Exercice N°03

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1. Etudier le sens de variation de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\ ;+\infty[$.

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$.

1. Déterminer la limite de f en 0 et limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe de la fonction f : (C_f)

   Montrer que (Δ) coupe (C_f) en un point A que l'on déterminera.
3. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

Partie III

On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raiso
2. Montrer que (x_n) est une suite croissante.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} (f(x) - \frac{x}{2})dx$

   a). Donner une interprétation géométrique de a_n

   b). Montrer que $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n.

   c). ~~En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.~~

****