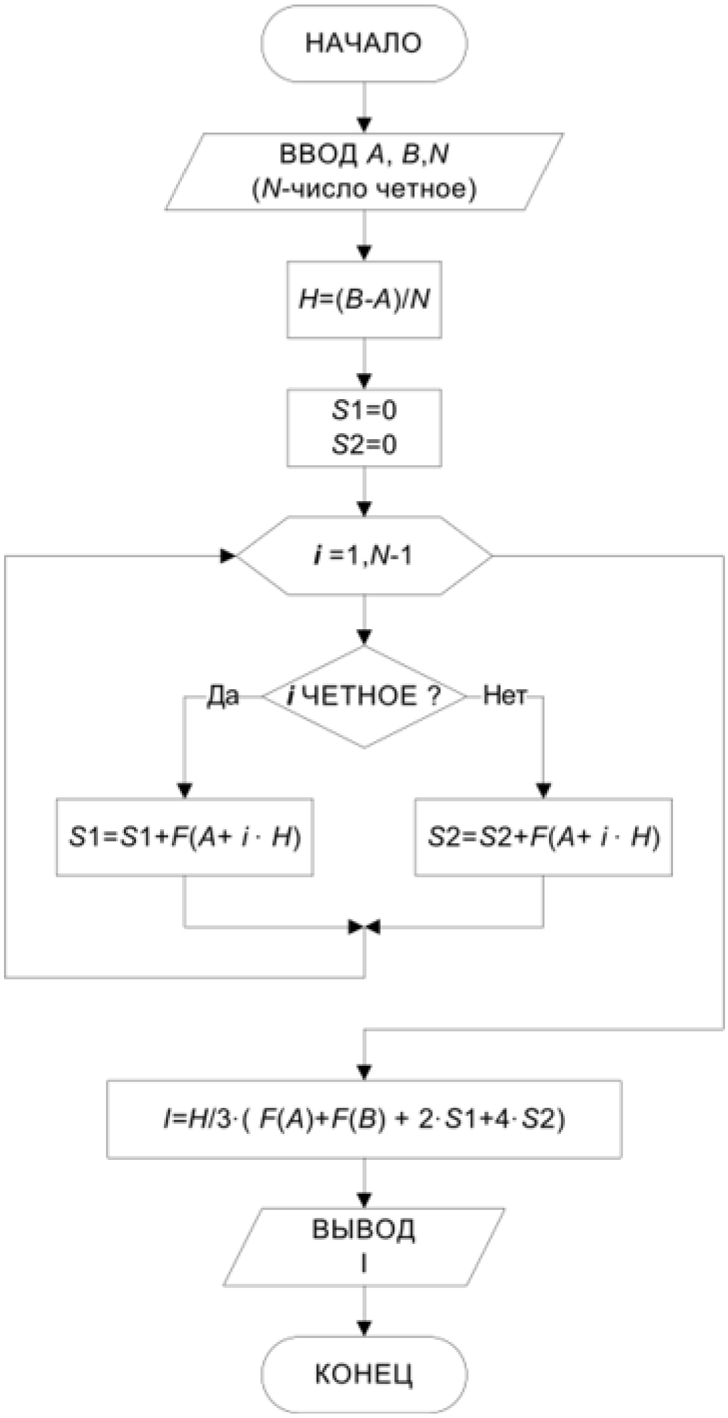

Рисунок 1 – Метод Симпсона.

Программа:

Аналитическое решение:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3} \times (x+1)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = 1{,}21895$$

Сравним методы, чтобы выбрать тот, который потребует меньшего объема вычислений. Найдем производные до 4-го порядка включительно:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8 \times (1+x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f''''(x) = -\frac{15}{16 \times (1+x)^{\frac{7}{2}}}$$

Сначала находим число узлов интегрирования для формулы прямоугольников. Верхняя граница модуля первой производной подынтегральной функции:

$$M_1 = \max\left|\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right| = 0{,}5\ , 0 \le x \le 1$$

Найдем n для формулы прямоугольников:

$$n \ge \frac{M_1(b-a)^2}{2 * \varepsilon}$$

$$n \ge \frac{0{,}5 * (1-0)^2}{2 * 0{,}001} = 250$$

Число узлов интерполяции для формулы прямоугольников n = 250.

Находим число узлов интегрирования для формулы трапеций. Верхняя граница модуля второй производной подынтегральной функции:

$$M_2 = \max\left|\frac{1}{-4 \times (1+x)^{\frac{3}{2}}}\right| = 0{,}25\ , 0 \le x \le 1$$

Найдем n для формулы трапеций:

$$n^2 \geq \frac{M_2(b-a)^3}{2*\varepsilon}$$

$$n^2 \geq \frac{0{,}25*(1-0)^3}{2*0{,}001} = 125$$

$$n \geq 11{,}1803$$

Число узлов интерполяции для формулы трапеций n = 12.

Находим число узлов интегрирования для формулы парабол. Верхняя граница модуля четвертой производной подынтегральной функции:

$$M_4 = \max\left|-\frac{15}{16 \times (1+x)^{\frac{7}{2}}}\right| = 0{,}9375, 0 \leq x \leq 1$$

Найдем n для формулы парабол:

$$n^4 \geq \frac{M_4(b-a)^5}{180*\varepsilon}$$

$$n^4 \geq \frac{6{,}5625*(1-0)^5}{180*0{,}001} = 36{,}4583$$

$$n \geq 2{,}45725$$

Для формулы парабол число узлов интегрирования должно быть четным $n = 2m$. В нашем случае ближайшее целое четное число 4. Значит мы выбираем формулу парабол, он же метод Симпсона, так как этот метод потребует меньшего объема вычислений.

Всего у нас будет 4 итераций, так как n = 4. Начинаем с x = 0 до x = 1 с шагом $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0{,}25$. $y = \sqrt{1+x}$

№	x	y=f(x)	y_0, y_{10}	$y_{чет}$	$y_{нечет}$
0	0	1	1		
1	0,25	1,118034			1,118034
2	0,5	1,224745		1,224745	
3	0,75	1,322876			1,322876
4	1	1,414214	1,414214		

Рисунок 2 – Таблица.

На рисунке 3 решаем интеграл метод Симпсона, используя формулу парабол на рисунке 4. Сравнивая полученное значение с аналитическим решением, видим, что требуемая точность вычислений достигнута.

Решение методом Симпсона:	1,218945
Аналитическое решение:	1,218951
Точность достигнута?	Да

Рисунок 3 – Сравнение аналитического решения и метода Симпсона.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_{2m-1})\right]$$

Рисунок 4 – Формула решения методом Симпсона.

Вывод:

В ходе практической работы я научилась приближенно вычислять интеграл типа $\int_a^b f(x)dx$ с учетом точности ε.

Среди всех возможных методов решения, я решила выбрать метод Симпсона, так как он является достаточно точным приемом численного интегрирования, применимый к данному интегралу.