调和分析 习题解答

郑滕飞 2401110060

* 韦东奕《调和分析》讲义习题解答

目录

1 Fourier 级数与 Fourier 变换

1. 由条件，存在单调增函数 g_1, g_2 使得 $f = g_1 - g_2$，只需证明对单调增函数 g 成立 $\hat{g}(k) = O(|k|^{-1})$ 即可，由于加减常数不影响 $|k| > 0$ 的项可不妨设设 $g(0+) = 0$，由此根据积分第二中值定理，存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$$\hat{g}(k) = \int_0^1 g(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = g(1-)\int_\xi^1 \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

而 $\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}$ 积分模长不超过 $\frac{1}{2\pi|k|}$，由此可知 $|\hat{g}(k)| \le \frac{|g(1-)|}{2\pi}|k|^{-1}$，原命题得证。

2. 绝对连续函数：

条件即

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 kf(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 0$$

分部积分公式成立，从而有 (考虑分解为两单调函数差可知各点左右极限存在)

$$\int_0^1 kf(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}(f(1-) - f(0+)) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^1 f'(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

由其导函数 L^1，利用 Riemman-Lebesgue 引理可知积分趋于 0，由此必然有 $f(1-) = f(0+)$，由 $f(x)$ 循环，对其他点同理。

有界变差函数 (一般情况)：

由其分解为单调函数差可知每点左右极限存在，记 $\tilde{f}(x) = f(x-)$，控制收敛可知不影响 Fourier 系数，且只要证明了 $\tilde{f}$ 连续，由定义可知 f 不可能有间断点，由此可不妨设 f 左连续。

定义测度 $\mu([0, x)) = f(x) - f(0)$ (事实上可说明此测度相当于 f 的弱导数，即 $\mathrm{d}\mu = Df\mathrm{d}x$)，对此测度分部积分公式成立，而由 $f(1) = f(0)$ 可知

$$2\pi\mathrm{i}\int_0^1 kf(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}\mathrm{d}\mu \to 0$$

记右侧积分为 $\hat{\mu}(k)$，则由其趋于 0 可知

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|\hat{\mu}(k)|^2 = 0$$

从而只需要证明任何一点处的振幅可由此式控制即可。而上式可以改写为

$$\lim_{N\to\infty}\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(y-x)}\mathrm{d}\mu_x\mathrm{d}\mu_y = 0$$

积分中的求和极限为 $\chi_{x=y}$，利用控制收敛定理可交换次序，而 $\chi_{x=y}$ 对 μ_x、μ_y 积分的结果即为所有间断处振幅的平方和 (只需考虑 Df 的无穷部分，可写为若干 δ 函数之和计算)，由其等于 0 可知结论成立。

3. 将 x_0 记为 x。与定理 1.8 证明过程相同得

$$|\sigma_N f(x) - f(x)| = \left|\int_{-1/2}^{1/2}(f(x-t) - f(x))F_N(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_{-1/2}^{1/2}|f(x-t) - f(x)||F_N(t)|\mathrm{d}t$$

将积分拆分为 $|t| < N^{-1}$、$|t| \in (N^{-1}, N^{-1/4}), |t| > N^{-1/4}$ 三段，分别记为 a_N, b_N, c_N。

由于 $f\in L^1(\mathbb{T})$，$|f(x-t)-f(x)|\le|f(x-t)|+|f(x)|$，积分不超过 $M=\|f\|_1+|f(x)|$，根据 1.5 节开头性质，这段中 $|F_N(t)|$ 不超过 $\left((N+1)\sin^2\left(\pi(N+1)^{-1/2}\right)\right)^{-1}$，由此有

$$c_N\le\frac{M}{(N+1)\sin^2\left(\pi(N+1)^{-1/2}\right)}=O(N^{-1/2})$$

由 Lebesgue 点定义有

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{r}\int_{-r}^{r}|f(x-t)-f(x)|\mathrm{d}t=0$$

而利用 $F_N(t)\le N+1$ 可知

$$a_N=(N+1)o(N^{-1})=o(1)$$

为了估算 b_N，利用 1.5 节开头性质知 t 充分小时 $F_N(t)$ 可被 $\frac{1}{Nt^2}$ 的倍数控制，由此只需证明 (另一边由对称得到)

$$\frac{1}{N}\int_{N^{-1}}^{N^{-1/4}}|f(x-t)-f(x)|t^{-2}\mathrm{d}t\to0$$

利用分部积分，记 $F(\delta)=\int_0^\delta|f(x-t)-f(x)|\mathrm{d}t$，则有上式为

$$\frac{1}{N}\left(N^{1/2}F(N^{-1/4})-N^2F(N^{-1})\right)+\frac{2}{N}\int_{N^{-1}}^{N^{-1/4}}F(t)t^{-3}\mathrm{d}t$$

