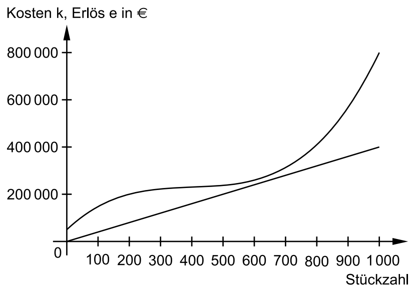
Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2020
Pflichtaufgabe Teil B: Analysis

1. Gegeben sind mit $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{10} x^2 \cdot (x-6)$ und für jede reelle Zahl a $(a \neq 0)$ eine Funktion g_a durch $g_a(x) = f(x) + a \cdot x$.
   a) Zeigen Sie, dass $x = 2$ die Wendestelle von f ist. (2 BE)
   b) Begründen Sie, dass die Funktionen f und g_a für alle Werte von a eine gemeinsame Wendestelle besitzen. (2 BE)
   c) Weisen Sie nach, dass sich die Wendetangente an den Graphen von f und alle Wendetangenten an die Graphen von g_a in einem gemeinsamen Punkt schneiden. (4 BE)
   d) Die Punkte $P\left(0 \,\middle|\, \frac{4}{5}\right)$, $W_f(2\,|\,f(2))$ und $W_{g_a}(2\,|\,g_a(2))$ sind Eckpunkte eines Dreiecks.
   Untersuchen Sie, für welche Werte von a dieses Dreieck rechtwinklig ist. (6 BE)
   e) Die Graphen von f und g_a sowie die Gerade $x = 2$ begrenzen eine Fläche vollständig.
   Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass der Inhalt dieser Fläche 10 FE beträgt. (3 BE)

2. Ein Unternehmen produziert E-Scooter.
   Die monatlichen Produktionskosten der E-Scooter in Euro werden im Unternehmen mithilfe der Funktion k mit $k(x) = \frac{1}{400} x^3 - 3x^2 + 1250x + 50\,000$ mathematisch beschrieben.
   Für den Erlös e beim Verkauf der E-Scooter gilt der funktionale Zusammenhang $e(x) = p \cdot x$, wobei p der Stückpreis in Euro und x die Stückzahl bedeuten.
   Der Gewinn g eines Unternehmens lässt sich als Differenz aus dem Erlös e und den Produktionskosten k berechnen.

   Für die folgenden Aufgaben wird vorausgesetzt, dass alle produzierten E-Scooter auch verkauft werden.

   a) Dargestellt sind die Graphen der Funktionen k und e mit $p = 400$ im Intervall $0 \leq x \leq 1000$.

   Entscheiden Sie mithilfe der Graphen, ob der Stückpreis von 400 € für das Unternehmen rentabel ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (3 BE)
   b) Im Unternehmen wird nach Analyse der Marktsituation entschieden, den Preis für einen E-Scooter auf 725 € festzusetzen.

   Bestimmen Sie die monatliche Mindest- und die Höchstanzahl von E-Scootern, damit Gewinn erwirtschaftet werden kann.
   Berechnen Sie den Maximalgewinn, den das Unternehmen erzielen kann. (7 BE)

Die E-Scooter werden zu einem Preis von 725 € verkauft.
Modellhaft kann der zugehörige Absatz mithilfe der Funktion a mit
$a(t) = 500 \cdot t \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ ($t \in \mathbb{R}$; $0 \leq t \leq 12$) beschrieben werden.
Dabei ist t die seit der Produkteinführung vergangene Zeit in Monaten und a(t) der Absatz in Stück pro Monat.

c) Ermitteln Sie die Monate, in denen der Absatz zunimmt. (3 BE)

d) Die Produktionskosten bedingen, dass das Unternehmen mindestens 309 Stück pro Monat verkaufen muss, um Gewinn zu erwirtschaften.

Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem sich die Produktion lohnt.

