Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2023
Pflichtaufgabe Teil B: Analysis

1. Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau.
An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 06:00 Uhr und löst sich bis 10:00 Uhr vollständig auf.
Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot (8-5x) \cdot \left(1-\frac{x}{4}\right)^2$$

beschrieben werden. Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde an.

a) Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat, und begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f, dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt. (3 BE)

b) Es gilt $f(2) < 0$.
Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an. (1 BE)

c) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt. Zeigen Sie, dass der zugehörige Wert der momentanen Änderungsrate zwischen $2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ liegt. (4 BE)

d) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist.
Begründen Sie Ihre Angabe. (2 BE)

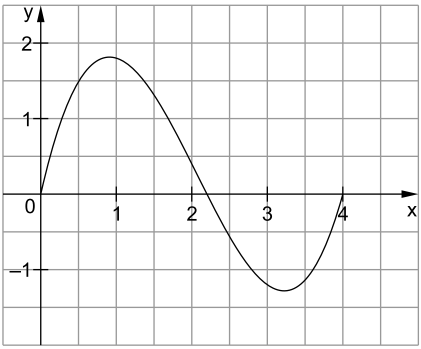
Im Sachzusammenhang ist neben der Funktion f die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion s mit $s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4-x)^3$ von Bedeutung.

e) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden.
Zeigen Sie rechnerisch, dass sich der Stau um 10:00 Uhr vollständig aufgelöst hat. (4 BE)

f) Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 06:30 Uhr bis 08:00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge. (3 BE)

g) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt zwischen 06:00 Uhr und 10:00 Uhr, zu dem die Staulänge 0,5 km geringer ist als eine Stunde vorher. (3 BE)

h) Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch den in der Abbildung gezeigten Graphen dargestellt. Dabei ist x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde.



Um 07:30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat.
Markieren Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung, begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in der Abbildung.
Nutzen Sie dazu das beiliegende Arbeitsblatt. (3 BE)

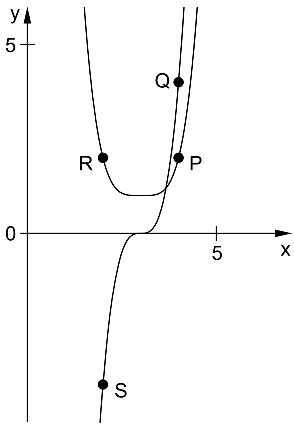
2. Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_k mit $h_k(x) = (x-3)^k + 1$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

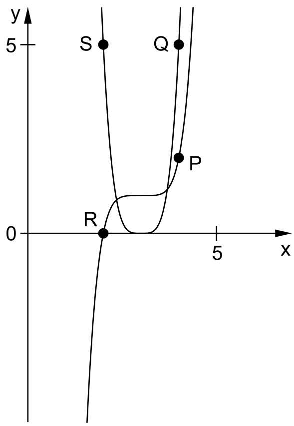
a) Das Verhalten von h_k für $x \to -\infty$ ist abhängig von k.
Geben Sie die dabei auftretenden Fälle des Verhaltens und für diese Fälle jeweils einen passenden Wert von k an. (3 BE)

b) Ermitteln Sie die Koordinaten derjenigen Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben. (3 BE)

c) Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h'_k bezeichnet.
Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Es gibt genau einen Wert von k, für den der Graph von h'_k Tangente an den Graphen von h_k ist. (5 BE)

d) Die Graphen von h_k und h'_k werden in der linken Abbildung für $k = 4$ gezeigt, in der rechten Abbildung für $k = 5$.





Für $k \geq 4$ werden die Punkte $P(4 \mid h_k(4))$, $Q(4 \mid h'_k(4))$, $R(2 \mid h_k(2))$ und $S(2 \mid h'_k(2))$ betrachtet. Diese Punkte sind jeweils Eckpunkte eines Vierecks.

