Раздел 4 Графы

Сайт:	Электронное обучение ИРНИТУ	Напечатано::	Арбакова Анастасия Вячеславовна
Курс:	Дискретная математика для студентов специальностей АСУ,ЭВМ	Дата:	Понедельник, 7 Июнь 2021, 04:33
Книга:	Раздел 4 Графы		

Оглавление

§1. Основные понятия и определения

Теория графов, как раздел дискретной математики, имеет многочисленные предметные интерпретации. Теория графов применяется при анализе функционирования сложных систем, таких как сети железных дорог, телефонные или компьютерные сети, ирригационные системы. Эта теория традиционно является эффективным аппаратом формализации задач экономической и планово-производственной практики, применяется в автоматизации управления производством, в календарном и сетевом планировании.

Среди дисциплин и методов дискретной математики теория графов и, особенно алгоритмы на графах, находят наиболее широкое применение в программировании. Между понятием графа и понятием отношения, рассмотренным в части 1(теория множеств), имеется глубокая связь — в сущности это равнообъемные понятия. Возникает естественный вопрос, почему же тогда графам оказывается столь явное предпочтение? Дело в том, что теория графов предоставляет очень удобный язык для описания программных (да и многих других) моделей. Этот тезис можно пояснить следующей аналогией. Понятие отношения также можно полностью выразить через понятие множества. Однако независимое определение понятия отношения удобнее — введение специальных терминов и обозначений упрощает изложение теории и делает ее более понятной. То же относится и к теории графов. Стройная система специальных терминов и обозначений теории графов позволяют просто и доступно описывать сложные и тонкие вещи. Особенно важно наличие наглядной графической интерпретации понятия графа. Само название <граф> подразумевает наличие графической интерпретации. Картинки позволяют сразу <усмотреть> суть дела на интуитивном уровне, дополняя и украшая утомительные рациональные текстовые доказательства и сложные формулы.

1.1. История теории графов

Теория графов многократно <переоткрывалась> разными авторами при решении различных прикладных задач.

1. **Задача о Кёнигсбергских мостах**. Обойти все четыре части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку (рис. 1). Эта задача была решена Эйлером в 1736 году.

Рис. 1. Иллюстрация к задаче о Кенигсбергских мостах

2. **Задача о трех домах и трех колодцах.** Имеется три дома и три колодца. Провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались (рис. 2). Эта задача была решена Куратовским в 1930 году.

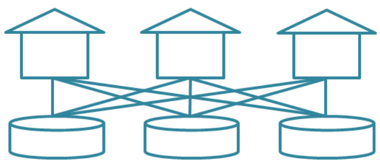

Рис.2. Иллюстрация к задаче о трех домах и трех колодцах

3. **Задача о четырех красках.** Любую карту на плоскости раскрасить четырьмя красками так, чтобы никакие две соседние области не были закрашены одним цветом (рис. 3).

Рис.3. Иллюстрация к задаче о четырех красках

1.2. Основные понятия и определения.

Определение 1.1. Графом G = (U, V) называется совокупность двух множеств — непустого множества U и множества $V \subseteq U^2$ - бинарного отношения, определённого на множестве U.

Определение 1.2. Элементы множества U называются ***вершинами*** графа G, а элементы бинарного отношения V — ***дугами.*** Таким образом, дугами являются пары вершин $(a,b) \in V$. При этом дуга (a, b) называется ***исходящей*** из вершины *a* и ***заходящей*** в вершину *b*.

Число вершин графа G обозначим n, а число дуг - m.

1.3. Диаграммы

Обычно граф изображают диаграммой: вершины — точками (или кружками), дуги — стрелками.

Пример. Изображение графа *G* с множеством вершин U = {1,2,3,4} и множеством дуг

V = {(1, 1),(1, 2), (2,3),(3, 4), (4, 3), (4,1)} представлено на рис. 4.

Рис.4. Диаграмма графа

1.4. Смежность

При задании графа для нас не имеет значения природа связи между вершинами *a* и *b*, важно только то, что связь существует и информация о связях содержится во множестве дуг *V*.

Пусть v_1, v_2 — вершины, $e = (v_2, v_1)$ — соединяющее их ребро. Тогда:

- вершина v_1 и ребро *e инцидентны*, вершина v_2 и ребро *e* также *инцидентны*;
- два ребра, инцидентные одной вершине, называются *смежными*;
- две вершины, инцидентные одному ребру, также называются *смежными*.

1.5. Виды графов

Определение 1.3. Граф, состоящий из одной вершины, называется *тривиальным*.

Определение 1.4. Если элементами множества V являются упорядоченные пары, т.е если для всех пар $(a,b) \in V$ пары $(b,a) \in V$, то граф называется *ориентированным* (или орграфом). В этом случае элементы множества U называются узлами, а элементы множества V- дугами.

Определение 1.5. Если же отношение V симметрично, т.е. из $(a,b) \in V$ следует $(b,a) \in V$, то граф *G* называется *неориентированным (неорграфом)*. Если одновременно пары (a,b) и (b,a) принадлежат V, то информацию об этих дугах можно представить множеством $[a,b] = \{(a,b), (b,a)\}$, называемым *ребром,* которое соединяет вершины *a* и *b*. При этом вершины *a* и *b* называются *концами ребра* $[a,b]$. Ребра изображаются линиями (без стрелок), соединяющими вершины.

Определение 1.6. Если в графе имеются как ориентированные так и неориентированные ребра, то граф называется *смешанным.*

Определение 1.7. Если элементом множества V может быть пара одинаковых (не различных) элементов U, то такой элемент множества V называется *петлей*, а граф называется *графом с петлями* (или *псевдографом*).

Определение 1.8. Если V является мультимножеством (т.е. множеством, содержащим несколько одинаковых элементов), то эти элементы называются *кратными ребрами*, а граф называется *мультиграфом*.

Определение 1.9. Если элементами множества V являются не обязательно двухэлементные, а любые подмножества множества U, то такие элементы множества V называются *гипердугами*, а граф называется *гиперграфом*.

Определение 1.10. Если задана функция F: U→M и/или F: V→M, то множество M называется *множеством пометок*, а граф называется *помеченным* (или *нагруженным*). В качестве множества пометок обычно используются буквы или целые числа.

