Раздел 2 Комбинаторика

Сайт:	Электронное обучение ИРНИТУ
Курс:	Дискретная математика для студентов специальностей АСУ,ЭВМ
Книга:	Раздел 2 Комбинаторика
Напечатано::	Арбакова Анастасия Вячеславовна
Дата:	Понедельник, 7 Июнь 2021, 04:33

Оглавление

§1. Основные правила комбинаторики

§ 2. Перестановки и подстановки

§ 3. Размещения и сочетания

§4. Размещения и сочетания с повторением

§ 5. Разбиения

§ 6. Бином Ньютона. Полиномиальная формула

§ 7. Метод включений и исключений

§ 8. Рекуррентные соотношения. Возвратные последовательности

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой *комбинаторной конфигурацией*. Поэтому целями комбинаторного анализа являются изучение комбинаторных конфигураций, алгоритмов их построения, оптимизация таких алгоритмов, а также решение задач перечисления. Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения, сочетания и разбиения. При подсчете комбинаторных конфигураций используются правила суммы, произведения и степени.

§1. Основные правила комбинаторики

Основной комбинаторной задачей является подсчет числа (n, r)-выборок при различных условиях. Опыт выполнения комбинаторных операций отбора показывает, что большинство задач решается с помощью двух основных правил — правила суммы и правила произведения.

1.1. *Правило суммы.*

Если из множества S подмножество A (которое может состоять и из одного элемента) можно выбрать n способами, а подмножество B, отличное от A, m способами и при этом выборы A и B таковы, что взаимно исключают друг друга и не могут быть получены одновременно, то выбор из множества S множества $A \cup B$ можно получить $n + m$ способами.

Определение 1.1. Прокомментируем это правило. Если $A \cap B = \varnothing$, то A и B называются непересекающимися множествами, в частности, если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при всех $i, j = 1, 2, \ldots, r, i \neq j$, то $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r$ называется *разбиением множества S на непересекающиеся подмножества* или просто разбиением. Правило суммы можно сформулировать и в терминах теории множеств: если даны n-множество A и m-множество B, то при $A \cap B = \varnothing$ объединение A и B будет $(n + m)$-множеством. Если дано разбиение $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r$, где $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i, j = 1, 2, \ldots, r, i \neq j$ и если A_i есть n_i-множество ($i = 1, 2, \ldots, r$), то множество S есть $\sum n_i$-множество.

1.2. Правило произведения.

Если из множества S подмножество A может быть выбрано n способами, а после каждого такого выбора подмножество B можно выбрать m способами, то выбор A и B в указанном порядке можно осуществить $n \times m$ способами.

В терминах теории множеств это правило соответствует понятию декартова произведения множеств; если A является n-множеством, а В m-множеетвом, то $A \times B$ окажется $n \times m$ -множеством. Пусть A_i суть n_i - множества, $i = 1, 2, \ldots, r$. Построим множества: $M_1 = A_1, M_2 = A_1 \times A_2 = M_1 \times A_2, M_3 = M_2 \times A_3, \ldots, M_r = M_{r-1} \times A_r$. Тогда M_r будет $(n_1 n_2 \ldots n_r)$-множеством.

При решении практических задач правило произведения часто используется при подсчете числа вариантов при проведении (n,r)-выборок. В этом случае его формулировка может выглядеть, например, так. Пусть требуется выполнить одно за другим r действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие — n_2 способами и так до r -го действия, которое можно выполнить n_r способами, то все r действий вместе могут быть выполнены $n_1 n_2 \ldots n_r$ способами.

Пример. В классе изучают 10 предметов. В понедельник шесть уроков, причем все уроки различные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

Речь в задаче идет о 6 перестановках без повторения из 10 элементов. Первый урок можно поставить в расписание десятью способами, второй девятью, третий — восемью и т. д. По правилу произведения число способов составления расписания будет равно $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

Пример. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на пять?