利用 $F(t)=o(t)$，第一项的两个分量极限均为 0，第二项利用积分中值定理知存在 $N^{-1}\le\xi\le N^{-1/4}$ 使得

$$\frac{F(\xi)}{\xi}\frac{2}{N}\int_{N^{-1}}^{N^{-1/4}}t^{-2}\mathrm{d}t<\frac{2F(\xi)}{\xi}$$

再次利用 $F(\xi)=o(\xi)$ 可得结论，由此综合可知结论成立。

4. 利用 $F_N(x)*f(x)=\sigma_Nf(x)$ 可知

$$F_N(x)*\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx}=\begin{cases}\frac{N+1-|k|}{N+1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx} & |k|\le N\\ 0 & |k|>N\end{cases}$$

于是对一般的 N 次三角多项式 $P(x)$，设其 $k>0$ 的部分为 P_+，$k<0$ 的部分为 P_-，对比系数有

$$F_{N-1}(x)*(P(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}Nx})=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}N}P_-'(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}Nx}$$

同理

$$F_{N-1}(x)*(P(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}Nx})=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}N}P_+'(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}Nx}$$

而 $k=0$ 求导为 0，由此可以得到

$$P'(x)=2\pi\mathrm{i}N\left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}Nx}\left(F_{N-1}(x)*(P(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}Nx})\right)-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}Nx}\left(F_{N-1}(x)*(P(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}Nx})\right)\right)$$

由 $F_{N-1}(x)$ 为正且积分为 1，由积分中值定理可知

$$|F_{N-1}(x)*(P(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}Nx})|\le\|P\|_\infty$$

$$|F_{N-1}(x)*(P(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}Nx})|\le\|P\|_\infty$$

从而即有 $P'(x)\le2\pi N(\|P\|_\infty+\|P\|_\infty)$，即得证。

一个更好的界：

利用综合练习题 3 可得

$$\|P'\|_\infty\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{8N}{(2k+1)^2\pi}\|P\|_\infty=2\pi N\|P\|_\infty$$

5. 利用综合练习题 4，由性质 ii 与积分中值定理放缩直接得结论。

6. 由条件可知 $\xi\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$，从而由于

$$2|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\xi^2} + \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2$$

$$2|\hat{f}(\xi)| \leq 1 + |\hat{f}(\xi)|^2$$

可得

$$2\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \mathrm{d}\xi \leq \int_{|\xi|\leq 1} (1 + |\hat{f}(\xi)|^2) + \int_{|\xi|>1} \left(\frac{1}{\xi^2} + \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2\right) \mathrm{d}x = 4 + \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2$$

从而收敛。

7. 由条件可知 $\|\hat{f}(\xi)\| = M_1 < \infty$ 且 $\|\xi\hat{f}(\xi)\|_\infty = M_2 < \infty$，于是

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \min(M_1, M_2/\xi)$$

有

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2 \leq \int_{|\xi|\leq 1} M_1^2 \mathrm{d}\xi + \int_{|\xi|>1} \frac{M_2^2}{\xi^2} \mathrm{d}x = 2M_1^2 + 2M_2^2$$

从而收敛。

8. 由非负性，考虑 Poisson 核只需证明

$$\lim_{\epsilon\to 0}(P_\epsilon * f)(0) = f(0)$$

由此利用 Fatou 引理与控制收敛定理即可知左侧为 $\|\hat{f}\|_1$，得证。由于可构造 $g \in \mathcal{S}$ 使得 $g(0) = f(0)$，且 g 满足上述极限，相减可不妨设 $f(0) = 0$。

记 $P(x) = P_1(x)$，可发现 $P_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}P_1(x/\epsilon)$，且换元得 P_ϵ 全局积分均相同，为 1。

由于连续点一定为 Lebesgue 点，可知对任何 δ，存在 η 使得 $r \leq \eta$ 时有

$$r^{-n}\int_{\|t\|<r} |f(t)| \mathrm{d}t < \delta$$

另一方面直接估计可知

$$|(P_\epsilon * f)(0)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(-t)P_\epsilon(t)\mathrm{d}t\right|$$

将 $|t| < \eta$ 时的积分记为 I_1、$|t| > \eta$ 时记为 I_2，下面对两者进行估算。由于 P 径向对称，记 $p(|x|) = P(x)$。

