Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2020
Wahlaufgabe C1: Schwerpunkt Geometrie

1. In Apolda wurde 2009 eine Schach-Skulptur mit Figuren im Bauhausstil nach Entwürfen von Prof. Josef Hartwig aus dem Jahr 1923 auf einer Rasenfläche aufgestellt. Nur eine Seitenfläche der würfelförmigen Skulptur ist vollständig sichtbar.

Eine Schülergruppe plant für eine Rasenfläche auf dem Schulgelände eine ähnliche Skulptur. Mit dynamischer Geometriesoftware wird ein Würfel ABCDEFGH mit $A(-1|4|-5)$, $E(1|1|1)$, $F(4|7|3)$, $G(-2|9|6)$ und $H(-5|3|4)$ entworfen.
Die xy-Ebene stellt die Rasenfläche dar.
Eine Längeneinheit entspricht 20 cm in der Wirklichkeit.

a) Vervollständigen Sie die graphische Darstellung des Würfels auf dem Arbeitsblatt.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte B, C und D. (6 BE)

Auf die Fläche, die dem Quadrat EFGH entspricht, soll das Schachbrett ohne Rand aufgezeichnet werden.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Schachbretts in Quadratmeter. (2 BE)

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Fläche mit dem Schachbrett gegenüber der Rasenfläche geneigt ist. (3 BE)

d) Die Skulptur auf dem Schulgelände soll nach dem Eingraben entlang der Rasenkanten mit Aluminiumleisten eingefasst werden.
Beschreiben Sie eine mögliche Vorgehensweise zur Berechnung der Gesamtlänge dieser Einfassung. (3 BE)

e) Ausgehend vom Mittelpunkt des Schachbretts soll die Skulptur senkrecht zur Rasenfläche bis zur gegenüberliegenden Fläche durchbohrt werden.
Zeigen Sie, dass eine durchgeführte Bohrung ca. 1,63 m lang sein würde. (6 BE)

f) Die Schüler planen in der Nähe der Skulptur, einen Baum zu pflanzen.
Der Mindestabstand zur Skulptur soll zwei Meter betragen.
Der Standort des Baums wird durch den Punkt $P(-8|-6|0)$ festgelegt.
Der Baumstamm soll senkrecht auf der Rasenfläche stehen und sein Durchmesser wird vernachlässigt.
Untersuchen Sie, ob für diesen Standort der Mindestabstand des Baumstamms von der Kante der Skulptur, die im Modell $\overline{EH}$ entspricht, gewährleistet ist. (5 BE)

2. Laut einer repräsentativen Umfrage des Meinungsforschungsinstitutes forsa im Juli 2017 sind 52 % aller Deutschen über 18 Jahre für ein Tempolimit von 130 km/h auf Autobahnen.
Daten nach: Repräsentative Umfrage „Auto der Zukunft“ des Meinungsforschungsinstituts forsa im Auftrag von CosmosDirekt (Juli 2017)

Im Rahmen einer Seminarfacharbeit führten Schüler in ihrer Stadt eine Befragung zu diesem Thema durch. Für die Auswertung der Daten soll das Modell der Binomialverteilung unter Verwendung des Ergebnisses der forsa-Umfrage genutzt werden.

a) Geben Sie drei Bedingungen an, die die Schüler bei der Planung der Befragung beachten mussten. (3 BE)

b) Berechnen Sie für die Befragung der Schüler die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse, wenn 200 Deutsche über 18 Jahre zufällig befragt wurden:
A := „Mindestens 90 Befragte sind für das Tempolimit.“
B := „Die Zahl der Befürworter des Tempolimits weicht um höchstens die Standardabweichung vom Erwartungswert ab.“ (5 BE)

c) Ermitteln Sie die Anzahl der Personen, die von den Schülern mindestens befragt werden müssten, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens 100 von ihnen für ein Tempolimit aussprechen. (3 BE)

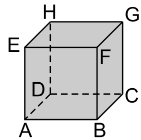
* d) Die Schüler zweifeln an, dass das Umfrageergebnis von 2017 noch immer gültig ist. Sie wollen deshalb auf der Grundlage ihrer Befragung mit 200 Personen einen zweiseitigen Signifikanztest durchführen.
Sie legen vorab fest, dass sie dem Umfrageergebnis nicht mehr glauben, wenn sich weniger als 90 oder mehr als 120 der Befragten für ein Tempolimit aussprechen.
Berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit dieses Tests. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. (4 BE)

(40 BE)