Begründen Sie, dass jedes dieser Vierecke ein Trapez ist.
Zeigen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Der Flächeninhalt des Trapezes für $k = 22$ und der Flächeninhalt des Trapezes für $k = 23$ stimmen überein. (6 BE)

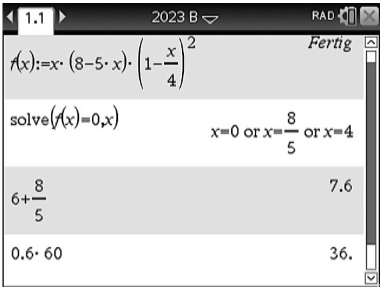
(40 BE)

Lösungen

1. a) **Zeitpunkte**

Der Funktionsterm

$$f(x) = x \cdot (8-5x) \cdot \left(1-\frac{x}{4}\right)^2$$



wird als Funktion $f(x)$ gespeichert. Für die Ermittlung der Nullstellen von f wird die Gleichung $f(x)=0$ gelöst. Es ergeben sich:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{8}{5} = 1{,}6 \text{ und } x_3 = 4$$

Daraus ergeben sich die Zeitpunkte $\underline{\underline{06{:}00 \text{ Uhr}}}$ (für x_1), $\underline{\underline{07{:}36 \text{ Uhr}}}$ (für x_2) und $\underline{\underline{10{:}00 \text{ Uhr}}}$ (für x_3). Dabei muss die Umrechnung von der Dezimaldarstellung von x in die Angaben der Zeitpunkte vorgenommen werden (1 Stunde = 60 Minuten).

Begründung

Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion, die in faktorisierter Form angegeben ist. Ihre Linearfaktoren sind x, $8-5x$ sowie $1-\frac{x}{4}$, wobei letzterer doppelt vorkommt. Nach dem Satz vom Nullprodukt hat $f(x)$ genau dann Nullstellen, wenn mindestens einer der Faktoren eine Nullstelle besitzt. Deshalb sind bei den drei verschiedenen Linearfaktoren nicht mehr als drei Nullstellen möglich.

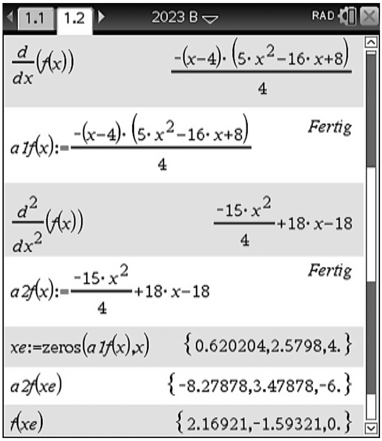
Die Überlegungen zur Anzahl der Nullstellen lassen die Bestimmung der Nullstellen $x_1=0$, $x_2=1{,}6$ und $x_3=4$ auch ohne CAS zu, indem die Nullstelle jedes Linearfaktors im Kopf berechnet wird.

b) Da $f(2)$ negativ ist, nimmt die Staulänge für $x=2$, also zum Zeitpunkt 08:00 Uhr, ab.

c) Die Ableitungsfunktionen von f sind:

$$f'(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-4) \cdot (5x^2-16x+8)$$

$$f''(x) = -\frac{15}{4}x^2 + 18x - 18$$



Die Nullstellen von $f'(x)$ und damit mögliche lokale Extremstellen sind $x_1 \approx 0{,}62$, $x_2 \approx 2{,}58$ und $x_3 = 4$.
Sie werden hier als rationale Näherungswerte angegeben, weil dies für den Sachverhalt (Angabe als Zeitpunkte) sinnvoll ist.

Wegen $f''(x_1) \approx -8{,}3 < 0$ liegt bei $x_1 \approx 0{,}62$ ein lokales *Maximum* vor.

Wegen $f''(x_2) \approx 3{,}5 > 0$ liegt bei $x_2 \approx 2{,}58$ ein lokales *Minimum* vor.

