# Введение в математический анализ

| | | | |
|---|---|---|---|
| Сайт: | Электронное обучение ИРНИТУ | Напечатано:: | Арбакова Анастасия Вячеславовна |
| Курс: | Введение в математический анализ для студентов 1 курса | Дата: | Понедельник, 7 Июнь 2021, 04:19 |
| Книга: | Введение в математический анализ | | |

Processing math: 12%

# Описание

В книге представлены лекции и практические занятия по данной теме.

Индивидуальные задания представлены в разделе "Контроль знаний" в pdf файлах.  Студент сдает индивидуальные задания в конце изучения темы. Номер варианта выбирается соответственно порядковому номеру студента в списке группы.

Processing math: 12%

# Оглавление



Processing math: 12%

# 1. Числовые последовательности и пределы

### 1. Обозначение числовых множеств

***N*** - множество натуральных чисел (числа, которые называют в строго определенном порядке: один, два, три, четыре, пять и т.д. и используют при пересчете предметов);

***Z*** - множество целых чисел (все натуральные числа, нуль и все целые отрицательные числа: $-1$, $-2$, $-3$ и т.д.);

***Q*** - множество рациональных чисел (отрицательные и положительные числа (целые и дробные) вместе с числом нуль)**;**

***R*** - множество действительных (вещественных) чисел (все рациональные и иррациональные (т.е. числа, представляющие длины отрезков, которые нельзя выразить целым или дробным числом, в том числе корни из положительных чисел));

***C*** - множество комплексных чисел (все действительные и мнимые (квадратные корни из отрицательных чисел) числа.

### 2. Логические символы (кванторы)

$\forall$ - для любого, для всех, для каждого; $\exists$ - существует, найдется; $\exists$ - не существует ($A$ - отрицание $A$ (не ***A***));

$\Rightarrow$ следование ($A \Rightarrow B$ - $A$ влечет за собой $B$); $\in$ принадлежит ( $\bar{\in}$ не принадлежит);

$\cup$ объединение; $\cap$ пересечение; **:** такой что, при;

$\rightarrow$ выполняется; $\Leftrightarrow$ равносильность, эквивалентность ( $A \Leftrightarrow B$ **-** ***A*** равносильно ***B***; ***A*** следует из ***B*, а *B*** следует из ***A*** ; ***A*** необходимо и достаточно для $B$; $A$ тогда и только тогда, когда $B$.)

### *3. Числовые последовательности*

***Определение.*** Однозначное отображение множества натуральных чисел $N$ во множество действительных чисел $R$ называется *числовой последовательностью. Обозначается:* $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots$ или $\varphi = \left\{a_n\right\}$, где $a_i$ - члены последовательности, $a_n$ - общий член последовательности.

***Определение.*** Член последовательности, записанный в виде формулы, называется *общим членом*.

*Например:* а) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \dots,$ б) $\{2n\} = 2;\ 4;\ 6;\ \dots,$ в) $\left\{3^n\right\} = 3;\ 9;\ 27;\ \dots$ .

***Определение.*** Последовательность $\left\{a_n\right\}$ называется *ограниченной*, если $\exists$ число $k \in R\ :\ \left|a_n\right| \le k,\quad \forall n \in N.$ *Например:* $\left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \dots$ - ограниченная последовательность, $k = \frac{1}{2}$.

***Определение.*** Число а называется *пределом последовательности* $\left\{a_n\right\}$, если для любого, положительного, сколь угодно малого числа $\varepsilon$, найдется положительное число (номер) $N$, что выполняется неравенство $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$ при $n > N$, *обозначается* $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N > 0\ :\ \forall n > N \quad \Rightarrow \quad \left|a_n - a\right| < \varepsilon.$$

***Геометрически*** число $a$ есть предел последовательности $\left\{a_n\right\}$, если для любой, сколь угодно малой окрестности с центром в точке $a$ и радиусом $\varepsilon$, найдется такое значение $a_n$, что все точки, соответствующие последующим значениям последовательности будут находиться в этой окрестности (Рис.1).

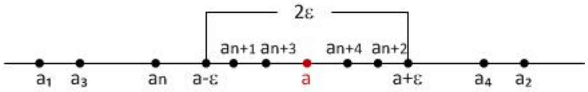



Рис.1

***Определение.*** Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет предел и *расходящейся*, если предела не имеет.

*Например:* а) $\{n\} = 1;\ 2;\ 3;\ \dots$ - неограниченная и расходящаяся; б) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \dots$ - ограниченная ( $\le 1$), сходящаяся (сходится к 0);

в) $\left\{(-1)^n\right\} = -1;\ 1;\ -1;\ \dots$ - ограниченная ( $\left|(-1)^n\right| = 1$) , расходящаяся.

***Определение.*** Последовательность называется *неубывающей*, если $a_1 \le a_2 \le\ \dots\ \le a_n \le \dots$ и - *невозрастающей*, если $a_1 \ge a_2 \ge\ \dots\ \ge a_n \ge\ \dots$ .

Processing math: 12%

***Определение.*** Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*.

**Некоторые теоремы о сходящихся последовательностях**

- Любая сходящаяся последовательность - ограничена.
- Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является ограниченной.
- Критерий сходимости Коши: последовательность $\left\{a_n\right\}$ сходится тогда и только тогда, когда :

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists$ число (номер) $n \in N : \ \forall k \geq n, \ \ \forall m \geq n \ \rightarrow \ \left|a_k - a_m\right| < \varepsilon.$

*Например:* последовательность $\left\{\frac{1}{n^2}\right\} = 1; \ \frac{1}{4}; \ \frac{1}{9}; \ \ldots$ - строго убывающая и ограниченная, следовательно она сходится.

Processing math: 12%

# 1.1. Практическое занятие №1

**Пример 1.** Записать первые четыре члена последовательности $\left\{a_n\right\}$, если 1) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot \left(n+1\right)}{n^2}$ $\quad 2\Big)$ $a_n = Sin\frac{\pi \cdot n}{2}$

***Решение.*** **1)** Для отыскания первого члена последовательности с общим членом $a_n = \frac{(-1)^n \cdot \left(n+1\right)}{n^2}$ необходимо вместо n в формуле общего члена поставить значение 1: $a_1 = \frac{(-1)\cdot(1+1)}{1^2} = -2.$

Для отыскания второго члена последовательности в формулу вместо n необходимо подставить значение 2: $a_2 = \frac{(-1)^2 \cdot \left(2+1\right)}{2^2} = \frac{3}{4}$

Аналогичным образом найдем третий и четвертый члены последовательности: $a_3 = \frac{(-1)^3 \cdot \left(3+1\right)}{3^2} = \frac{-4}{9};\quad a_4 = \frac{(-1)^4 \cdot \left(4+1\right)}{4^2} = \frac{5}{16}.$

**2)** Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = Sin\frac{\pi \cdot n}{2}$ . Определим первые четыре члена последовательности. Для этого в общий член последовательности вместо n подставим числовые значения 1,2,3 и 4 соответственно:

$a_1 = Sin\frac{\pi \cdot 1}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad a_2 = Sin\frac{\pi \cdot 2}{2} = \sin\pi = 0 a_3 = Sin\frac{3\cdot\pi}{2} = -1 \qquad a_4 = Sin\frac{4\cdot\pi}{2} = \sin 2\pi = 0$

**Пример 2.** Записать первые три члена последовательности, если $a_n = a_{n-1} + 3, \quad a_1 = 2.$

***Решение.*** Нам известно, что $a_1 = 2$. Найдем по предложенной формуле $a_n = a_{n-1} + 3$ значение второго члена последовательности: $a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$ . Третий член последовательности определим опять опираясь на формулу $a_n = a_{n-1} + 3$ , учитывая, что $a_2 = 5$, то $a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8.$

**Пример 3.** Зная несколько первых членов последовательности $\left\{a_n\right\}$, напишите формулу её общего члена:

$1\Big)\ 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots; \quad 2\Big)\ -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \ldots$

***Решение.*** **1)** Рассмотрим последовательность $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ и проанализируем её. Первый член последовательности можно представить в виде $\frac{1}{1}$ тогда числитель каждого члена последовательности равен единице. Знаменатели членов последовательности: $1, 3, 5, 7, \ldots$– представляют собой арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 1, \quad d = 2$. Используя формулу нахождения $n$ - $го$ члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d \cdot \left(n-1\right)$, получим $a_n = 1 + 2 \cdot \left(n-1\right) = 2n - 1$. Тогда общий член последовательности можно записать в виде: $a_n = \frac{1}{2n-1}$ .

**2)** Определим общий член последовательности $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \ldots$ Отметим, что члены этой последовательности чередуются по знаку, поэтому общий член последовательности будет содержать множитель $(-1)^n$. Первый член последовательности можно представить в виде $\frac{1}{1}$ , тогда числитель каждого члена последовательности равен единице. Рассмотрим знаменатели членов последовательности: $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25\ldots$– эти значения представляют собой квадраты натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5 ... Тогда общий член последовательности можно записать в виде: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}.$

**Пример 4.** Показать, что при $n \to \infty$ последовательность $\frac{7}{3},\ \frac{10}{5},\ \frac{13}{7}, \ldots, \frac{3n+4}{2n+1}, \ldots$ имеет пределом число $\frac{3}{2}$.

***Решение***. $a_n - \frac{3}{2} = \frac{3_{2\therefore n+4}}{2n+1} - \frac{3_{2n+1\therefore}}{2} = \frac{5}{2(2n+1)}$. Определим при каком п выполняется неравенство: 52(2п+1)<ε. Следовательно

2(2п+1)·ε>5  2n+1>52ε   n>54ε-12

Тогда , если n>54ε-12, то an-32<ε, m.e.limn→∞an=32.

