ルベーグ積分

Archaea

2021 年 4 月 30 日

第 1 章

測度

1.1　有限加法的測度

定義 1.1.1　(有限加法族)
与えられた空間 X の部分集合の族 $\mathfrak{F}$ が

(i)　$\emptyset \in \mathfrak{F}$
(ii)　$A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}$
(iii)　$A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{F}$

なる三つの条件を満たすとき, $\mathfrak{F}$ を**有限加法族**という.

注 1.1.2　この三つの性質から以下の性質が導かれる.

(i)　$X \in \mathfrak{F}$
(ii)　$\mathfrak{F}$ に属する集合の和, 差, 交わりをとる演算を有限回行って得られる集合は $\mathfrak{F}$ に属する.

定理 1.1.3　$Z = X \times Y$ (直積空間) とし, $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ をそれぞれ X, Y の部分集合の有限加法族とする, Z の部分集合で

$$K = E \times F \qquad (E \in \mathfrak{E}, F \in \mathfrak{F}) \tag{1.1.1}$$

なる形の集合の有限個の直和として表されるものの全体 $\mathfrak{R}$ は有限加法族である.

定義 1.1.4　(有限加法的測度)
空間 X とその部分集合の有限加法族 $\mathfrak{F}$ があって $\mathfrak{F}$-集合関数 $m(A)$ が

(i)　全ての $A \in \mathfrak{F}$ に対して $0 \leq m(A) \leq \infty$, 特に $m(\emptyset) = 0$
(ii)　$A, B \in \mathfrak{F}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A + B) = m(A) + m(B)$

を満たすとき, m を ($\mathfrak{F}$ の上の) **有限加法的測度**という.

注 1.1.5　上二つの性質から

(i)　(有限加法性) $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}, A_j \cap A_k = \emptyset \ (j \neq k) \Rightarrow m\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m(A_j)$
(ii)　(単調性) $A, B \in \mathfrak{F}, A \supset \Rightarrow m(A) \geq m(B)$, 特に $m(B) < \infty \Rightarrow m(A - B) = m(A) - m(B)$
(iii)　(有限劣加法性) $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \Rightarrow m\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} m(A_j)$

定義 1.1.6　有限加法族 $\mathfrak{F}$ の上の有限加法的測度 m が条件
$A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$ (可算無限個), $A_j \cap A_k = \emptyset (j \neq k)$ のとき, $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F} \Rightarrow m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ となる
を満たすとき, m を有限加法族 $\mathfrak{F}$ の上で**完全加法的**な測度という.

例 1.1.7　$X = R^N, \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_N$ とし, $f_1(\lambda), \dots, f_N(\lambda)$ を R^1 で単調増加な実数値関数で定数でないものとし, 有界な区間 $I = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_N, b_N] (-\infty < a_v < b_v < \infty)$ に対して

$$m(I) = \prod_{v=1}^{N} \{f_v(b_v) - f_v(a_v)\} \tag{1.1.2}$$

有界でない区間 I に対しては

$$m(I) = \sup\{m(J); J \text{ は } I \text{ に含まれる任意の有界区間 }\} \tag{1.1.3}$$

と m を定義し, 空集合 $\emptyset$ に対しては $m(\emptyset) = 0$, 区間塊 $E = I_1 + \dots + I_n$ に対しては

$$m(E) = m(I_1) + \dots + m(I_n) \tag{1.1.4}$$

と定義する. この m は $\mathfrak{F}_N$ の上の有限加法的測度である.

定理 1.1.8　上の例 1.1.7 の m が $\mathfrak{F}_N$ の上で完全加法的であるための必要十分条件は全ての $f_v(\lambda)$ が右連続なことである.

定理 1.1.9　$f_v(\lambda) = \lambda (v = 1, \dots, N)$ であることと, 対応する m が次の二つの条件を満たすことは同値である.

(i)　$I_0 = (0, 1] \times \dots \times (0, 1]$ (単位立方体) に対して $m(I_0) = 1$
(ii)　集合 $E \in \mathfrak{F}_N$ をベクトル x だけ平行移動したものを $[E + x]$ と書くとき $m([E + x]) = m(E)$

1.2　外測度

定義 1.2.1　(外測度)
空間 X の全ての部分集合 A に対して定義された集合関数 $\Gamma(A)$ があって

(i)　(非負性) $0 \leq \Gamma(A) \leq \infty$
(ii)　(単調性) $A \subset B \Rightarrow \Gamma(A) \leq \Gamma(B)$
(iii)　(劣加法性) $\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$

なる三つの条件を満たすとき, Γ を **Carathéodory 外測度**という.

定理 1.2.2