ルベーグ積分

Archaea

2021 年 5 月 1 日

第 1 章

測度

1.1　有限加法的測度

定義 1.1.1　(有限加法族)
与えられた空間 X の部分集合の族 $\mathfrak{F}$ が

(i)　$\emptyset \in \mathfrak{F}$
(ii)　$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$
(iii)　$A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{F}$

なる三つの条件を満たすとき, $\mathfrak{F}$ を**有限加法族**という.

注 1.1.2　この三つの性質から以下の性質が導かれる.

(i)　$X \in \mathfrak{F}$
(ii)　$\mathfrak{F}$ に属する集合の和, 差, 交わりをとる演算を有限回行って得られる集合は $\mathfrak{F}$ に属する.

定理 1.1.3　$Z = X \times Y$ (直積空間) とし, $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ をそれぞれ X, Y の部分集合の有限加法族とする, Z の部分集合で

$$K = E \times F \qquad (E \in \mathfrak{E}, F \in \mathfrak{F}) \tag{1.1.1}$$

なる形の集合の有限個の直和として表されるものの全体 $\mathfrak{K}$ は有限加法族である.

定義 1.1.4　(有限加法的測度)
空間 X とその部分集合の有限加法族 $\mathfrak{F}$ があって $\mathfrak{F}$-集合関数 $m(A)$ が

(i)　全ての $A \in \mathfrak{F}$ に対して $0 \le m(A) \le \infty$, 特に $m(\emptyset) = 0$
(ii)　$A, B \in \mathfrak{F}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A + B) = m(A) + m(B)$

を満たすとき, m を ($\mathfrak{F}$ の上の) **有限加法的測度**という.

注 1.1.5　上二つの性質から

(i)　(有限加法性) $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}, A_j \cap A_k = \emptyset\ (j \neq k) \Rightarrow m\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m(A_j)$
(ii)　(単調性) $A, B \in \mathfrak{F}, A \supset B \Rightarrow m(A) \ge m(B)$, 特に $m(B) < \infty \Rightarrow m(A - B) = m(A) - m(B)$
(iii)　(有限劣加法性) $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \Rightarrow m\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} m(A_j)$

定義 1.1.6　(完全加法的な測度)
有限加法族 $\mathfrak{F}$ の上の有限加法的測度 m が $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{F}$ (可算無限個), $A_j \cap A_k = \emptyset$ $(j \neq k)$ のとき $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F} \Rightarrow m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ となるとき, m を有限加法族 $\mathfrak{F}$ の上で**完全加法的**な測度という.

例 1.1.7　$X = R^N, \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_N$ とし, $f_1(\lambda), \ldots, f_N(\lambda)$ を R^1 で単調増加な実数値関数で定数でないものとし, 有界な区間 $I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_N, b_N] (-\infty < a_v < b_v < \infty)$ に対して

$$m(I) = \prod_{v=1}^{N} \{f_v(b_v) - f_v(a_v)\} \tag{1.1.2}$$

有界でない区間 I に対しては

$$m(I) = \sup\{m(J); J \text{ は } I \text{ に含まれる任意の有界区間 }\} \tag{1.1.3}$$

と m を定義し, 空集合 $\emptyset$ に対しては $m(\emptyset) = 0$, 区間塊 $E = I_1 + \cdots + I_n$ に対しては

$$m(E) = m(I_1) + \cdots + m(I_n) \tag{1.1.4}$$

と定義する. この m は $\mathfrak{F}_N$ の上の有限加法的測度である.

定理 1.1.8　上の例 1.1.7 の m が $\mathfrak{F}_N$ の上で完全加法的であるための必要十分条件は全ての $f_v(\lambda)$ が右連続なことである.

定理 1.1.9　$f_v(\lambda) = \lambda (v = 1, \ldots, N)$ であることと, 対応する m が次の二つの条件を満たすことは同値である.

(i)　$I_0 = (0, 1] \times \cdots \times (0, 1]$ (単位立方体) に対して $m(I_0) = 1$
(ii)　集合 $E \in \mathfrak{F}_N$ をベクトル x だけ平行移動したものを $[E + x]$ と書くとき, $m([E + x]) = m(E)$

今やりたいこととして, 全体集合 X の中のある集合 $A \subset X$ の大きさを測りたいわけです. それにおいて測りたい集合の族 $\mathfrak{F}$ と集合の大きさを測るものさし m が必要となります. この節では測りたい集合の族が有限加法族, ものさしが有限加法的測度となっています. まずは大きさが測れるような集合のみについて考えよう, というわけです. より便利に測りやすくするために, 集合 A を細かく分割してそれぞれで大きさを求めて足し上げるということが出来て欲しいです. このときに定義 1.1.4 の (ii) がよく効いてきます. ですが有限加法族のままでは可算個の分割しかできませんから, それだと不便なわけです. そこで可算無限個に分割した集合の大きさを測るために次の節の概念が出てくるわけです.

