AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Sprawozdanie z laboratorium 4 – Interpolacja funkcjami sklejanymi 2 i 3 stopnia

Michał Szafarczyk

gr. Śr. 17:50 – 19:20

Narzędzia i sprzęt wykorzystany do zrealizowania ćwiczenia

Komputer z systemem Windows 10 x64 Home

Procesor: Intel Core i7-10750H @2.60 GHz / 5.00 GHz

Pamięć RAM: 32 GB

Język: Python 3.9

Środowisko: PyCharm

Użyte biblioteki pythonowskie:

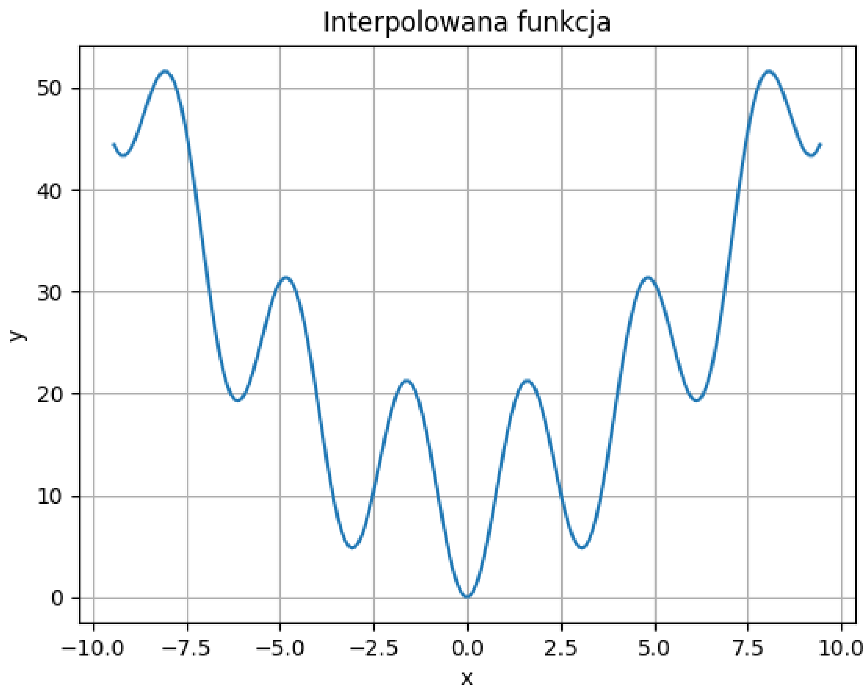
- Numpy – do wykonywania różnych operacji na liczbach
- Matplotlib – dla rysowania wykresów

1. Zadana funkcja:

Przekazana wraz z zadaniem funkcja, którą będziemy interpolować, dana jest wzorem

$$f(x) = 10 \cdot m + \frac{x^2}{k} - 10 \cdot m \cdot \cos(k \cdot x)\,, \quad x \in [-3\pi, 3\pi]$$

gdzie $m = 1,\ k = 0$



Wykres 1.1 – Interpolowana funkcja

2. Interpolacja za pomocą funkcji sklejanej 2 stopnia – wstęp teoretyczny

Interpolacja funkcjami sklejanymi **stopnia k** dla danych **n punktów** odbywa się za pomocą utworzenia **n-1** funkcji pomiędzy tymi punktami, które na swoich łączeniach (a więc w danych n punktach) spełniają pewne założenia.

Równanie funkcji sklejanej 2. stopnia zapisujemy ogólnie jako

$$S_j(x) = c_j + b_j(x - x_j) + a_j(x - x_j)^2 \tag{2.1}$$

$gdzie\ j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

Pochodne dla odpowiednich funkcji mają więc postać:

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) \tag{2.2}$$

Warunki, które taka funkcja musi spełniać to:

1. $S_j(x_j) = y_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$
2. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}), \quad j \in \{1, 2, \dots, n-2\}$
3. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1}), \quad j \in \{1, 2, \dots, n-2\}$

oraz dodatkowo musi spełniać warunek brzegowy:

4. $S'_0(x_0) = A$

Aby wyznaczyć te funkcje, musimy wyznaczyć współczynniki a, b oraz c dla każdej z nich używając postaci ogólnej (2.1) oraz nałożonych warunków 1.-4.

Dla współczynników a_j bezpośrednim wnioskiem z warunku 1. oraz wzoru (2.1) jest

$$c_j = y_j \tag{2.3}$$

Dla współczynników c_j – używając warunku 3. w równaniu (2.2):

$$\frac{d}{dx} S_{j+1}(x_{j+1}) = \frac{d}{dx} S_j(x_{j+1})$$

$$b_{j+1} + 2a_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1}) = b_j + 2a_j(x_{j+1} - x_j)$$

$$b_{j+1} + 2a_{j+1} = b_j + 2a_j(x_{j+1} - x_j)$$

$$\Rightarrow \quad a_j = \frac{b_{j+1} - b_j}{2(x_{j+1} - x_j)} \tag{2.4}$$

Dla współczynników b_j korzystamy z warunku 1. i 2. w równaniu (2.1) oraz ze wzoru (2.4):

$$S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$$

$$c_{j+1} + b_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1}) + a_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1})^2 = c_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + a_j(x_{j+1} - x_j)^2$$

$$c_{j+1} = c_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + a_j(x_{j+1} - x_j)^2$$

$$y_{j+1} = y_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + a_j(x_{j+1} - x_j)^2$$

$$y_{j+1} = y_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + \frac{b_{j+1} - b_j}{2(x_{j+1} - x_j)}(x_{j+1} - x_j)^2$$

$$y_{j+1} = y_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + \frac{b_{j+1} - b_j}{2}(x_{j+1} - x_j)$$

$$y_{j+1} = y_j + \left(b_j + \frac{b_{j+1} - b_j}{2}\right)(x_{j+1} - x_j)$$

$$y_{j+1} - y_j = \left(\frac{b_{j+1} + b_j}{2}\right)(x_{j+1} - x_j)$$

$$2(y_{j+1} - y_j) = (b_{j+1} + b_j)(x_{j+1} - x_j)$$

$$2\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} = b_{j+1} + b_j$$

Przesuwamy indeks o 1 w dół, tzn. $j + 1 \to j$:

$$2\frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} = b_j + b_{j-1}$$

Definiujemy również γ_j w celu uproszczenia zapisu ostatniego wyrażenia:

$$b_j + b_{j-1} = 2\gamma_j, \qquad \gamma_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \qquad (2.6),\ \ (2.7)$$

Powyższe przejścia służą uzyskaniu układu równań, w którym jedynymi niewiadomymi są wartości współczynników b_j. Wartości a_j obliczymy za pomocą (2.4) po rozwiązaniu układu równań dla b_j.

Należy zauważyć, że wzór (2.6) daje nam $n - 1$ równań, podczas gdy mamy n niewiadomych, dlatego będziemy musieli użyć wybranego warunku brzegowego (4.), aby otrzymać dodatkowe równanie i rozwiązać układ.

W celu rozwiązania układu równań dla współczynników b_j, który tworzy nam się ze wzoru (2.6), zapiszemy go w postaci mnożenia macierzy:

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2\gamma_{n-1} \end{pmatrix}$$

Taka forma daje nam przede wszystkim korzyści w postaci czytelności oraz pozwala nam użyć funkcji biblioteki numpy dla liniowej algebry, aby rozwiązać ten układ (oczywiście po uwzględnieniu dodatkowych warunków brzegowych). Pierwszy rząd zawiera „?", ze względu na to, że jego zawartość zależy od przyjętego warunku brzegowego.

