Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2019
Wahlaufgabe C2: Schwerpunkt Stochastik

1. Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff.

1.1 Betrachtet wird zunächst eine Fahrt, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist. Zu Beginn der Fahrt werden drei Fahrgäste zufällig ausgewählt. Diese erhalten jeweils ein Freigetränk.

a) Zwei Drittel der Fahrgäste kommen aus Deutschland, die übrigen aus anderen Ländern.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen. (2 BE)

b) Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Kindern 75 %.
Berechnen Sie, wie viele Kinder an der Fahrt teilnehmen. (3 BE)

1.2 Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden. Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

a) Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei dieser Annahme im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt. (1 BE)

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss. (3 BE)

c) Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, kleiner als ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben.
Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau. (4 BE)

* Das Unternehmen richtet ein Online-Portal zur Reservierung ein und vermutet, dass dadurch der Anteil der Personen mit Reservierung, die zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen, zunehmen könnte. Als Grundlage für die Entscheidung darüber, ob pro Fahrt künftig mehr als 64 Reservierungen angenommen werden, soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt höchstens 10 %.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 Personen mit Reservierung auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

* Die Aufgabenteile 1 d bis 1 f sind ab der Abiturprüfung 2021 nicht mehr relevant.

* Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der Reservierungen pro Fahrt nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

d) Ermitteln Sie für den beschriebenen Test die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)

e) Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse, dass weniger Plätze frei bleiben sollen, oder das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund stand.
Begründen Sie Ihre Entscheidung. (3 BE)

f) Beschreiben Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.
Berechnen Sie die Größe des Fehlers zweiter Art, wenn tatsächlich 15 % der Personen mit Reservierungen zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen. (4 BE)

2. Für jede reelle Zahl k ist eine Gerade g_k gegeben durch

$$g_k\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}).$$

a) Geben Sie den gemeinsamen Punkt aller Geraden g_k an.
Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g_k, die durch den Punkt $P\left(-1 \,\middle|\, \frac{3}{2} \,\middle|\, -1\right)$ verläuft. (3 BE)

b) Geben Sie die Gleichung der Geraden g_k an, die parallel zur y-Achse liegt.
Begründen Sie, dass keine Gerade g_k senkrecht zur xy-Ebene verläuft. (2 BE)

c) Die Geraden g_k schneiden für $k \neq 0$ die xy-Ebene.
Beschreiben Sie die besondere Lage dieser Schnittpunkte. (3 BE)

d) Jede Gerade g_k besitzt für $t = 2$ einen Punkt Q_k.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, auf der alle Punkte Q_k liegen. (2 BE)

e) Weisen Sie nach, dass sich die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \ (s \in \mathbb{R})$ nur mit einer der Geraden g_k schneidet.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und die Größe des Schnittwinkels. (5 BE)

(40 BE)

* Die Aufgabenteile 1 d bis 1 f sind ab der Abiturprüfung 2021 nicht mehr relevant.

Lösungen

1.1 a) **Wahrscheinlichkeit**

Das betrachtete Zufallsexperiment entspricht im Urnenmodell einem „Ziehen ohne Zurücklegen“, daher kann hier nicht mit dem Modell der Binomialverteilung gerechnet werden. Da von den 60 Personen zwei Drittel Deutsche sind, ist die Wahrscheinlichkeit, im „ersten Zug“ einen Deutschen zu erhalten, $\frac{2}{3}$, im „zweiten Zug“ nur noch $\frac{39}{59}$ und im „dritten Zug“ $\frac{38}{58}$.

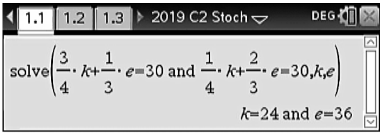
Aufgrund der Pfadregeln ergibt sich:

$$P(A) = \frac{40}{60} \cdot \frac{39}{59} \cdot \frac{38}{58} = \frac{494}{1\,711} \approx \underline{\underline{0{,}2887}}$$

b) **Anzahl der Kinder**

Aus den Angaben zu der Anzahl der Kinder K und der Erwachsenen E im Aufgabentext folgen die beiden Gleichungen:

$$\frac{3}{4}K + \frac{1}{3}E = 30 \quad \text{und} \quad \frac{1}{4}K + \frac{2}{3}E = 30$$



Als Lösung ergibt sich $K = 24$ und $E = 36$.

