1 延拓定理

关于延拓定理的注注又记记

RUI XIONG https://www.cnblogs.com/XiongRuiMath/p/9514946.html
ZUOQIN WANG http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/22S-Topology

引理 (Urysohn, 一般版本). 对于正规空间 (=T2+T4) X, 令 A, B 是 X 的两个分离的闭集, 则他们可以被连续函数分离, 具体来说, 存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得

$$f(A) = 0 \quad f(B) = 1.$$

证明. 取任意一个在 $[0,1]$ 上稠密的可数集 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (例如 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$), 不妨假设 $a_0 = 0, a_1 = 1$. 下面拟构造一系列开集 (除了 U_0) $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$, 使得

$$a_i < a_j \Longleftrightarrow \overline{U_i} \subseteq U_j.$$

具体来说, 令 $U_0 = A, U_1 = B^c$, 假设 $i < n$ 已经构造好, 假设 $a_i < a_n < a_j$. 此时根据条件, $\overline{U_i} \subseteq U_j$, 即 $\overline{U_i}$ 与 U_j^c 不交, 故存在开集 U_n 使得

$$\overline{U_i} \subseteq U_n \subseteq \overline{U_n} \subseteq U_j,$$

这样, 登高面已经决定好, 下面我们说明其决定了函数. 定义

$$f : X \longrightarrow [0,1] \quad x \longmapsto \inf\{a_i : x \in U_i\}$$

下面说明其连续,

- $f(x) < r$ 当且仅当对 $x \in \bigcup_{a_i < r} U_i$ 是开集.
- 因为 a_i 稠密, U_i 嵌套的性质, $f(x) > s$ 当且仅当存在 $s < a_i$ 满足 $x \notin U_i$, 再利用稠密性知道这还当且仅当存在 $s < a_j < a_i$ 使得 $x \notin \overline{U_j}$, 这当且仅当 $x \in \bigcup_{s < a_j} \left(\overline{U_j}\right)^c$ 还是开集.

  这说明 f 连续. 不难看出 $f(A) = 0, f(B) = 1$.

相比之下, 度量空间的 Urysohn 引理更加容易, 且结论更强

引理 (Urysohn, 度量空间). 对于度量空间 X, 令 A, B 是 X 的两个分离的闭集, 则他们可以被连续函数<u>完全分离</u>, 具体来说, 存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得

$$f^{-1}(0) = A \quad f^{-1}(1) = B$$

证明. 作 $g(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$, 注意, 因为 A 是闭集, 故 $d(x,A) = 0 \Longleftrightarrow x \in A$, 故分母不为零, 该函数确实被定义, 再根据二者都非负不难得到 $g(X) \subseteq [0,1]$. 不难得到此时 $g(x) = 1$ 当且仅当 $x \in B$, $g(x) = 0$ 当且仅当 $x \in A$, 此时再调整一个线性函数即可.

作为类比, 局部紧致下的 *Urysohn* 引理或许更为有用, 这里局部紧已经暗含了 *Hausdorff* 性, 但事实上我们对于局部紧.

引理 (Urysohn, 局部紧空间). 对于局部紧空间 X, 令 A, B 是 X 的两个分离的闭集, 且其中之一紧致, 则他们可以被连续函数分离, 具体来说, 存在连续函数 $f: X \to [0,1]$ 使得

$$f(A) = 0, \quad f(B) = 1.$$

证明. 不妨假设 A 是紧致的, B^c 是 A 的邻域, 根据局部紧的假设, 存在开集 V 使得 $A \subseteq V$ 且 $\bar{V}$ 是紧致的. 由于对于 Hausdorff 紧致空间一定是正规的, 这样可以对 A 和 ∂V 用 Urysohn 引理, 有 $f(A) = 0, f(\partial V) = 1$, 只需要延拓 f 使得在 V 外 f 取值为 1 就是满足条件的连续函数.

一个自然的问题是上面的连续能否改为可微? 这需要 X 具有微分结构, 这里不妨假设是欧式空间. 如下的定理已经足够使用了, 这个定理使用了磨光这一技巧.

引理 (Urysohn, 光滑版本). 对于欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个分离的闭集 A, B, 如果其中之一是紧致的, 则他们可以被光滑函数分离, 具体来说, 存在光滑函数 $f: X \to [0,1]$ 使得

$$f(A) = 0, \quad f(B) = 1.$$

证明. 考虑$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \mathrm{e}^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$, 不难验证, f 是光滑函数. 考虑 $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$ 这也是光滑函数, 且满足 $g(0) = 0, g(1) = 1$. 对于 $a < b \le c < d$, 记 $h(x) = \left\{ \begin{array}{ll} g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) & x \le b \\ g\left(\frac{d-x}{d-c}\right) & b \le x \le d \end{array} \right.$, 这个函数光滑且在 (a,d) 以外为 0, 在 $[b,c]$ 上为 1 , 方便起见记 $[b,c] \le h(x) \le (a,d)$. 任意 ϵ 可以作 $\{0\} \le h(x) \le (-\epsilon, \epsilon)$, 再通过调整 h 前的倍数可以使得存在光滑函数 χ_ϵ^0 满足

$$\chi_\epsilon^0(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\epsilon, \epsilon) \quad \int \chi_\epsilon^0 = 1$$

则 $\chi_\epsilon \to \delta$, 作 $\chi_\epsilon\left(x^1, \dots, x^n\right) = \chi_\epsilon^0(x^1) \dots \chi_\epsilon^0(x^n)$, 则满足

$$\chi_\epsilon(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\epsilon, \epsilon)^n \quad \int \chi_\epsilon = 1$$

在这里我们选择距离 $d(x,y) = \sum |x_i - y_i|$, 选择 $\epsilon > 0$ 使得任意 $a \in A, b \in B$ 都有 $3\epsilon < d(a,b)$. 记 $A^* = \{x : d(x,A) \le \epsilon\}, B^* = \{x : d(x,B) \le \epsilon\}$. 记 $i = 1 - 1_{A^*}, 1_{A^*}$ 是 A^* 的特征函数, 此时考虑

$$f \coloneqq d(x,A) = \left(d * \chi_\epsilon\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} i(x-t)\chi_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t = \int_{(-\epsilon,\epsilon)^n} i(x-t)\chi_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t$$

注意到

- $x \in A$ 意味着 $x - t \in A^*$, 此时 $d(x-t) = 0$, 故 $f(x) = 0$.