记 $g(r)$ 为 $n-1$ 维单位球面上 $|f(-rt)|\mathrm{d}t$ 的积分，则直接积分变换可知

$$I_1 = \int_0^\eta r^{n-1}g(r)\epsilon^{-n}p(r/\epsilon)\mathrm{d}r$$

由于这时 Lebesgue 点条件即为

$$G(r) = \int_0^r s^{n-1}g(s)\mathrm{d}s \leq \delta r^n$$

将 $r^{n-1}g(r)$ 看作 $G'(r)$ 后进行分部积分，并将 $G(r)$ 放为 δr^n 可得 (注意 $p'(s) \leq 0$，于是后一项中 $G(r)$ 放大总体仍放大)

$$I_1 \leq \delta\eta^n\epsilon^{-n}p(\eta/\epsilon) - \int_0^{\eta/\epsilon} \delta s^n p'(s)\mathrm{d}s$$

估算可发现 $r^n p(r)$ 有界，且 $s^n p'(s)$ 在 0 到无穷积分收敛，由此存在常数 C 使得 $I_1 \leq C\delta$。

另一方面，$P_\epsilon(t)$ 在 $t \geq \delta$ 时一致趋于 0，而由 $f \in L^1$ 可知 I_2 不超过 $\|f\|_1$ 乘 $P_\epsilon(t)$ 模长最大值，由此趋于 0。

由此，任给 ε，取 δ 使得 $C\delta < \varepsilon/2$，再取 ϵ_0 使得 $\epsilon < \epsilon_0$ 时 $I_2 < \varepsilon/2$，即得此时 $|(P_\epsilon * f)(0)| < \varepsilon$，从而极限为 0，得证。

9. (TBD)

10. 记 $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$，由于其为 $\mathbb{T}$ 中函数，考虑 $[0,1]$ 上，则 $k \geq 2$ 时

$$|f(x \pm k)| \leq \frac{C}{k^{-1-\delta}}$$

从而可知函数项级数绝对一致收敛，于是 $g(x)$ 连续。考虑其在 $[0,1]$ 上的傅里叶级数，可知

$$\hat{g}(k) = \int_0^1 g(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} kx}\mathrm{d}x$$

利用控制收敛即可知 $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$，于是原命题即变为要证 $S_N g(x) \to g(x)$。根据条件可知 $S_N g(x)$ 亦一致收敛，于是 $S_N g(x)$ 极限与 $\sigma_N g(x)$ 相同，而由 1.5 节知后者在 g 为连续函数时一致收敛于 g，得证。

11. (TBD)

12. (TBD)

13. (TBD)

14. 由 1.8 节 Hausdorff-Young 不等式可知 $q = p', p \in [1,2]$ 时存在，并设对应常数为 C_p，下面说明其他情况不存在。

由 $\mathcal{S}$ 中 $\mathcal{F}^{-1} = \sigma\mathcal{F}$ 可知若

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq C\|f\|_p$$

则

$$\|f\|_q \leq C\|\mathcal{F}f\|_p$$

分类讨论 (下取出的函数若不在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中，则可以从中取出一列逼近，从而仍有结论)：

- $q = p'$，且 $p > 2$，一维时考虑

$$f_0(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2} & |x| > 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases}$$

  直接换元可知 $\xi \to \infty$ 时 $\hat{f}(\xi) \sim \xi^{-1/2}$，从而其积分收敛必须在 $q > 2$ 的 L_q 中，与 $q = p'$ 矛盾。对高维，可构造 $f(x) = \prod_i f_0(x_i)$，相同得出矛盾。

- $q \neq p'$，且 $p > 2$，此时有

$$\|f\|_q \leq C\|\mathcal{F}f\|_p \leq C_{p'}C\|f\|_{p'}$$

  但 $p' > q$ 时考虑趋于无穷的 $x^{-\alpha}$，$p' < q$ 时考虑 0 附近的 $x^{-\beta}$ 可知 $\mathbb{R}$ 上不同的 p 范数无强弱关系，矛盾。

- $q \neq p'$，且 $p \leq 2$。
  类似第一种情况，只需在一维时构造矛盾即可。考虑 $f(x) = x^{-\alpha}$，直接换元可知 $\hat{f}(\xi) \sim \xi^{\alpha-1}$。当 $q > p'$ 时，令 $\alpha \to \frac{1}{p}^-$，考虑 f 在零附近为 $x^{-\alpha}$，可发现 $q(1/p-1) < -1$，于是能取合适的 α 使得 $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$ 但 $\hat{f}(\xi) \notin L^q(\mathbb{R})$。

当 $q < p'$ 时，令 $\alpha \to \frac{1}{p}^+$，考虑 f 在充分大时为 $x^{-\alpha}$，可发现 $q(1/p-1) > -1$，于是能取合适的 α 使得 $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$ 但 $\hat{f}(\xi) \notin L^q(\mathbb{R})$。