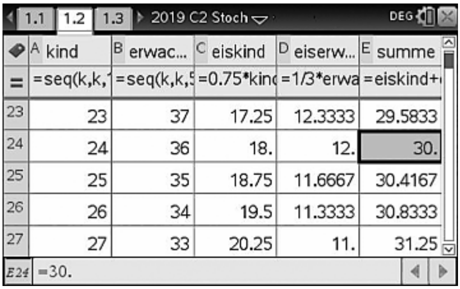
Es sind also $\underline{\underline{24}}$ Kinder an Bord des Schiffes.

Alternative Lösung

Man kann zur Lösung auch eine Tabelle nutzen, in der man alle Möglichkeiten berechnet und zeigen kann, dass es nur die eine Lösung gibt.

Hinweise zur Tabelle: In Spalte A und B stehen jeweils mögliche Anzahlen für Kinder (von 1 bis 59) und Erwachsene (von 59 bis 1).

In den nächsten Spalten werden dann die zugehörigen „Eisesser“ unter den Kindern (Spalte C) und unter den Erwachsenen (Spalte D) gezählt. In Spalte E wird die Summe von Spalte C und Spalte D gebildet. Nur in einer Zeile ist diese Summe 30.


1.1 1.2 1.3 2019 C2 Stoch DEG

	A kind	B erwac...	C eiskind	D eiserw...	E summe
=	=seq(k,k,1	=seq(k,k,5	=0.75*kind	=1/3*erwa	=eiskind+
23	23	37	17.25	12.3333	29.5833
24	24	36	18.	12.	30.
25	25	35	18.75	11.6667	30.4167
26	26	34	19.5	11.3333	30.8333
27	27	33	20.25	11.	31.25

E24 =30.

1.2 a) **Vereinfachung**

Das betrachtete Zufallsexperiment hat zwei Ausgänge:

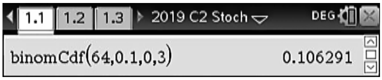
Person mit Reservierung nimmt teil – Person mit Reservierung nimmt nicht teil

Die Anzahl der Versuche ist $n = 64$. Allerdings dürfte nur von einer Unabhängigkeit der einzelnen Versuche bzw. ihrer Trefferwahrscheinlichkeit ausgegangen werden, wenn z. B. nur Einzelreisende reservieren und keine Paare oder Reisegruppen. Davon kann man aber bei einer Ausflugsfahrt keinesfalls ausgehen und damit liegt keine vollständige Unabhängigkeit vor. Deshalb handelt es sich um eine Vereinfachung.

b) **Wahrscheinlichkeit**
Das Ereignis, dass mindestens eine Person abgewiesen wird, ist gleichbedeutend mit:
A := „Höchstens 3 Personen mit Reservierung erscheinen nicht zur Fahrt."

Angaben zur Binomialverteilung für das Ereignis A:
$n = 64;\ p = 0{,}1;\ 0 \le k \le 3$

$$P(A) = \sum_{k=0}^{3} \binom{64}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{64-k} \approx \underline{\underline{0{,}1063}}$$

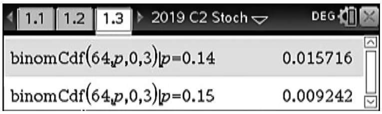


Alternative Lösung über die Betrachtung der Personen, die zur Fahrt erscheinen:
A := „Mindestens 61 Personen mit Reservierung erscheinen zur Fahrt."
$n = 64,\ p = 0{,}9$ und $61 \le k \le 64$

$$P(A) = \sum_{k=61}^{64} \binom{64}{k} \cdot 0{,}9^k \cdot 0{,}1^{64-k} \approx 0{,}1063$$

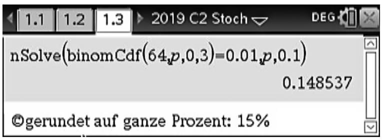
c) **Mindestwahrscheinlichkeit**
Gesucht ist die Trefferwahrscheinlichkeit p, für die bei einer binomialverteilten Zufallsgröße mit dem Parameter $n = 64$ die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, kleiner als 1 % ist, also:

$$P(B) = \sum_{k=0}^{3} \binom{64}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{64-k} < 0{,}01$$



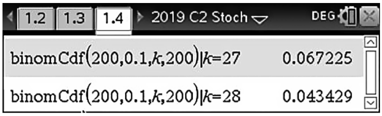
Durch systematisches Probieren erhält man:
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit Reservierung nicht erscheint, müsste mindestens $\underline{\underline{15\ \%}}$ betragen.