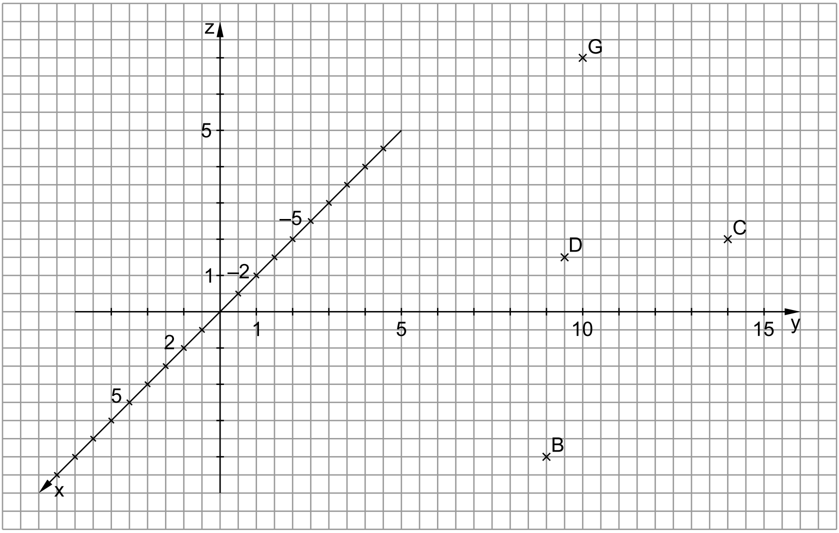
* Der Aufgabenteil d ist ab der Abiturprüfung 2021 nicht mehr relevant.

Lösungen

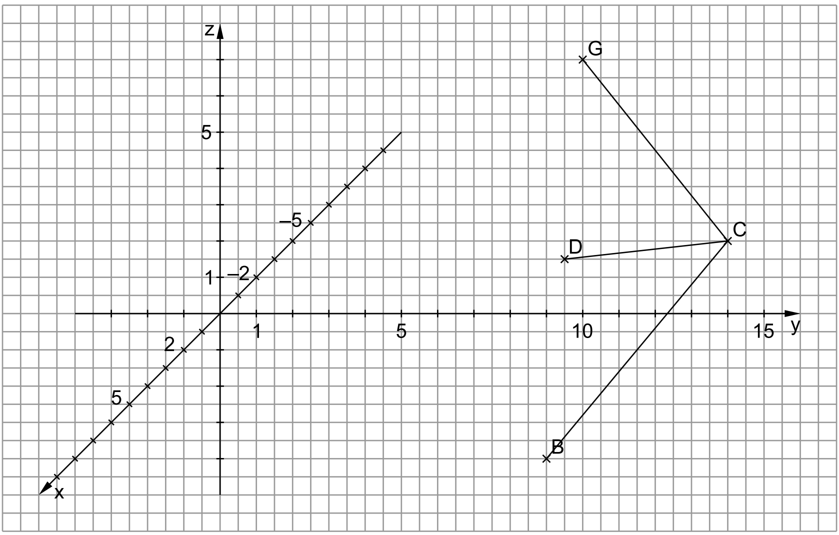
1. a) **Zeichnung durch Parallelverschiebungen geeigneter Kanten**



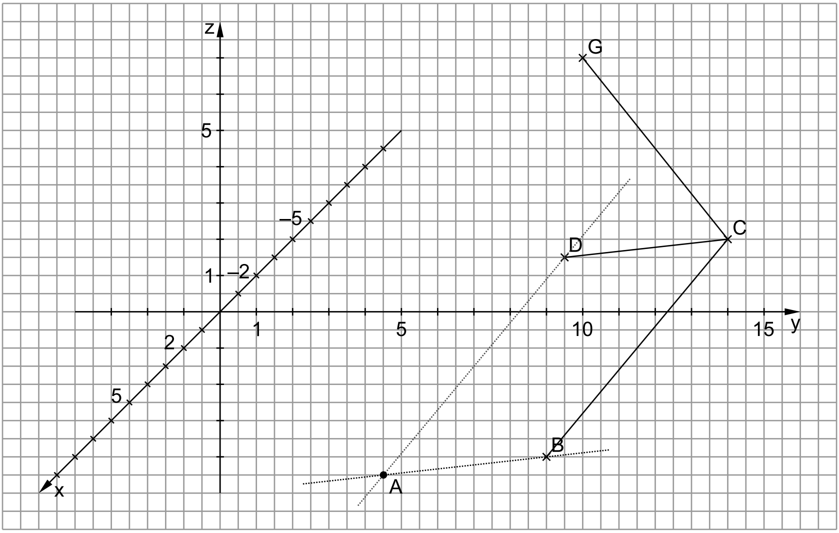
Das ist die durch das Arbeitsblatt gegebene Ausgangssituation:



