Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2019
Pflichtaufgabe Teil B: Analysis

Gegeben sind eine Funktion g durch $g(x)=\frac{1}{2e^2}\cdot x^2$ und für jede reelle Zahl t, $t>0$, eine Funktion f_t durch $f_t(x)=\frac{x^2}{2}\cdot e^{-\frac{x}{t}}$ jeweils mit $x\in\mathbb{R}$.

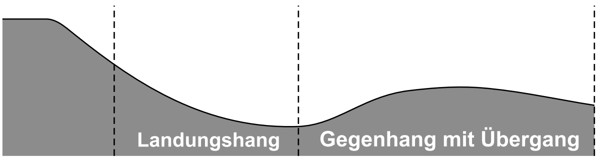
a) Untersuchen Sie die Graphen von f_t auf lokale Extrempunkte.
Zeigen Sie, dass alle Extrempunkte der Graphen von f_t auf dem Graphen von g liegen. (7 BE)

b) Die Gerade $y=2$ schneidet die Graphen von f_t.
Bestimmen Sie die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit den Graphen von f_t in Abhängigkeit von t. (4 BE)

c) Die Graphen von f_t und der Graph von g begrenzen jeweils eine Fläche mit dem Flächeninhalt A_t vollständig.
Ermitteln Sie A_t in Abhängigkeit von t.
Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte bei Verdoppelung von t. (4 BE)

d) Für $t=2$ bilden der Koordinatenursprung sowie die Punkte $P(u\,|\,0)$ und $Q(u\,|\,f_2(u))$ mit $u>0$ ein Dreieck.
Berechnen Sie u so, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal ist.
Geben Sie diesen Flächeninhalt an. (5 BE)

Für den Bau einer Skicrossstrecke wird ein Teil der Profillinie durch die Graphen der Funktion g für $-5\le x\le 0$ als Landungshang nach einem Sprung und der Funktion f_2 für $0\le x\le 8$ als Gegenhang mit dem anschließenden Übergang in eine Steilkurve modelliert. (x, f(x) und g(x) in Metern)



Skizze nicht maßstäblich

e) Begründen Sie, dass der Landungshang knickfrei in den Gegenhang übergeht. (2 BE)

f) Berechnen Sie das größte Gefälle im Landungshang und die größte Steigung im Gegenhang in Prozent. (6 BE)

g) Am Landungshang soll der Landebereich Neigungswinkel von 25° bis 35° gegenüber der Horizontalen annehmen.
Bestimmen Sie das Intervall für x so, dass dieser Landebereich beschrieben wird. (4 BE)

h) Zur Ausleuchtung der Strecke wird an der Stelle, die im Modell $x = 8$ entspricht, ein Mast mit einem Scheinwerfer aufgestellt. Der Scheinwerfer wird zunächst in einer Höhe von zwei Metern über dem Gegenhang montiert und als punktförmige Lichtquelle betrachtet.
Weisen Sie nach, dass der Scheinwerfer in dieser Höhe den tiefsten Punkt des betrachteten Teils der Profillinie nicht ausleuchten kann.
Berechnen Sie die Länge der Strecke, um die der Scheinwerfer mindestens angehoben werden muss, damit ein Lichtstrahl den tiefsten Punkt trifft. (8 BE)

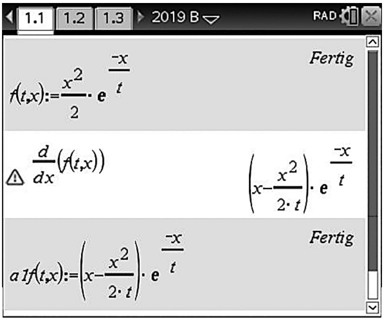
(40 BE)

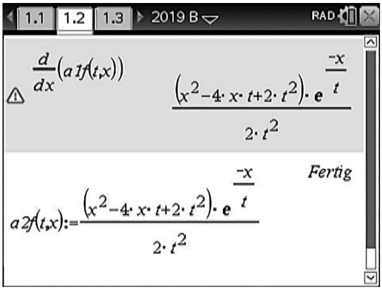
Lösungen

a) **Lokale Extrempunkte**

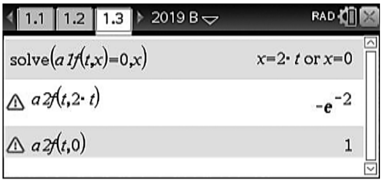
Die Ableitungsfunktionen der Funktionenschar f_t sind:

$$f_t'(x) = \left(x - \frac{x^2}{2t}\right) \cdot e^{-\frac{x}{t}} \text{ und } f_t''(x) = \frac{(x^2 - 4xt + 2t^2)}{2t^2} \cdot e^{-\frac{x}{t}}$$





