Facultad de Matemática y Computación (UH)
Ciencia de la Computación
Matemática Numérica

¿Clase Práctica? 9:
Ecuaciones no lineales.

Curso 2024

Lo que tod@ científic@ de la computación... [1]

Ejercicio 1: Los 4 (featuring ceros de funciones no lineales) (40000 créditos)

En todos los cursos de de matemática numérica que aborda el tema de los ceros de funciones no lineales se mencionaran cuatro algoritmos clásicos. De cada uno de ellos diga el nombre, y dé una breve descripción de su funcionamiento.

Ejercicio 2: Criterios de parada (Por cada uno 10000 créditos)

En los algoritmos relacionados con la Matemática Numérica[2] conviene saber cuándo parar. En este ejercicio usted puede mostrar que es capaz de dominar este aspecto de los algoritmos numéricos[3]. Para ello, lo único que tiene que hacer es:

a) Decir qué criterios de parada se deben usar al implementar un método para hallar ceros de funciones no lineales.

b) Argumente por qué usaría cada uno de ellos.

Ejercicio 3: ¿Implementaciones eficientes? (Por cada una 30000 créditos)

Realice una implementación (tan eficiente como pueda[4]) de los métodos Bisección, Falsa Posición, Secante y Newton, y utilícelos para:

[1] debería saber sobre ceros de funciones no lineales
[2] Como en casi todos los aspectos de la vida
[3] Y de la vida
[4] Tanto desde el punto de vista algorítmico, como desde el punto de vista numérico.

a) hallar los ceros de las siguientes funciones:

   a) $x - \tan(x) = 0$

   b) $x^2 - \ln(10 + x) = 0$

   c) $4\cos x - e^x = 0$

b) calcular $\sqrt[3]{3}$, con 5 cifras significativas correctas.

Ejercicio 4: ¿`Newton++` o `Newton--`? (60000 créditos)

El método de la secante se puede considerar como una modificación del método de Newton, y el método de Newton se puede considerar como una modificación del método de la secante.

a) Justifique la afirmación anterior.

b) Argumente si el método de la secante puede ser considerado como un `Newton++`, o es en realidad un `Newton--`[5].

c) Tomando en cuenta su respuesta en el inciso anterior, ¿cuál de los dos métodos es "mejor"?

Ejercicio 5: ¿Quienes están en las grandes ligas? (Por cada uno 20000 créditos)

La gran mayoría de las bibliotecas y los lenguajes para la programación científica[6] tienen funciones para encontrar ceros de funciones. Dos de estas bibliotecas y lenguajes para la programación científica son la biblioteca `scipy` de Python y Matlab.

El objetivo de este ejercicio es que usted diga cómo se pueden usar estas bibliotecas y lenguajes para hallar los ceros de funciones. En cada caso debe decir:

a) la biblioteca o lenguaje,

b) el nombre de la función que se puede usar para encontrar los ceros de las funciones,

c) usarlos para encontrar los ceros de las funciones presentadas en el ejercicio 3.

Ejercicio 6: ¿Llegas a las grandes ligas? (40000 créditos)

¿Cómo se comportan tus implementaciones en comparación con las de las grandes ligas?[7]

[5] Aquí se está usando implícitamente el convenio de que `algo++` es una mejora del `algo` original, y que el `algo--` representa lo contrario, como el caso del profesor de esta facultad que cuando se le cayó al suelo la cajita de un CD y se rompió en pedazos (la cajita, no el profesor) él exclamó con tristeza: "¡Ñóooo!, ¡Cajita menos menos!".

[6] Que este es uno de los nombres con que también se conoce la matemática numérica

[7] ¡Tarataatán! Esta pregunta secreta que vale 20000 créditos es el tipo de cosas que cae por su propio peso. La pregunta es: Proponga y justifique un método para comparar dos algoritmos para encontrar el cero de una función.

Ejercicio 7: Los secretos de las grandes ligas (Por cada uno, 30000 créditos)

Para cada una de las respuestas dadas en el ejercicio 5, diga el nombre y describa brevemente los algoritmos que usan.[8]

Ejercicio 8: ¿Tan inteligente como Newton? `:-o` (80000 créditos)

El método de Newton para resolver una ecuación no lineal $f(x) = 0$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede deducir a partir del desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x + h)$, alrededor del punto x.