1.2　外測度

定義 1.2.1　(外測度)
空間 X の全ての部分集合 A に対して定義された集合関数 $\Gamma(A)$ があって

(i)　(非負性) $0 \leq \Gamma(A) \leq \infty$
(ii)　(単調性) $A \subset B \Rightarrow \Gamma(A) \leq \Gamma(B)$
(iii)　(劣加法性) $\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$

なる三つの条件を満たすとき, Γ を **Carathéodory 外測度**もしくは単に**外測度**という.

定理 1.2.2　$\mathfrak{F}$ を X の部分集合の有限加法族とし, m を $\mathfrak{F}$ の上の有限加法的測度とする. このとき

(i) 任意の $A \subset X$ に対して高々可算無限個の集合 $E_n \in \mathfrak{F}$ で A を覆い,

$$\Gamma(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \tag{1.2.1}$$

と定義すると, Γ は外測度である.

(ii) 特に, m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的ならば $E \in \mathfrak{F}$ に対しては $\Gamma(E) = m(E)$ となる.

定義 1.2.3 (Lebesgue 外測度)
R^N において $f_v(\lambda) = \lambda (v = 1, \dots, N)$ として構成した外測度を $\mu^*(A)$ と書き **Lebesgue 外測度**という. この場合は $I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_N, b_N]$ に対して

$$\mu^*(I) = \prod_{v=1}^{N} (b_v - a_v) \tag{1.2.2}$$

となる.

定理 1.2.4 任意の $A \subset X$ に対して

$$\Gamma(A) \leq \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c) \tag{1.2.3}$$

が成り立つ.

定義 1.2.5 (Γ-可測)
空間 X に外測度 Γ が定義されているとする. 任意の $A \subset X$ に対して

$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c) \tag{1.2.4}$$

を満たすとき, 集合 $E \subset X$ は (**Carathéodory の意味で**) **可測**または **Γ-可測**であるという.

定理 1.2.6 定義 1.2.5 の条件は次の条件と同等である. 任意の $A_1 \subset E$ と任意の $A_2 \subset E^c$ に対して

$$\Gamma(A_1 + A_2) = \Gamma(A_1) + \Gamma(A_2) \tag{1.2.5}$$

定理 1.2.7 Γ-可測集合の全体を $\mathfrak{M}_\Gamma$ と書く. すると以下が成り立つ.

(i) $E \in \mathfrak{M}_\Gamma \Rightarrow E^c \in \mathfrak{M}_\Gamma$

(ii) $\Gamma(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{M}_\Gamma$, 従って特に $\emptyset \in \mathfrak{M}_\Gamma$

定義 1.2.8 (零集合)
$\Gamma(E) = 0$ なる集合を**零集合**という.

定理 1.2.9 定理 1.2.2 の方法で構成された外測度 Γ については $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}_\Gamma$ が成立する. つまり有限加法族は Γ-可測である.

定理 1.2.10 $E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma$ $(k = 1, 2, \dots), E_j \cap E_k = \emptyset$ $(j \neq k), S = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ ならば

$$S \in \mathfrak{M}_\Gamma, \Gamma(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(E_k) \tag{1.2.6}$$

定理 1.2.11 $E, F \in \mathfrak{M}_\Gamma$ ならば $E - F \in \mathfrak{M}_\Gamma, E \cap F \in \mathfrak{M}_\Gamma$.

系 1.2.12 $E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma (k = 1, \dots, n)$ ならば $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma, \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma$.

定理 1.2.13　$E_n \in \mathfrak{M}_\Gamma (n = 1, 2, \dots)$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}_\Gamma$.

有限加法族から拡張された遊び場として可測集合が出てきました. 先程は X の中でも有限加法族であるようなものしか扱えなかったわけですが, 有限加法族は Γ-可測ですからこれによってより広い範囲の集合を扱えるようになりました. また有限加法的測度では測れないような集合について, その被覆の測度を測り, その下限をとることで測れるようになりました. つまり外測度によってたとえ Γ-可測でない集合でも上から覆うことで測れるようになったわけです. 特に m が完全加法的であれば $\Gamma(E)$ と $m(E)$ は一致し, 全く同じように大きさを測ることが出来ます. 従って m が完全加法的である場合には Γ-可測でない集合に対してはその被覆を考えその測度の下限をとることで, Γ -可測集合に対してはそのままで測度を測れるようになりました. Lebesgue 外測度というのは $\mathbb{R}^N$ の上の測度で, 普通の体積 (面積) の自然な拡張になっています. つまり区間塊全体の集合を考えたときにその集合は有限加法族であり, そこから定義した有限加法的測度は完全加法的なので外測度に一致します. 定理 1.2.10 によって Γ -可測であるような集合に対しては完全加法性が成り立つようになりました. これによってたとえ可算無限個の分割であってもそれぞれの集合の大きさを測って足し上げることで測れるようになりました.