Für die *notwendige Bedingung* werden die Nullstellen der Ableitungsfunktion f_t' bestimmt.
$x = 2t$ und $x = 0$ kommen als mögliche Extremstellen infrage.
Für eine *hinreichende Bedingung* werden die Vorzeichen der 2. Ableitung an diesen Stellen bestimmt:



$f_t''(2t) = -e^{-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokales Maximum

$f_t''(0) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokales Minimum

Nun werden noch die zugehörigen Funktionswerte berechnet:

$f_t(2t) = 2e^{-2} \cdot t^2$ und $f_t(0) = 0$

Es gibt also einen lokalen Tiefpunkt T sowie einen lokalen Hochpunkt H mit:

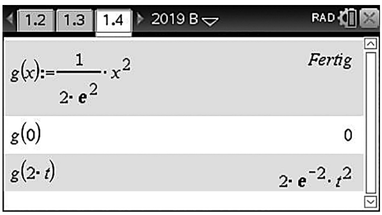
$\underline{\underline{T(0\,|\,0)}}$ und $\underline{\underline{H(2t\,|\,2e^{-2} \cdot t)}}$

Nachweis

Um nachzuweisen, dass alle Extrempunkte von f_t auf dem Graphen von g liegen, setzt man z. B. die gefundenen Extremstellen in g ein:

$g(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(0) = f_t(0)$

$g(2t) = 2e^{-2} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad g(2t) = f_t(2t)$

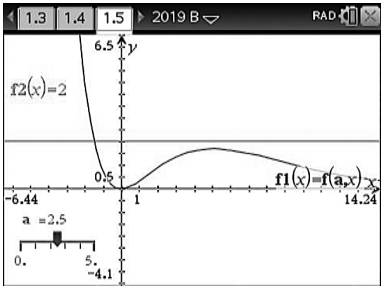


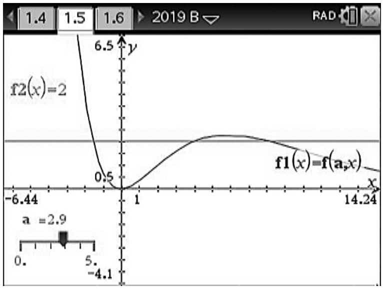
An den Extremstellen von f_t haben die beiden Funktionen g und f_t die gleichen Funktionswerte. Somit liegen alle Extrempunkte von f_t auf dem Graphen von g.

b) **Anzahl der Schnittpunkte**

Mit dem Schieberegler für den Parameter a lassen sich schnell verschiedene Graphen zu f_t erzeugen. Man erkennt, dass für Werte für a unterhalb von ca. 2,5 nur ein Schnittpunkt und für Werte oberhalb von ca. 2,9 drei Schnittpunkte existieren.

Die Vermutung liegt nahe, dass es dazwischen einen Wert geben muss, für den es genau 2 Schnittpunkte gibt. Genau dann, wenn der Funktionswert des Hochpunktes 2 ergibt, existieren nur zwei gemeinsame Punkte.





Dies trifft zu, wenn mit $t > 0$ gilt:

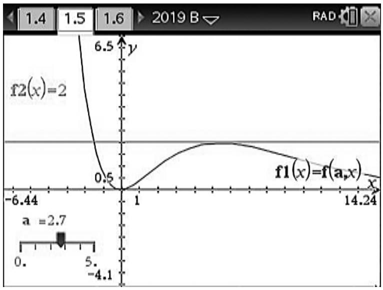
$2e^{-2} \cdot t^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad t = e$

Damit folgt insgesamt:

$$\underline{\underline{t < e \quad \Rightarrow \quad 1\,\text{Schnittpunkt}}}$$

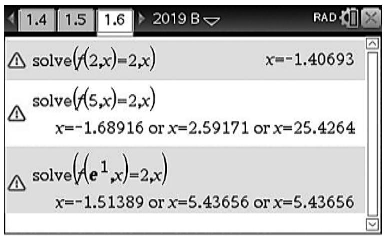
$$\underline{\underline{t = e \quad \Rightarrow \quad 2\,\text{Schnittpunkte}}}$$

$$\underline{\underline{t > e \quad \Rightarrow \quad 3\,\text{Schnittpunkte}}}$$