综上得矛盾。

伸缩不变性思路：利用

$$\|f(ax)\|_p = a^{-n/p}\|f\|_p$$

$$\mathcal{F}(f(ax)) = a^{-n}\hat{f}(a^{-1}x)$$

$$\|\hat{f}(a^{-1}x)\|_q = a^{n/q}\|\hat{f}\|_q$$

于是若有

$$\|\hat{f}\|_q \le C\|f\|_p$$

即有

$$\|\mathcal{F}(f(ax))\|_q \le C\|f(ax)\|_p$$

也即

$$\|\hat{f}\|_q \le Ca^{n(1-1/p-1/q)}\|f\|_p$$

只要 $1-1/p-1/q \neq 0$，考虑最优的 C 后取合适的 a 可发现有更优的 C 存在，矛盾。

2 Hardy-Littlewood 极大函数

1. 记

$$\psi_{x_0}(x) = \sup_{|y-x_0|\ge|x|} |\varphi(y)|$$

则

$$\psi_{x_0}(x) \le \psi(\max\{|x|-|x_0|, 0\})$$

又由于其随 $|x|$ 单调减，可从 $\psi(x)$ 绝对可积得到 $\psi_{x_0}(x)$ 绝对可积，由此作平移不妨设 $x=0$。另一方面，由于 $\psi > |\varphi|$ 且满足 φ 的条件、$|f| \in L^1_{loc}$，将 φ 替换为 ψ、f 替换为 $|f|$ 后，左侧不会变小，右侧不变，因此可不妨进行这样的替换。

由此，设 $g = |f|$，问题变为要证

$$\sup_{t>0}\sup_{|y|<t} t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(s/t)g(y-s)\mathrm{d}s \le CMf(x)$$

换元可知

$$t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(s/t)g(y-s)\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(s+y/t)g(-st)\mathrm{d}s$$

由此利用 ψ 单调性，$|y| < t$ 时其绝对值不超过 (上标加号表示小于 0 时取 0)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi((|s|-1)^+)g(-st)\mathrm{d}s = \eta_t * g(0)$$

这里 $\eta(s) = \psi((|s|-1)^+)$，可知其非负、球对称、对 $|s|$ 单调减，且由 ψ 单调性可知其绝对可积，利用结论 2.8 即得证。

2. 利用条件设 $\|f\|_{p,\infty}=A,\|f\|_{q,\infty}=B$，则有

$$a_f(\lambda)\le\min\left(\frac{A}{\lambda^p},\frac{B}{\lambda^q}\right)$$

利用结论 2.4 有

$$\int_X|f(x)|^r\mathrm{d}\mu=\int_0^\infty r\lambda^{r-1}a_f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\le\int_0^1 r\lambda^{r-1-p}A\mathrm{d}\lambda+\int_1^\infty r\lambda^{r-1-q}B\mathrm{d}\lambda=\frac{rA}{r-p}+\frac{rB}{q-r}$$

即得证。

3. **引理**：设 $g_k:X\to\mathbb{R}$，对任何 $\lambda>0$ 有 (绝对值符号表满足条件的 x 所在集合的测度)

$$\lambda\left|\sum_k g_k(x)\ge\lambda\right|\le\sum_k\int_0^\lambda|g_k(x)\ge t|\mathrm{d}t$$

引理证明：利用 Fubini 定理可得右侧即

$$\int_X\sum_k\int_0^\lambda\chi\{g_k(x)\ge t\}\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu=\int_X\sum_k\min(\max(g_k(x),0),\lambda)\mathrm{d}\mu$$

当 $\sum_k g_k(x)\ge\lambda$ 成立时，分类讨论其中有无 $\ge\lambda$ 的 $g_k(x)$ 即可得到 $\sum_k\min(\max(g_k(x),0),\lambda)\ge\lambda$，由此将左侧看作 $\sum_k g_k(x)\ge\lambda$ 时对 λ 的积分，利用右侧处处非负即可知不等式成立。

定理证明：用 $|f_k|$ 代替 f_k 时右侧不变，左侧不减小，由此只需证明 f_k 均非负时成立。

对任何 $\lambda>0$，利用

$$\|f_k\|_{1,\infty}\ln(1+a_k^{-1})=\int_{\lambda a_k}^{\lambda(a_k+1)}\frac{\|f_k\|_{1,\infty}}{t}\mathrm{d}t\ge\int_{\lambda a_k}^{\lambda(a_k+1)}|f_k(x)\ge t|\mathrm{d}t=\int_0^\lambda|f_k(x)-\lambda a_k\ge t|\mathrm{d}t$$

