AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Sprawozdanie z laboratorium 2a – Wyznaczanie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a i Newtona

Michał Szafarczyk

gr. Śr. 17:50 – 19:20

Narzędzia i sprzęt wykorzystany do zrealizowania ćwiczenia

Komputer z systemem Windows 10 x64 Home

Procesor: Intel Core i7-10750H @2.60 GHz / 5.00 GHz

Pamięć RAM: 32 GB

Język: Python 3.9

Środowisko: PyCharm

Użyte biblioteki pythonowskie:

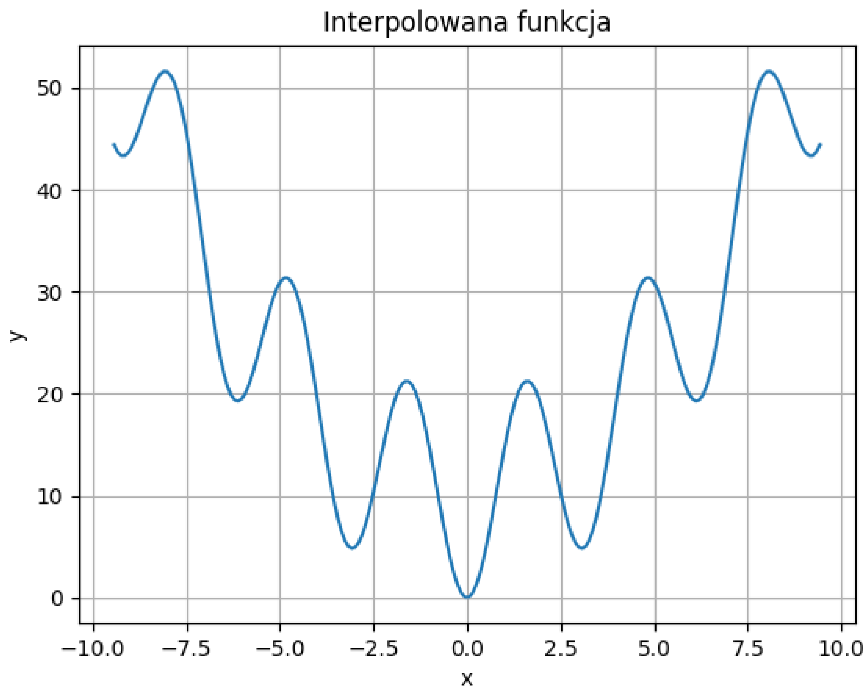
- Numpy – do wykonywania różnych operacji na liczbach
- Matplotlib – dla rysowania wykresów

1. Zadana funkcja:

Przekazana wraz z zadaniem funkcja, którą będziemy interpolować, dana jest wzorem

$$f(x) = 10 \cdot m + \frac{x^2}{k} - 10 \cdot m \cdot \cos(k \cdot x)\,, \quad x \in [-3\pi, 3\pi]$$

gdzie $m = 1,\ k = 0$



Wykres 1.1 – Interpolowana funkcja

2. Interpolacja metodą Lagrange'a:

Wielomian będziemy wyznaczać według wzoru na wielomian Lagrange'a stopnia n:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot L_k(x) \tag{2.1}$$

Gdzie $L_k(x)$ jest bazą Lagrange'a:

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{2.2}$$

3. Interpolacja metodą Newtona:

Wielomian będziemy wyznaczać według wzoru na wielomian Newtona stopnia n:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \tag{3.1}$$

Gdzie wzór na k-ty iloraz różnicowy przedstawia się wzorem:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \tag{3.2}$$

Przed obliczeniem wielomianu utworzymy tablicę ilorazów różnicowych, skąd pobierać będziemy wartości współczynników dla wzoru (2.3).

4. Węzły Czebyszewa:

Oprócz klasycznych punktów równoodległych będziemy również generować dla testów punkty nazywane **węzłami Czebyszewa**, które spełniają wzór:

$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a)cos\left(\frac{2k - 1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{4.1}$$

Gdzie a, b są odpowiednio początkiem i końcem zadanego przedziału (w przypadku funkcji, którą będziemy interpolować, będą równe $-3\pi\ oraz\ 3\pi$.

5. Wyznaczenie błędu interpolacji:

Miarami, którą przyjmiemy dla badania jak dokładne względem oryginalnej funkcji są funkcje sklejane będą:

- Maksimum z różnic wartości pomiędzy funkcją interpolowaną, a funkcją sklejaną. Liczymy je według wzoru:

$$max(|f(x) - S(x)|)$$

- Suma kwadratów różnic wartości funkcji interpolowanej i funkcji sklejanej, liczonej jako:

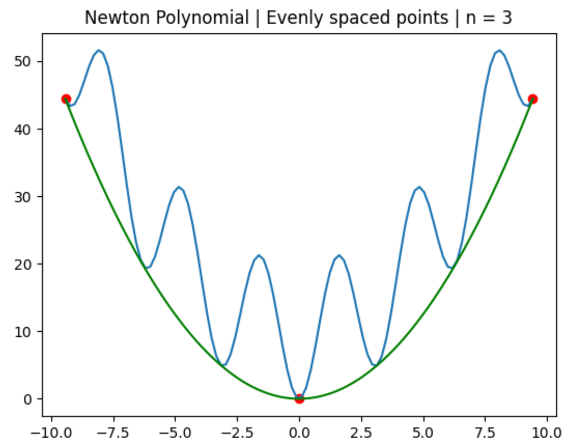
$$\sum_{i=0}^{n}[\, f(x) - S(x)\,]^2$$

Oczywiście nie jesteśmy w stanie dokładnie zbadać całego badanego obszaru zadanej funkcji pisząc program, dlatego różnice wartości będziemy badać w przyjętej liczbie punktów. Jak określiliśmy w punkcie 1., zadaną do testów funkcję interpolujemy w przedziale $x \in [-3\pi, 3\pi]$. Dla takiego przedziału postanowiliśmy przyjąć 500 równoodległych punktów dla badania błędów pomiędzy funkcjami (W kodzie liczba punktów została zdefiniowana jako wartość globalna, którą można zmienić w dowolnym momencie, jeśli przedział byłby większy).

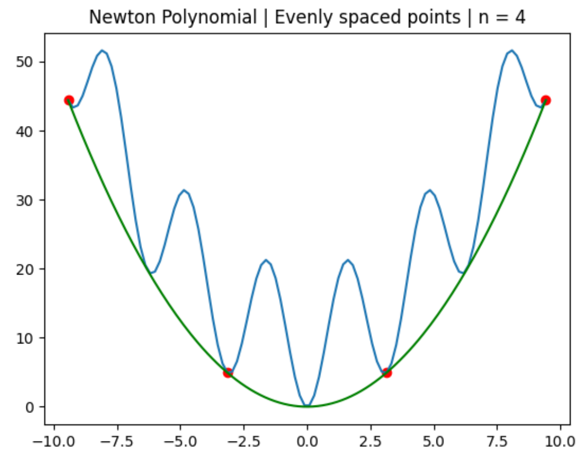
6. Testy:

Testy zostały przeprowadzone dla liczby węzłów $n \in [3, 4, 5, 7, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100]$, dla obu metod wyznaczania wielomianu interpolacyjnego oraz osobno dla generowania punktów równoodległych, jak i węzłów Czebyszewa. Funkcja zaznaczona na niebiesko jest interpolowaną funkcją, natomiast zielona wyznaczoną funkcją interpolującą. Czerwone punkty są wygenerowanymi punktami, na podstawie których odbywa się interpolacja.

