SISTEMAS DISTRIBUIDOS Y PARALELOS

Carrera: Ingeniería en computación
Facultad de Informática – Universidad Nacional de La Plata

Dr. Adrián Pousa

Ejemplo: Minimizando el espacio de memoria

Matrices triangulares

- Una matriz triangular es una matriz cuadrada donde los elementos por encima o por debajo de la diagonal son cero:

$$U = \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} \\ 0 & 0 & u_{2,2} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} l_{0,0} & 0 & 0 \\ l_{1,0} & l_{1,1} & 0 \\ l_{2,0} & l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Superior *Matriz Triangular Inferior*

Matrices triangulares

- Cuando los requerimientos de memoria son críticos y estas matrices son muy grandes, no es necesario almacenar una gran cantidad de ceros.
- La idea es minimizar el espacio de almacenamiento evitando guardar los elementos de la parte nula de la matriz.

Vamos a suponer que NUNCA accederemos a las posiciones nulas.
Cualquier operación que las involucre da como resultado cero.
Ejemplo: Multiplicación de matrices.

$$U = \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} \\ 0 & 0 & u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} \\ \cancel{u_{1,0}} = 0 & u_{1,1} & u_{1,2} \\ \cancel{u_{2,0}} = 0 & \cancel{u_{2,1}} = 0 & u_{2,2} \end{pmatrix}$$

¿Cómo accedemos a la posición *U[i,j]* de una matriz triangular almacenada en forma reducida?

Matrices triangulares

- El acceso a una matriz triangular almacenada de forma minimizada en memoria va a depender de si es triangular superior (U) o inferior (L), y si está almacenada por filas o columnas.
- La combinación de estas características nos da 4 posibilidades:
  - Matriz triangular superior almacenada por filas
  - Matriz triangular inferior almacenada por columnas
  - Matriz triangular inferior almacenada por filas
  - Matriz triangular superior almacenada por columnas

Matriz triangular superior almacenada por filas

- Una matriz triangular superior almacenada por filas como un vector en memoria:

$$U = \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} \\ 0 & 0 & u_{2,2} \end{pmatrix}$$

$u_{0,0}$	$u_{0,1}$	$u_{0,2}$	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$
0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*

- Cada vez que se accede a una nueva fila hay que restar del cálculo $U[i*N + j]$ la cantidad de elementos en cero que hay hasta esa posición:
- En el ejemplo:
  - Si se accede a un elemento de la fila 0, no hay elementos anteriores en cero.
  - Si se accede a un elemento de la fila 1, hay 1 elemento anterior en cero.
  - Si se accede a un elemento de la fila 2, hay 3 elementos anteriores en cero.

Matriz triangular superior almacenada por filas

- En general, para una matriz de $N*N$:

$$U=\begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & \dots & u_{0,n-1} \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n-1} \\ 0 & 0 & u_{2,2} & \dots & u_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

  - La cantidad de ceros hasta la fila 0 es: 0
  - La cantidad de ceros hasta la fila 1 es: 1
  - La cantidad de ceros hasta la fila 2 es: 3 (**1** cero de la fila 1 y **2** ceros de la fila 2)
  - La cantidad de ceros hasta la fila 3 es: 6 (**1** cero de la fila 1, **2** ceros de la fila 2 y **3** ceros de la fila 3)
  - La cantidad de ceros hasta la fila 4 es: 10 (**1** cero de la fila 1, **2** ceros de la fila 2, **3** ceros de la fila 3 y *4* ceros de la fila 4)

Matriz triangular superior almacenada por filas

- La cantidad de ceros hasta la fila i-esima es:

$$\sum_{a=0}^{i} a = \frac{i \cdot (i+1)}{2}$$

- Por lo tanto, para acceder al elemento $U[i,j]$:

$$U[i,j] = U_{vector}\left[i \cdot N + j - \frac{i \cdot (i+1)}{2}\right]$$

Matriz triangular superior almacenada por filas

- Volviendo al ejemplo (N=3):

$$U=\begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} \\ 0 & 0 & u_{2,2} \end{pmatrix}$$

$u_{0,0}$	$u_{0,1}$	$u_{0,2}$	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$
0	1	2	3	4	5

	i	j	$U[i,j]=U_{vector}\left[i\cdot N+j-\frac{i\cdot(i+1)}{2}\right]$
$u_{0,0}$	0	0	0
$u_{0,1}$	0	1	1
$u_{0,2}$	0	2	2
$u_{1,1}$	1	1	3
$u_{1,2}$	1	2	4
$u_{2,2}$	2	2	5

Matriz triangular inferior almacenada por columnas

- Una matriz triangular inferior almacenada por columnas como un vector en memoria:

$$L = \begin{pmatrix} l_{0,0} & 0 & 0 \\ l_{1,0} & l_{1,1} & 0 \\ l_{2,0} & l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix}$$

$l_{0,0}$	$l_{1,0}$	$l_{2,0}$	$l_{1,1}$	$l_{2,1}$	$l_{2,2}$
0	1	2	3	4	5

- La idea es la misma a la anterior como si tuviéramos intercambiadas las filas por columnas:
- En el ejemplo:
  - Si se accede a un elemento de la columna 0, no hay elementos anteriores en cero.
  - Si se accede a un elemento de la columna 1, hay 1 elemento anterior en cero.
  - Si se accede a un elemento de la columna 2, hay 3 elementos anteriores en cero.

