一、傅里叶级数

连续周期信号： $f(t)=f(t+T)$，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

三角形式： $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)]$

指数形式： $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$，其中

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

关系： $c_0=a_0$，$c_n=\frac{a_n-jb_n}{2}$，$c_{-n}=c_n^*$（$f(t)$ 实）

- 线性：$af(t)+bg(t)\leftrightarrow ac_n+bd_n$
- 时移：$f(t-t_0)\leftrightarrow c_n e^{-jn\omega_0 t_0}$
- 共轭对称：$f(t)$ 实 $\Rightarrow c_{-n}=c_n^*$
- 帕塞瓦尔：$\frac{1}{T}\int_T|f(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$

二、傅里叶变换

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

1. **线性性：** $\mathcal{F}[af(t)+bg(t)]=aF(\omega)+bG(\omega)$
2. **时移性：** $\mathcal{F}[f(t-t_0)]=F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. **频移性：** $\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}]=F(\omega-\omega_0)$
4. **尺度变换：** $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$
5. **对称性（对偶性）：** $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$
6. **时域微分：** $\mathcal{F}[\frac{d^n f(t)}{dt^n}] = (j\omega)^n F(\omega)$ **条件:**$f(-\infty)+f(\infty)=0$
7. **频域微分：** $\mathcal{F}[t^n f(t)]=j^n\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
8. **积分性：** $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau]=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
9. **时域卷积：** $\mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)G(\omega)$
10. **频域卷积：** $\mathcal{F}[f(t)g(t)]=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$
11. **帕塞瓦尔定理：** $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$
12. **能量与功率：**
    - 能量信号：$E = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$
    - 功率信号（周期）：$P=\frac{1}{T}\int_T|f(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2$（$a_n$ 为傅里叶系数）
    - 平均功率:$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2dt$
13. **共轭对称性：** 若 $f(t)$ 实，则 $F(-\omega)=F^*(\omega)$
14. **奇偶虚实性：**
    - $f(t)$ 实偶 $\Rightarrow F(\omega)$ 实偶
    - $f(t)$ 实奇 $\Rightarrow F(\omega)$ 纯虚奇
    - $f(t)$ 虚偶 $\Rightarrow F(\omega)$ 虚偶
    - $f(t)$ 虚奇 $\Rightarrow F(\omega)$ 实奇
15. **奇偶分解：**
    - 偶部：$f_e(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} \Leftrightarrow F_e(\omega) = \mathrm{Re}\{F(\omega)\}$
    - 奇部：$f_o(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2} \Leftrightarrow F_o(\omega) = j\mathrm{Im}\{F(\omega)\}$
    - 关系：$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$，$F(\omega) = F_e(\omega)+F_o(\omega)$

三、常见傅里叶变换对

$$\delta(t)\longleftrightarrow 1$$

$$1\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t}\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t)\longleftrightarrow \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t)\longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$e^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{a+j\omega},\quad (a>0)$$

$$u(t)\longleftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

$$\mathrm{rect}(\frac{t}{\tau})\longleftrightarrow\frac{\tau\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

$$\mathrm{sinc}(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\longleftrightarrow\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$$

$$\mathrm{tri}(\frac{t}{\tau})\longleftrightarrow\frac{\tau\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\longleftrightarrow\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

周期信号的傅里叶变换：

方法一（利用傅里叶级数）：

若 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$，则

$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

方法二（单周期信号法）：

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_0(t-kT)$$

$$F(\omega)=F_0(\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-jk\omega T}=$$

$$\frac{2\pi}{T}F_0(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$

其中 $c_n=\frac{1}{T}F_0(n\omega_0)$

四、离散时间傅里叶变换（DTFT）

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- 线性：$\mathcal{F}_d[ax[n]+by[n]]=aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
- 时移：$\mathcal{F}_d[x[n-n_0]]=e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
- 频移：$\mathcal{F}_d[e^{j\omega_0 n}x[n]]=X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
- 周期性：$X(e^{j(\omega+2\pi)})=X(e^{j\omega})$
- 共轭对称：若 $x[n]$ 实，则 $X(e^{-j\omega})=X^*(e^{j\omega})$
- 频域微分：$\mathcal{F}_d[nx[n]]=j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
- 时域扩展:$x_k[n]=\begin{cases}x[n/k], & n=0,\pm k,\pm 2k,\dots\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