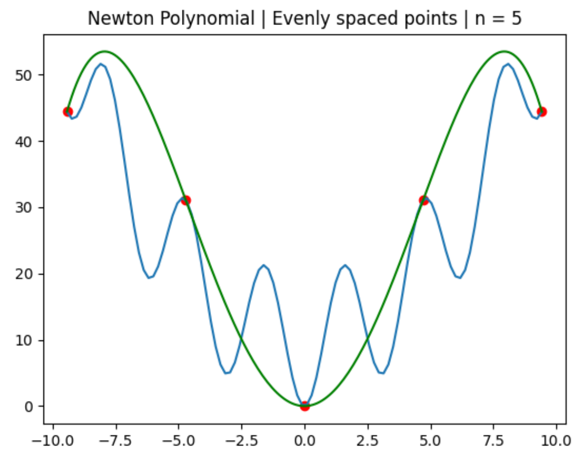
Metoda Newtona, węzły równoodległe:



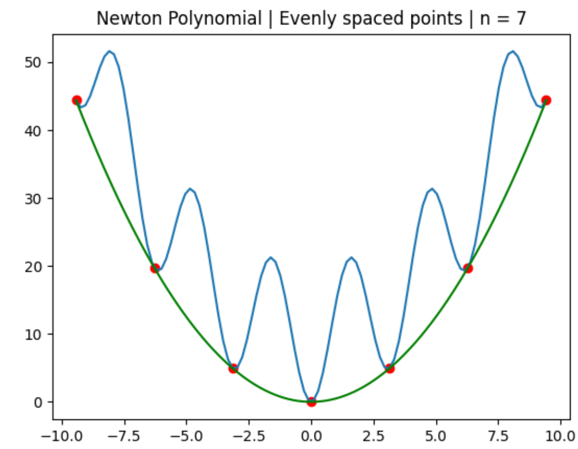
Wykres 5.1.1 Metoda Newtona, Regular, n = 3



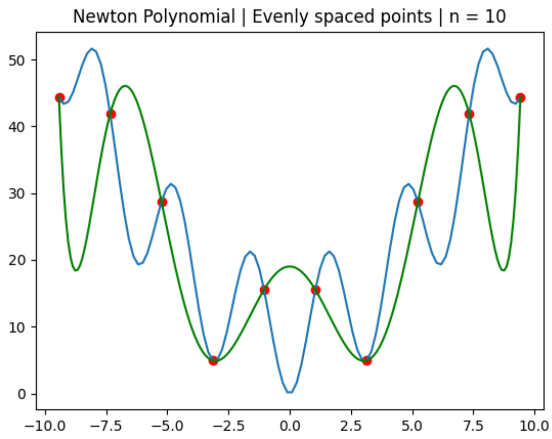
Wykres 5.1.2 Metoda Newtona, Regular, n = 4



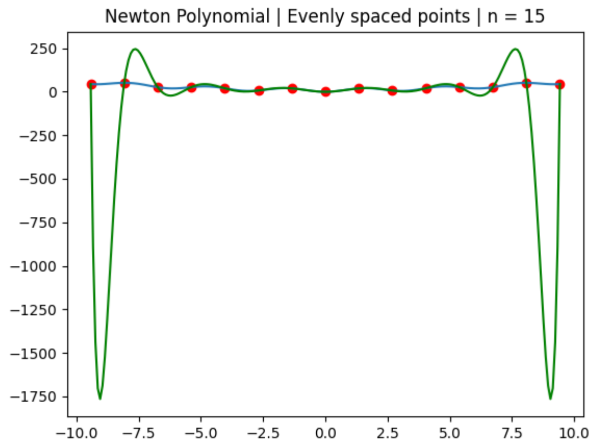
Wykres 5.1.3 Metoda Newtona, Regular, n = 5



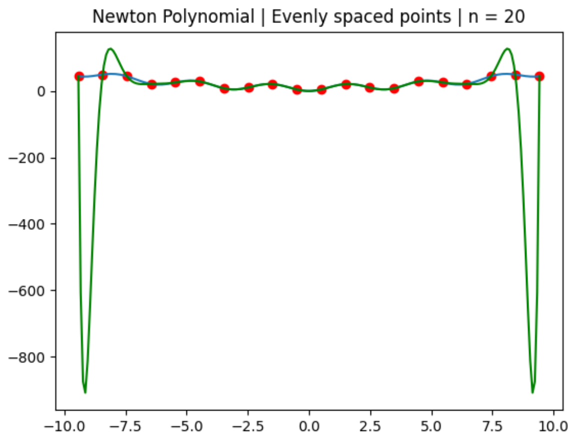
Wykres 5.1.4 Metoda Newtona, Regular, n = 7



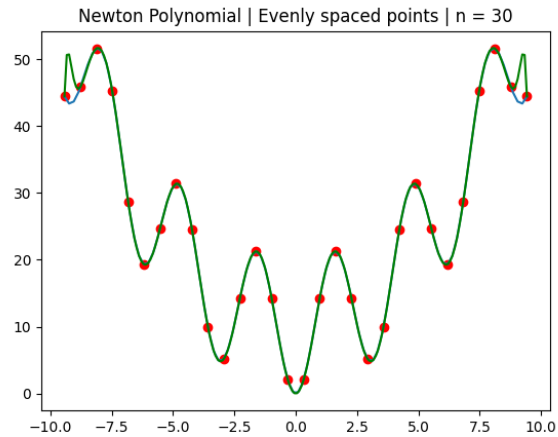
Wykres 5.1.5 Metoda Newtona, Regular, n = 10



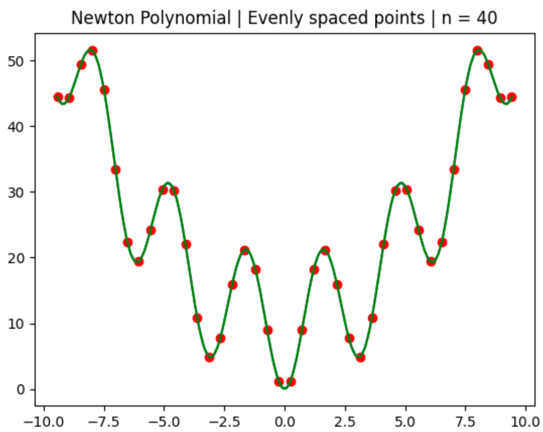
Wykres 5.1.6 Metoda Newtona, Regular, n = 15



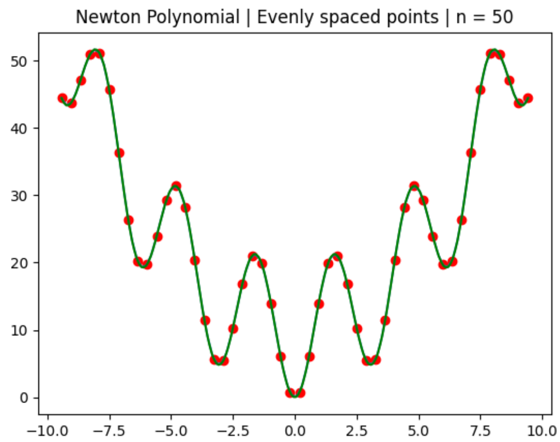
Wykres 5.1.7 Metoda Newtona, Regular, n = 20