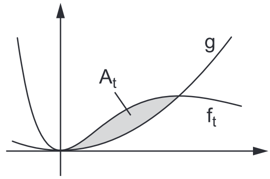
Anmerkung:

Man kann zur Kontrolle die im Grafikfenster ermittelten Werte einsetzen, auch die Vermutung, dass für $t = e$ genau zwei Schnittpunkte existieren, lässt sich so belegen. (Wenn auch der CAS-Rechner hier aufgrund des Näherungsmodus eine Stelle doppelt ausgibt!)



c) **Flächeninhalt**

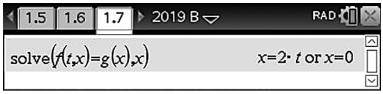
Die nebenstehende Skizze verdeutlicht:
Das Intervall, in dem sich die eingeschlossene Fläche befindet, ist durch die Schnittstellen der Graphen der beiden Funktionen begrenzt.



Mit

$f_t(x) = g(x)$

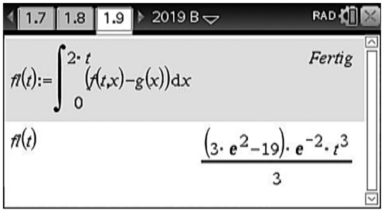
ergeben sich als Schnittstellen $x = 0$ und $x = 2t$.



Anmerkung:
Eigentlich ist mit Blick auf die Teilaufgabe a bereits klar, dass die beiden Schnittpunkte identisch mit den Extrempunkten von f_t sind.

Berechnung der eingeschlossenen Fläche:

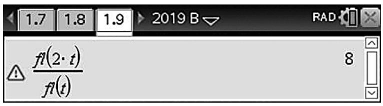
$$A_t = A(t) = \int_0^{2t} (f_t(x) - g(x))\,dx = \underline{\underline{\frac{(3e^2 - 19) \cdot t^3}{3 \cdot e^2}}}$$



Verhältnis bei Verdoppelung

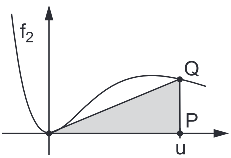
Das gesuchte Verhältnis bestimmt man mit:

$$\frac{A_{2t}}{A_t} = \underline{\underline{8}}$$



d) **Maximaler Flächeninhalt**

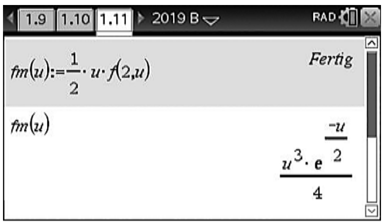
Skizze:



Das Dreieck OPQ ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei P.
Der Flächeninhalt kann berechnet werden durch:

$$A_\Delta(u) = \frac{1}{2} \cdot \overline{OP} \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f_2(u)$$

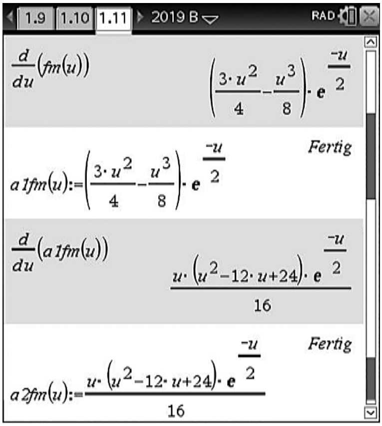
$$A_\Delta(u) = \frac{u^3 \cdot e^{\frac{-u}{2}}}{4}$$



Der größte Flächeninhalt kann bestimmt werden, indem man nach lokalen Maxima sucht. Die 1. und die 2. Ableitungsfunktion werden gebildet:

$$A'_\Delta(u) = \left(\frac{3u^2}{4} - \frac{u^3}{8}\right) \cdot e^{-\frac{u}{2}}$$

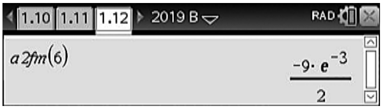
$$A''_\Delta(u) = \frac{u \cdot (u^2 - 12u + 24)}{16} \cdot e^{-\frac{u}{2}}$$



Für die *notwendige Bedingung* werden die Nullstellen von A''_Δ bestimmt:
$u = 0$ und $u = 6$ kommen als mögliche Extremstellen infrage.
Jedoch entfällt $u = 0$, da für diesen Wert die gesuchte Fläche gleich 0 ist.