Вспомним признаки делимости. Число делится на пять, если оно оканчивается на нуль или на пять. В задаче речь идет о (n,r)-перестановках с повторениями. Первая цифра может быть выбрана из множества 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Нуль не может участвовать в выборке, ибо при его выборе число будет четырехзначным, а не пятизначным.

Итого, девять вариантов выбора для первой цифры. Вторая, третья и четвертая цифры могут быть любыми из набора 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Последняя пятая цифра выбирается только из 0 и 5. Таким образом, $N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$.

§ 2. Перестановки и подстановки

Определение 2.1. Пусть дано множество $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. ***Перестановкой*** элементов множества M называется любой кортеж $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, состоящий из n различных элементов множества M. Перестановки отличаются друг от друга только порядком входящих в них элементов. Покажем, что число P_n всех перестановок множества M равно $n!$. Действительно, на первое место в кортеже можно поставить любой из n элементов, на второе место – любой из $n-1$ оставшихся и т.д. Для последнего места остается единственный элемент. Поэтому получаем всего $n(n-1)(n-2)...2\cdot 1 = n!$ перестановок.

Пример. Расставить на полке 10 книг можно $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$ различными способами.

Пример. Список студентов группы, состоящей из 25 человек, можно составить $P_{25} = 25!$ способами.

Напомним, что биекция $\sigma : M \leftrightarrow M$ называется подстановкой множества M. Пусть σ – подстановка множества $M = \{1, 2, ..., n\}$. Тогда $\sigma(k) = s_k$, где $1 \le\ s_k\ \le n$, $k = 1, 2, ..., n$, $\{s_1, s_2, ..., s_n\} = \{1, 2, ..., n\}$, и поэтому подстановку σ можно представить в виде матрицы, состоящей из двух строк:

Ясно, что если в матрице $[\sigma]$ переставить столбцы, то полученная матрица будет также определять подстановку σ. Множество всех подстановок множества $\{1,2,..., n\}$ обозначается через S_n. Для подстановок $\sigma,\tau\ \ S_n$ можно определить произведение $\sigma \cdot \tau$ как произведение двух функций. Зная матрицы подстановок

и [τ], переставив столбцы матрицы [τ] так, чтобы её первая строка совпала со второй строкой матрицы [σ]

получаем

ТЕОРЕМА 2.1. *Алгебра* $(S_n, \cdot)$ *является группой. При* $n \ge 3$ *она не коммутативна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Операция – ассоциативна как операция произведений функций. Легко проверяется, что существует единичная подстановка ε с матрицей

и для любой подстановки σ с матрицей существует обратная подстановка σ^{-1}, соответствующая матрице .

Если $n \ge 3$, то рассмотрим подстановки σ и τ с матрицами и .

Имеем , , т.е. $\sigma\,\tau \ne \tau\,\sigma$. Таким образом, группа $(S_n, \cdot)$ некоммутативна.

Определение 2.2. Группа $(S_n, \cdot)$ называется ***симметрической*** группой степени n. Число элементов этой группы $|S_n|$ равно $P_n = n!$.

Определение 2.3. Подстановка σ называется ***циклом*** длины r, если матрицу [σ] перестановкой столбцов можно привести к виду

Очевидно, что в этом случае σ задает биекцию, в которой $s_1 \to s_2, s_2 \to s_3, ...\ s_r \to s_1$, а остальные элементы неподвижны. Описанный цикл σ обозначается через $(s_1\ s_2 ...\ s_r)$.

Пример. Подстановка с матрицей является циклом (2536), а подстановка с матрицей циклом не является, так как из неё можно выделить два цикла (14) и (2563).

Циклы $(s_1 s_2 \ldots s_r)$ и $(t_1 t_2 \ldots t_p)$ называются независимыми, если $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\} \cap \{t_1, t_2, \ldots, t_p\} = \varnothing$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Каждую подстановку можно однозначно (с точностью до порядка сомножителей) представить в виде произведения независимых циклов.*

В примере 3. имеем , а .