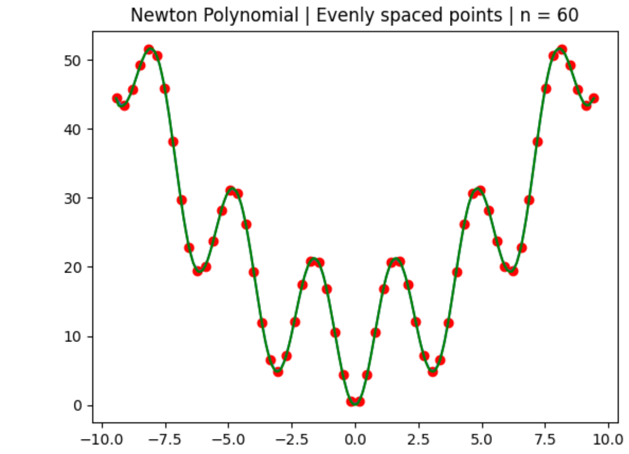
Wykres 5.1.8 Metoda Newtona, Regular, n = 30



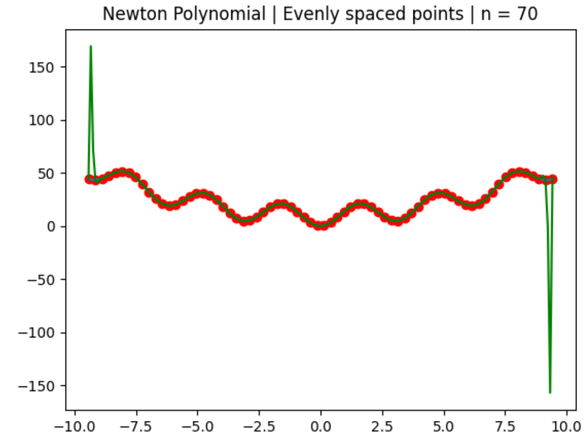
Wykres 5.1.9 Metoda Newtona, Regular, n = 40



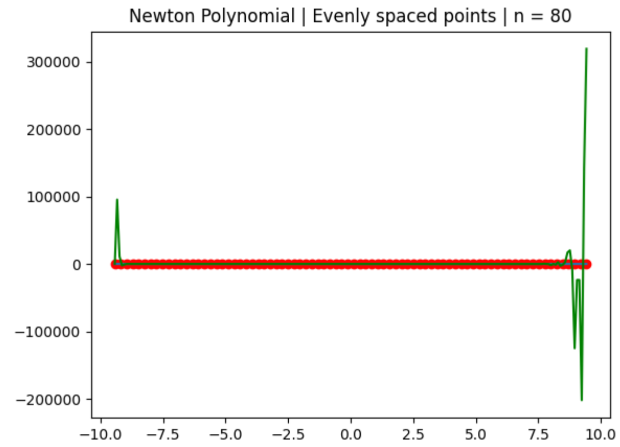
Wykres 5.1.10 Metoda Newtona, Regular, n = 50



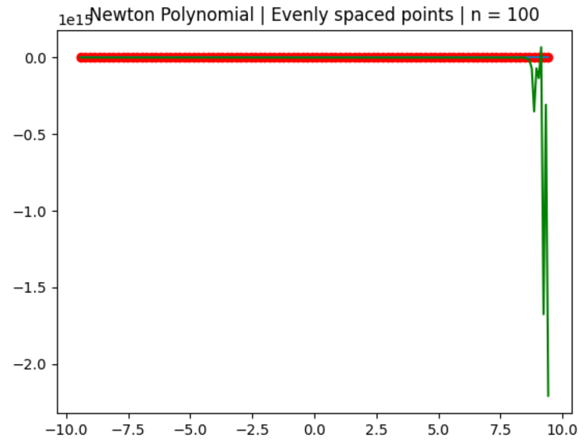
Wykres 5.1.11 Metoda Newtona, Regular, n = 60



Wykres 5.1.12 Metoda Newtona, Regular, n = 70

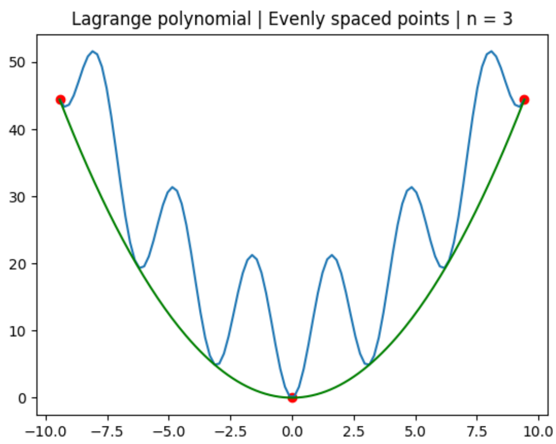


Wykres 5.1.13 Metoda Newtona, Regular, n = 80

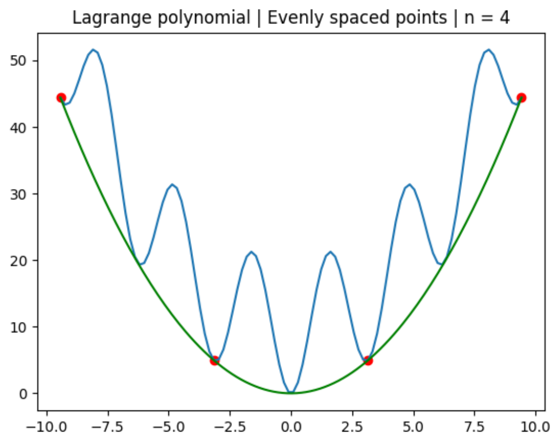


Wykres 5.1.14 Metoda Newtona, Regular, n = 100

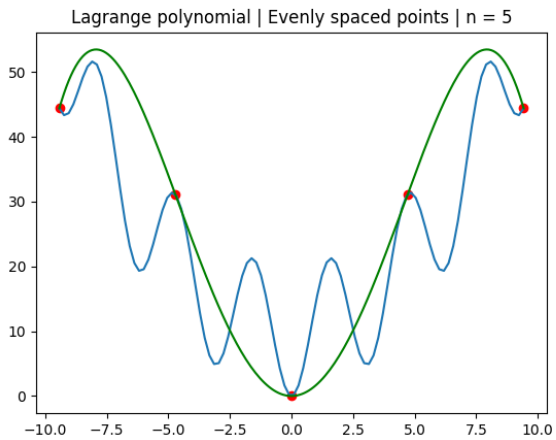
Metoda Lagrange’a, węzły równoodległe:



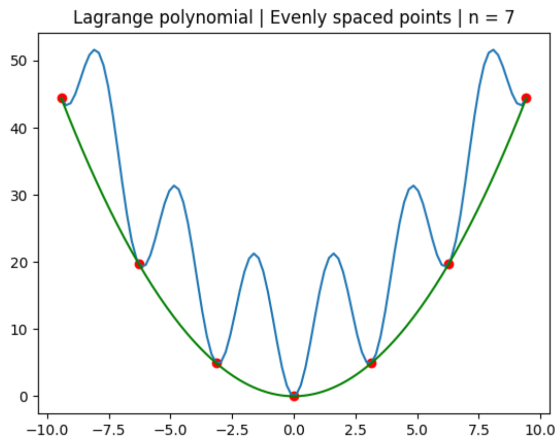
Wykres 5.2.1 Metoda Lagrange’a, Regular, n = 3



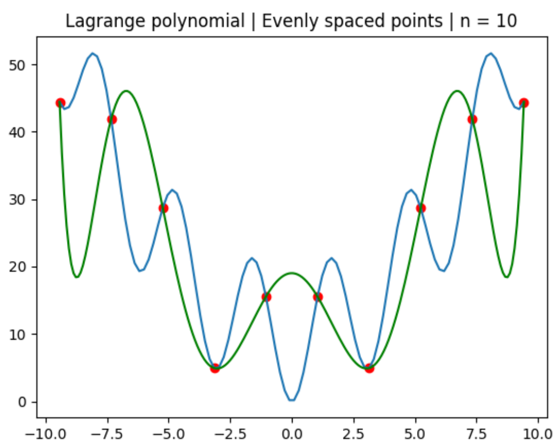
Wykres 5.2.2 Metoda Lagrange’a, Regular, n = 4