Für eine *hinreichende Bedingung* wird das Vorzeichen der 2. Ableitung für $u = 6$ bestimmt:

$$A''_\Delta(6) = -\frac{9 \cdot e^{-3}}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

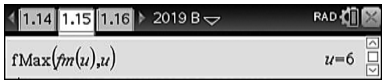


Die maximale Fläche ergibt sich für $u = 6$ zu:

$$A_\Delta(6) = 54 \cdot e^{-3} \approx 2{,}69 \text{ FE}$$

Der maximale Flächeninhalt ergibt sich also für $\underline{\underline{u = 6}}$ und beträgt ca. $\underline{\underline{2{,}69 \text{ FE}}}$.

Variante:
Nutzung des Rechnerbefehls fMax().

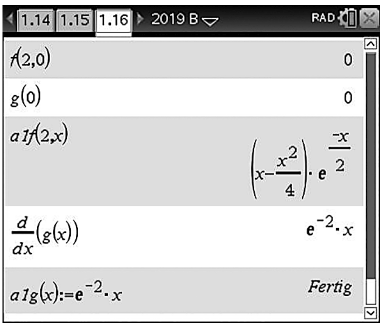


e) **Knickfreier Übergang**
Zunächst werden die Funktionswerte an der Übergangsstelle verglichen:
Es gilt $f_2(0) = 0$ und $g(0) = 0$.

Genauso wird mit den jeweiligen Ableitungsfunktionen vorgegangen. Die 1. Ableitungsfunktionen von f_2 und g berechnen sich zu:

$$f'_2(x) = \left(x - \frac{x^2}{4}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$g'(x) = e^{-2} \cdot x = \frac{1}{e^2} \cdot x$$



Es gilt $f_2'(0) = 0$ und $g'(0) = 0$.

Da sowohl die Funktionswerte von f_2 und g sowie ihrer Ableitungen an der Stelle $x = 0$ übereinstimmen, gehen die Graphen ohne Knick ineinander über.

f) **Größtes Gefälle/größte Steigung**

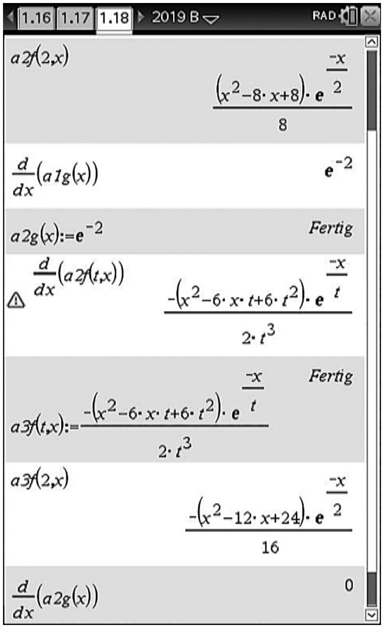
Die 1. Ableitungsfunktionen wurden bereits in der vorigen Teilaufgabe verwendet. Die 2. und 3. Ableitungsfunktionen sind:

$$f_2''(x) = \frac{x^2 - 8x + 8}{8} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$g''(x) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

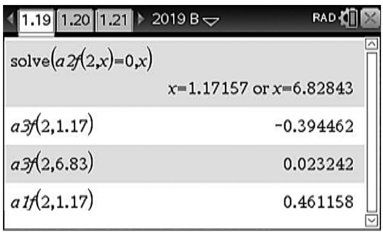
$$f_2'''(x) = \frac{-(x^2 - 12x + 24)}{16} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$g'''(x) = 0$$



Gegenhang:

Aus der *notwendigen Bedingung* $f_2''(x) = 0$ ergeben sich die Stellen $x \approx 1{,}17$ und $x \approx 6{,}83$ als mögliche Extremstellen der Steigung.



Mit der *hinreichenden Bedingung* ergibt sich:

$f_2'''(1{,}17) \approx -0{,}39 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokales Maximum

$f_2'''(6{,}83) \approx 0{,}023 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokales Minimum

Der Funktionswert der 1. Ableitung bei $x = 1{,}17$:

$f_2'(1{,}17) \approx 0{,}46$

Auf dem Gegenhang ist die Funktion f_2 nur im Intervall $0 \le x \le 4$ monoton steigend. An den Rändern dieses Teilintervalls ist aber die Steigung null, weil dort lokale Extrema von f vorliegen. Deshalb ist der lokale Maximalwert von f' an der Stelle $x = 1{,}17$ auch der globale Maximalwert der Steigung in diesem Intervall.