3. Warunki brzegowe dla funkcji sklejanej 2 stopnia:

3.1. Natural Spline (Free Boundary)

Warunek ten przedstawia się równaniem:

$$S'_1(x_1) = 0 \tag{3.1.1}$$

Korzystając ze wzoru (2.2) otrzymujemy równość

$$\begin{gathered} b_1 + c_1(x_1 - x_1) = 0 \\ b_1 = 0 \end{gathered} \tag{3.1.2}$$

Korzystając z tej równości możemy znacznie uprościć sobie obliczenia. Wkładając do układu równań (2.6), którego w ogólnym przypadku zapisywaliśmy jako mnożenie macierzowe, aby go rozwiązać, otrzymujemy kolejno:

$$\begin{gathered} b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \rightarrow b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \rightarrow b_3 = 2\gamma_3 - 2\gamma_2 = 2(\gamma_3 - \gamma_2) \\ b_3 + b_4 = 2\gamma_4 \rightarrow b_4 = 2\gamma_4 - 2(\gamma_3 - \gamma_2) = 2(\gamma_4 - \gamma_3 + \gamma_2) \\ \vdots \end{gathered}$$

$$b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \rightarrow b_n = 2\gamma_n - 2\gamma_{n-1} = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - \gamma_{n-3} + \cdots) \tag{3.1.3}$$

W związku z tym rozpoczynając od obliczenia początkowej wartości $b_2 = 2\gamma_2$, każdą kolejną możemy obliczyć ze wzoru

$$b_j = 2\left(\sum_{k=2}^{j} (-1)^{k+j}\gamma_k\right), \quad k \in \{2, 3, \dots, n\}$$

Dla wygody i efektywności w kodzie użyjemy rekurencyjnego wzoru (2.6) oraz wartości początkowej (3.1.2).
Współczynniki a_j oraz c_j obliczamy tak samo, jak w ogólnym przypadku.

3.2. Clamped Boundary

Warunek ten przedstawia się równaniem:

$$S'_1(x_1) = f'_1(x_1), \quad S'_n(x_n) = f'_n(x_n) \tag{3.2.1}$$

(pierwsze pochodne na granicach są znane lub przybliżamy je ilorazami różnicowymi)

W przypadku funkcji sklejanych 2. stopnia wystarczy nam tylko 1 warunek, dlatego użyjemy jedynie warunku $S'_1(x_1) = f'_1(x_1)$.

Jeżeli nie znamy wartości $f'_1(x_1)$, będziemy musieli ją przybliżyć. Do tego celu użyjemy ilorazu różnicowego:

$$f'_1 \approx \frac{f_1(x_2) - f_1(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{3.2.2}$$

Po wstawieniu (2.2) oraz (3.2.2) do (3.2.1) otrzymujemy:

$$b_1 + c_1(x_1 - x_1) = \frac{f_1(x_2) - f_1(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3.2.3}$$

Pamiętamy jednak, że zdefiniowaliśmy w (2.7) w podobnej postaci γ_j (indeks j jest tam o 1 większy), dlatego wykorzystując γ_j możemy zapisać:

$$b_1 = \gamma_2 \tag{3.2.4}$$

Uwzględniając (3.2.4) w układzie równań (2.6) otrzymujemy:

$$\begin{cases} b_1 = \gamma_2 \\ b_2 + \gamma_2 = 2\gamma_2 \\ b_3 + b_2 = 2\gamma_3 \\ \vdots \\ b_n + b_{n-1} = 2\gamma_n \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} b_1 = \gamma_2 \\ b_2 = \gamma_2 \\ b_3 = 2\gamma_3 - \gamma_2 \\ b_4 = 2(\gamma_4 - \gamma_3) + \gamma_2 \\ b_5 = 2(\gamma_5 - \gamma_4 + \gamma_3) - \gamma_2 \\ b_6 = 2(\gamma_6 - \gamma_5 + \gamma_4 - \gamma_3) + \gamma_2 \\ \vdots \\ b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - \gamma_{n-3} + \cdots) \pm \gamma_2 \end{cases}$$

Wraz z kolejnymi iteracjami łatwo zauważyć zależność dzięki której możemy zapisać wzór na j-ty wyraz ciągu b_j:

$$b_j = 2\left(\sum_{k=3}^{j} (-1)^{k+j}\gamma_k\right) + (-1)^j\gamma_2 \tag{3.2.5}$$

$$b_1 = \gamma_2, \quad b_2 = \gamma_2$$

$$j \in \{3, 4, \dots, n\}$$

Za pomocą tego wzoru możemy iteracyjnie wyznaczyć wartości b_j, natomiast a_j oraz c_j tak, jak w przypadku ogólnym z (2.3) i (2.4). W przypadku tego warunku również skorzystamy ze wzoru (3.1.2) z wartością początkową (3.2.4) w celu efektywniejszej i klarowniejszej implementacji.

4. Interpolacja za pomocą funkcji sklejanej 3 stopnia – wstęp teoretyczny

Interpolacja funkcjami sklejanymi stopnia 3. opiera się na bardzo podobnych zasadach, jak dla stopnia 2. Oczywiście podstawową różnicą jest to, że używamy w niej wielomianów stopnia 3, zatem ogólny wzór funkcji sklejanej będzie miał postać:

$$S_j(x) = d_j + c_j(x - x_j) + b_j(x - x_j)^2 + a_j(x - x_j)^3 \tag{4.1}$$

$gdzie\ j \in [1, 2, 3, \dots, n-1]$

Pochodna funkcji sklejanej będzie miała wzór:

$$S'_j(x) = c_j + 2b_j(x - x_j) + 3a_j(x - x_j)^2 \tag{4.2}$$

Natomiast druga pochodna:

$$S''_j(x) = 2b_j + 6a_j(x - x_j) \tag{4.3}$$

Warunki, jakie taka funkcja musi spełniać:

1. $S_j(x_j) = y_j, \quad j \in [1, 2, \dots, n-1]$
2. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}), \quad j \in [1, 2, \dots, n-2]$
3. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1}), \quad j \in [1, 2, \dots, n-2]$
4. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1}), \quad j \in [1, 2, \dots, n-2]$

Dodatkowo musi spełniać warunki brzegowe:

5. $S''_1(x_1) = A, \quad S''_{n-1}(x_n) = B$

Ponieważ $S_j(x)$ są funkcjami sześciennymi, to każda $S''_j(x)$ jest liniowa na przedziale, na którym została określona, czyli na $[x_j, x_{j+1}]$. Dlatego możemy wprowadzić:

$$h_j = x_{j+1} - x_j \tag{4.4}$$

Wtedy możemy zapisać równanie dla $S''_j(x)$ w postaci

$$S''_j(x) = S''_j(x_j)\frac{x_{j+1} - x}{h_j} + S''_j(x_{j+1})\frac{x - x_j}{h_j} \tag{4.5}$$

Następnie całkując podwójnie obie strony równania otrzymujemy:

$$S_j(x) = \frac{S''_j(x_j)}{6h_j}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{S''_j(x_{j+1})}{6h_j}(x - x_j)^3 + C(x - x_j) + D(x_{j+1} - x) \tag{4.6}$$

Korzystając z warunków interpolacji 1. oraz 2. możemy wyznaczyć stałe całkowania C i D. Po ich wyliczeniu otrzymujemy:

$$S_j(x) = \frac{S"_j(x_j)}{6h_j}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{S"_j(x_{j+1})}{6h_j}(x - x_j)^3 + \left(\frac{y_{j+1}}{h_j} - \frac{S"_j(x_{j+1})h_j}{6}\right)(x - x_j)$$
$$+ \left(\frac{y_j}{h_j} - \frac{S"_j(x_{j+1})h_j}{6}\right)(x_{j+1} - x) \tag{4.7}$$

We wzorze (4.7) jedyną niewiadomą jest $S"_j(x_j)$. Aby je wyliczyć, wykorzystamy warunek 3.