El método de Newton para resolver un sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$, donde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se puede deducir a partir del desarrollo en serie de Taylor de la función $F(x + h)$, alrededor del punto x.[9]

Utilizando el desarrollo en serie de Taylor de una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, deduzca el método de Newton para sistemas que permite resolver el problema: $F(x) = 0$, partiendo de una solución inicial x_0.

Ejercicio 9: ¡Newton al rescate! (50000 créditos)

Implemente el método de Newton "deducido" por usted en el ejercicio anterior[10] y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + xy^3 & = & 9 \\ 3x^2y - y^3 & = & 4 \end{array} \right.$$

Ejercicio 10: ¿Newton al seguro? (50000 créditos)

Dada un función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ¿bajo qué condiciones puede asegurarse que el método de Newton para sistemas converge a un punto $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(\xi) = 0$?

---

[8] ¡Taratataatán! Una ¿pregunta secreta? se te acerca sigilosamente y te susurra al oído: "He oído que los profesores de la asignatura están dispuestos a negociar el precio (en créditos) de implementaciones eficientes de estos algoritmos si están implementados por ti, pero también he oído que solo aceptarán las tres mejores implementaciones de todo el año." `:-o`. La pregunta secreta consiste en ponerle precio (en créditos) a posibles implementaciones de estos algoritmos.

[9] Gúaugúagúauau... ¡Puuuuán! Un profesor de Análisis aparece. . . ¡y te muerde! ¿Ehhhhh? ¿Qué el profesor de análisis hace quéeeee? Ná, mentira. El profe de análisis no te muerde, pero ojalá solo te hubiese mordido, porque lo que hace es preguntarte: ¿Cuál es el desarrollo en serie de Taylor de $F(x + h)$ alrededor del punto x si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? Cuando el profesor termina la pregunta y se queda mirándote decides: a) responder la pregunta correctamente para que el profesor desaparezca por donde mismo vino y ganarte 30000 créditos, b) responder la pregunta incorrectamente para confundir al profesor y poder salir corriendo, o c) ¡morder al profesor por hacer preguntas incómodas!

[10] O uno que no haya sido deducido por usted en el ejercicio anterior

Ejercicio 11: Newton y sus ¿secuaces?[11] (80000 créditos)

Entre las variantes del método de Newton para sistemas existen dos conocidas como Newton Amortiguado y variante de Whittaker.

a) ¿En qué consiste cada una de estas variantes?

b) ¿Qué problema busca resolver cada una?

Lo que l@s buen@s científic@s de la computación...[12]

Ejercicio 12: (En la teoría) es lo mismo, pero (en la numérica) no es igual (40000 créditos)

Que dos expresiones sean matemáticamente no significa que sean iguales desde el punto de vista numérico. Eso se puede apreciar en los métodos de bisección y secante, como podrás comprobar en este ejercicio.

a) En el método de bisección se puede calcular el punto medio del intervalo por cualquiera de las dos vías siguientes, que son analíticamente equivalentes:

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{a_n + b_n}{2}, \text{ y} \\ p_n &= a_n + \frac{b_n - a_n}{2}. \end{aligned}$$

Sin embargo, desde el punto de vista numérico, una de ellas es preferible a la otra. ¿Cuál es y por qué?

b) En el método de la secante se puede calcular el siguiente punto de dos formas matemáticamente equivalentes, sin embargo una de ellas es numéricamente mejor que la otra.

   a) ¿Cuáles son las dos formas equivalentes de calcular el siguiente punto en el método de la secante?

   b) ¿Cuál es la que es numéricamente superior a la otra?

Ejercicio 13: Explicar puede cualquiera, demostrar... (Por cada uno 40000 créditos)

De cada uno de los algoritmos implementados por usted en el ejercicio 1 diga:

[11] Decididamente las habilidades con el lenguaje de quien quiera que haya escrito esto no están muy buenas hoy. Debido a ello, acaba de aparecer una pregunta lingüística por un valor de 10000 créditos: ¿qué quiso decir la persona que redactó este ejercicio cuando escribió secuaces? `:-/`

[12] deberían saber sobre ceros de funciones no lineales.

a) ¿Cuál es el error absoluto que se comete en el paso i-ésimo del algoritmo?[13]

b) ¿Cuál es el error relativo que se comete en el paso i-ésimo del algoritmo?[14]

c) ¿Cómo se pueden estimar[15] los errores absoluto y relativo en el algoritmo?

d) ¿Bajo qué condiciones se puede asegurar que el algoritmo converge a un cero de la función?

