Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2023
Wahlaufgabe C2: Schwerpunkt Stochastik

1. In einer repräsentativen Online-Befragung zum Radfahrverhalten im Jahr 2021 gaben 45 % aller Radfahrer an, zum Schutz während der Fahrt einen Helm zu tragen. Der Anteil an E-Bike-Fahrern unter allen Radfahrern betrug 14 %.

   Eine Schülergruppe plant eine Verkehrsbeobachtung und nutzt dazu die Angaben der Online-Befragung und das Modell der Binomialverteilung. Die relativen Häufigkeiten werden dabei als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

   a) Nennen Sie zwei Voraussetzungen, die von der Schülergruppe beachtet werden müssen, damit die Anzahl der E-Bike-Fahrer als binomialverteilt angesehen werden kann. (2 BE)

   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
   A: = „Unter den ersten 50 beobachteten Radfahrern befinden sich weniger als vier E-Bike-Fahrer."
   B: = „Die Anzahl der Helmträger bei 40 Radfahrern ist um mindestens fünf größer als der Erwartungswert." (5 BE)

   c) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis C, dessen Wahrscheinlichkeit durch

   $$P(C) = 0{,}45 \cdot \left(\binom{39}{9} \cdot 0{,}45^9 \cdot 0{,}55^{30} \right)$$

   berechnet werden kann. (3 BE)

   d) Gegeben ist folgende Ungleichung:

   $$\frac{2 \cdot \sqrt{n \cdot 0{,}14 \cdot (1-0{,}14)}}{n} < 0{,}1$$

   Ermitteln Sie die Lösung der Ungleichung.
   Erläutern Sie die Bedeutung der Ungleichung und ihrer Lösung im Sachzusammenhang. (3 BE)

   Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Helm getragen wird, ist bei E-Bike-Fahrern doppelt so groß wie bei Fahrern von nicht motorisierten Fahrrädern.

   e) Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit p, dass ein beliebiger Radfahrer ein E-Bike nutzt und keinen Helm trägt.
   [Kontrollergebnis: $p \approx 0{,}0295$] (4 BE)

   f) Ermitteln Sie die Anzahl der Radfahrer, die mindestens beobachtet werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als zehn E-Bike-Fahrer ohne Helm zu erfassen. (3 BE)

   g) Die Bundesanstalt für Straßenwesen führt jährlich deutschlandweit Verkehrsbeobachtungen durch. Die Beobachtungen des Jahres 2021 umfassten 16 199 Radfahrer und ergaben, dass über alle Altersgruppen hinweg 31,7 % aller Radfahrer einen Helm trugen.
   nach: Sicherung durch Gurte und andere Schutzsysteme 2020 und 2021 – Erhebung 2021, Bericht zum Forschungsprojekt 83.0040, Bundesanstalt für Straßenwesen

Berechnen Sie das 2σ-Konfidenzintervall für den Anteil der Helmträger für diese Verkehrsbeobachtungen.
Beurteilen Sie das Ergebnis der Online-Befragung zum Radfahrverhalten aus dem Jahr 2021 anhand des von Ihnen ermittelten Konfidenzintervalls. (5 BE)

2. Für alle reellen Zahlen a ist die Schar von Geraden g_a gegeben durch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2-a \\ a \\ 2a-1 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$$

a) Zeigen Sie, dass die Gerade g_{-4} die z-Achse schneidet, und berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels. (4 BE)

b) Weisen Sie nach, dass sich die Geraden g_{-4} und $g_{\frac{3}{4}}$ orthogonal schneiden. (2 BE)

c) Bestimmen Sie die Gerade der Schar g_a, die parallel zur y-z-Ebene liegt. (2 BE)

Gegeben ist die Ebene ε durch die Gleichung $x - 3y + 2z = 11$.

d) Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar g_a in der Ebene ε liegen. (2 BE)

e) Die Schnittpunkte der Ebene ε mit den Koordinatenachsen bilden die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze der Koordinatenursprung ist.
Ermitteln Sie das Volumen und die Höhe dieser Pyramide. (5 BE)

