Facultad de Matemática y Computación (UH)
Ciencia de la Computación
Matemática Numérica

Clase Práctica 4:
Donde se habla de supervillanos

Curso 2023

Ejercicios por la libreta[1]

Ejercicio 1: Si alma mía... la norma eres tú[2]. (60 000 créditos)

Menciones y describa al menos tres ejemplos de normas matriciales[3].

Ejercicio 2: Todo depende de la norma con que se mire (80000 créditos)

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 7 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & -4 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

calcule

a) $||A||_1$

b) $||A||_2$

c) $||A||_\infty$

d) Otra norma que no sea ninguna de las anteriores[4]

[1] O sea, ejercicios normados.
[2] Tralalá, lalá, lalá...
[3] Entre los ejemplos no deben faltar las normas 1, 2 e ∞
[4] Recuerda que las normas negativas ``no son normas'' (a no ser que quieras ganarte el sticker que da cocotazos).

Ejercicio 3: Condición (ni necesaria ni suficiente)[5]. (90 000 créditos)

a) ¿Cuál es la definición de condición de una matriz?

b) Demuestre que la condición de una matriz A ($cond(A)$) es siempre mayor o igual que 1. *Sugerencia: La norma de la matriz identidad siempre es mayor o igual que 1.*

c) ¿Qué implicaciones tiene que una matriz esté mal condicionada?

Ejercicio 4: Para justificar una respuesta del ejercicio anterior (100 000 créditos)

Sea el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, y sea $\bar{x}$ una solución aproximada. La norma del error absoluto se define como $||e|| = ||x - \bar{x}||$, la norma del residual se define como $||r|| = ||b - A\bar{x}||$, y la condición de una matriz A se define como $cond(A) = ||A||||A^{-1}||$.

a) Demuestre que $r = Ae$, y por lo tanto $e = A^{-1}r$.

b) Tomando en cuenta que $r = Ae$, $e = A^{-1}r$, $b = Ax$, y $x = A^{-1}b$, demuestre que:

$$\frac{||r||}{cond(A)||b||} \leq \frac{||e||}{||x||} \leq \frac{cond(A)||r||}{||b||}$$

Ejercicio 5: Condición 2 sin inversa[6] (100 000 créditos)

La condición de una matriz depende de la norma con que se calcule. Se habla de condición TAL, cuando se usa la norma TAL para calcularla. Con esa introducción, diga una forma de aproximar la condición 2 de una matriz[7].

Ejercicio 6: Cualquier Condición sin inversa (200 000 créditos)

La condición de una matriz depende de la norma con que se calcule. Se habla de condición TAL, cuando se usa la norma TAL para calcularla. La condición 2 de una matriz se puede obtener dividiendo el mayor valor singular entre el menor valor singular. Sin embargo, eso solo es válido para la norma 2. Es posible aproximar otra condición usuando la descomposición PLU. Explique cómo es posible hacerlo[8].

---

[5] Solo condición de una matriz.

[6] Como debería ser todo en la numérica.

[7] Esta pregunta muy fácil de responder si conocieras algunas algunas propiedades básicas de la factorización SVD de una matriz, pero como todavía no hemos dado nada de la factorización SVD, a lo mejor no tienes como responder este ejercicio `:-(`. Si no sabes cómo responder este ejercicio puedes renunciar a los 200 000 créditos de entregarlo antes de la CP y solicitar 10 000 créditos de compensación por abuso y maltrato psicológico.

[8] No se supone que se te ocurra la idea, se supone que la entiendas si la logras encontrar. Los profesores no quieren decir en qué libro está la respuesta, pero existe el rumor que este ejercicio lo pusieron justo después de leer el Conte.

Ejercicio 7: Para terminar como empezamos (300 000 créditos)

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 7 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & -4 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

a) Calcule (eficiente y elegantemente) $cond(A)_2$

b) Calcule (eficiente y elegantemente) $cond(A)_p$ para algún $p \neq 2$.

c) Describe los pasos realizados en cada uno de los incisos anteriores.

Bibliografía recomendada

- *Elementary Numerical Analysis, An algorithmic approach. 3rd Edition*
  S. D. Conte y Carl de Boor. McGraw-Hill Book Company. 1980.
- *Numerical Methods. 9th Edition.* J. D. Faires y R. L. Burden. Brooks Cole Publishing, 2010.
- *Scientific Computing. An Introductory Survey. 2nd Edition* M. Heath. McGraw-Hill Book Company, 2002.
- *Accuracy and stability of numerical algorithms.* 2nd Edition. Nicholas J. Higham SIAM. 2002.
- *Otras fuentes de información.*