Ejercicio 14: Pasito a pasito, suave, suavecito...[16] (40000 créditos)

Si $[a_0, b_0]$ es el intervalo inicial para el algoritmo de bisección:

a) Demuestre que en cada paso del algoritmo se agrega una cifra significativa correcta binaria.

b) ¿En una computadora que use el formato *"double"* del estándar 754 de la IEEE, ¿cuál es el número máximo de iteraciones que tiene sentido hacer?

c) Dado un error absoluto ε, determine cuántas iteraciones debe realizar el algoritmo para hallar una solución que tenga un error absoluto menor que ε, si se comienza con el intervalo $[a_0, b_0]$.

d) Dado un número entero r, determine cuántas iteraciones debe hacer el algoritmo para encontrar una solución con r cifras significativas correctas.

Ejercicio 15: Iteración de punto fijo para "dummies" (80000 créditos)

Dadas las siguientes ecuaciones no lineales:

$$e^{-x} + 1 - x^2 = 0 \tag{1}$$
$$e^{x} - 4x^2 = 0 \tag{2}$$

a) Resuélvalas utilizando una iteración de punto fijo.

b) Para cada una de ellas, construya (si puede) una función $g(x)$ y un intervalo $[a, b]$, tal que se usa la iteración de punto fijo $x_{x+1} = g(x)$, comenzando con un punto x_0 cualquiera del intervalo $[a, b]$, se puede asegurar la convergencia al cero de la función.

[13] Una pista: el error absoluto siempre, siempre, siempre es el verdadero valor menos el aproximado. En realidad lo que están preguntando aquí es cuál es el verdadero valor y cuál es el aproximado en el paso i-ésimo.

[14] Esta nota al pie debería ser muy parecida a la anterior, pero esta vez hablando sobre el error relativo.

[15] Aquí se usa el verbo "estimar" y no "conocer", porque en una situación "real" no es posible, ni *"tiene sentido"* conocer el valor exacto de los errores absoluto y relativo para un problema de encontrar el cero de una función numéricamente. ¡Tarataatán! Después de haber leído esta nota al pie usted puede ganar 10000 créditos solo por justificar la afirmación anterior.

[16] *"¡Sube! ¡Sube! ¡Sube!... ¡Sube! ¡Sube!"* Por alguna misteriosa razón, en vez del ¡Tarataatán! en esta pregunta secreta lo que sonó fueron los *"¡Sube! ¡Sube!"* esos `:-/`, pero de todas formas... ¡has descubierto una pregunta secreta! `:-D`: Usando tus conocimientos de matemática numérica, explique por qué este ejercicio tiene ese nombre y gánese 10000 créditos.

Ejercicio 16: ¿La teoría funciona en la práctica? `:-/` (80000 créditos)

De acuerdo con la teoría de iteración de punto fijo,

a) ¿Cuál de las funciones de iteración de punto fijo propuestas por usted en el ejercicio anterior debería converger más rápido a la solución? ¿Por qué?

b) ¿Se cumple la teoría en la práctica? Justifique su respuesta.

Ejercicio 17: ¿Dónde se podrá encontrar esto? `:-/` (60000 créditos)

Diga (y demuestre) cuáles son el orden de convergencia y la constante asintótica de cada uno de los siguientes algoritmos para buscar ceros de funciones:

a) Bisección.

b) Iteración de punto fijo.

c) Newton.

Ejercicio 18: "A lo cortico" las cosas convergen mejor (90000 créditos)

Las condiciones de convergencia de la iteración de punto fijo pueden ser difícil de verificar en la práctica[17]. Sin embargo es posible asegurar esta convergencia si se cumplen condiciones más débiles.

Demuestre que si $g(x)$ es continuamente diferenciable[18] en algún intervalo abierto que contenga al punto fijo ξ, y $|g'(\xi)| < 1$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que la iteración de punto fijo definida por $g(x)$ converge para cualquier x_0, tal que $|x_0 - \xi| \leq \varepsilon$.

