Facultad de Matemática y Computación (UH)
Ciencia de la Computación
Matemática Numérica

Clase Práctica 3:
Sistemas de ecuaciones lineales:
Kit de superviviencia

Curso 2024

Lo único que hay que saber (para aprobar)

Ejercicio 1: Descomposición PLU (60 000 créditos)

Dada una matriz A cuadrada y no singular,

a) ¿En qué consiste la factorización (o descomposición) PLU de esa matriz? *(10 000 créditos)*

b) ¿Qué características tiene cada una de las matrices de la factorización? *(30 000 créditos)*

c) ¿Cuál es la forma de resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ usando la factorización PLU de A? *(20 000 créditos)*

Ejercicio 2: Descomposición PLU en la computadora (60000 créditos)

En el lenguaje de programación de su preferencia[1], ¿cómo se puede obtener la factorización PLU de una matriz?

Para terminar con más de 3 sería bueno saber algo de esto

Ejercicio 3: Sobre las estrategias de pivote (80 000 créditos)

"En las implementaciones computacionales del método de Gauss las estrategias de pivote juegan un papel importante y pueden llegar a ser vitales."

a) Justifique la afirmación anterior *(20 000 créditos)*.

[1]Por ejemplo, Python, con `numpy` o `scipy`

b) Mencione y describa 3 estrategias de pivote no triviales[2]. *(20 000 créditos por cada una).*

Ejercicio 4: Matriz de trabajo (80 000 créditos)

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz cuadrada no singular, demuestre que es posible obtener su factorización PLU usando únicamente la memoria que ocupa la matriz A y un vector de enteros de tamaño n.

Ejercicio 5: Una[3] para todas[4]... (80 000 créditos)

Dada una matriz A cuadrada y no singular sin ninguna otra característica relevante, diga cuál es la forma más adecuada para resolver k sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b_i,\ i = \overline{1,k}$$

Ejercicio 6: ¡Abajo el cálculo de la inversa! (100 000 créditos)

Muestre que es posible evitar el cálculo de la inversa realizando las siguientes operaciones sin calcular la inversa de ninguna matriz. En todos los casos A y B son matrices, y x, e y son vectores con las dimensiones apropiadas para poder realizar las operaciones.

a) Calcule $y = A^{-1}x$, donde A y x son conocidos. *(30 000 créditos)*

b) Calcule $y = x^t A^{-1} B^{-1} x$, donde A, B y x son conocidos. *(70 000 créditos)*

Ejercicio 7: ¡Diga NO a las maldiciones imperdonables! (100 000 créditos)

"Y para terminar, aquí les presento una de las maldiciones imperdonables de la matemática numérica." Dijo el profesor, y con un movimiento de su varita calculó la inversa de la matriz que flotaba delante de él. En medio del silencio que descendió sobre el local, el profesor preguntó en voz alta: "¿Alguien puede decirme tres motivos por los que calcular la inversa de una matriz es una maldición imperdonable?". Como era de esperar, Hermione levantó la mano antes de que el profesor terminara la pregunta, y como era ya habitual, ante la ausencia de otras manos levantadas el profesor le pide que responda.

a) Mencione los tres argumentos que le oyó decir a Hermione aquel día. *(20 000 créditos por cada uno.)*

b) Diga cuál es la forma numéricamente correcta de calcular la inversa de una matriz *(40 000 créditos.).*

[2] O sea, la de seleccionar un elemento diferente de 0 no cuenta `:-(`.
[3] factorización
[4] las soluciones de los sistemas

Ejercicio 8: Simetría y definición (150 000 créditos)

Una matriz A simétrica y definida positiva siempre se puede descomponer de la forma $A = LL^t$ donde L es una matriz triangular inferior. Esta descomposición se conoce como descomposición de Cholesky.

a) En función de los elementos de A, ¿qué forma tienen los elementos de L? *(30 000 créditos)*

b) ¿Qué ocurriría en el cálculo de los elementos propuestos por usted en el inciso anterior si la matriz no fuera simétrica y definida positiva? *(30 000 créditos)*

c) ¿Cómo puede usarse esta descomposición para resolver un sistema de ecuaciones lineales donde la matriz es simétrica y definida positiva? *(30 000 créditos)*

d) ¿Qué complejidad computacional tiene resolver un sistema de ecuaciones lineales si la matriz es simétrica y definida positiva? *(30 000 créditos)*

e) ¿Cómo puede utilizarse este método para determinar si una matriz simétrica A es definida positiva? *(30 000 créditos)*

Demostrar es bueno

Ejercicio 9: ¿Qué tal se te da demostrar teoremas? (300 000 créditos)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz cuadrada no singular.

a) *(100 000)* Demuestre que si a la matriz A es posible aplicarle el método de Gauss sin hacer intercambios de filas, entonces existen matrices L y U, tales que $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior con 1 en la diagonal y U es una matriz triangular superior.

b) *(100 000)* Demuestre que si a la matriz A es posible aplicarle el método de Gauss sin hacer intercambios de filas, entonces la matrices obtenidas en el inciso a) son únicas.

c) *(100 000)* Demuestre que siempre es posible descomponer una matriz cualquiera A cuadrada y no singular, como $A = PLU$, donde L es una matriz triangular inferior con 1 en la diagonal, U es una matriz triangular superior, y P es una matriz de permutaciones.

Bibliografía recomendada

- *Elementary Numerical Analysis, An algorithmic approach. 3rd Edition*
  S. D. Conte y Carl de Boor. McGraw-Hill Book Company. 1980.
- *Numerical Analysis.* Burden R. L., Faires J. D. y Annette M. Burden, 10th Edition. Brooks Cole Publishing, 2016.
- *Numerical Analysis.* Timothy Sauer, 3rd Edition. Pearson, 2017.

- *Scientific Computing. An Introductory Survey. 2nd Edition* M. Heath. McGraw-Hill Book Company, 2002.
- *Accuracy and stability of numerical algorithms.* 2nd Edition. Nicholas J. Higham SIAM. 2002.
- *Matrices Fantásticas y dónde encontrarlas.* Newt Scamander ft. Alan Turing y John Von Neumann 13ra Edición. Hogwarts Numerical Press. 2021.
- Libros y artículos relacionados con aplicaciones de la descomposición SVD.