Пусть ε=0,1⇒an-32<0.1 выполняется при п>504-12=12 (например п=13).

Пусть ε=0,01⇒an-32<0.01 выполняется при п>5004-12=124,5 (например п=125)

Processing math: 12%

# 2. Функция

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости между элементами двух множеств.

***Определение.*** Пусть X и Y - некоторые числовые множества и пусть каждому элементу x∈X по какому-либо закону *f* поставлен в соответствие только один элемент y∈Y. Тогда определена *функциональная зависимость* y от x по закону y=f(x). При этом x называют *независимой переменной* (или *аргументом*), y - *зависимой переменной,* множество X - *областью определения* функции, множество Y - *областью значений* функции.

***Определение.***Если y является функцией от u, а u в свою очередь зависит от переменной x, то y также зависит от x. Пусть y=f(u), u=φ(x). Тогда функция y=f(φ(x)) называется *сложной функцией.*

Например, если y=sin u, u=x2 , то функция y=sin(x2) является сложной функцией.

***Пример 1.*** Найти области определения функций: **а)** f(x)=21x+arcsin x+23; б) f(x)=52x-x23-7cos 2x.

***Решение.* а)** Функция ax, a>0 определена при всех действительных значениях x, поэтому функция 21x определена в точности при тех значениях x, при которых имеет смысл выражение 1x, т.е. x≠0. Область определения второго слагаемого находим из двойного неравенства -1≤x+23≤1, ⇒-5≤x≤1. Область определения функции f(x) есть пересечение областей определения обоих слагаемых, откуда D(f)=[-5;0)∪(0;1].

**б)** Функция 7cos 2x определена при всех действительных значения x, а функция 52x-x23 лишь при тех значениях x, при которых 2x-x2≠0 ⇒x≠0, x≠2. Таким образом D(f)=(-∞;0)∪(0;2)∪(2;+∞).

***Пример 2.*** Найти множество значений функций: а) f(x)=x2+4x+1; б) f(x)=3-5Sinx.

***Решение. а)*** Так как x2+4x+1=(x+2)2-3, а (x+2)2≥0 для всех значений x, то f(x)≥-3 для всех x. Следовательно E(f)=[-3;+∞).

***б)*** E(sinx)=-1;1 ⇒E(-5sin x)=-5;5. Так как f(x)=-5sin x+3, то E(f)=-2;8.

Задать функцию - значит, указать закон *f* определения зависимой переменной для каждого значения аргумента из области определения функции. Существует три основных способа задания функций.

1. *Табличный способ:* функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Этот способ имеет широкое применение в различных отраслях знаний и приложениях: экспериментальных измерениях, таблицах бухгалтерской отчетности и банковской деятельности, статистических данных и т.п.

2. *Аналитический способ:* этот способ состоит в задании связи между аргументом и функцией в виде формулы или набора формул. Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, т.к. к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию y=f(x).

3. *Графический способ:* соответствие между аргументом и функцией задается посредством графика. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком - его неточность.

***Определение.*** Совокупность точек плоскости XOY, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты - соответствующими значениями функции, называются *графиком* данной функции.

***Определение.*** Функция y=f(x), определённая на множестве D, называется *четной*, если для любого x∈D, выполняются условия f(-x)=f(x).

График четной функции симметричен относительно оси OY.

**Определение.** Функция y=f(x), определённая на множестве D, называется *нечетной*, если для любого $x \in D$ , выполняются условия f(-x)=-f(x).

График нечетной функции симметричен относительно начало координат.

**Пример 3.** Исследовать на чётность функцию y=x-4x2-9.

***Решение.*** Имеем f(-x)=-x-4(-x)2-9=-x+4x2-9. Так как f(-x)≠f(x) и f(-x)≠-f(x), то функция не является ни чётной, ни нечётной.

***Определение.*** Функция y=f(x), определённая на множестве D, называется *периодической* на этом множестве, если существует такое число T>0, что при каждом x∈D значение (x+T)∈D и f(x+T)=f(x). При этом число T называется *периодом функции.* Если T - период функции, то её периодами также будут числа m·T, где т=±1; ±2,....

Processing math: 12%

# 3. Предел функции

**Лекции**

Processing math: 12%

# 3.1. Предел функции в бесконечности. Предел функции в точке. Односторонние пределы.

## Предел функции в бесконечности

***Определение.*** Число A называется *пределом функции* $y=fx$ при $x\to\infty$, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа $\varepsilon$ существует положительное число (номер) N, такой, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $x<N$ выполняется условие $fx-A<\varepsilon$. Запишем определение, применяя логическую символику: $A=\lim x\to\infty fx$, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N>0\ :\forall x: x>N\ \to\ fx-A<\varepsilon$.

Заменяя в определении условие $x>N$ на $x>N$ или на $x<-N$, будем получать: $A=\lim x\to+\infty fx$ или $A=\lim x\to-\infty fx$, то есть значение Аявляется пределом функции в бесконечности тогда и только тогда когда одновременно существуют эти два предела.

*Геометрический смысл* соотношения $A=\lim x\to+\infty fx$ заключается в том, что кривая $y=fx$ при $x\to\infty$ асимптотически приближается к прямой $y=A$ (Рис. 1). Аналогично данному иллюстрируется и второе соотношение.

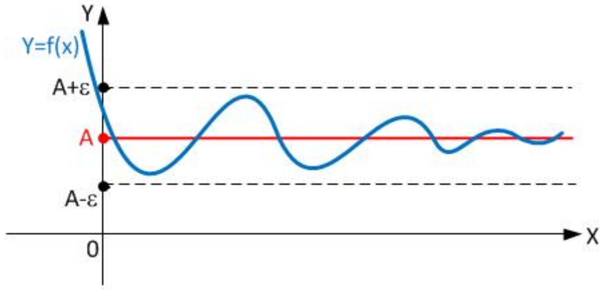



Рис. 1

## Предел функции в точке

***Определение.*** Число A называется пределом функции $y=fx$ при $x\to a$, то есть $A=\lim x\to afx$, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$ : для всех значений x, удовлетворяющих условию $x-a<\delta\ \to\ fx-A<\varepsilon$.

*Геометрический смысл* соотношения $A=\lim x\to afx$ заключается в том, что для всех точек x, отстоящих от точки a не далее, чем на $\delta$, точки графика функции $y=fx$ лежат внутри полосы шириной $2\varepsilon$, ограниченной прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$ (Рис.2).

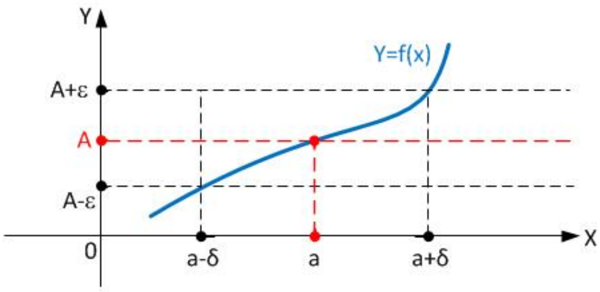



Рис. 2

!!! Замечание!!! Наряду с функциями, имеющими некоторый конечный предел A при $x\to a$ или при $x\to\infty$, существуют функции с бесконечными пределами.

## Односторонние пределы функции

***Определение.*** Число A1 называется пределом слева функции $y=fx$ в точке a , то есть $A1=\lim x\to a-0fx=fa-0$, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$ : для всех значений $x\in a-\delta;a\ \to\ fx-A1<\varepsilon$.

***Определение.*** Число A2 называется пределом справа функции $y=fx$ в точке a , то есть $A2=\lim x\to a+0fx=fa+0$, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$ : для всех значений $x\in a;a+\delta\ \to\ fx-A2<\varepsilon$.

Таким образом, для существования предела A функции $y=fx$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы $fa-0=fa+0$.

***Определение.*** Пределы функции $y=fx$ слева и справа в точке a называются *односторонними* пределами.

***Примеры.*** Даны функции: **а)** $y=\cos x$; **б)** $y=1x$; **в)** $y=x+2,\ x\le 0x2\ \ ,\ x>0$. Найти односторонние пределы этих функций в точке $x=0$. Существует ли предел данных функций в точке $x=0$?

**а)** $\lim x\to-0\cos x=1$; $\lim x\to+0\cos x=1\Rightarrow\lim x\to 0\cos x=1$ (Рис.3а));

**б)** $\lim x\to-01x=-\infty$; $\lim x\to+01x=+\infty\Rightarrow\lim x\to 01x$-не существует (Рис.3б));

Processing math: 12%

**в) $\lim x\to-0x+2=2$; $\lim x\to+0x2=0$** $\Rightarrow$ предел данной кусочно-непрерывной функции в точке $x=0$ не существует (Рис.3в)).