Ermitteln Sie die Stückzahl der in den ersten elf Monaten verkauften E-Scooter sowie den Gesamterlös, den das Unternehmen aus dem Verkauf der E-Scooter in diesem Zeitraum erzielt. (5 BE)

e) Es gibt einen Zeitpunkt, an dem der Absatz am stärksten zunimmt, und einen Zeitpunkt, an dem er am stärksten abnimmt.
Zur Bestimmung dieser Zeitpunkte wird folgende Untersuchung durchgeführt:

$a''(t) = 0$ hat nur die Lösung $t = 8$ und es gilt $a'''(8) > 0$.

Erläutern Sie diese Untersuchung.

Geben Sie den anderen Zeitpunkt an und begründen Sie Ihre Angabe ohne weitere Rechnung. (5 BE)

(40 BE)

Lösungen

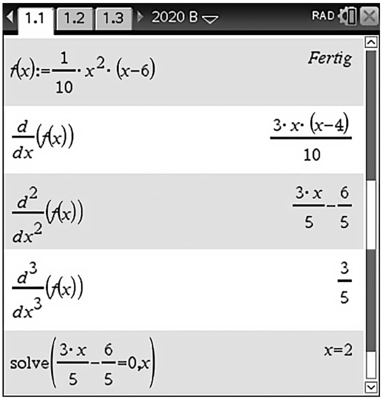
1. a) **Ableitungen**

$$f(x)=\frac{1}{10}x^2\cdot(x-6)=\frac{1}{10}x^3-\frac{3}{5}x^2$$

$$f'(x)=\frac{3}{10}x^2-\frac{6}{5}x$$

$$f''(x)=\frac{3}{5}x-\frac{6}{5}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{5}$$



Notwendige Bedingung für Wendestellen
$f''(x)=0$ setzen und lösen:

$$\frac{3}{5}x-\frac{6}{5}=0$$

$$x=2$$

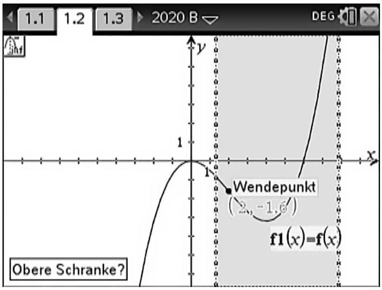
Hinreichende Bedingung für Wendestellen
Prüfen, ob $f'''(x)\neq 0$ ist:

$$f'''(2)=\frac{3}{5}>0$$

Damit ist sicher, dass $x=2$ eine Wendestelle von f ist.

Alternative Lösung zur hinreichenden Bedingung: $f''(x)$ wechselt an der Stelle $x=2$ das Vorzeichen von minus zu plus.

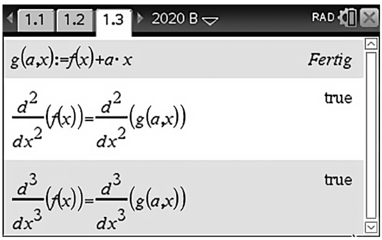
Hinweis: Durch eine grafische Bestimmung der Wendestelle kann man das Ergebnis selbst kontrollieren.



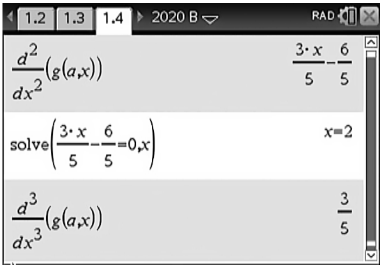
b) Die 1. Ableitung der Funktion $y=a\cdot x$ ist $y'=a$ und die 2. Ableitung ist $y''=0$.

Damit ist klar, dass die 2. und 3. Ableitungen von f(x) und $g_a(x)$ übereinstimmen.

Demzufolge hat $g_a(x)$ dieselbe Wendestelle $x=2$ wie f(x), die in Teilaufgabe 1 a bestimmt wurde.



Alternative Lösung: Die Wendestelle von $g_a(x)$ wird „traditionell“ berechnet mit der Nullstelle x_0 der 2. Ableitung als notwendiger Bedingung und dem von null verschiedenen Wert der 3. Ableitung an der Stelle x_0. Anschließend erfolgt ein Vergleich mit der Wendestelle der Funktion f.