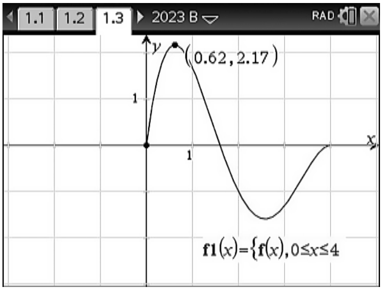
Wegen $f''(x_3) = -6 < 0$ liegt bei $x_3 = 4$ ein lokales *Maximum* vor. Bezogen auf das Intervall $0 \le x \le 4$ ist dies ein Randmaximum.

Vergleicht man außerdem die Funktionswerte $f(x_1) \approx 2{,}2$ und $f(x_3) = 0$, so wird klar, dass die Staulänge für $x_1 \approx 0{,}62$ am stärksten zunimmt, und zwar um ca. $2{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

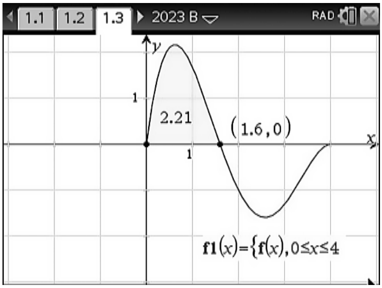
Wegen $0{,}62 \cdot 60 = 37{,}2$ nimmt die Staulänge zum Zeitpunkt 06:37 Uhr am stärksten zu.

Wegen $f(x_1) \approx 2{,}2$ ist auch gezeigt, dass $2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} < f(x_1) < 3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gilt.

Als Selbstkontrolle kann eine grafische Ermittlung des globalen Maximums dienen.



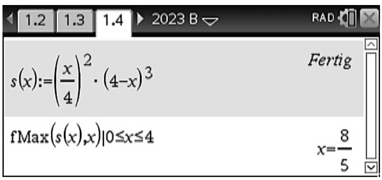
d) Der Graph der Änderungsrate liegt nur im Intervall zwischen den ersten beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1{,}6$ oberhalb der Zeitachse, danach unterhalb dieser Achse. Die Staulänge nimmt also für $0 \le x \le 1{,}6$ ständig zu und danach bis $x = 4$ wieder ab. Demzufolge ist der Stau für $x = 1{,}6$ am längsten, das ist zum Zeitpunkt 07:36 Uhr der Fall (vergleiche die Lösungen zur Teilaufgabe a).



Da der Stau um 06:00 Uhr beginnt, kann man aus dem Flächeninhalt des oberhalb der Zeitachse gelegenen Flächenstücks ablesen, dass die größte Staulänge etwa 2,21 km betrug. Diese Angabe ist aber in der Aufgabenstellung nicht verlangt.

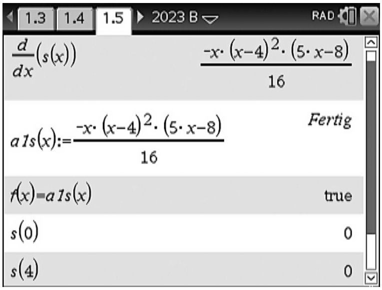
Alternative Lösung 1:
Aus den Angaben der Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}6$ und $x_3 = 4$ (Teilaufgabe a), der Angabe $f(2) < 0$ (Teilaufgabe b) und der Tatsache, dass f eine stetige Funktion ist, lässt sich auch ohne Verwendung der grafischen Darstellung schlussfolgern, dass $f(x)$ nur im Intervall $0 \le x \le 1{,}6$ nichtnegative Funktionswerte hat und demzufolge am Ende dieses Intervalls bei $x = 1{,}6$ die größte Staulänge erreicht wird.

Alternative Lösung 2:
Mit der im Folgenden (Teilaufgabe e) verwendeten Funktion s für die Staulänge kann deren Maximalwert ebenfalls bestimmt werden.



e) Mit dem CAS wird die erste Ableitung von s(x) gebildet und unter einer geeigneten Variablen als Funktion gespeichert:

$$s'(x) = -\frac{1}{16} \cdot x \cdot (x-4)^2 \cdot (5x-8)$$



Ebenfalls mit dem CAS wird überprüft, ob $s'(x) = f(x)$ gilt. Diese Rechnung wird mit „true“ als wahr bestätigt.

