Практическое занятие - 6

Решение линейного неоднородного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Метод неопределенных коэффициентов для специальной правой части ДУ

Рассмотрим метод решения линейных, неоднородных ДУ второго порядка.

Пусть имеем ДУ в форме $y'' + py' + qy = f(x),$

где p,q- постоянные числа.

Решение этого уравнения должно состоять из суммы общего решения однородного уравнения: $y'' + py' + qy = 0,\ y_{од}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

и частного решения $y_{чн}$ неоднородного уравнения: $y'' + py' + qy = f(x),$

с правой частью $f(x)$.

Общее решение имеет вид $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_{чн}$.

Итак, решаем последовательно две задачи.

Первая - это нахождение общего решения соответствующего однородного ДУ.

Вторая задача заключается в подборе частного решения, когда правую часть ДУ можно представить в специальной форме. Если правые части ДУ состоят из алгебраических композиций степенных, показательных и тригонометрических функций, то разработано достаточно много методов подбора частного решения. Рассмотрим только некоторые из них.

I. **Пусть правая часть ДУ имеет вид** $f(x) = P_n(x)e^{mx}$,

где $P_n(x)$ полином n -ого порядка с заданными коэффициентами.

Тогда частное решение неоднородного ДУ ищется в виде $y_ч = x^k Q_n(x)e^{mx}$, где $Q_n(x)$ полином n -ого порядка, только с неизвестными коэффициентами. Величина k определяется из условия кратности корней характеристического уравнения и значением величины m из правой части ДУ. Возможны следующие варианты:

а.) $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq m$, то $k = 0$;

б.) $\kappa_1 \neq \kappa_2$, κ_1 или $\kappa_2 = m$, то $k = 1$;

в.) $\kappa_1 = \kappa_2 = m$, то $k = 2$.

Пример 1. Решить неоднородное ДУ второго порядка: $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$.

Решение. **Первая задача** - это нахождение общего решения соответствующего однородного ДУ: $y'' - 3y + 2y = 0$, для которого характеристическое уравнение κ^2 - 3κ + 2 = 0, имеет действительные различные корни $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$ и общее решение однородного ДУ второго порядка имеет вид $y_{од} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Вторая задача заключается в подборе частного решения ДУ. Правая часть ДУ имеет вид $f(x) = xe^{3x}$. В правой части ДУ содержится полином первой степени (в общем виде это $(Ax+B)$) и множитель e^{3x}. Можно предположить, что $y_ч = (Ax+B)e^{3x}$. Это действительно так, поскольку ни один из корней характеристического уравнения не равен 3- численному показателю экспоненты в правой части уравнения. Коэффициенты A и B пока неизвестны. Для их отыскания используем заданное неоднородное ДУ. Находим первую и вторую производную частного решения $y_ч = (Ax+B)e^{3x}$ и подставляем в ДУ: $y'_ч = (3Ax + 3B + A)e^{3x}$,

$y''_ч = (6A + 9Ax + 9B)e^{3x}$.

После сокращения на e^{3x}, получим алгебраическое уравнение $9Ax + 9B + 6A - 9Ax - 9B - 3A + 2Ax + 2B = x$. Приведя подобные члены, получаем $3A + 2Ax + 2B = x$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получаем 2 уравнения: $\begin{cases} 2A = 1 \\ 3A + 2B = 0 \end{cases}$, отсюда

$A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{4}$, частное решение ДУ имеет вид $y_ч = (\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})e^{3x}$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})e^{3x}$

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})e^{3x}$

Пример 2. Решить неоднородное ДУ второго порядка: $y'' - 2y' + y = (1+x)e^x$.

Решение. **Первая задача** - это нахождение общего решения соответствующего однородного ДУ: $y'' - 2y' + y = 0$, для которого характеристическое уравнение $\kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0$, имеет действительные кратные корни $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ и общее решение однородного ДУ второго порядка имеет вид $y_{од} = (C_1 + C_2 x)e^x$.

Вторая задача заключается в подборе частного решения, когда правая часть ДУ имеет вид $f(x) = (1+x)e^x$.