Die größte Steigung im Gegenhang beträgt also ca. $\underline{\underline{46\ \%}}$.

Landungshang:
Notwendige Bedingung: $g''(x) = 0$
Wegen $g''(x) = \frac{1}{e^2} \neq 0$ gibt es keine lokalen Extremstellen des Gefälles.

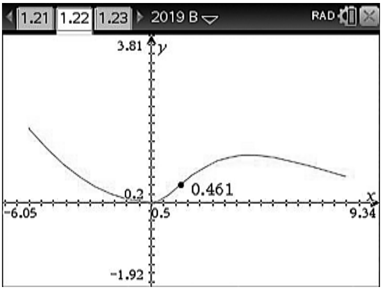
Es kann also nur ein globales Maximum des Gefälles vorliegen. Dieses kann nur an den Rändern des Definitionsbereiches, also an den Stellen $x = -5$ oder $x = 0$, angenommen werden.

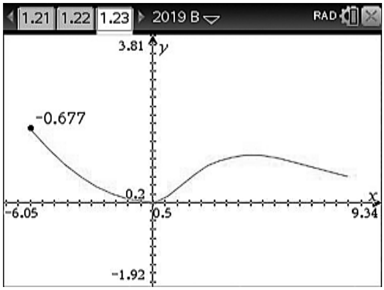
Aus Teilaufgabe e ist bekannt, dass $g'(0) = 0$ gilt.

An der Stelle $x = -5$ gilt $g'(-5) = \frac{-5}{e^2} \approx -0{,}68.$

Das negative Vorzeichen deutet auf das Gefälle hin. Das größte Gefälle im Landungshang bei $x = -5$ beträgt ca. 68 %.

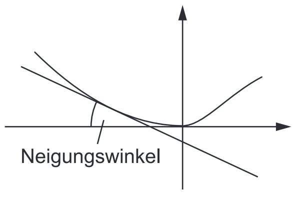
Hinweis:
Eine zeichnerische Selbstkontrolle ist möglich. Dazu wird die Profillinie grafisch dargestellt. Unter <Graph analysieren> und <dy/dx> wird dann ein Punkt auf den Graphen gelegt, für den der Anstieg an der jeweiligen Stelle x angezeigt wird.





g) **Intervall**

Vorbemerkung:
Die nebenstehende Zeichnung macht deutlich, dass unter dem Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen mit positivem Gradmaß der Nebenwinkel des Schnittwinkels der zugehörigen Tangente mit der x-Achse zu verstehen ist.



Es müssen also für eine rechnerische Ermittlung der Bereichsgrenzen die Werte von $\tan(180° - 25°)$ und $\tan(180° - 35°)$ beachtet werden:

$\tan(155°) \approx -0{,}466$

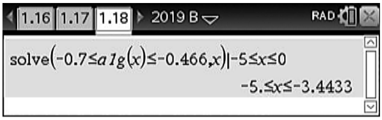
$\tan(145°) \approx -0{,}700$

Die Lösungen der Ungleichung $-0{,}700 \le g'(x) \le -0{,}466$ im Intervall $-5 \le x \le 0$ sind zu ermitteln:

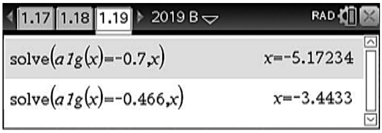
$-0{,}700 \le \frac{x}{e^2} \le -0{,}466$ mit $-5 \le x \le 0$

führt direkt zu $\underline{\underline{-5 \le x \le -3{,}44}}$.

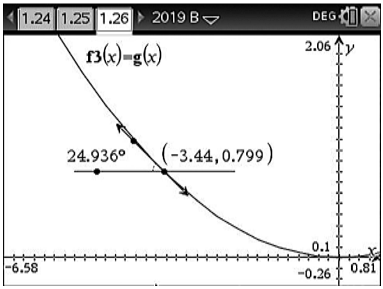
In diesem Bereich nimmt der Landungshang Neigungswinkel von 25° bis 35° an.



Alternative 1:
Der Graph von g hat den Anstieg $-0{,}7$ an der Stelle $x \approx -5{,}17$, also außerhalb des Intervalls $-5 \le x \le 0$.
Deshalb kommt nur die linke Grenze $x = -5$ des Intervalls $-5 \le x \le 0$ als linke Grenze des gesuchten Bereiches infrage. Diese Überlegung muss man anstellen, wenn die Grenzen als Lösungen der Gleichungen $g'(x) = \tan(145°)$ und $g'(x) = \tan(155°)$ berechnet werden.