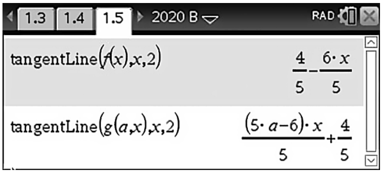
c) Die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an einer Stelle x_0 lässt sich mit dem CAS-Befehl tangentLine(f(x),x,x_0) unter <Analysis> und <Tangententerm> bestimmen.

Die Tangentengleichung für f(x) an der Stelle $x=2$ ist:

$$y=-\frac{6}{5}\cdot x+\frac{4}{5}$$

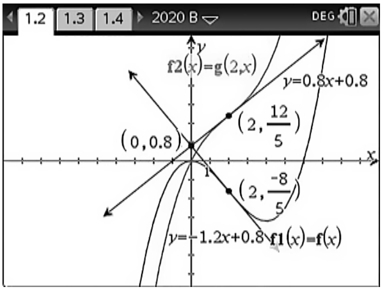
Die Funktionen $g_a(x)$ haben an der Stelle $x=2$ die Tangentengleichungen:

$$y=\frac{5a-6}{5}\cdot x+\frac{4}{5}$$



Die Tangentengleichungen haben ein und dasselbe Absolutglied $\frac{4}{5}$ und wegen $a\neq 0$ unterschiedliche Anstiege. Da es sich um lineare Funktionen handelt, die, wenn sich ihre Graphen schneiden, genau einen Schnittpunkt haben, so muss dies der Punkt $P\left(0\,\middle|\,\frac{4}{5}\right)$ sein.

Wieder ist hier eine grafische Selbstkontrolle möglich.



Alternative Lösung: Die Tangentengleichungen sind von der Form $y=m\cdot x+n$.
Der Anstieg m wird über die 1. Ableitung der Funktion an der Stelle $x=2$ bestimmt. Durch Einsetzen von m sowie $x=2$ und dem Funktionswert an der Stelle $x=2$ kann n ermittelt werden.

Für die Funktion f bedeutet das:

$$m=f'(2)=\frac{3}{10}\cdot 2^2-\frac{6}{5}\cdot 2=-\frac{6}{5}$$

$$f(2)=\frac{1}{10}\cdot 2^2\cdot(2-6)=-\frac{8}{5}\quad\Rightarrow\quad -\frac{8}{5}=-\frac{6}{5}\cdot 2+n\quad\Rightarrow\quad n=\frac{4}{5}\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{6}{5}x+\frac{4}{5}$$

Für die Funktionen $g_a(x)$ erhält man:

$$m = g'_a(2) = \frac{3}{10} \cdot 2^2 - \frac{6}{5} \cdot 2 + a = a - \frac{6}{5}$$

$$g_a(2) = f(2) + a \cdot 2 = 2a - \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad 2a - \frac{8}{5} = \left(a - \frac{6}{5}\right) \cdot 2 + n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(a - \frac{6}{5}\right)x + \frac{4}{5}$$

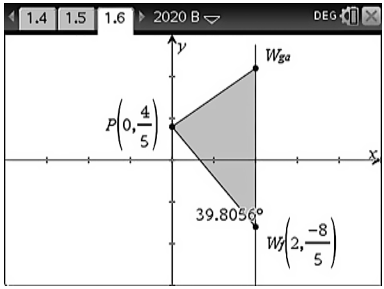
Der Vergleich der beiden Tangentengleichungen kann wie oben beschrieben erfolgen.

d) $f(2) = \frac{1}{10} \cdot 2^2 \cdot (2-6) = -\frac{8}{5}$; $\quad g_a(2) = f(2) + a \cdot 2 = 2a - \frac{8}{5}$

Koordinaten:

$P\left(0 \,\middle|\, \frac{4}{5}\right)$, $W_f\left(2 \,\middle|\, -\frac{8}{5}\right)$ und $W_{g_a}\left(2 \,\middle|\, 2a - \frac{8}{5}\right)$

Die Punkte W_f und W_{g_a} liegen auf ein und derselben Geraden $x = 2$, der Senkrechten zur x-Achse bei $x = 2$.



