

Svyrydenko_M_Lab3

Maria Svyrydenko

29 października 2025

1 Dwumian Newtona.

1.1 Definicja symbolu Newtona:

Symbolem Newtona nazywamy liczbę $\binom{n}{k}$ określoną za pomocą wzoru:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

gdzie $n, k \in \mathbb{N}$ oraz $k \leq n$

Ten symbol:

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

oznacza **operację sumowania** - każdej liczbie naturalnej k przyporządkowujemy wartość a_k , a następnie dodajemy te wartości dla wszystkich k z przedziału od 1 do n .

1.2 Wzór dwumianowy Newtona:

Wzór

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

określa rozwinięcie potęgi dwumianu. Wykładniki potęg $a, b \in \mathbb{R}$ sumują się do $n \in \mathbb{N}_0$, a współczynnik $\binom{n}{k}$ określa liczbę sposobów wyboru k czynników a spośród n nawiasów w iloczynie $(a+b)^n$.

2 Kontrprzykład:

Uwaga: Dana równość nie zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych a i b . Pokażemy to posługując się pewnym kontrprzykładem.

$$\sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$$

Niech $a=1$ i $b=1$, wtedy:

$$\sqrt[3]{1+1} \neq \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1}$$

$$\sqrt[3]{2} \neq 1 + 1$$

$$\sqrt[3]{2} \neq 2$$

Q.E.D

3 Wyznaczenie dziedziny funkcji:

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2)}$$

1.Krok: Pierwiastek kwadratowy wyznaczamy z liczb niujemnych, zatem:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) \in [0, \infty)$$

2.Krok: Wiedząc, że podstawa logarytmu należy do zbioru $\text{od} \in [0, \infty)$ oraz nie jest równa 1, musimy założyć:

$$(x^2 - 2) > 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) > 0$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$$

Nie można też zapomnieć o tym, że cały logarytm musi być nieujemny.

4 Uzasadnienie Tożsamości Trygonometrycznej

4.1 Tożsamości bazowe:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (1)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \quad (2)$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (3)$$

4.2 Wyprowadzenie tożsamości $\frac{\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

Korzystamy dodatkowo z tożsamości: $1 + \cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha)$.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} &= \frac{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{2 \cos^2(\alpha)} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} && \text{z tożsamości 1 i wariantu 2} \\ &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} && \text{skracamy 2 i } \cos(\alpha) \\ &= \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} && \text{skracamy } \cos(\alpha) \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} && \text{stosujemy tożsamość na podwójny kąt dla argumentu } \alpha/2 \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} && \text{skracamy 2 i } \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) && \text{z tożsamości 3} \end{aligned}$$

Q.E.D.

5 Rozwiązanie układu równań liniowych metodą macierzową

$$\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ -3x - y = 4 \end{cases}$$

Ten układ możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Następnie policzymy wyznaczniki.

5.1 Obliczenie wyznaczników

1. Wyznacznik główny $\det(M)$:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - 4 \cdot (-3) = -5 - (-12) = -5 + 12 = 7$$

2. Wyznacznik $\det(M_x)$ (macierz M z kolumną wyrazów wolnych w miejsce kolumny x):

$$\det(M_x) = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 4 \cdot 4 = -7 - 16 = -23$$

3. Wyznacznik $\det(M_y)$ (macierz M z kolumną wyrazów wolnych w miejsce kolumny y):

$$\det(M_y) = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 7 \cdot (-3) = 20 - (-21) = 20 + 21 = 41$$

5.2 Wyznaczenie wartości niewiadomych x i y

Ponieważ wyznacznik główny $\det(M) = 7 \neq 0$, możemy użyć **Wzorów Cramera**:

$$x = \frac{\det(M_x)}{\det(M)} = \frac{-23}{7}$$

$$y = \frac{\det(M_y)}{\det(M)} = \frac{41}{7}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = -\frac{23}{7}$ oraz $y = \frac{41}{7}$.

6 Analiza funkcji złożonej

6.1 Treść problemu

Czy istnieje funkcja f , która jest równa każdej z trzech funkcji f_1 , f_2 i f_3 na jej dziedzinie, gdzie:

$$f_1(x) = \log_3(x-3), \quad f_2(x) = \sqrt{9-x^2}, \quad f_3(x) = \log_5(-3+x).$$

6.2 Krok 1: Wyznaczenie dziedziny każdej z funkcji

1. **Dziedzina funkcji $f_1(x) = \log_3(x-3)$:** Warunek: argument logarytmu musi być większy od zera.

$$x-3 > 0 \implies x > 3$$

Zatem dziedzina D_{f_1} funkcji f_1 jest równa:

$$D_{f_1} = (3, \infty)$$

2. **Dziedzina funkcji $f_2(x) = \sqrt{9-x^2}$:** Warunek: wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym musi być nieujemne.

$$9-x^2 \geq 0 \implies x^2 \leq 9 \implies -3 \leq x \leq 3$$

Zatem dziedzina D_{f_2} funkcji f_2 jest równa:

$$D_{f_2} = [-3, 3]$$

3. **Dziedzina funkcji** $f_3(x) = \log_5(-3 + x)$: Warunek: argument logarytmu musi być większy od zera.

$$-3 + x > 0 \implies x > 3$$

Zatem dziedzina D_{f_3} funkcji f_3 jest równa:

$$D_{f_3} = (3, \infty)$$

6.3 Krok 2: Sprawdzenie, czy dziedziny są zbiorami rozłącznymi

Funkcja f istnieje tylko wtedy, gdy $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ mają niepusty zbiór wspólnej dziedziny $\mathbf{D}_f = \mathbf{D}_{f_1} \cap \mathbf{D}_{f_2} \cap \mathbf{D}_{f_3}$.
Policzmy iloczyn (przecięcie) dziedzin:

$$D_f = (3, \infty) \cap [-3, 3] \cap (3, \infty)$$

- Przecięcie $D_{f_1} \cap D_{f_3}$:

$$(3, \infty) \cap (3, \infty) = (3, \infty)$$

- Przecięcie $(D_{f_1} \cap D_{f_3}) \cap D_{f_2}$:

$$(3, \infty) \cap [-3, 3]$$

Zbiór $(3, \infty)$ zawiera liczby ściśle większe od 3, natomiast zbiór $[-3, 3]$ zawiera liczby od -3 do 3 włącznie. Nie mają one żadnych elementów wspólnych.

$$D_f = \emptyset$$

Ponieważ zbiór wspólnej dziedziny jest zbiorem pustym (\emptyset), to dziedziny $\mathbf{D}_{f_1}, \mathbf{D}_{f_2}, \mathbf{D}_{f_3}$ są zbiorami **rozłącznymi**.

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x-3) & \text{gdy } x \in D_{f_1} \\ \sqrt{9-x^2} & \text{gdy } x \in D_{f_2} \\ \log_5(-3+x) & \text{gdy } x \in D_{f_3} \end{cases}$$