Определение 1.11. Если множество U разбито на два непересекающихся подмножества U_1 и U_2, причем каждое ребро из V инцидентно вершине из U_1 и вершине из U_2 (т.е. соединяет вершину из U_1 с вершиной из U_2) то граф называется *двудольным*. Подмножества U_1 и U_2 называются долями двудольного графа.

Определение 1.12. Граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется *полным* и обозначается K_n. Он имеет максимально возможное число ребер:

$m = \frac{n(n-1)}{2}$.

§ 2. Способы задания графов

Два способа представления графов мы уже знаем:

1. Описание множеств U и V (такое описание графа будем называть *аналитическим*),
2. Изображение графа с помощью *диаграммы*.

Рассмотрим еще несколько способов задания графа.
3. Пусть *G*= (*M*, *R*) - граф, в котором множество вершин имеет *n* элементов: $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. ***Матрицей смежности*** $\boldsymbol{A = (A_{ij})}$ графа *G* называется матрица порядка *n*, определенная следующим образом:

Если *G* — неорграф, то матрица смежности *A* симметрична, т. е. не меняется при транспонировании: $A^T = A$.

Пример. Для графа, изображенного на рис. *рис.5,* матрица смежности имеет вид:

Рис.5. Матрица смежности

Если $a_{ij} = 1$, то вершина a_j называется ***последователем вершины*** $\boldsymbol{a_i}$,
а $\boldsymbol{a_i}$***- предшественником*** $\boldsymbol{a_j}$. Вершины a_i и a_j называются ***смежными***, если $a_{ij} = 1$ или $a_{ji}=1$.

Если *G* — мультиграф, то в матрице смежности *A* элемент a_{ij} по определению равен числу дуг, исходящих из вершины a_i и заходящих в вершину a_j .

4. Если число вершин графа G равно n, а число ребер – m, то ***матрицей инцидентности*** $B = (B_{ij})$ мультиграфа G называется матрица размера m x n:

Мультиграф, G изображенный на рис.6, имеет матрицу инцидентности:

Рис.6

5. Информацию о весах дуг во взвешенном графе можно представлять в виде ***матрицы весов*** $W = (w_{ij})$, где w_{ij} — вес дуги (a_i,a_j), если дуга (a_i,a_j) существует, а для несуществующих дуг веса обычно помечают нулем или знаком ∞, в зависимости от приложений. В примере матрица весов имеет вид

Рис.7

6. Если граф *G* = (M, R) является ***разреженным***, т. е. число дуг достаточно мало по сравнению с числом вершин, то более эффективным, чем с помощью матрицы смежности, является представление дуг графа посредством ***списка дуг***. Этот список задается двумя наборами $m = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ и $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, где (a_{m_i}, a_{n_i}) — i- я дуга графа *G*.

7.Другим представлением графа, удобным при работе с графами, в которых удаляются или добавляются вершины, является ***структура смежности***, получаемая составлением для каждой вершины *a* списка номеров ее *последователей*, т. е. номеров вершин *b*, для которых имеется дуга (*a*,*b*).

§3. Подграфы и части графа. Операции над графами

3.1. Элементы графов

Определение 3.1. Граф G'(V', E') называется ***подграфом*** графа G(V, E) (обозначается G'⊂G), если V'⊂V и/или E' ⊂ E.

Определение 3.2. Если V'⊂V & E'⊂E & (V'≠ V ∨ E' ≠ E), то граф G' называется ***собственным подграфом*** графа G.

Определение 3.3. Подграф G'(V',E') называется ***правильным подграфом*** графа G(V,E), если G' содержит все возможные ребра G: u,v∈V', (u,v)∈E⇒(u,v)∈E'. Правильный подграф G'(V', E') графа G(V, E) определяется подмножеством вершин V'.

Рассмотрим некоторые основные операции, производимые над графами.

3.2. Унарные операции

Операцией добавления к графу null*вершины **a** образуется граф null*.

Операция добавления дуги *(a, b)* к графу G состоит в образовании графа null.

Под ***операцией удаления дуги*** *(a, b)* из графа G понимается операция, заключающаяся в удалении пары *(a, b)* из множества дуг *R*, в результате получается граф null.

Операция удаления вершины *a* из графа G заключается в удалении вершины *a* вместе с инцидентными ей дугами: null

Операция отождествления вершин *a* и *b* графа null состоит в удалении из графа G вершин *a* и *b* и присоединении новой вершины *a'*, дуг (*a'*, *c*), если (*a*, *c*) ∈ R или (*b*, *c*) ∈ R, и дуг (*c*, *a'*), если (*c*, *a*) ∈ R или (*c*, *b*) ∈ R:

null

Говорят, что построенный граф получается из графа G ***отождествлением вершин a и b.*** В случае, когда *a* и *b* соединены дугой, операцию отождествления вершин *a* и *b* называют ***стягиванием дуги (a, b)***.

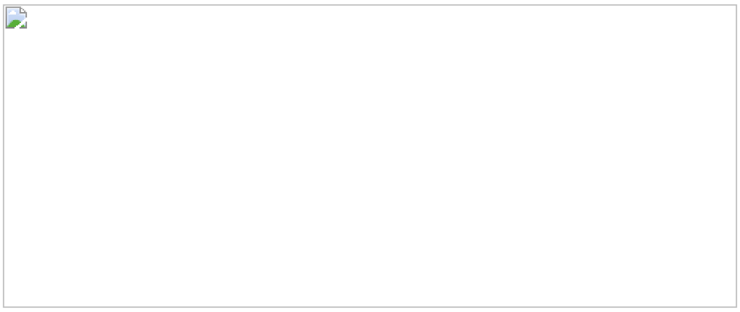

Рис.8

Пример.

Из графа G, показанного на рис. 8, добавлением вершины 5 образуется граф G_1, добавлением дуги (3,1) - граф G_2, удалением дуги (3,2) - граф G_3, удалением вершины 2 — граф G_4, отождествлением вершин 1 и 4 — граф G_5, стягиванием дуги (2,3) — граф G_6.

3.3. Бинарные операции

Определение 3.4. Дополнением графа без петель null называется граф null.

Определение 3.5. Пусть null - графы. ***Объединением*** $G_1 \cup G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф null.

Определение 3.6. Если $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, то ***пересечением*** $G_1 \cap G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $\langle M_1 \cap M_2,\ R_1 \cap R_2 \rangle$.

