<u>Функции нескольких переменных</u>

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

<u>Определение:</u> Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.** z = f(x, y)

<u>Определение:</u> Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

<u>Определение:</u> **Областью определения** функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

<u>Определение:</u> **Окрестностью точки** $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$.

<u>Определение:</u> Число А называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа ε > 0 найдется такое число r >0, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие $MM_0<r$, также верно и условие $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

<u>Определение:</u> Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции f(x, y). Это может быть в следующих случаях:

1) Функция z = f(x, y) не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

<u>Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.</u>

<u>Определение.</u> Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x,y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x, при этом переменную y считаем постоянной.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad f'_x(x, y).$

Аналогично определяется частная производная функции по y, считаем переменную x постоянной $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y)$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Полное приращение и полный дифференциал.

Определение. Для функции f(x, y) выражение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется **полным приращением**.

Определение. Выражение $\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ называется **полным приращением** функции f(x, y) в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

Определение: **Полным дифференциалом** функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y). $dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

Решение: Для функции трёх переменных

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Где u- степенная функция по x и показательная по y и z.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = \frac{y}{x^2 - y^2}$.

Решение:

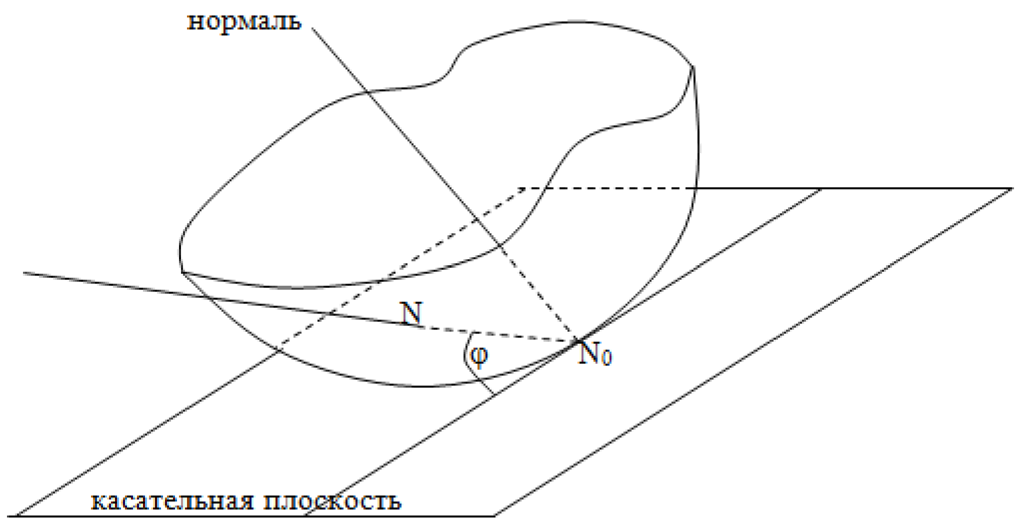
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)}dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}dy$$

Геометрический смысл полного дифференциала.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.



Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности.

<u>Определение.</u> Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость.

Если поверхность задана уравнением z = f(x, y), где f(x, y) – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0,y_{0,}(x_0,y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)\ .$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0 y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке M(1, 1, 1).

Решение: f(M)= 1-2+1-1+2=1

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x-1) + 2(y-1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала

Пусть функция f(x, y) дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

Пример. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u=\sqrt{x^y+\ln z}$ при x = 1, y = 2, z = 1.

Решение:

Из заданного выражения определим Δx = 1,04 – 1 = 0,04, Δy = 1,99 – 2 = -0,01, Δz = 1,02 – 1 = 0,02.

Найдем значение функции u(x, y, z) = $\sqrt{1^2+\ln 1}=1$

Находим значения частных производных в точке М:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y\cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{2\cdot 1}{2\sqrt{1}}=1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^y\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du=0{,}04\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-0{,}01\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+0{,}02\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=1\cdot 0{,}04-0\cdot 0{,}01+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=0{,}04+0{,}01=0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}\approx u(1{,}2{,}1)+du=1+0{,}05=1{,}05$$

Точное значение этого выражения: 1,049.

Частные производные высших порядков.

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.**

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

<u>Определение.</u> Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

<u>Теорема Шварца.</u> Если функция f(x, y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке M(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)$$

$$d^2 z = d\left[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right] = f''_{x^2}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)(dy)^2$$

$$d^3 z = f'''_{x^3}(x,y)(dx)^3 + 3f'''_{x^2 y}(x,y)(dx)^2 dy + 3f'''_{xy^2}(x,y)dx(dy)^2 + f'''_{y^3}(x,y)(dy)^3$$

…………………

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$$

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего в скобках выражения.

<u>Экстремум функции нескольких переменных.</u>

<u>Определение.</u> Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой локального максимума.**

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой локального минимума.**

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$ (стационарные точки), либо хотя бы одна из них не существует (критические точки).