Różniczkujemy $S_j(x)$:

$$S'_j(x_j) = \frac{-h_j}{3}S"_j(x_j) - \frac{h_j}{6}S"_j(x_{j+1}) - \frac{y_j}{h_j} + \frac{y_{j+1}}{h_j} \tag{4.8}$$

Wprowadzamy oznaczenia dla uproszczenia zapisu:

$$\sigma_j = \frac{1}{6}S"_j(x_j) \quad oraz \quad \Delta_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} \tag{4.9}$$

Wtedy (4.8) przybierze postać:

$$S'_j(x_j) = \Delta_j - h_j(2\sigma_j + \sigma_{j+1}) \tag{4.10}$$

Natomiast dla funkcji sklejanej z drugiej strony x_j:

$$S'_{j-1}(x_j) = \Delta_{j-1} - h_{j-1}(2\sigma_j + \sigma_{j-1}) \tag{4.11}$$

Korzystając następnie z warunku 3. oraz (4.10) i (4.11):

$$\Delta_{j-1} - h_{j-1}(2\sigma_j + \sigma_{j-1}) = \Delta_j - h_j(2\sigma_j + \sigma_{j+1})$$
$$h_{j-1}\sigma_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)\sigma_j + h_j\sigma_{j+1} = \Delta_j - \Delta_{j-1} \tag{4.12}$$

$gdzie\ j \in [2, 3, \dots, n-1]$

Jak możemy zauważyć z (4.12) otrzymujemy uład $n-2$ równań liniowych. Potrzebujemy jednak wyznaczyć n niewiadomych σ_j, dlatego będziemy potrzebowali dodatkowo 2 warunków brzegowych (warunek 5.).

W momencie, kiedy obliczymy wartości σ_j, możemy bezpośrednio obliczyć wszystkie współczynniki zgodnie ze wzorami:

- $a_j = \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{h_j}$
- $b_j = 3 \cdot \sigma_j$
- $c_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - h_j \cdot (\sigma_{j+1} + 2 \cdot \sigma_j)$
- $d_j = y_j$

$gdzie\ j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

Układ z (4.12) możemy podobnie, jak w przypadku funkcji sklejanych 2 stopnia, zapisać w postaci macierzowej. Dzięki tej formie łatwiej będzie nam w ogólnym przypadku wyliczyć wartości σ_j:

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \Delta_4 - \Delta_3 \\ \vdots \\ \Delta_{j-1} - \Delta_{j-2} \\ ? \end{pmatrix}$$

Pierwszy i ostatni rząd zawierają „?”, ponieważ zależą one bezpośrednio od przyjętych warunków brzegowych.

5. Warunki brzegowe dla funkcji sklejanej 3 stopnia:

5.1. Natural Spline (Free boundary):

Warunek ten przedstawia się wzorami:

$$S"_1(x_1) = 0 \quad oraz \quad S"_{n-1}(x_n) = 0 \tag{5.1.1}$$

Używając (4.9) w połączeniu z (5.1.1) otrzymujemy:

$$\sigma_1 = \frac{1}{6} S"_1(x_1) = 0$$

$$\sigma_n = \frac{1}{6} S"_{n-1}(x_n) = 0 \tag{5.1.2}$$

Początkowo z (4.12) otrzymywaliśmy układ z $n-2$ równaniami oraz n niewiadomych. Z warunku brzegowego otrzymaliśmy w (5.1.2) wartości 2 z szukanych wartości. W związku z tym układ z pozostałymi $n-2$ równaniami oraz $n-2$ niewiadomych jest rozwiązywalny. Ostatecznie zapisując układ w postaci macierzowej otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \Delta_4 - \Delta_3 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \end{pmatrix}$$

5.2. Clamped Boundary:

Warunek przedstawia się równaniami:

$$S'_1(x_1) = f'_1(x_1)$$
$$S'_{n-1}(x_n) = f'_{n-1}(x_n) \tag{5.2.1}$$

W (4.10) wyznaczyliśmy wzór na $S'_j(x_j)$, więc możemy rozpisać lewe strony równań.

$$\Delta_1 - h_1(2\sigma_1 + \sigma_2) = f'_1(x_1)$$
$$\Delta_{n-1} - h_{n-1}(2\sigma_{n-1} + \sigma_n) = f'_{n-1}(x_n)$$

$$\downarrow$$

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\Delta_1 - f'_1(x_1)}{h_1}$$
$$2\sigma_{n-1} + \sigma_n = \frac{\Delta_{n-1} - f'_{n-1}(x_n)}{h_{n-1}} \tag{5.2.2}$$

Jeżeli znamy $f'_1(x_1)$ i/lub $f'_{n-1}(x_n)$, możemy wstawić je w tym miejscu, a następnie rozwiązać układ i otrzymać w efekcie σ_1 oraz σ_2.
Jeżeli nie wartości pierwszych pochodnych nie są nam znane, możemy je przybliżyć za pomocą ilorazów różnicowych Δ_1 i Δ_{n-1}, które obliczamy zgodnie z (4.9).

Wstawiając ilorazy różnicowe do (5.2.2) otrzymujemy:

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = 0$$
$$2\sigma_{n-1} + \sigma_n = 0 \tag{5.2.3}$$

Są to 2 dodatkowe równania, których potrzebowaliśmy dla rozwiązywalności układu (4.12). Po uwzględnieniu (5.2.3) układ (4.12) przybiera postać:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \Delta_4 - \Delta_3 \\ \vdots \\ \Delta_{j-1} - \Delta_{j-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.3. Cubic Function (z wykładu):

Warunek ten zakłada, że:

$$C_1(x) - wielomian\ 3\ stopnia\ przechodzący\ przez\ pierwsze\ 4\ punkty$$

$$C_{n-1}(x) - wielomian\ 3\ stopnia\ przechodzący\ przez\ ostatnie\ 4\ punkty$$

$$S'''_1(x_1) = C'''_1(x_1) \quad oraz \quad S'''_{n-1}(x_n) = C'''_{n-1}(x_n) \qquad (5.3.1)$$

Następnie określamy iloraz różnicowy

$$\Delta_j^{(k)} = f[x_j, \dots, x_k] = \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_k] - f[x_j, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_j} \qquad (5.3.2)$$

$$\Delta_j^{(0)} = f[x_j] = f(x_j) = y_j$$

gdzie

$$\Delta_j^{(1)} = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - przybliża\ pierwszą\ pochodną$$

$$\Delta_j^{(2)} = \frac{\Delta_{j+1}^{(1)} - \Delta_j^{(1)}}{x_{j+1} - x_j}; \quad 2\Delta_j^{(2)} \approx f_j''(x_j)$$

$$\Delta_j^{(3)} = \frac{\Delta_{j+1}^{(2)} - \Delta_j^{(2)}}{x_{j+1} - x_j}; \quad 6\Delta_j^{(3)} \approx f_j'''(x_j) \qquad (5.3.3)$$

(Ogólnie przybliżenie otrzymujemy za pomocą $n! \cdot \Delta_j^{(n)} \approx f_j^{(n)}$

(Wynika to z Uogólnionego Twierdzenia o Wartości Średniej). Do obliczenia ilorazów różnicowych będziemy używali wyłącznie 4 pierwszych oraz 4 ostatnich punktów interpolacji (zgodnie z określeniem warunku (5.3.1)).