Двухэлементный цикл (i j) называется *транспозицией*. При транспозиции i-й и j-й элементы меняются местами, а остальные сохраняют свое положение.

ТЕОРЕМА 2.3. *Каждая подстановка есть произведение транспозиций.*

Доказательство. По теореме 2. достаточно установить, что любой цикл $(s_1\ s_2 \ldots s_r)$ можно представить в виде произведения транспозиций, но легко проверяется, что $(s_1\ s_2 \ldots s_r) = (s_1\ s_2)(s_1\ s_3)\ldots(s_1\ s_r)$.

Пример. (1234)=(12)(13)(14).

§ 3. Размещения и сочетания

3.1. Размещения

Определение 3.1. Пусть ***M*** – множество, состоящее из ***n*** элементов, ***m ≤ n. Размещением*** из ***n*** элементов по ***m*** или *упорядоченной* ***(n,m)****-выборкой,* называется любой кортеж «math style=¨font-family:TimesNewRoman¨ xmlns=¨http://www.w3.org/1998/Math/MathML¨»«mstyle mathsize=¨20px¨»«mo mathvariant=¨bold¨»(«/mo»«msub»«msub»«mi mathvariant=¨bold-italic¨»§#1072;«/mi»«mi mathvariant=¨bold-italic¨»i«/mi»«/msub»«mn mathvariant=¨bold¨»1«/mn»«/msub»«mo mathvariant=¨bold¨»,«/mo»«mo mathvariant=¨bold¨»§#160;«/mo»«msub»«msub»«mi mathvariant=¨bold-italic¨»a«/mi»«mi mathvariant=¨bold-italic¨»i«/mi»«/msub»«mn mathvariant=¨bold¨»2«/mn»«/msub»«mo mathvariant=¨bold¨»,«/mo»«mo mathvariant=¨bold¨»§#160;«/mo»«mo mathvariant=¨bold¨»§#8230;«/mo»«mo mathvariant=¨bold¨»,«/mo»«mo mathvariant=¨bold¨»§#160;«/mo»«msub»«msub»«mi mathvariant=¨bold-italic¨»a«/mi»«mi mathvariant=¨bold-italic¨»i«/mi»«/msub»«mi mathvariant=¨bold¨»m«/mi»«/msub»«mo mathvariant=¨bold¨»)«/mo»«/mstyle»«/math», состоящий из ***m*** попарно различных элементов множества ***M***. Размещение можно рассматривать как разнозначную функцию ***f : {1,2,...,m}→M***, для которой ***f(j) =*** $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Пример. Для множества ***M = {a,b,c}*** пары ***(a,b)*** и (***b,a)*** являются размещениями из 3 по 2, тройка ***(a,c,b)*** – размещением из 3 по 3, а тройка ***(b,a,b)*** размещения не образует.

Число размещений из ***n*** по ***m*** обозначается через A_n^m или ***P(n,m).***

Покажем, что

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\dots(n-m+1)$$

(напомним, что 0!=1). Действительно, размещение *m* элементов можно представить как заполнение некоторых *m* позиций элементами множества M. При этом первую позицию можно заполнить *n* различными способами. После того как 1-я позиция заполнена, элемент для заполнения 2-й позиции можно выбрать ***(n-1)*** способами. Если продолжить этот процесс, то после заполнения позиций с 1-й по ***(m-1)***-ю будем иметь ***(n-m+1)*** способов заполнения последней, m-й позиции. Перемножая эти числа, получаем формулу (3.1).

Пример. Из десяти книг произвольным образом берутся и ставятся на полку одна за другой 3 книги. Имеется A_{10}^3 вариантов расстановок, где

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

3.2. Сочетания

Определение 3.2. Сочетанием из ***n*** элементов по ***m*** или *неупорядоченной* ***(n,m)****-выборкой,* называется любое подмножество множества ***M***, состоящее из ***m*** элементов.

Пример. Если ***M= {a,b,c}, то {a,b}, {a,c}, {b,c}*** – все сочетания из 3 по 2.