Die Punkte P und W_f liegen eindeutig fest, während der Punkt W_{g_a} jeden Punkt auf der Senkrechten $x = 2$ annehmen kann, mit Ausnahme des Punktes W_f, weil an dieser Stelle $a = 0$ sein müsste, was in der Aufgabenstellung ausgeschlossen wurde.

Das Dreieck $PW_fW_{g_a}$ kann nur am Eckpunkt P oder am Eckpunkt W_{g_a} einen rechten Innenwinkel haben.

Am Eckpunkt W_f ist der Winkel α zwischen den Geraden $x = 2$ und $g(W_fP)$ unabhängig von a ein spitzer Winkel:

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{\frac{4}{5} - \left(-\frac{8}{5}\right)} = \frac{10}{12} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 39{,}8° \text{ (muss nicht berechnet werden)}$$

Am Eckpunkt W_{g_a} liegt genau dann ein rechter Innenwinkel vor, wenn P und W_{g_a} auf gleicher Höhe über der x-Achse liegen, ihre y-Werte also gleich sind. Damit muss gelten:

$$2a - \frac{8}{5} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{6}{5}$$

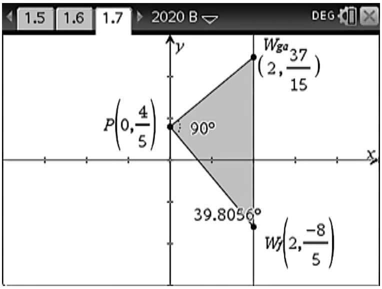
Bei P liegt genau dann ein rechter Winkel vor, wenn die Vektoren $\overrightarrow{PW_{g_a}}$ und $\overrightarrow{PW_f}$ aufeinander senkrecht stehen. Das ist genau dann der Fall, wenn das Skalarprodukt dieser Vektoren null ist:

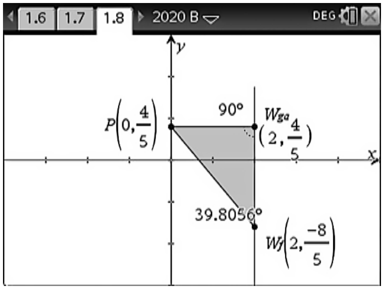
$$\overrightarrow{PW_{g_a}} \circ \overrightarrow{PW_f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a - \frac{8}{5} - \frac{4}{5} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{8}{5} - \frac{4}{5} \end{pmatrix} = 4 - \frac{24}{5}a + \frac{144}{25} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{61}{30}$$

Es gibt genau zwei Werte für a, für die das Dreieck $PW_fW_{g_a}$ rechtwinklig ist:

$$\underline{\underline{a = \frac{6}{5}}} \text{ und } \underline{\underline{a = \frac{61}{30}}}$$

Alternative Lösung 1: grafische Lösung durch Messung der Innenwinkel
(auch zur Selbstkontrolle geeignet)





Alternative Lösung 2: Satz des Pythagoras verwenden
Bei P liegt genau dann ein rechter Winkel vor, wenn der Satz des Pythagoras erfüllt ist:

$$|\overline{W_f W_{g_a}}|^2 = |\overline{PW_f}|^2 + |\overline{PW_{g_a}}|^2$$

$$\left(2a - \frac{8}{5} - \left(-\frac{8}{5}\right)\right)^2 = 2^2 + \left(-\frac{12}{5}\right)^2 + 2^2 + \left(2a - \frac{12}{5}\right)^2$$

$$4a^2 = 4 + \frac{144}{25} + 4 + 4a^2 - \frac{48}{5}a + \frac{144}{25}$$

$$\frac{48}{5}a = \frac{488}{25}$$

$$a = \frac{61}{30}$$

Alternative Lösung 3: Aus der Teilaufgabe 1 c ist bekannt, dass die Tangenten an den Graphen von f und die Graphen von g_a den Punkt P gemeinsam haben. Die Tangenten stehen senkrecht aufeinander, wenn das Produkt ihrer Anstiege den Wert –1 hat:
$m_f \cdot m_{g_a} = -1$