Matriz triangular inferior almacenada por columnas

- En general, para una matriz de N*N:

$$L=\begin{pmatrix} l_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{1,0} & l_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,0} & l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1,0} & l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \dots & l_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

  - La cantidad de ceros hasta la columna 0 es: 0
  - La cantidad de ceros hasta la columna 1 es: 1
  - La cantidad de ceros hasta la columna 2 es: 3 (**1** cero de la columna 1 y **2** ceros de la columna 2)
  - La cantidad de ceros hasta la columna 3 es: 6 (**1** cero de la columna 1, **2** ceros de la columna 2 y **3** ceros de la columna 3)
  - La cantidad de ceros hasta la columna 4 es: 10 (**1** cero de la columna 1, **2** ceros de la columna 2, **3** ceros de la columna 3 y 4 ceros de la columna 4)

Matriz triangular inferior almacenada por columnas

- La cantidad de ceros hasta la columna j-esima es:

$$\sum_{a=0}^{j} a = \frac{j \cdot (j+1)}{2}$$

- Por lo tanto, para acceder al elemento $L[i,j]$:

$$L[i\,,j] = L_{vector}\left[i + j \cdot N - \frac{i \cdot (i+1)}{2} \right]$$

Matriz triangular inferior almacenada por columnas

- Volviendo al ejemplo (N=3):

$$L=\begin{pmatrix} l_{0,0} & 0 & 0 \\ l_{1,0} & l_{1,1} & 0 \\ l_{2,0} & l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix}$$

$l_{0,0}$	$l_{1,0}$	$l_{2,0}$	$l_{1,1}$	$l_{2,1}$	$l_{2,2}$
0	1	2	3	4	5

	i	j	$L[i,j]=L_{vector}\left[i+j\cdot N-\frac{j\cdot(j+1)}{2}\right]$
$l_{0,0}$	0	0	0
$l_{1,0}$	1	0	1
$l_{2,0}$	2	0	2
$l_{1,1}$	1	1	3
$l_{2,1}$	2	1	4
$l_{2,2}$	2	2	5

Matriz triangular inferior almacenada por filas

- Una matriz triangular inferior almacenada por columnas como un vector en memoria:

$$L=\begin{pmatrix} l_{0,0} & 0 & 0 \\ l_{1,0} & l_{1,1} & 0 \\ l_{2,0} & l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix}$$

$l_{0,0}$	$l_{1,0}$	$l_{1,1}$	$l_{2,0}$	$l_{2,1}$	$l_{2,2}$
0	1	2	3	4	5

- Siguiendo el mismo razonamiento.
- En el ejemplo:
  - Si se accede a un elemento de la fila 0, no hay elementos anteriores en cero.
  - Si se accede a un elemento de la fila 1, hay 2 elementos anteriores en cero.
  - Si se accede a un elemento de la fila 2, hay 3 elementos anteriores en cero.

Matriz triangular inferior almacenada por filas

- En general, para una matriz de N*N:

$$L = \begin{pmatrix} l_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{1,0} & l_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,0} & l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1,0} & l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \dots & l_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

  - La cantidad de ceros hasta la fila 0 es: 0
  - La cantidad de ceros hasta la fila 1 es: N-1
  - La cantidad de ceros hasta la fila 2 es: 2N - 3 (**N-1** ceros de la fila 1 y **N-2** ceros de la fila 2)
  - La cantidad de ceros hasta la fila 3 es: 3N - 6 (**N-1** ceros de la fila 1, **N-3** ceros de la fila 2 y **N-3** ceros de la fila 3)
  - La cantidad de ceros hasta la fila 4 es: 4N - 10 (**N-1** ceros de la fila 1, **N-2** ceros de la fila 2, **N-3** ceros de la fila 3 y N-4 ceros de la fila 4)

Matriz triangular inferior almacenada por filas

- La cantidad de ceros hasta la fila i-ésima es:

$$i \cdot N - \sum_{a=0}^{i} a = \frac{i \cdot (i+1)}{2}$$

- Por lo tanto, para acceder al elemento $L[i,j]$:

$$L[i,j] = L_{vector}\left[i \cdot N + j - \left(i \cdot N - \frac{i \cdot (i+1)}{2} \right) \right]$$

Matriz triangular inferior almacenada por filas

- Volviendo al ejemplo (N=3):

$$L=\begin{pmatrix} l_{0,0} & 0 & 0 \\ l_{1,0} & l_{1,1} & 0 \\ l_{2,0} & l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix}$$