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$$

Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если

$f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума

В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Условный экстремум.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение

φ(x, y) = 0, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда u = f(x, y(x)). $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$

В точках экстремума $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$ (1)

Кроме того: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$ (2)

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение u = f(x, y) + λφ(x, y) называется **функцией Лагранжа.**

Пример. Найти экстремум функции f(x, y) = xy, если уравнение связи:

2x + 3y – 5 = 0

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = -\frac{5}{12}; \qquad x = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{5}{6};$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Выше мы рассмотрели функцию двух переменных, однако, все рассуждения относительно условного экстремума могут быть распространены на функции большего числа переменных.

Производная по направлению.

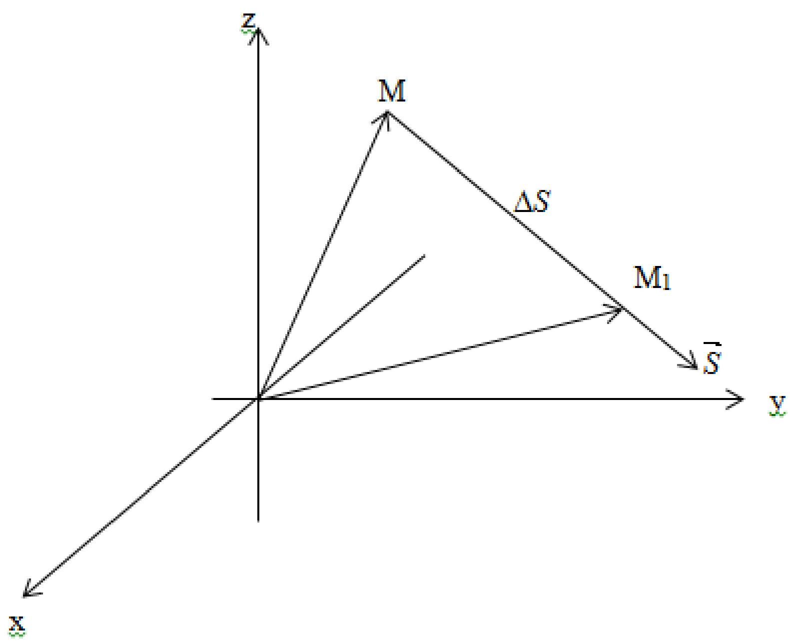
Рассмотрим функцию u(x, y, z) в точке M(x, y, z) и точке M_1(x + Δx, y + Δy, z + Δz).

Проведем через точки M и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ. Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{S}$.

Расстояние между точками M и M_1 на векторе $\vec{S}$ обозначим ΔS.

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Высказанные выше предположения, проиллюстрируем на рисунке:



Далее предположим, что функция u(x, y, z) непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y и z. Тогда правомерно записать следующее выражение:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z \text{ ,}$$

где величины ε_1, ε_2, ε_3 – бесконечно малые при $\Delta S \to 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta; \qquad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma;$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \varepsilon_2 \cos\gamma \text{ ;}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора $\vec{S}$.

Из этого уравнения следует следующее определение:

<u>**Определение:**</u> Предел $\lim\limits_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции u(x, y, z) по направлению вектора** $\vec{S}$ в точке с координатами (x, y, z).

Поясним значение изложенных выше равенств на примере

<u>Пример.</u> Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке A(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. B (3, 0).

<u>Решение.</u> Прежде всего необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ =(3-1; 0-2) = (2; -2) = $2\vec{i} - 2\vec{j}$.

Далее определяем модуль этого вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Находим частные производные функции z в общем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx;$$

Значения этих величин в точке А : $\frac{\partial z}{\partial x} = 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4;$

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$ производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

За величину $\vec{S}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$:

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\qquad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Окончательно получаем: $\frac{\partial z}{\partial s} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

<u>Градиент.</u>

<u>Определение:</u> Если в некоторой области D задана функция u = u(x, y, z) и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u.

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

<u>Связь градиента с производной по направлению.</u>

<u>Теорема:</u> *Пусть задана функция u = u(x, y, z) и поле градиентов*

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\ .$$

Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора $\vec{S}$ равняется проекции вектора gradu на вектор $\vec{S}$.

<u>Доказательство:</u> Рассмотрим единичный вектор $\vec{S} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ и некоторую функцию u = u(x, y, z) и найдем скалярное произведение векторов $\vec{S}$ и *gradu*.

$$grad u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства является производной функции u по направлению s.

Т.е. $grad u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial s}$. Если угол между векторами *gradu* и $\vec{S}$ обозначить через φ, то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор $\vec{S}$ единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать:

$$|grad u| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является проекцией вектора *gradu* на вектор $\vec{S}$.

Теорема доказана.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой- либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.

Пример. Найти градиент u(x,y,z) в точке A(1,2,3)

$$u = x^2 + y^2x + z^3$$

Решение:

Найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2$$

Частные производные в точке А принимают значения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 18$$

Тогда **grad**u=6**i**+4**j**+18**k**

S{3,2,9}-направление наиболее быстрого роста функции.