Lo que solo l@s mejores científic@s de la computación...[19]

Ejercicio 19: Escriba su canción aquí... (50000 créditos)

Este ejercicio es sobre el método de Newton, y como en el ejercicio sobre bisección había una canción usted debe proponer una canción X tal que se cumpla la siguiente proporcionalidad:

[17] ¡Tarataatán! ¡Acabas de descubrir una pregunta secreta!... Pero no se ve nada por ningún lugar `:-(`. ¡Qué raro! `:-/`. Esperas un ratico, pero no aparece ninguna pregunta... Esperas mucho rato... y no aparece nada. (A lo mejor la pregunta secreta tuvo problemas con el transporte, y no pudo llegar a tiempo). Bueno, no importa, ya que estás aquí y has esperado tanto tiempo decides que si la pregunta secreta no aparece, no importa: tú vas a proponer una pregunta para este espacio, y que por esa idea fabulosa, te vas a ganar 10000 créditos. Además, ya que propusiste una pregunta, decides que también la puedes responder y ganar otros 20000 créditos. Como eres una persona lista, te das cuenta de que probablemente los profesores solo aceptarán tu pregunta (y tu respuesta) si están relacionadas con el texto que estaba justo antes de la nota al pie. Así que después de hacer todos esos razonamientos (que te han dejado casi sin fuerzas), ¿qué pregunta propones y cuál sería tu respuesta?

[18] ¡Tarataatán! Esta sí es fácil de identificar y de responder, por eso solo vale 10000 créditos: ¿Qué significa que una función sea continuamente diferenciable? Pista: si respondes bien tus profes de Análisis Matemático van a estar muy orgullosos de ti `;-)`.

[19] deberían saber sobre ceros de funciones no lineales.

> *"Despacito (la canción) es al método de Bisección, como X (la canción) es al método de Newton."*

Justifique la selección de su canción utilizando herramientas de la matemática numérica.

Ejercicio 20: ¿Hay algo que tenga orden de convergencia mayor que 1?[20] (80000 créditos)

Dada la iteración de punto fijo $x_{k+1} = g(x_k)$, donde $\xi = g(\xi)$:

a) Demuestre que si $g'(\xi) = 0$, y $g''(\xi) \neq 0$, el orden de convergencia de la iteración de punto fijo es 2.

b) Usando el resultado del ejercicio anterior, demuestre si $f'(\xi) \neq 0$, donde ξ es un cero de la ecuación no lineal $f(x) = 0$, entonces el método de Newton para ese problema tiene orden de convergencia 2.

Ejercicio 21: José Martí y la Matemática Numérica[21] (100000 créditos)

En la Edad de Oro José Martí escribió para los niños:

> *"…un niño bueno, inteligente y aseado, es siempre hermoso."*

Y a continuación agrega

> *"Pero nunca es un niño más bello que cuando trae en sus manecitas de hombre fuerte una flor para su amiga…"*

Con un poco de conocimientos de Matemática Numérica, la frase de Martí se pudiera modificar de la siguiente forma:

> *"…porque nunca es un niño más bello que cuando trae en sus manecitas de hombre fuerte una flor para su amiga, y una demostración elegante para acotar el error…"*

Y un poco después se pudiera agregar:

> *"…una demostración buena, inteligente y aseada, es siempre hermosa."*

Tomando en cuenta estos elementos de la obra de José Martí, demuestre[22] las siguientes cotas para el error n-ésimo (e_n) en la iteración de punto fijo $x_{n+1} = g(x_n)$, que tiene como punto fijo $\xi = g(\xi)$:

[20] Sí, claro, y estás a punto de demostrarlo y de encontrar potencialmente infinitos algoritmos con órdenes de convergencia mayor que 1 `:-o`.

[21] Como se puede deducir del nombre, este ejercicio forma parte del trabajo patriótico y educativo que realizan los profesores de la asignatura. Fíjense con qué elegancia y sutileza se mezclan los contenidos de la asignatura con elementos de la cultura nacional.