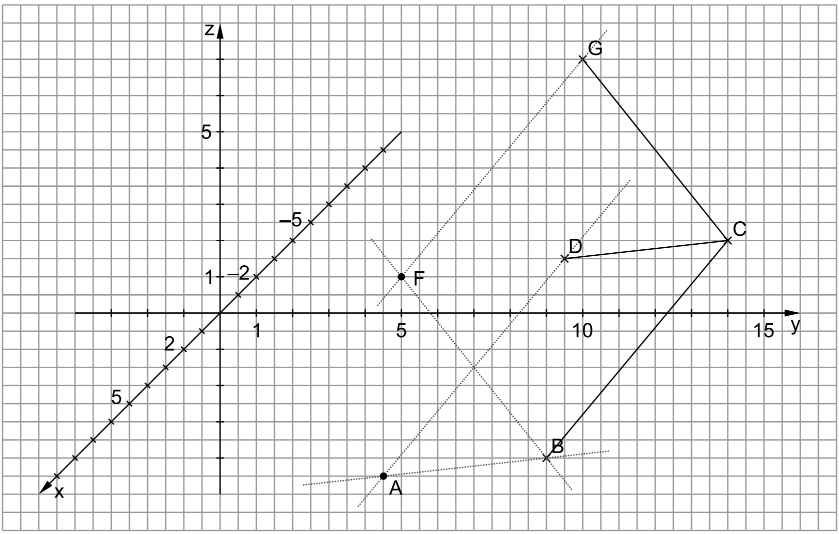
Es lassen sich die Kanten $\overline{BC}$, $\overline{CG}$ und $\overline{CD}$ einzeichnen.



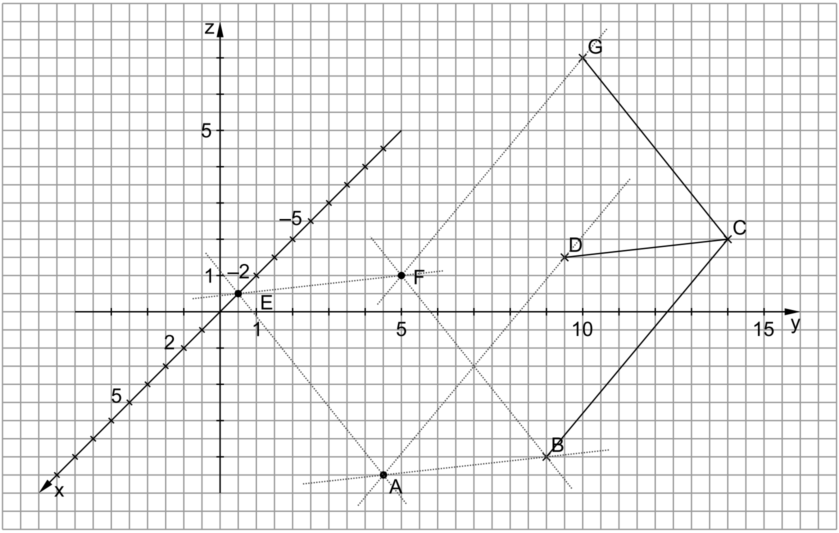
Der **Punkt A** kann durch Parallelverschiebung der Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ in die Punkte D bzw. B konstruiert werden. Oder: Um von B nach A zu kommen, muss man analog vorgehen wie von C nach D, also ein Kästchen nach unten und neun Kästchen nach links.



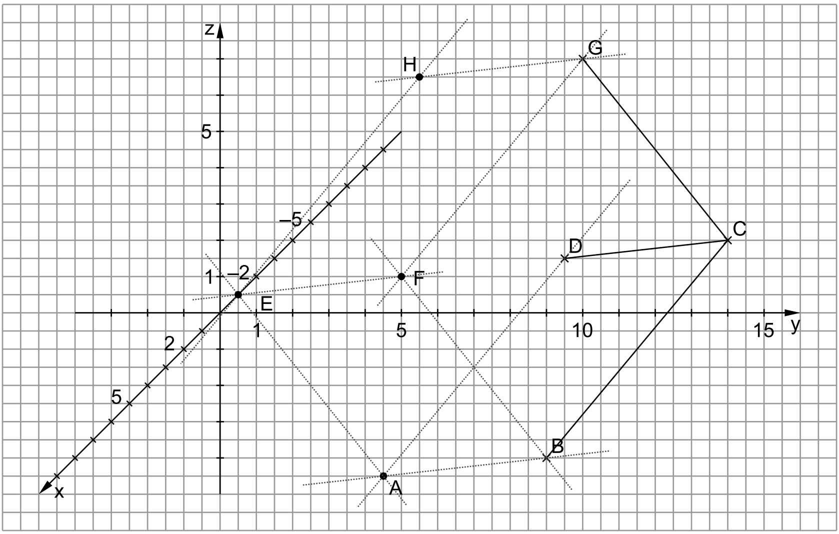
Der **Punkt F** kann durch Parallelverschiebung der Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CG}$ in die Punkte G bzw. B konstruiert werden. Oder: Um von B nach F zu kommen, muss man analog vorgehen wie von C nach G, also zehn Kästchen nach oben und acht Kästchen nach links.