Число сочетаний из ***n*** по ***m*** обозначается через $C_n^m, \binom{n}{m}$ или ***C(n,m).***

Если объединить размещения из ***n*** элементов по ***m***, состоящие из одних и тех же элементов (не учитывая порядка их расположения), в классы эквивалентности, то можно установить биекцию ***φ*** между сочетаниями и полученными классами по следующему правилу: $\boldsymbol{\varphi(\{a_{i1},a_{i2},\dots,a_{im}\}) \leftrightarrow \{(b_1,b_2,\dots,b_m) \mid \{b_1,b_2,\dots,b_m\} = \{a_{i1},a_{i2},\dots,a_{im}\}\}}$. Так как из каждого сочетания ***C*** можно получить ***m!*** размещений (упорядочивая элементы из множества ***C m!*** способами по числу перестановок множества ***C***), то каждый класс эквивалентности содержит ***m!*** размещений и, значит, $A_n^m = m!\,C_n^m$, т.е. $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{m!}$. Таким образом,

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

Пример. Из десяти чисел четыре можно выбрать $C_{10}^4 = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ способами.

§4. Размещения и сочетания с повторением

Определение 4.1. ***Размещением с повторением*** из ***n*** элементов по ***m*** или *упорядоченной* ***(n,m)****-выборкой* с возвращениями называется любой кортеж $(a_1, \ldots, a_m)$ элементов множества ***M***, для которого $|M| = n$.

Поскольку в кортеж $(a_1, \ldots, a_m)$ на каждое место может претендовать любой из ***n*** элементов множества ***M***, *число размещений с повторениями*

$$\hat{P}(n,m) = \underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{m \text{ раз}} = n^m.$$

Пример. Из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить $\hat{P}(4,3) = 4^3 = 64$ трёхзначных числа.
Определим отношение эквивалентности на множестве размещений с повторениями из ***n*** по ***m***: $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \sim (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ $\Leftrightarrow$ для любого $c \in M$ число элементов a_i, равных ***c***, совпадает с числом элементов b_i, равных ***c***.

Определение 4.2. ***Сочетанием с повторением*** из ***n*** элементов по ***m*** или *неупорядоченной* ***(n,m)****-выборкой с возвращениями* называется любой класс эквивалентности по отношению ~ множества размещений с повторениями из ***n*** элементов по ***m***. Другими словами, сочетания с повторениями суть множества, которые состоят из элементов, выбранных ***m*** раз из множества ***M***, причем один и тот же элемент допускается выбирать повторно.

Число сочетаний с повторениями из ***n*** элементов по ***m*** обозначается через $\hat{C}(n,m)$ и вычисляется по формуле

$$\hat{C}(n,m) = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}$$

Пример. Число различных бросаний двух одинаковых кубиков равно

$\hat{C}(6,2) = C_7^2 = 21$

§ 5. Разбиения

Пусть ***M*** – множество мощности ***n***, $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ – разбиение множества ***M*** на ***k*** подмножеств, $|M_i| = m_i$, $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Определение 5.1. **Кортеж** $(M_1, \dots, M_k)$ называется ***упорядоченным разбиением*** множества ***M***.

Если $k = 2$, то упорядоченное разбиение множества ***M*** на два подмножества, имеющие соответственно m_1 и m_2 элементов, определяется сочетанием (без повторений) из ***n*** элементов по m_1 или из ***n*** по m_2 $(m_2 = n - m_1)$.