В правой части ДУ содержится полином первой степени, в общем виде это $(Ax+B)$ и множитель e^x. Можно предположить что $y_ч = (Ax+B)e^x$, но так как корни характеристического уравнения кратные и равны 1, а значение степени показателя в правой части ДУ также равно $m = 1$, то **выбираем вариант (в)** и частное решение ищем в форме $y_ч = x^2(Ax+B)e^x$. Находим первую и вторую производную частного решения и подставляем в ДУ

$y'_ч = (2Ax^2 + 2xB + x^2A + Ax^3 + Bx^2)e^x$,

$y''_ч = (2Ax + 2B + 2Ax + 2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + Ax^2 + 2Ax^2 +$

$+ 2Bx + Ax^2 + Ax^3 + Bx^2)e^x$.

После сокращения на e^x , получим алгебраическое уравнение

$$6Ax + 2B + 2Ax^2 + 4xB + 4Ax^2 + Ax^3 + Bx^2 - 4Ax^2 - 4Bx - 2Ax^2 - 2Ax^3 - Bx^2 + $$
$$+ Ax^3 = 1 + x.$$

Приравнивая коэффициенты в правой и левой частях уравнения при одинаковых степенях x, получаем систему для определения неопределенных коэффициентов A и B.

x^3 $\quad 0 = 0$

x^2 $\quad 0 = 0$. Получим $A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{2}$.

x^1 $\quad 6A = 1$

x^0 $\quad 2B = 1$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_ч = \frac{x^2}{2}(1 + \frac{x}{3})e^x.$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{x^2}{2}(1 + \frac{x}{3})e^x$$

Ответ: $y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{x^2}{2}(1 + \frac{x}{3})e^x$.

2. Пусть правая часть ДУ имеет вид $(\hat{e}_1 = \alpha - i\beta, \quad \hat{e}_2 = \alpha + i\beta)$

$$f(x) = Asin\beta x + Bcos\beta x$$

и если число $i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде $y = Msin\beta x +$
$Ncos\beta x,$ где M и N пока не известные числа.

Если же $i\beta$ является корнем, то $y = x(Msin\alpha x + Ncos\beta x)$

3. Пусть правая часть ДУ имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x)$$

и если число $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде.

$$y = e^{\alpha x}(R_n(x)sin\beta x + R_m(x)cos\beta x)$$

Здесь $P_n(x)$, $Q_m(x)$ заданные полиномы с известными коэффициентами, а полиномы $R_n(x)$, $R_m(x)$ - соответствующие по порядку полиномы, только с неизвестными коэффициентами.

Пример 3. Решить неоднородное ДУ: $y'' + 6y' + 10y = 80e^x \cos x$.

Решение. **Первая задача** - это нахождение общего решения соответствующего однородного ДУ: $y''+6y'+10y=0$, для которого характеристическое уравнение

$k^2+6k+10=0, \quad \Rightarrow k_{1,2}=-3\pm i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{од}} = (C_1 sinx + C_2 cosx)e^{-3x}$$

Вторая задача. Корни характеристического уравнения разные, комплексно сопряженные, и ни один из них по параметрам не совпадает с параметрами правой части ДУ: $\alpha = 1, \quad \alpha \neq -3$. Поэтому частное решение ищем в виде

$$y = (Asinx + Bcosx)e^x$$

Определяем значения A и B подставляя в ДУ, которое рассматриваем как тождество. Находим первую и вторую производные частного решения

$$y' = (sinx(A-B) + (A+B)cosx)e^x,$$
$$y'' = 2(Acosx - Bsinx)e^x.$$

Тогда ДУ после сокращения на e^x превратится в соотношение $4BCosx+12B(\cos x+\sin x)+10(A\cos x+B\sin x)\equiv 80\cos x$. Отсюда получим уравнение при Cos x : 8 B +16 A = 80 и уравнение при Sin x: 16 B - 8A = 0. Решение этой системы дает значения A = 4, B = 2. Таким образом, частное решение ДУ имеет вид $y_{\div} = e^x 2(2\cos x+\sin x)$.

Ответ: $y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+2e^x(2\cos x+\sin x)$.