Die Anstiege entsprechen den Werten der 1. Ableitung an der Stelle $x = 2$, also muss gelten:

$$f'(2) \cdot g_a'(2) = -1$$

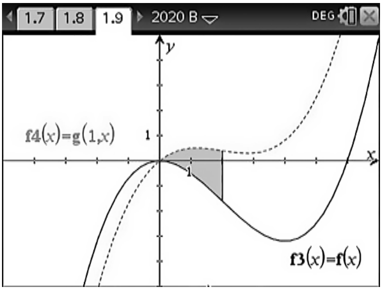
$$\left(\frac{3}{10} \cdot 2^2 - \frac{6}{5} \cdot 2\right) \cdot \left(\frac{3}{10} \cdot 2^2 - \frac{6}{5} \cdot 2 + a\right) = -1$$

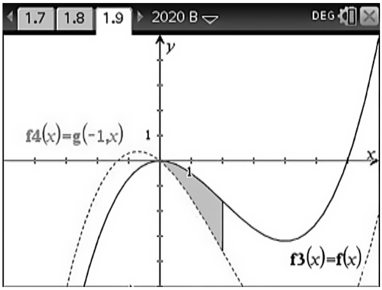
$$\left(-\frac{6}{5}\right) \cdot \left(-\frac{6}{5} + a\right) = -1$$

$$a = \frac{61}{30}$$

e) Da sich die Funktionswerte von f(x) und $g_a(x)$ nur um den Summanden $a \cdot x$ unterscheiden, folgt für $x > 0$:
Für $a < 0$ liegt der Graph von $g_a(x)$ im I. Quadranten unterhalb des Graphen von f(x).
Für $a > 0$ liegt der Graph von $g_a(x)$ im I. Quadranten oberhalb des Graphen von f(x).

Beim Ansatz zur Flächenberechnung mit dem bestimmten Integral muss dieser Umstand berücksichtigt werden.





Für $x > 0$ und $a < 0$ ist dann die Lösung für a über den Ansatz

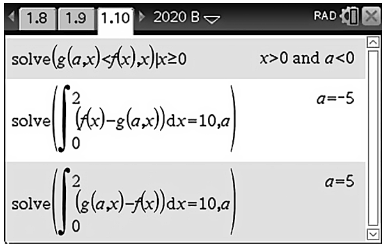
$$\int_0^2 \left(f(x) - g_a(x)\right) dx = 10$$

zu berechnen.

Für $x > 0$ und $a > 0$ muss der Ansatz

$$\int_0^2 \left(g_a(x) - f(x)\right) dx = 10$$

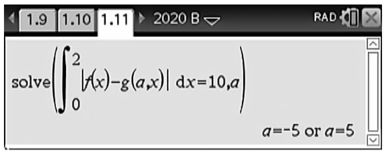
gewählt werden.



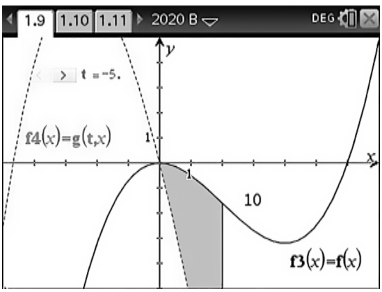
Ergebnis: Der Flächeninhalt hat den Wert 10 FE für $\underline{\underline{a = -5}}$ und für $\underline{\underline{a = 5}}$.

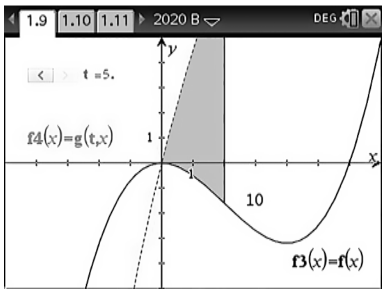
Alternativer Lösungsweg 1: Der Ansatz kann mit dem Betrag der Differenz von f(x) und $g_a(x)$ erfolgen:

$$\int_0^2 \left|f(x) - g_a(x)\right| dx = 10$$



Alternativer Lösungsweg 2: Der verwendete Operator lässt auch eine grafische Bestimmung der Lösung zu. Dazu richtet man für den Parameter a einen Schieberegler ein. Der Schieberegler sollte hier aber mit einer anderen Variablen benannt werden, z. B. t. Mittels <Graph analysieren> und <Begrenzter Bereich> kann man den Flächeninhalt anzeigen lassen und t solange verändern, bis der Wert 10 FE angezeigt wird.