Różniczkując wzór (4.5) (wzór na $S''_j(x_j)$) otrzymujemy:

$$S'''_j(x_j) = \frac{-S''_j(x_j)}{h_j} + \frac{S''_j(x_{j+1})}{h_j}$$

$$S'''_j(x_j) = \frac{-6\sigma_j}{h_j} + \frac{6\sigma_{j+1}}{h_j} \qquad (5.3.4)$$

Używając (5.3.3) oraz (5.3.4) we wzorach (5.3.1):

$$\begin{cases} S'''_1(x_1) = C'''_1(x_1) \\ S'''_{n-1}(x_n) = C'''_{n-1}(x_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-6\sigma_1}{h_1} + \dfrac{6\sigma_2}{h_1} = 6\Delta_1^{(3)} \\ \dfrac{-6\sigma_{n-1}}{h_{n-1}} + \dfrac{6\sigma_n}{h_{n-1}} = 6\Delta_{n-3}^{(3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ h_{n-1}\sigma_{n-1} - h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{cases} \qquad (5.3.5)$$

Układ w (5.3.5) doprowadziliśmy do takiej postaci, ponieważ po wpisaniu 2 uzyskanych do układu (4.12) otrzymamy w ten sposób symetryczną macierz:

$$\begin{pmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^2 \Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \Delta_4 - \Delta_3 \\ \vdots \\ \Delta_{j-1} - \Delta_{j-2} \\ -h_{n-1}^2 \Delta_{n-3}^{(3)} \end{pmatrix}$$

6. Wyznaczenie błędu interpolacji:

Miarami, którą przyjmiemy dla badania jak dokładne względem oryginalnej funkcji są funkcje sklejane będą:

- Maksimum z różnic wartości pomiędzy funkcją interpolowaną, a funkcją sklejaną. Liczymy je według wzoru:

$$max(|f(x) - S(x)|)$$

- Suma kwadratów różnic wartości funkcji interpolowanej i funkcji sklejanej, liczonej jako:

$$\sum_{i=0}^{n} [\, f(x) - S(x) \,]^2$$

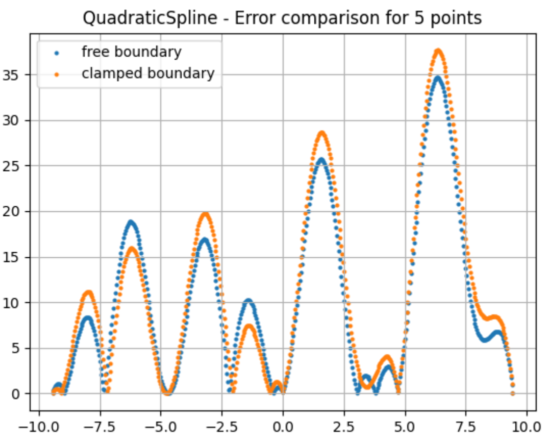
Oczywiście nie jesteśmy w stanie dokładnie zbadać całego badanego obszaru zadanej funkcji pisząc program, dlatego różnice wartości będziemy badać w przyjętej liczbie punktów. Jak określiliśmy w punkcie 1., zadaną do testów funkcję interpolujemy w przedziale $x \in [-3\pi, 3\pi]$. Dla takiego przedziału postanowiliśmy przyjąć 500 równoodległych punktów dla badania błędów pomiędzy funkcjami (W kodzie liczba punktów została zdefiniowana jako wartość globalna, którą można zmienić w dowolnym momencie, jeśli przedział byłby większy).

7. Testy:

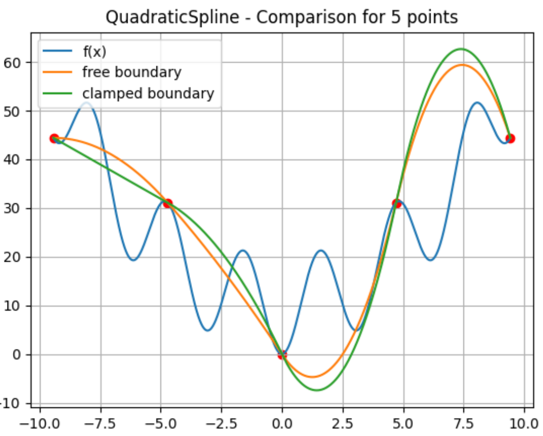
Testy przeprowadzimy dla różnej liczby danych punktów; $n \in \{5, 10, 15, 30, 50, 100, 1000\}$.

Prezentacja składać się będzie z narysowanych wykresów uzyskanych funkcji oraz i błędów względem interpolowanej funkcji, wyznaczanych zgodnie z punktem 6. Dla skrócenia zapisu Maksimum z różnic wartości pomiędzy funkcją interpolowaną, a funkcją sklejaną bedziemy oznaczać jako *max_err*, natomiast sumę kwadratów różnic wartości funkcji interpolowanej i funkcji sklejanej – *sqr_sum_err*.

7.1. Funkcje sklejane 2 stopnia:



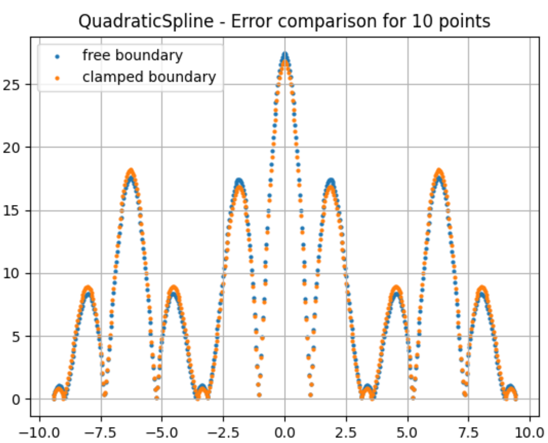
Wykres 7.1.1.1 – Błędy dla 5 punktów



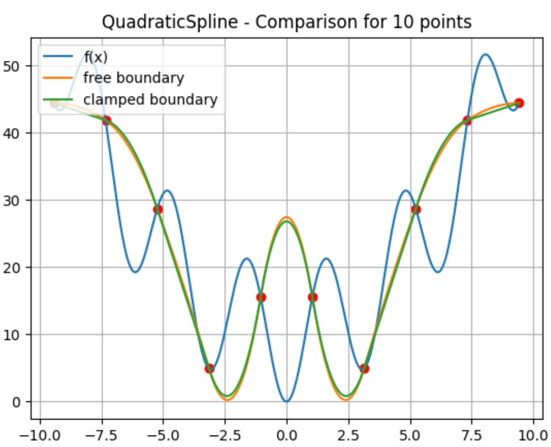
Wykres 7.1.1.2 – wykresy dla 5 punktów

Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 34.640067029461214
  sqr_sum_err = 91420.61003622171
- **Clamped boundary:**
  max_err = 37.65282873807821
  sqr_sum_err = 110124.25880782961



