ルベーグ積分

Archaea

2021 年 4 月 30 日

第 1 章

測度

1.1　有限加法的測度

定義 1.1.1　(有限加法族)
与えられた空間 X の部分集合の族 $\mathfrak{F}$ が

(i)　$\emptyset \in \mathfrak{F}$
(ii)　$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$
(iii)　$A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{F}$

なる三つの条件を満たすとき, $\mathfrak{F}$ を**有限加法族**という.

注 1.1.2　この三つの性質から以下の性質が導かれる.

(i)　$X \in \mathfrak{F}$
(ii)　$\mathfrak{F}$ に属する集合の和, 差, 交わりをとる演算を有限回行って得られる集合は $\mathfrak{F}$ に属する.

定理 1.1.3　$Z = X \times Y$ (直積空間) とし, $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ をそれぞれ X, Y の部分集合の有限加法族とする, Z の部分集合で

$$K = E \times F \qquad (E \in \mathfrak{E}, F \in \mathfrak{F}) \tag{1.1.1}$$

なる形の集合の有限個の直和として表されるものの全体 $\mathfrak{R}$ は有限加法族である.

定義 1.1.4　(有限加法的測度)
空間 X とその部分集合の有限加法族 $\mathfrak{F}$ があって $\mathfrak{F}$-集合関数 $m(A)$ が

(i)　全ての $A \in \mathfrak{F}$ に対して $0 \leq m(A) \leq \infty$, 特に $m(\emptyset) = 0$
(ii)　$A, B \in \mathfrak{F},\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A + B) = m(A) + m(B)$

を満たすとき, m を ($\mathfrak{F}$ の上の) **有限加法的測度**という.

注 1.1.5　上二つの性質から

(i)　(有限加法性) $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}, A_j \cap A_k = \emptyset\ (j \neq k) \Rightarrow m\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m(A_j)$
(ii)　(単調性) $A, B \in \mathfrak{F}, A \supset B \Rightarrow m(A) \geq m(B)$, 特に $m(B) < \infty \Rightarrow m(A - B) = m(A) - m(B)$
(iii)　(有限劣加法性) $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \Rightarrow m\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} m(A_j)$

定義 1.1.6　(完全加法的な測度)
有限加法族 $\mathfrak{F}$ の上の有限加法的測度 m が条件
$A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{F}$ (可算無限個), $A_j \cap A_k = \emptyset (j \neq k)$ のとき, $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F} \Rightarrow m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ となる
を満たすとき, m を有限加法族 $\mathfrak{F}$ の上で**完全加法的**な測度という.

例 1.1.7　$X = R^N, \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_N$ とし, $f_1(\lambda), \ldots, f_N(\lambda)$ を R^1 で単調増加な実数値関数で定数でないものとし, 有界な区間 $I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_N, b_N] (-\infty < a_v < b_v < \infty)$ に対して

$$m(I) = \prod_{v=1}^{N} \{f_v(b_v) - f_v(a_v)\} \tag{1.1.2}$$

有界でない区間 I に対しては

$$m(I) = \sup\{m(J); J \text{ は } I \text{ に含まれる任意の有界区間 }\} \tag{1.1.3}$$

と m を定義し, 空集合 $\emptyset$ に対しては $m(\emptyset) = 0$, 区間塊 $E = I_1 + \cdots + I_n$ に対しては

$$m(E) = m(I_1) + \cdots + m(I_n) \tag{1.1.4}$$

と定義する. この m は $\mathfrak{F}_N$ の上の有限加法的測度である.

定理 1.1.8　上の例 1.1.7 の m が $\mathfrak{F}_N$ の上で完全加法的であるための必要十分条件は全ての $f_v(\lambda)$ が右連続なことである.

定理 1.1.9　$f_v(\lambda) = \lambda (v = 1, \ldots, N)$ であることと, 対応する m が次の二つの条件を満たすことは同値である.

(i)　$I_0 = (0, 1] \times \cdots \times (0, 1]$ (単位立方体) に対して $m(I_0) = 1$
(ii)　集合 $E \in \mathfrak{F}_N$ をベクトル x だけ平行移動したものを $[E + x]$ と書くとき $m([E + x]) = m(E)$

1.2　外測度

定義 1.2.1　(外測度)
空間 X の全ての部分集合 A に対して定義された集合関数 $\Gamma(A)$ があって

(i)　(非負性) $0 \leq \Gamma(A) \leq \infty$
(ii)　(単調性) $A \subset B \Rightarrow \Gamma(A) \leq \Gamma(B)$
(iii)　(劣加法性) $\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$

なる三つの条件を満たすとき, Γ を **Carathéodory 外測度**もしくは単に**外測度**という.

定理 1.2.2　$\mathfrak{F}$ を X の部分集合の有限加法族とし, m を $\mathfrak{F}$ の上の有限加法的測度とする. このとき

(i)　任意の $A \subset X$ に対してたかだか可算無限個の集合 $E_n \in \mathfrak{F}$ で A を覆い

$$\Gamma(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \tag{1.2.1}$$

と定義すると, Γ は外測度である.

(ii)　特に, m が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的ならば $E \in \mathfrak{F}$ に対しては $\Gamma(E) = m(E)$ となる.