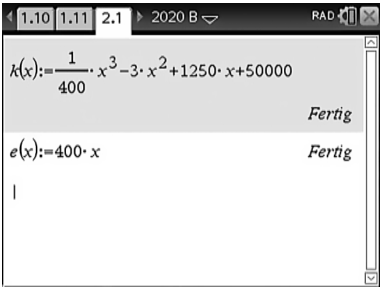
Hinweis: Die Lösung ist auch leicht zu finden, ohne ein CAS zu verwenden.

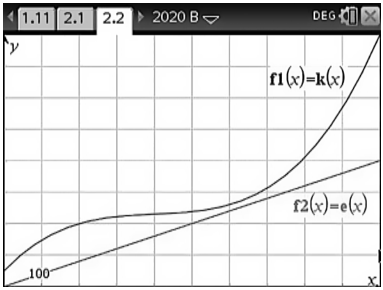
$$\int_0^2 |f(x) - g_a(x)|\,dx = \int_0^2 |a \cdot x|\,dx = 10$$

Wegen $x \geq 0$ ist das gleichwertig mit:

$$|a| \cdot \int_0^2 x\,dx = 10 \quad \Rightarrow \quad |a| \cdot 2 = 10 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 5$$

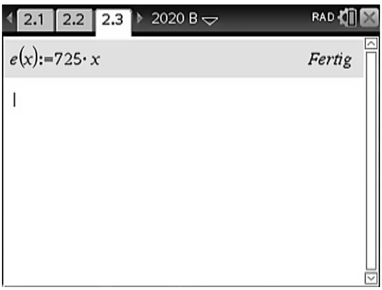
2. a) Die Funktionen k und e werden im CAS definiert und die Graphen dargestellt.

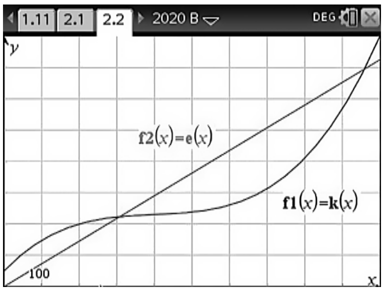




Da die Kosten im gesamten zu untersuchenden Intervall größer als die Einnahmen sind, ist das Unternehmen auf diese Art nicht rentabel, es macht in jedem Fall Verlust.

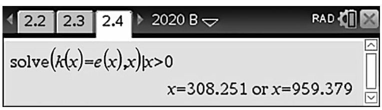
b) Die Funktion e wird neu definiert.





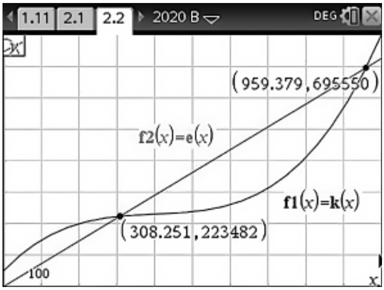
Aus dem Graphen ist ersichtlich, dass im Bereich zwischen den beiden Schnittpunkten im I. Quadranten Gewinn erwirtschaftet werden kann, denn dort ist $e(x) > k(x)$.

Bestimmung der Schnittpunkte durch Lösen der Gleichung $k(x) = e(x)$ liefert die beiden x-Werte im I. Quadranten mit:
$x_1 \approx 308{,}251$ bzw. $x_2 \approx 959{,}379$

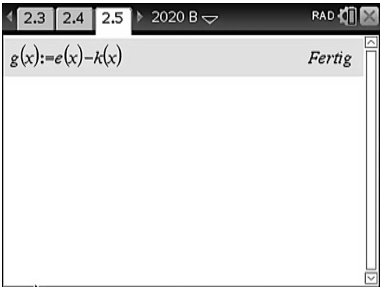


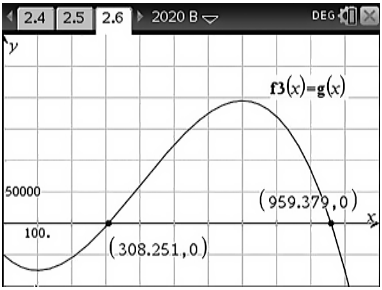
Bei Produktion und Verkauf von monatlich mindestens 309 und höchstens 959 E-Scooter kann Gewinn erwirtschaftet werden.