- $x \in B$ 意味着 $x - t \in B^*$, 此时 $d(x-t) = 1$, 故 $f(x) = 1$.

下面再验证 $f(x)$ 光滑,

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \int \frac{i(x+\Delta x - t) - i(x-t)}{\Delta x} \chi_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\chi_\epsilon(x+\Delta x - t) - \chi_\epsilon(x-t)}{\Delta x} i(t)\,\mathrm{d}t$$

因为 χ_ϵ 光滑且只生活在一个紧致集上根据中值定理以及控制收敛定理, $\Delta x \to 0$ 和积分号可以交换顺序, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \int i(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \chi_\epsilon(x-t)\,\mathrm{d}t = \int i(x-t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \chi_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t$$

上式是一维情况, 当中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 在高维可以换成任意偏微分算子, 换言之, 我们证明了 $f(x)$ 是光滑的.

> 实际上这样得到的函数还可以对导数做一些估计.

记 χ 为 $\mathbb{R}^n$ 在 0 处取 $1, (-1,1)^n$ 外取 0 且 $\|\chi\|_{L^1} = 1$ 的光滑函数, 对于重指标 α, 记一致范数 $\|\partial^\alpha \chi\| = C_\alpha$. 则 χ_ϵ 可以取为 $\frac{\chi(x/\epsilon)}{\epsilon^n}$, 故此时 $\|\partial^\alpha \chi_\epsilon\| = \frac{C_\alpha}{\epsilon^{|\alpha|+n}}$. 对于可测集合 X, 考虑

$$f(x) = \int (1 - 1_X)(x-t)\chi_\epsilon(t)\,\mathrm{d}t = \int_{(-\epsilon,\epsilon)^n} (1 - 1_X)(x-t)\chi_\epsilon\,\mathrm{d}t$$

则

$$\|\partial^\alpha f\| \leq (2\epsilon)^n \|\partial^\alpha \chi_\epsilon\| \leq \frac{2^n C_\alpha}{\epsilon^{|\alpha|}}$$

这样, 对于紧致集 A, 闭集 B, Urysohn 引理所作的光滑函数 f 将满足 $\|\partial^\alpha f\| \leq \frac{2^n 3^{|\alpha|} C_\alpha}{d(A,B)^{|\alpha|}}$. 即对每个 α, 存在常数 M_α 使得

$$\|\partial^\alpha f\| \leq \frac{M_\alpha}{d(A,B)^{|\alpha|}}$$

> 不过还有如下方法可以将定理做得更强.

引理 (Urysohn, 光滑版本). 对于欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个分离的闭集 A, B, 则他们可以被光滑函数完全分离, 具体来说, 存在光滑函数 $f : X \to [0,1]$ 使得

$$f^{-1}(0) = A \quad f^{-1}(1) = B$$

证明. 采取的方法是对每个闭集 A 找类似距离函数的光滑函数 $\partial(x,A) \geq 0$ 使得 0 的原像就是 A, 然后为了达成要求只需要 $f(x) = \frac{\partial(x,A)}{\partial(x,A)+\partial(x,B)}$. 可以断言, 任何一个闭集 A 都是可数个正方形 $\{x_i + (-\epsilon_i, \epsilon_i)^n\}$ 的并, 不妨假设 $\epsilon \leq 1$. 上面可以得到 χ 在 0 处取 $1, (-1,1)^n$ 外取 0 , 取 $C_n \geq 1$ 使得

$$\max_{|\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha \chi\| \leq C_n$$

作

$$\partial(x,A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon_i^i}{2^i C_i} \chi\left(\frac{x - x_i}{\epsilon_i}\right)$$

此时

$$|\partial^\alpha \partial(x)| \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon_i^{i-|\alpha|}}{2^i C_i} \left(\partial^\alpha \chi\right) \left| \left(\frac{x - x_i}{\epsilon_i} \right) \right| \le \sum_{i=1}^{|\alpha|} (\dots) + \sum_{i=|\alpha|+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

故各阶导数均一致收敛, 故 $\partial(x, A)$ 无限次可微. 而显然 $\partial(x, A) = 0 \iff x \in A$.

下面是著名的 *Tietz* 扩张定理.

定理 (Tietz 扩张). 如果 X 是正规空间或度量空间, A 是其中一个闭集 (或 X 是局部紧空间, A 是紧致时), 则任何 A 上的连续函数都可以延拓到整个 X 上.

证明. 设连续函数 $f : A \to \mathbb{R}$, 首先, 可以不妨假设 f 是有界的, 否则可以 arctan 伺候. 不妨假设 $f(A) \subseteq [0,1]$. 因为 A 是闭集 (紧致集), 故 $[0,1]$ 的闭集的原像是 X 的闭集 (紧致集).

- 根据 Urysohn 引理考虑取连续函数 $g_1 : X \to [0,1/3]$ 分离 $B_1 = f^{-1}[2/3,1]$ 和 $C_1 = f^{-1}[0,1/3]$, 使得 $g_1(B_1) = 1/3, g_1(C_1) = 0$.
- 再考虑 $f_2 = f - g_1|_A$, 此时 $f_2(A) \subseteq [0,2/3]$, 然后再取取连续函数 $g_2 : X \to [0,(1/3)(2/3)]$ 分离 $B_2 = f_2^{-1}\left[(2/3)^2, 2/3\right], C_2 = f_2^{-1}[0,(1/3)(2/3)]$, 使得 $g_2(B_2) = (1/3)(2/3), g_2(C_2) = 0$.
- 再考虑 $f_3 = f_2 - g_2|_A$, 此时 $f_3(A) \subseteq \left[0,(2/3)^2\right]$.

  以此类推可以得到 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\|g_n\| \le (1/3)(2/3)^{n-1}$, $\|f - \sum_{i=1}^n g_i\|_A \le (2/3)^n$, 换言之 $g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$ 一致收敛 (从而连续), 且在 A 上 $f = g$. 这就完成了证明.

