Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2023
Wahlaufgabe C1: Schwerpunkt Geometrie

Foto: privat

1. Bei einer Fahrt in den Thüringer Wald entdeckte Paul die abgebildeten Häuschen. Beide Dächer sind pyramidenförmig, werden von unterschiedlich langen Stützpfeilern getragen und sind dadurch gegenüber dem Boden gekippt.
   Angeregt davon möchte Paul für den Schulhof seiner Schule einen Lesepavillon konzipieren.
   Das Dach des Pavillons modelliert er als Mantelfläche einer geraden Pyramide mit den Eckpunkten $A(3|0|4)$, $C(0|3|3)$ und $D(0|0|3{,}5)$ und einer Höhe von drei Längeneinheiten.
   Alle Seiten der Grundfläche ABCD dieser Pyramide sind gleich lang.
   Die Stützpfeiler stehen senkrecht zum Boden, der durch die xy-Ebene beschrieben wird.
   Die Breite der Stützpfeiler wird vernachlässigt. (1 LE entspricht 1 m.)

   a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Grundflächenebene der Pyramide und ermitteln Sie deren Neigungswinkel gegenüber der xy-Ebene. (5 BE)

   b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes B und der Spitze S der Pyramide auf eine Dezimalstelle genau.
   [Kontrollergebnis: $S(1{,}0|2{,}0|6{,}4)$] (6 BE)

   c) Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem graphisch dar. (2 BE)

   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt einer dreieckigen Dachfläche. (3 BE)

   e) Zwischen zwei diagonal gegenüberliegenden Stützpfeilern soll eine Sitzbank aufgestellt werden.
   Berechnen Sie die maximale Länge einer solchen Sitzbank. (2 BE)

   Auf der gesamten Dachfläche befinden sich einige Glasziegel, um einen guten Lichteinfall bei Tag zu gewährleisten. Zu einem bestimmten Zeitpunkt verlaufen Sonnenstrahlen in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   f) Der Punkt, in dem ein Sonnenstrahl auf einen Glasziegel trifft, wird durch $G(1|1|5{,}05)$ modelliert.
   Untersuchen Sie, ob das Licht innerhalb der Bodenfläche des Pavillons auf den Boden trifft, wenn die Lichtbrechung unberücksichtigt bleibt. (4 BE)

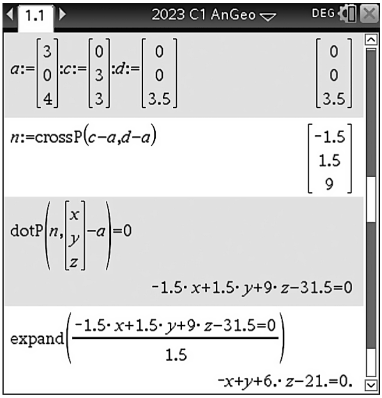
   g) Berechnen Sie den Einfallswinkel, unter dem die Sonnenstrahlen zu diesem Zeitpunkt auf die Dachfläche fallen, die im Modell der Fläche CDS entspricht. (3 BE)

Lösungen

1. a) **Koordinatengleichung**

Die Ortsvektoren der Punkte A, C und D werden unter den Variablen a, c und d gespeichert:

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$



Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Grundflächenebene wird über das Vektorprodukt ermittelt:

$\vec{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 9 \end{pmatrix}$

Die Normalengleichung $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ führt auf eine Koordinatengleichung der Grundflächenebene:

$-1{,}5x + 1{,}5y + 9z - 31{,}5 = 0$

Nach Division dieser Gleichung durch 1,5 ergibt sich die etwas vereinfachte Koordinatengleichung:

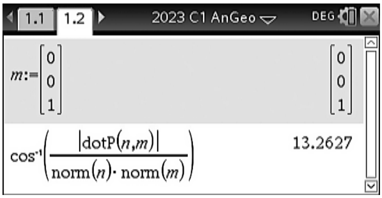
$\underline{\underline{-x + y + 6z - 21 = 0}}$

Neigungswinkel

Der Neigungswinkel φ der Grundflächenebene gegenüber der xy-Ebene lässt sich als Winkel zwischen den Normalenvektoren

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beider Ebenen

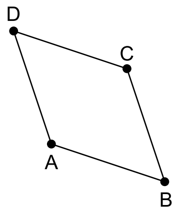
mithilfe der Gleichung $\cos(\varphi) = \dfrac{|\vec{n} \circ \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}$ bestimmen.



Es ergibt sich $\underline{\underline{\varphi \approx 13{,}3°}}$.

b) **Punkt B**

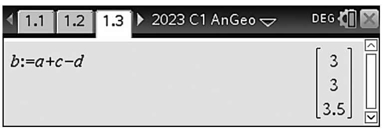
Weil alle Seiten der Grundfläche ABCD gleich lang sind, muss ABCD ein Rhombus (eine Raute) sein. Im Rhombus sind gegenüberliegende Seiten parallel. Die Koordinaten von B lassen sich durch die Gleichung $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC}$ bestimmen.



