

Facultad de Matemática y Computación (UH)
Ciencia de la Computación
Matemática Numérica

Clase Práctica ¿2.001 ó 1.999999998?:
¡Tiene que haber un error!

Curso 2024

Introducción

Llegado a este punto deberías saber qué son los errores absolutos y relativos; qué son las cifras significativas correctas y cómo calcularlas; qué es la condición de una función; y en qué consiste la estabilidad de cálculo, y por supuesto, ser capaz de relacionarlo todo con las aritméticas de punto flotante. Si crees que dominas esos contenidos... ¡adelante!

Vamos a ver si de verdad te sabes lo básico

Ejercicio 1: En este ejercicio hay varios errores (40 000 créditos)

Alguien calculó 1.41, 0.02573 y 846.28 como aproximaciones de $\sqrt{2}$, 0.024 y 847, respectivamente.

- a) Calcule el error absoluto en cada caso.
- b) Calcule el error relativo en cada caso.
- c) Diga cuántas cifras significativas correctas decimales tiene cada una de las aproximaciones.
- d) ¿Cuál es la aproximación más precisa?

Ejercicio 2: e de error (40 000 créditos)

El número e se puede calcular como $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Calcule el error absoluto y relativo que se obtienen al realizar las siguientes aproximaciones:

a) $e \approx \sum_{n=0}^5 \frac{1}{n!}$

b) $e \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$

Ejercicio 3: Este ejercicio se puede hacer con una condición (60 000 créditos)

Calcule $\text{cond}(f)$, para la función $f(x) = (x - 1)^2$.

- Determine un valor de x para el que $f(x)$ esté bien condicionada.
- ¿Para qué valores de x la función está mal condicionada?

Ejercicio 4: Diga NO a la inestabilidad de cálculo (80 000 créditos)

Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+4} - 2$, $g(x) = 1 - e^x$:

- ¿Qué problema numérico aparece al evaluar $f(x)$ y $g(x)$ en valores de x que estén cercanos a 0?
- Encuentre expresiones equivalentes para $f(x)$ y $g(x)$ en las que no aparezca el problema detectado en el inciso anterior.

Ejercicios sin números :-/...

Ejercicio 5: Si no se conoce el valor real... ¡No importa! (80 000 créditos)

Cuando se trabaja con métodos numéricos nunca¹ se conoce el valor real que se está buscando. ¡Eso hace que en la práctica sea imposible calcular el error relativo² :-o! Sin embargo, en la práctica se suele usar el valor $\bar{\delta}$ que se calcula como:

$$\bar{\delta} = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}$$

Lo que hay que hacer en este ejercicio es demostrar que si $\delta \approx 0$, entonces $\delta \approx \bar{\delta}$.

Ejercicio 6: El problema con las cifras significativas correctas (90 000 créditos)

Es un hecho comúnmente aceptado que tus resultados matemáticos serán tan buenos como las definiciones de las que partas. La idea de cifras significativas correctas tiene el inconveniente de que

¹Que valga la pena

²¡Tarataatán! ¡Ganga! Por el módico valor de la respuesta a ¿por qué no se puede calcular el error relativo si no se conoce el valor real que se desea aproximar? te puedes ganar 50 000 créditos. No dejes pasar esta oportunidad :-D.

para casi cualquier definición “medianamente sensata e intuitiva” que se dé, se pueden encontrar ejemplos que no “encajan” con esa definición.

Ponga dos ejemplos de estas posibles definiciones “sensatas” y cuáles son los problemas que tienen.

Ejercicio 7: Un ejercicio en abstracto :-/. (100 000 créditos)

Sean $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ y $F = (\beta, p, m, M)$ una aritmética de punto flotante.

- a) ¿Para qué valor de x , hay “problemas”³ al evaluar $h(x)$ en la aritmética F .
- b) Cómo se puede evaluar $h(x)$ evitando el problema indicado en el inciso anterior.

Ejercicio 8: Para vincular conceptos e ideas (120 000 créditos)

Explique el fenómeno de cancelación catastrófica en términos de la condición de la resta. Para ello:

- a) Argumente qué tiene que ver la cantidad de cifras significativas correctas con el error relativo.
- b) Explique qué tiene que ver el error relativo con la condición de una función.
- c) Determine para qué valores de x la función $f(x) = x - a$, con $a \in \mathbb{R}$ está mal condicionada.
- d) Usa los resultados de los incisos anteriores e impresiona a los profesores ;-).