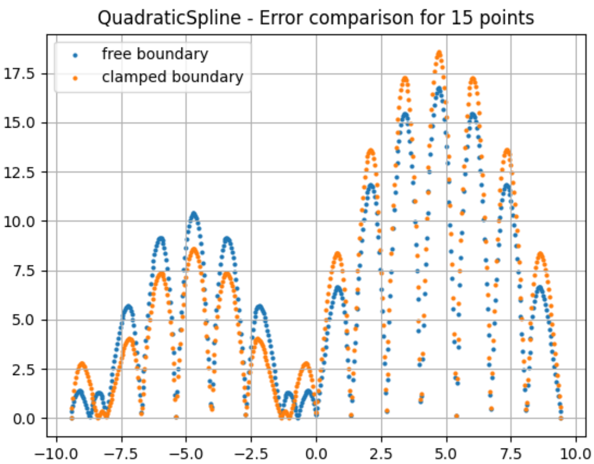
Wykres 7.1.2.1 – Błędy dla 10 punktów



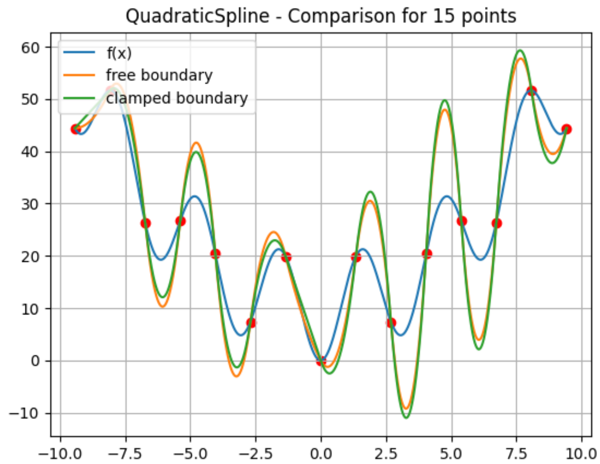
Wykres 7.1.2.2 – wykresy dla 10 punktów

Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 27.4347743575039
  sqr_sum_err = 58337.59204107858
- **Clamped boundary:**
  max_err = 26.798284028236004
  sqr_sum_err = 58396.68746636867



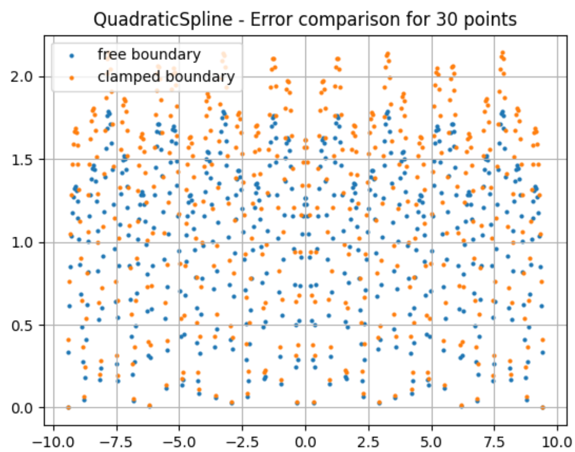
Wykres 7.1.3.1 – Błędy dla 15 punktów



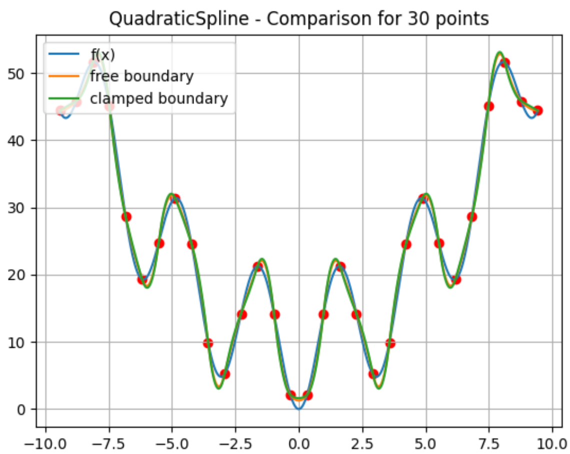
Wykres 7.1.3.2 – wykresy dla 15 punktów

Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 16.754765970482637
  sqr_sum_err = 28135.12292997304
- **Clamped boundary:**
  max_err = 18.56141247182636
  sqr_sum_err = 32054.38682545404



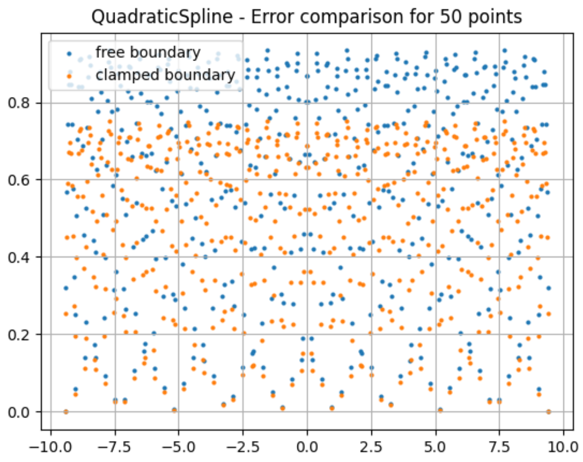
Wykres 7.1.4.1 – Błędy dla 30 punktów



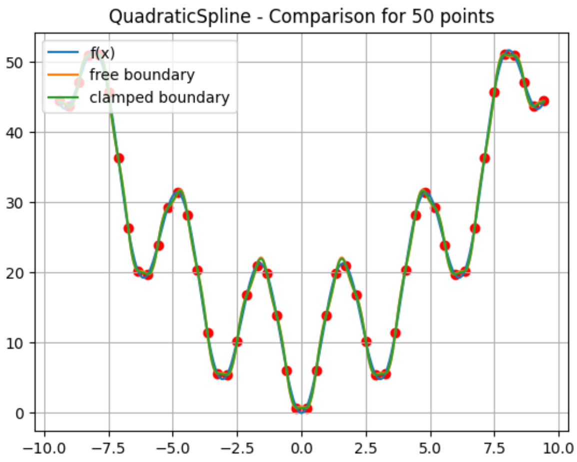
Wykres 7.1.4.2 – wykresy dla 30 punktów

Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 1.7909935923220175
  sqr_sum_err = 628.213388045798
- **Clamped boundary:**
  max_err = 2.1434910039059716
  sqr_sum_err = 946.4184074027455



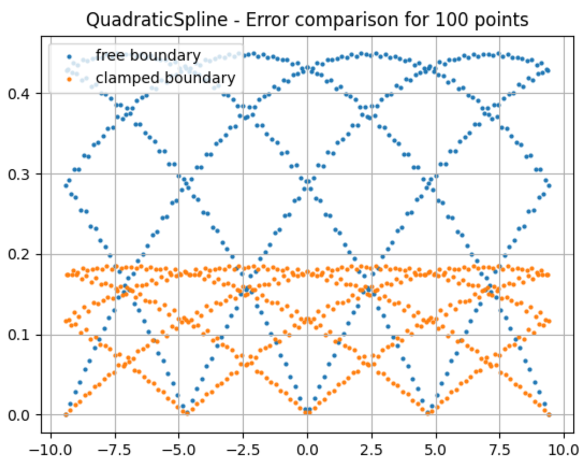
Wykres 7.1.5.1 – Błędy dla 50 punktów



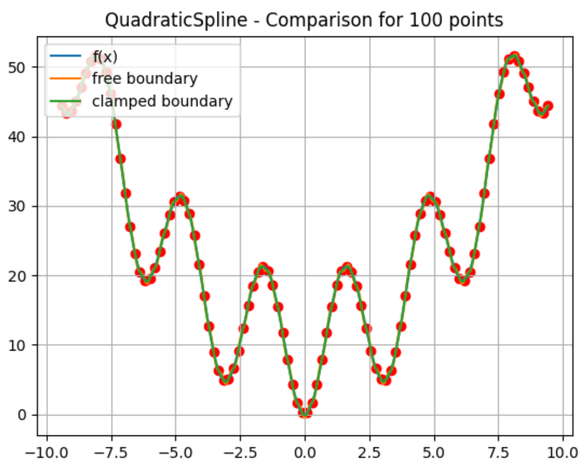
Wykres 7.1.5.2 – wykresy dla 50 punktów

Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 0.9336719929490584
  sqr_sum_err = 218.61013708912202
- **Clamped boundary:**
  max_err = 0.7501174655165102
  sqr_sum_err = 139.00502958905227