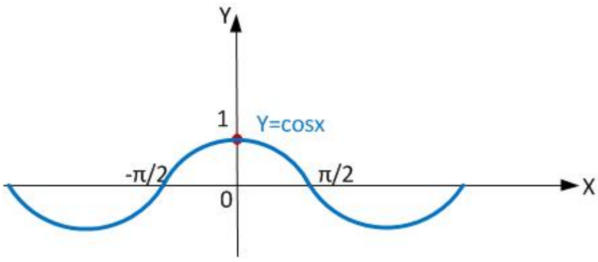



Рис. 3а)

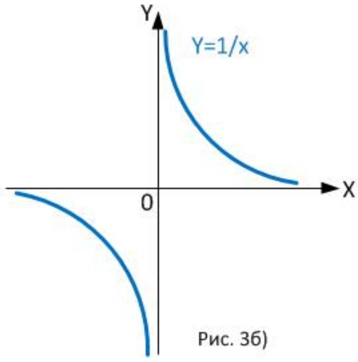



Рис. 3б)

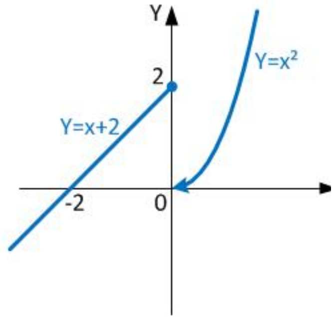



Рис. 3в)

Processing math: 12%

# 3.2. Бесконечно большие и бесконечно малые величины. Свойства. Зависимость. Основные теоремы о пределах.

**Бесконечно большие и бесконечно малые величины**

***Определение.*** Если для любого числа M>0 ∃δ>0 : ∀x, удовлетворяющих условию x-a<δ выполняется неравенство fx>M, то функцию fx называют бесконечно большой величиной (б.б.в.)

Заменяя в определении fx>M на fx>M или fx<-M, получим: limx→afx=+∞ или limx→afx=-∞. То есть , существуют положительные и отрицательные бесконечно большие величины.

***Определение.*** Функция αx называется бесконечно малой величиной (б.м.в.) при x→a, если ∀ε>0 ∃δ>0 : ∀x, удовлетворяющих условию x-a<δ выполняется неравенство αx<ε. Иначе, если limx→aαx=0, то функция αx называется бесконечно малой величиной.

**Теорема.** Если функция y=fx может быть представлена в виде y=A+αx, где A=const, αx-бесконечно малая величина, то limx→ay=A,

и обратно, если limx→ay=A , то функцию y=fx можно представить в виде y=A+αx.

**Свойства бесконечно малых величин**

1. Сумма конечного числа бесконечно малых величин, есть величина бесконечно малая.
2. Произведение бесконечно малой величины на постоянную величину, есть величина бесконечно малая.
3. Произведение бесконечно малой величины на величину ограниченную, есть величина бесконечно малая.
4. Частное от деления бесконечно малой величины на величину ограниченную, есть величина бесконечно малая.

**Зависимость между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами**

- Если fx бесконечно большая величина при x→a, то αx=1fx бесконечно малая величина при x→a.
- Если αx бесконечно малая величина при x→a и в некоторой окрестности точки a отлична от нуля, то fx=1αxбесконечно большая величина при x→a.

!!! Замечание!!! В пределах справедливы равенства: 1∞=0 и 10=∞.

**Основные теоремы о пределах**

Пусть функции fx и gx имеют конечные пределы в точке a. Тогда:

**Теорема 1.** Предел от суммы функций равен сумме их пределов.
**Доказательство.** Пусть limx→afx=A, limx→agx=B. Тогда fx=A+αx, gx=B+βx, где αx, βx -бесконечно малые величины (см.теорему выше). Следовательно, fx+gx=A+αx+B+βx=A+B. Значит, limx→afx+gx=limx→afx+limx→agx. Что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Предел от произведения функций равен произведению их пределов.
**Доказательство.** Пусть limx→afx=A, limx→agx=B. Тогда fx=A+αx, gx=B+βx, где αx, βx -бесконечно малые величины. Тогда: fx·gx=A+αx·B+βx=A·B+A·βx+B·αx+αx·βx=A·B, так как A·βx+B·αx+αx·βx- бесконечно малая величина (см. свойства бесконечно малых величин). Итак, limx→afx·gx=limx→afx·limx→agx, что и требовалось доказать.

**Следствие.** Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

**Теорема 3.** Предел от частного двух функций равен частному их пределов, если предел знаменателя не равен нулю.
**Доказательство.** Пусть limx→afx=A, limx→agx=B. Тогда fx=A+αx, gx=B+βx, где αx, βx -бесконечно малые величины. Тогда: fxgx=A+αxB+βx=AB+A+αxB+βx-AB=AB+A·B+B·αx-A·B-A·βxB·B+βx=AB, так как B·αx-A·βx- бесконечно малая величина (см. свойства бесконечно малых величин). Итак, limx→afxgx=limx→afxlimx→agx, limx→agx≠0, что и требовалось доказать.

***Примеры.*** Вычислить пределы, используя подходящие теоремы о пределах.
**1.** limx→∞x2+2xx2=limx→∞1+2x=limx→∞1+2limx→∞1x=1+0=1.
**2. limx→1 3x+24x-5=limx→13x+2limx→14x-5=3limx→1x+24limx→1x-5=5-1=-5.**

Processing math: 12%

## 3.3. Практическое занятие№3

**Пример 1.** Найти limx→-13x2-14x2+5x+2.

***Решение.*** Пользуясь теоремой предела частного, получим: limx→-13x2-14x2+5x+2=limx→-13x2-1limx→-14x2+5x+2=3·1-14·1+5·(-1)+2=2.

***Замечание:*** Вычисление любого предела от элементарной функции при x→a следует начинать с подстановки в функцию вместо *x* значения a.

**Пример 2.** Найти а) limx→∞3x2-5x+62x2+8x-9; б)limx→∞3x3-7x2+95x2+4x-7; в)limx→∞3x3+42x3+x4; г)limx→∞3x4-2x7+3x-2.

***Решение*. а)** Числитель и знаменатель дроби бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределённость ∞∞. Раскрывая эту неопределённость поделим числитель и знаменатель на x2:limx→∞3x2-5x+62x2+8x-9=limx→∞3-5x+6x22+8x-9x2.

Далее воспользуемся теоремами о пределах, а также тем, что функции 1x и 1x2- бесконечно малые при x→∞

limx→∞3-5x+6x22+8x-9x2=limx→∞3-5·limx→∞1x+6limx→∞1x2limx→∞2+8limx→∞1x-9limx→∞1x2=3-0+02+0-0=32.

**б)** Числитель и знаменатель дроби бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределённость ∞∞ Числитель и знаменатель поделим на x3: limx→∞3x3-7x2+95x2+4x-7=limx→∞3-7x+9x25x+4x2-7x3=1x→0; 1x2→01x3→0 при x→∞=30=∞.

**в)** Числитель и знаменатель дроби бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределённость ∞∞ . Числитель и знаменатель поделим на x4: limx→∞3x3+42x3+x4=limx→∞3x+4x42x+1=01=0.

**г)** Здесь для раскрытия неопределённости ∞∞вынесем из числителя и знаменателя x4:

limx→∞3x4-2x7+3x-2=limx→∞x4(3-2x4)x41x+3x7-2x8=3-00+0-0=30=∞.

***Замечание:*** Если степени числителя и знаменателя равны, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях x.

Если степень числителя выше степени знаменателя, то предел равен ∞. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен 0.

**Пример 3.** Вычислить пределы а)limx→2x3-4xx2-5x+6 б) limx→1x3-x2-x+1x3+x2-x-1

***Решение.* а)** lim(x→2x3-4x)=0; lim(x→2x2-5x+6)=0. В таких случаях говорят, что имеем неопределённость вида 00. Для её раскрытия вынесем в числителе за скобки общий множитель x и используем формулу разности квадратов x2-4=(x-2)(x+2), а в знаменателе применим формулу разложения трехчлена на множители ax2+bx+c=a(x-x1)(x-x2), где x1 и x2 - корни трёхчлена, которые находятся по формуле x1,2=-b±b2-4ac2a. Трехчлен x2-5x+6=0 имеет корни x1=2; x2=3 и раскладывается на множители следующим образом x2-5x+6=(x-2)(x-3). Получим множитель x-2 на который и сократим дробь:

limx→2x3-4xx2-5x+6=limx→2x(x-2)(x+2)(x-2)(x-3)=limx→2x(x+2)(x-3)=2·42-3=-8.

**б)** Разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на x2-1

limx→1x3-x2-x+1x3+x2-x-1=limx→1x2(x-1)-(x-1)x2(x+1)-(x+1)=limx→1(x2-1)(x-1)(x2-1)(x+1)=02=0.

**Пример 4.** Вычислить пределы а) limx→0x+4-2x; б) limx→0x21+x23-1; в) limx→-1x+5-2x+6x3+1

***Решение.* а)** Для раскрытия неопределённости вида 00 умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое знаменателю, x+4+2 и используем формулу разности квадратов:

limx→0x+4-2x=00=limx→0(x+4-2)(x+4+2)x·(x+4+2)=limx→0x+4-4x·(x+4+2)=limx→01x+4+2=14.

**б)** Для раскрытия неопределённости вида 00 умножим числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат суммы ((1+x23)2+1+x23+1) и используем формулу разности кубов:

limx→0x21+x23-1=00=limx→0x2((1+x23)2+1+x23+1)(1+x23-1)((1+x23)2+1+x23+1)=limx→0x2((1+x23)2+1+x23+1)1+x2-1==limx→0x2((1+x23)2+1+x23+1)x2=1+1+1=3.