Man erhält:

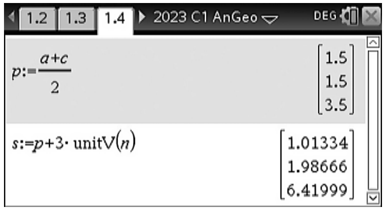
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$

Der Punkt B hat die Koordinaten $\underline{\underline{B(3\,|\,3\,|\,3{,}5)}}$.



Spitze S

Die Spitze S liegt über dem Mittelpunkt P der Strecke $\overline{AC}$. Seine Koordinaten ergeben sich z. B. durch:



$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von P sind $P(1{,}5\,|\,1{,}5\,|\,3{,}5)$.

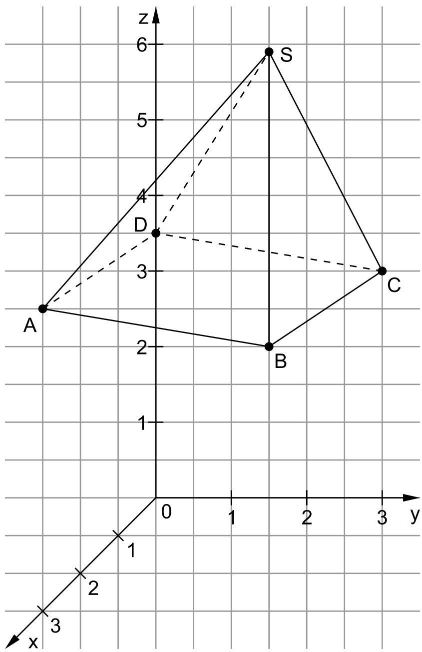
Ein Richtungsvektor der Senkrechten zur Grundflächenebene ist:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ (siehe Teilaufgabe a)}$$

Er ist nach der „Rechte-Hand-Regel“ nach oben gerichtet. Deshalb kann die Spitze S der Pyramide durch $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + 3 \cdot \vec{n}_0$ bestimmt werden. (Man erkennt das auch daran, dass die z-Koordinate positiv und größer als die z-Koordinaten der Punkte A, B, C und D ist.) Dabei ist $\vec{n}_0$ der Normaleneinheitsvektor mit der Länge 1 LE. Der Faktor 3 ergibt sich durch die Angabe der Höhe $h = 3$ m. Auf eine Dezimalstelle gerundet ergibt sich:

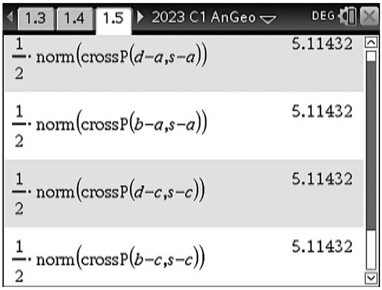
$$\overrightarrow{OS} \approx \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ 2{,}0 \\ 6{,}4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S(1{,}0\,|\,2{,}0\,|\,6{,}4)}}$$

c)



d) Wird die Dachfläche ADS ausgewählt, dann gilt für deren Flächeninhalt z. B.:

$$A_{\Delta ADS} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AS} \right| \approx \underline{\underline{5{,}1\,m^2}}$$



Die Flächeninhalte der anderen dreieckigen Dachflächen können dem Screenshot entnommen werden. Sie haben alle denselben Wert wie $A_{\Delta ADS}$:

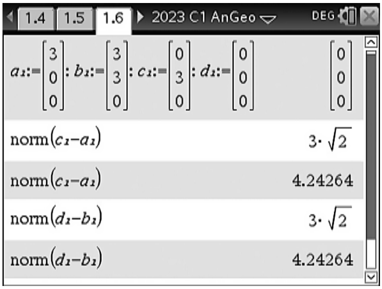
$$A_{\Delta ABS} = A_{\Delta CDS} = A_{\Delta CBS} \approx 5{,}1\,m^2$$

e) Die Koordinaten der Fußpunkte A', B', C' und D' der Stützpfeiler werden durch senkrechte Projektion der Punkte A, B, C und D in die xy-Ebene ermittelt. Es muss jeweils die z-Koordinate den Wert 0 haben, während die anderen Koordinaten erhalten bleiben.

Die Ortsvektoren der Punkte A', B', C' und D' werden unter den Variablen a_1, b_1, c_1 und d_1 gespeichert:

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \vec{b}_1 = \overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{c}_1 = \overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \vec{d}_1 = \overrightarrow{OD'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Gegenüberliegende Punktepaare sind A' und C' sowie B' und D'. Für ihre Abstände gilt:

$$\left|\overline{A'C'}\right| = \left|\overrightarrow{A'C'}\right| = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24\text{ m} \ \text{ sowie } \ \left|\overline{B'D'}\right| = \left|\overrightarrow{B'D'}\right| = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24\text{ m}$$

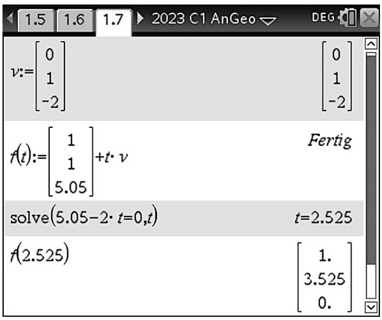
Beide Abstände sind gleich.