  则 $X_k(e^{j\omega})=X(e^{jk\omega})$
- 卷积：$\mathcal{F}_d[x[n]*y[n]]=X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
- 调制：$\mathcal{F}_d[x[n]y[n]]=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})$
- 奇偶虚实性：
  - $x[n]$ 实偶 $\Rightarrow X(e^{j\omega})$ 实偶
  - $x[n]$ 实奇 $\Rightarrow X(e^{j\omega})$ 纯虚奇
  - $x[n]$ 虚偶 $\Rightarrow X(e^{j\omega})$ 虚偶
  - $x[n]$ 虚奇 $\Rightarrow X(e^{j\omega})$ 实奇
- 低频和高频：低频指 $\omega\approx 2k\pi$，高频指 $\omega\approx(2k+1)\pi$

$$\delta[n]\longleftrightarrow 1$$

$$\delta[n-n_0]\longleftrightarrow e^{-j\omega n_0}$$

$$a^n u[n]\longleftrightarrow\frac{1}{1-ae^{-j\omega}},\quad |a|<1$$

$$u[n]\longleftrightarrow\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$\mathrm{rect}_N[n]\longleftrightarrow\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(N-1)/2}$$

五、拉普拉斯变换（双边）

定义： $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt,\quad s=\sigma+j\omega$

- 线性：$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]=aF(s)+bG(s)$，ROC 至少为 $R_1\cap R_2$
- 时移：$\mathcal{L}[f(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$，ROC 不变
- 频移:$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$,ROC:$\mathrm{Re}(s+a)\in R$
- 尺度：$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{s}{a})$，ROC：$\frac{s}{a}\in R$
- 时域微分：$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)$，ROC 至少为 R
- s 域微分：$\mathcal{L}[tf(t)]=-\frac{dF(s)}{ds}$，ROC：$R$
- 积分：$\mathcal{L}[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s}$，ROC 至少为 $R\cap\{\mathrm{Re}(s)>0\}$
- 卷积：$\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=F(s)G(s)$，ROC 至少为 $R_1\cap R_2$
- 初值定理：$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$（因果信号）
- 终值定理：$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$（极点在左半平面或原点）

$$\delta(t)\longleftrightarrow 1,\quad \text{全}s\text{平面}$$

$$u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{s},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

$$-u(-t)\longleftrightarrow\frac{1}{s},\quad \mathrm{Re}(s)<0$$

$$e^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{s+a},\quad \mathrm{Re}(s)>-a\ \text{（右边）}$$

$$-e^{-at}u(-t)\longleftrightarrow\frac{1}{s+a},\quad \mathrm{Re}(s)<-a\ \text{（左边）}$$

$$te^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{(s+a)^2},\quad \mathrm{Re}(s)>-a$$

$$-te^{-at}u(-t)\longleftrightarrow\frac{1}{(s+a)^2},\quad \mathrm{Re}(s)<-a$$

$$e^{-a|t|}\longleftrightarrow\frac{2a}{s^2-a^2},\quad -a<\mathrm{Re}(s)<a$$

$$t^n u(t)\longleftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

$$\cos(\omega_0 t)u(t)\longleftrightarrow\frac{s}{s^2+\omega_0^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

$$\sin(\omega_0 t)u(t)\longleftrightarrow\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

$$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)\longleftrightarrow\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2},\quad \mathrm{Re}(s)>-a$$

$$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)\longleftrightarrow\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2},\quad \mathrm{Re}(s)>-a$$

