Facultad de Matemática y Computación (UH)
Ciencia de la Computación
Matemática Numérica

Clase Práctica # 1.0000000000000002:
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ¿$\mathbb{F}$?

Curso 2024

Esta es la parte fácil.

Ejercicio 1: ¿Entendiste lo de las aritméticas de punto flotante? (30 000 créditos)

Sea $F = (2, 3, -1, 1)$ una aritmética de punto flotante.

a) Diga cuáles son todos los números que pertenecen a F.

b) Represéntelos gráficamente en una recta numérica.

c) Calcule el épsilon de la máquina, el mayor representable y el menor representable.

Ejercicio 2: ¿Y las operaciones aritméticas? (40 000 créditos)

Los siguientes números pertenecen a una aritmética de punto flotante con una mantisa normalizada de 4 dígitos[1]:

$$a = 0.4523 \times 10^4,\ b = 0.2115 \times 10^{-3},\ c = 0.2583 \times 10^1$$

Efectúe las siguientes operaciones (asumiendo redondeo por truncamiento y por redondeo al flotante más cercano) y compare los resultados con el valor obtenido si las operaciones se realizaran con números reales.

a) a + b + c

b) a/c

[1] ¡Taratatáaan! Acabas de descubrir una pregunta secreta por un valor de 10 000 créditos: *Dado que esos números están representados en una aritmética de punto flotante, ¿cuál es la base de esa aritmética?*

Ejercicio 3: Aritméticas de punto flotante vs Análisis Matemático (50 000 créditos)

Todo aquel que haya pasado un buen curso de Análisis Matemático sabe que[2]:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{1}$$

donde $e \approx 2.718281828459045$. Sin embargo, cuando se trata de calcular en una computadora el valor de e, evaluando la parte izquierda de (1) para grandes valores de n, se obtiene un valor ligeramente distinto de e.

a) *(10 000 créditos)* ¿A qué número converge la parte izquierda de (1) cuando las evaluaciones ocurren en una aritmética de punto flotante?[3]

b) *(10 000 créditos)* ¿A partir de qué valor de N se obtiene el resultado calculado en el inciso anterior, cuando se evalúa la parte izquierda de (1)? [4]

c) *(30 000 créditos)* Si la parte izquierda de (1) se evalúa en una aritmética $F(\beta, p, m, M)$,

- ¿A qué valor "converge"?
- ¿A partir de qué N se tiene la "convergencia"?

Ya esto está más interesante...

Ejercicio 4: Números reales vs flotantes (60 000 créditos)

Diga qué números reales x cumplen que $fl(1+x) = 1$, en una aritmética de punto flotante donde $\beta = 10$ y $p = 3$, que efectúe redondeo:

a) por truncamiento,

b) aproximando al número flotante más cercano.

Ejercicio 5: Números reales vs flotantes generalizado[5] (70 000 créditos)

Dados una aritmética de punto flotante $F(\beta, p, m, M)$, y un número natural n, diga qué números reales cumplen que $fl(\beta^n + x) = \beta^n$, cuando se efectúa el redondeo:

---

[2] Incluso algunos para los que el curso no fue tan bueno también lo saben.

[3] Hint gratis: Aquí conviene aumentar el valor de N comenzando por 1 y mulitplicando por 10 `:-)`.

[4] Gúaugúagúauau... ¡Puuuuán! ¡Una pregunta secreta salvaje ha aparecido! *La pregunta que se hace en este inciso está incompleta: le falta algo para que tenga sentido, sobre todo en el contexto de la asignatura ¿Qué habría que agregarle para que esté completa y rigurosa?* ¡Ve, "Hint"! Hint ataca a la pregunta gritando: ¡Mira el iniciso siguiente! ¡Crrrsssshhh! ¡Es súper efectivo! La pregunta salvaje se desmayó. Gracias a Hint puedes ganar 10 000 créditos extras.

[5] Este es el tipo de ejercicios que un estudiante que termine con 5 la asignatura debería poder hacer en la prueba sin problemas.

a) por truncamiento.

b) aproximando al flotante más cercano.

Ejercicio 6: Cuando uno más uno no siempre es dos... (80 000 créditos)

Dados una aritmética de punto flotante $F = (10, 3, -5, 5)$, y los valores S_1 y S_2 donde:

$$S_1 = 1 + \sum_{i=1}^{1000} 0.001, \text{ y } S_2 = \sum_{i=1}^{1000} 0.001 + 1,$$

explique por qué S_1 y S_2 no tienen el mismo valor si las operaciones se realizan en la aritmética de punto flotante F.