它有一个类似的命题

对于 Hausdorff 空间 Y, A 是 X 的稠密子集, $f : A \to Y$ 是连续映射, 则至多存在一个连续扩张 $f : X \to Y$.

另一方面, 如果 A 不是闭集, 则我们不能期望所有 A 上的连续函数都能扩张, 例如 $f(x) = \sin(1/(x-a))$.

类似地, 我们可以 (保范地) 扩张复值函数, 扩张 Lipschitz 函数, 甚至将光滑函数扩张为光滑函数.

另一方面, 对于一般的拓扑空间 Y, 我们不能期望将闭子集 A 上的任意连续函数 $f : A \to Y$ 都扩张为 X 上的连续函数 $\tilde{f} : X \to Y$. 例如,

1. 赋予 $\{0,1\}$ 离散拓扑. 为了将函数 $f : \{0,1\} \to Y$ 扩张为连续函数

$$\tilde{f} : [0,1] \to Y,$$

   一个必要条件是: 存在一个连续函数 $\gamma : [0,1] \to Y$ 满足 $\gamma(0) = f(0), \gamma(1) = f(1)$. 用后文第 3.2 节的语言, 我们需要 $f(0)$ 和 $f(1)$ 位于 Y 的同一个道路连通分支中.

2. 为了将连续函数 $f: S^1 \to Y$ 扩张为连续函数 $\tilde{f}: D \to Y$, 其中 D 是平面上的单位圆盘, 我们需要像集 $f(S^1)$ 在 Y 中是可缩的（这是一种更高级别的连通性）. 特别地, 我们将会看到恒等映射

$$f: S^1 \to S^1, \quad x \mapsto x$$

不能被扩张为连续映射 $\tilde{f}: D \to S^1$. 我们将在本书的后半部分深入研究这些连通性现象.

下面可以来推导著名的单位分拆定理.

定义 (单位分拆). 对于拓扑空间 X, 对于连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$, 记支集 $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$. 对于开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 称一族函数 $\{\varphi_i\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的单位分拆如果

- 对任意 i, 存在 α 使得 $\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq U_\alpha$.
- 对每个 $x \in X$, 存在邻域 U 使得 $\{i : U \cap \operatorname{supp} \varphi_i \neq \varnothing\}$ 是有限集. ($\operatorname{supp} \varphi_i$ 局部有限)
- 对任意 $x \in X$ 都有 $\sum_i \varphi_i(x) = 1$, 以及 $\varphi_i(x) \geq 0$.

如果 φ_i 都是光滑的, 就称之为光滑单位分拆.

当然, 最为基本的就是紧致的情况.

定理 (单位分拆存在定理, 紧致版本). 对于 *Hausdorff* 紧致空间 X, 任意开覆盖总存在单位分拆.

证明. 任意取开覆盖, 对于每一点 x, 假设开覆盖中 $x \in U_x$, 存在开集 W_x, V_x 使得

$$x \in W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$$

此时 $\{W_x\}$ 还是开覆盖, 故存在有限覆盖 $\left\{W_{x_i}\right\}$. 此时根据 Urysohn 引理作 $\psi_i : X \to [0,1]$ 满足 $\varphi_i\left(\overline{W_{x_i}}\right) = 1$ 且 $\varphi_i\left(V_{x_i}^c\right) = 0$, 作 $\psi = \sum \varphi_i$, 因为 $\left\{W_{x_i}\right\}$ 是开覆盖, 故 $\psi \geq 1$, 故 $\varphi_i = \frac{\psi_i}{\psi} \geq 0$ 的支集 $\subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$, 且满足 $\sum \varphi_i = 1$, 故满足条件.

我们自然也不会放过光滑的版本.

定理 (单位分拆存在定理, 光滑版本). 对于流形 M (假定 C_2), 任意开覆盖总存在光滑单位分拆.

证明. 我们总可以找到可数的开集 $\{U_i\}$ 和紧致集 F_i 使得

$$U_1 \subseteq F_1 \subseteq U_2 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = M$$

只需要取可数拓扑基 $\{B_i\}$, 定义 $U_1 = B_1, F_1 = \overline{U_1}$, 找充分大的 n 使得 $U_2 = \bigcup_{i=1}^n U_i \supseteq F_1$ 以此类推. 这样 $\{U_{i+1} \backslash F_{i-1}\}$ 就是一个局部有限的可数开覆盖. 假设 $x \in U_i \backslash U_{i-1}$, 那么上面的证明中的 V_x, W_x 不妨取在 $U_i \backslash F_{i-1}$ 之中. 他们形成 $F_i \backslash U_{i-2}$ 的开覆盖, 根据 Lindelöf 覆盖定理他们存在可数子覆盖, 不难验证选出的可数子覆盖满足"局部有限"的条件, 之后的证明都如愿以偿.

下面我们来介绍"光滑"版本的延拓定理.

定理 (子流形延拓定理). 对于流形 M, 子流形 $N \subseteq M$ 上的光滑函数可以延拓到 M 上.

Proof. 假设光滑函数是 f. 在某一点附近 U 可以选择坐标卡使得 N 的坐标恰好是 M 坐标前几位 (因为子流形要求非退化, N 的坐标切映射可以延拓成一组基), 这样局部就得以延拓, 假设延拓为 f_U. 将这些局部收集起来得到 U_i. 作单位分拆 $\left\{\varphi_j\right\}$, 则在 $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq U_i$ 对某个 i, 作 $g_i = \varphi_i f_U$, 这是一个定义在整个 M 上的光滑函数, 再做 $g = \sum g_i$, 这就为所求的光滑函数. □

至此, 可以我们可以说扩张定理的根基是 Urysohn 引理, Urysohn 引理是扩张定理的特殊情况, 粗略来说 Urysohn 引理得到的函数就是连续 (光滑) 函数大背景下是对特征函数的替代, 通过特征函数组成简单函数 (即他们的和) 来逼近函数是一种约化的简单方法, 问题简单化之后变得能够解决, 同样的思想还被用于证明 Riesz 表示定理.