Определение 3.7. Кольцевой суммой $G_1 \oplus G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф null, где $R_1 \oplus R_2 = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)$.

Рис.9

Определение 3.8. Соединением $G_1 + G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф null.

Рис.10

Определение 3.9. Произведением $G_1 \times G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф null, в котором $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $(b_1, b_2) \in R_2$, или $b_1 = b_2$ и $(a_1, a_2) \in R_1$.

Рис.10

3.4. Изоморфизм графов

Говорят, что два графа $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$ *изоморфны* (обозначается $G_1 \sim G_2$), если существует биекция $h: V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющая смежность:

$e_1 = (u,v) \in E_1 <=> e_2 = (h(u),h(v)) \in E_2$,

Определение 3.10. *Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности*. Действительно, изоморфизм обладает всеми необходимыми свойствами:

- рефлексивность: $G \sim G$, где требуемая биекция суть тождественная функция;
- симметричность: если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h, то $G_2 \sim G_1$ с биекцией h^{-1};
- транзитивность: если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h и $G_2 \sim G_3$ с биекцией g, то $G_1 \sim G_3$ с биекцией $g \cdot h$.

Графы рассматриваются с точностью до изоморфизма, то есть рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма.

Рис.11

ТЕОРЕМА 3.1.

Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности вершин получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов (т. е. одновременно с перестановкой *i -й* и *j-й* строк переставляются *i -й* и *j –й* столбцы).

ТЕОРЕМА 3.2.

Графы (орграфы) изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инциденций получаются друг из друга произвольными перестановками строк и столбцов.

§ 4. Связность

4.1. Маршруты, цепи, циклы

Определение 4.1. Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны.

Это определение подходит также для псевдо-, мульти- и орграфов. Для <обычного> графа достаточно указать только последовательность вершин или только последовательность ребер.

Если $v_0 = v_k$, то маршрут *замкнут*, иначе *открыт*.

Определение 4.2. Если все ребра различны, то маршрут называется ***цепью***. Если все вершины различны, то маршрут называется ***простой цепью.***

Цепь, соединяющая вершины u и v, обозначается (u, v). Очевидно, что если есть цепь, соединяющая вершины u и v, то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины.

Определение 4.3. Замкнутая цепь называется ***циклом***; замкнутая простая цепь называется **простым циклом**.

Определение 4.4. Число циклов в графе G обозначается **z(G).**

Определение 4.5. Граф без циклов называется ***ациклическим***.

Определение 4.6. Для орграфов цепь называется ***путем***, а цикл — ***контуром.***

Пример.

Рис.12

1. v_1, v_3, v_1, v_4 — маршрут, но не цепь;

2. $v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4$ — цепь, но не простая цепь;

3. v_1, v_4, v_3, v_2, v_5 — простая цепь;

4. $v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4, v_1$ — цикл, но не простой цикл;

5. v_1, v_3, v_4, v_1 — простой цикл.

4.2. Связность

Важным понятием теории графов является ***связность.***

Определение 4.7. Граф называется ***связным***, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом. Для орграфа существует ещё понятие сильной связности. Для этого определим понятие пути.

Определение 4.8. Путь – это ориентированный маршрут. Поэтому если для установления простой (или слабой) связности графа ориентацию его дуг принимать в расчёт не следует, то для установления сильной связности это необходимо.

Определение 4.9. Орграф называется ***сильно связным***, если для любых его двух вершин x_i, x_j найдётся путь с началом в x_i и концом в x_j. Для неориентированного графа понятие пути и маршрута совпадают.

Рис.13

ТЕОРЕМА 4.1. Для любого G либо он сам, либо его дополнение является связным.

Определим матрицы связности и достижимости.

Пусть P(G) – матрица смежности вершин графа G = (S_n,U), а $B = E + P + P^2 + \ldots + P^n$. Введём матрицу $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c_{ij}})$, $i, j = \overline{1,n}$ по правилу

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } b_{ij} \neq 0, \\ 0, \text{ если } b_{ij} = 0. \end{cases}$$

Определение 4.10. Матрица ***C*** называется ***матрицей связности,*** если G – *неорграф*, и ***матрицей достижимости***, *если G-орграф*. Это значит, что в графе G тогда и только тогда существует маршрут из вершины x_i в вершину x_j, когда c_{ij}=1. Таким образом, в матрице C содержится информация о существовании связей между различными элементами графа G посредством маршрутов

Матрица ***контрдостижимости*** $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{l_{ij}})$, $i,j = \overline{1,n}$, определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{l_{ij}} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } x_i \text{ достижима из вершины } x_j, \\ 0, \text{ если вершина } x_i \text{ недостижима из вершины } x_j. \end{cases}$$

Можно показать, что $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{C^T}$. Матрицы C и L используются для нахождения сильных компонент графа. Пусть F = C*L, где операция * означает поэлементное произведение матриц C и L: $f_{ij} = c_{ij} \cdot l_{ij}$. Элемент f_{ij} матрицы F равен единице тогда и только тогда, когда вершины x_i *и* x_j взаимно достижимы, т.е. x_i достижима из x_j, а x_j – из x_i. Таким образом, сильная компонента орграфа, содержащая вершину x_i, состоит из элементов x_j, для которых $f_{ij}=1$.

§ 5. Метрические характеристики графа

5.1. Валентность

Определение 5.1. Количество ребер, инцидентных вершине v, называется ***степенью*** (или ***валентностью***) вершины v и обозначается d(v).

Обозначим минимальную степень вершины графа G через δ(G), а максимальную — через Δ(G)

Определение 5.2. Если степени всех вершин равны k, то граф называется ***регулярным степени k***

Степень регулярности является инвариантом графа и обозначается r(G). Для нерегулярных графов r(G) не определено.

Определение 5.3. Если степень вершины равна 0 (то есть d(v) = 0), то вершина называется ***изолированной.***

Определение 5.4. Если степень вершины равна 1 (то есть d(v) = 1), то вершина называется ***концевой, или висячей.***

Определение 5.5. Для орграфа число дуг, исходящих из вершины v, называется ***полустепенью исхода,*** а входящих ***— полустепенью захода.***

Обозначаются эти числа, соответственно, $d^{-}(v)$ и $d^{+}(v)$.