Alternative:
Nutzung des Rechnerbefehls nSolve().



d) **Entscheidungsregel**
Es wird ein rechtsseitiger Signifikanztest mit der Nullhypothese H_0: $p \le 0{,}1$ und der Alternativhypothese H_1: $p > 0{,}1$ auf dem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\ \%$ mit einer Stichprobe von $n = 200$ durchgeführt. Da der Verwerfungsbereich die Form $\{k; \ldots; 200\}$ hat und der Erwartungswert $E(X) = 200 \cdot 0{,}1 = 20$ ist, muss beim systematischen Probieren die kleinste ganze Zahl k gefunden werden, für die gilt:
$P(X \ge k) \le 0{,}05$

Man erhält $k = 28$.



Hieraus ergeben sich:
Verwerfungsbereich $\underline{\underline{V = \{28; \ldots, 200\}}}$

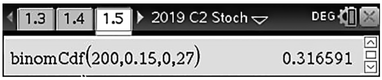
Nichtverwerfungsbereich $\underline{\underline{\overline{V} = \{0; \ldots, 27\}}}$

Die Entscheidungsregel lautet: Erscheinen mindestens 28 Personen mit Reservierung nicht, dann wird die Nullhypothese abgelehnt.

e) **Wahl der Nullhypothese**
Der Fehler 1. Art bedeutet hier im Sachzusammenhang:
Das Stichprobenergebnis liegt im Verwerfungsbereich und es gilt in Wirklichkeit $p \leq 0{,}10$.
Konsequenz des Fehlers 1. Art ist: Das Risiko der Überbuchungen nimmt zu, da wegen des Stichprobenergebnisses mehr Reservierungen angenommen werden, obwohl für die Wahrscheinlichkeit weiterhin $p \leq 0{,}10$ gilt.
Der Fehler 1. Art soll mit dem gewählten Signifikanzniveau jedoch gering gehalten werden. Der Fehler 2. Art, bei dessen Eintreten das Risiko von frei bleibenden Plätzen steigt, kann, abhängig vom tatsächlichen Wert für p, viel größer sein.

Daher stand bei der Wahl der Nullhypothese wohl das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund.

f) **Fehler 2. Art**
Der Fehler 2. Art tritt ein, wenn tatsächlich mehr als 10 % der Personen mit Reservierung nicht erscheinen ($p > 0{,}1$), der durchgeführte Test aber nahelegt, dass höchstens 10 % nicht erscheinen. In diesem Fall werden keine Änderungen hinsichtlich der Zahl der Reservierungen vorgenommen.



F := „Es kommen höchstens 27 Personen mit Reservierung nicht zur Fahrt.“
Angaben zur Binomialverteilung für das Ereignis F:
$n = 200;\ p = 0{,}15;\ 0 \leq k \leq 27$

$$P(F) = \sum_{k=0}^{27} \binom{200}{k} \cdot 0{,}15^k \cdot 0{,}85^{200-k}$$
$$\approx 0{,}317$$

Der Fehler 2. Art beträgt ca. $\underline{\underline{31{,}7\ \%}}$.

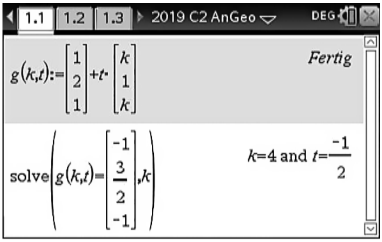
2. a) **Gemeinsamer Punkt**
Weil der Stützvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Geradenschar unabhängig vom Parameter k ist, ist der Punkt $\underline{\underline{P(1|2|1)}}$ gemeinsamer Punkt aller Geraden der Schar.