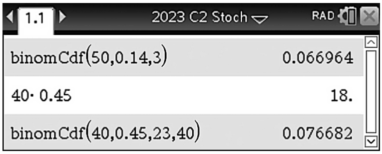
(40 BE)

Lösungen

1. a) Bei der Planung der Beobachtung sollte z. B. berücksichtigt werden, dass
   - eine klare Unterscheidung zwischen E-Bike-Fahrer und „normalem“ Radfahrer möglich ist,
   - eine repräsentative Beobachtung erfolgt (Ort und Zeitpunkt der Beobachtung berücksichtigen),
   - keine Mehrfachzählungen erfolgen,
   - der Stichprobenumfang nicht zu klein ist und
   - die Auswahl zufällig und unabhängig voneinander erfolgen muss.

   b) **Ereignis A**
   $P(A) = B_{50;\,0,14}(X < 4) \approx \underline{\underline{0{,}0670}}$

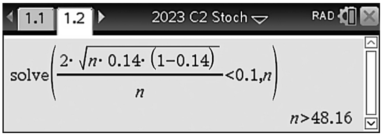
   Ereignis B
   Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}45 = 18$
   $P(B) = B_{40;\,0,45}(X \geq 23) \approx \underline{\underline{0{,}0767}}$



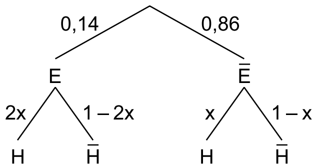
   c) Mögliche Beschreibung: Der erste von 40 Radfahrern trägt einen Helm und unter den nächsten 39 sind genau neun weitere Radfahrer mit Helm.

   d) Die Ungleichung hat die Lösung $\underline{\underline{n > 48}}$.

   Es müssen mindestens 49 Radfahrer beobachtet werden, damit die relative Häufigkeit des Anteils der E-Bike-Fahrer mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % (2σ-Umgebung) um weniger als 0,1 von $p = 0{,}14$ abweicht.

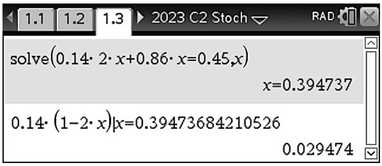


   e) Mit
   E: „E-Bike-Fahrer“ und $\overline{E}$: „kein E-Bike-Fahrer“ bzw.
   H: „trägt einen Helm“ und $\overline{H}$: „trägt keinen Helm“
   ergibt sich nebenstehendes Baumdiagramm.

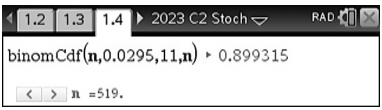


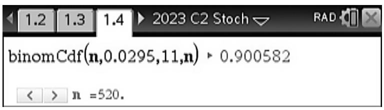
   Es ist bekannt, dass 45 % aller Fahrer einen Helm nutzen. Daher gilt:
   $0{,}14 \cdot 2x + 0{,}86 \cdot x = 0{,}45$
   Hieraus folgt $x \approx 0{,}3947$.

   Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit:
   $p = P(E \cap \overline{H}) = 0{,}14 \cdot (1 - 2x)$
   Man erhält:
   $\underline{\underline{p \approx 0{,}0295}}$



   f) Mittels Schieberegler lässt sich diejenige Stelle für n finden, für die der Term $B_{n;\,0,0295}(X \geq 11)$ erstmals einen Wert von mindestens 0,9 hat.



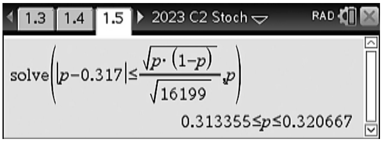


   Es müssen mindestens $\underline{\underline{520}}$ Radfahrer beobachtet werden.

g) Die Lösung der Ungleichung

$$|p-0{,}317| \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{16\,199}}$$

liefert das Konfidenzintervall $\underline{\underline{[0{,}314;\, 0{,}320]}}$ für die unbekannte Wahrscheinlichkeit, dass ein Radfahrer einen Helm trägt.