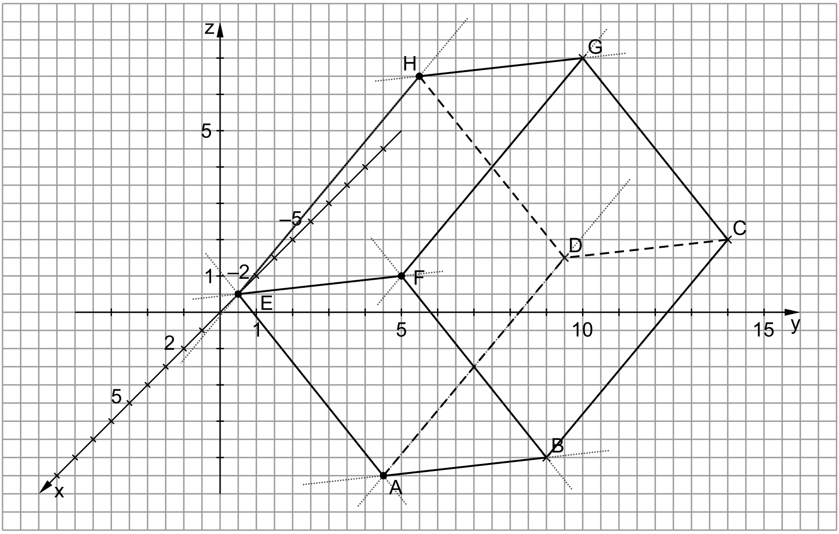
Der **Punkt E** kann durch Parallelverschiebung der Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{AB}$ in die Punkte A bzw. F konstruiert werden. Oder: Um von F nach E zu kommen, muss man analog vorgehen wie von C nach D (oder von B nach A), also ein Kästchen nach unten und neun Kästchen nach links.



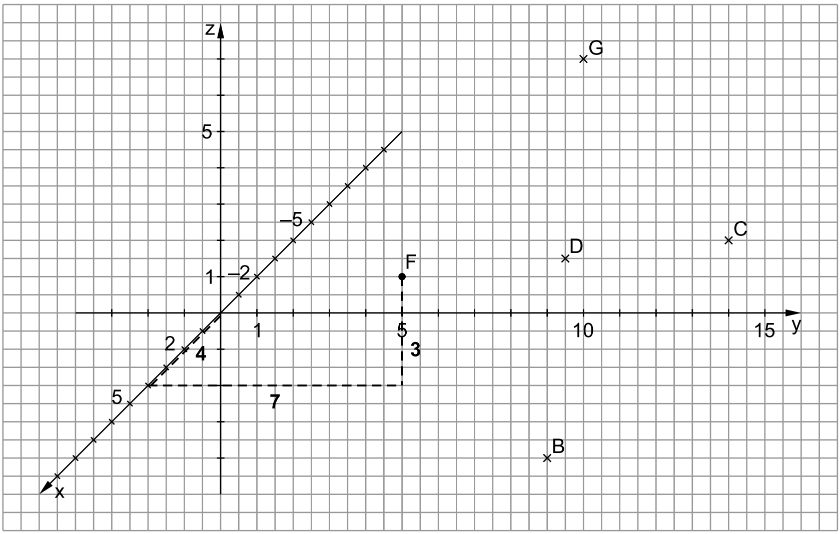
Der **Punkt H** kann durch Parallelverschiebung der Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{AB}$ in die Punkte E bzw. G konstruiert werden. Oder: Um von G nach H zu kommen, muss man analog vorgehen wie von C nach D (oder von B nach A), also ein Kästchen nach unten und neun Kästchen nach links.



Abschließend werden die Kanten kräftig nachgezeichnet und die fehlende Kante $\overline{DH}$ wird ergänzt. Nicht sichtbare Kanten werden gestrichelt gezeichnet.

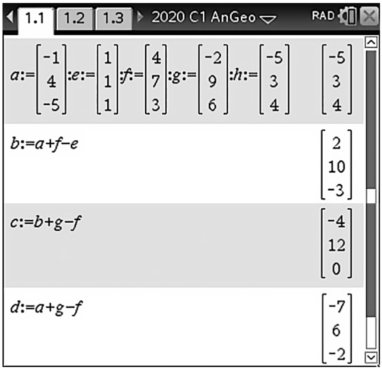


Alternativ: Zeichnung durch Abzählen der Koordinaten
Aus Platzgründen wird nur das Vorgehen beim Eintragen des Punktes F(4 | 7 | 3) veranschaulicht. Man geht vom Ursprung vier Einheiten in positive x-Richtung, dann sieben Einheiten nach rechts in y-Richtung und dann drei Einheiten nach oben in z-Richtung.



