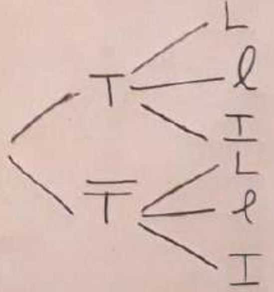
GHPROG (exercice)

Notat° : $\begin{cases} L : \text{libre} \quad T : \text{correction typée} \\ \ell : \text{liée} \\ I : \text{indécise} \end{cases}$

Données : $\begin{cases} P(L) = 0{,}45 \\ P(I) = 0{,}1 \\ P(\ell) = ? \end{cases}$ $\quad P(T/L) = 0{,}90 \quad P(T/I) = 0{,}10 \quad P(T/\ell) = 0{,}90$




$P(\ell/T) = ?$

- D'après le théorème de Bayes :

$$\boxed{P(\ell/T) = \frac{P(T \cap \ell)}{P(T)} = \frac{P(T/\ell) \cdot P(\ell)}{P(T)}}$$

connue

- Déterminons d'abord $P(\ell)$ :

D'après l'axiome de certitude

$P(L) + P(I) + P(\ell) = 1$

$0{,}45 + 0{,}1 + P(\ell) = 1$

$\underline{P(\ell) = 0{,}45}$

- Déterminat° de $P(T)$ :

Comme $T = (T \cap L) \cup (T \cap \ell) \cup (T \cap I)$

Alors $P(T) = P(T \cap L) \cup P(T \cap \ell) \cup P(T \cap I)$

Autrem dit, la probabilité totale sur $T$ est :

$P(T) = [P(T/L) \cdot P(L)] + [P(T/\ell) \cdot P(\ell)] + [P(T/I) \cdot P(I)]$

$= (0{,}90 \cdot 0{,}45) + (0{,}90 \cdot 0{,}45) + (0{,}10 \cdot 0{,}1)$

Donc, $\underline{P(T) = 0{,}82}$

- On peut en déduire maintenant que :

$$P(\ell/T) = \frac{0{,}90 \times 0{,}45}{0{,}82}$$

$\Rightarrow$ Soit $\boxed{P(\ell/T) = 0{,}49} \simeq 0{,}50$

EX014 (book) SERVEUR / CONCENTATEUR

- On a ici un évènement binaire, c'est à dire que l'évènem soit réalisé, soit il ne l'est pas. Alors on peut l'associé à $b(p)$.
- Mais on sait d'après l'ennoncer que chaque poste est occupé en moyenne pendant 2,5s/mn. On peut en déduire alors que $p = \frac{2,5}{60} = \frac{1}{24}$
- On sait aussi que $card(\Omega) = n = 1000$ postes
  le réseau est saturé si le nbr de poste occupés est $\geq 51$
- Soit $k$ le nbr de succès par épreuve
  Alors $\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n;p)}$ avec $\begin{cases} n : 1000 \\ p : \frac{1}{24} \end{cases}$
- Le probabilité de saturation de réseau pendant une durée moyenne d'une minute de pointe est donc :

$$\boxed{P(X=k) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$\text{Soit } P(X \geq 51) = C_{1000}^{51} \left(\frac{1}{24}\right)^{51} \left(\frac{23}{24}\right)^{949} + C_{1000}^{52} \left(\frac{1}{24}\right)^{52} \left(\frac{23}{24}\right)^{958} + \dots + C_{1000}^{1000} \left(\frac{1}{24}\right)^{1000} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X \geq 51) = \sum_{k=51}^{1000} C_{1000}^{k} \, p^k (1-p)^{1000-k}}$$

$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ est la probabilité qu'une permutat° de $E_n$ n'ait aucun point fixe.

1.(a) Ici, on a $n = 4$

$E_4$ : " Aucune pers. ne se rassoient sur la m̂ chaise "

$$\boxed{P(E_4) = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

$$P(E_4) = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!}$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8}$$

$$\boxed{P(E_4) = \frac{3}{8}}$$

(b) Dans ce cas, $n = 5$

$E_5$ : " Au moins un client puisse ouvrir sa porte "

$\overline{E_5}$ : " Aucun client puisse ouvrir sa porte "

$$\boxed{P(\overline{E_5}) = \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{k!}} \Longrightarrow P(\overline{E_5}) = P(E_4) + \frac{(-1)^5}{5!}$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{120} = \frac{11}{30} \qquad P(\overline{E_5}) + P(E_5) = 1$$

Alors $\boxed{P(E_5) = \frac{19}{30}}$

2. $E = \{a, b, c, d\}$ ; s : une permutat° de E

A : " a soit pt fixe de s "

$a, b, c, d$ en permutat°

fixe

référence

$a, b, c, d$

$P(A) = \frac{3!}{4!}$ $\boxed{P(A) = \frac{1}{4}}$

B : " a soit seul pt fixe de s "

$a, c, d, b$

$a, d, b, c$

$2!$

$P(B) = \frac{2!}{4!}$ $\boxed{P(B) = \frac{1}{12}}$

C : " s ait un seul pt fixe "

$P(C) = 4 \times P(B) = 4 \times \frac{1}{12}$ $\boxed{P(C) = \frac{1}{3}}$

D : " s ait au moins un point fixe "

$\overline{D}$ : " s n'ait aucun pt fixe "

$P(\overline{D}) = P(E_4) = \frac{3}{8}$

$P(D) = 1 - \frac{3}{8}$ $\boxed{P(D) = \frac{5}{8}}$