Urysohn 引理的进一步 "用法" 就是用于局部紧空间, 给一个邻域 "搭台唱戏", 这样导出的单位分拆得将局部的函数 "连成一片", 尽管他们在相交处可能是不同的, 这足以看到单位分拆是微分流形上关于函数 (更广泛来说是场) 的 "局部-整体" 原理, 而如解析函数一类则无此性质, 这表明解析函数的刚性, 这从侧面反映出光滑函数虽然比连续函数要求稍高一些, 但本质上还是足够 "柔软" 的.

在实分析中, 我们有如下的 *Lusin* 定理, 它告诉我们"可测函数在很大一个区域上是连续函数".

定理 (Lusin). 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间, μ 是 X 上的一个正则 Radon 测度. [a] *设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是 X 上的一个可测函数, 且存在具有有限测度的 Borel 集 E 使得 f 在 E^c 上为 0 . 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset E$ 使得 $\mu(E \backslash K) < \varepsilon$, 且 f 在 K 上连续.*

[a] 即 μ 是一个定义在全体 Borel 集上的测度，满足以下三个条件：

- 对于紧集 K, 由 $\mu(K) < +\infty$;
- 外正则性：对任意 Borel 集 A, 有 $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \text{ 是开集 }\}$;
- 内正则性：对任意 Borel 集 A, 有 $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ 是紧集 }\}$.

应用局部紧 Hausdorff 版本的 Tietze 扩张定理, 我们可以得到

推论 (连续函数几乎处处逼近可测函数). 在 Lusin 定理的假设下，存在一列紧支连续函数几乎处处收敛于 f.

证明. 根据 Lusin 定理, 存在满足条件 $\mu(E \backslash K) < \varepsilon$ 的紧集 $K \subset E$, 使得 f 在 K 上连续. 由局部紧 Hausdorff 空间的 Tietze 扩张定理, 存在 $g \in C_c(X, \mathbb{R})$ 使得 $g|_K = f$. 另一方面, 由外正则性，存在开集 $U \supset E$ 使得

$$\mu(U \backslash E) < \varepsilon.$$

对于紧集 K 跟闭集 U^c 应用局部紧 Hausdorff 空间的 Urysohn 引理, 可得连续函数 $h \in C_c(X, \mathbb{R})$ 使得

$$h(K) = 1, \quad h\left(U^c\right) = 0.$$

于是, 对任意 $\varepsilon > 0$, 我们得到紧支连续函数 $gh \in C_c(X, \mathbb{R})$ 使得

$$\mu(\{x \mid g(x)h(x) \neq f(x)\}) < 2\varepsilon.$$

最后分别取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, 我们得到一列紧支连续函数 g_n 依测度收敛于 f. 再由 Riesz 定理, g_n 有子列几乎处处收敛于 f.

再提一个具有趣味性的例子, 涉及到 Cantor 集

$$C = [0,1] \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right).$$

可以证明映射

$$g : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C \subset [0,1], \quad a = (a_1, a_2, \cdots) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} a_k$$

是从 $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{\text{product}}\right)$ 到 Cantor 集 C 的同胚, 且映射

$$h : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]^2, \quad a = (a_1, a_2, \cdots) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{2^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2^k}\right)$$

是一个连续满射. 于是, 我们得到一个连续满射

$$h \circ g^{-1} : C \to [0,1]^2.$$

由于 C 在 $[0,1]$ 中是闭集, 因此由 Tietze 扩张定理, 存在一个连续满射

$$f : [0,1] \to [0,1]^2.$$

一般而言, 我们把从 $[0,1]$ 到拓扑空间的连续映射叫做曲线, 于是我们得到了一条填满单位正方形的曲线! 这种能填满正方形的曲线最早是 Peano 在 1890 年发现的:

2 拓扑空间的紧性

WHAT IS “LOCALLY COMPACT”?

Raghu R. Gompa, Indiana University at Kokomo

https://www.pme-math.org/journal/issues/PMEJ.Vol.9.No.6.pdf p. 390

Each textbook in Topology has its own way of defining what it means for a space to be locally compact. Some authors make an effort to give an equivalent characterization under some additional assumptions about the topological space (see [2]). Essentially there are four wncepts with the name of local compactness and the relations among these have been only partially studied. Even though local compactness, by its very title, is a local property (recall that a property is said to be local if it can be specified for any single point in the space), there has been only global study (that is, a study of the spaces where the property is assumed for every point in the space) of it in the literature. In this paper, we study it locally at a point. Implications among these concepts will be discussed at a particular point. Moreover, we present examples to help understand the impossibility of reverse implications.

Throughout this paper X represents an arbitrary topological space and x denotes a fixed point of X. Schnare [3] discussed two definitions of local compactness, which are rephrased here to define them as properties of space X at a point x as follows: A topological space X is called weakly locally compact, or simply w-compact, at x iff there is a compact neighborhood of x in the space X. X is called mildly locally compact, or m-compact, at x iff there is a neighborhood of x whose closure is compact. A topological space is said to be 1-compact iff it is 1-compact at each of its points where 1 is “w”, “m”, or any other letter that makes sense in the following discussion. Schnare [3] showed that a w-compact space is m-compact iff the closure of any compact set is compact. Later, Gross [4] introduced a third definition of local compactness, which is modified here as a property at a particular point x. A space X is called bit locally compact, or b-compact, at x iff each neighborhood of x contains a compact neighborhood of x.

It is well known that all these wncepts are equivalent in Hausdorff spaces and regular spaces. In fact, in such spaces, these are equivalent to one more concept called strongly locally compact. X is said to be strongly locally compact, or s-compact, at x iff each neighborhood of x contains a compact closed neighborhood of z. The particular choice of terminology becomes apparent after observing that s-compact is strongest, w-compact is the weakest, and b-compact, m-compact lie in between for any general spaces. That is, we have the following implications in any general topological space X at the point x :

拓扑学的每本教科书都有自己的方法来定义空间局部紧的含义. 有些作者试图在拓扑空间的一些额外假设下给出等效的表征 (见 [2]). 本质上, 有四个概念被称为局部紧性, 而这些概念之间的关系只得到了部分研究. 尽管局部紧性从其名称上看就是一个局部性质 (回顾一下, 如果一个性质可以为空间中的任何一点所指定, 那么就可以说它是局部的), 但文献中对它的研究只有全局性的 (即对空间中的每一点都假定具有该性质的空间的研究). 在本文中, 我们研究的是某一点的局部性质. 我们将在某一点上讨论这些概念之间的含义. 此外, 我们还将举出反向推导不可能的反例.