设 $g_k=f_k-\lambda a_k$，利用引理即得

$$\sum_k\|f_k\|_{1,\infty}\ln(1+a_k^{-1})\ge\lambda\left|\sum_k f_k(x)\ge\left(1+\sum_k a_k\right)\lambda\right|$$

由于 $a_k>0$，记 $\lambda^*=\left(1+\sum_k a_k\right)\lambda$ 即可由弱型空间定义得到结论。

4. 当 $p=2$ 时，可发现左即为 $\|\hat{f}\|_{L^2}=\|f\|_{L^2}$，从而得证。

其他情况下，考虑 $Tf=|x|^n\hat{f}(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 可测函数到 $(\mathbb{R}^n,|x|^{-2n}\mathrm{d}x)$ 的映射，则其为线性算子，且左侧即为

$$\|Tf\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n,|x|^{-2n})}$$

由此为验证其他情况成立，利用 Marcinkiewicz 插值定理，只需证明存在 A,B 使得

$$\|\hat{f}|x|^n\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n,|x|^{-2n}\mathrm{d}x)}\le A\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

$$\|\hat{f}|x|^n\|_{L^{2,\infty}(\mathbb{R}^n,|x|^{-2n}\mathrm{d}x)}\le B\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

分别进行分析：

- $p=1$ 时情况

  记 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=m$，则 $|\hat{f}|\le m$，只需证明存在 A 对任何 λ 满足

$$\int_{|\hat{f}||x|^n>\lambda}\lambda|x|^{-2n}\mathrm{d}x\le Am$$

而左侧不超过

$$\int_{|x|^n>\lambda/m}\lambda|x|^{-2n}\,\mathrm{d}x=\int_{|x|>\sqrt[n]{\lambda/m}}\lambda|x|^{-2n}\,\mathrm{d}x$$

利用球坐标可知，其可写为

$$C\int_{\sqrt[n]{\lambda/m}}^{\infty}\lambda r^{-n+1}\,\mathrm{d}r=\frac{Cm}{n}$$

从而得证。

- $p=2$ 时情况

  由定义可知

$$\|\hat{f}|x|^n\|_{L^{2,\infty}(\mathbb{R}^n,|x|^{-2n}\,\mathrm{d}x)}\le\|\hat{f}|x|^n\|_{L^2(\mathbb{R}^n,|x|^{-2n}\,\mathrm{d}x)}=\|\hat{f}\|_{L^2}=\|f\|_{L^2}$$

  从而取 $B=1$ 直接得成立。

5. 记

$$M_rf(x)=\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(x-s)|\mathrm{d}s$$

对任何两个点 x、y，可发现 r 充分大时

$$\int_{B_{r-|x-y|}}|f(y-s)|\mathrm{d}s\le\int_{B_r}|f(x-s)|\mathrm{d}s\le\int_{B_{r+|x-y|}}|f(y-s)|\mathrm{d}s$$

由此

$$\left(\frac{r-|x-y|}{r}\right)^nM_{r-|x-y|}f(y)\le M_rf(x)\le\left(\frac{r+|x-y|}{r}\right)^nM_{r+|x-y|}f(y)$$

于是可得

$$\limsup_{r\to\infty}M_rf(x)\le\limsup_{r\to\infty}M_rf(y)$$
$$\limsup_{r\to\infty}M_rf(y)\le\limsup_{r\to\infty}M_rf(x)$$

从而

$$\limsup_{r\to\infty}M_rf(x)=\limsup_{r\to\infty}M_rf(y)$$

由局部 L^1 可知对任何 $r>0$ 与 x，$M_rf(x)$ 有限，于是若 $Mf(x)$ 为无穷，只能 $\limsup_{r\to0}M_rf(x)=\infty$ 或 $\limsup_{r\to\infty}M_rf(x)=\infty$。

若所有点 $M_rf(x)$ 在无穷处均为无穷，则已得证，下不妨设均存在有限极限，则只需证明

$$\mu\left\{x\;\middle|\;\limsup_{r\to0}M_rf(x)=\infty\right\}=0$$

利用实分析知识 [Stein, P104] 可以证明，在任何紧集 Ω 上，f 的 Lebesgue 点几乎处处存在 (由此 $\mathbb{R}^n$ 中几乎处处存在)，而 Lebesgue 点处由

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^n}\int_{|y|\le r}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y=0$$

乘常数将分子 r^n 变为 $|B_r|$ 即可知

$$\lim_{r\to\infty}M_rf(x)=|f(x)|$$

从而成立，原命题得证。

6. (TBD)