ТЕОРЕМА 5.1. (Эйлера). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер.

Рассмотрим связный граф G = (S, U), пусть x_1 и x_2 – две его вершины.

Определение 5.6. Длина кратчайшего (x_1, x_2) маршрута называется ***расстоянием между вершинами x_1 и x_2*** , обозначается через $d(x_1,x_2)$=0. Для любой вершины *x* величина

«math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mi»e«/mi»«mfenced separators=¨|
¨»«mi»x«/mi»«/mfenced»«mo»=«/mo»«munder»«mrow»«mi»m«/mi»«mi»a«/mi»«mi»x«/mi»«/mrow»«mrow»«mi»y«/mi»«mo»§#8712;«/mo»«mi»S«/mi»«/
separators=¨|¨»«mrow»«mi»x«/mi»«mo»,«/mo»«mi»y«/mi»«/mrow»«/mfenced»«/mstyle»«/math»,

называется ***эксцентриситетом вершины x.***

Определение 5.7. Максимальный из всех эксцентриситетов вершин называется ***диаметром графа*** и обозначается ***d(G),*** *т.е.*

**«math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle
mathsize=¨20px¨»«mtable»«mtr»«mtd»«mi»d«/mi»«mfenced separators=¨|
¨»«mi»G«/mi»«/mfenced»«mo»=«/mo»«munder»«mrow»«mi»m«/mi»«mi»a«/mi»«mi»x«/mi»«/mrow»«mrow»«mi»x«/mi»«mo»§#8712;«/mo»«
separators=¨|
¨»«mi»x«/mi»«/mfenced»«mo»=«/mo»«/mtd»«/mtr»«/mtable»«mtable»«mtr»«mtd»«munder»«mrow»«mi»m«/mi»«mi»a«/mi»«mi»x«/mi»«/m
separators=¨|¨»«mrow»«mi»x«/mi»«mo»,«/mo»«mi»y«/mi»«/mrow»«/mfenced»«mo».«/mo»«/mtd»«/mtr»«/mtable»«/mstyle»«/math»**

Определение 5.8. Минимальный эксцентриситет вершин графа называется его ***радиусом*** и обозначается через ***r(G)***:

«math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle
mathsize=¨20px¨»«mrow»«mtable»«mtr»«mtd»«mi»r«/mi»«mfenced separators=¨|
¨»«mi»G«/mi»«/mfenced»«mo»=«/mo»«munder»«mrow»«mi»m«/mi»«mi»i«/mi»«mi»n«/mi»«/mrow»«mrow»«mi»x«/mi»«mo»§#8712;«/mo»«mi»S«/mi»«/
separators=¨|
¨»«mi»x«/mi»«/mfenced»«mo»=«/mo»«/mtd»«/mtr»«/mtable»«mtable»«mtr»«mtd»«munder»«mrow»«mi»m«/mi»«mi»i«/mi»«mi»n«/mi»«/mrow»«mrow»«
separators=¨|¨»«mrow»«mi»x«/mi»«mo»,«/mo»«mi»y«/mi»«/mrow»«/mfenced»«mo».«/mo»«/mtd»«/mtr»«/mtable»«/mrow»«/mstyle»«/math»

Определение 5.9. Вершина *x* называется ***периферийной***, если её эксцентриситет равен диаметру графа, т.е. *e(x) = d(G)*. Простая цепь, расстояние между концами которой равно *d(G),* называется ***диаметральной цепью.***

ТЕОРЕМА 5.2.

Для любого связного графа G справедливо неравенство «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨
xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle
mathsize=¨20px¨»«mi»d«/mi»«mo»(«/mo»«mi»G«/mi»«mo»)«/mo»«mo»§#8804;«/mo»«mi»r«/mi»«mi»a«/mi»«mi»n«/mi»«mi»k«/mi»«mo»§#160;«/mo»«m

Определение 5.10. Вершина *x* называется ***центральной,*** если *e(x) = r(G)*. Множество всех центральных вершин графа называется его ***центром***. Центром может быть единственная вершина графа или несколько вершин.

Пример. Рассмотрим граф на рис. 15. Здесь $e(x_1)= e(x_2)= e(x_4)= e(x_6)=3$, $e(x_3)= e(x_7)=4$, $e(x_5)=2$. Таким образом, $d(G)=4$, $r(G)=2$. Периферийные вершины: x_3 и x_7, диаметральные цепи: $x_3 – x_2 – x_5 – x_6 – x_7$ и $x_3 – x_4 – x_5 – x_6 – x_7$, центральная вершина x_5.

Рис.15

§ 6. Эйлеровы и Гамильтоновы графы

6.1. Эйлеровы графы

В первом параграфе была рассмотрена задача **о Кёнигсбергских мостах**. На рисунке 16 показан мультиграф, иллюстрирующий эту задачу.

Рис.16

На языке теории графов задача формулируется следующим образом: существует ли в мультиграфе цикл, содержащий все ребра данного мультиграфа.

Выдающимся математиком и механиком Л. Эйлером сформулирован и доказан критерий того, что связный неориентированный мультиграф имеет цикл, содержащий все ребра данного мультиграфа.

Определение 6.1. *Цикл*, содержащий все ребра мультиграфа, называется ***эйлеровым***, и ***мультиграф***, в котором имеется эйлеров цикл, также называется ***эйлеровым***.

ТЕОРЕМА 6.1. *Связный неориентированный мультиграф тогда и только тогда является эйлеровым, когда степень каждой из его вершин — четное число.*

Алгоритм построения эйлерова цикла:

1. Выбрать произвольно некоторую вершину *a*.
2. Выбрать произвольно некоторое ребро *u*, инцидентное *a*, и присвоить ему номер 1 (назовем это ребро *пройденным).*
3. Каждому пройденному ребру присвоить номер, на единицу больший номера предыдущего.
4. Находясь в вершине *x*, не выбирать ребро, соединяющее *x* с *a*, если имеется возможность иного выбора.
5. Находясь в вершине *x*, не выбирать ребро, при удалении которого граф, образованный непронумерованными ребрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру.
6. После того как в графе будут занумерованы все ребра, образуется эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода ребер.

Пример.

Рис.17

Будем говорить, что набор реберно непересекающихся цепей ***покрывает*** граф G, если каждое ребро графа *G* входит в одну из этих цепей.