**в)** Выражение, сопряжённое числителю есть x+5+2x+6; сопряжённым выражением для знаменателя будет x23-x3+1. Далее при умножении числителя и знаменателя на сопряжённое числителю и сопряжённое знаменателя в числителе получаем формулу разности квадратов, а в знаменателе формулу суммы кубов:
limx→-1x+5-2x+6x3+1=00=limx→-1(x+5-2x+6)(x+5-2x+6)(x23-x3+1)(x3+1)(x23-x3+1)(x+5-2x+6)=limx→-1((x+5)-(2x+6))(x23-x3+1)(x+1)(x+5+2x+6)=limx→-1-(x+1)(x23-x3+1)(x+1)(x+5+2x+6)=-limx→-1(x23-x3+1)(x+5+2x+6)=-1+1+12+2=-34

**Пример 5**. Вычислить пределы а) limx→∞(x2-5x+6-x); б)limx→111-x-31-x3
***Решение.* а)** Здесь мы имеем дело с неопределённостью вида ∞-∞. Для раскрытия этой неопределённости достаточно теми или иными способами преобразовать заданное выражение в дробь, после чего получаются уже разобранные выше неопределённости (∞∞ или 00. В
Processing math: 12%
нахождения предела функции достаточно числитель и знаменатель домножить на сопряжённое выражение:

limx→∞(x2-5x+6-x)=limx→∞(x2-5x+6-x)(x2-5x+6+x)(x2-5x+6+x)=limx→∞x2-5x+6-x2(x2-5x+6+x)=limx→∞-5x+6x2-5x+6+x=∞∞=разделим числитель и знаменательна высшую степень x=limx→∞x(-5+6x)x(1-5x+6x2+1)=-52

**б)** Для раскрытия неопределённости вида ∞-∞ приведём к общему знаменателю:
limx→111-x-31-x3=∞-∞=limx→11+x+x2-31-x3=00=limx→1x2+x-2(1-x)(1+x+x2)=limx→1(x-1)(x+2)(1-x)(1+x+x2)=-1.

**Задания для домашней работы**

Вычислить пределы:

1. limx→∞3x3-5x2+22x3+7x2-x 2. limx→∞x5-2x2+42x4+3x2-x 3. limx→∞2x4+3x-57x3-2x2+14. limx→2x2-5x+6x2-12x+20 5. limx→-32x2+11x+153x2+5x-12 6. limx→3x2+x-12x-2-4-x7. limx→-81-x-32+x3 8. limx→-2(1x+2-2x2-4) 9. limx→∞(x+1)(x+2)-x

Ответы: 1) 32, 2) ∞, 3) ∞, 4) 18, 5) 113, 6) 7, 7) -2, 8) -∞, 9) 32

Processing math: 12%

## 3.4. Первый и второй классические пределы. Сравнение бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые.

**Первый классический предел**

Функция y=sinxx не определена при x=0. Найдем предел этой функции при x→0.

Рассмотрим окружность единичного радиуса OM=OA=1. Обозначим центральный угол ∠MOA через x, причем 0<x<π2 **(Рис.1)**.

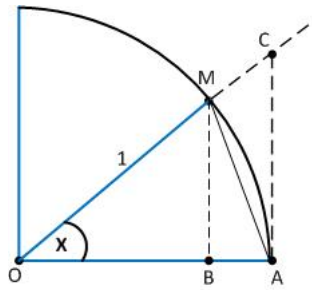



Рис. 1

Выполним дополнительные построения и сравним следующие площади: площадь ΔMOA, площадь ΔCOA и площадь сектора MOA. Очевидно, что: SΔMOA<Sсект.MOA<SΔCOA 1.

Найдем значения площадей: SΔMOA=12·OA·MB=12·1·sinx=sinx2, Sсект.MOA=12·OA·длину дуги AM=12·1·x=x2, SΔCOA=12·OA·AC=12·1·tgx=tgx2. Подставим найденные значения в неравенство (1), получим: sinx2<x2<tgx2, домножим все части неравенства на 2 и разделим на sinx>0 ⇒ 1<xsinx<1cosx ⇒ 1>sinxx>cosx или cosx<sinxx<1 2.

Для положительных значений x неравенство (2) справедливо. При x<0 имеем: cos-x=cosx, sin-x-x=-sinx-x=sinxx, следовательно, **(2)** справедливо. Перейдем к пределу при x→0. Поскольку limx→0cosx=1, limx→01=1, то 1<limx→0sinxx<1, что возможно только в случае limx→0sinxx=1.

Итак, limx→0sinxx=limx→0xsinx=00=1 - **первый классический (замечательный) предел (Рис.2).**

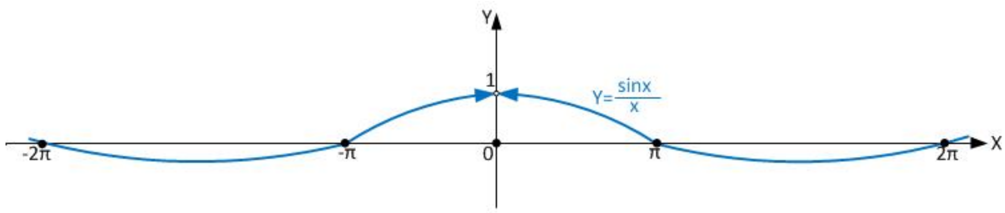



Рис.2

**Примеры.** Вычислить пределы, используя первый классический предел: **а)** limx→0tg2xx, **б)** limx→0sin2xsin3x.

**а)** limx→0tg2xx=00=limx→0sin2xx·1cos2x=2limx→0sin2x2x·limx→01cos2x=2;

**б)** limx→0sin2xsin3x=00=limx→02·sin2x2x3·sin3x3x=23·limx→0sin2x2xlimx→0sin3x3x=23.

**Второй классический предел**

Предел переменной величины 1+1nnпри n→∞ называется числом e, где e≈2,72.

Итак: limn→∞1+1nn=1∞=e **( 3)** - **второй классический (замечательный) предел.** Если в формуле **(3)** обозначить α=1x, то получим формулу: limα→01+α1α=1∞=e **(3.1)**, которая тоже является **вторым классическим (замечательным) пределом.**

**Примеры.** Вычислить пределы, используя второй классический предел: **а)** limx→∞1-3xx2, **б)** limx→∞x+3x-1x+3, **в)** limx→01+x13x.

**а)** limx→∞1-3xx2=1∞=limx→∞1+-3x-x3-3x·x2e=e-32=1ee.

**б)** limx→∞x+3x-1x+3=1∞=limx→∞x-1x-1+4x-1x+3=limx→∞1+1x-14x-14e4x-1·x+3=e4, т.к.limx→∞4x-1·x+3=4limx→∞x+3x-1=4·1=4.

**в)** limx→01+x13x=1∞=limx→01+x1xe13=e13=e3.

**Сравнение бесконечно малых величин**

Пусть αx и **βx** бесконечно малые величины (то есть αx и βx→0) при **x→a.** Чтобы сравнить эти величины вычислим предел их отношения при **x→a.** Тогда:

Processing math: 12% **0,αx более высокого порядка,чем βx, αx=oβx; ∞,βx более высокого порядка,чем αx, αx=Oβx;A A=const,αx и βx одного поря**

***Определение.*** Если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=A$, где $A=const$, то говорят, что $\boldsymbol{\alpha(x)}$ бесконечно малая величина *k-ого порядка* по сравнению с $\boldsymbol{\beta(x)}$.

При $\alpha\to 0$, получим таблицу эквивалентных бесконечно малых величин:

$\sin\alpha\sim\alpha$ $\quad$ $\mathrm{tg}\,\alpha\sim\alpha$ $\quad$ $\arcsin\alpha\sim\alpha$ $\quad$ $\mathrm{arctg}\,\alpha\sim\alpha$ $\quad$ $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ $\quad$ $e^\alpha-1\sim\alpha\Rightarrow e^\alpha\sim\alpha+1$ $\quad$ $1-\cos\alpha\sim\alpha$ $\quad$ $(1+\alpha)^n-1\sim n\alpha$ $\quad$ $a^\alpha-1\sim\alpha\ln a\Rightarrow a^\alpha\sim\alpha\ln a+1.$

**Пример.** Сравнить бесконечно малые величины $\alpha(x)=\ln(1+3x\cdot\sin x)$ и $\beta(x)=\mathrm{tg}\,x^2$ при $x\to 0$, используя таблицу эквивалентных бесконечно малых.

**Решение.** Чтобы сравнить данные величины, вычислим предел их отношения при $\boldsymbol{x\to 0}$, заменяя некоторые бесконечно малые на эквивалентные, итак: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\cdot\sin x)}{\mathrm{tg}\,x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\ln(1+3x\cdot\sin x)\sim 3x\cdot\sin x;\ \sin x\sim x;\ \mathrm{tg}\,x^2\sim x^2\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot x}{x^2}=3.$ Предел отношения бесконечно малых равен постоянной величине, следовательно $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые величины одного порядка.

!!! Замечание !!! Таблица эквивалентных бесконечно малых величин остается справедливой при $x\to a$, то есть тогда, когда $\boldsymbol{x-a\to 0}$.

*Например:* $\mathrm{tg}(x-2)^2\sim(x-2)^2$ при $x\to 2\Rightarrow x-2\to 0$; $\quad \arcsin(5x-2)\sim 5x-2$ при $x\to\frac{2}{5}\Rightarrow 5x-2\to 0.$

**Свойства эквивалентных бесконечно малых величин**

1. Если $\alpha\sim\alpha_1$ и $\beta\sim\beta_1$, то $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.
2. Если $\alpha$ и $\beta$ эквивалентные бесконечно малые, то $\alpha\cdot\beta$ бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\alpha$ и $\alpha\cdot\beta$ бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\beta$.
3. Если $\alpha\cdot\beta$ бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\alpha$ и чем $\beta$, то $\alpha$ и $\beta$ эквивалентные бесконечно малые.
4. Если $\alpha$ и $\beta$ эквивалентные бесконечно малые, то $\alpha-\beta$ бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\boldsymbol{\alpha}$ и $\alpha-\beta$ бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\beta$.
5. Если $\alpha-\beta$ бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\boldsymbol{\alpha}$ и чем $\beta$, то $\alpha$ и $\beta$ эквивалентные бесконечно малые.