Die maximale Länge einer solchen Bank beträgt ca. $\underline{\underline{4{,}24\text{ m}}}$.

f) Durch den Punkt G(1 | 1 | 5,05) ist der Stützvektor der Geraden f gegeben, die den Sonnenstrahl modelliert. Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ kann als Richtungsvektor der Geraden f aufgefasst werden:

Gleichung der Geraden:

$$f\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5{,}05 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$



Gleichung der xy-Ebene:
$z = 0$

Einsetzen der z-Koordinate von f in die Ebenengleichung ergibt:

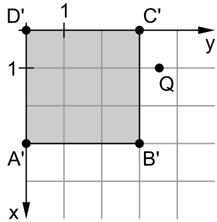
$$5{,}05 - 2t = 0 \ \Rightarrow \ t = 2{,}525$$

Dieser Wert wird in die Gleichung von f eingesetzt, was zum Durchstoßpunkt Q(1 | 3,525 | 0) führt.

Die Bodenfläche des Pavillons ist das Viereck A'B'C'D' (siehe Teilaufgabe e) mit A'(3|0|0), B'(3|3|0), C'(0|3|0) und D'(0|0|0).

Da die y-Koordinate von Q größer als 3 ist, liegt Q außerhalb der Bodenfläche des Pavillons.

Dies kann man sich auch durch eine Skizze klarmachen, in der der Grundriss des Pavillons veranschaulicht wird.

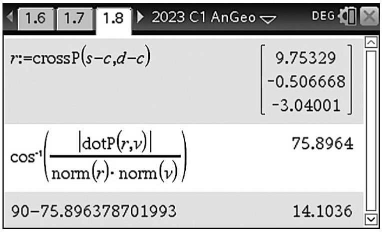


g) Ein Normalenvektor $\vec{r}$ der Dachfläche CDS lässt sich mithilfe des Vektorprodukts bestimmen:

$$\vec{r} = \overrightarrow{CS} \times \overrightarrow{CD} \approx \begin{pmatrix} 9,75 \\ -0,51 \\ -3,04 \end{pmatrix}$$

Der Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{v}$ ergibt sich aus

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{r} \circ \vec{v}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{v}|}$$

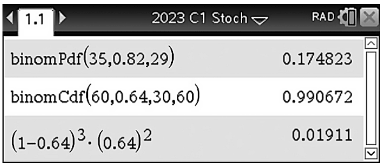


zu $\alpha \approx 75,9°$. Der gesuchte Neigungswinkel β zwischen den Sonnenstrahlen und der Dachfläche ist der Komplementwinkel von α:
$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 75,9° = \underline{\underline{14,1°}}$

2. a) Das Modell der Binomialverteilung kann bei den Ereignissen A und B zur Anwendung kommen.

Ereignis A: X ist binomialverteilt mit $n = 35$ und $p = 0,82$. Gesucht ist $P(X = 29)$.
$\underline{\underline{P(A) \approx 0,1748}}$

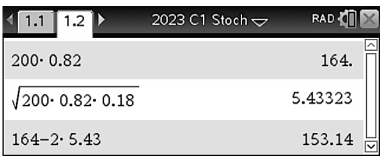
Ereignis B: Y ist binomialverteilt mit $n = 60$ und $p = 0,64$. Gesucht ist $P(30 \leq Y \leq 60)$.
$\underline{\underline{P(B) \approx 0,9907}}$



Ereignis C: Da sich nur die letzten zwei der fünf Kunden für das Bio-Siegel interessieren ($p = 0,64$), kann man davon ausgehen, dass sich die ersten drei Kunden nicht für das Bio-Siegel interessieren ($p = 1 - 0,64 = 0,36$).
$P(C) = 0,36^3 \cdot 0,64^2 \approx \underline{\underline{0,0191}}$

b) Da die Einstellung der Kunden zum Kauf regionaler Produkte zur Diskussion steht, wird $p = 0,82$ als Einzelwahrscheinlichkeit der Grundgesamtheit zugrunde gelegt. Der Umfang der Stichprobe ist $n = 200$. Mit diesen Werten ergeben sich der Erwartungswert
$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,82 = 164$
und die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,82 \cdot 0,18} \approx 5,43$$



Die linke Grenze des 95 %-Prognoseintervalls ist:
$\mu - 2 \cdot \sigma \approx 164 - 2 \cdot 5,43 = 153,14$

Wegen $\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$ muss dieser Wert auf 154 aufgerundet werden.