Ferner gibt die Berechnung von s(0) den Funktionswert null zurück.

Da die Bedingungen $s'(x) = f(x)$ und $s(0) = 0$ erfüllt sind, kann die Aussage als wahr bestätigt werden.

Da zudem $s(4) = 0$ vom CAS zurückgegeben wird, ist nachgewiesen, dass sich der Stau um 10:00 Uhr völlig aufgelöst hat.

Die Aussagen $s(0) = 0$ und $s(4) = 0$ lassen sich auch ohne CAS im Kopf ausrechnen.

Alternative Lösung:
Damit die gegebene Aussage richtig ist, muss s eine Stammfunktion von f mit der unteren Integrationsgrenze $x = 0$ sein.

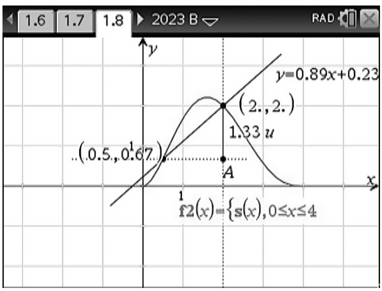
Die Gleichung $\int_0^t f(x)\,dx = s(t)$ wird vom CAS mit „true“ bestätigt.

f) Zum Zeitpunkt 06:30 Uhr gehört der x-Wert $x = 0{,}5$, zum Zeitpunkt 08:00 Uhr gehört der x-Wert $x = 2$.

Die Zunahme der Staulänge wird durch $s(2) - s(0{,}5) \approx 1{,}3$ berechnet. Die Staulänge hat also um etwa $\underline{\underline{1{,}3\text{ km}}}$ zugenommen.

Die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge erhält man aus $\frac{s(2) - s(0{,}5)}{2 - 0{,}5} \approx 0{,}9$. Sie beträgt ca. $\underline{\underline{0{,}9\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$.

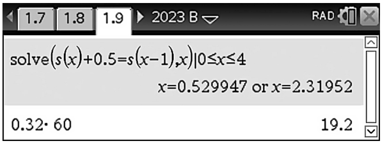
Zur Selbstkontrolle können die verlangten Angaben auch aus einer grafischen Darstellung von s(x) gewonnen werden:
Auf dem Graphen von s werden die Punkte $(0{,}5 \mid s(0{,}5))$ und $(2 \mid s(2))$ markiert. Der Abstand ihrer y-Werte und die Steigung der Geraden durch diese Punkte ergeben Näherungswerte für die gesuchten Größen.



g) Es sei x der gesuchte Zeitpunkt. Dann ist s(x) die Staulänge zu diesem Zeitpunkt. Der Zeitpunkt eine Stunde vorher kann durch x – 1 angegeben werden. Die zugehörige Staulänge wird durch s(x – 1) beschrieben.

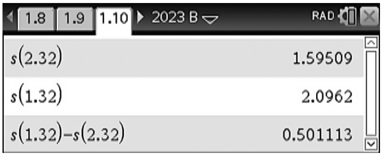
Nach den Angaben der Aufgabe ist:

$s(x) + 0{,}5 = s(x - 1)$

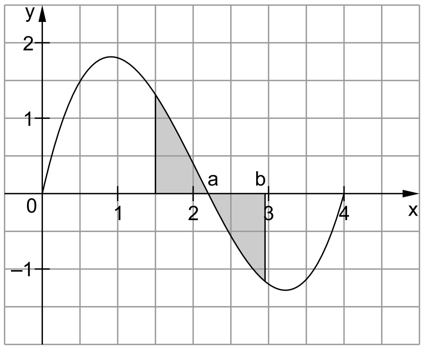


Die Lösungen dieser Gleichung für $0 \le x \le 4$ sind $x_1 \approx 0{,}53$ und $x_2 \approx 2{,}32$. Allerdings ist $x_1 - 1 \approx -0{,}47 < 0$, sodass für den Zeitpunkt x_1 der eine Stunde frühere Zeitpunkt nicht im Intervall $0 \le x \le 4$ liegt. Für $x_2 - 1 \approx 1{,}32$ gilt diese Einschränkung nicht. Damit gibt es genau einen Zeitpunkt mit der verlangten Eigenschaft: Um $\underline{\underline{08{:}19\text{ Uhr}}}$ war die Staulänge 0,5 km geringer als eine Stunde vorher, also um 07:19 Uhr.

Probe: Die Staulänge um 08:19 Uhr ist $s(2{,}32) \approx 1{,}6$ km, die Staulänge eine Stunde vorher, also um 07:19 Uhr ist $s(1{,}32) \approx 2{,}1$ km. Wegen $2{,}1\text{ km} - 1{,}6\text{ km} = 0{,}5\text{ km}$ ist damit die Behauptung erfüllt.



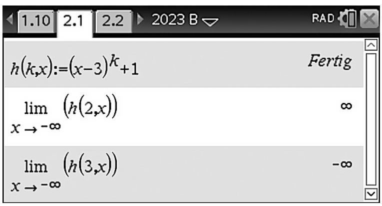
h) Die x-Koordinate des gesuchten Zeitpunkts wird mit b bezeichnet. Die Staulänge um 07:30 Uhr kann als Flächeninhalt zwischen der Kurve und der Zeitachse im Intervall $0 \le x \le 1{,}5$ interpretiert werden. Danach nimmt der Flächeninhalt, also die Staulänge, bis zur Nullstelle a zu. Da dann die Fläche zwischen der Kurve und der Zeitachse unterhalb derselben liegt, kann von einer Abnahme der Staulänge ab $x = a$ ausgegangen werden. Wenn die Abnahme im Intervall $a \le x \le b$ genauso groß ist wie die Zunahme im Intervall $1{,}5 \le x \le a$, dann ist die Staulänge für $x = b$ genauso groß wie für $x = 1{,}5$, also um 07:30 Uhr.



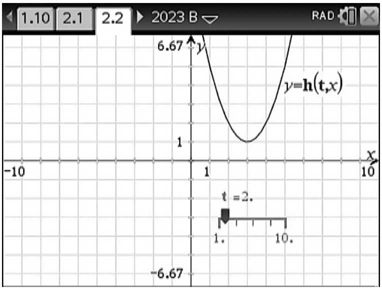
2. a) Für gerade k, z. B. $\underline{\underline{k = 2}}$, gilt: $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to -\infty} h_k(x) = \infty}}$

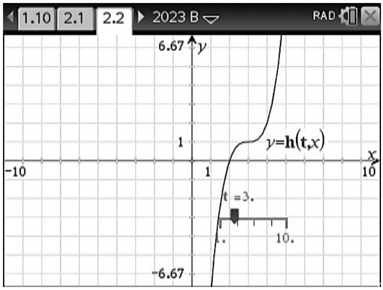
Für ungerade k, z. B. $\underline{\underline{k = 3}}$, gilt: $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to -\infty} h_k(x) = -\infty}}$

Die rechnerische Überprüfung für $k = 2$ bzw. $k = 3$ bestätigt dies.

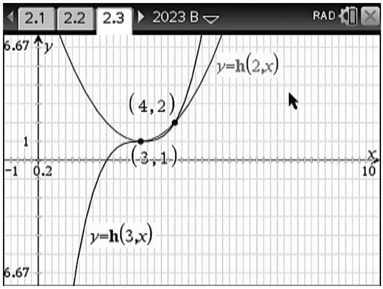


Zur Ergebnisfindung können verschiedene Graphen in Abhängigkeit von k dargestellt werden. Im Grafikfenster muss dabei statt k ein anderer Parameter genutzt werden, damit die Variable k nicht mit einem Wert belegt ist; hier wird t genutzt.