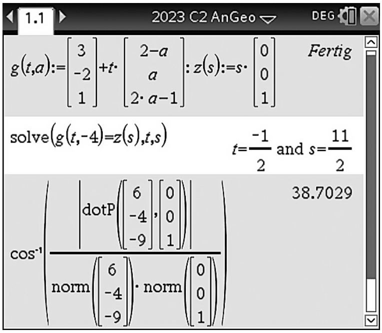
Beim Runden wurde jeweils die Richtung des Ungleichheitszeichens beachtet.

Der Wert 45 % aus der Umfrage liegt nicht in diesem Konfidenzintervall. Das Umfrageergebnis ist also nicht verträglich mit den Zahlen der Bundesanstalt.

2. a) Das Gleichungssystem

$$g_a(t) = z(s) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3 + t \cdot (2-a) = 0 \\ -2 + t \cdot a = 0 \\ 1 + t \cdot (2a-1) = s \end{cases}$$

hat für $a = -4$ eine eindeutige Lösung. Also schneidet die Gerade g_{-4} die z-Achse.



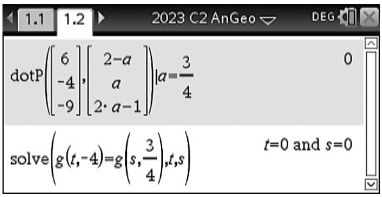
Der Winkel α, den beide Geraden einschließen, kann als der Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren berechnet werden.

Die Gerade g_{-4} hat den Richtungsvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2-(-4) \\ -4 \\ 2 \cdot (-4)-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix}$ und die z-Achse den Richtungsvektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit folgt:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{b} \circ \vec{c}|}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|}\right) \approx \underline{\underline{38{,}7°}}$$

b) Es wird das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren ermittelt:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2-\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 \end{pmatrix} = 0$$



Es ergibt sich null, also verlaufen die beiden Geraden senkrecht zueinander.

Gleichsetzen der beiden Geraden g_{-4} und $g_{\frac{3}{4}}$ liefert die Lösung $t = 0$ und $s = 0$. Also schneiden sich die beiden Geraden.

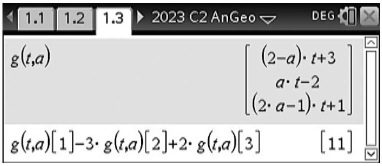
Insgesamt folgt, dass sich die beiden Geraden orthogonal schneiden.

c) Die Gerade g_a verläuft genau dann parallel zur y-z-Ebene, wenn die x-Koordinate des Richtungsvektors der Geraden null ist. Dies ist nur für $a = 2$ erfüllt.

Die Gerade $\underline{\underline{g_2}}$ verläuft parallel zur y-z-Ebene.

d) Für die Koordinaten der Geradengleichung gilt:
$x = (2-a)\cdot t + 3,\ y = a\cdot t - 2,\ z = (2a-1)\cdot t + 1$

Das Einsetzen dieser Werte in die Ebenengleichung $x - 3y + 2z = 11$ ergibt eine wahre Aussage.

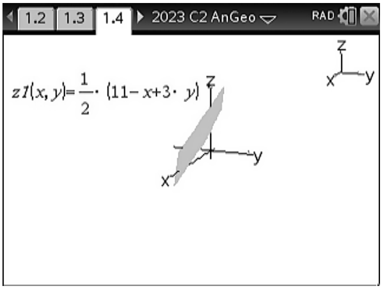


e) Die Umformung der gegebenen Ebenengleichung $x - 3y + 2z = 11$ in die Achsenabschnittsform ergibt:

$$\frac{1}{11}x - \frac{3}{11}y + \frac{2}{11}z = 1$$

Hieraus ergeben sich als Schnittpunkte mit den Achsen:

$$P_x(11\,|\,0\,|\,0),\ P_y\left(0\,\middle|\,-\frac{11}{3}\,\middle|\,0\right),\ P_z\left(0\,\middle|\,0\,\middle|\,\frac{11}{2}\right)$$



