Практическое занятие 2
Линейные ДУ первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение. Это уравнение линейно относительно искомой функции и ее производной и имеет следующий вид

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ непрерывные функции от переменной x в той области D, в которой требуется проинтегрировать ДУ. Отметим, что при $q(x) = 0$ уравнение превращается в ДУ с разделяющими переменными.

Рассмотрим ***метод Бернулли*** решения линейных ДУ первого порядка. Представляем искомую функцию в виде произведения двух неизвестных функций $y = u \cdot v$, тогда уравнение примет вид $$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

Представим данное уравнение системой двух уравнений, полагая сумму, например, второго и третьего слагаемого в левой части уравнения равной нулю.

$$\begin{cases} u(v' + p(x)v) = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$$

Очевидно, что $u \neq 0$. Решаем последовательно два уравнения с разделяющими переменными. Так как начальное ДУ первого порядка, то оно имеет одну произвольную постоянную.

Пример 1. Решить задачу Коши $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$ при условии $y(0) = 0.$

Решение. Поделив все уравнение на $\cos^2 x$. Видим, что это линейное ДУ.

$$y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \Rightarrow \begin{cases} v' + \dfrac{v}{\cos^2 x} = 0,\ u \neq 0, \\ u'v = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}. \end{cases} \Rightarrow \ln v = -\operatorname{tg} x + C.$$

Получаем для функции решение $v = e^{-\operatorname{tg} x}$, которое подставляем во второе ДУ. Получим ДУ

$$du = e^{\operatorname{tg} x}\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx,$$

решение которого, после интегрирования по частям, дает следующий результат $u = (\operatorname{tg} x - 1)e^{\operatorname{tg} x} + C$. Получим общее решение в виде $y = uv = \operatorname{tg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{tg} x}$.

Частное решение определяется при $x = 0$ и $y = 0$, как C = 1.

Ответ: $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}.$

Пример 2. Найти общее решение ДУ $y' + \dfrac{xy}{1 - x^2} = \arcsin x + x.$

Решение. $$\begin{cases} v' + \dfrac{xv}{1 - x^2} = 0, u \neq 0, \\ u'v = \arcsin x + x. \end{cases} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{xdx}{1 - x^2} \Rightarrow v = \sqrt{1 - x^2}.$$ Далее

$$du = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow u = \frac{\arcsin^2 x}{2} - \sqrt{1-x^2} + C\ .$$

Ответ: $y = \sqrt{1-x^2}\,(\frac{\arcsin^2 x}{2} - \sqrt{1-x^2} + C).$

Дифференциальное уравнение Бернулли. Это ДУ имеет следующий вид

$$y' + p(x)y = q(x)\,y^n$$

и является нелинейным ДУ относительно *y*. Отметим, что при n = 1 оно превращается в ДУ с разделяющими переменными, а при n = 0 превращается в линейное ДУ.

.

Пример 1. Решить ДУ $y' - y = y^3$.

Решение . Делаем рекомендуемую замену $y = uv.$ Получим $u'v + uv' - uv = u^3v^3$?

$$\begin{cases} u'v = u^3v^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = dx \quad \Rightarrow \quad \ln v = x, v = e^x \\ v' - v = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2u^2} = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{\sqrt{-C - e^{2x}}} \end{cases}.$$

Ответ:$y = \frac{e^x}{\sqrt{-C-e^{2x}}}$.

Пример 2. Решить ДУ $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.

Решение . Решаем уравнение методом Бернулли, делаем замену $y = u \cdot v.$

$$\begin{cases} v' = -\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x} \\ u' = x^2u^4v^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^4} = \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{1}{\sqrt[3]{\ln(\frac{x}{C})^3}} \end{cases}.$$

Ответ: $y = -\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln(\frac{x}{C})^3}}$

.

.