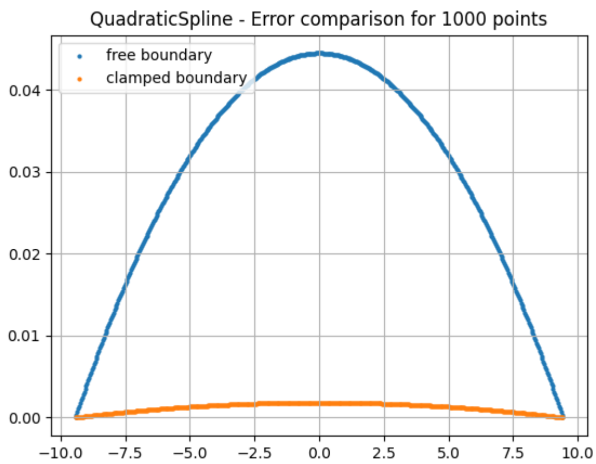
Wykres 7.1.6.1 – Błędy dla 100 punktów



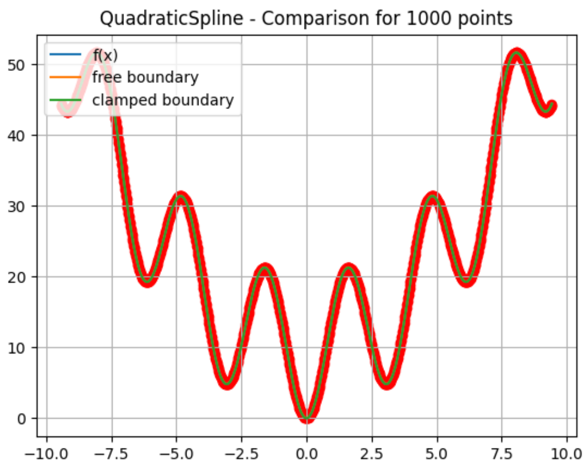
Wykres 7.1.6.2 – wykresy dla 100 punktów

Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 0.4495619559330777
  sqr_sum_err = 53.5602274940677
- **Clamped boundary:**
  max_err = 0.18490526679472907
  sqr_sum_err = 8.973381377011275



Wykres 7.1.7.1 – Błędy dla 50 punktów

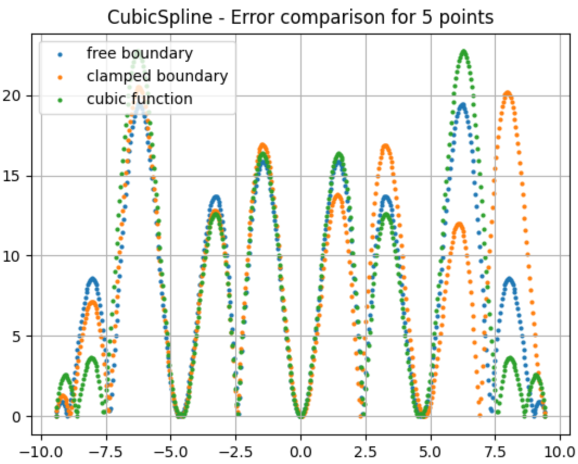


Wykres 7.1.7.2 – wykresy dla 50 punktów

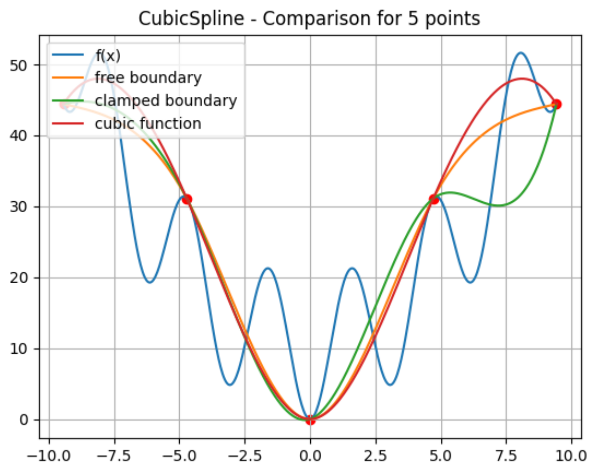
Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 0.04445733975071167
  sqr_sum_err = 0.5260079959357178
- **Clamped boundary:**
  max_err = 0.0018242116145180762
  sqr_sum_err = 0.0008857653161446208

7.2. Funkcje sklejane 3 stopnia:



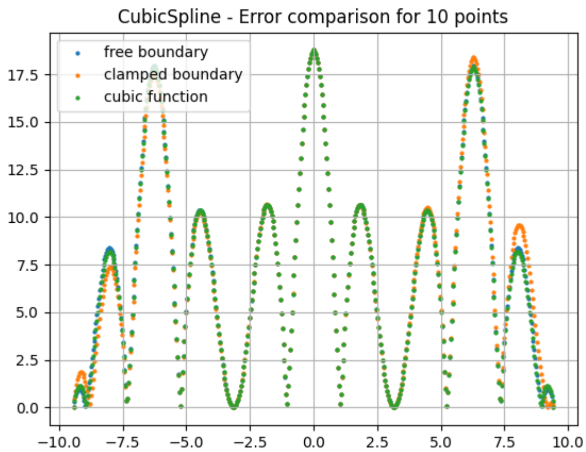
Wykres 7.2.1.1 – Błędy dla 5 punktów



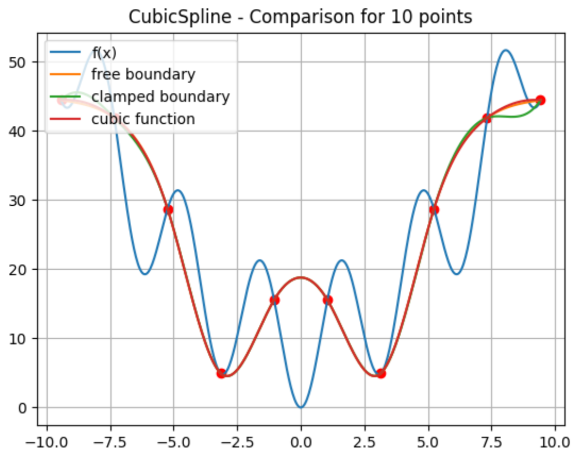
Wykres 7.2.1.2 – wykresy dla 5 punktów

Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 19.41985806645787
  sqr_sum_err = 48145.35030947074
- **Clamped boundary:**
  max_err = 20.505700892849944
  sqr_sum_err = 53607.782076761316
- **Cubic function:**
  max_err = 22.714348422444125
  sqr_sum_err = 55544.91118555403



