

Facultad de Matemática y Computación (UH)
Ciencia de la Computación
Matemática Numérica

Clase Práctica 6:
Aproximación a la Aproximación de Funciones por Interpolación

2023

Ejercicios Bobos

Ejercicio 1: ¡Plagio! :-o (30000 créditos)

¿Qué obra de la literatura mundial es una plagio burdo y descarado del documento con la “conferencia” de este tema?¹

Ejercicio 2: ... Y ¿solo uno? para interpolarlos a todos... (60000 créditos)

Dada la siguiente tabla con valores conocidos de una función $f(x)$:

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	6	47

a) Usando las funciones apropiadas de `numpy`, verifique que los polinomios:

$$\begin{aligned}p(x) &= 5x^3 - 27x^2 + 45x - 21, \\q(x) &= x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 3\end{aligned}$$

satisfacen la condición de interpolación para los datos de la tabla².

b) Explique por qué no se viola la unicidad del polinomio de interpolación.

Ejercicio 3: Para justificar el ejercicio anterior (80 000 créditos)

Demuestre que dado un conjunto de puntos de la forma $\{(x_i, y_i), i = \overline{0, n}\}$, existe un único polinomio de grado n que los interpola.

¹Vergüenza debería darle al autor de ese libro robarnos las ideas de esa forma tan descarada :-/. Debería ser más original y pensar las cosas por sí mismo :-/.

²En el documento escrito solo ponga el llamado a esas funciones.

Ejercicio 4: Otra demostración fácil. (80 000 créditos)

Dados los polinomios de la base de Lagrange

$$L_{i,n}(x) = \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)},$$

para interpolar un conjunto de puntos $(x_i, f(x_i))$, demuestre que

$$L_{i,n}(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases}.$$

Para implementar la teoría en la práctica.

Ejercicio 5: Un ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales. (80 000 créditos)

Dado un conjunto de puntos de la forma $\{(x_i, y_i), i = \overline{1, n}\}$ escriba una función en Python que calcule los coeficientes del polinomio de interpolación usando la base canónica.

Ejercicio 6: Un ejercicio simbólico. (100 000 créditos)

Dado un conjunto de puntos de la forma $\{(x_i, y_i), i = \overline{1, n}\}$ escriba una función en Python que devuelva la expresión analítica³ del polinomio de interpolación de Lagrange para esos puntos.

Ejercicio 7: Divide y diferencia. (100 000 créditos)

Dado un conjunto de puntos de la forma $\{(x_i, y_i), i = \overline{1, n}\}$, implemente una función en Python que calcule, de la manera más eficiente posible, los valores de las diferencias divididas de Newton para esos puntos.

Ejercicio 8: Los tres mosqueteros en acción. (150 000 créditos)

Dado un conjunto de puntos de la forma $\{(x_i, y_i), i = \overline{1, n}\}$, utilice sus respuestas a los ejercicios anteriores para obtener las expresiones analíticas de los polinomios de interpolación usando la base canónica, la base de Lagrange y la base de Newton para para los siguientes datos:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

³La palabra clave aquí es “analítica” que implica que queremos la expresión simbólica del polinomio. Este sería un buen ejercicio para mostrar tus conocimientos sobre el módulo `sympy`.

Ejercicios interesantes⁴.

Ejercicio 9: ¿Y si las derivadas también se conocen? (200 000 créditos)

Dado un conjunto de puntos $\{(x_i, y_i, y'_i), i = \overline{1, n}\}$, donde x_i son las coordenadas de los puntos, $y_i = f(x_i)$, y $y'_i = f'(x_i)$, para una función $f(x)$ desconocida,

- a) Diga cómo pudiera hallarse un polinomio $p(x)$, tal que:

$$\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i), & \forall i = \overline{1, n}, \\ p'(x_i) &= f'(x_i), & \forall i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

- b) ¿Cuál es la manera más eficiente de construir este polinomio?
- c) Implemente una función en Python que dado un conjunto de puntos y sus derivadas, permita construir un polinomio que interpole tanto los valores de la función como los de las derivadas.

Ejercicio 10: rrrrrrrrrrrRRRRRRRRRRRRrrrrrrrrrrrr (300 000 créditos)

Se desea medir el comportamiento de una motocicleta de carrera, para lo cual se decidió observar la velocidad y la distancia recorrida cada cierto tiempo, obteniéndose así la siguiente tabla:

$t(s)$	0	3	5	8	13
$s(m)$	0	225	383	623	993
$v(m/s)$	75	77	80	74	72

- a) Utilice alguno de los algoritmos implementados por usted en el Ejercicio 8 para determinar cuánto había recorrido la motocicleta después de 10s y cuál era su velocidad en ese momento.
- b) Utilice el algoritmo propuesto por usted en el ejercicio 9 para determinar los mismos valores.
- c) ¿Cuál cree usted que sea una mejor aproximación? ¿Por qué?⁵

Preguntas místicas...

Ejercicio 11: Matemática Numérica y Literatura Fantástica.⁶ (200000 créditos)

- a) ¿Qué tienen en común la interpolación con polinomios de Lagrange y la saga de Harry Potter?
- b) ¿Cuál es la utilidad e importancia, de lo que tienen en común?

⁴Son el tipo de ejercicios que cuando el estudiante los hace se siente realizado y muy capaz porque demuestra sus conocimientos y sus buenas ideas.

⁵Esta pregunta está turbia... Así que no te dejes intimidar... tú responde lo que creas, que si tiene un mínimo de sentido, probablemente te ganes los créditos ;-).

⁶La respuesta a esta pregunta existe y es un poco más elaborada que: “la interpolación parece magia”.

Bibliografía recomendada

- *Elementary Numerical Analysis, An algorithmic approach. 3rd Edition.* S. D. Conte y Carl de Boor. McGraw-Hill Book Company. 1980.
- *Numerical Methods. 9th Edition.* J. D. Faires y R. L. Burden. Brooks Cole Publishing, 2011.
- *Numerical Computing with Matlab.* C. Moler. 2004
- *Matemática Numérica II. Notas de Clase* A. León Mecías. Facultad de Matemática y Computación, UH. 2014
- *Harry Potter y la piedra filosofal.* Rowling J. K. Editorial Salamandra. 2000.