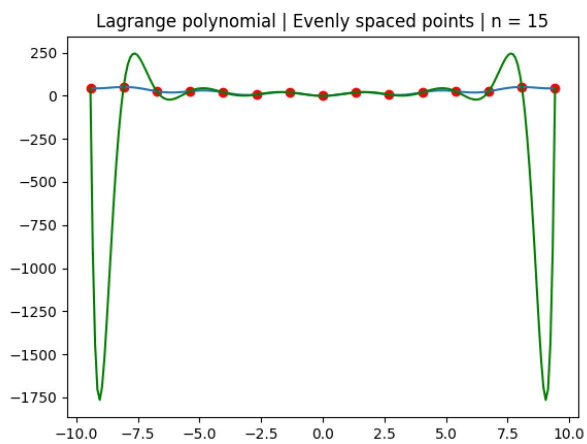
Wykres 5.2.3 Metoda Lagrange’a, Regular, n = 5



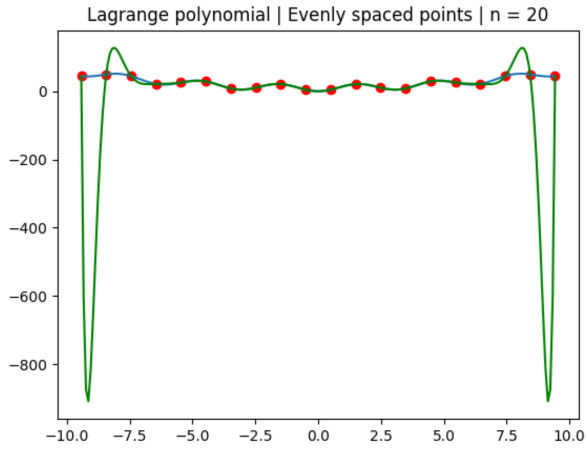
Wykres 5.2.4 Metoda Lagrange’a, Regular, n = 7



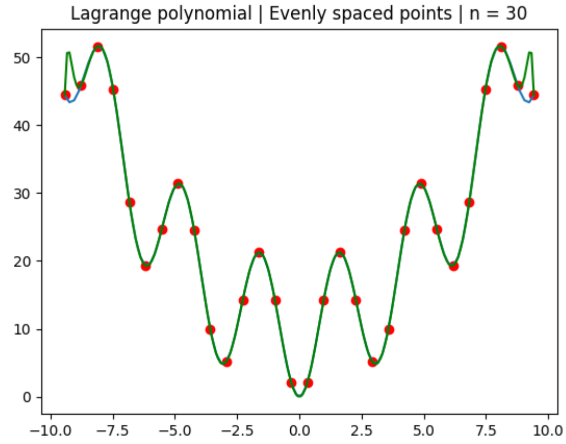
Wykres 5.2.5 Metoda Lagrange’a, Regular, n = 10



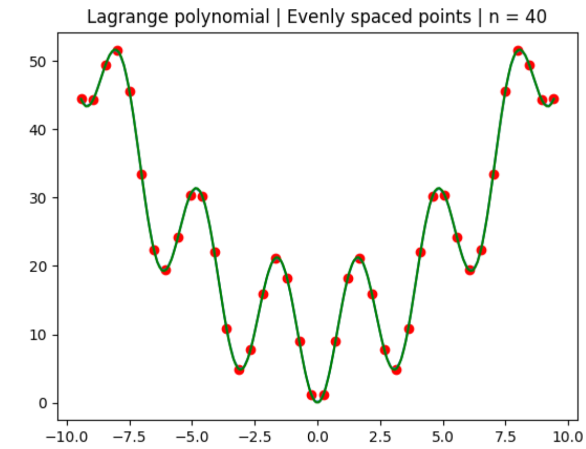
Wykres 5.2.6 Metoda Lagrange’a, Regular, n = 15



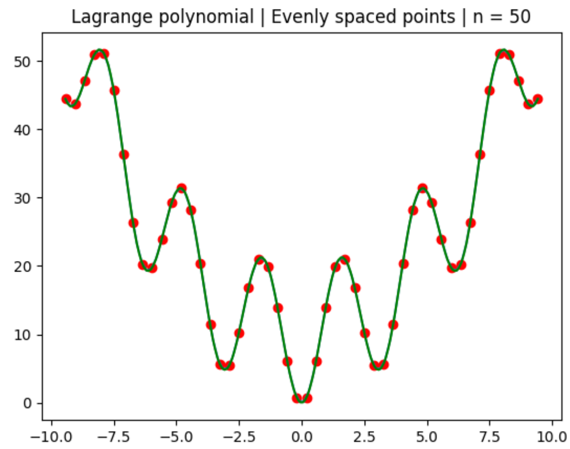
Wykres 5.2.7 Metoda Lagrange'a, Regular, n = 20



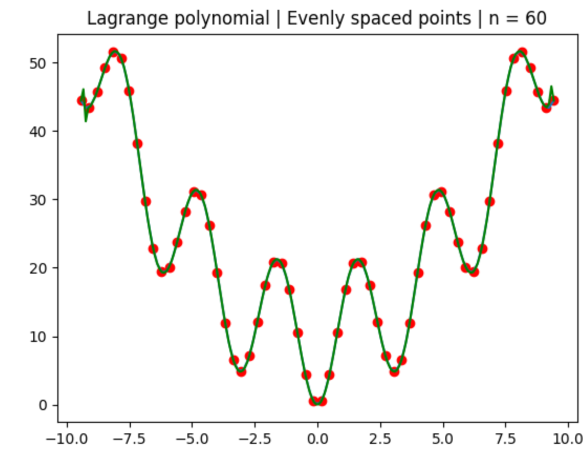
Wykres 5.2.8 Metoda Lagrange'a, Regular, n = 30



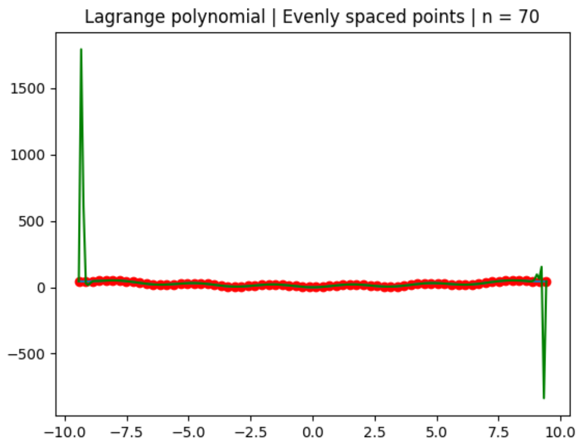
Wykres 5.2.9 Metoda Lagrange'a, Regular, n = 40



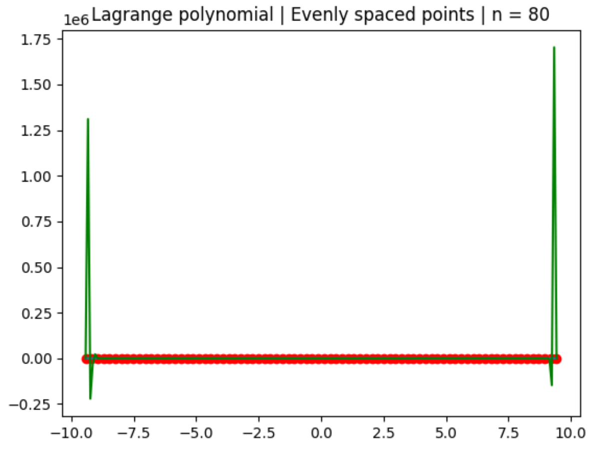
Wykres 5.2.10 Metoda Lagrange'a, Regular, n = 50