Wykres 7.2.2.1 – Błędy dla 10 punktów

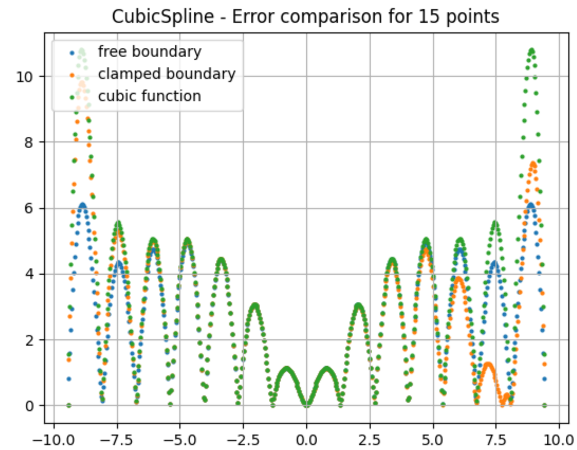


Wykres 7.2.2.2 – wykresy dla 10 punktów

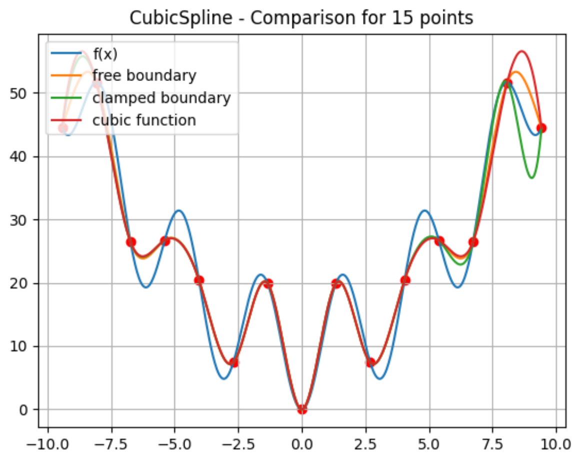
Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 18.772007455159986
  sqr_sum_err = 39845.49787513969

- **Clamped boundary:**
  max_err = 18.771206867261462
  sqr_sum_err = 40119.90715424883
- **Cubic function:**
  max_err = 18.77511759971059
  sqr_sum_err = 39490.18369910683



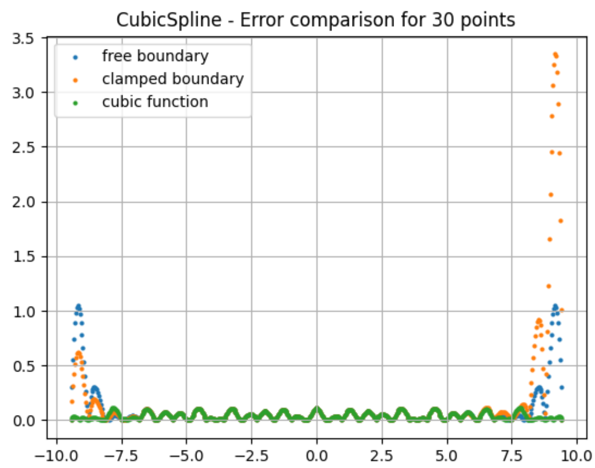
Wykres 7.2.3.1 – Błędy dla 15 punktów



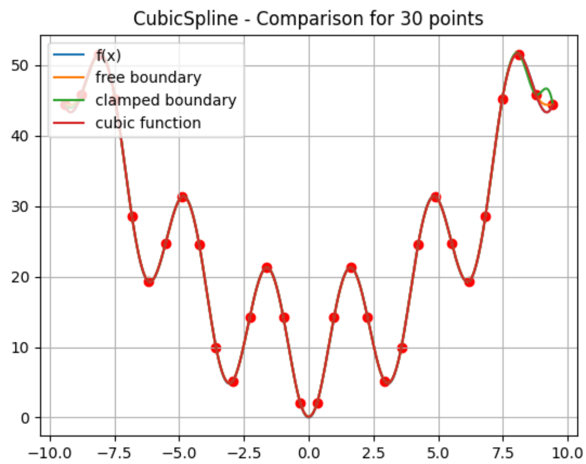
Wykres 7.2.3.2 – wykresy dla 15 punktów

Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 6.117383551347302
  sqr_sum_err = 4769.444307315648
- **Clamped boundary:**
  max_err = 9.818869839957841
  sqr_sum_err = 5753.73993867268
- **Cubic function:**
  max_err = 10.79658040908484
  sqr_sum_err = 8138.341955425192



Wykres 7.2.4.1 – Błędy dla 30 punktów

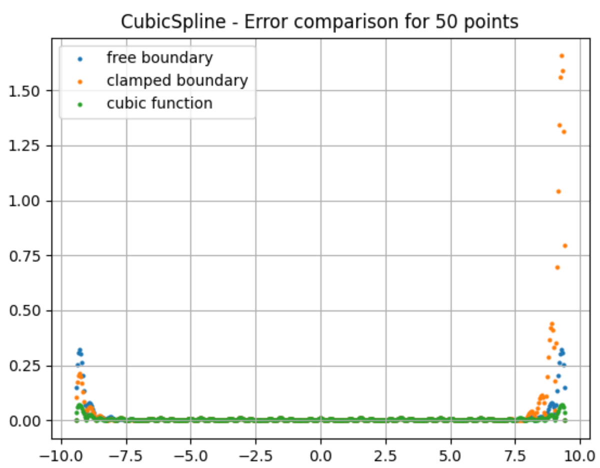


Wykres 7.2.4.2 – wykresy dla 30 punktów

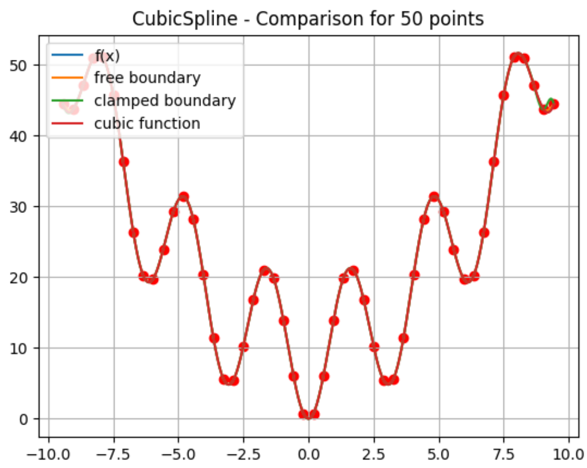
Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 1.0471408212989815
  sqr_sum_err = 21.10999746657552
- **Clamped boundary:**
  max_err = 3.347820369233105
  sqr_sum_err = 106.24240680035084

- **Cubic function:**
  max_err = 0.115620436591378
  sqr_sum_err = 1.2783852302883678