ТЕОРЕМА 6.2. *Если связный граф содержит k вершин нечетной степени, то минимальное число покрывающих его реберно непересекающихся цепей равно k/2.*

В частности, при *k = 2* граф имеет цепь, которая соединяет вершины нечетной степени и содержит все ребра графа. Цепь, содержащая все ребра графа, называется *эйлеровой*.

6.2. Обходы вершин графа

Определение 6.2. Граф называется ***гамильтоновым***, если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Сам такой цикл также называется ***гамильтоновым***.

Гамильтоновой называется и простая цепь, содержащая все вершины графа.

Очевидно, что любой граф, ребра которого образуют простой цикл, является гамильтоновым.

Несмотря на схожесть задач о нахождении эйлеровых и гамильтоновых циклов, решение последней значительно сложнее.

Известны следующие достаточные условия существования гамильтоновых циклов в связном неорграфе G без петель, имеющем ***больше 3*** *вершин:*

ТЕОРЕМА 6.3. *Если для любых двух различных несмежных вершин a и b графа G выполняется условие $d(a) + d(b) > n$, то существует гамильтонов цикл.*

Следствие. *Если для любой вершины* ***a*** *графа G выполнено условие $d(\boldsymbol{a}) > n/2$, то существует гамильтонов цикл.*

С задачей нахождения гамильтонова цикла связана ***задача коммивояжера***. Район, который должен посетить бродячий торговец, содержит некоторое количество городов, расстояния между которыми известны. Требуется найти маршрут, проходящий через все пункты по одному разу и возвращающийся в исходный город. Если таких маршрутов много, требуется найти кратчайший из них.

Математическая постановка задачи выглядит так: требуется найти гамильтонов цикл минимального веса.

Некоторые практические задачи, сводящиеся к задаче коммивояжера

- Пусть граф задает сеть коммуникаций между фиксированными центрами. Необходимо построить маршрут, обеспечивающий посещение всех центров ровно по одному разу.
- Имеется станок с числовым программным управлением, который высверливает отверстия в печатных платах по заданной программе. Составляя граф, в котором вершины соответствуют требуемым отверстиям, получаем задачу нахождения обхода вершин, такого, что суммарное время, затраченное на него, было бы минимальным.

§ 7. Деревья

Деревья заслуживают отдельного и подробного рассмотрения по двум причинам:

- Деревья являются в некотором смысле простейшим классом графов. Для них выполняются многие свойства, которые не всегда выполняются для графов в общем случае. Применительно к деревьям многие доказательства и рассуждения оказываются намного проще. Выдвигая какие-то гипотезы при решении задач теории графов, целесообразно сначала их проверять на деревьях.

- Деревья являются самым распространенным классом графов, применяемых в программировании, причем в самых разных ситуациях.

7.1. Основные определения

Определение 7.1. Граф без циклов называется ***ациклическим***, или ***лесом***. Связный ациклический граф называется ***(свободным) деревом***. Таким образом, компонентами связности леса являются деревья.

Прилагательное <свободное> употребляется в том случае, когда нужно подчеркнуть отличие деревьев от других объектов, родственных деревьям: ориентированных деревьев, упорядоченных деревьев и т. д.

В связном графе G выполняется неравенство **m(G)** $\geq$ **n(G) - 1.**

Определение 7.2. Граф G, в котором **m(G) = n(G) - 1,** называется ***древовидным***.

В *ациклическом* графе G **z(G) = 0.**

Пусть u, v — несмежные вершины графа G, x = (u, v) $\notin$ E.

Определение 7.3. Если граф G + x имеет только один простой цикл, z(G + x) = 1, то граф G называется ***субциклическим.***

Примеры. Деревьев показаны на рис. 18-19.

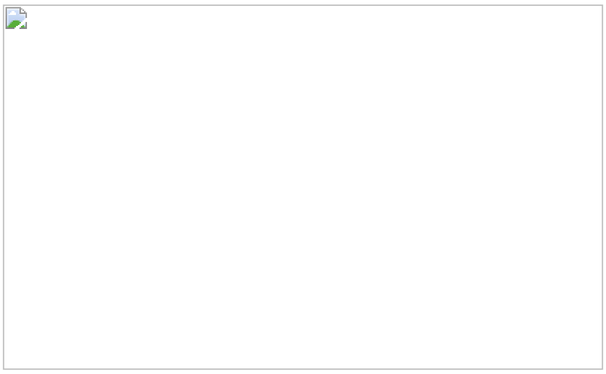

Рис.18

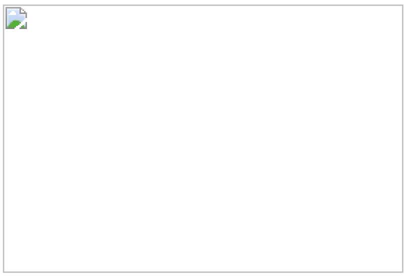

Рис.19

7.2. Остов графа

Пусть *G* - (*M*, *R*) — неорграф.

Определение 7.4. Часть *G'* = (*M'*, *R'*) графа *G* называется ***остовом*** или ***каркасом*** графа *G*, если *M* = *M'* и G' - лес, который на любой связной компоненте графа *G* образует дерево.

Определение 7.5. Таким образом, если *G* — связный граф, то остов *G'* является деревом, которое будем называть ***остовным деревом*** графа *G*.

Понятие остова для орграфа *G* определяется как часть *G'* графа *G*, для которой *F(G')* является остовом графа *F(G)*.

Аналогично вводится понятие *остовного дерева* для связного орграфа G.

Очевидно, что в каждом графе существует остов: разрушая в каждой связной компоненте циклы, т. е. удаляя лишние ребра, получаем остов.

ТЕОРЕМА 7.1. *Для неорграфа G без петель, содержащего n вершин, следующие условия эквивалентны:*

1. *G — дерево;*
2. *G — связный граф, содержащий n - 1 ребро;*
3. *G — ациклический граф, содержащий n - 1 ребро;*
4. *Любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь;*
5. *G — ациклический граф, такой, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.*

Пример. В качестве остова графа G, изображенного на рис.20 , можно взять лес с ребрами 2, 3, 4, 6, 7 (вообще говоря, остов определяется неоднозначно).