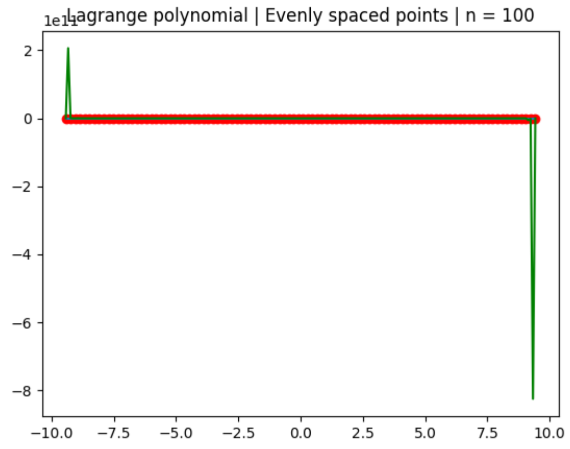
Wykres 5.2.11 Metoda Lagrange'a, Regular, n = 60



Wykres 5.2.12 Metoda Lagrange'a, Regular, n = 70

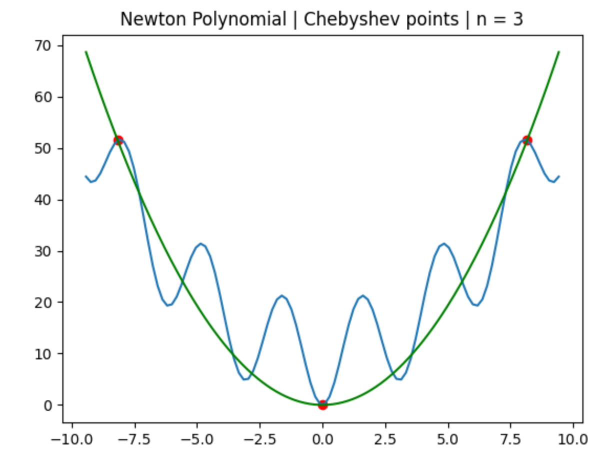


Wykres 5.2.13 Metoda Lagrange'a, Regular, n = 80

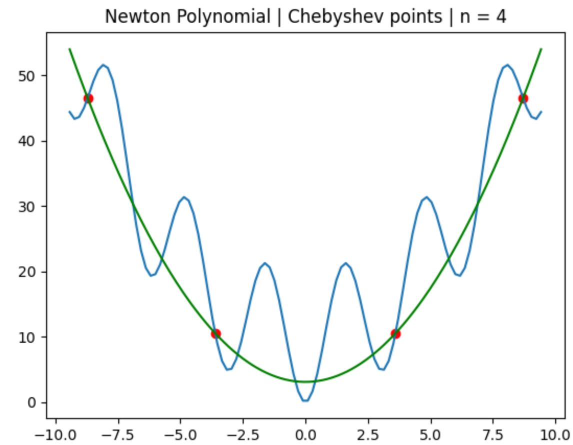


Wykres 5.2.14 Metoda Lagrange'a, Regular, n = 100

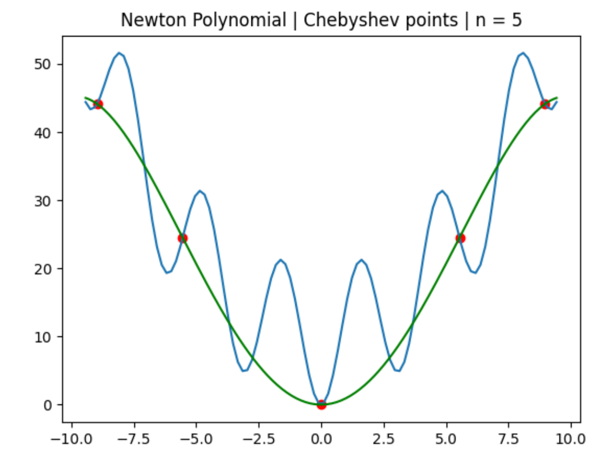
Metoda Newtona, węzły Czebyszewa:



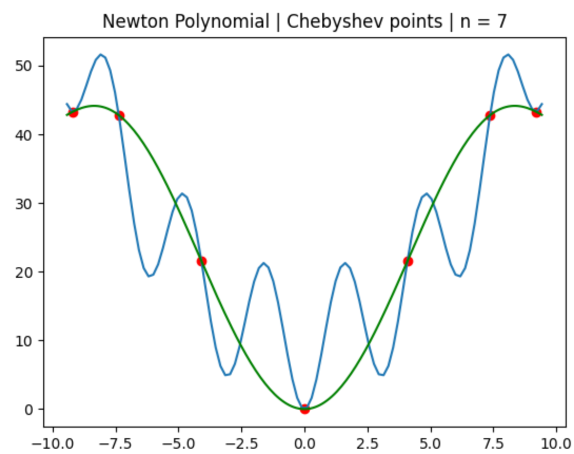
Wykres 5.3.1 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 3



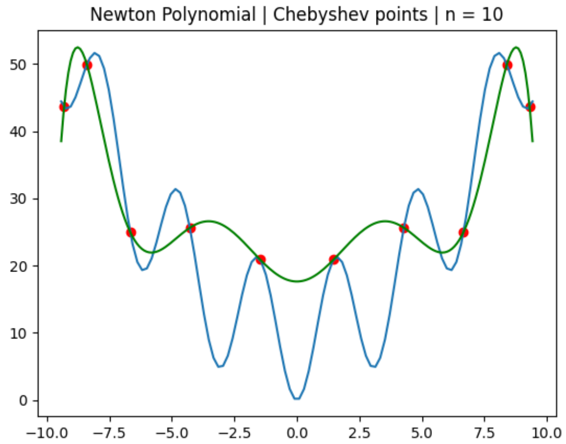
Wykres 5.3.2 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 4



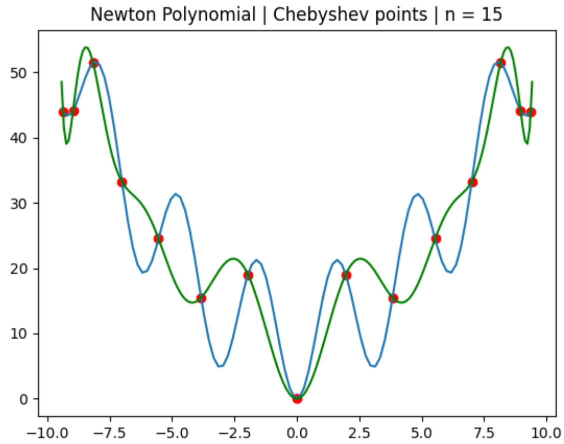
Wykres 5.3.3 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 5



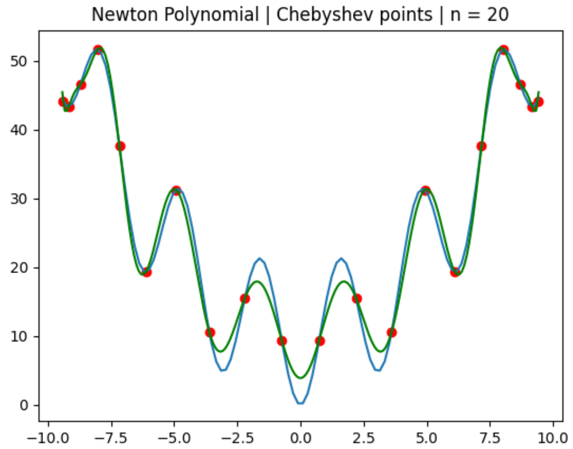
Wykres 5.3.4 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 7