Berechnung der Punktkoordinaten

Die Ortsvektoren der gegebenen Punkte werden definiert und die Koordinaten der gesuchten Punkte berechnet:

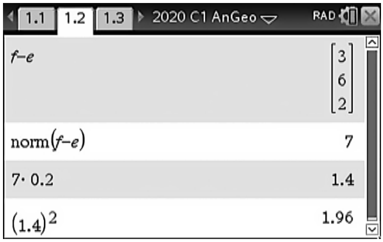


$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{EF} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{FG} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FG} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

b) Mithilfe der Ortsvektoren der Punkte E und F wird die Länge des Vektors $\overrightarrow{EF}$ berechnet:

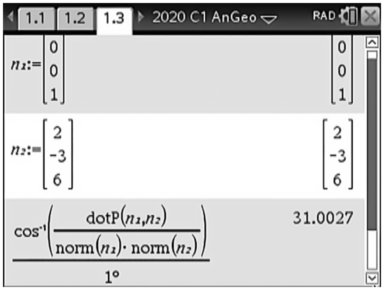


$$|\overrightarrow{EF}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+6^2+2^2} = 7 \text{ LE}$$

Da eine Längeneinheit 20 cm in der Wirklichkeit entspricht, besitzt die Kante $\overline{EF}$ eine Länge von $7 \cdot 0{,}2 \text{ m} = 1{,}4 \text{ m}$.

Der Flächeninhalt des Quadrates EFGH ist $(1{,}4 \text{ m})^2 = \underline{\underline{1{,}96 \text{ m}^2}}$.

c) Die xy-Ebene hat den Normalenvektor:



$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als Normalenvektor der Ebene EFGH kann eine der zu dieser Ebene senkrechten Kanten des Würfels gewählt werden, z. B.:

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ lässt sich berechnen über die Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}\right|} = \frac{6}{1 \cdot 7}$$

$\underline{\underline{\alpha \approx 31{,}0°}}$

d) Man könnte z. B. die Spurpunkte der Seitenkanten des Würfels mit der xy-Ebene berechnen und deren Abstände entlang ein und derselben Würfelseite bestimmen. Die Summe dieser Abstände entspricht der Gesamtlänge der Einfassung.

Alternative: Man nimmt einen Zollstock und misst diese Längen und berechnet deren Summe.

e) Mittelpunkt M des Schachbretts:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 5 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$M\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, 5 \,\middle|\, \frac{7}{2}\right)$$

Die Senkrechte zur Rasenfläche durch den Punkt M hat die Gleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 5 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Senkrechten wird im CAS-Rechner unter $s_1(t)$ gespeichert.

Die Ebene ABCD kann in der Normalenform angegeben werden, z. B. durch:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

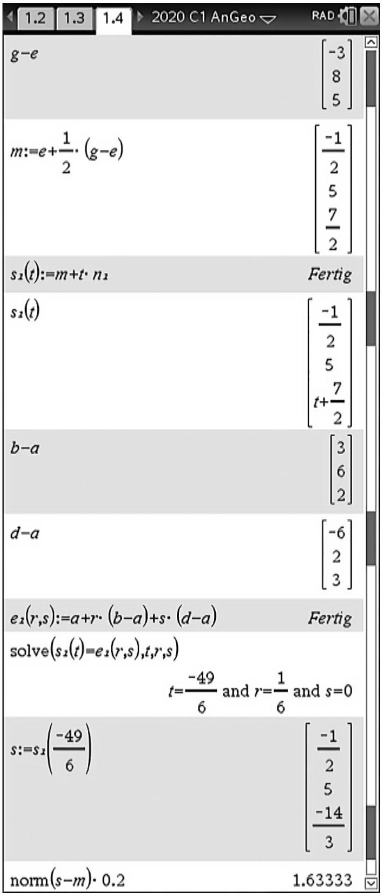
Die Gleichung der Ebene ABCD wird im CAS-Rechner unter $e_1(r, s)$ gespeichert.

Um den Durchstoßpunkt S der Senkrechten zur Ebene ABCD zu berechnen, wird das Gleichungssystem $s_1(t) = e_1(r, s)$ mit dem CAS gelöst. Es ergeben sich die Lösungen:

$$t = -\frac{49}{6}; \quad r = \frac{1}{6}; \quad s = 0$$

Mit $s_1\left(-\frac{49}{6}\right)$ erhält man:

$$S\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, 5 \,\middle|\, -\frac{14}{3}\right)$$



Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{MS}$ ergibt unter Beachtung des geforderten Maßstabes einen Wert von:

$$\left|\overrightarrow{MS}\right| \cdot 0{,}2\ \text{m} \approx 1{,}63\ \text{m}$$

Dies entspricht dem in der Aufgabenstellung gegebenen Wert.

f) Die Gerade, die den Baumstamm mathematisch modelliert, lässt sich beschreiben durch:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sie wird unter der Variablen $g_1(r)$ gespeichert.