7. (TBD)

8. (TBD)

9. 对任何 R 考虑 $\{x \mid Mf(x) > \lambda\} \cap B_R(0)$，将这个集合记为 A_R，利用定义有 (注意 $|A_R|$ 随 R 单调增)

$$\|Mf\|_{p,\infty} = \sup_{R>0,\lambda>0} \lambda |A_R|^{1/p}$$

根据定义，对任何 $\varepsilon > 0$，任何 $x \in A_R$ 存在 r_x 使得 $|f|$ 在 $B_{r_x}(x)$ 上积分平均 $\geq \lambda - \varepsilon$。

利用引理 2.6，可以在这些开球中选出一些不交的，使得它们半径扩大三倍后能覆盖住全部，由此可知存在一个测度至少为 $3^{-n}|A_R|$ 的集合 E_R，$|f|$ 在其上的积分平均 $\geq \lambda - \varepsilon$。

若 $\|f\|_{p,\infty} = t$，有

$$\mu^p a_f(\mu) \leq t^p$$

于是对任何 $s > 0$ (由于 E_R 上 $|f| \geq \mu$ 的测度不可能超过 $|E_R|$)

$$\int_{E_R} |f| \mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \min(|E_R|, a_f(\lambda)) \mathrm{d}\lambda \leq \int_0^s |E_R| \mathrm{d}\lambda + \int_s^\infty \frac{t^p}{\lambda^p} \mathrm{d}\lambda = s|E_R| + (p-1)t^p s^{1-p}$$

$$\lambda - \varepsilon \leq \frac{1}{|E_R|} \int_{E_R} |f| \mathrm{d}x \leq s + \frac{(p-1)t^p s^{1-p}}{|E_R|} \leq s + 3^n \frac{t^p s^{1-p}}{(p-1)|A_R|}$$

由 ε 可任取，并取定 $s = t|A_R|^{-1/p}$ 知

$$\lambda \leq t|A_R|^{-1/p} + 3^n(p-1)^{-1} t |A_R|^{-1/p} = \frac{3^n p}{p-1} |A_R|^{-1/p}$$

于是取 $C = \frac{3^n p}{p-1}$ 得结论。

3 Hilbert 变换

1. 由于

$$H\chi_{[a,b]}(x) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{x-b}^{x-a} \frac{1}{y} \mathrm{d}y$$

分其是否经过 0 讨论可知

$$H\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \ln \frac{x-a}{x-b} & x < a \\ \frac{1}{\pi} \ln \frac{a-x}{x-b} & a < x < b \\ \frac{1}{\pi} \ln \frac{x-a}{x-b} & x > b \end{cases}$$

2. (TBD)

3. 利用留数定理可直接计算得

$$\hat{f}(\xi) = \pi \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}$$

于是

$$H(x) = \mathcal{F}^{-1}\big[-\mathrm{i}\, \mathrm{sgn}(\xi) \pi \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|} \big](x)$$

直接分正负计算得到

$$H(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

4. (TBD)

5. 根据 3.2 节，设 $g(\xi)=\hat{f}(\xi)$，则要证 (提出常数)

$$-(\operatorname{sgn} g*\operatorname{sgn} g)(\xi)=(g*g)(\xi)-2\operatorname{sgn}(\xi)(g*\operatorname{sgn} g)(\xi)$$

也即

$$-\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(\xi-x)g(\xi-x)\operatorname{sgn}(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}g(\xi-x)g(x)\mathrm{d}x-2\operatorname{sgn}(\xi)\int_{\mathbb{R}}g(\xi-x)\operatorname{sgn}(x)g(x)\mathrm{d}x$$

先考虑 $\xi>0$ 的情况，有左侧为

$$\int_{-\infty}^{0}g(\xi-x)g(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{\xi}g(\xi-x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{\xi}^{\infty}g(\xi-x)g(x)\mathrm{d}x$$

右侧为

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi-x)g(x)\mathrm{d}x+2\int_{-\infty}^{0}g(\xi-x)g(x)\mathrm{d}x-2\int_{0}^{\infty}g(\xi-x)g(x)\mathrm{d}x$$

于是右减左为

$$2\int_{-\infty}^{0}g(\xi-x)g(x)\mathrm{d}x-2\int_{\xi}^{\infty}g(\xi-x)g(x)\mathrm{d}x$$

直接在第二项中将 x 换元为 $\xi-x$ 即可得到此为 0，得证，对 $\xi\le 0$ 时类似。

6. 将要证的式子改写为

$$\lim_{N\to+\infty}\lim_{t\to 0^+}\langle Q_t(x),\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}Nx}\varphi(x)\rangle=\mathrm{i}\varphi(0)$$