Processing math: 12%

## 3.5. Практическое занятие №2

**Пример 1.** Вычислить а) limx→01-Cos5xx2;   б) limx→0Sin 3xSin 5x;   в) limx→0Sin 3x+Sin x5x;   г) limx→0arcsin 5x3x.

***Решение.* а)** Здесь используем равенство 1-Cosα=2Sin2α2

limx→01-Cos5xx2=00=limx→02(Sin5x2)2x2=2·limx→0(Sin5x2)2x2=2·(52)2=252.

**б)** Здесь для раскрытия неопределённости вида 00 разделим числитель и знаменатель на x (x→0), далее достраиваем выражение в числителе и знаменателе до первого замечательного предела.

limx→0Sin 3xSin 5x=00=limx→0Sin3xxSin5x x=limx→03Sin3x3x5Sin5x 5x=35

**в)** Здесь применим тригонометрическую формулу Sin α+Sin β=2sin α+β2Cosα-β2

limx→0Sin 3x+Sin x5x=limx→02Sin 3x+x2Cos 3x-x25x=limx→02Sin 2xCos x5x=limx→04xSin 2x2xCosx5x=45limx→0Cos x=45

**г)** Обозначим arcsin 5x=t отсюда x=15Sin t,  -π2≤t≤π2, если x→0  то  t→0.

limx→0arcsin 5x3x=limt→0t3·15Sin t=limt→053 limt→0sin tt=53.

**Пример 2** Вычислить limx→5sin (x-5)x-5

***Решение.*** limx→5sin (x-5)x-5=x-5=tx→5⇒t→0=limt→0Sin tt=1.

**Пример 3**. Найтиlimx→0(1+2Sin3x)15x.

***Решение.*** Здесь применим второй классический предел limx→0(1+x)1x=e

limx→0(1+2Sin3x)15x=(1∞)=limx→0(1+2Sin3x)12sin 3x·2sin3x5x=limx→0e2Sin3x5x=e25limx→0Sin 3xx=e65.

**Пример 4** Найти а) limx→∞(2x+32x+1)x+1;   б) limx→∞(6x-22x+1)x+1;   в) limx→37-2x2xx-9.

Решение. **а)** В нашем пределе limx→∞(2x+32x+1)x+1 выделим единицу, для этого числитель поделим на знаменатель:

2x+32x+1                         2x+11        2limx→∞(2x+32x+1)x+1=limx→∞(1+22x+1)x+1

Применим второй классический предел limx→∞(1+1x)x=e

limx→∞(1+22x+1)x+1=limx→∞(1+22x+1)2x+1222x+1·(x+1)=elimx→∞2x+22x+1=e.

**б)** Преобразуем выражение под знаком предела limx→∞(6x-22x+1)x+1 ,  для этого числитель поделим на знаменатель:

6x-22x+1                        6x+33    -5limx→∞(6x-22x+1)x+1=limx→∞(3+-52x+1)x+1=3∞=∞.

**в)** limx→37-2x2xx-9=limx→3(1+6-2x)2xx-9=limx→3(1+2(3-x))2xx-9=3-x=t,  x=3-tx→3,   t→0=limt→0(1+2t)6-2t-6-t limt→0 ((1+2t)12t))2t·6-2t-6-t=limt→0((1+2t)12t)12t-4$t^2$-6-t=e0=1

**Пример 5** Вычислить limx→∞3x(ln(x+8)-ln x).

***Решение.*** Выполним преобразование под знаком логарифма, используя свойства: loga(b·c)=logab+logac,   logabc=logab-logac,   p·logab=logabp. Получим limx→∞3x(ln(x+8)-ln x)=limx→∞ln(x+8x)3x. Вычислим предел, используя равенство limx→af(x)=f(limx→ax) и второй классический предел:

limx→∞3x(ln(x+8)-ln x)=limx→∞ln(x+8x)3x=lnlimx→∞((1+8x)x8)8x·3x=ln e24=24.

**Пример 6** Сравнить функции:  а) φ(x)=x2-4 и β(x)=x2-5x+6  при x→2;   б) φ(x)=7x8x4+1  и  β(x)=x   при  x→0

***Решение*. а)** limx→2x2-4x2-5x+6=00=limx→2(x-2)(x+2)(x-2)(x-3)=4-1=-4.

Функции φ(x) и β(x) одного и того же  порядка малости.

**б)** limx→07x8x(x4+1)=01=0.

Функция φ(x) более высокого порядка малости, чем функция β(x).

**Пример 7** Вычислить а) limx→0Cos 4x-Cos 2xarcsin23x;   б) limx→0arctg74xe-2x-1;   в)  limx→0ln Cosxx2;   г)limx→elnx-1x-e.

Processing math: 12%

***Решение.*** **а)** Используем формулу разности косинусов Cos α-Cos β=-2Sinα+β2·Sinα-β2 и эквивалентности Sin αx~αx;   arcsin αx~αx:

limx→0Cos4x-Cos 2xarcsin23x=00=limx→0-2Sin 3x·Sin xarcsin23x=limx→0-2·3x·x(3x)2=-23.

**б)** Используем эквивалентности arctg αx~αx;   (eαx-1)~αx

limx→0arctg74xe-2x-1=00=limx→074x-2x=-78.

**в)** Последовательно применим формулы Cos αx~1-(αx)22  u  ln(1+αx)~αx.

limx→0ln Cosxx2=00=limx→0ln (1-x22)x2=limx→0-x22x2=-12.

**г)** Числитель используя свойства логарифма ln e=1 u  ln a-lnb=lnab преобразуется в выражение ln x-1=ln x-lne=lnxe далее  полученное выражение преобразуем для применения формулы ln(1+αx)~αx

limx→elnx-1x-e=00=limx→elnx-ln ex-e=limx→elnxex-e=limx→eln(1+(xe-1))x-e=limx→exe-1x-e=1elimx→ex-ex-e=1e.

**Задания для домашней работы**

Вычислить пределы:

**а) limx→01-Cos 3x7x2 г) limx→∞(4x-14x+1)7x б) limx→0Cos2x-Cos32xxSinx д) limx→1(5-4x)3xx-1 в) limx→0Sin2x-Sin5xSin2x е) limx→∞(2x-3)(ln(x+2)-lnx)**

Ответы: а) 914,   б) 4,   в) -32,   г) e-72,   д) e-12,   е) 4

Processing math: 12%

# 4. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.

**Непрерывность функций.**

***Определение.*** Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0$, если она определена в некоторой окрестности этой точки (очевидно и в самой точке), то есть $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Пусть $\Delta x=x-x_0 \Rightarrow \Delta y=f(x_0+\Delta x)$. Так как $\lim_{x_0+\Delta x\to x_0} f(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=0$.

Таким образом, получаем еще одно определение: функция *непрерывна*, если бесконечно малому приращению аргумента, соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

***Определение.*** Если функция $\boldsymbol{y=f(x)}$ непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$, $a<b$, то она непрерывна на этом интервале.

***Определение.*** Функция $y=f(x)$ *непрерывна справа в точке* $x_0$, если $\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ и слева, если $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)}$.

***Определение.*** Функция $y=f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке отрезка и на его концах.

**Основные теоремы о непрерывных функциях**

**Теорема 1.** Сумма двух непрерывных в точке $x_0$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ является непрерывной функцией в точке $x_0$.

**Доказательство.** Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке $x_0$. И пусть функция $\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x)$. Исходя из определения функции непрерывной в точке, имеем: $\lim_{x\to x_0} f_1(x)=f_1(x_0)$ и $\lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_2(x_0)$. Так как предел от суммы функций равен сумме их пределов, то: $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}(f_1(x)+f_2(x))=\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_1(x_0)+f_2(x_0)=\varphi(x_0)$, то есть функция $\varphi(x)$ является непрерывной. Что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Произведение двух непрерывных в точке $x_0$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ является непрерывной функцией в точке $x_0$.

**Теорема 3**. Частное от деления двух непрерывных в точке $x_0$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ является непрерывной функцией в точке $x_0$, если знаменатель не равен нулю в рассматриваемой области.

**Теорема 4.** Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна при $x=x_0$ и функция $y=f(u)$ непрерывна при $u_0=\varphi(x_0)$, то функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x_0$.

Теоремы 2, 3, и 4 доказываются по аналогии с доказательством теоремы 1.

**Практически**, для того, чтобы функция была непрерывна в точке $x_0$ необходимо и достаточно выполнение **трех условий:**

1. Функция должна быть определена в точке $x_0$, то есть: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$;
2. Должны существовать односторонние пределы функции в этой точке, то есть: $\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ и $\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$;
3. При этом значения пределов должны быть равны, то есть: $f(x_0) = f(x_0-0) = f(x_0+0)$.

Если, **хотя бы одно** из условий **1.-3. нарушается**, то функция в данной точке терпит **разрыв**.