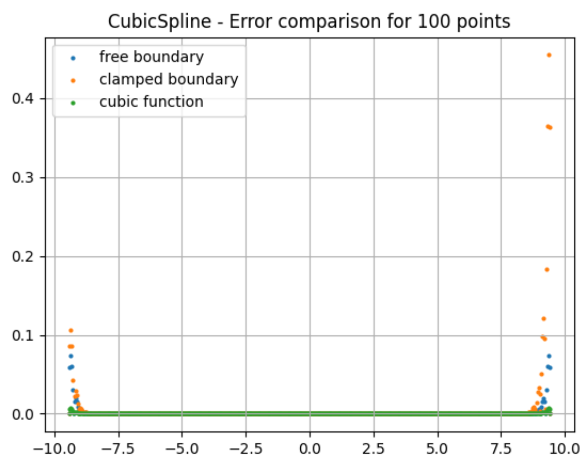
Wykres 7.2.5.1 – Błędy dla 50 punktów



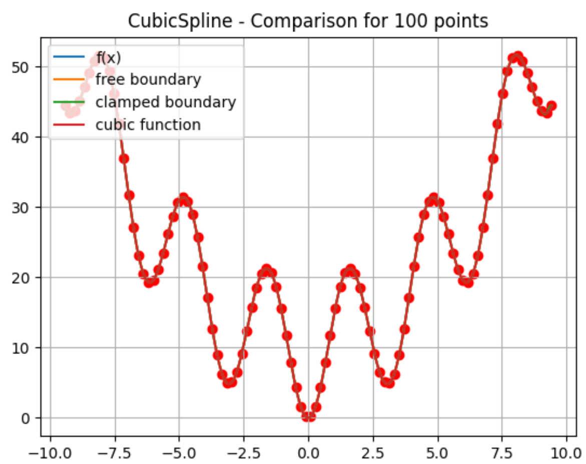
Wykres 7.2.5.2 – wykresy dla 50 punktów

Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 0.32092495608431904
  sqr_sum_err = 1.098219285445643
- **Clamped boundary:**
  max_err = 1.6567236745470026
  sqr_sum_err = 14.862128946337897
- **Cubic function:**
  max_err = 0.07310459533326963
  sqr_sum_err = 0.07098643915830084



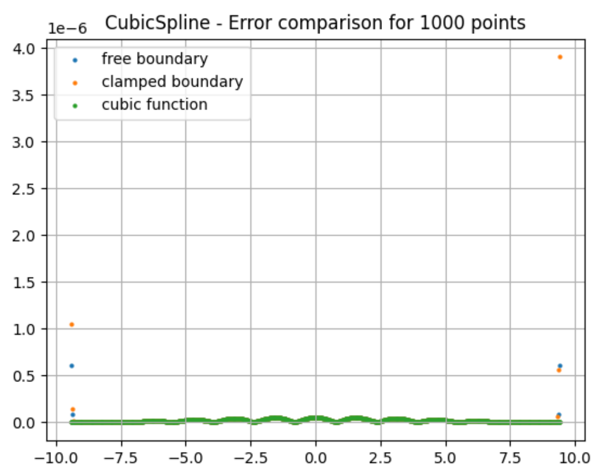
Wykres 7.2.6.1 – Błędy dla 100 punktów



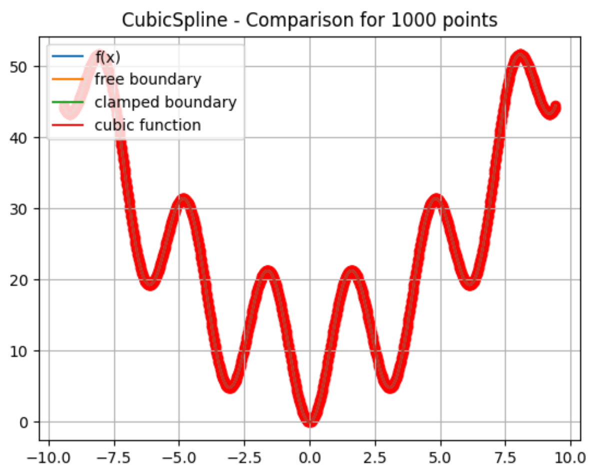
Wykres 7.2.6.2 – wykresy dla 100 punktów

Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 0.07423741928758432
  sqr_sum_err = 0.028968461313473196
- **Clamped boundary:**
  max_err = 0.45488961466870137
  sqr_sum_err = 0.5750744021015198
- **Cubic function:**
  max_err = 0.006761781354924778 5
  sqr_sum_err = 0.0002833234932285673



Wykres 7.2.7.1 – Błędy dla 1000 punktów



Wykres 7.2.7.2 – wykresy dla 1000 punktów

Błędy:

- **Free boundary:**
  max_err = 6.042418903007274e-07
  sqr_sum_err = 1.0283574308919152e-12

- **Clamped boundary:**
  max_err = 3.904056015358037e-06
  sqr_sum_err = 1.6954828544430842e-11
- **Cubic function:**
  max_err = 5.2792672705637145e-08
  sqr_sum_err = 2.830157715307822e-13

8. Wyniki i wnioski:

Poniżej przedstawiamy w tabeli zestawienie błędów dla testów, które pokazaliśmy w punkcie 7. (Nie są to dokładnie te same wartości co w punkcie 7., ponieważ testy zostały wykonane ponownie w celu ich zapisania, jednak są one wykonane na dokładnie takich samych danych i w tych samych warunkach). Wyniki zostały również zaokrąglone do 5 miejsca po przecinku.

	max_err				
	Stopień 2.		Stopień 3.		
n	**Free bound.**	**Clamped bound**	**Free bound.**	**Clamped bound**	**Cubic func.**
5	34.63859	37.64915	19.41985	20.50570	22.71434
10	27.42362	26.78733	18.77200	18.77120	18.77511
15	16.75173	18.55802	6.11738	9.81886	10.79658
30	1.79099	2.14349	1.04714	3.34782	0.11562
50	0.93367	0.75011	0.32092	1.65672	0.07310
100	0.44956	0.18490	0.07423	0.45488	0.00676
1000	0.04445	0.00182	6.04241e-07	3.90405e-06	5.27926e-08

Tabela 8.1 – zestawienie błędów max_err

	sqr_sum_err				
	Stopień 2.		Stopień 3.		
n	**Free bound.**	**Clamped bound**	**Free bound.**	**Clamped bound**	**Cubic func.**
5	91420.61003	110124.25880	48145.35030	53607.78207	55544.91118
10	58337.59204	58396.68746	39845.49787	40119.90715	39490.18369
15	28135.12292	32054.38682	4769.44430	5753.73993	8138.34195
30	628.21338	946.41840	21.10999	106.24240	1.27838
50	218.61013	139.00502	1.09821	14.86212	0.07098
100	53.56022	8.97338	0.02896	0.57507	0.00028
1000	0.52600	0.00088	1.028357e-12	1.69548e-11	2.83015e-13

Tablea 8.2 – zestawienie błędów sqr_sum_err

Jak można zauważyć, oczywiście wraz ze zwiększającą się liczbą punktów n funkcja $S(x)$ coraz lepiej przybliża interpolowaną funkcję $f(x)$. Nie jest to jednak zaskakujące – im więcej informacji posiadamy o interpolowanej funkcji, tym bardziej stworzona przez nas funkcja będzie ją przypominać.

Warte natomiast uwagi jest, że stopień funkcji sklejanych odgrywa istotną rolę w dokładności interpolacji. Oba typy błędów były generalnie mniejsze dla wszystkich testów w przypadku funkcji 3 stopnia. Dla 100 punktów wartości *max_err* były bardzo zbliżone do siebie, jednak jak widać, dla 1000 punktów, stopień 3. dał istotnie mniejsze błędy.

Istotną obserwacją jest również, że po osiągnięciu $n = 30$, dla obu stopni, przybliżenia są znacznie dokładniejsze (dla *sqr_sum_err* widać znaczną przewagę 3 stopnia).

Dla 3 stopnia Clamped boundary ma widocznie większe oba typy błędów. Jak widzimy na wykresach 7.2.4.1, 7.2.5.1 czy 7.2.6.1, na krańcach daje on duże, w porównaniu z resztą, błędy, jednak w środku badanego przedziału nie odbiega on wcale od pozostałych warunków. Dla 2 stopnia ta obserwacja nie zachodzi i Clamped Boundary, wraz ze zwiększającym się n, ma widocznie mniejsze odejście od interpolowanej funkcji niż Free Boundary.