Alternative 1: grafische Lösung



Alternative 2: Die Gewinnfunktion wird mit $g(x) = e(x) - k(x)$ definiert. Durch Bestimmung der Nullstellen der Gewinnfunktion im I. Quadranten erhält man ebenfalls den gesuchten Bereich.





Ableitungsfunktionen

$g(x) = -\frac{1}{400}x^3 + 3x^2 - 525x - 50\,000,\ x \in \mathbb{R}$

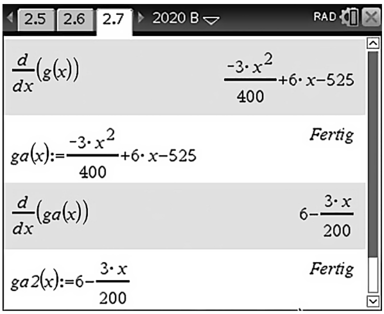
(gespeichert unter g(x))

$g'(x) = -\frac{3}{400}x^2 + 6x - 525$

(gespeichert unter ga(x))

$g''(x) = 6 - \frac{3}{200}x$

(gespeichert unter ga2(x))



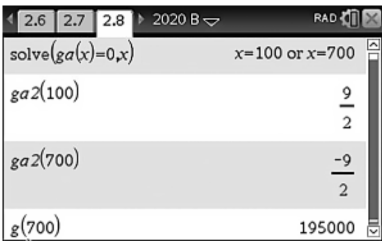
Lokale Extrempunkte

Für die *notwendige Bedingung* werden die Nullstellen von

$g'(x) = -\frac{3}{400}x^2 + 6x - 525$

bestimmt.

Man erhält zwei mögliche Extremstellen:
$x_1 = 100$ und $x_2 = 700$



Für eine hinreichende Bedingung werden die Vorzeichen der 2. Ableitung an diesen Stellen bestimmt:

$g''(100) = \frac{9}{2} > 0 \quad \Rightarrow$ lokales Minimum

$g''(700) = -\frac{9}{2} < 0 \quad \Rightarrow$ lokales Maximum

Nun wird noch der zugehörige Funktionswert an der Maximumstelle berechnet:
$g(700) = 195\,000$

Das Unternehmen kann bei einem Verkauf von 700 E-Scootern einen Maximalgewinn von $\underline{\underline{195\,000\ €}}$ erzielen.

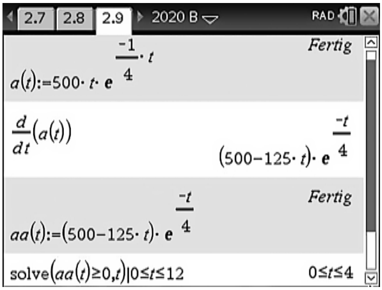
c) Der Absatz nimmt zu, solange für die 1. Ableitung $a'(t) > 0$ gilt.

$a'(t) = (500 - 125t) \cdot e^{-\frac{t}{4}}$

(gespeichert unter aa(t))

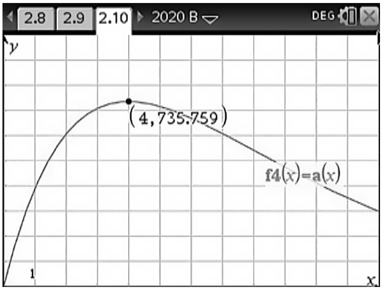
Als Lösung der Ungleichung $a'(t) \geq 0$ erhält man $\underline{\underline{0 \leq t \leq 4}}$.