Рис.20

Из теоремы вытекает

Следствие 7.1. *Число ребер произвольного неорграфа G, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно m — n + c, где m — число ребер, n — число вершин, c — число компонент связности графа G.*

Число ***v(G) = m - n + c*** *называется* ***цикломатическим числом*** *или* ***циклическим рангом*** *графа G. Число* ***v*(G) = n - c*** *называется* ***коциклическим рангом*** *или* ***корангом****. Таким образом v*(G) есть число ребер входящих в любой остов графа G, и v(G) + v*(G) = m.*

Очевидны следующие два следствия:

Следствие 7.2. *Неорграф G является лесом тогда и только тогда, когда v(G) = 0.*

Следствие 7.3. *Неорграф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда v(G) = 1.*

7.3. Обходы графа по глубине и ширине

При решении прикладных задач часто возникает необходимость обхода вершин графа, связанная с поиском вершин, удовлетворяющих определенным свойствам.

Пусть *G* = (*M, R*) — связный неориентированный граф, ***T*** — некоторый остов графа *G*, ***a*** — некоторая фиксированная вершина, называемая *корнем дерева T*.

Разместим вершины из M по этажам таким образом, чтобы корень ***a*** *находился в верхнем этаже, смежные с ним вершины занимали этаж на единицу ниже, смежные с отмеченными вершинами — еще на единицу ниже и т. д.*

*Таким образом, получаем e(****a****) + 1 этажей, где e(****a****) — эксцентриситет вершины* ***a****.*

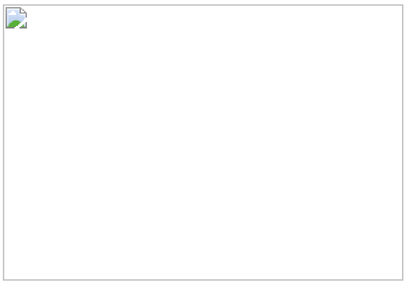

Рис.21

7.4. Обход графа по глубине

При таком обходе после очередной рассмотренной вершины выбирается смежная с ней вершина следующего этажа; Если очередная, рассмотренная вершина висячая и ее достижение не дает желаемого решения задачи, то возвращаемся до ближайшей вершины степени > 3 и просматриваем вершины другого, еще, не пройденного маршрута в таком же порядке и т.д.

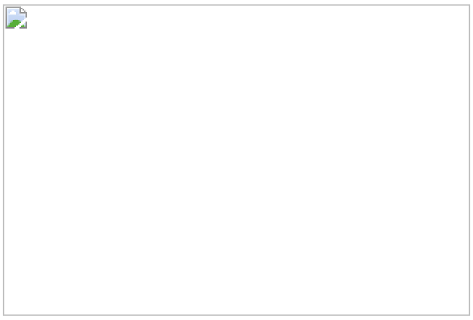

Рис.22

7.5. Обходы графа по ширине

При *обходе графа по ширине* просмотр вершин дерева ведется по этажам, переход к вершинам следующего этажа производится только после просмотра всех вершин данного этажа.

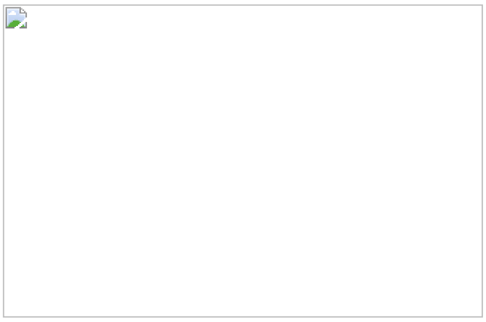

Рис.23

Очевидно, что при обходе всех вершин оба подхода: поиск в глубину и поиск по ширине — эквивалентны.Если же достаточно найти одну вершину с определенным свойством, то целесообразность применения поиска решения по глубине или по ширине определяется структурой дерева. Если дерево является достаточно широким, а висячие вершины расположены на сравнительно близких этажах, то целесообразно вести поиск по глубине. Для глубоких узких деревьев, когда висячие вершины могут встретиться на различных этажах и их разброс по этажам достаточно велик, предпочтение отдается поиску по ширине. Отметим, что при компьютерной реализации обходов по глубине и ширине целесообразно использовать задание дерева структурой смежности вершин.

7.6. Упорядоченные и бинарные деревья

Определим по индукции понятие ***упорядоченного дерева:***

1. Пустое множество и список (*a*), где *a* – некоторый элемент, является упорядоченным деревом;
2. Если T_1, T_2, ..., T_n – непустые упорядоченные деревья, *a* – некоторый новый элемент, то список $T = (a, T_1, T_2, \ldots, T_n)$ образует упорядоченное дерево. При этом элемент *a* называется ***корнем*** упорядоченного дерева *T*;
3. Любое упорядоченное дерево строится в соответствии с п. 1 и 2.

Определение 7.6. Если $T_1, T_2, \ldots, T_n$ – упорядоченные деревья, то список $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ называется ***упорядоченным лесом***.

Для заданного упорядоченного дерева *T* определим множество *S(T)* его ***упорядоченных поддеревьев***:

- если $T = \emptyset$, то $S(T) = \emptyset$;
- если $T = (a)$, то $S(T) = \{(a)\}$;
- если $T = (a, T_1, T_2, \ldots, T_n)$, то $S(T) = S(T_1) \cup \ldots \cup S(T_n) \cup \{T\}$.

Непустое упорядоченное дерево *T* может интерпретироваться в виде системы пронумерованных непустых множеств, каждое из которых взаимно однозначно соответствует упорядоченному поддереву из *S(T)* так, что:

1. Если T' – поддерево упорядоченного дерева T'' и $T', T'' \in S(T)$, то для соответствующих множеств X' и X'' выполняется включение $X' \subseteq X''$;
2. если T' не является поддеревом упорядоченного дерева T'' и $T', T'' \in S(T)$, соответствующие множества не пересекаются.

Пример.

Упорядоченному дереву (2, (4), (5)), (3, (6, (8), (9)),(7))) соответствует система множеств, изображенная на рис. 24.

Рис.24

Упорядоченное дерево может также интерпретироваться в виде так называемого *уступчатого списка*, который используется в оглавлениях. На рис. 25 представлен уступчатый список, соответствующий упорядоченному списку из примера выше.

