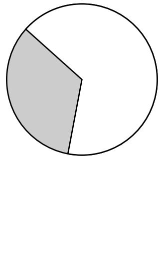
Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2020
Wahlaufgabe C2: Schwerpunkt Stochastik

Die Bigband einer Schule nimmt anlässlich des 50-jährigen Jubiläums der Schule eine CD mit zehn Musikstücken auf. Vier dieser Stücke sind kurz, sechs lang. Diese CD wird in großer Anzahl hergestellt.

1. Bei der Jubiläumsfeier werden von einer dieser CDs in zufälliger Reihenfolge Stücke abgespielt, wobei jedes Stück auch mehrfach abgespielt werden kann.
   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei abgespielten Stücke verschieden sind. (2 BE)
   b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
   A := „Unter zwölf abgespielten Stücken befinden sich genau fünf lange Stücke."
   B := „Unter zwölf abgespielten Stücken befinden sich mehr lange als kurze Stücke." (4 BE)

* 2. Als die CDs vor der Jubiläumsfeier geliefert wurden, entdeckten die Mitglieder der Bigband unter den ersten 20 betrachteten CDs ein Exemplar mit fehlerhafter Hülle und befürchteten, dass mindestens 5 % aller Hüllen fehlerhaft sind. Sie planten deshalb die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 10 % und der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Hüllen ist kleiner als 5 %." Sollte das Ergebnis des Tests dafür sprechen, dass die Befürchtung zutrifft, wollten sie beim Hersteller einen Preisnachlass verlangen.
   a) Geben Sie eine Überlegung an, die zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe. (3 BE)
   b) Dem Test wurde eine Stichprobe von 150 CDs zugrunde gelegt. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)
   c) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von 250 CDs durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn mindestens 18 Hüllen fehlerhaft sind.
   Ermitteln Sie den Bereich, in dem der tatsächliche Anteil fehlerhafter Hüllen liegen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als 0,25 ist. (4 BE)

3. Bei der Jubiläumsfeier können die CDs sowohl zu einem Preis von 9 Euro pro Stück gekauft als auch bei einem Spiel gewonnen werden. Für das Spiel wird das abgebildete Glücksrad verwendet. Für einen Einsatz von einem Euro wird das Glücksrad dreimal gedreht. Nur wenn dabei genau zweimal der grau markierte Sektor getroffen wird, gewinnt man eine CD.
   Die Größe des Öffnungswinkels dieses Sektors im Bogenmaß wird mit b bezeichnet.



* Die Teilaufgabe 2 ist ab der Abiturprüfung 2021 nicht mehr relevant.

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei diesem Spiel eine CD zu gewinnen, mithilfe des Terms $\frac{3}{4\pi^2}b^2 - \frac{3}{8\pi^3}b^3$ berechnet werden kann. (3 BE)

b) Es gibt Werte von b, für die die Bigband bei mehrfacher Durchführung des Spiels im Mittel pro CD die gleichen Einnahmen erwarten könnte wie beim Verkauf der CD.
Ermitteln Sie diese Werte. (4 BE)

4. Von einem geraden, quadratischen Pyramidenstumpf ABCDEFGH sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(4|0|0)$, $B(4|4|0)$, $C(0|4|0)$, $D(0|0|0)$, $E(3|1|4)$ und $G(1|3|4)$ gegeben.

a) Stellen Sie den Pyramidenstumpf in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte F und H an. (4 BE)

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche ABFE. (3 BE)

c) Im Inneren des Pyramidenstumpfs gibt es einen Punkt $P(2|2|z)$, der von allen Eckpunkten den gleichen Abstand besitzt.
Berechnen Sie die z-Koordinate von P. (3 BE)

Für jede reelle Zahl k ist eine Gerade g_k gegeben durch

$$g_k\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

d) Begründen Sie, dass alle Geraden g_k parallel zur yz-Ebene verlaufen.
Geben Sie den Abstand d dieser Geraden zur yz-Ebene an. (2 BE)

e) Bestimmen Sie alle Werte k, für die die Geraden g_k mit dem Pyramidenstumpf gemeinsame Punkte besitzen. (3 BE)

(40 BE)