Следовательно, ***число разбиений*** $R(m_1, m_2)$ равно $C_n^{m_1} = C_n^{m_2}$. Таким образом,

$$R(m_1;m_2) = \frac{n!}{m_1!\,(n-m_1)!} = \frac{n!}{m_1!\,m_2!}$$

В общем случае ***число*** $R(m_1, m_2, \dots, m_k)$ ***упорядоченных разбиений*** $(M_1, M_2, \dots, M_k)$, для которых $|M_i| = m_i$, равно

$$R(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1!\,m_2!\dots m_k!}$$

Число $R(n,k)$ упорядоченных разбиений на ***k*** подмножеств вычисляется по формуле

$$R(n,k) = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=n\\ m_i>0}} R(m_1, m_2, \dots, m_k)$$

Пример. В студенческой группе, состоящей из 25 человек, при выборе старосты за выдвинутую кандидатуру проголосовали 12 человек, против – 10, воздержались – 3. Сколькими способами могло быть проведено такое голосование?

Пусть M – множество студентов в группе, M_1 – множество студентов, проголосовавших за выдвинутую кандидатуру, M_2 – множество студентов, проголосовавших против, M_3 – множество студентов, воздержавшихся от голосования. Тогда $|M| = 25$, $|M_1| = 12$, $|M_2| = 10$, $|M_3| = 3$, (M_1,M_2,M_3) – упорядоченное разбиение множества M. Искомое число R(12,10,3) равно $\frac{25!}{12!10!3!} = 1487285800$.

Число $R(m_1,m_2,\dots,m_k)$ разбиений исходного множества ***M*** на ***k*** подмножеств $M_1, M_2, \dots, M_k$, $|M_i| = m_i$, неупорядоченных между собой, вычисляется по формуле

$$\hat{R}(m_1, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1!\dots m_k!\,(1!)^{m_1}\dots(n!)^{m_k}},$$

а число всех возможных разбиений множества M на k подмножеств неупорядоченных между собой, равно

$$\sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=n\\ m_i>0}} \hat{R}(m_1, \dots, m_k)$$

Пример. Сколькими способами из группы в 25 человек можно сформировать 5 коалиций по 5 человек?

Пусть X – множество людей в группе, m_i – число коалиций по i человек, где i = 1,...,25. Тогда по условиям задачи $|M| = 25$, $m_5 = 5$, $m_i = 0$, $i \in \{1,2,\dots,25\} \setminus \{5\}$, и, следовательно, искомое число будет равно

$$\hat{R}(0,0,0,0,5,0,\dots,0) = \frac{25!}{5!\,(5!)^5} = \frac{25!}{(5!)^6}.$$

§ 6. Бином Ньютона. Полиномиальная формула

Определение 6.1. Числа сочетаний ***C(m,n)*** называются также ***биномиальными коэффициентами.*** Смысл этого названия устанавливается следующей теоремой, известной также как формула ***бинома Ньютона.***

ТЕОРЕМА 6.1.

$$(x+y)^m = \sum_{n=0}^{m} C(m,n)x^n y^{m-n}.$$

Доказательство.

По индукции. База, *m*= 1:

$$(x+y)^1 = x+y = 1x^1y^0 + 1x^0y^1 = C(1,0)x^1y^0 + C(1,1)x^0y^1 = \sum_{n=0}^{1} C(1,n)x^n y^{1-n}.$$

Индукционный переход:

$$\begin{aligned}
(x+y)^m &= (x+y)(x+y)^{m-1} = (x+y)\sum_{n=0}^{m-1} C(m-1,n)x^n y^{m-n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} xC(m-1,n)x^n y^{m-n-1} + \sum_{n=0}^{m-1} yC(m-1,n)x^n y^{m-n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} C(m-1,n)x^{n+1} y^{m-n-1} + \sum_{n=0}^{m-1} C(m-1,n)x^n y^{m-n} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \left(C(m-1,n-1) + C(m-1,n)\right)x^n y^{m-n} + C(m-1,m-1)x^m y^0 \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} C(m,n)x^n y^{m-n} + C(m,m)x^m y^{m-m} = \sum_{n=0}^{m} C(m,n)x^n y^{m-n}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Следствие 6.1.

$$\sum_{n=0}^{m} C(m,n) = 2^m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$2^m = (1+1)^m = \sum_{n=0}^{n} C(m,n)1^n 1^{m-n} = \sum_{n=0}^{m} C(m,n).$$

Следствие 6.2.

$$\sum_{n=0}^{m} (-1)^n C(m,n) = 0.$$

Доказательство.

$$0 = (-1+1)^m = \sum_{n=0}^{m} C(m,n)(-1)^n 1^{m-n} = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n C(m,n).$$

Свойства биномиальных коэффициентов.