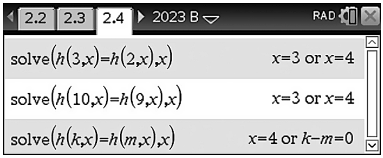


b) Die Darstellung der Graphen für $k = 2$ und $k = 3$ legt die Vermutung nahe, dass alle Graphen die Punkte $(3\,|\,1)$ und $(4\,|\,2)$ gemeinsam haben.



Eine rechnerische Überprüfung unterstützt die Vermutung aus der Grafik.

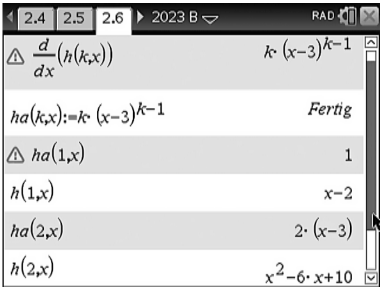
Anmerkung: Ein allgemeiner Ansatz liefert nur die Stelle $x = 4$.



Nur wenn die Basis $x - 3$ den Wert 0 oder 1 hat, haben die Potenzen $(x - 3)^k$ immer denselben Wert, entweder 0 oder 1, egal ob k eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. $x - 3 = 0$ führt auf $x = 3$ und $x - 3 = 1$ führt auf $x = 4$. Die gemeinsamen Punkte sind daher $\underline{\underline{(3\,|\,1)}}$ und $\underline{\underline{(4\,|\,2)}}$.

Begründung, dass es keine weiteren Stellen geben kann:
Da für $k = 2$ und $k = 3$ nur zwei gemeinsame Stellen existieren, können alle anderen Kurven der Schar auch nur noch dort gemeinsame Punkte haben. Dies kann man mit dem CAS nachweisen.

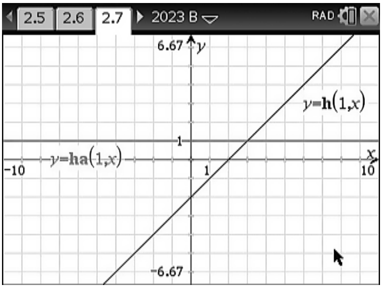
c) Mit dem CAS wird die erste Ableitung von $h_k(x)$ gebildet und unter einer geeigneten Variablen als Funktion gespeichert:
$h'_k(x) = k \cdot (x-3)^{k-1}$
Dabei ist zu beachten, dass bei Funktionen mit Parameter der Ableitungsterm zunächst ausgewertet und dann erst gespeichert werden kann.

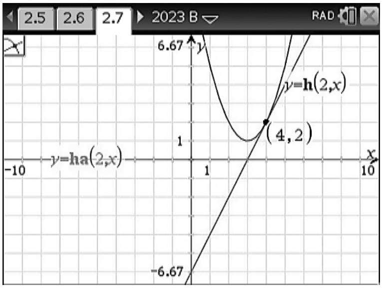


Nur für $k=1$ und $k=2$ ergibt sich für die Ableitungsfunktion ein linearer Term (Gerade).

Für $k=1$ kann h'_k nicht Tangente an h sein, da h'_1 den Anstieg 0 und h_1 den konstanten Anstieg 1 hat. Für $k=2$ muss untersucht werden, ob h'_2 Tangente an h_2 sein kann.

Eine Kontrolle dieser Überlegungen im Grafikfenster zeigt, dass h'_1 nicht Tangente an h_1 ist und dass für $k=2$ noch untersucht werden muss, ob h'_2 Tangente an h_2 ist.