Рис.25

Тезис. *Любая иерархическая классификационная схема интерпретируется некоторым упорядоченным деревом.*

Например, в виде упорядоченное дерева представляется любой терм. На рис. 26 изображено упорядоченное дерево, соответствующее терму $t = a - b \cdot (c : d + e : f)$.

Рис.26

Частным случаем упорядоченного дерева является ***бинарное дерево***. Определение понятия бинарного дерева повторяет определение для упорядоченного дерева с ограничениями $n \in \{0, 1, 2\}$ в п. 2. При этом для бинарного дерева $T = ((a), T_1, T_2)$, бинарное поддерево T_1 называется ***левым поддеревом***, *а* T_2 — ***правым поддеревом***.

Бинарные деревья имеют более простое устройство, чем упорядоченные, и вместе с тем любой упорядоченный лес взаимно однозначно соответствует некоторому бинарному дереву.

Опишем алгоритм преобразования упорядоченного леса T $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ в бинарное дерево $B(T)$:

1. Если $n = 0$, $B(T) \leftrightharpoons \emptyset$.
2. Если $n > 0$, то корнем бинарного дерева $B(T)$ является корень упорядоченного дерева T_1, левое поддерево дерева $B(T)$ – бинарное дерево B $(T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1m})$, где $T_1 = ((a_1), T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1m})$, правое поддерево дерева $B(T)$ – бинарное дерево $B(T_2, \ldots, T_n)$.

Пример. На рис. 27, б представлено бинарное дерево, соответствующее упорядоченному лесу (T_1, T_2), изображенному на рис. *а*.

Рис.27

§ 8. Планарность графов

Ранее уже отмечалось, что возможно несколько изображений одного графа, поскольку все изоморфные графы несут одну и ту же информацию.

На практике при изготовлении микросхем необходимо выяснить, можно ли схему радиоэлектронного устройства, которая представляет собой граф, изобразить на плоскости без пересечений проводников. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды. Таким образом, возникает задача построения и исследования плоского графа.

Определение 8.1. ***Плоским*** называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра— непрерывными плоскими линиями без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины.

Определение 8.2. Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется ***планарным.***

Все планарные графы укладываются на плоскости (имеют плоскую укладку).

На рис. 28 приведены примеры планарных графов.

Рис.28

Очевидно, что

- *Всякий подграф планарного графа планарен.*
- *Граф планарен тогда и только тогда, когда каждая связная компонента этого графа — планарный граф.*

Определение 8.3. ***Гранью*** планарного графа называется множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена плоской кривой, не пересекающей ребер этого графа.

Определение 8.4. ***Границей*** грани называется множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани.

Например, граф G на рис. 28 имеет восемь граней: $\Gamma_1,\Gamma_2,...,\Gamma_8$.

Определение 8.5. Неограниченная грань Γ_1 называется ***внешней***, а остальные грани $\Gamma_2,\Gamma_3,...,\Gamma_8$ —***внутренними***.

Пусть n, m, f — соответственно число вершин, ребер и граней планарного графа.

ТЕОРЕМА 8.1. (теорема Эйлера). *Для всякого связного планарного графа верно равенство* $n - m + f = 2$.

Определение 8.6. Два графа называются ***гомеоморфными***, если они оба могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер. На рис. 29 изображены исходный граф G и два гомеоморфных графа G_1 и G_2.

Рис.29

ТЕОРЕМА 8.2. *(теорема Понтрягина —Куратовского). Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных $K5$ или $K3$ 3.*

На рис. 30 показаны графы $K5$ и $K3$ 3 соответственно.

Рис.30

Эквивалентная форма критерия планарности описана в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 8.3. *Граф планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, стягиваемых (т. е. получаемых последовательностью отождествлений вершин, связанных ребрами) к графам $K5$ или $K3$ 3.*

Для непланарных графов вводятся характеристики, представляющие ту или иную меру непланарности.
Если граф непланарен, то для его геометрической реализации удаляют отдельные ребра (переносят их на другую плоскость).

Определение 8.7. Наименьшее число ребер, удаление которых приводит к планарному графу, называется ***числом планарности или искаженностью sk(G)*** графа *G*.

Для числа планарности полного графа справедлива следующая формула «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mi»s«/mi»«mi»k«/mi»«mfenced separators=¨|
¨»«mi»G«/mi»«/mfenced»«mo»=«/mo»«msubsup»«mi»C«/mi»«mi»n«/mi»«mn»2«/mn»«/msubsup»«mo»§#8722;«/mo»«mn»3«/mn»«mi»n«/mi»«mo»+«/m

Важнейшая характеристика непланарного графа— его ***толщина t(G)*** — наименьшее число планарных подграфов графа G, объединение которых дает сам граф. Толщина графа равна минимальному числу плоскостей t, при котором граф *G* разбивается на плоские части $G_1, G_2, \ldots, G_l$. Очевидно, что толщина планарного графа равна единице.

Для толщины связного (n,m) графа справедливы такие оценки

«math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mi»t«/mi»«mo»(«/mo»«mi»G«/mi»«mo»)«/mo»«mo»§#8805;«/mo»«mo»]«/mo»«mstyle displaystyle=¨false¨»«mfrac»«mi»m«/mi»«mrow»«mn»3«/mn»«mi»n«/mi»«mo»-«/mo»«mn»6«/mn»«/mrow»«/mfrac»«/mstyle»«mo»[«/mo»«mo»,«/mo»«m
displaystyle=¨false¨»«mfrac»«mrow»«mi»m«/mi»«mo»+«/mo»«mn»3«/mn»«mi»n«/mi»«mo»-«/mo»«mn»7«/mn»«/mrow»«mrow»«mn»3«/mn»«mi»n«/mi»

где [...] — целая часть числа, а]..[= [...]+1.

§ 9. Раскраска графов

Задачи раскраски вершин и ребер графа занимают важное место в истории развития теории и в самой теории графов. К построению раскрасок сводится целый ряд практических задач, например, задачи составления расписаний, распределения оборудования, проектирования некоторых технических изделий.

Задача раскрашивания графов, имеет также неожиданно широкое применение в программировании, особенно при решении фундаментальных теоретических проблем.

Пусть G = (S, U) — неориентированный граф.