Биномиальные коэффициенты обладают целым рядом замечательных свойств.

ТЕОРЕМА 6.2.

1. $C(m,n) = C(m,m-n)$;
2. $C(m,n) + C(m,n+1) = C(m+1,n+1)$.

Треугольник Паскаля.

Из второй формулы последней теоремы вытекает эффективный способ рекурентного вычисления значений биномиальных коэффициентов, который можно представить в графической форме, известной как *треугольник Паскаля*.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

....

В этом равнобедренном треугольнике каждое число (кроме единиц на боковых сторонах) является суммой двух чисел, стоящих над ним. Число сочетаний ***C(m, n)*** находится в ***(m + 1)***-м ряду на ***(n + 1)***-м месте.

Определение 6.2. ***Числа*** $R(m_1, m_2, \dots, mk) = \dfrac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_k!}$ называются ***полиномиальными коэффициентами***, поскольку для всех ***a1, a2, ..., ak*** ∈ ***R*** справедливо соотношение

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=n \\ m_i>0}} \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} a_1{}^{m_1} a_2{}^{m_2} \dots a_k{}^{m_k},$$

называемое ***полиномиальной формулой.***

◄ Предыдущая: § 5. Разбиения Следующая: § 7. Метод включений и

§ 7. Метод включений и исключений

Определение 7.1. Пусть множество ***A*** имеет ***N*** элементов и *n* одноместных отношений (свойств) ***P1, P2, ..., Pn***. Каждый из ***N*** элементов может обладать или не обладать любым из этих свойств. Обозначим через $N_{i_1 \dots i_k}$ число элементов, обладающих свойствами $P_{i_1,\dots,i_k}$ и, может быть, некоторыми другими. Тогда число ***N(0)*** элементов, не обладающих ни одним из свойств ***P1, P2, ..., Pn***, определяется по следующей формуле, называемой ***формулой включений и исключений:***

$$N(0) = S_0 - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^n S_n, \qquad (7.1)$$

где $S_0 = N$; $S_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} N_{i_1 \dots i_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Пример. Пусть колода состоит из ***n*** карт, пронумерованных числами ***1, 2, ..., n***. Сколькими способами можно расположить карты в колоде так, чтобы ни для одного ***i (1 ≤ i ≤ n)*** карта с номером ***i*** не занимала ***i-е*** место?

Имеется ***n*** свойств ***Pi*** в виде ***«i-я карта занимает в колоде i-е место».*** Число всевозможных расположений карт в колоде равно ***n!.*** Число $N_{i_1 \dots i_k}$ расположений, при которых карта с номером ***ij*** занимает место ***ij (j=1,...,k),*** равно ***(n-k)!.*** Тогда ***S0 = n!,***

$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} N_{i_1 \dots i_k} = C_n^k (n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

Используя формулу (7.1), получаем, что число ***N(0)*** расположений, при которых ни одно из свойств ***Pi*** не выполнено, равно

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Обобщая формулу (7.1), получаем формулу, позволяющую вычислить число ***N(r)*** элементов, обладающих ровно ***r*** свойствами ***(1 ≤ r ≤ n):***

$$N(r) = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k C_{r+k}^r S_{r+k} \qquad (7.2)$$

Определим функцию [***x***] для вещественных чисел ***x*** как наибольшее целое число, не превосходящее ***x***. Для положительных целых чисел ***a*** и ***b*** значение функции $\left[\frac{a}{b}\right]$ равно количеству чисел из множества ***{1,2,...,b},*** которые делятся на ***a***, т.е. кратных ***a***.

Пример. Сколько положительных чисел от 1 до 500 делятся ровно на одно из чисел 3,5 или 7?