Der Absatz nimmt demzufolge in den ersten vier Monaten zu.



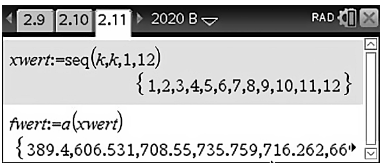
Alternativ: Der Operator „Ermittle“ erlaubt auch eine grafische Lösung.

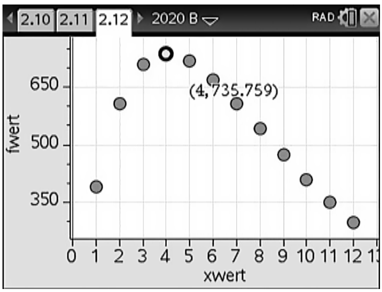
Man erhält als Extremstelle $t = 4$.



Variante: Man kann die Funktion a(t) als diskrete Funktion betrachten.

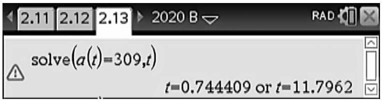
Definition zweier Listen:
Liste xwert für den Monat
Liste fwert für Absatz pro Monat





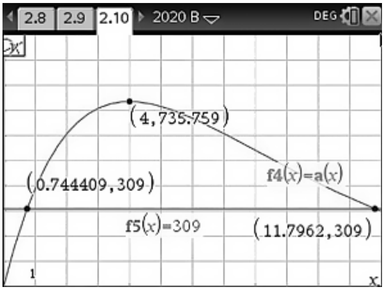
Aus dem Graphen ist sofort ersichtlich, dass der Absatz bis zum 4. Monat ansteigt.

d) Als Lösung der Gleichung $a(t) = 309$ erhält man:
$t_1 \approx 0{,}744$ und $t_2 \approx 11{,}796$



Unter Beachtung des Verlaufs des Graphen von a ergibt sich, dass sich die Produktion ab ungefähr drei Wochen nach Produktionsbeginn bis kurz vor Ende des Produktionsjahres lohnt.

Alternativ: Der Operator „Bestimmen“ erlaubt auch die grafische Lösung.



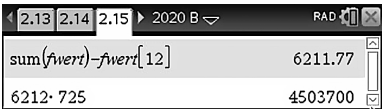
Um die Anzahl der verkauften E-Scooter zu ermitteln, muss die Funktion a im Intervall [0; 11] integriert werden:

$$\int_0^{11} a(t)\,dt \approx 6082{,}16 \approx 6082$$

Unter Berücksichtigung des Preises von 725 € pro E-Scooter ergibt sich ein Gesamterlös innerhalb der ersten 11 Monate von ca. 4,4 Millionen €.

Variante: Bei der Betrachtung als diskrete Funktion lohnt sich die Produktion vom 1. bis zum 11. Monat.
1. Monat $\rightarrow$ 389 E-Scooter
12. Monat $\rightarrow$ 298 E-Scooter

Um die Stückzahl der ersten 11 Monate zu ermitteln, muss man nur diese Werte addieren. Man erhält ca. 6 212 Stück, d. h. einen Gesamterlös von ca. 4,5 Millionen Euro.



Anmerkung: Die Berechnungen können auch in einer Tabellenkalkulation erfolgen.

e) Da a' die Änderung des Absatzes pro Monat beschreibt, ergeben die lokalen Extremstellen von a' die Zeitpunkte der lokalen maximalen/minimalen Änderungen. Da $t = 8$ die einzige lokale Extremstelle ist (Minimum wegen $a'''(8) > 0$), liegt hier der Zeitpunkt der stärksten Abnahme vor.

Da es kein weiteres lokales Extremum von a' gibt, können (bei einer im Intervall durchgängig differenzierbaren Funktion) weitere Extrema nur an den Intervallrändern vorkommen. Da, wie in Teilaufgabe c gezeigt, die Funktion a im Bereich $0 \le t \le 4$ monoton wächst und in diesem Bereich keine weitere Wendestelle vorliegt, kann nur für $t = 0$ ein Maximum für die Änderung vorliegen.