[22] (de una manera limpia y aseada)

a) $|e_n| = |\xi - x_n| \leq K^n |\xi - x_0|$

b) $|e_n| = |\xi - x_n| \leq \dfrac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$

c) ¿Cuál es el menor valor de K para el que se cumplen las cotas demostradas en los incisos anteriores?

Ejercicio 22: Este ejercicio puede ser $\mathbb{C}$omplejo (100000 créditos)

Dada la ecuación no lineal $p(x) = 0$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales, siempre se puede asegurar que existe al menos un valor $\bar{x} \in \mathbb{C}$ tal que $p(\bar{x}) = 0$, y por eso… **¡¿CÓMO QUE AL MENOS?!**[23]

a) ¿Cuál es el algoritmo más eficiente (tanto desde el punto de vista algorítmico como numérico) para buscar *"todas"* las raíces de un polinomio con coeficientes reales?

b) ¿Tiene sentido preguntar por el orden de convergencia del algoritmo propuesto en el inciso anterior? En caso afirmativo, ¿cuál es?. En caso negativo, explique por qué.

Ejercicio 23: Mucho más que dos[24] (100000 créditos)

Hasta ahora, el "mejor" algoritmo que hemos visto, al menos con respecto al orden de convergencia, es el método de Newton que tiene orden de convergencia 2. El objetivo de este ejercicio es encontrar (al menos) un algoritmo cuyo orden de convergencia sea "mucho más que dos". Para ello, se proponen los siguientes pasos:

a) Deduzca[25] un método para hallar el cero de una función no lineal, que tenga un orden de convergencia mayor estricto que 2.

[23] Gúaugúagúauau... ¡Puuuuán! Acabas de descubrir un profesor de álgebra muy molesto `:-(`. Antes de que puedas hacer nada el profesor grita: *"Dado un polinomio $p(x)$ de grado n con coeficientes reales, ¿cuántos valores $\bar{x} \in \mathbb{C}$ existen tales que $p(\bar{x}) = 0$?"* ¿Qué haces? ¿Le respondes al profesor y justificas tu respuesta para ganar 10000 créditos?, ¿le dices "profe cálmese, no se ponga así que le va a dar una cosa… ¿quiere una africana"?, o ¿le dices: "A mí no me mire, yo no tengo nada que ver con esto. Yo me voy a estudiar derecho."?

[24] ¡Tarataatán! Has descubierto una poesía secreta, que, con la rima adecuada, pudiera tener un valor de 15000 créditos `:-o`:
Este poema te da,
si sabes donde buscar,
quince mil créditos más
de poesía y de paz.
Tienes que decir adiós
por un momento a la ciencia
y buscar, con gran paciencia,
el nombre del que escribió
que "*en la calle, codo a codo*
somos mucho más que dos."

[25] ¿A quién estamos tratando de engañar? Seguro que lo vas a buscar en algún lugar, porque a nadie se le va a ocurrir deducirlo a partir de la serie de Taylor `:-(`. Porque al igual que en Newton se trunca la serie de Taylor en el segundo término para obtener el orden de convergencia 2, se pudiera truncar en el tercer término para obtener un orden de convergencia 3. Seguro que eso mismo fue lo que se le ocurrió a Chebyshev (o a quien quiera que haya usado su nombre), pero ¿a cuántos estudiantes se les ocurrirá eso? `:-/`.

b) Demuestre que el orden de convergencia del algoritmo propuesto en el inciso anterior es mayor estricto que 2.

c) Implemente el algoritmo propuesto por usted.

d) ¿Cómo se puede mostrar en la práctica las ventajas que tiene este método sobre otros con un menor orden de convergencia?

e) Muestre en la práctica las ventajas que tiene su algoritmo sobre otros métodos que tengan un menor orden de convergencia.

Bibliografía recomendada

- *Elementary Numerical Analysis, An algorithmic approach. 3rd Edition*
  S. D. Conte y Carl de Boor. McGraw-Hill Book Company. 1980.

- *Numerical Methods. 9th Edition.* J. D. Faires y R. L. Burden. Brooks Cole Publishing, 2010.

- *Scientific Computing. An Introductory Survey. 2nd Edition* M. Heath. McGraw-Hill Book Company, 2002.

- *Accuracy and stability of numerical algorithms.* 2nd Edition. Nicholas J. Higham SIAM. 2002.

- *Otras fuentes de información.*