六、z 变换

定义： $X(z)=\mathcal{Z}[x[n]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$

- 线性：$\mathcal{Z}[ax[n]+by[n]]=aX(z)+bY(z)$，ROC 至少为 $R_1\cap R_2$
- 时移：$\mathcal{Z}[x[n-n_0]]=z^{-n_0}X(z)$，ROC：$R$（可能除去 $z=0$ 或 $z=\infty$）
- 尺度：$\mathcal{Z}[a^n x[n]]=X(\frac{z}{a})$，ROC：$|z/a|\in R$ 即 $|z|\in|a|R$
- z 域微分：$\mathcal{Z}[nx[n]]=-z\frac{dX(z)}{dz}$，ROC：$R$
- 时域卷积：$\mathcal{Z}[x[n]*y[n]]=X(z)Y(z)$，ROC 至少为 $R_1\cap R_2$
- 差分：$\mathcal{Z}[x[n]-x[n-1]]=(1-z^{-1})X(z)$，ROC 至少为 $R\cap\{z\neq 0\}$
- 累加：$\mathcal{Z}[\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]]=\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$，ROC 至少为 $R\cap\{|z|>1\}$
- 初值定理：$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$（因果序列）
- 终值定理：$\lim_{n\to\infty}x[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$（极点在单位圆内或 $z=1$）

$$\delta[n]\longleftrightarrow 1,\quad \text{全}z\text{平面}$$

$$u[n]\longleftrightarrow\frac{z}{z-1},\ |z|>1$$

$$-u[-n-1]\longleftrightarrow\frac{z}{z-1},\ |z|<1$$

$$a^n u[n]\longleftrightarrow\frac{z}{z-a},\ |z|>|a|\ \text{（右边）}$$

$$-a^n u[-n-1]\longleftrightarrow\frac{z}{z-a},\ |z|<|a|\ \text{（左边）}$$

$$na^n u[n]\longleftrightarrow\frac{az}{(z-a)^2},\ |z|>|a|$$

$$-na^n u[-n-1]\longleftrightarrow\frac{az}{(z-a)^2},\ |z|<|a|$$

$$\cos(\omega_0 n)u[n]\longleftrightarrow\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$$

$$\sin(\omega_0 n)u[n]\longleftrightarrow\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$$

七、连续时间 LTI 系统分析

系统函数： $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \mathcal{L}[h(t)]$
稳定性判据：

- **BIBO 稳定**：所有极点在左半平面，即 $\mathrm{Re}(p_j) < 0$
- **临界稳定**：极点在虚轴上
- **不稳定**：至少一个极点在右半平面

频率响应： $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

- 幅频特性：$|H(j\omega)|$
- 相频特性：$\angle H(j\omega)$

时频特性：
无失真传输条件： $y(t) = Kx(t - t_d)$

- 幅频：$|H(j\omega)| = K$（常数）
- 相频：$\angle H(j\omega) = -\omega t_d$（线性相位）
- 理想：$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$

群时延： $\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$
其中 $\theta(\omega) = \angle H(j\omega)$
物理意义：窄带信号包络的时延
相时延： $\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}$
物理意义：载波的时延
关系：

- 线性相位：$\theta(\omega) = -\omega t_d$，则 $\tau_g = \tau_p = t_d$
- 非线性相位：$\tau_g \neq \tau_p$，产生失真

部分分式展开：
对于 $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$，若极点 p_i 为单极点：

$$H(s) = \sum_i \frac{r_i}{s - p_i} \quad \text{其中} \quad r_i = [(s - p_i)H(s)]_{s=p_i}$$

八、离散时间 LTI 系统分析

系统函数： $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}[h[n]]$
稳定性判据：

- **BIBO 稳定**：所有极点在单位圆内，即 $|p_j| < 1$
- **临界稳定**：极点在单位圆上
- **不稳定**：至少一个极点在单位圆外

频率响应： $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$
差分方程与系统函数关系：
差分方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$
系统函数：$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$