定義 1.2.3　(Lebesgue 外測度)
R^N において $f_v(\lambda) = \lambda (v = 1, \dots, N)$ として構成した外測度を $\mu^*(A)$ と書き **Lebesgue 外測度**という. この場合は $I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_N, b_N]$ に対して

$$\mu^*(I) = \prod_{v=1}^{N} (b_v - a_v) \tag{1.2.2}$$

となる.

定理 1.2.4　任意の $A \subset X$ に対して

$$\Gamma(A) \leq \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c) \tag{1.2.3}$$

が成り立つ.

定義 1.2.5　(Γ-可測)
空間 X に外測度 Γ が定義されているとする. 任意の $A \subset X$ に対して

$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c) \tag{1.2.4}$$

を満たすとき, 集合 $E \subset X$ は (**Carathéodory の意味で**) **可測**または Γ-**可測**であるという.

定理 1.2.6　定義 1.2.5 の条件は次の条件と同等である. 任意の $A_1 \subset E$ と任意の $A_2 \subset E^c$ に対して

$$\Gamma(A_1 + A_2) = \Gamma(A_1) + \Gamma(A_2) \tag{1.2.5}$$

定理 1.2.7　Γ-可測集合の全体を $\mathfrak{M}_\Gamma$ と書く. すると以下が成り立つ.

(i)　$E \in \mathfrak{M}_\Gamma \Rightarrow E^c \in \mathfrak{M}_\Gamma$
(ii)　$\Gamma(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{M}_\Gamma$, 従って特に $\emptyset \in \mathfrak{M}_\Gamma$

定義 1.2.8　(零集合)
$\Gamma(E) = 0$ なる集合を**零集合**という.

定理 1.2.9　定理 1.2.2 の方法で構成された外測度 Γ については $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}_\Gamma$ が成立する. つまり有限加法族は Γ-可測である.

定理 1.2.10　$E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma (k = 1, 2, \dots), E_j \cap E_k = \emptyset (j \neq k), S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} E_k$ ならば

$$S \in \mathfrak{M}_\Gamma, \Gamma(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(E_k) \tag{1.2.6}$$

定理 1.2.11　$E, F \in \mathfrak{M}_\Gamma$ ならば $E - F \in \mathfrak{M}_\Gamma, E \cap F \in \mathfrak{M}_\Gamma$.

系 1.2.12　$E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma (k = 1, \dots, n)$ ならば $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma, \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma$.

定理 1.2.13　$E_n \in \mathfrak{M}_\Gamma (n = 1, 2, \dots)$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}_\Gamma$.

1.3　測度

定義 1.3.1　(測度)
空間 X の部分集合の族 $\mathfrak{B}$ があって

(i)　$\emptyset \in \mathfrak{B}$
(ii)　$E \in \mathfrak{B} \Rightarrow E^c \in \mathfrak{B}$
(iii)　$E_n \in \mathfrak{B}(n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}$

なる三つの条件を満たすとき, $\mathfrak{B}$ を**完全加法族**, **可算加法族**, **σ-加法族**, または単に**加法族**という.

注 1.3.2　有限加法族の場合と同様にして,

(i)　$X \in \mathfrak{B}$
(ii)　$\mathfrak{B}$ に属する集合の和, 差, 交わりを作る操作を高々可算無限回行って得られる集合は $\mathfrak{B}$ に属する.

が成り立つ.

定義 1.3.3　(測度)
空間 X とその部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ があって, $\mathfrak{B}$-集合関数 $\mu(A)$ が

(i)　(非負性) $0 \leq \mu(A) \leq \infty, \mu(\emptyset) = 0$
(ii)　(完全加法性) $A_n \in \mathfrak{B}(n = 1, 2, \dots), A_j \cap A_k = \emptyset(j \neq k) \Rightarrow \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

を満たすとき, μ を $\mathfrak{B}$ で定義された**測度**という.

注 1.3.4　上二つの性質から

(i)　(単調性) $A, B \in \mathfrak{B}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$, 特に $\mu(B) < \infty \Rightarrow \mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$
(ii)　(劣加法性) $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$

が成り立つ.

定義 1.3.5　(測度空間)
空間 X にその部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ と $\mathfrak{B}$ で定義された測度 μ を組み合わせて考えたものを**測度空間**といい, $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ または $X(\mathfrak{B}, \mu)$ と書く.

定理 1.3.6　Γ を空間 X で定義された外測度とすると, Γ-可測集合の全体 $\mathfrak{M}_\Gamma$ は σ-加法族をなし, Γ は $\mathfrak{M}_\Gamma$ の上で定義された測度である.

定理 1.3.7　$A_n \in \mathfrak{B}$ とする.

(i)　集合列 $\{A_n\}$ が単調増加のとき, または単調減少で $\mu(A_1) < \infty$ のときは

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{1.3.1}$$

(ii)　一般には

$$\mu(\varliminf_{n\to\infty} A_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{1.3.2}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty \text{ ならば} \mu(\varlimsup_{n\to\infty} A_n) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{1.3.3}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty \text{ で } \lim_{n\to\infty} A_n \text{が存在するならば} \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{1.3.4}$$