Обозначим свойства делимости на 3,5 и 7 соответственно через P_1, P_2 и P_3. Тогда для N = 500 имеем $N_1=\left[\frac{500}{3}\right]=166$, $N_2=\left[\frac{500}{5}\right]=100$, $N_3=\left[\frac{500}{7}\right]=71$. Так как N_{12} – число общих кратных для чисел 3 и 5, наименьшее общее кратное которых равно 15, то N_{12} совпадает с количеством чисел, которые делятся на 15, т.е. $N_{12}=\left[\frac{500}{15}\right]=33$. Аналогично $N_{13}=\left[\frac{500}{21}\right]=23$, $N_{23}=\left[\frac{500}{35}\right]=14$, $N_{123}=\left[\frac{500}{105}\right]=4$. По формуле (5.3) находим искомое число чисел

$$N(1) = \sum_{k=0}^{3-1} (-1)^k C_{1+k}^1 S_{1+k} = (-1)^0 C_1^1 S_1 + (-1)^1 C_2^1 S_2 + (-1)^2 C_3^1 S_3 = (N_1 + N_2 + N_3) -$$

$$- 2(N_{12} + N_{13} + N_{23}) + 3N_{123} = 166 + 100 + 71 - 2(33+23+14) + 34 = 209.$$

◄ Предыдущая: § 6. Бином Ньютона. Полиномиальная формула Следующая: § 8. Рекуррентные соотношения. Возвратные последовательности ►
Перейти на...

§ 8. Рекуррентные соотношения. Возвратные последовательности

Определение 8.1. ***Рекуррентным соотношением, рекуррентным уравнением или рекуррентной формулой*** называется соотношение вида

$$a_{n+k} = F(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}),$$

которое позволяет вычислять все члены последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ если заданы её первые k членов.

Пример.

1. Формула $a_{n+1} = a_n + d$ задает арифметическую прогрессию.

2. Формула $a_{n+1} = qa_n$ определяет геометрическую прогрессию.

3. Формула $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ задает последовательность ***чисел Фибоначчи.***

Определение 8.2. В случае, когда рекуррентное соотношение линейно и однородно, т.е. выполняется соотношение вида

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \dots + p_k a_n = 0 \qquad (8.1)$$

($p = const$), последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ называется ***возвратной***.

Определение 8.3. Многочлен

$$P_a(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \dots + p_k \qquad (8.2)$$

называется ***характеристическим*** для возвратной последовательности $\{a_n\}$. Корни многочлена $P_a(x)$ называются ***характеристическими***.

Определение 8.4. Множество всех последовательностей, удовлетворяющих данному рекуррентному соотношению, называется ***общим решением***.

Описание общего решения соотношения (8.1) имеет аналогию с описанием решения обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть λ - корень характеристического многочлена (8.2). Тогда последовательность $\{c\lambda^n\}$, где* ***c*** *– произвольная константа, удовлетворяет соотношению (8.1).*

2. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ - простые корни характеристического многочлена (8.2), то общее решение рекуррентного соотношения (8.1) имеет вид

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_k\lambda_k^n,$$

где $c_1, c_2, \dots, c_k$ – произвольные константы.

3. Если λ_i - корень кратности r_i ($i = 1,\dots,s$) характеристического многочлена (8.2), то общее решение рекуррентного соотношения (8.1) имеет вид

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} (c_{i1} + c_{i2}n + \dots + c_{ir_i} n^{r_i - 1})\lambda_i^n$$

где c_{ij} – произвольные константы.

Зная общее решение рекуррентного уравнения (8.1), по начальным условиям $a_0, a_1, \dots, a_k$ можно найти неопределенные постоянные c_{ij} и тем самым получить решение уравнения (8.1) с данными начальными условиями.