本文中, X 代表任意拓扑空间, x 表示 X 的一个定点. Schnare[3] 讨论了局部紧性的两个定义, 在此将其重新表述, 定义为在点 x 上空间 X 的性质如下：拓扑空间 X 被称为在 x 处弱局部紧, 或简称为 w-compact, 当且仅当在空间 X 中存在 x 的紧邻域. X 被称为在 x 处局部微紧或 m-compact, 当且仅当存在 x 的邻域, 其闭包是紧的. 如果在 1 是 “w”, “m” 或任何其他在下面的讨论中有意义的字母时, 拓扑空间在它的每个点上都是 1-紧的, 那么这个拓扑空间就被称为 1-紧空间. Schnare[3] 证明, 如果任意紧集的闭包是紧的, 那么一个 w-compact 空间就是 m-compact 的. 后来, Gross[4] 引入了局部紧性的第三个定义, 这里将其修改为特定点 x 的属性. 如果 x 的每个邻域都包含 x 的一个紧邻域, 那么 X 空间在 x 处被称为局部稍紧或 b-compact.

众所周知, 所有这些概念在 Hausdorff 空间和正则空间中都是等价的. 事实上, 在这些空间中, 这些概念等价于另一个概念, 即强局部紧. 如果 x 的每个邻域都包含 x 的紧闭邻域, 那么我们就说 X 在 x 处是强局部紧的, 或者说是 s-compact 的. 在观察到对于任何一般空间, s-compact 是最强的, w-compact 是最弱的, 而 b-compact 和 m-compact 介于两者之间之后, 术语的特殊选择就变得显而易见了. 也就是说, 在任何一般拓扑空间 X 中, 我们在点 x 上都有如下结果：

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{b-compact} \arrow[dr] & \\
\text{s-compact} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{w-compact} \\
 & \text{m-compact} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

These implications are strict. Moreover, b-compact and m-compact are incomparable in a general topological space.

Even though compact spaces are obviously m-compact (and thus w-compact), compactness does not imply either s-compactness or b-compactness. Consider the one-point compactification of the space $\mathbb{Q}$ of rational numbers. This is a $T_{1\frac{1}{2}}$-space (a space in which each compact set is closed). It can be shown that it is neither s-compact nor b-compact. This example also tells us that even in compact $T_{1½}$-spaces

这些含义是推导的. 此外, 在一般拓扑空间中, b-compact 和 m-compact 是不可比较的.

尽管紧空间显然是 m-compact 的 (因此也是 w-compact 的), 但紧性并不意味着 s-compact 性或 b-compact 性. 考虑一下有理数空间 $\mathbb{Q}$ 的单点紧化. 这是一个 $T_{1\frac{1}{2}}$ 空间 (每个紧集都是封闭的空间). 可以证明它既不是 s-compact 也不是 b-compact. 这个例子还告诉我们, 即使在紧的 $T_{1\frac{2}{2}}$ 空间中在 x 处

$$\text{m-compact} \longrightarrow \text{b-compact}$$

此处单点紧化采用 *Alexandroff extension*, 也即对于一个拓扑空间 X, 取 $X^* = X \sqcup \{\infty\}$, 继承 X 的全部开集, 同时有开集 $V = (X \backslash C) \sqcup \{\infty\}$, 其中 C 是闭紧集.

则 $\mathbb{Q}$ 是一个 $T_{1\frac{1}{2}}$ 空间, 对于一个紧集 $C \subseteq \mathbb{Q}$, 如果 $\infty \notin C$, 则 C 也是 $\mathbb{Q}$ 中的紧集, $C \cup \{\infty\} \backslash C$ 是 C^* 中的开集. 如果 $\infty \in C$, 且 $\mathbb{Q} \backslash C$ 不是开集, 则 $\mathbb{Q} \cap C$ 在 $\mathbb{Q}$ 非闭, 存在点 $x \in \mathbb{Q} \backslash C$ 和 $\mathbb{Q} \cap C$ 中的序列 $\{x_n\} \to x$. 集合 $K = \{x\} \cup \{x_n\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的紧集. $\{\mathbb{Q}^* \backslash K\} \cup \{(\mathbb{Q} \backslash K) \cup \{x_n\}\}$ 是紧集 C 的覆盖, 但不能缩成有限项.

at x. However, b-compact certainly implies m-compact in $T_{1\frac{1}{2}}$-spaces. In fact, this implication holds even under a weaker assumption on the topological space. To explain this assumption, we need the following definition. A space is called an R-space iff the closure of a compact set is compact. Clearly any regular or $T_{1½}$-(hence T_2-) space is an R-space. since m-compactness at x is equivalent to the statement that there is a compact closed neighborhood of x in X, it is immediate that in any R-space

然而, 在 $T_{1½}$ 空间中, b-compact 肯定意味着 m-compact. 事实上, 即使在拓扑空间的较弱假设下, 这一蕴涵也是成立的. 为了解释这个假设, 我们需要下面的定义. 如果一个紧集的闭包是紧的, 那么这个空间就叫做 R 空间. 显然, 任何正则或 $T_{1\frac{1}{2}}$-(即 T_2-) 空间都是 R 空间. 由于 z 处的 m-compact 性等价于 X 中存在 x 的紧闭邻域这一声明, 因此在任何 R 空间中, 都可以立即得出 x 处

$$\text{b-compact} \longrightarrow \text{m-compact} \longrightarrow \text{w-compact}$$

at x. Of course, b-compact does not imply m-compact in general spaces. Gross [4] has an example of a b-compact normal space which is not m-compact. An easy example is the following: Consider an infinite set X with a distinguished point x in which a set is declared to be open if is either empty or it contains x. This is a T_o-space (a space in which distinct points have distinct closures) which is b-compact at x but not m-compact.