Die Gerade, auf der die Kante $\overline{EH}$ liegt, lässt sich beschreiben durch:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OE} + t \cdot \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sie wird unter der Variablen $g_2(t)$ gespeichert.

Die Geraden g_1 und g_2 sind tatsächlich windschief, denn das Gleichungssystem $g_1(r) = g_2(t)$ hat keine Lösung und die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind nicht parallel zueinander.

Um den Abstand von g_1 und g_2 zu berechnen, sind ein Punkt K auf g_1 und ein Punkt L auf g_2 gesucht, sodass $\overrightarrow{KL}$ sowohl senkrecht zu g_1 als auch senkrecht zu g_2 verläuft. Für diesen Fall ist der Betrag von $\overrightarrow{KL}$ minimal. Dieser Wert repräsentiert den Abstand von g_1 und g_2.

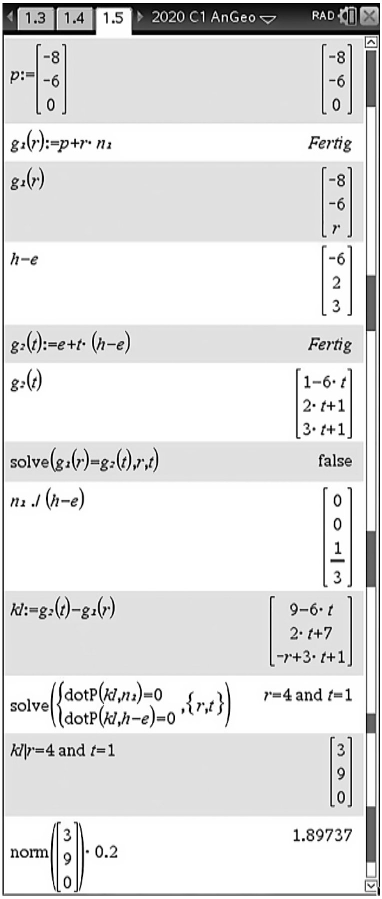
$$\overrightarrow{KL} = g_2(t) - g_1(r) = \begin{pmatrix} 9-6t \\ 7+2t \\ 1-r+3t \end{pmatrix}$$

Orthogonalitätsbedingungen:

$\overrightarrow{KL} \circ \vec{n}_1 = 0$ und $\overrightarrow{KL} \circ \overrightarrow{EH} = 0$

Dieses Gleichungssystem führt auf $r = 4$ und $t = 1$. Damit ist der Vektor:

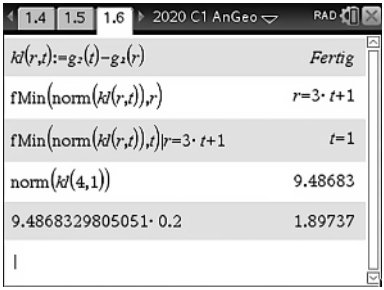
$$\overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Der Betrag von $\overrightarrow{KL}$ ist ca. 1,9 m (unter Beachtung des gegebenen Längenmaßstabes). Der Mindestabstand von 2 m wird nicht eingehalten.

Alternativer Lösungsweg 1: **Lösung als Extremwertaufgabe**

Der Vektor $\overrightarrow{KL}(r,t)$ verbindet einen beliebigen Punkt K der Geraden $g_1(r)$ mit einem beliebigen Punkt L der Geraden $g_2(t)$.



Gesucht sind zunächst die Parameter r und t, für die der Betrag des Vektors $\overrightarrow{KL}$ ein Minimum hat.

Die zugehörigen Werte sind $t=1$ und $r=4$.

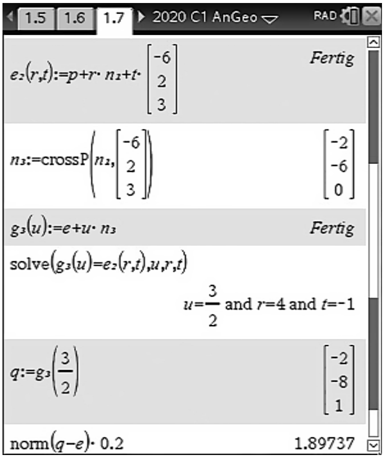
Damit ist $\overrightarrow{KL}(4,1) \approx 9{,}49$ LE.

Maßstab berücksichtigen:
$9{,}49 \cdot 0{,}2\text{ m} \approx 1{,}90\text{ m} < 2{,}00\text{ m}$

Alternativer Lösungsweg 2: **Lösung mit einer Hilfsebene**

Mit den Richtungsvektoren der Geraden g_1 und g_2 sowie dem festen Punkt P von g_1 als Aufpunkt wird eine Hilfsebene e_2 konstruiert:

$$e_2(r,t) = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Diese Hilfsebene ist nach Konstruktion parallel zu g_2.

