本项目是中山大学数学学院每日一题的模板, 使用方法为:

```
\begin{daily}[类型][日期][星级][标题]
        正文
\end{daily}\usepackage{unicode-math}
```

其中类型如下:

- theorem
- definition
- proposition
- lemma
- corollary
- fact
- example
- think
- calculate
- brain

20240402

正文

笃学笃行,
不悔不倦.

命题 1: a **20240402**

令 $\mathbb{I}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的某开区间, 令 $f \in C^{\infty}(\mathbb{I})$, 称其在 x_0 处解析, 若在 x_0 某邻域内下式成立:

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (x - x_0)^n.$$

记为 $f \in C^{\omega}(x_0)$。任给 $E \subset \mathbb{I}$, 定义 $C^{\omega}(E) = \bigcap_{x \in E} C^{\omega}(x)$。
现在证明:

1. 倘若
$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \log\left(\frac{\sup_{x \in \mathbb{I}} |f^{(n)}(x)|}{n!}\right) < \infty.$$
那么 $f \in C^{\omega}(\mathbb{I})$。

2. 倘若 $f \in C^{\omega}(x_0)$, 那么在 x_0 的某邻域 J 内, 下式成立:
$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \log\left(\frac{\sup_{x \in J} |f^{(n)}(x)|}{n!}\right) < \infty.$$

3. 证明以下解析函数的刻画:
   (a) 第二款的逆命题;
   (b) $f \in C^{\omega}(\mathbb{I})$ 当且仅当任给 $[\alpha, \beta] \in \mathbb{I}$, 均有
$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \log\left(\frac{\sup_{\alpha < x < \beta} |f^{(n)}(x)|}{n!}\right) < \infty.$$