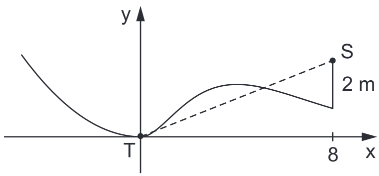
Alternative 2 (grafisch):
Die dargestellte Konstruktion mithilfe des Grafikfensters des CAS-Rechners lässt durch Verschieben des Punktes auf dem Graphen von g auch die Ermittlung der Stellen für die Neigungswinkel 25° und 35° zu.



h) **Nachweis**
Die x-Koordinate des Scheinwerfers ist $s_x = 8$.
Die y-Koordinate ergibt sich durch:

$s_y = f_2(8) + 2$

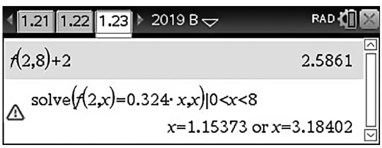
$= \frac{8^2}{2} \cdot e^{-\frac{8}{2}} + 2 \approx 2{,}59$



Der Scheinwerfer hat die Koordinaten $S(8\,|\,2{,}59)$, der tiefste Punkt liegt im Ursprung, also $T(0\,|\,0)$.

Die Strecke $\overline{ST}$ liegt auf einer Geraden s durch den Ursprung T, deren Anstieg m sich aus den Koordinaten von S ergibt:

$$m = \frac{s_y}{s_x} \approx \frac{2{,}59}{8} \approx 0{,}324$$



Die Gleichung von s lautet damit näherungsweise $s(x) = 0{,}324x$.

Durch Gleichsetzen der Funktionsterme von f_2 und s wird überprüft, ob im Intervall $0 < x < 8$ Schnittpunkte existieren:

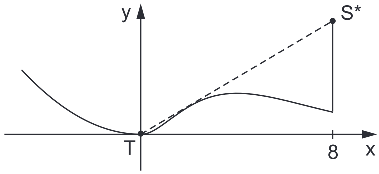
$\frac{x^2}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = 0{,}324x$

Für $0 < x < 8$ existieren zwei Schnittstellen $x_1 \approx 1{,}15$ und $x_2 \approx 3{,}18$.

Damit ist gezeigt, dass von der Position S(8 | 2,59) aus der Punkt T(0 | 0) nicht ausgeleuchtet werden kann.

Anheben des Scheinwerfers

Der Scheinwerfer S muss in einem Punkt S* mindestens so weit senkrecht nach oben angehoben werden, dass die Gerade s* durch die Punkte T und S* eine Tangente an den Graphen von f_2 im Intervall $0 < x < 8$ ist.

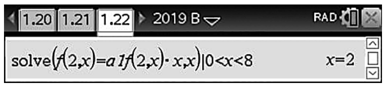


Eine solche Tangente hat den Anstieg m* für die Berührstelle x:

$$m^* = f_2'(x) = \left(x - \frac{x^2}{4}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Andererseits ist die Tangente, da sie durch T(0 | 0) gehen muss, eine Ursprungsgerade mit der Gleichung $y = s^*(x) = m^* \cdot x = f_2'(x) \cdot x$. Für einen Berührpunkt von Tangente und Graph müssen auch die Funktionswerte an der Berührstelle x* übereinstimmen, also muss die Gleichung $f_2(x) = f_2'(x) \cdot x$ nach x gelöst werden:

$$\frac{x^2}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \left(x - \frac{x^2}{4}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot x$$



mit $0 < x < 8$ führt zu $x = 2$.

Die Tangente s*(x) hat mit dem Graphen von f_2 (nur) die Stelle $x = 2$ gemeinsam. Dies ist die gesuchte Berührstelle.

Mit $m^* = f_2'(2) = \left(2 - \frac{2^2}{4}\right) \cdot e^{-\frac{2}{2}}$ ergibt sich nun der Anstieg der Tangente zu $m^* = \frac{1}{e}$.

Die Gleichung der Tangente ist damit:

$$s^*(x) = \frac{1}{e} \cdot x$$

An der Stelle $x = 8$ hat die Tangente den Funktionswert $s^*(8) = \frac{1}{e} \cdot 8 \approx 2{,}94$.

Der Scheinwerfer muss also mindestens um $2{,}94\ \text{m} - 2{,}59\ \text{m} = \underline{\underline{0{,}35\ \text{m}}}$ angehoben werden.