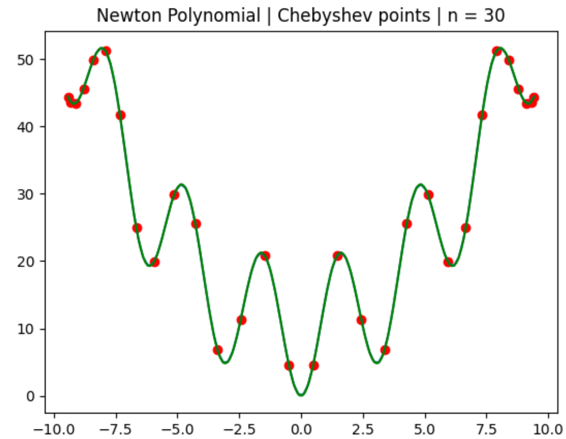
Wykres 5.3.5 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 10



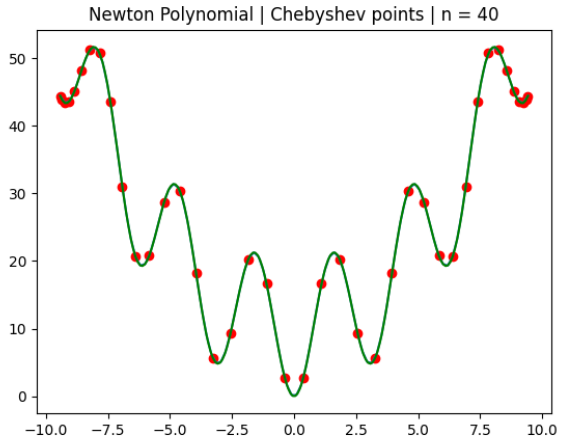
Wykres 5.3.6 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 15



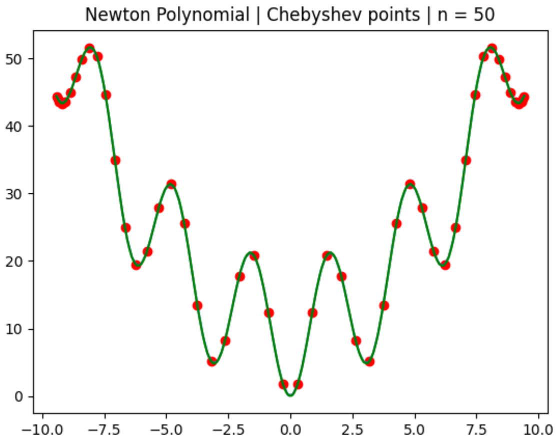
Wykres 5.3.7 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 20



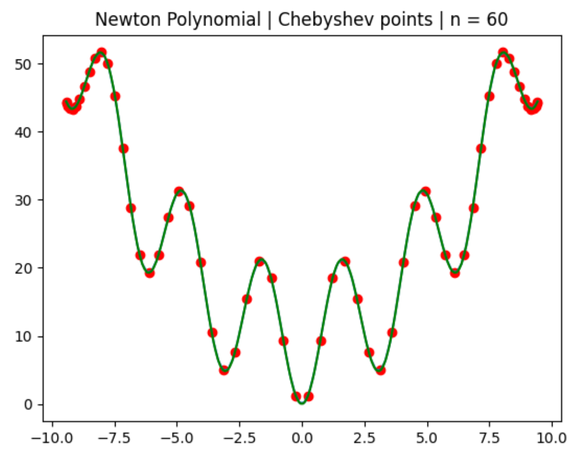
Wykres 5.3.8 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 30



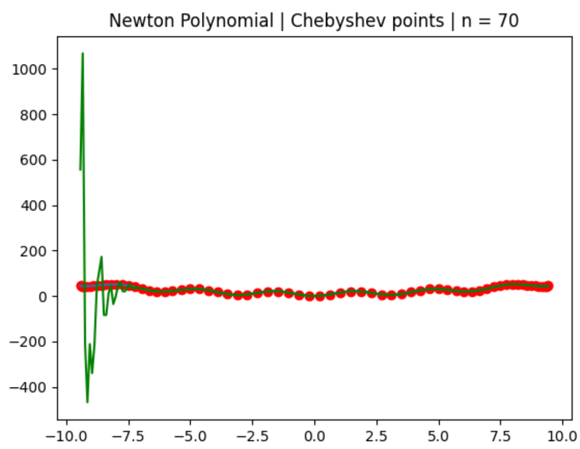
Wykres 5.3.9 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 40



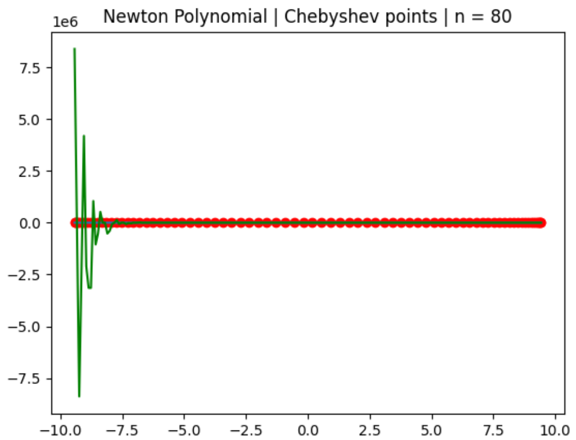
Wykres 5.3.10 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 50



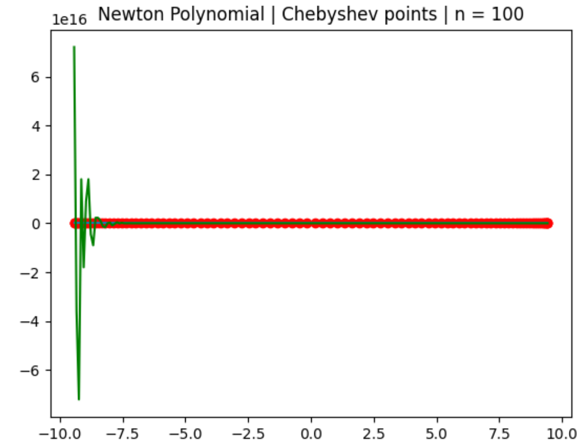
Wykres 5.3.11 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 60