当然, 在一般空间中, b-compact 并不意味着 m-compact. Gross[4] 举了一个 b-compact 正规空间不 m-compact 的例子. 下面是一个简单的例子: 考虑一个有区分点 x 的无穷集 X, 其中如果一个集如果是空的或者包含 x, 那么这个集就是开的. 这是一个 T_o 空间 (在这个空间里, 不同的点有不同的闭合), 它在 x 处是 b-compact 的, 但不是 m-compact 的.

An infinite set with cofinite topology reveals that even in compact, T_1- and R-spaces

一个具有余有限拓扑的无穷集揭示出, 即使在紧的, T_1-和R-空间中

$$\text{b- and m-compact} \not\longrightarrow \text{s-compact at } x.$$

But in-compact and s-compact at x are equivalent in a topological space which is T_2 at x. A space X is called T_2 at x iff for any point y of X different from x, there exist two disjoint open sets G and H in X containing y and x, respectively. It is easy to verify that a topological space X is T_2 at a point x iff to each compact set A not containing x there correspond two disjoint open sets L and m such that $A \subseteq L$ and $x \in M$.

但是在拓扑空间中, x 的 in-compact 和 s-compact 等价于 x 的 T_2. 如果对于 X 中不同于 x 的任意点 y, 在 X 中存在两个不相交的开集 G 和 H, 分别包含 y 和 x, 那么在 x 处的 X 空间被称为 T_2. 很容易验证拓扑空间 X 在点 x 上是 T_2, 如果对每个不包含 x 的紧集合 A 来说, 有两个不相交的开集 L 和 m 对应, 使得 $A \subseteq L$ 和 $x \in M$.

Let us show that if X is T_2 at x and m-compact at x then it is s-compact at x. Let G by any open set containing z. Let N be a compact closed neighborhood of x (by m-compactness at x, N exists). Write $A = N \cap G'$, where G' represents the complement of G. Clearly A is a closed subset of the compact space N and hence compact. Since $x \notin A$ and X is T_2 at x, there are disjoint open sets L and M such that $A \subseteq L$ and $x \in M$. Now $M \subseteq L'$ and

我们证明如果 X 在 x 处是 T_2 并且在 x 处是 mompact 的, 那么在 x 处就是 mompact 的. 那么它在 x 是 s-compact 的. 让 G 是包含 z 的任意开集. 让 N 是一个紧的的封闭邻域 (根据 x 的 m-compactness,N 存在). 写 $A = N \cap G'$, 其中 G' 表示的补集. 显然, A 是紧空间的一个封闭子集因此是紧的. 因为 $x \notin A$ 中, 并且 X 在 x 是 T_2, 所以有不相交的开集 L 和 M 这样的 $A \subseteq L$ 并且 $x \in M$ 中. 现在 $M \subseteq L'$ 并且

$$\bar{M} \subseteq L' \subseteq A' = N' \cup G$$

(the bar indicates the closure of the set), which means $\bar{M} \cap N \subseteq G$. Thus $H = M \cap N^{\circ}$(N° is the interior of N) is an open set containing x and

(板表示集合闭包), 这意味着 $\bar{M} \cap N \subseteq G$. 因此 $H = M \cap N^{\circ}$ (N° 是 N 的内部) 是一个包含 x 的开集, 并且

$$\bar{H} \subseteq \bar{M} \cap \bar{N} = \bar{M} \cap N \subseteq G.$$

Moreover, $\bar{H}_1$ being a closed subset of compact set N, is compact. This shows that X is s-compact at x.

此外, $\bar{H}_1$ 作为紧集 N 的闭子集, 是紧的. 这表明 X 在 x 是 s-compact 的.

At this point note that, for any R-space that is T_2 at x the implications

此时请注意, 对于任何 R-空间在 x 处为 T_2 的含义是

$$\text{w-compact} \longrightarrow \text{m-compact} \longrightarrow \text{s-compact}$$

hold at x, hence all compactness concepts are equivalent. Notice that a space which is s-compact at x is regular at x; that is, to each open set G containing x there corresponds an open set H such that $x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$. In fact, this property of the space assures the equivalence of all these concepts. To prove this, let us assume that X is w-compact at x and regular at x. We show that X is s-compact at x. Let G be any open set containing z. Since X is w-compact at x, there is a compact neighborhood N of x. Put $A = G \cap N^{\circ}$. Then by regularity at z, there exists an open set H such that

在 x 处成立, 因此所有紧性概念都是等价的. 注意在 x 是 s-compact 的空间在 x 是正则的; 也就是说, 对于每个包含 x 的开集都对应着一个 x 开邻域 H 使得 $x \in H \subseteq\subseteq \bar{H} \subseteq G$. 事实上, 空间的这一属性保证了所有这些概念的等价性. 为了证明这一点, 让我们假设 X 在 x 处是 w-compact 的, 在 x 处是规则的. 我们证明 X 在 x 是 s-compact 的. 让 G 是任意开集包含 x. 因为 X 在 x 处是 w-compact 的, 所以 x 有一个紧的邻域 N. 设 $A = G \cap N^{\circ}$. 那

么根据 x 的正则性, 存在一个开集 H, 使得

$$x \in H \subseteq \bar{H} \subseteq A.$$

Clearly $\bar{H}$ is compact (because a closed subset of a compact space is compact) and $\bar{H} \subseteq$. Thus X is s-compact at x. Thus all these concepts are equivalent in spaces which are regular at x, T_2 at z with R-property, or Hausdorff spaces.

显然 $\bar{H}$ 是紧的 (因为紧空间的封闭子集是紧的), 并且 $\bar{H} \subseteq$. 因此 X 在 x 是 s-compact 的. 因此所有这些在 x 处是规则的, 在 z 处的 T_2 具有或 Hausdorff 空间.