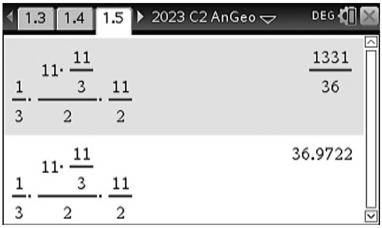
Volumen

Für das Volumen einer Pyramide gilt:

$$V = \frac{1}{3}\cdot A_G \cdot h$$

Wählt man beispielsweise als Grundfläche das rechtwinklige Dreieck OP_xP_y, dann entspricht die Höhe h der z-Koordinate des Punktes P_z. Damit berechnet man das Volumen V zu:

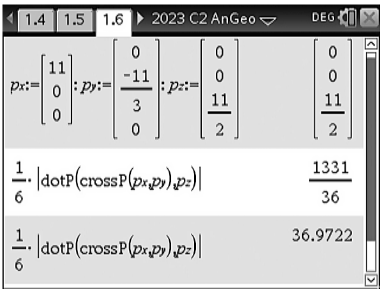
$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{11\cdot\frac{11}{3}}{2}\cdot\frac{11}{2} = \frac{1331}{36} \approx \underline{\underline{37{,}0\ \text{VE}}}$$



Variante: Nutzung des Spatprodukts
Die Pyramide $P_xP_yP_zO$ ist ein Tetraeder, dessen aufspannende Vektoren z. B. $\overrightarrow{OP_x}$, $\overrightarrow{OP_y}$ und $\overrightarrow{OP_z}$ sind. Damit ist das Volumen berechenbar durch:

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{OP_x}\times\overrightarrow{OP_y}\right)\circ\overrightarrow{OP_z}\right|$$

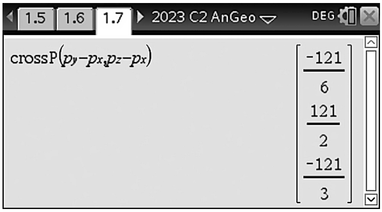
Es ergibt sich dasselbe Ergebnis wie oben.



Höhe

Ein Normalenvektor der Grundfläche ist:

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_xP_y} \times \overrightarrow{P_xP_z} = \begin{pmatrix} -\frac{121}{6} \\ \frac{121}{2} \\ -\frac{121}{3} \end{pmatrix} = \frac{121}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Der Lotfußpunkt des Koordinatenursprungs auf die Grundfläche der Pyramide lässt sich durch Gleichsetzen der Ebenengleichung der Grundfläche mit der Geraden $g(t) = t \cdot \vec{n}$ durch den Ursprung mit dem Richtungsvektor $\vec{n}$ berechnen.

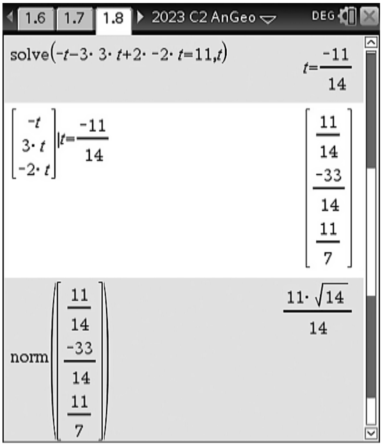
Als Lotfußpunkt ergibt sich:

$$L\left(\frac{11}{14} \middle| -\frac{33}{14} \middle| \frac{11}{7}\right)$$

Die Höhe der Pyramide kann dann als Betrag des Vektors $\overrightarrow{LO}$ ermittelt werden.

Es ergibt sich eine Höhe von:

$$\underline{\underline{\frac{11}{14} \cdot \sqrt{14} \text{ LE}}}$$



Alternative:

Die Höhe der Pyramide kann auch über die Hesse'sche Normalform der Ebenengleichung ermittelt werden. Diese lautet:

$$\frac{x - 3y + 2z - 11}{\sqrt{14}} = 0$$

Die Höhe entspricht dem Abstand zum Ursprung, also dem Betrag des Absolutglieds:

$$\left| -\frac{11}{\sqrt{14}} \right| = \underline{\underline{\frac{11}{14} \cdot \sqrt{14} \text{ LE}}}$$

Lösungen der Aufgaben:

Dr. Hubert Langlotz (Teil A [Aufgaben 1 bis 5], B [Teilaufgabe 2] und C2),
Dr. Wilfried Zappe (Teil A [Aufgaben 6 bis 10], B [Teilaufgabe 1] und C1)