1.3　測度

定義 1.3.1　(σ-加法族)
空間 X の部分集合の族 $\mathfrak{B}$ があって

(i)　$\emptyset \in \mathfrak{B}$
(ii)　$E \in \mathfrak{B} \Rightarrow E^c \in \mathfrak{B}$
(iii)　$E_n \in \mathfrak{B} (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}$

なる三つの条件を満たすとき, $\mathfrak{B}$ を**完全加法族**, **可算加法族**, **σ-加法族**, または単に**加法族**という.

注 1.3.2　有限加法族の場合と同様にして,

(i)　$X \in \mathfrak{B}$
(ii)　$\mathfrak{B}$ に属する集合の和, 差, 交わりを作る操作を高々可算無限回行って得られる集合は $\mathfrak{B}$ に属する.

が成り立つ.

定義 1.3.3　(測度)
空間 X とその部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ があって, $\mathfrak{B}$-集合関数 $\mu(A)$ が

(i)　(非負性) $0 \leq \mu(A) \leq \infty,\ \mu(\emptyset) = 0$
(ii)　(完全加法性) $A_n \in \mathfrak{B} (n = 1, 2, \dots), A_j \cap A_k = \emptyset (j \neq k) \Rightarrow \mu\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

を満たすとき, μ を $\mathfrak{B}$ で定義された**測度**という.

注 1.3.4　上二つの性質から

(i)　(単調性) $A, B \in \mathfrak{B}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$, 特に $\mu(B) < \infty \Rightarrow \mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$
(ii)　(劣加法性) $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \mu\left(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$

が成り立つ.

定義 1.3.5 (測度空間)
空間 X にその部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ と $\mathfrak{B}$ で定義された測度 μ を組み合わせて考えたものを**測度空間**といい, $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ または $X(\mathfrak{B}, \mu)$ と書く.

定理 1.3.6 Γ を空間 X で定義された外測度とすると, Γ-可測集合の全体 $\mathfrak{M}_\Gamma$ は σ-加法族をなし, Γ は $\mathfrak{M}_\Gamma$ の上で定義された測度である.

定理 1.3.7 $A_n \in \mathfrak{B}$ とする.

(i) 集合列 $\{A_n\}$ が単調増加のとき, または単調減少で $\mu(A_1) < \infty$ のときは

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{1.3.1}$$

(ii) 一般には

$$\mu(\varliminf_{n\to\infty} A_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{1.3.2}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty \text{ ならば} \mu(\varlimsup_{n\to\infty} A_n) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{1.3.3}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty \text{ で } \lim_{n\to\infty} A_n \text{が存在するならば} \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{1.3.4}$$

定理 1.3.8 空間 X の部分集合からなる任意の集合族 $\mathfrak{A}_0$ に対して, $\mathfrak{A}_0$ を含む最小の σ-加法族 $\mathfrak{B}_0$ が存在する. このような $\mathfrak{B}_0$ を $\mathfrak{B}[\mathfrak{A}_0]$ と書くことがある.

定義 1.3.9 (Borel 集合族)
Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の中の開集合の全体を含む最小の σ-加法族を $\mathbb{R}^N$ における **Borel 集合族**といい, $\mathfrak{B}_N$ と書く. また $\mathfrak{B}_N$ に属する集合を **Borel 集合**と呼ぶ.

定理 1.3.10 $\mathfrak{I}_N$, $\mathfrak{F}_N$ をそれぞれ $\mathbb{R}^N$ における区間, 区間塊の全体とすると, $\mathfrak{B}_N = \mathfrak{B}[\mathfrak{F}_N] = \mathfrak{B}[\mathfrak{I}_N]$ である.

定義 1.3.11 (Borel 集合族)
一般の空間 X においてその部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ が与えられているとき, $\mathfrak{B}$ を X における **Borel 集合族**と呼び, $\mathfrak{B}$ に属する集合を **Borel 集合**または **$\mathfrak{B}$-可測集合** と呼ぶ. これは Euclid 空間における Borel 集合族とは意味が違う. また, 空間 X に σ-加法族 $\mathfrak{B}$ を組み合わせた $(X, \mathfrak{B})$ を **Borel 空間**または**可測空間**と呼ぶ.

定義 1.3.12 測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ において, X が μ 測度有限な集合の可算個の和になっている場合, 即ち

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k,\ X_k \in \mathfrak{B},\ \mu(X_k) < \infty \tag{1.3.5}$$

が成立しているとき, この測度空間は **σ-有限**であるという.

1.4 Lebesgue 測度の性質