We close our discussion with an analysis of some of the standard properties of local compact spaces. Clearly any local compactness is x is closed hereditary (i.e., preserved under closed subspaces). However, only s-and b-compactness are open hereditary (i.e., preserved under open subspaces). The one point compactification of the space $\mathbb{Q}$ is m-compact (hence w-compact) in which the open set $\mathbb{Q}$ is neither m-compact nor w-compact. A w-compact dense subset B of a $T_{1½}$-space X is open. Indeed, suppose $b \in B$. Since B is w-compact, there exist a compact subset C of B and an open subset G of X such that b $\in B \cap G \subseteq$ C. C is closed in X, because X is a $T_{1½}$-space. Since B is dense in X and G is open in $X, \bar{G} = \overline{B \cap G}$. Thus

最后, 我们将分析局部紧空间的一些标准性质. 紧空间的一些标准性质. 显然, 任何局部紧性 x 都是封闭遗传的 (即在封闭子空间下保存). (即在封闭子空间下保存). 然而, 只有 s-compactness 和 b-compactness 是开遗传的 (即在开子集下保留). 空间空间 $\mathbb{Q}$ 的一点紧化是 m-compact 性 (因此是 w-compact 性), 其中的开集 $\mathbb{Q}$ 既不是 m-compact 也不是 w-compact. 一个空间 X 的 w-compact 密子集 B 是开的. 事实上, 假设 b 在 B 中. 由于 B 是 w-compact 的, 所以存在 B 的一个紧子集 **C** 和 X 的一个开放子集 G . X 使得 $B \in B \cap G \subseteq C$. C 在因为 X 是一个 $T_{1½}$ 空间. 因为 B 是在 X 中是稠密的, 而 G 在 X 中是开的, 所以 $\bar{G} = \overline{B \cap G}$. 因此

$$b \in G \subseteq \bar{G} = \overline{B \cap G} \subseteq \bar{C} = C \subseteq B.$$

This shows that B is a neighborhood of b. This being true for any $b \in B$, B is open.

这表明 B 是 b 的邻域. 对于任何都是如此中的任何 b 都是如此, 所以 B 是开的.

References

1. J. L. Kelly, *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, (1966).
2. A. Wilansky, *Topology for Analysis*, Ginn and Company, Massachusetts, (1970).
3. P. S. Schnare, *Two Definitions of Local Compactness*, American Mathematical Monthly **72** (1965), pp 764–765.
4. J. L. Gross, *A Third Definition of Local Compactness*, American Mathematical Monthly **74** (1976), pp 1120–1122.

横截性的一些理解

InnocentFIVE, https://github.com/InnocentFIVE/Concise-Real-Variables-DDG

我们从一道实分析习题讲起:

> 令 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 可微, 令 $E = \{f' = 0\}$, 证明 $\mathfrak{m}(f(E)) = 0$.

由于涉及到的集合可测性未知 (不过 E 是可测的), 因此需要用外测度, 由于 Lebesgue 外测度的外正则性 (也就是存在外测度相等的可测超集), 讨论中以构造上升集列为佳, 故考虑 (导数的) 极大估计

$$g_n(x) = \sup_{|y-x|\leqslant 1/n} \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|.$$

则由 $g_n \downarrow_n |f'|$, 故 $E = \bigcap_{k\geqslant 1}\bigcup_{n\geqslant 1}\left\{g_n \leqslant \frac{1}{k}\right\}$. 故

$$f(E) \subset \bigcap_{k\geqslant 1}\bigcup_{n\geqslant 1} f\Big(\Big\{g_n \leqslant \frac{1}{k}\Big\}\Big).$$

只需估计 $\bigcup_{n\geqslant 1} f\big(\big\{g_n \leqslant \frac{1}{k}\big\}\big)$ 即可. 为简便, 固定 k, 不妨设 $\left\{g_n \leqslant \frac{1}{k}\right\} = E_n$, 则令

$$E_n \subset \bigcup_{m\geqslant 0}(a_m, b_m), \quad b_m - a_m < \frac{1}{n}, \quad \bigcup_{m\geqslant 0}(b_m - a_m) < \mathfrak{m}^*(E_n) + \varepsilon.$$

其中 $b_m - a_m < \frac{1}{n}$ 是为了令 $x_1, x_2 \in E_n \cap (a_m, b_m)$, 则依赖 E_n 定义有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{|x_1-x_2|}{k}$. 故

$$\operatorname{diam}\big(f(E_n \cap (a_m, b_m))\big) \leqslant \frac{b_m - a_m}{k}.$$

故

$$\mathfrak{m}^*(f(E_n)) \leqslant \sum_{m\geqslant 0}\frac{b_m - a_m}{k} < \frac{\mathfrak{m}^*(E_n)+\varepsilon}{k}.$$

也即是 $\mathfrak{m}^*(f(E_n)) \leqslant \frac{\mathfrak{m}^*(E_n)}{k}$. 接下来是利用外正则性估计 $\bigcup_{n\geqslant 1} f(E_n)$ 的外测度. 令 G_n 可测且 $f(E_n) \subset G_n$, $f(E_n)$ 和 G_n 外测度相等 (只需令 A_m 是包含 $f(E_n)$ 的开集且 $\mathfrak{m}(A_m) < \mathfrak{m}^*(f(E_n)) + \frac{1}{m}$, 令 $G_n = \bigcap_{m\geqslant 1} A_m$ 即可), 令 $H_n = \bigcap_{k\geqslant n} G_k$, 由 $f(E_n)$ 随 n 上升, 故 $f(E_n) \leqslant H_n$, 且 $\mathfrak{m}^*(f(E_n)) = \mathfrak{m}^*(H_n)$. 故

$$\sup_n \mathfrak{m}^*(f(E_n)) = \sup_n \mathfrak{m}(H_n) = \mathfrak{m}\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} H_n\Big) \geqslant \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} f(E_n)\Big).$$

反向的不等式显然, 故 $\mathfrak{m}^*\big(\bigcup_{n\geqslant 1} f(E_n)\big) = \sup_n \mathfrak{m}^*(f(E_n)) \leqslant \frac{\sup \mathfrak{m}^*(E_n)}{k} \leqslant \frac{1}{k}$. 故 $\mathfrak{m}^*(f(E)) \leqslant \mathfrak{m}^*\big(\bigcup_{n\geqslant 1} f(E_n)\big) \leqslant \frac{1}{k}$ 得到 $f(E)$ 零测.