九、因果性与稳定性

连续系统（s 域）：

- **因果性**：$H(s)$ 是真有理函数（分子次数 $\leq$ 分母次数）
- **稳定性**：收敛域包含虚轴，所有极点 $\mathrm{Re}(p) < 0$
- **因果稳定**：收敛域为 $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ 且 $\sigma_0 < 0$

离散系统（z 域）：

- **因果性**：$H(z)$ 收敛域为 $|z| > r$（某个圆外）
- **稳定性**：收敛域包含单位圆 $|z| = 1$，所有极点 $|p| < 1$
- **因果稳定**：收敛域为 $|z| > r$ 且 $r < 1$

十、系统连接

串联： $H(s) = H_1(s)H_2(s)$ 或 $H(z) = H_1(z)H_2(z)$
并联： $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$ 或 $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$
反馈： $H(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}$ （$+$ 负反馈，$-$ 正反馈）

十一、拉普拉斯与 z 变换类比

拉普拉斯变换（连续）	z 变换（离散）
稳定：$\mathrm{Re}(s) < 0$	稳定：$\|z\| < 1$
临界稳定：虚轴	临界稳定：单位圆
不稳定：$\mathrm{Re}(s) > 0$	不稳定：$\|z\| > 1$

映射关系： $z = e^{sT}$ 或 $s = \frac{1}{T}\ln z$

- s 左半平面 $\leftrightarrow$ z 单位圆内
- s 虚轴 $\leftrightarrow$ z 单位圆
- s 右半平面 $\leftrightarrow$ z 单位圆外
- 主频带：$-\pi/T < \omega < \pi/T$

十二、采样理论

冲激串采样：

- 采样信号：$x_p(t) = x(t)p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$
- 频域：$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$，$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$
- 频谱周期延拓，周期为 ω_s

采样定理（Nyquist）：

- 若 $x(t)$ 带限于 ω_M，即 $X(j\omega) = 0$，$|\omega| > \omega_M$
- 采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_M$（Nyquist 率），可无失真恢复
- 恢复：理想低通滤波器 $H_r(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$
- 其中 $\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$

零阶保持（ZOH）采样：

- $x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\mathrm{rect}(\frac{t - nT - T/2}{T})$
- 频域：$X_0(j\omega) = H_0(j\omega)X_p(j\omega)$
- $H_0(j\omega) = T\mathrm{sinc}(\frac{\omega T}{2})e^{-j\omega T/2}$

线性内插：

- $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\mathrm{tri}(\frac{t - nT}{T})$
- 频域：$X_1(j\omega) = H_1(j\omega)X_p(j\omega)$
- $H_1(j\omega) = T\mathrm{sinc}^2(\frac{\omega T}{2})$

离散时间处理连续信号： C/D 转换（连续到离散）：

- 采样：$x[n] = x_c(nT)$
- 频域关系：$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\frac{\omega - 2\pi k}{T})$

离散时间处理：

- 离散系统：$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$
- 等效连续频率：$\Omega = \omega T$

D/C 转换（离散到连续）：

- 理想重建：$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$
- 零阶保持：$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\mathrm{rect}(\frac{t - nT - T/2}{T})$

整体系统：

- 等效连续系统：$H_{eff}(j\Omega) = H(e^{j\Omega T})$，$|\Omega| < \pi/T$
- 采样频率足够高时近似连续滤波器

混叠（Aliasing）：

- 当 $\omega_s < 2\omega_M$ 时，频谱混叠
- 高频成分”伪装”成低频，无法恢复
- 解决：预滤波（抗混叠滤波器）

注意：

- 审题
- 求单位冲激响应还是单位阶跃响应
- 注意题目中是否隐含因果性和稳定性
- 注意拉氏变换和 z 变换的收敛域（每一步都要求）
- 求响应前注意收敛域是否存在，若不存在用本征函数或卷积