**Классификация точек разрыва**

***Определение.*** *Точкой разрыва функции* называется точка, в которой нарушается непрерывность функции.

**При этом:**

**1.** Если функция определена в окрестности точки $x_0$, но не определена в самой точке, то функция терпит в ней разрыв I рода, а сама точка $x_0$ называется *точкой устранимого разрыва.*

***Пример.*** Рассмотрим функцию $y=\frac{x^2-1}{x-1}$. В точке $x_0=1$ функция не определена, так как, подставляя значение $x=1$ получаем неопределенность $\frac{0}{0}$. В других точках дробь можно сократить, следовательно, $y=x+1$ при $x\neq 1$.

При этом $\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1\pm 0}(x+1)=2$. Таким образом, при $x=1$ функция имеет устранимый разрыв. Он будет устранен, если условиться, что $y=2$ при $x=1$ **(Рис. 1)**.

**2.** Если односторонние пределы функции в точке $x_0$ существуют, конечны, но не равны между собой, то функция терпит разрыв I рода, а сама точка $x_0$ называется *точкой скачка функции.* Значение $\delta=f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком функции.*

***Пример.*** Исследовать на непрерывность функцию $y=\begin{cases}x, & x<1\\ -x^2+4x, & 1\leqslant x<3\\ 6-x, & x\geqslant 3\end{cases}$.

***Решение.*** Данная функция является кусочно непрерывной, поэтому, если разрывы существуют, то они могут находиться только в точках перехода от одного аналитического задания функции к другому, а именно в точках $x_1=1$ и $x_2=3$. Вычислим односторонние пределы функции для каждой из точек: $x_1=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1-0} x=1$, $\lim_{x\to 1+0}(-x^2+4x)=3$; $x_2=3 \Rightarrow \lim_{x\to 3-0}(-x^2+4x)=3$, $\lim_{x\to 3+0}(6-x)=3$.

Итак, в точке $x_1=1$ односторонние пределы существуют, конечны, но не равны между собой, значит в этой точке функция имеет разрыв I рода, точка $x_1=1$ - точка скачка функции, скачок функции $\delta=1-3=2$ **(Рис.2)**.

**3.** Если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке $x_0$ равен $\pm\infty$ или не существует, то функция терпит разрыв I I рода. В случае, когда предел функции в точке $x_0$ равен $\pm\infty$, то точку $x_0$ называют *точкой бесконечного разрыва.*

***Пример.*** Исследовать на непрерывность функцию $y=2^{\frac{1}{1-x}}$.

***Решение.*** Данная функция не определена при $x=1$ не определена. Найдем значения односторонних пределов функции в этой точке: $\lim_{x\to 1-}$

Processing math: 12% $\ldots 2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}=+\infty$; $\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{1-x}}=2^{\frac{1}{1-(1+0)}}=2^{\frac{1}{-0}}=\frac{1}{2^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$. Так как предел слева равен $+\infty$, то функция в точке $x=1$ терпит разрыв I I рода, точка $x=1$ - точка бесконечного разрыва. Для построения схематического чертежа вычислим $\lim_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{1}{1-x}} = 2^{\frac{1}{1-\pm\infty}} = 2^0 = 1$ **(Рис.3)**

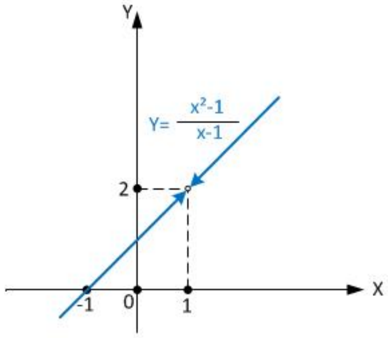



Рис. 1

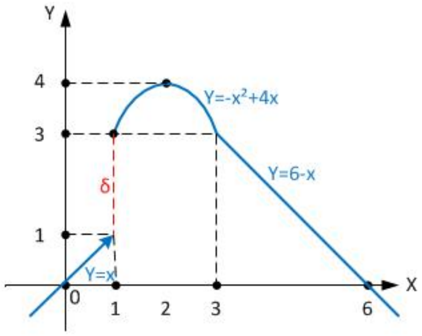



Рис. 2

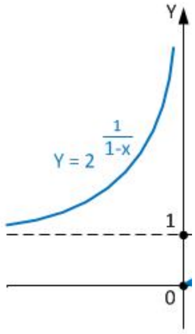



Рис.

Processing math: 12%

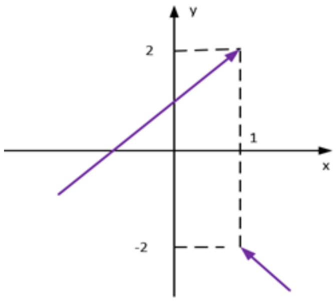
# 4.1. Практическое занятие №3

**Пример 1** Найдите точки разрыва функции, определите вид точек разрыва. Выполните чертеж: а) y=1-x2x-1

***Решение***. Область определения функции x≠1. Раскрывая модуль по определению, имеем:y=1-x2x-1=1-x2x-1=-(1+x)  при x-1≥0⇒x≥11-x2-(x-1)=1+x   при x-1<0⇒x<1

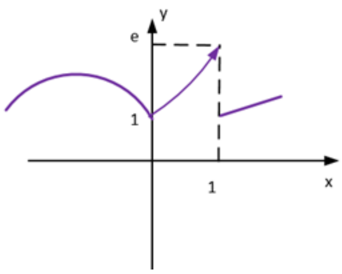
Найдём односторонние пределы: limx→1+0(-(1+x))=-2;    limx→1-0(1+x)=2

Т.к. пределы слева и справа конечны, то x = 1 – точка разрыва первого рода,




**Пример 2**  Найти ее точки разрыва, если они существуют. Указать характер точек разрыва. Определить скачок функции в точках, где имеются разрывы первого рода. Сделать эскиз графика функции.

f(x)=2-(x+1)2     x<0ex        0≤x<1x+12      x≥1
Решение. Область определения данной функции – вся числовая ось. На интервалах (-∞; 0),  (0;1),  (1;+∞) функции непрерывны. Разрывы могут быть лишь в точках x = 0 и x = 1, в которых функция меняет свое аналитическое выражение. Находим односторонние пределы в этих точках. Слева от точки x = 0 функция имеет выражение 2-(x+1)2 , а справа задана выражением ex.  Таким образом, limx→-0(2-(x+1)2)=2-(-0-1)2=1   limx→+0ex=1.  Значение функции в точке x=0 равно f(0)=e0=1. Так как односторонние  пределы в точке x=0 существуют и равны значению функции в точке x=0, то функция в этой точке непрерывна.
Найдем односторонние пределы в точке x=1. f(1-0)=limx→1-0ex=e,    f(1+0)= limx→1+0x+12=1. Пределы слева и справа конечны, следовательно, x = 1 – точка разрыва первого рода. Скачок функции равен f(1+0)-f(1-0)=1-e.




**Пример 3** Найти область непрерывности функции, точки разрыва, установить их характер   y=x-3x2+2x-15.
***Решение***. Функция не определена  для значений   x2+2x-15, обращающихся в нуль, а также в области, где подкоренное выражение отрицательно.

x2+2x-15=0 при x=3,  x=-5. Для подкоренного выражения имеем x-3x2+2x-15=x-3(x-3)(x+5)=1x+5⇒1x+5>0. Неравенство будет выполняться при x>-5. Таким образом область непрерывности функции x∈(-5, 3)∪(3,+∞). Исследуем  функцию на непрерывность в точках x=-5 и x=3.
limx→-5+0x-3x2+2x-15=+∞. Следовательно, x=-5 является точкой разрыва 2 рода.
limx→3-0f(x)=limx→3+0f(x)=limx→3x-3x2+2x-15=limx→31x+5=18=88. Следовательно, x=3 устранимая точка разрыва.

**Пример 4** Исследовать функцию y=Sin xx  на непрерывность.
***Решение.*** Функция определена во всех точках, кроме x=0. Точка x=0 является точкой разрыва. Исследуем характер разрыва этой точки.
limx→0±0Sin xx=1. Следовательно , точка x=0 - устранимая точка разрыва, так как f(-0)=f(+0). Если мы положим f(0)=1, то сможем устранить разрыв. Тем самым мы доопределим функцию по непрерывности, полученная новая функция f(x)=Sin xx,  x≠01.          x=0 будет непрерывна на всем множестве действительных чисел.

**Задания для домашней работы**

Найти точки разрыва функции f (x), если они существуют, и указать их характер. В точках разрыва первого рода найти скачок функции.

1. y=3x+43x+4  Ответ: x=-43 точка разрыва первого рода, скачок функции равен 2.

**2,** y=11+21x-4  Ответ: x=4 является точкой разрыва первого рода, скачок функции равен 1.

**3.** y=5(3-2x)2  Ответ: x=32 точка разрыва второго рода.

**4. y=1+x,   если x<0Sin x,  если   0≤x<πx-π,   если  x≥π** Ответ: x=0 - точка разрыва первого рода, x=π - точка непрерывности

Processing math: 12%

Processing math: 12%

# 5. Комплексные числа

**Понятие комплексного числа**

Понятие комплексного числа возникло в результате потребностей автоматизации вычислений. *Например*, квадратное уравнение x2+4=0 не может быть решено в действительных числах, так как не имеет никакого положительного и никакого отрицательного корня, поскольку и положительное, и отрицательное число, возведенное в квадрат дает число положительное. Таким образом, при решении подобных задач, потребуется или отказаться от автоматического применения установленных методов решения, или расширить область действительных чисел, чтобы алгебраические операции были всегда выполнимы. Таким расширением области действительных чисел стала область комплексных чисел.