Lösungen

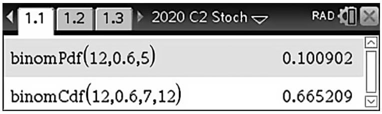
1. a) Damit die drei Stücke verschieden sind, hat man beim ersten Stück 10 Stücke zur Auswahl, beim zweiten nur noch 9 und dann nur noch 8 Stücke. Damit erhält man:

$$P(A) = \frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} = \underline{\underline{\frac{18}{25}}}$$

b) Unter Verwendung der bekannten Formeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei gegebener Binomialverteilung erhält man z. B. mit $p = 0{,}6$ (Wahrscheinlichkeit für lange Stücke):

$$P(A) = \binom{12}{5} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^7 \approx \underline{\underline{0{,}1009}}$$

$$P(B) = \sum_{k=7}^{12} \binom{12}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{12-k} \approx \underline{\underline{0{,}6652}}$$

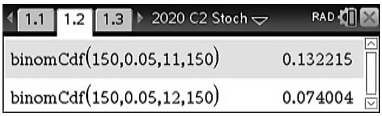


2. a) Da die Mitglieder der Band begründete Zweifel hegen, dass der Anteil defekter Hüllen kleiner als 5 % ist, wählen Sie dies als Nullhypothese. Damit beschränken Sie auch den Fehler 1. Art, dass man zu Unrecht einen Preisnachlass fordert.

Sie nehmen also an, dass der Anteil fehlerhafter Hüllen maximal 5 % beträgt (Nullhypothese). Denn zeigen wollen sie, dass mehr als 5 % der Hüllen fehlerhaft sind (Alternativhypothese).

b) Es wird ein rechtsseitiger Signifikanztest mit der Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}05$ und der Alternativhypothese H_1: $p > 0{,}05$ auf dem Signifikanzniveau von $\alpha = 10\ \%$ mit einer Stichprobe von $n = 150$ durchgeführt. Da der Verwerfungsbereich die Form $[k;\ 150]$ hat und der Erwartungswert $E(X) = 150 \cdot 0{,}05 = 7{,}5$ ist, muss beim systematischen Probieren die kleinste ganze Zahl k gefunden werden, für die $P(X \geq k) \leq 0{,}1$ gilt.

Durch systematisches Probieren ermittelt man $k = 12$.



Hieraus ergeben sich:

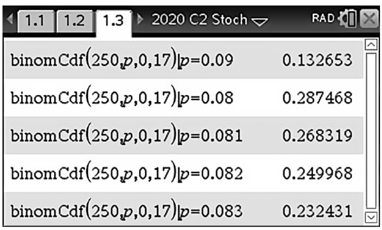
Verwerfungsbereich $V = \{12; \ldots; 150\}$

Nichtverwerfungsbereich $\overline{V} = \{0; \ldots; 11\}$

Die Entscheidungsregel könnte lauten: Sind mindestens 12 defekte Hüllen in der Stichprobe, wird ein Preisnachlass verlangt.

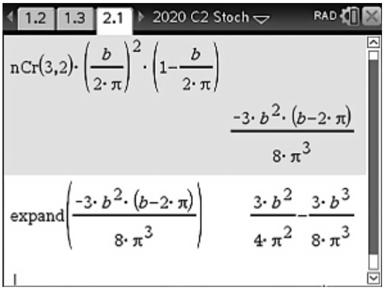
c) Der Nichtverwerfungsbereich soll das Intervall $[0;\ k-1]$ umfassen, d. h., es muss für die Ungleichung $B_{250;\,p}(Y \leq 17) \leq 0{,}25$ das kleinste p gefunden werden, sodass die Ungleichung gilt.

Das kleinste p, für das die Ungleichung gilt, ist $p \approx 0{,}082$. Der gesuchte Bereich ist daher $\underline{\underline{[0{,}082;\ 1]}}$.



3. a) Aus $P(\alpha) = \frac{\alpha}{360°}$ folgt auch, dass $P(b) = \frac{b}{2\pi}$ gilt. Da man nur bei genau zwei Treffern bei drei Versuchen gewinnt, d. h. die Möglichkeiten TTN, TNT bzw. NTT hat (was $\binom{3}{2}$ entspricht), gilt:

$$P(\text{Gewinn}) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{b}{2\pi}\right)$$
$$= \frac{3}{4\pi^2} b^2 - \frac{3}{8\pi^3} b^3$$