Nun kann der Abstand des festen Punktes von g_2 zur Hilfsebene bestimmt werden.

Dazu wird der Normalenvektor $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Hilfsebene als Richtungsvektor einer Lotgeraden g_3 zu e_2 verwendet. Die Lotgerade

$$g_3(u)\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

enthält als Aufpunkt den Punkt E von g_2 und schneidet die Hilfsebene in einem Punkt Q. Der Punkt Q ergibt sich aus den Lösungsparametern des Gleichungssystems:

$g_3(u) = e_2(r,t)$

Es ist:

$$u = \frac{3}{2};\quad r = 4;\quad t = -1$$

$$g_3\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{EQ}$ gibt unter Beachtung des Längenmaßstabes den gesuchten Abstand an. Er ist ca. 10 cm kleiner als der geforderte Mindestabstand.

2. a) Bei der Planung der Befragung müssten z. B. folgende Bedingungen berücksichtigt werden:

Die für die Stichprobe befragten Personen
- müssen deutsche Staatsbürger sein,
- älter als 18 Jahre sein,
- repräsentativ ausgewählt werden,
- trotzdem zufällig ausgewählt werden.

Die Stichprobe muss genügend groß sein.

Die Befragung muss so durch durchgeführt werden, dass es genau zwei Antwortmöglichkeiten (Treffer/Niete) bezüglich eines Tempolimits von 130 km/h auf Autobahnen gibt.

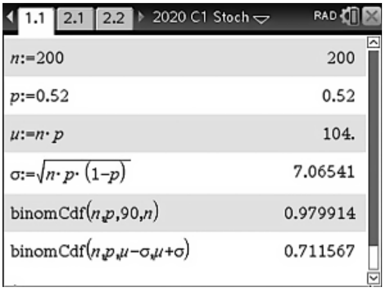
b) Betrachtet wird eine Stichprobe für die binomialverteilte Zufallsgröße:
X: „Die befragte Person ist für das Tempolimit."

Der Umfang der Stichprobe ist $n = 200$.

Die Wahrscheinlichkeit der betrachteten binomialverteilten Zufallsgröße X ist $p = 0{,}52$.

Der Erwartungswert von X ist:
$\mu = 200 \cdot 0{,}52 = 104$

Die Standardabweichung von X ist:
$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}48} \approx 7{,}07$

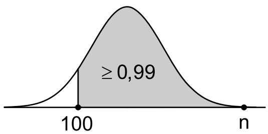


Damit folgt:
$P(A) = P(X \geq 90) \approx \underline{\underline{0{,}9799}}$

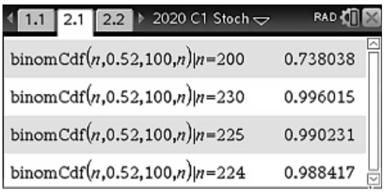
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(97 \leq X \leq 111) \approx \underline{\underline{0{,}7116}}$

c) Gesucht ist der Stichprobenumfang n, sodass gilt:
$P(Z \geq 100) \geq 0{,}99$

Dabei muss Z: „Die befragte Person ist für das Tempolimit." eine binomialverteilte Zufallsgröße mit unbekanntem n und $p = 0{,}52$ sein.



Für verschiedene Werte von n werden die Wahrscheinlichkeiten für $P(Z \geq 100)$ bestimmt, bis die kleinste Zahl n gefunden ist, für die erstmals $P(Z \geq 100) \geq 0{,}99$ gilt.

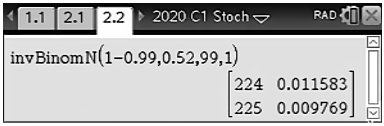


Als Lösung erhält man $\underline{\underline{n = 225}}$. Es müssen also mindestens 225 Personen befragt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens 100 von ihnen für ein Tempolimit stimmen.

Alternativer Lösungsweg 1:
Man verwendet die Anweisung zur Bestimmung von n über die inverse Binomialverteilung invBinomN(p*,p,k,1). Sie gibt sowohl den kleinsten Wert für k zurück, für den die von 0 bis k kumulierte Wahrscheinlichkeit p* bereits größer als der gegebene Wert für p ist, als auch den größten Wert für k, für den $P(X \leq k) \leq p$ ist.

Außerdem werden die zugehörigen aufsummierten Wahrscheinlichkeiten angezeigt:
$P(X_{224;\,0,52} \leq 99) \approx 0{,}0116$ und

$P(X_{225;\,0,52} \leq 99) \approx 0{,}0098$



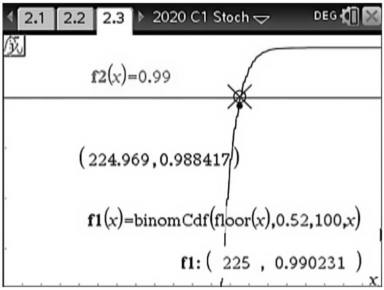
Für die Lösung der gegebenen Aufgabe muss also mit der Gegenwahrscheinlichkeit $p^* = 1 - 0{,}99$ und mit $k = 100 - 1 = 99$ gearbeitet werden.