В середине 16 века Д. Кардано ввел новые величины - квадратные корни из отрицательных чисел и назвал их "софистическими" - "мудреными". В середине 30-х годов 17 века Р. Декарт дает новое наименование этим величинам - *мнимые* ( в противоположность им, все известные прежде числа, назвали действительными). Сумму действительного и мнимого чисел в 1831 году К. Гаусс назвал *комплексным* (совокупным) числом.

Processing math: 12%

# 5.1. Алгебраическая форма комплексного числа

### Алгебраическая форма записи комплексного числа

***Определение.*** *Комплексным числом* называется число вида: z=x+i y 1, где x и y - действительные числа, а i - *мнимая единица* (число нового рода, определяемое равенством: i2=-1 ⇒i=±-1 ). Выражение (1) называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Действительные числа x и y, соответственно, абсцисса и ордината комплексного числа обозначаются символами: x=Rez - действительная часть комплексного числа, y=Imz - мнимая часть комплексного числа.

Следует отметить, что, так как i2=-1, то i3=i2·i=-i; i4=i3·i=-i·i=1; i5=i; i6=-1; i7=-i; и так далее.

Правила действий над комплексными числами установлены так, что они согласуются с правилами действий над действительными числами.

***Определение.*** *Действительное* число x записывается в виде: x±0·i, *например*: 3-0·i=3, -2+0·i=-2, 233-0·i=233;
***Определение.*** Число вида : 0±y·i называется *чисто мнимым*, *например*: 0-3·i=-3i, 0+32·i=32·i.

### Действия над комплексными числами

Пусть даны два комплексных числа в алгебраической форме z1=x1+i y1 и z2=x2+i y2 , тогда:

1. Два комплексных числа равны между собой, если равны их действительные и мнимые части, то есть: z1=z2 ⇔ x1=x2 и y1=y2.
2. Комплексное число z¯=x-i y называется *сопряженным* комплексному числу z=x+i y . Сумма двух сопряженных чисел равна действительному числу.
3. *Алгебраической суммой* комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число z=z1±z2=x1±x2+iy1±y2.
4. *Произведением* комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число z=z1·z2=x1·x2-y1·y2+ix1·y2+x2·y1.
5. *Отношением (частным)* комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число z=z1z2=x1·x2+y1·y2x22+y22+iy1·x2-x1·y2x22+y22.

***Пример 1.*** Даны два комплексных числа z1=1-2i и z2=-4+3i. Найти: **а)** z1+z2, **б)** z1·z2, **в)** z2z1, **г)** z22, **д)** z13.
***Решение:*** **а)** z1+z2=1-2i+-4+3i=1-4+i-2+3=-3+i;
**б)** найдем z¯2=-4-2i, тогда z1·z2=1-2i·-4-3i=1·-4-2i·-4+1·-3i-2i·-3i=-4+8i-3i+6i2=-4+5i+6·-1=-10+5i;
**в)** z2z1=-4+3i1-2i=(домножим числитель и знаменатель на множитель 1+2i, сопряженный знаменателю)=-4+3i·1+2i1-2i·1+2i=-4+3i-8i+6i212-2i2=(учтем, что i2=-1, приведем подобные)=-4-5i-61-4i2=-10-5i1+4=5-2-i5=-2-2i;
**г)** z22=-4+3i2=-42+2·-4·3i+3i2=16-24i+-9=7-24i;
**д)** z13=1+2i3=(раскроем по формуле a+b3=a3+3a2b+3ab2+b3)=1+3·1·2i+3·1·2i2+2i3=1+6i-12-8i=-11-2i.

***Пример 2.*** Упростить значение выражения 12-i+2+i1+i.
***Решение:*** ***12-i+2+i1+i=***(приведем дроби к общему знаменателю )=1·1+i+2+i·2-i2-i·1+i=1+i+4-i22-i+2i-i2=6+i3+i=(домножим числитель и знаменатель дроби на3-i множитель , сопряженный знаменателю)=6+i·3-i 3+i·3-i=18+3i-6i-i29-i2=19-3i10.

***Пример 3.*** Решить уравнения: **а) x2+2x+17=0, б)** 9x2+4=0.
***Решение:*** ***а) x2+2x+17=0***, используем формулу нахождения корней квадратного уравнения, в случае, когда коэффициент при x четный, тогда: x1,2=-1±1-17=-1±-16=-1±4-1=-1±4i. Итак: x1=-1-4i; x2=-1+4i - корни комплексные, сопряженные;
**б)** 9x2+4=0 ⇒ 9x2=-4 ⇒ x2=-49 ⇒ x1,2=±-49=±23·-1=±23·i. Итак: x1=-23i; x2=23i - корни чисто мнимые, сопряженные.
***Пример 4.*** Найти все корни, удовлетворяющие условию: z¯=z2.
***Решение:*** комплексное число z=x+i y , ⇒ z¯=x-iy, z2=x2+i·2xy-y2. Подставим в уравнение: x-iy=x2+i·2xy-y2, Учитывая, что два комплексных числа равны, если соответственно равны их действительные и мнимые части, получим систему уравнений: x=x2-y2-y=2xy. Из второго уравнения системы следует, что: 2xy+y=0 ⇒ y2x+1=0 ⇒ y=0, x=-12. Пусть y=0. Подставим его значение в первое уравнение системы, получим: x2-x=0 ⇒xx-1=0 ⇒ x=0, x=1. Итак, первые два корня z1=0+0·i ⇒z1=0; z2=1+0·i=1 ⇒ z2=1 - действительные корни. Пусть x=-12. Подставим его значение в первое уравнение системы, получим: y2=34 ⇒ y=±32 ⇒z3=-12-i·32; z4=-12+i·32 - комплексные корни.
Ответ: z1=0, z2=1, z3=-12-i32, z4=-12+i32.

Processing math: 12%

# 5.2. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

**Геометрическое изображение комплексного числа на плоскости**

Всякому комплексному числу z=x+i y 1 на плоскости может быть поставлена в соответствие точка Mx; y. Такое соответствие является взаимно однозначным и называется геометрической интерпретацией комплексного числа. Множество точек z образует комплексную плоскость. В этом случае плоскость XOY -z будет называться комплексной плоскостью, ось OX действительной осью, ось OY мнимой осью. Точка z - конец радиус-вектора (Рис. 1).

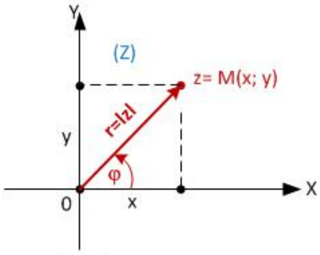



Рис. 1

Из рисунка очевидно, что x=r·cosφ, y=r·sinφ 2.

***Определение.*** Число r=z=x2+y2 называется *модулем* комплексного числа.

***Определение.*** Всякое решение φ системы уравнений φ=Argz:cosφ=xx2+y2sinφ=yx2+y2с точностью до 2kπ, k=0, ±1, ±2, ... называется *аргументом* комплексного числа z≠0.

***Определение.*** Значение φ=argz∈(-π; π] называется *главным значением аргумента* комплексного числа.

Используя формулы 2 и определение главного значения аргумента, запишем его значение, в зависимости от действительной и мнимой части, заданного комплексного числа:

***φ=argz=arctgyx,x>0;arctgyx+π,x<0, y≥0;arctgyx-π,x<0, y<0;π2,x=0, y>0;-π2,x=0, y<0.*** Для значения z=0 аргумент не определен.

Подставим значения x=r·cosφ и y=r·sinφ в 1: z=x+i y =r·cosφ+i·r·sinφ=rcosφ+i·sinφ. Итак, z=rcosφ+i·sinφ 3 -тригонометрическая форма записи комплексного числа.

**Действия над комплексными числами в тригонометрической форме**

Пусть даны два комплексных числа z1=r1cosφ1+isinφ1, z2=r2cosφ2+isinφ2.

1. **Умножение.**
   z1·z2=r1·cosφ1+isinφ1·r2·cosφ2+isinφ2=r1r2cosφ1cosφ2+r1r2cosφ1·isinφ2+r1isinφ1r2cosφ2-r1r2sinφ1sinφ2= =r1r2cosφ1cosφ2-sinφ1sinφ2+icosφ1sinφ2+sinφ1cosφ2=r1r2cosφ1φ1+φ2+isinφ1+φ2.

Таким образом z1 · z2=z1·z2 и Argz1 · z2=Argz1+Argz2.

***Следствием*** из умножения комплексных чисел является формула ***возведения в степень:***
zn=rcosφ+isinφn=rncosnφ+isinnφ ⇒ cosφ+isinφn=cosnφ+isinnφ, n=1, 2, 3, ... 4 - формула Муавра.

2. **Деление.**
   z1z2=r1cosφ1+isinφ1·r2cosφ2-isinφ2r2cosφ2+isinφ2·r2cosφ2-isinφ2=(раскроем скобки, перегруппируем)=r1r2cosφ1-φ2+isinφ1-φ2.

Таким образом z1z2=z1z2 и Argz1z2=Argz1-Argz2.