利用 Fourier 变换的性质与 Parseval 恒等式，左侧内积内即为

$$\langle\hat{Q}_t(\xi),\hat{\varphi}(\xi+N)\rangle=\int_{\mathbb{R}}-\mathrm{i}\operatorname{sgn}(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi t|\xi|}\hat{\varphi}(\xi+N)\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}}-\mathrm{i}\operatorname{sgn}(\xi-N)\mathrm{e}^{-2\pi t|\xi-N|}\hat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

当 $t\to 0^+$ 时利用 $\hat{\varphi}$ 可积由控制收敛定理可知极限为

$$\int_{\mathbb{R}}-\mathrm{i}\operatorname{sgn}(\xi-N)\hat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

再次利用控制收敛定理与 Fourier 逆变换可知其在 $N\to+\infty$ 时为

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{i}\hat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi=\mathrm{i}\varphi(0)$$

7. 由于 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，必然有 $\hat{f}$ 连续，而由于

$$\mathcal{F}(Hf)(\xi)=-\mathrm{i}\operatorname{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)$$

当且仅当 $\hat{f}(0)=0$ 时 $\mathcal{F}(Hf)(\xi)$ 在 0 处极限存在，也即 Hf 的 Lebesgue 积分存在 (仅当利用反证与控制收敛定理即可)。根据 Lebesgue 可积与绝对可积的等价性即可知当且仅当 $\hat{f}(0)=0$ 时 $Hf\in L^1(\mathbb{R})$，展开 $\hat{f}(0)$ 得结论。

8. 即为讲义上与平移可交换的算子的性质 iii、v。

9. 即为讲义上与平移可交换的算子的命题 (24)。

10. 利用

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n,\quad\sup_x|x^\alpha D^\beta f|<\infty$$

取 α 各分量充分大即可发现 $f(x)\chi_{B_R(0)}(x)$ 在 $R\to\infty$ 时一致趋于 f，从而 $L_0^\infty\cap\mathcal{S}$ 在 $\mathcal{S}$ 中依无穷范数稠密，由与平移可交换的算子的性质 i、ii 即可得证。

* 讲义上的证明用到了结论，$1\le p<\infty$ 时

$$\forall f\in L^p(\mathbb{R}^n),\quad\lim_{|h|\to\infty}\|\tau_h f+f\|_p=2^{1/p}\|f\|_p$$

证明思路为，当 f 紧支时可找到充分大的 h 使得 $\tau_h f$ 与 f 支集不交，此时等号成立，而利用控制收敛定理，L^p 中任何 f 可由紧支的 f 逼近，从而得证。(对 $L_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 完全类似。)

4 奇异积分算子 I

1. 利用定义可发现
$$T(f(ax))=p.v.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(a(x-y))\mathrm{d}y=p.v.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega((ay)')}{|ay|^n}f(ax-ay)\mathrm{d}(ay)=(Tf)(ax)$$
再利用
$$\|f(ax)\|_p=a^{-p/n}\|f\|_p$$
即得若 $\|Tf\|_q\le C\|f\|_p$，有
$$\|Tf(ax)\|_q\le C\|f(ax)\|_p$$
也即
$$\|Tf\|_q\le Ca^{n(q-p)}\|f\|_p$$
只要 $p\ne q$，考虑最优的 C 后取合适的 a 可发现有更优的 C 存在，矛盾。

2. (TBD)

3. 这即为讲义上的推论 4.6。利用定理 4.4 拆分出 Ω_o 与 Ω_e 可直接计算得到 $\mathcal{F}\big(p.v.\frac{\Omega_o(x')}{|x|^n}\big)=0$。取只在部分立体角有值且球对称的 $\hat{\phi}$ 即可验证 $\Omega_o=0$，从而得证。

4. 直接估算可知
$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y=\int_{|y-x|<r}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y+\int_{|y-x|>r}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y$$
第一项可以看成 ϕ 定义为在 $|x|<r$ 时为 $|x|^{-(n-\alpha)}$，$|x|\ge r$ 时为 0，利用讲义结论 2.8 可知
$$\int_{|y-x|<r}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y\le Mf(x)\int_{|y|<r}\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y=Cr^{\alpha}Mf(x)$$
第二项利用 Hölder 不等式，记 $q=(1-1/p)^{-1}$ 可放缩为 (利用所给界可估算得右侧积分收敛)
$$\|f\|_p\left(\int_{|y-x|>r}\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{(n-\alpha)q}}\right)^{1/q}=C'r^{n/q-n+\alpha}\|f\|_p=C'r^{\alpha-n/p}\|f\|_p$$
令
$$r=\|f\|_p^{p/n}Mf(x)^{-p/n}$$
代入即得结论。