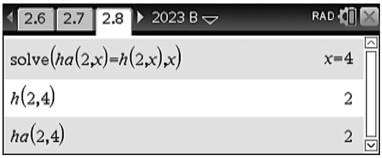


Für $x=4$ ergibt sich auch rechnerisch der gemeinsame Punkt $(4\,|\,2)$ von h_2 und h'_2.

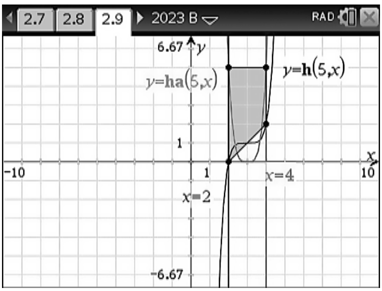
Der Anstieg von h_2 an der Stelle $x=4$ beträgt 2 und stimmt damit mit dem Anstieg von h'_2 überein.

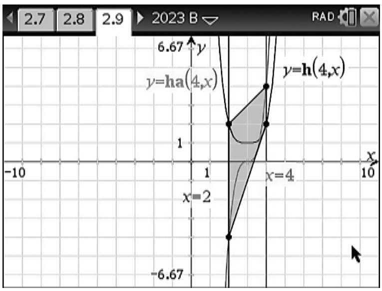
Damit ist gezeigt, dass h'_2 Tangente an h_2 ist.

Die Aussage ist also wahr.



d) Eine Veranschaulichung des Sachverhaltes ist hier für $k=4$ und $k=5$ dargestellt.





Begründung für Trapez
Sowohl P und Q als auch R und S haben jeweils übereinstimmende x-Koordinaten.
Damit sind PQ und RS parallel und daher liegt ein Trapez vor.

Berechnung der Flächeninhalte für k = 22 und k = 23
Da die x-Koordinaten der beiden parallelen Seiten des Trapezes jeweils gleich sind, benötigt man nur die Längen a und c dieser Seiten sowie die Höhe h = 2 des Trapezes, um mit der Formel $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ den Flächeninhalt zu berechnen.

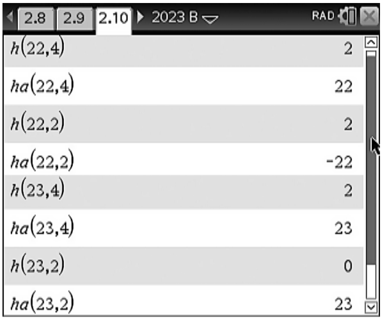
Mit h = 2 folgt $A = \frac{a+c}{2} \cdot 2 = a + c$, also für k = 22:

$$A_{22} = \underbrace{|\overrightarrow{PQ}|}_{22-2} + \underbrace{|\overrightarrow{RS}|}_{2-(-22)} = 20 + 24 = 44 \text{ FE}$$

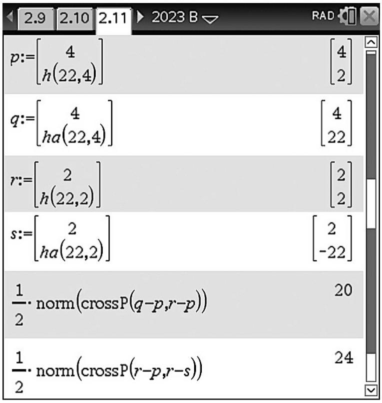
Für k = 23 ergibt sich das gleiche Ergebnis:

$$A_{23} = \underbrace{|\overrightarrow{PQ}|}_{23-2} + \underbrace{|\overrightarrow{RS}|}_{23-0} = 21 + 23 = 44 \text{ FE}$$

Damit ist die Aussage gezeigt.



Alternative 1:
Die Nutzung von Ortsvektoren und des Kreuzproduktes führt, wie hier am Beispiel für k = 22 dargestellt, zum gleichen Resultat.



Alternative 2:
Man kann sich die Berechnung vereinfachen, indem man die Applikation Notes nutzt und dort für beliebige Werte von k (hier mit m bezeichnet) die entsprechenden Streckenlängen berechnet.