本项目是中山大学数学学院每日一题的模板, 使用方法为:

```
\begin{daily}[类型][日期][星级][标题]
        正文
\end{daily}\usepackage{unicode-math}
```

其中类型如下:

- theorem
- definition
- proposition
- lemma
- corollary
- fact
- example
- think
- calculate
- brain

命题 1: 类型 **20240402**

正文

笃学笃行,
不悔不倦.

命题 2: 解析函数的一个刻画 **20240402**

令 $\mathbb{I}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的某开区间，令 $f \in C^\infty(\mathbb{I})$，称其在 x_0 处解析，若在 x_0 某邻域内下式成立:

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (x - x_0)^n.$$

记为 $f \in C^\omega(x_0)$。任给 $E \subset \mathbb{I}$，定义 $C^\omega(E) = \bigcap_{x \in E} C^\omega(x)$。
现在证明:

1. 倘若
$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \log\left(\frac{\sup_{x \in \mathbb{I}} |f^{(n)}(x)|}{n!}\right) < \infty.$$
那么 $f \in C^\omega(\mathbb{I})$。

2. 倘若 $f \in C^\omega(x_0)$，那么在 x_0 的某邻域 J 内，下式成立:
$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \log\left(\frac{\sup_{x \in J} |f^{(n)}(x)|}{n!}\right) < \infty.$$

3. 证明以下解析函数的刻画:

   (a) 第二款的逆命题;

   (b) $f \in C^\omega(\mathbb{I})$ 当且仅当任给 $[\alpha, \beta] \in \mathbb{I}$，均有
$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \log\left(\frac{\sup_{\alpha < x < \beta} |f^{(n)}(x)|}{n!}\right) < \infty.$$