$l_{0,0}$	$l_{1,0}$	$l_{1,1}$	$l_{2,0}$	$l_{2,1}$	$l_{2,2}$
0	1	2	3	4	5

	i	j	$L[i,j]=L_{vector}\left[i\cdot N+j-\left(i\cdot N-\frac{i\cdot(i+1)}{2}\right)\right]$
$l_{0,0}$	0	0	0
$l_{1,0}$	1	0	1
$l_{1,1}$	1	1	2
$l_{2,0}$	2	0	3
$l_{2,1}$	2	1	4
$l_{2,2}$	2	2	5

Matriz triangular superior almacenada por columnas

- Una matriz triangular superior almacenada por filas como un vector en memoria:

$$U = \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} \\ 0 & 0 & u_{2,2} \end{pmatrix}$$

$u_{0,0}$	$u_{0,1}$	$u_{1,1}$	$u_{0,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$
0	1	2	3	4	5

- La idea es la misma a la anterior como si tuviéramos intercambiadas las filas por columnas:
- En el ejemplo:
  - Si se accede a un elemento de la columna 0, no hay elementos anteriores en cero.
  - Si se accede a un elemento de la columna 1, hay 2 elementos anteriores en cero.
  - Si se accede a un elemento de la columna 2, hay 3 elementos anteriores en cero.

Matriz triangular superior almacenada por columnas

- En general, para una matriz de $N*N$:

$$U = \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & \dots & u_{0,n-1} \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n-1} \\ 0 & 0 & u_{2,2} & \dots & u_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

  - La cantidad de ceros hasta la columna 0 es: 0
  - La cantidad de ceros hasta la columna 1 es: N-1
  - La cantidad de ceros hasta la columna 2 es: 2N - 3 (**N-1** ceros de la columna 1 y **N-2** ceros de la columna 2)
  - La cantidad de ceros hasta la columna 3 es: 3N - 6 (**N-1** ceros de la columna 1, **N-2** ceros de la columna 2 y **N-3** ceros de la columna 3)
  - La cantidad de ceros hasta la columna 4 es: 10 (**N-1** ceros de la columna 1, **N-2** ceros de la columna 2, **N-3** ceros de la columna 3 y N-4 ceros de la columna 4)

Matriz triangular superior almacenada por columnas

- La cantidad de ceros hasta la columna j-ésima es:

$$j \cdot N - \sum_{a=0}^{j} a = \frac{j \cdot (j+1)}{2}$$

- Por lo tanto, para acceder al elemento $U[i,j]$:

$$U[i,j] = U_{vector}\left[i + j \cdot N - (j \cdot N - \frac{j \cdot (j+1)}{2})\right]$$

Matriz triangular superior almacenada por columnas

- Volviendo al ejemplo (N=3):

$$U = \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} \\ 0 & 0 & u_{2,2} \end{pmatrix}$$

$u_{0,0}$	$u_{0,1}$	$u_{1,1}$	$u_{0,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$
0	1	2	3	4	5

	i	j	$U[i,j] = U_{vector}\left[i + j \cdot N - \left(j \cdot N - \frac{j \cdot (j+1)}{2}\right)\right]$
$u_{0,0}$	0	0	0
$u_{0,1}$	0	1	1
$u_{1,1}$	1	1	2
$u_{0,2}$	0	2	3
$u_{1,2}$	1	2	4
$u_{2,2}$	2	2	5

Resumen

$$U[i,j]=U_{filas}\left[i\cdot N+j-\frac{i\cdot(i+1)}{2}\right]$$

$$L[i,j]=L_{columnas}\left[i+j\cdot N-\frac{i\cdot(i+1)}{2}\right]$$

$$L[i,j]=L_{filas}\left[i\cdot N+j-\left(i\cdot N-\frac{i\cdot(i+1)}{2}\right)\right]=L_{filas}\left[\cancel{i\cdot N}+j-\cancel{i\cdot N}+\frac{i\cdot(i+1)}{2}\right]=L_{filas}\left[j+\frac{i\cdot(i+1)}{2}\right]$$

$$U[i,j]=U_{columnas}\left[i+j\cdot N-\left(j\cdot N-\frac{j\cdot(j+1)}{2}\right)\right]=U_{columnas}\left[i+\cancel{j\cdot N}-\cancel{j\cdot N}+\frac{j\cdot(j+1)}{2}\right]=U_{columnas}\left[i+\frac{j\cdot(j+1)}{2}\right]$$

Trade-off Cómputo - Memoria

- Trade-off: es la decisión tomada en una situación en la cual se debe perder cierta cualidad a cambio de ganar en otra cualidad.
- En este caso:
  - Ganamos espacio de almacenamiento
  - La cantidad de cálculos es mayor por lo tanto se puede perder en rendimiento
- Si el overhead no se puede evitar se debe tratar de optimizar al máximo el overhead introducido por la mejora, y de esta forma mitigar el impacto negativo en el rendimiento.