3. **Извлечение корня n- ой степени из комплексного числа.**

***Определение.*** Корнем ***n-*** ой степени из комплексного числа z называется такое число ω, ***ω=zn***, что ***ωn=z.***

Обозначим ***z=rcosφ+isinφ, ω=ρcosψ+isinψ,*** возведем ***ω*** в n- ую степень по формуле Муавра: ***ωn=ρncosnψ+isinnψ.*** По определению ***ωn=z*** ⇔ ***ρncosnψ+isinnψ=rcosφ+isinφ.*** Комплексные числа равны, если равны их модули и аргументы, следовательно:
***ρn=r; nψ=φ+2kπ*** ⇒ ***ρ=rn; ψ=φ+2kπn.*** Таким образом, получим: ***ω=rncosφ+2kπn+isinφ+2kπn k=0; n-1.***

***Пример 1.*** Дано комплексное число ***z=2+i2.*** Найти ***z4.***

***Решение.*** Запишем данное число в тригонометрической форме, с этой целью найдем его модуль и аргумент:
***r=z=x2+y2*** ⇒ ***r=22+22=2; φ=argz=arctgyx*** ⇒ ***φ=arctg22=arctg1=π4.*** Тогда ***z=2+i2= 2cosπ4+isinπ4 .*** Тогда
***z4=2cosπ4+isinπ44=24cos4·π4+isin4·π4=16cosπ+isinπ=16·-1=-16.***

***Пример 2.*** Вычислить ***13 .***

***Решение. z=1; r=1, tgφ=01=0*** ⇒ ***φ=0***. Тогда 13=13cos0+2kπ3+isin0+2kπ3, где k=0, 1, 2.
k=0, z0=1·cos0+isin0=1; k=1, z1=1·cos0+2π3+isin0+2π3=-12+i32; k=2, z2=1·cos0+4π3+isin0+4π3=-12-i32. ***Ответ:***
***z0=1; z1=-12+i32; z2=-12-i32.***

***Показательная форма комплексного числа***

Любое комплексное число z≠0 можно записать в *показательной* форме: z=reiφ 5, где r=z, φ=Argz.
Такая форма записи получается, если воспользоваться формулами Эйлера: eiz=cosz+isinz, e-iz=cosz-isinz 6.
В показательной форме удобно производить следующие действия:
z1·z2=r1·r2·eiφ1+φ2 ; z1z2=r1r2·eiφ1-φ2 ; zn=rn·eni ; zn=rn·eiφ+2kπn, k=0, n-1¯.

***Пример 3.*** Записать в тригонометрической и показательной форме число z=-2+i·23, заданное в алгебраической форме.

***Решение. r=z=-22+232=4+12=4; φ=argz=arctg23-2+π=π-arctg3=π-π3=2π3*** , тогда:
z=-2+i·23=4·cos2π3+isin2π3=4·ei2π3.

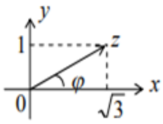
Processing math: 12%

Processing math: 12%

## 5.3. Практическое занятие №4

**Пример 1** Вычислить **а**) z6 , если z=3+i ,  **б)** z-3, если z=1-i .

***Решение.* а)** Изобразим комплексное число z на плоскости (рис. 1).




Найдем его модуль и аргумент:z=r=(3)2+1=4=2,  tgφ=13,  φ=arctg13=π6. Тогда z6=r6(Cos 6φ+i·Sin 6φ )=26 (Cos π+i Sin π)=-64.

**б)** z-3=(1-i)-3=1(1-i)$^3$=11-3i+3i$^2$-i$^3$=1-2-2i=-2+2i(-2)2+(-2)2=-2+2i8=-14+14i

**Пример 2.** Упростить значение выражения 12-i+2+i1+i.
***Решение:*** ***12-i+2+i1+i***=(приведем дроби к общему знаменателю )=1·1+i+2+i·2-i2-i·1+i=1+i+4-i22-i+2i-i2=6+i3+i=(домножим числитель и знаменатель дроби на3-i множитель , сопряженный знаменателю)=6+i·3-i 3+i·3-i=18+3i-6i-i29-i2=19-3i10.

**Пример 3.** Решить уравнения: **а) x2+2x+17=0,** **б)** 9x2+4=0.
***Решение:*** ***а)*** ***x2+2x+17=0***, используем формулу нахождения корней квадратного уравнения, в случае, когда коэффициент при x четный, тогда: x1,2=-1±1-17=-1±-16=-1±4-1=-1±4i. Итак: x1=-1-4i;  x2=-1+4i - корни комплексные, сопряженные;
**б)** 9x2+4=0 ⇒ 9x2=-4  ⇒ x2=-49  ⇒  x1,2=±-49=±23·-1=±23·i. Итак: x1=-23i;  x2=23i - корни чисто мнимые, сопряженные.

**Пример 4.** Найти все корни, удовлетворяющие условию: z¯=z2.
***Решение:*** комплексное число z=x+i y ,  ⇒  z¯=x-iy,  z2=x2+i·2xy-y2. Подставим в уравнение: x-iy=x2+i·2xy-y2, Учитывая, что два комплексных числа равны, если соответственно равны их действительные и мнимые части, получим систему уравнений:  x=x2-y2-y=2xy. Из второго уравнения системы следует, что: 2xy+y=0 ⇒ y2x+1=0 ⇒ y=0,  x=-12. Пусть y=0. Подставим его значение в первое уравнение системы, получим: x2-x=0 ⇒xx-1=0 ⇒ x=0, x=1. Итак, первые два корня z1=0+0·i ⇒z1=0;  z2=1+0·i=1 ⇒ z2=1 - действительные корни. Пусть x=-12. Подставим его значение в первое уравнение системы, получим: y2=34 ⇒ y=±32 ⇒z3=-12-i·32;  z4=-12+i·32 - комплексные корни.
*Ответ:* z1=0, z2=1, z3=-12-i32,  z4=-12+i32.

**Пример 5**. Вычислить а) 12i-5,  б) 3-i5.
***Решение***. Обозначим 12i-5=x+i·y и возведём это равенство в квадрат 12i-5=x2+2i xy-y2. Приравнивая действительные и мнимые части, получим: x2-y2=-52xy=12⇒ x2-6x2=-5 ⇒x4+5x2-36=0. Действительные корни получившегося биквадратного уравнения x=±2.
Тогда y=±3 и z=x+i y=±(2+3i).
б) Представим число z=3-i в тригонометрической форме. z=3+1=2,  φ=arctg(-13)=-π6. Тогда 3-i=2(Cos(-π6)+iSin(-π6))
Следовательно
ωk=3-i5=25(Cos-π6+2πk5+iSin-π6+2πk5),  k=0,1,2,3,4k=0 получим ω0=25(Cos-π65+iSin-π65)=25(Cosπ30-iSinπ30)k=1 получим ω1=25(Cos-π6+2π5+iSin-π6+2π5)=25(Cos11π30+iSin11π30)k=2 получим ω2=25(Cos-π6+4π5+iSin-π6+4π5)=25(Cos23π30+iSin23π30)k=3 получим ω3=25(Cos-π6+6π5+iSin-π6+6π5)=25(Cos35π30+iSin35π30)k=4 получим ω4=25(Cos-π6+8π5+iSin-π6+8π5)=25(Cos47π30+iSin47π30).
Геометрически корни можно интерпретировать как числа, изображающие в комплексной плоскости вершины правильного n угольника (в рассмотренном примере - пятиугольника), вписанного в окружность радиусом rn (в рассмотренном примере радиусом 25 ), с центром в начале координат.
**Пример 6**. Определить на комплексной плоскости области, задаваемые условиями: z=2,  б) arg z=π4,  в) 0≤Imz<2
***Решение.* а)** Согласно формуле z=x+iy=x2+y2 имеем x2+y2=2 ⇒x2+y2=4. Множество точек, удовлетворяющих условию z=2 представляет собой окружность радиуса R=2 с центром в начале координат (рис.2(а)).
**б)** Точки z лежат на луче, выходящем из точки O(0,0) под углом π4 к действительной оси (рис.2(б)).
**в)** Неравенство 0≤Imz<2 можно переписать так 0≤y<2 (рис.2(в)).

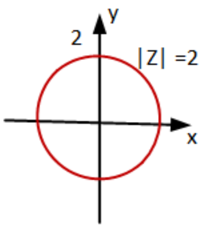



Рис. 2(а)

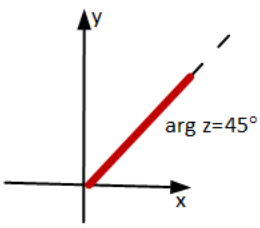



Рис.2(б)

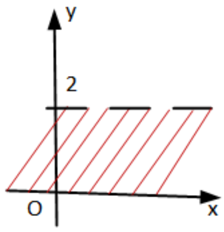
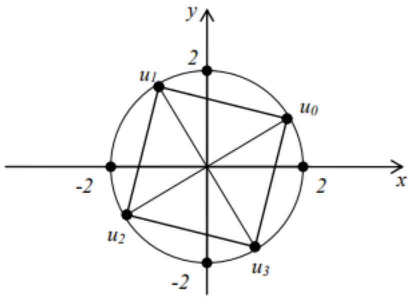



Рис. 2(в)

**Задания для домашней работы**

**1.** Вычислить
а) (4+i)(5+3i)+(3+i)(3-2i),  б) (5+i)(7-6i)3+i,  в) 5+i(1+i)(2-3i)
Ответ: а) 28+14i,  б) 10-11i,  в) 1213+513i
**2**. Возвести в степень (3+i)17
Ответ: 217(-32+12i)
**3.** Найти значения -8+83i4. Изобразите найденные корни на комплексной плоскости
Ответ: φ=2π3,  u0=3+i,  u1=-1+i3,  u2=-3-i,  u4=1-i3

Processing math: 12%




**4.** Решите уравнение z3-8=0

Ответ: z1=2,   z2=-1+i3,   z3=-1-i3.

Processing math: 12%