Пример. Найти последовательность ***{a_n},*** удовлетворяющую рекуррентному соотношению $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ и начальным условиям ***a_1=10, a_2=16.***

Корнями характеристического многочлена $P_a(x) = x^2 - 4x + 3$ являются числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Следовательно, по теореме 8.1. общее решение имеет вид $a_n = c_1 + c_2 3^n$. Используя начальные условия, получаем систему

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 10, \\ c_1 + 9c_2 = 16, \end{cases}$$

решая которую, находим c_1 = 7 и c_2 = 1. Таким образом, $a_n = 7 + 3^n$.

Рассмотрим неоднородное линейное рекуррентное уравнение

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = f(n), n = 0,1,\ldots \qquad (8.3)$$

Пусть {b_n} – общее решение однородного уравнения (8.1), а {c_n} – *частное* (конкретное) *решение* неоднородного уравнения (8.3). Тогда последовательность {$b_n + c_n$} образует общее решение уравнения (8.3), и тем самым справедлива

ТЕОРЕМА 8.2. *Общее решение неоднородного линейного рекуррентного уравнения представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного линейного рекуррентного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения.*

Таким образом, в силу теоремы 8.2. задача нахождения общего решения рекуррентного уравнения (8.3) сводится к нахождению некоторого частного решения.

В отдельных случаях имеются общие рецепты нахождения частного решения.

Если $f(n) = \beta^n$ (где β не является характеристическим корнем), то, подставляя $a_n = c\beta^n$ в (8.1), получаем $c(\beta^k + p_1\beta^{k-1} + \ldots + p_k) \cdot \beta^n = \beta^n$ и отсюда $c \cdot P_a(b) = 1$, т.е. частное решение можно задать формулой $a_n = \dfrac{1}{P_a(\beta)} \cdot \beta^n$.

Пусть $f(n)$ – многочлен степени r от переменной n, и число 1 не является характеристическим корнем. Тогда $P_a(1) = 1 + p_1 + \ldots + p_k \neq 0$ и частное решение следует искать в виде $a_n = \sum_{i=0}^{r} d_i n^i$. Подставляя многочлены в формулу (8.3), получаем $\sum_{i=0}^{r} d_i (n+k)^i + p_i \sum_{i=0}^{r} d_i (n+k-1)^i + \ldots + p_k \sum_{i=0}^{r} d_i n^i = \sum_{i=0}^{r} d_i ((n+k)^i + p_1 (n+k-1)^i + \ldots + p_k n^i) =$
$= \sum_{i=0}^{r} d_i (g_1 n^i + \ldots) = f(n).$

Сравнивая коэффициенты в левой и правой частях последнего равенства, получаем соотношения для чисел d_i, позволяющих эти числа определить

Пример. Найти решение уравнения

$$a_{n+1} + 2a_n = n + 1$$

с начальным условием a_0 = 1.

Рассмотрим характеристический многочлен $P_a(x) = x + 2$. Так как $P_a(1) = 3 \neq 0$ и правая часть $f(n)$ уравнения (8.1) равна $n + 1$, то частное решение будем искать в виде $c_n = d_0 + d_1 n$. Подставляя c_n в исходное уравнение, получаем $(d_0 + d_1(n+1)) + 2(d_0 + d_1 n) = (3d_0 + d_1) + 3d_1 \cdot n = 1 + n$. Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему

$$\begin{cases} 3d_0 + d_1 = 1, \\ 3d_1 = 1, \end{cases}$$

откуда находим $d_0 = \frac{2}{9}$, $d_1 = \frac{1}{3}$. Таким образом, частное решение уравнения имеет вид $c_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{3}n$. По теореме общее решение однородного уравнения $a_{n+1} + 2a_n = 0$ задается формулой $b_n = c \cdot (-2)^n$, и по теореме 8.2 получаем общее решение уравнения: $a_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}n + c \cdot (-2)^n$. Из начального условия $a_0 = 1$ находим $\frac{2}{9} + c = 1$, т.е. $c = \frac{7}{9}$. Таким образом, $a_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{3}n + \frac{7}{9}(-2)^n$.