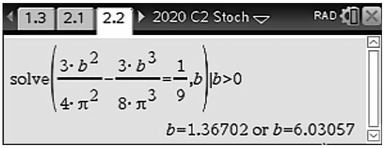


b) Betrachtet man die Zufallsgröße X: Gewinn/Verlust aus Sicht der Bigband, so ergibt sich:

x_i	-8	1
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

Hieraus folgt für ein faires Spiel:
$E(x) = -8p + 1 - p = 0$
Damit erhält man $p = \frac{1}{9}$ und es folgt:

$$\frac{3}{4\pi^2} b^2 - \frac{3}{8\pi^3} b^3 = \frac{1}{9}$$

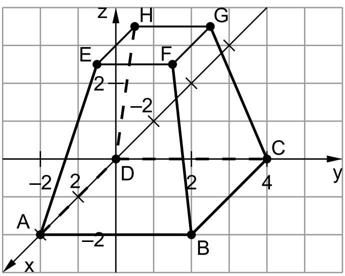


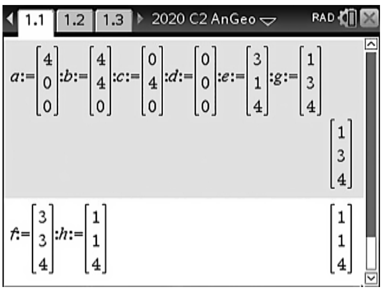
Man erhält als Lösung dieser Gleichung die beiden möglichen Werte $b_1 \approx 1{,}37$ und $b_2 \approx 6{,}03$.

Variante: Wenn pro CD 9 € eingenommen werden, dann muss die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{9}$ betragen, damit im Mittel bei 8 von 9 Spielen verloren und nur einmal gewonnen wird. Damit folgt als zu lösende Gleichung sofort:

$$\frac{3}{4\pi^2} b^2 - \frac{3}{8\pi^3} b^3 = \frac{1}{9}$$

4. a) **Darstellung des Pyramidenstumpfes**

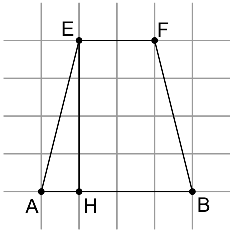




Angabe der Koordinaten der Eckpunkte
Der Punkt F hat die gleiche x- und z-Koordinate wie der Punkt E, also F(3 | y | 4), die y-Koordinate muss gleich der des Punktes G sein. Man erhält F(3 | 3 | 4), analog folgt H(1 | 1 | 4).

b) Nutzt man die Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes,

$A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h,$

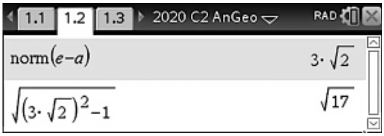


dann benötigt man neben den Seitenlängen der zueinander parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ des Trapezes noch die Seitenhöhe h des Trapezes.

$\overline{AB} = 4$ LE, $\quad \overline{EF} = 2$ LE

Die Seitenhöhe lässt sich berechnen, da die Strecke $\overline{AH} = 1$ LE beträgt, weil es sich um ein gleichschenkliges Trapez handelt.

Die Seitenhöhe h kann dann mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden:

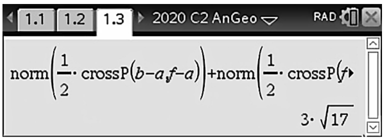


$h = \overline{EH} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{17}$ LE

Damit erhält man:

$A_{\text{Trapez}} = \frac{4+2}{2} \cdot \sqrt{17} = \underline{\underline{3\sqrt{17}\ \text{FE}}}$

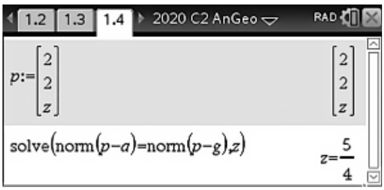
Variante: Nutzung des Kreuzproduktes



$$A_{\text{Trapez}} = A_{\Delta ABF} + A_{\Delta AFE}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AF}| + \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AF} \times \overrightarrow{AE}|$$
$$= \underline{\underline{3\sqrt{17}\ \text{FE}}}$$

c) Da die Gerade g, auf der der Punkt $P(2\,|\,2\,|\,z)$ liegt, die Symmetrieachse des geraden quadratischen Pyramidenstumpfes darstellt, folgt aus dieser Symmetrie, dass der Abstand eines beliebigen Punktes der Deckfläche zum Punkt P gleich sein muss wie der Abstand eines beliebigen Punktes der Grundfläche zum Punkt P. Es muss z. B. gelten:

$\overline{AP} = \overline{GP}$



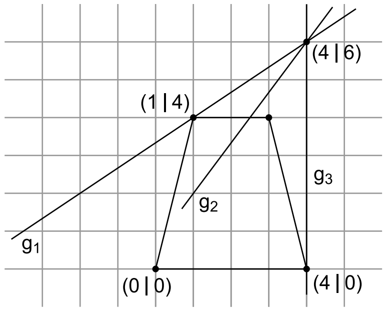
Die Längen der Strecken bestimmt man mittels des Betrages der entsprechenden Vektoren $|\overrightarrow{AP}|$ bzw. $|\overrightarrow{GP}|$. Aus dieser Gleichung bestimmt man mit dem CAS den Wert für $\underline{\underline{z = \frac{5}{4}}}$.