Wykres 5.3.12 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 70

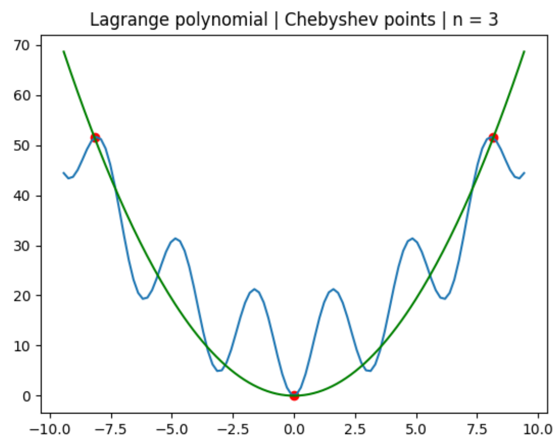


Wykres 5.3.13 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 80

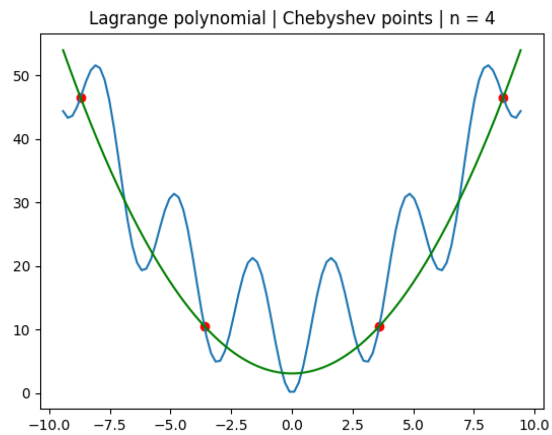


Wykres 5.3.14 Metoda Newtona, Chebyshev, n = 100

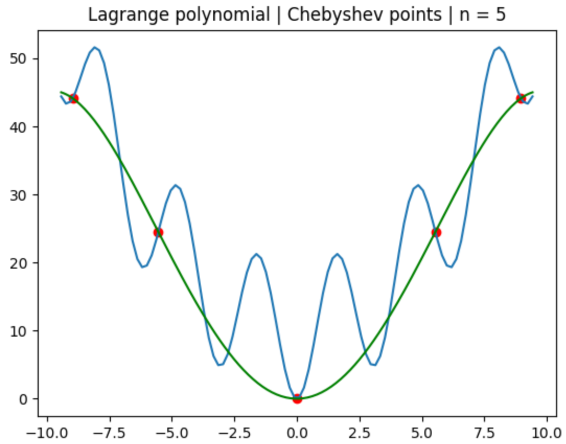
Metoda Lagrange'a, węzły Czebyszewa:



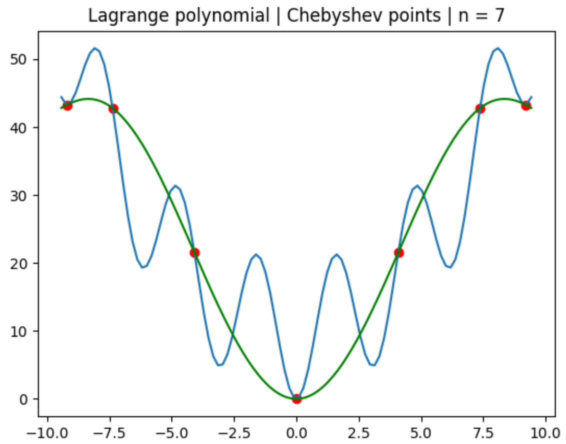
Wykres 5.4.1 Metoda Lagrange'a, Chebyshev, n = 3



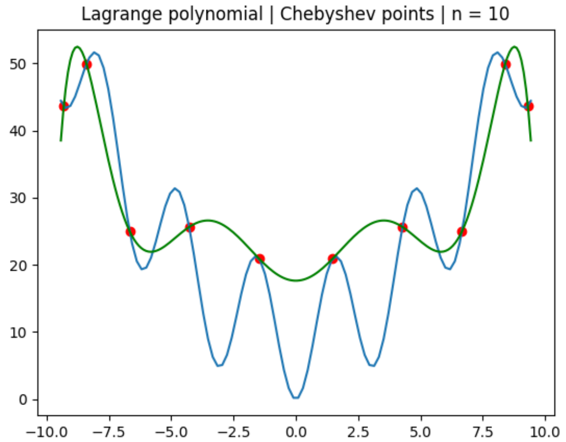
Wykres 5.4.2 Metoda Lagrange'a, Chebyshev, n = 4



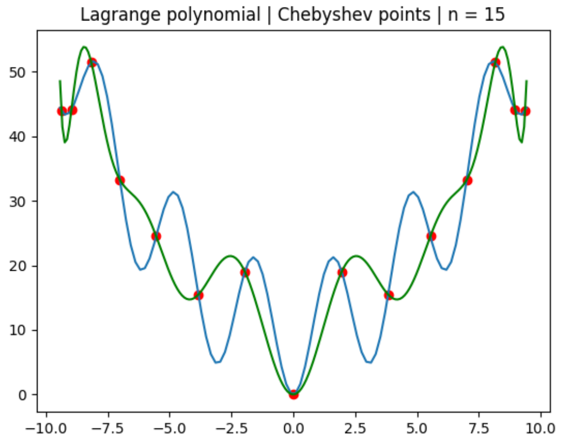
Wykres 5.4.3 Metoda Lagrange'a, Chebyshev, n = 5



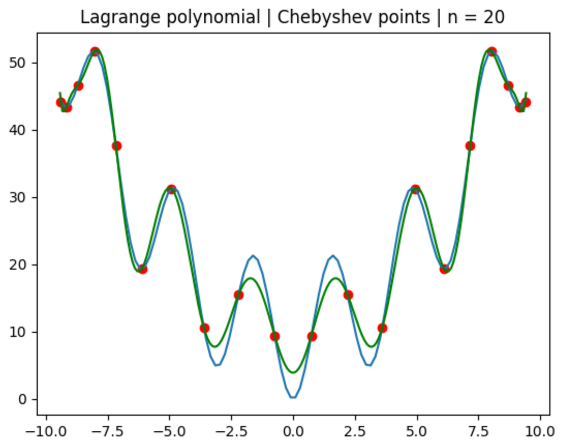
Wykres 5.4.4 Metoda Lagrange'a, Chebyshev, n = 7



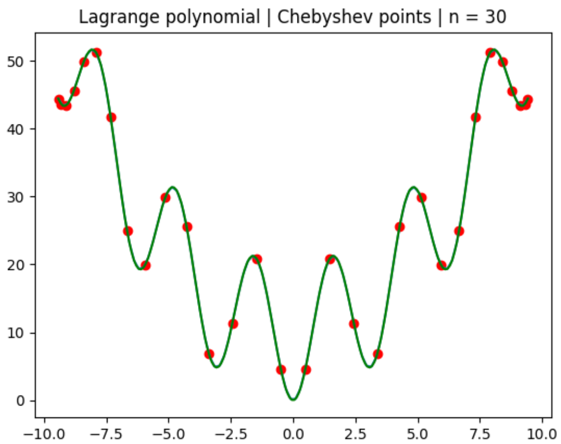
Wykres 5.4.5 Metoda Lagrange'a, Chebyshev, n = 10



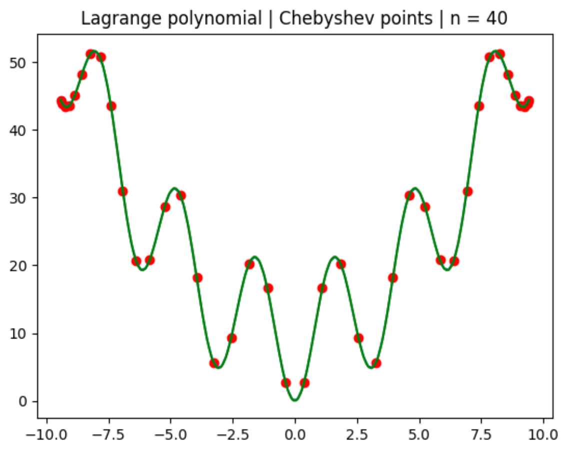
Wykres 5.4.6 Metoda Lagrange'a, Chebyshev, n = 15