Определение 9.1. Раскраской графа *называется такое приписывание цветов его вершинам, что никакие две смежные вершины не получают одинакового цвета.*

Таким образом, множество вершин одного цвета является независимым множеством.

Определение 9.2. Хроматическим числом «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mi mathvariant=¨bold-italic¨ mathcolor=¨#0055BB¨»§#967;«/mi»«/mstyle»«/math» графа G называется минимальное число цветов, требующееся для раскраски G .

Если «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mi mathcolor=¨#191919¨ mathsize=¨20px¨»§#967;«/mi»«/math»= *k* , то граф называется ***k-хроматическим***.

9.1. Гипотеза четырех красок.

В теории хроматических графов существует так называемая ***гипотеза четырех красок***, которую некоторые авторы с полным основанием называют «болезнью четырех красок». Попытки обосновать эту гипотезу привели к ряду интересных результатов не только по раскраске графов, но и по ряду других разделов теории графов.

Легко найти хроматические числа некоторых известных графов, например, *«math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mo»(«/mo»«msub»«mi»K«/mi»«mi»n«/mi»«/msub»«mo»)«/mo»«mo»=«/mo»«mi»n«/mi»«mo»,«/mo»«mo»(«/mo»«menclose notation=¨top¨»«msub»«mi»K«/mi»«mi»n«/mi»«/msub»«/menclose»«mo»)«/mo»«mo»=«/mo»«mn»1«/mn»«mo»,«/mo»«mo»(«/mo»«msub»«mi»K«/mi»«mro*

Обозначим через *P*(*G*) наибольшую из степеней вершин графа G.

ТЕОРЕМА 9.1. *Для любого неориентированного графа G выполняется неравенство* «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mi»§#935;«/mi»«mo»(«/mo»«mi»G«/mi»«mo»)«/mo»«mo»§#60;«/mo»«mi»P«/mi»«mo»(«/mo»«mi»G«/mi»«mo»)«/mo»«mo»+«

Следующая теорема связывает хроматическое число графа с количеством его вершин и ребер.

ТЕОРЕМА 9.2. *Для любого связного (n,m)- графа G верны неравенства*

«math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mo»§#8722;«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨ separators=¨|¨»«mrow»«mo»§#8722;«/mo»«mi»n«/mi»«mo»/«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨ separators=¨|¨»«mfrac»«mrow»«msup»«mi»n«/mi»«mn»2«/mn»«/msup»«mo»§#8722;«/mo»«mn»2«/mn»«mi»m«/mi»«/mrow»«mi»n«/mi»«/mfrac»«/mfenced»«mfenced separators=¨|¨»«mrow»«mn»1«/mn»«mo»§#8722;«/mo»«mfenced open=¨{¨ close=¨}¨ separators=¨|¨»«mfrac»«mrow»«msup»«mi»n«/mi»«mn»2«/mn»«/msup»«mo»§#8722;«/mo»«mn»2«/mn»«mi»m«/mi»«/mrow»«mi»n«/mi»«/mfrac»«/mfenced»«mo»/«/n separators=¨|¨»«mrow»«mn»1«/mn»«mo»+«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨ separators=¨|¨»«mfrac»«mrow»«msup»«mi»n«/mi»«mn»2«/mn»«/msup»«mo»§#8722;«/mo»«mn»2«/mn»«mi»m«/mi»«/mrow»«mi»n«/mi»«/mfrac»«/mfenced»«/mrow»« separators=¨|¨»«mi»G«/mi»«/mfenced»«mo»§#8804;«/mo»«mfenced open=¨[¨ close=¨]¨»«mfrac»«mrow»«mn»3«/mn»«mo»+«/mo»«mo»§#160;«/mo»«msqrt»«mn»9«/mn»«mo»+«/mo»«mn»8«/mn»«mo»(«/mo»«mi»m«/mi»«mo»-«/mc

где [...] — целая часть, а {..} — дробная часть числа.

ТЕОРЕМА 9.3. *Для любого n -вершинного графа G верно неравенство* «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mrow»«mfrac»«mi»n«/mi»«mrow»«msub»«mi»§#945;«/mi»«mn»0«/mn»«/msub»«mo»(«/mo»«mi»G«/mi»«mo»)«/mo»«/mrow»«/mfrac»

Проблема раскраски планарных графов является одной из самых знаменитых проблем теории графов. Она возникла из задачи раскраски географической карты, при которой любые две соседние страны должны быть окрашены в различные цвета. Эта задача легко сводится к задаче раскраски планарного графа. В 1879 г. английский математик Кэли четко сформулировал гипотезу четырех красок, которую некоторые авторы с полным основанием называют «болезнью четырех красок». Попытки обосновать эту гипотезу привели к ряду интересных результатов не только по раскраске графов, но и по ряду других разделов теории графов.

Всякий планарный граф 4-раскрашиваем.

Попытки доказать эту гипотезу привели в 1890г. к появлению теоремы Хивуда.

ТЕОРЕМА 9.4. *Всякий планарный граф 5-раскрашиваем.*

Трудность проблемы четырех красок привела к появлению большого числа равносильных ей формулировок. В конце 60-х гг. прошлого века эта проблема была сведена к исследованию большого, но конечного множества так называемых неустранимых конфигураций, число которых оказалось равно 1482. В 1976 г. научному коллективу под руководством К. Аппеля и В. Хейкена удалось с использованием ЭВМ правильно раскрасить все графы из множества неустранимых конфигураций, затратив на это около 2000 часов машинного времени. Таким образом, хотя такое доказательство очень сложно повторить, можно считать, что формально гипотеза четырех красок доказана.

В заключение рассмотрим очень простой алгоритм последовательной раскраски графа. Этот алгоритм в общем случае не приводит к минимальной раскраске. Только для некоторых классов графов, например полных k -дольных, последовательная раскраска минимальна.

Алгоритм последовательной раскраски содержит два правила:

1. Произвольной вершине x графа G присваивается цвет 1.
2. Если вершины x_1, x_2, ..., x_i раскрашены k цветами 1,2,...,k , $k<i$, то новой произвольно взятой вершине x_{i+1} приписывается минимальный цвет, не использованный при раскраске вершин из ее окружения.

ТЕОРЕМА 9.5. (теорема Кенига). *Граф двуцветен тогда и только тогда, когда он не содержит нечетных простых циклов.*