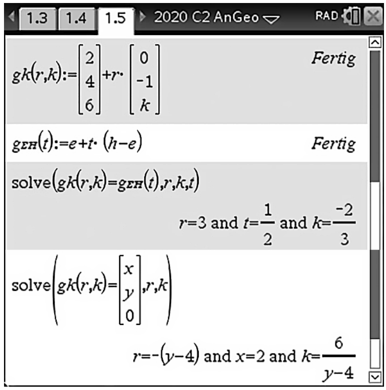
d) Da der Richtungsvektor von g_k ebenso wie die Parameterdarstellung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der yz-Ebene in x-Richtung den Wert 0 hat, verlaufen alle Geraden der Schar parallel zur yz-Ebene. Der Stützvektor hat als x-Koordinate den Wert $x = 2$, dies entspricht damit dem Abstand $\underline{\underline{d = 2}}$ aller Geraden von g_k zur yz-Ebene.

e) Da alle Geraden g_k in der Ebene $x = 2$ liegen, kann man zur Veranschaulichung des Problems diese Schnittebene betrachten.

Es ist zu erkennen, dass die Geraden g_k ab einem bestimmten negativen Wert für k über die Kante $\overline{EH}$ in die Pyramide „eindringen“.
Dieser k-Wert kann durch Gleichsetzen der Geraden g_k mit der Geraden durch E und H berechnet werden:

$$\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$$





Man ermittelt für den Fall des Schneidens $k = -\frac{2}{3}$ und kann aufgrund der Lage der Geraden schlussfolgern, dass es für alle $k \leq -\frac{2}{3}$ gemeinsame Punkte mit dem Pyramidenstumpf gibt.

Betrachtet man zusätzlich den Durchstoßpunkt aller Geraden g_k durch die xy-Ebene, indem man die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$$

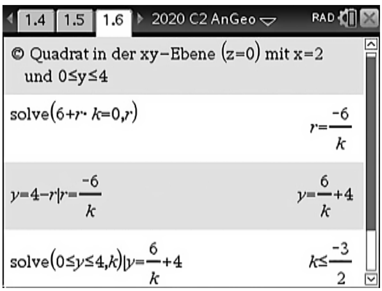
löst, so erhält man:

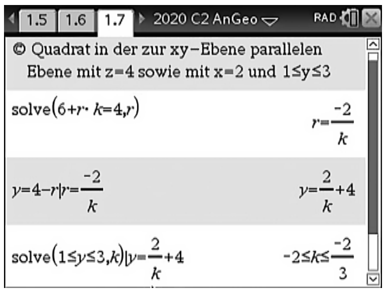
$$D\left(2 \,\middle|\, 4 + \frac{6}{k} \,\middle|\, 0\right)$$

Dies bedeutet, dass für $k \to \pm\infty$ die Geraden g_k der Kante $\overline{BC}$ beliebig nahekommen, diese aber nicht erreichen (Grenzwert).

Damit ist auch gezeigt, dass es für alle $\underline{\underline{-\infty < k \leq -\frac{2}{3}}}$ gemeinsame Punkte von Gerade und Pyramidenstumpf gibt.

Variante 1: Man betrachtet die Grund- und Deckfläche des Pyramidenstumpfes und untersucht, für welche k diese Flächen gemeinsame Punkte mit der Geradenschar haben.





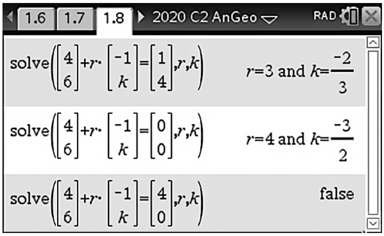
Aus beiden Ungleichungen für k folgert man, dass $k \leq -\frac{2}{3}$ gelten muss.

Variante 2: Aus der Skizze in der Ebene $x = 2$ lassen sich Geradengleichungen ableiten.

$$\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung für k}$$



Aus dieser Betrachtung lässt sich ebenfalls schlussfolgern, dass $k \leq -\frac{2}{3}$ gelten muss.