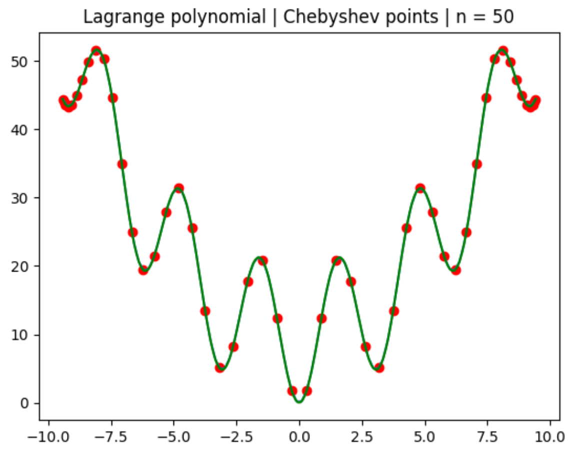


Wykres 5.4.7 Metoda Lagrange'a, Chebyshev, n = 20

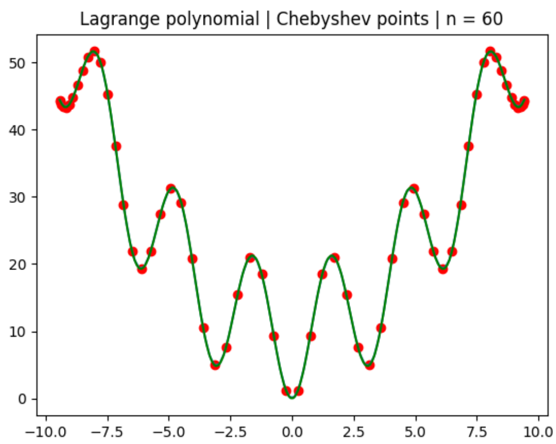


Wykres 5.4.8 Metoda Lagrange'a, Chebyshev, n = 30

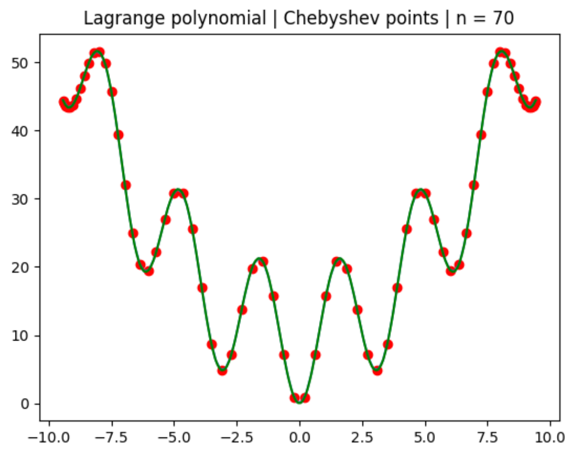




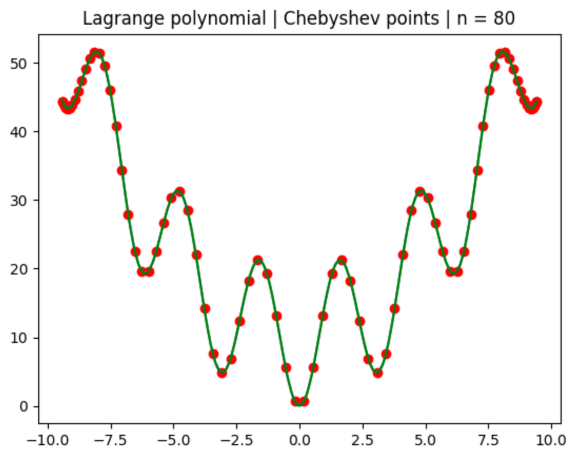
Wykres 5.4.9 Metoda Lagrange'a, Chebyshev, n = 40 Wykres 5.4.10 Metoda Lagrange'a, Chebyshev, n = 50



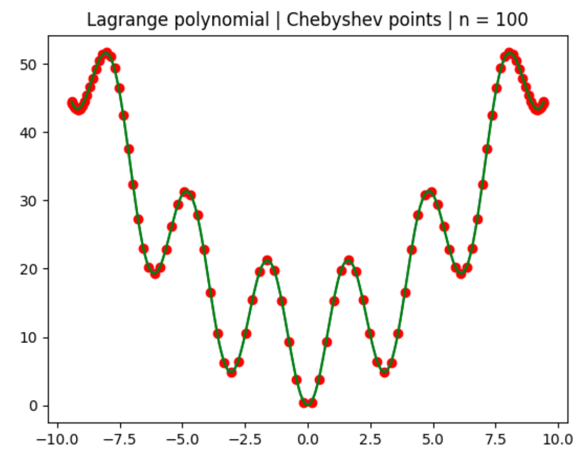
Wykres 5.4.11 Metoda Lagrange'a, Ch., n = 60



Wykres 5.4.12 Metoda Lagrange'a, Ch., n = 70



Wykres 5.4.13 Metoda Lagrange'a, Ch., n = 80



Wykres 5.4.14 Metoda Lagrange'a, Ch., n = 100

Błędy interpolacji:

Oznaczenia:

- Ch. – Chebyshev points
- Reg. – Regular points
- Lag. – Lagrange's method
- New. – Newton's method

Max Error				
n	Ch. Lag.	Ch. New.	Reg. Lag.	Reg. New.
3	24.21417	24.21417	19.9998	19.9998
4	16.75257	16.75257	19.9998	19.9998
5	18.93478	18.93478	26.36861	26.36861
7	18.34141	18.34141	19.9998	19.9998
10	21.41282	21.41282	29.0218	29.0218
15	15.37579	15.37579	1809.555	1809.555
20	3.845138	3.845138	958.3564	958.3564
30	0.000778	0.000778	7.607334	7.607334
40	2.77E-09	0.000222	0.001002	0.001005
50	7.11E-14	0.001266	0.005442	0.000405
60	1.07E-13	0.007861	4.313964	0.396435
70	1.07E-13	1535.216	1742.605	237.6132
80	1.21E-13	12582913	2097108	572793
100	9.24E-14	1.44E+17	1.1E+12	4.98E+15

Tabela 6.1 Maksymalny błąd wartości

Sqr Error				
n	Ch. Lag.	Ch. New.	Reg. Lag.	Reg. New.
3	54761.03	54761.03	74850	74850
4	38587.08	38587.08	74850	74850
5	39308.93	39308.93	71313.15	71313.15
7	42538.06	42538.06	74850	74850
10	46053.78	46053.78	104690	104690
15	30327.25	30327.25	99130499	99130499
20	1805.532	1805.532	19533203	19533203
30	0.000115	0.000115	741.8915	741.8912
40	1.66E-15	1.64E-07	9.18E-06	9.09E-06
50	1.35E-25	7.52E-06	7.03E-05	1.01E-06
60	2.37E-25	0.000331	43.72197	0.649819
70	2.8E-25	8625795	8500047	206150.9
80	2.63E-25	6.15E+14	1.49E+13	1.05E+12
100	2.93E-25	4.21E+34	2.05E+24	5.09E+31

Tabela 6.2 Suma kwadratów błędów dla 500 punktów

7. Podsumowanie:

Jak widać na podstawie testów, obie metody pozwalają na poprawne interpolowanie funkcji. Punkty równoodległe dla dużych wartości n prowadzą do pojawienia się efektu Rungego, co widać wyraźnie na krańcach przedziału na wykresach 5.1.6 – 5.1.7, 5.1.12 – 5.1.14 oraz 5.2.6., 5.2.7 i 5.2.12 – 5.2.14.

Efekt ten można zniwelować za pomocą wybrania punktów, będących węzłami Czebyszewa. Dla porównania, w metodzie Lagrange'a efekt ten nie występuje, jeżeli użyjemy tych węzłów. Dla metody Newtona z kolei z pewnego powodu efekt występuje tylko na początku przedziału.

Najlepszy wynik, jaki udało się uzyskać, według wyznaczonych błędów interpolacji, zachodził dla $n = 50$ przy użyciu metody Lagrange'a i używając węzłów Czebyszewa.