Ejercicio 7: ¿De verdad entendiste el ejercicio anterior? (90 000 créditos)

Dada una aritmética de punto flotante: $F = (\beta, p, m, M)$, determine para qué valores de $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{-n} = 1.$$

Ejercicio 8: ¿Seguro que lo entendiste bien? (100 000 créditos)

Dada una aritmética de punto flotante: $F = (\beta, p, m, M)$, determine todos los pares de números naturales $(N, n) \in \mathbb{N}^2$ para los que se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{N} \beta^{-n} + 1 = 1.$$

Preguntas ¡Ooooh![6]

Ejercicio 9: Usando tus conocimientos de aritmética de punto flotante... (100 000 créditos)

Explique por qué en Python (y en cualquier lenguaje que use el estándar IEEE 754[7]) se cumple que:

[6]¡Taratatáaan! Y otra pregunta secreta de 20 000 créditos ha decidido hacerte frente: *Tomando en cuenta los ejercicios que están en esta sección diga si el "¡Ooooh!" en el título de la sección significa asombro, miedo, bostezo, otro, o la antesala de "hasta que se seque el malecón". Justifique su respuesta.*

[7]Y aquí lo más sensato sería preguntarse qué es el estándar IEEE 754... Mmmmm... Esperas, pero no pasa nada. Miras a un lado, al otro... pero nada. Levantas una piedra grande que hay a tus pies y... ¡Taratatáaan! ¡Has descubierto una pregunta secreta! (Y además de los 35 000 créditos de la pregunta has ganado 5000 más por tu esfuerzo al buscarla. ¡Estás mejorando en eso de encontrar preguntas secretas!) *¿Qué es es el estándar IEEE 754 y qué relación tiene con esta asignatura?.*

a) `1e100 + 1e50 == 1e100`

b) `0.4 * 6 > 2.4`

c) `0.3*3 == 0.8999999999999999`

Ejercicio 10: Misterio ¿explicado? (100 000 créditos)

Explica, si puedes, por qué cuando se usa la expresión

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{2}$$

para calcular la derivada de la función $f_1(x) = x^2$ en el punto $\bar{x} = 1$, se obtiene una mejor aproximación cuando $h = 30$, que cuando $h = 0.1$

Ejercicio 11: Pregunta bonus para el ejercicio anterior[8] (100 000 créditos)

Diga todos los valores de h con los que se puede obtener el valor de exacto de $f_1'(1)$ utilizando la aproximación (2).

Ejercicio 12: Para impresionar a los profesores (150 000 créditos)

Con tus nuevos conocimientos de Matemática Numérica, tus antiguos conocimientos de Análisis Matemático, y tus habilidades de búsqueda[9], explica matemáticamente por qué el resultado del siguiente código en Python:

```
def funcion_que_no_es_la_identidad(x):
    for i in range(70):
        x = math.sqrt(x)
    for i in range(70):
        x = x*x
    return x
```

es: $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

Ejercicio 13: Para impresionar muuuucho a los profesores (150 000 créditos)

Dados una aritmética de punto flotante $F(\beta, p, m, M)$, y el siguiente código en Python:

[8] Como este ejercicio está relacionado con el anterior, solo se pueden adquirir los créditos de este si se tienen los del ejercicio anterior.

[9] Este es el tipo de cosas que quizás a uno no se le ocurra de manera natural (ni probablemente de ninguna manera), pero está bien explicado al comienzo de al menos uno de los libros de la bibliografía. Por el módico precio de 80000 créditos, los profesores están dispuestos a decirte en qué libro está.

```python
def funcion_que_no_es_la_identidad(x):
    for i in range(N):
        x = math.sqrt(x)
    for i in range(N):
        x = x*x
    return x
```

a) ¿Para qué valores de `N` la función `funcion_que_no_es_la_identidad` se comporta como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} ?$$

b) ¿Existen valores de `N` para los que se comporta como la función identidad? En caso afirmativo diga cuáles son, y en caso negativo, diga por qué.

Ejercicio 14: Y hay quien dice que este es el ejercicio más difícil de todos `:-o` (Tu propuesta + 100 000 créditos)

Propón un ejercicio relacionado con el tema de la CP, que no esté incluido y que consideres que le aportaría algo "interesante" a la clase.

Bibliografía recomendada

- *Numerical Analysis. 10th Edition.* J. D. Faires, R. L. Burden, y A. M. Burden. Brooks Cole Publishing, 2016.
- *Scientific Computing. An Introductory Survey. 2nd Edition* M. Heath. McGraw-Hill Book Company, 2002.
- *Accuracy and stability of numerical algorithms.* 2nd Edition. Nicholas J. Higham SIAM. 2002.
- *Elementary Numerical Analysis, An algorithmic approach. 3rd Edition*
  S. D. Conte y Carl de Boor. McGraw-Hill Book Company. 1980.