Ejercicios y errores desastrosos⁴

Ejercicio 9: Tipos de errores (120 000 créditos)

Por la forma en que se calculan, los errores pueden ser absolutos o relativos, pero de acuerdo a su origen se pueden clasificar en tres grandes grupos: de redondeo, de truncamiento e inherentes.⁵

- a) Diga en qué consiste cada uno de estos “errores”.
- b) Pon al menos dos ejemplos de cada uno de ellos.

³Vaya, esto no merece casi ni el nombre de “ejercicio”, pero bueno... si estás leyendo esto es porque lo encontraste, así que: ¡Tarataatán! (Está con letra chiquitica porque no tiene mérito, y además sonó muy bajito) ¿Qué “problemas” son los que pueden aparecer para esos valores de x ? Si respondes bien, el profesor te entrega renuentemente 40 000 créditos por hacer la segunda pregunta secreta de la CP.

⁴Idealmente, lo de desastroso es solo por los ejercicios y no por las respuestas.

⁵He aquí otro ejercicio para poner a prueba tus habilidades de búsqueda. Es muy poco probable que puedas “deducir” las respuestas correctas a este ejercicio.

Ejercicio 10: Errores catastróficos (de verdad) (120 000 créditos)

Para ponerle emoción a la asignatura, en este ejercicio hay explosiones, muertes, y misterios de la vida real, todos relacionados con tus recientemente adquiridos conocimientos de Matemática Numérica :-o.

- Menciona⁶ tres ejemplos de catástrofes y problemas reales que hayan ocurrido por culpa del mal uso de la matemática numérica.
- Describe y explica (si puedes) los elementos de matemática numérica que intervinieron en esas catástrofes.
- ¿Puedes decir cómo se hubieran podido evitar esos problemas?

Ejercicio 11: Cien preguntas como esta por un peso⁷ (200 000 créditos)

Utilizando tus recientes conocimientos de matemática numérica, ¿tus? conocimientos de análisis matemático, y un poquito de imaginación⁸, determine **analíticamente** cuál es el valor de h para el que se comete el menor error posible al aproximar la derivada de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la aproximación:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Ejercicio 12: Precisando detalles (300 000 créditos)

¿Dada una aritmética $F = (\beta, p, m, M)$, y una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para qué valores de $\text{cond}(f)$, la función está mal condicionada?

Ejercicio 13: Y hay quien dice que este es el ejercicio más difícil de todos :-o (Tu propuesta + 100 000 créditos)

Propón un ejercicio relacionado con el tema de la CP, que no esté incluido y que consideres que le aportaría algo “interesante” a la clase ⁹.

⁶después de buscar apropiadamente en Internet

⁷O en otras palabras: “pregunta kilo”

⁸O mucha habilidad buscando información.

⁹Como se ha explicado en otros ejercicios similares a este, la cantidad de créditos que recibirías es $100\,000 +$ una cantidad que debe depender de la complejidad del ejercicio. Ejercicios sencillos tienen pocos créditos, ejercicios más complejos otorgan más créditos. En esta pregunta, los créditos los ganas solo por proponer el ejercicio. Si además, entregas la solución del ejercicio :-o, ganarías (otra vez) la cantidad de créditos indicados en la orden. Si la cantidad de créditos indicados como parte de la propuesta no está acorde a la complejidad del ejercicio, se considera que está mal y no se gana ningún crédito :-(.

Bibliografía recomendada

- *Numerical Analysis. 10th Edition.* J. D. Faires, R. L. Burden, y A. M. Burden. Brooks Cole Publishing, 2016.
- *Elementary Numerical Analysis, An algorithmic approach. 3rd Edition* S. D. Conte y Carl de Boor. McGraw-Hill Book Company. 1980.
- *Scientific Computing. An Introductory Survey. 2nd Edition* M. Heath. McGraw-Hill Book Company, 2002.
- *Accuracy and stability of numerical algorithms.* 2nd Edition. Nicholas J. Higham SIAM. 2002.
- *Numerical Analysis.* Timothy Sauer, 3rd Edition. Pearson, 2017.