Практическое занятие 4
ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим решение ДУ второго порядка, сводящегося к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть имеется ДУ второго порядка в нормальной форме

$$y'' = f(x, y, y').$$

Возможны типовые решения ДУ в зависимости от структуры правой части данного уравнения.

1. Правая часть не содержит функцию *y(x)* и ее производную *y'(x)*

Уравнение имеет вид : $y'' = f(x)$. Решение получается с помощью двукратного интегрирования.

Пример 1. Найти общее решение ДУ второго порядка $y'' = x^2$.

Решение. Интегрируем правую часть уравнения по переменной *x* два раза*:*

$y' = \dfrac{x^3}{3} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x^4}{12} + C_1 x + C_2$. Ответ: $y = \dfrac{x^4}{12} + C_1 x + C_2$

Пример 2. Найти решение задачи Коши ДУ второго порядка с начальными условиями $y(0) = 1, y'(0) = 2$, $y'' = \dfrac{5}{(3+x)^2}$.

Решение. Интегрируем правую часть уравнения по переменной *x* два раза:

$y' = -\dfrac{5}{3+x} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = -5\ln|3+x| + C_1 x + C_2.$

Частное решение задачи Коши с начальными условиями $y(0) = 2, y'(0) = 1$, определяется из системы $\begin{cases} 2 = -5\ln 3 + C_2 \\ 1 = -\dfrac{5}{3} + C_1 \end{cases}$. Решая систему линейных уравнений, получаем значения произвольных постоянных $C_1 = \dfrac{8}{3}; C_2 = 5\ln 3 + 2$. Частное решение задачи Коши имеет вид:

$y = -5\ln|3+x| + \dfrac{8}{3}x + 5\ln 3 + 2.$

Ответ: $y = -5\ln|3+x| + \dfrac{8}{3}x + 5\ln 3 + 2.$

Пример 3. Найти общее решение ДУ второго порядка $y'' = \dfrac{7}{\cos^2 3x}$.

Решение. Интегрируем правую часть уравнения по переменной *x* два раза:

$$y' = \frac{7}{3} tg3x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{7}{9} \ln \cos|3x| + C_1 x + C_2.$$

Ответ: $y = -\frac{7}{9} \ln \cos|3x| + C_1 x + C_2$.

Пример 4. Найти общее решение ДУ второго порядка $y'' = e^{2x-3}$.

Решение. Интегрируем правую часть уравнения по переменной *x* два раза:

$y' = \frac{1}{2} e^{2x-3} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4} e^{2x-3} + C_1 x + C_2$. Ответ: $y = \frac{1}{4} e^{2x-3} + C_1 x + C_2$.

Пример 5. Найти общее решение ДУ второго порядка:

$y''(1+x^2) + 2xy' = x^3$.

Решение. Представим левую часть дифференциального уравнения как производную от произведения двух функций. Найдем это произведение, проинтегрировав правую часть уравнения. Получим:

$$(y'(1+x^2))' = x^3. \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^4}{4(1+x^2)} + \frac{C_1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + (C_1 + \frac{1}{4}) arctgx + C_2$$

Ответ:

$y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + (C_1 + \frac{1}{4}) arctgx + C_2$

2. Правая часть не содержит функции *y(x)*, $y'' = f(x, y')$.

Сделаем замену $\begin{cases} y' = P \\ P' = f(x, P) \end{cases}$

И получаем систему двух ДУ первого порядка.

Пример 1. Найти общее решение ДУ $xy'' - 6y' = 0$.

Решение. Делаем замену $\begin{cases} y' = P \\ P' = \dfrac{6P}{x} \end{cases}$. Решаем второе ДУ, являющееся уравнением с разделяющимися переменными. $\frac{dP}{P} = \frac{6dx}{x} \quad \Rightarrow \quad P = C_1 x^6$.

Теперь можно перейти к решению первого уравнения системы $y' = C_1 x^6$,

$y = C_1 \frac{x^7}{7} + C_2$.

Ответ: $y = C_1 \frac{x^7}{7} + C_2$.

Пример 2. Найти общее решение ДУ $(1+e^x) y'' - e^x y' = 0$.

Решение. Делаем замену $\begin{cases} y' = P \\ P' = \dfrac{e^x P}{1+e^x} \end{cases}$. Решаем второе ДУ, являющееся уравнением с разделяющимися переменными.

$\dfrac{dP}{P} = \dfrac{e^x dx}{1+e^x} \quad \Rightarrow \quad P = C_1(1+e^x)$. Теперь можно перейти к решению первого уравнения системы $y' = C_1(1+e^x)$, $y = C_1 e^x + C_1 x + C_2$.

Ответ: $y = C_1 e^x + C_1 x + C_2$.

Пример 3. Решить задачу Коши ДУ $xy'' + 5y' = 0, y(1) = 2, y'(1) = -4$.

Решение. Делаем замену $\begin{cases} y' = P \\ P' = -\dfrac{5P}{x} \end{cases}$. Решаем второе ДУ, являющееся уравнением с разделяющимися переменными.

$\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{5dx}{x} \quad \Rightarrow \quad P = C_1 x^{-5}$. Теперь можно перейти к решению первого уравнения системы $y' = C_1 x^{-5}$, $y = -C_1 \dfrac{x^{-4}}{4} + C_2$.

Частное решение задачи Коши с начальными условиями $y(0) = 1, y'(0) = 2$, определяется из системы $\begin{cases} 2 = \dfrac{-C_1}{4}{}_1 + C_2 \\ -4 = C_1 \end{cases}$. Решая систему линейных уравнений, получаем значения произвольных постоянных $C_1 = -4; C_2 = 1$.

Частное решение задачи Коши имеет вид: $y = \dfrac{1}{x^4} + 1$.

Ответ: $y = \dfrac{1}{x^4} + 1$.

Пример 4. Найти общее решение ДУ $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$.

Решение. Делаем замену $\begin{cases} y' = P \\ P' + \dfrac{P}{x} = x. \end{cases}$ Второе уравнение системы является линейным, решаем его методом Бернулли, $P = uv$. Тогда имеем еще одну систему $\begin{cases} u'v = x \\ v' + \dfrac{v}{x} = 0 \end{cases}$, решение которой

$\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{x^3}{3} + C_1$ имеет

вид $P = \dfrac{1}{x}(\dfrac{x^3}{3} + C_1)$. Тогда, решение первого уравнения системы дает

искомый ответ: $y = \dfrac{x^3}{9} + C_1 \ln x + C_2$.