Für $n = 224$ ist: $P(Z < 100) \approx 0{,}0116 \quad \Rightarrow \quad P(Z \geq 100) < 1 - 0{,}0116 = 0{,}9884 < 0{,}99$

Für $n = 225$ ist: $P(Z < 100) \approx 0{,}0098 \quad \Rightarrow \quad P(Z \geq 100) < 1 - 0{,}0098 = 0{,}9902 > 0{,}99$

Alternativer Lösungsweg 2:
Man verwendet die grafische Darstellung der Summenfunktion und bringt sie zum Schnitt mit der angegebenen minimalen Gesamtwahrscheinlichkeit 0,99.
Die Koordinaten des Schnittpunktes lassen sich z. B. mit dem Spurmodus ermitteln.

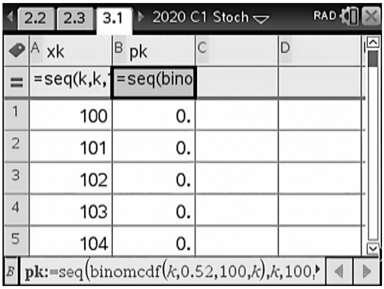
floor(x) ordnet der reellen Zahl x die nächstliegende nicht größere ganze Zahl zu. Die Verwendung dieses Befehls ist hier notwendig, damit die Anweisung binomCdf funktioniert.



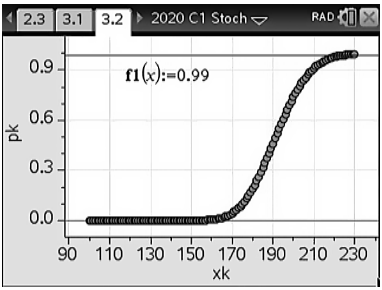
Alternativer Lösungsweg 3:
Ein zu einer grafischen Lösung ähnlicher Weg ist durch die Verwendung der Tabellenkalkulation gegeben.

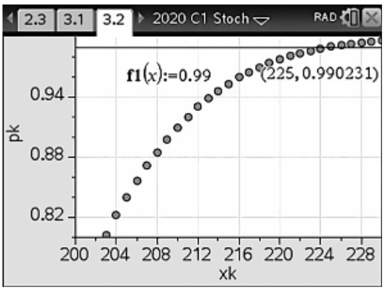
In der Spalte A werden die natürlichen Zahlen von 100 bis z. B. 230 mit der Anweisung = seq(k,k,100,230) erzeugt.

In der Spalte B werden die Summenwahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung von 100 bis k berechnet, wobei k von 100 bis 230 läuft: = seq(binomCdf(k,0.52,100,k),k,100,230)



In Data & Statistics werden die Wertepaare grafisch dargestellt. Zusätzlich wird die Funktion $y = 0{,}99$ eingezeichnet. Um besser entscheiden zu können, für welches Wertepaar erstmals der y-Wert 0,99 erreicht oder überschritten wird, kann die Fenstereinstellung angepasst werden.





d) Die Irrtumswahrscheinlichkeit beschreibt die Wahrscheinlichkeit, eine Nullhypothese aufgrund des Stichprobenergebnisses abzulehnen, obwohl die Nullhypothese in Wirklichkeit stimmt.

Die Nullhypothese ist in diesem Fall H_0: $p = 0{,}52$, der Stichprobenumfang ist $n = 200$. Der Ablehnungsbereich ist $\{0; 1; \ldots; 89\} \cup \{121; 122; \ldots; 200\}$.

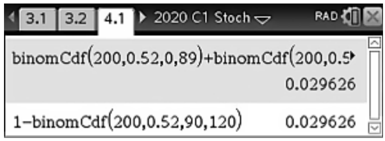
Die Irrtumswahrscheinlichkeit α wird durch

$\alpha = P(0 \leq X \leq 89) + P(121 \leq X \leq 200)$

bzw. über die Gegenwahrscheinlichkeit

$\alpha = 1 - P(90 \leq X \leq 120)$

berechnet. Dabei ist die Zufallsgröße X binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}52$.



Ergebnis: $\underline{\underline{\alpha \approx 0{,}0296}}$

Interpretation: Die Irrtumswahrscheinlichkeit von ca. 3 % bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Schüler die Hypothese, dass 52 % der Befragten für das Tempolimit sind, aufgrund des Stichprobenergebnisses mit dieser Wahrscheinlichkeit von ca. 3 % ablehnen, obwohl dieser Wert in Wirklichkeit stimmt.