Gleichung der Geraden
Mittels Punktprobe und dem Ansatz

$$\begin{pmatrix}-1\\ \frac{3}{2}\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}k\\1\\k\end{pmatrix}$$

findet man als Lösung $k=4$ (und $t=-\frac{1}{2}$).
Die gesuchte Gerade ist:

$$\underline{\underline{g_4:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}}}$$



b) **Gleichung der Geraden (parallel zur y-Achse)**

Eine mögliche Gleichung für die y-Achse ist $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}$.

Da für die Parallelität zur y-Achse nur der Richtungsvektor der Geraden g_k von Bedeutung ist, ist die gesuchte Gerade:

$$\underline{\underline{g_0:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}}$$

Keine Gerade senkrecht zur xy-Achse

Der Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ der xy-Ebene steht senkrecht zur Ebene und müsste damit parallel zu einer der Geraden g_k verlaufen. Damit müsste der Normalenvektor als Vielfaches des Richtungsvektors der Geraden darstellbar sein:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=s\cdot\begin{pmatrix}k\\1\\k\end{pmatrix},\ s\neq 0$$

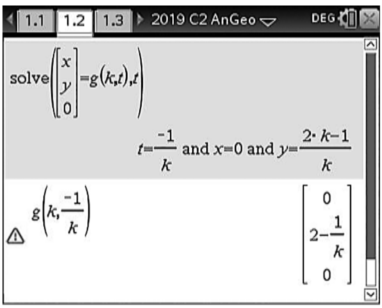
Ohne weitere Rechnung ist zu sehen, dass sich ein Widerspruch ergibt. Damit gibt es keine Gerade g_k, die senkrecht zur xy-Ebene verläuft.

c) **Lage der Schnittpunkte**

Durch Gleichsetzen der allgemeinen Geradengleichung g_k mit der vektoriellen Gleichung für die xy-Ebene $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ lassen sich die Schnittpunkte bestimmen:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}k\\1\\k\end{pmatrix}$$

Man erhält $t=-\frac{1}{k}$ mit $k\neq 0$.
Setzt man in die allgemeine Geradengleichung g_k den ermittelten Wert ein, so erkennt man, dass alle Schnittpunkte auf der y-Achse liegen, da die x-Koordinate und die z-Koordinate jeweils gleich null sind.



d) **Gleichung der Geraden**

Mit $t=2$ ergibt sich für die Koordinaten von Q_k:

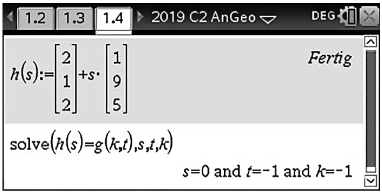
$$\overrightarrow{OQ_k}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}k\\1\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

Alle Punkte Q_k liegen auf der Geraden mit der Gleichung:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ r\in\mathbb{R}$$

e) **Nachweis**

Durch Gleichsetzen der allgemeinen Geradengleichung g_k mit der Gleichung für die Gerade h lässt sich ein lineares Gleichungssystem aufstellen.

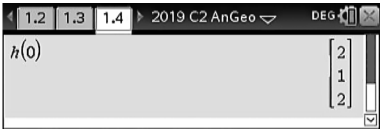


$$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\9\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}k\\1\\k\end{pmatrix}$$

Es gibt nur für $k=-1$ eine eindeutige Lösung, die Gerade h schneidet also ausschließlich die Gerade g_{-1}.

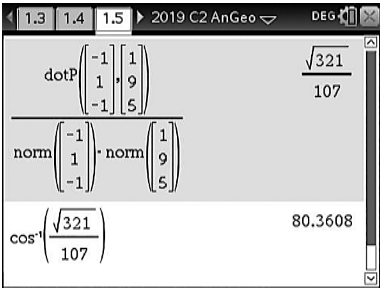
Schnittpunkt und -winkel

Durch Einsetzen von $s=0$ ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunkts S:



$$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\9\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Winkel, die Geraden miteinander bilden, entsprechen den Winkeln, die ihre Richtungsvektoren zueinander haben.



Die Vektoren $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\9\\5\end{pmatrix}$ sind die Richtungsvektoren der Geraden g_{-1} und h.

Es ergibt sich der Schnittwinkel α:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{a}_1\circ\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}$$

$$=\frac{\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\9\\5\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\9\\5\end{pmatrix}\right|}=\frac{\sqrt{321}}{107}$$

Hieraus ergibt sich der Winkel $\alpha\approx\underline{\underline{80{,}36}}$.