一个更直接的想法是考虑开球族 $\{B_x\}_{x\in E}$, 其中 B_x 满足

$$y \in B_x \backslash \{x\} \implies \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant \frac{1}{k}.$$

这样直观地, $E \subset \bigcup_{x\in E} B_x$, $f(E) \subset \bigcup_{x\in E} \frac{B_{f(x)}}{k}$. $\frac{B_x}{k}$ 是球心不变, 半径变为原来的 $\frac{1}{k}$ 得到的. 但是此球族不一定可数, 测度也不好估计, 因此需要用到一些覆盖定理.

令 F 是一组 $\mathbb{R}^n$ 中的闭球, 且满足 $a = \sup\{\operatorname{diam} B; B \in F\}$ 有限, 则存在可数不交球族 $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足

$$\bigcup_{B\in F} B \subset \bigcup_{n\geqslant 0} 5B_n.$$

Proof. 各种各样覆盖定理的证明都可以尝试从先选大球再选小球, 首先将球半径分层:

$$F_n = \left\{B \in F; \operatorname{diam} B \in \left(\frac{a}{2^n}, \frac{a}{2^{n-1}}\right]\right\}, \quad n \geqslant 1.$$

令 $G_1 \subset F_1$ 是其某极大不交组; G_n 是和 $\bigcup_{j=1}^{n-1} G_j$ 中元素不交的某极大不交组 (可以对所有有理数, 选取含其的不交球然后并起来得到), 令 $G := \bigcup_{n\geqslant 1} G_n$, G 可数, 记其为 $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$. 给定 $B \in F$, 则不妨令 $B \in F_k$, 故存在 $B_n \in \bigcup_{j=1}^{k} G_j$ 满足 $B_n \cap B \neq \varnothing$, 由于 $\operatorname{diam} B_n \geqslant \frac{a}{2^k}$, $\operatorname{diam} B \leqslant \frac{a}{2^{k-1}}$, 故可以得到 $B \subset 5B_n$. □

现在考虑新的 B_x 满足

$$y \in 5B_x \backslash \{x\} \implies \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leqslant \frac{1}{k}.$$

其由一个可数族 $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足 $E \subset \bigcup_{x\in E} B_x \subset \bigcup_{n\geqslant 0} 5B_n$. 故

$$\mathfrak{m}^*(f(E)) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mathfrak{m}^*(f(5B_n)) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathfrak{m}(5B_n)}{k} \leqslant \frac{10}{k}.$$

最后一个等式是由于 $\sum_{n\geqslant 0} \mathfrak{m}(5B_n) \subset \sum_{n\geqslant 0} 5\mathfrak{m}(B_n) \leqslant 10$ (由于 B_n 的球心在 $[0, 1]$ 中).

这事实上是 Sard 定理的一个特例, 它的叙述是这样的

> *Let*
>
> $$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
>
> *be* C^k*, where* $k \geq \max\{n - m + 1, 1\}$*. Let* $X \subset \mathbb{R}^n$ *denote the critical set of* f*, which is the set of points* $x \in \mathbb{R}^n$ *at which the Jacobian matrix of* f *has rank* $< m$*. Then the image* $f(X)$ *has Lebesgue measure* 0 *in* $\mathbb{R}^m$*.*
>
> *Intuitively speaking, this means that although* X *may be large, its image must be small in the sense of Lebesgue measure: while* f *may have many critical points in the domain* $\mathbb{R}^n$*, it must have few critical values in the image* $\mathbb{R}^m$*.*

More generally, the result also holds for mappings between differentiable manifolds M and N of dimensions m and n, respectively. The critical set X of a C^k function

$$f : N \to M$$

consists of those points at which the differential

$$df : TN \to TM$$

has rank less than m as a linear transformation. If $k \geq \max\{n-m+1, 1\}$, then Sard's theorem asserts that the image of X has measure zero as a subset of M. This formulation of the result follows from the version for Euclidean spaces by taking a countable set of coordinate patches. The conclusion of the theorem is a local statement, since a countable union of sets of measure zero is a set of measure zero, and the property of a subset of a coordinate patch having zero measure is invariant under diffeomorphism.

Sard 定理的假设是映射横截性的特例. 用 Sard 定理可以证明，维度互补的子流形之间，或子流形与到空间的映射之间的横截交是光滑子流形.

事实上横截性就是这样一个生于便利地定义子流形的性质, 它与相交理论有着密切关系，作为正则值原像是子流形的推广，微分拓扑中引入了横截条件来刻画 $f^{-1}(S)$ 是 X 的子流形的条件，特别地 S 是 Y 的子流形，如果考虑嵌入 $f: X \to Y$ ，那么横截条件就是描述 X 和 S 在 Y 中是否 "规则地相交"（例如相交线）. 从这个角度出发可以引出相交数这个同伦不变量，进而用微分拓扑的观点给出了映射度, Euler 示性数, Lefschetz 数的定义. 在 GuilleminPollback 的书中有着非常详细的论述，并且证明了 Poincare-Hopf 定理（向量场的指标和是示性数）, Lefschetz 不动点定理（Lefschetz 数不等于 0 等价于映射有不动点）, Hopf 映射度定理（球面间映射 f, g 如果 $\deg f = \deg g$ 则 f, g 同伦），最后一章证明了 Gauss-Bonnet 公式. 这些漂亮的结果其实在 GTM 82 中也都有（除了 Hopf 映射度定理）.

首先我们介绍正则原像定理

[正则原像]

例如，若将有向流形切丛的光滑截面（即向量场）视为基到总空间的映射，并与零截面（无论视作映射还是子流形）横截相交，则截面的零集（即向量场的奇点）形成基的光滑 0 维子空间（即有符号点集）. 符号与向量场的指标一致，因此符号之和（即零集的基类）等于流形的 Euler 特征. 更一般地说，对于有限维有向光滑闭流形上的向量丛，横截于截面的零集是余维数等于丛之秩的基的子流形，其同调类 Poincare 对偶于丛的 Euler 类.

一个及其特殊的情形是：若实数到实数的可微函数在零点有非零的导数，则称之为简单零点，图像在此处横截于 x 轴；零导数意味着曲线的水平切线，与 x 轴的切空间一致.