本项目是中山大学数学学院每日一题的模板, 使用方法为:

```
\begin{daily}[类型, 日期, 星级, 标题]
        正文
\end{daily}
```

方括号 `[]` 中的参数的顺序不影响结果. 其中类型如下:

- `theorem`
- `definition`
- `proposition`
- `lemma`
- `corollary`
- `fact`
- `example`
- `think`
- `calculate`
- `brain`

日期未设置时, 默认为当天日期, 未设置类型时, 默认为命题:

命题 1: **2024 年 4 月 3 日**

今天是 2024 年 4 月 3 日.

笃学笃行,
不悔不倦.

定理 2: abc **1111 年 11 月 11 日**

令 $\mathbb{I}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的某开区间，令 $f \in C^{\infty}(\mathbb{I})$，称其在 x_0 处解析，若在 x_0 某邻域内下式成立：

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (x - x_0)^n.$$

记为 $f \in C^{\omega}(x_0)$。任给 $E \subset \mathbb{I}$，定义 $C^{\omega}(E) = \bigcap_{x \in E} C^{\omega}(x)$。
现在证明：

1. 倘若
$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \log\Big(\frac{\sup_{x \in \mathbb{I}} |f^{(n)}(x)|}{n!} \Big) < \infty.$$
那么 $f \in C^{\omega}(\mathbb{I})$。

2. 倘若 $f \in C^{\omega}(x_0)$，那么在 x_0 的某邻域 J 内，下式成立：
$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \log\Big(\frac{\sup_{x \in J} |f^{(n)}(x)|}{n!} \Big) < \infty.$$

3. 证明以下解析函数的刻画：
   (a) 第二款的逆命题；
   (b) $f \in C^{\omega}(\mathbb{I})$ 当且仅当任给 $[\alpha, \beta] \in \mathbb{I}$，均有
$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \log\Big(\frac{\sup_{\alpha < x < \beta} |f^{(n)}(x)|}{n!} \Big) < \infty.$$