5. 利用习题 4.4 得
$$|I_\alpha f(x)|\le C\|f\|_p^{\alpha p/n}Mf(x)^{1-\alpha p/n}$$
由讲义定理 2.15(i) 可知 $p>1$ 时
$$\|I_\alpha f\|_q\le C\|f\|_p^{\alpha p/n}\|Mf^{1-\alpha p/n}\|_q\le C'\|f\|_p^{\alpha p/n}\|f^{1-\alpha p/n}\|_q$$
代入 $q=np/(n-\alpha p)$ 即可发现右侧成为 $C'\|f\|_p$，从而得证。
当 $p=1$ 时，可发现
$$|I_\alpha f(x)|^{n/(n-\alpha)}\le C'\|f\|_1^{\alpha/(n-\alpha)}Mf(x)$$
注意到 $a_g(\lambda)=a_{g^k}(\lambda^k)$，由定义可知
$$\|I_a f\|_{n/(n-\alpha),\infty}=\||I_a f|^{n/(n-\alpha)}\|_{1,\infty}^{(n-\alpha)/n}$$
从而利用讲义定理 2.15(ii) 即得到结论。

6. (TBD)

7. (TBD)

8. (TBD)

9. * 参考 Grafakos 的《经典傅里叶分析》。

   直接计算 Δf 的 Fourier 变换可知 (忽略常数系数)

$$0=\mathcal{F}(\Delta f)=|x|^2\hat{f}$$

   而根据定义可知

$$(|x|^2\hat{f})(\varphi)=\hat{f}(|x|^2\varphi)$$

   于是，若 φ 支集在 $\{x \mid |x|>r\}$ 中，$|x|^{-2}\varphi\in\mathcal{S}$，即有

$$\hat{f}(\varphi)=|x|^2\hat{f}(|x|^{-2}\varphi)=0$$

   于是可知 $\hat{f}$ 的支集为原点，下面证明，$u\in\mathcal{S}'$ 的支集为原点可以推出

$$u=\sum_{|\alpha|\le k}a_\alpha\partial^\alpha\delta$$

   这里 α 为指标，a_α 为常数系数，k 为自然数，δ 代表 δ 函数。以此再进行 Fourier 变换即得到了结论。

   利用 $\mathcal{S}$ 的拓扑性质 (即 $\{f\in\mathcal{S}\mid p_{\alpha,\beta}(f)<c\}$ 对一切 α,β 与 $c>0$ 构成拓扑基)，由 u 的连续性，$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ 的原像可写为一些拓扑基的并，于是反证可知

$$\exists C>0,m\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N},\quad |u(f)|\le C\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le k}p_{\alpha,\beta}(f)$$

   这里 $p_{\alpha,\beta}$ 如讲义 1.7 节定义。

   先证明 $D^\alpha\varphi(0)=0$ 对一切 $|\alpha|<k$ 成立时 $u(\varphi)=0$。考虑 $\zeta\in C^\infty$ 使得 $|x|\ge 2$ 时其为 1，$|x|\le 1$ 时其为 0，记 $\zeta^\varepsilon(x)=\zeta(x/\varepsilon)$ 可发现 $p_{\alpha,\beta}(\zeta^\varepsilon\varphi-\varphi)\to 0$，又由支集为 0 可知 $u(\zeta^\varepsilon\varphi)=0$，于是将 $u(\varphi)$ 拆成两项并令 $\varepsilon\to 0$ 即可得证。

   对任何 f，取函数 $\eta\in C_0^\infty$ 在 0 的某邻域为 1，泰勒展开可发现

$$f(x)=\eta(x)\left(\sum_{|\alpha|\le k}\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}x^\alpha+O(x^{k+1})\right)+(1-\eta(x))f(x)$$

   由之前证明可知 u 作用在 $O(x^{k+1})$ 项上为 0，且由支集作用在 $(1-\eta(x))f(x)$ 上为 0，定义

$$a_\alpha=(-1)^{|\alpha|}\frac{u(x^\alpha\eta(x))}{\alpha!}$$

   即可验证结论成立。

10. 利用习题 4.9，只需给出一个特解，通解即为其加上任意调和多项式。

   $n=1$ 时情况平凡，为

$$\Gamma[u]=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{t}u(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)u(x)\mathrm{d}x$$

   计算验证即得其满足，且第二项包含了一切 $n=1$ 的调和多项式。

当 $n \geq 2$ 时。根据偏微分方程理论即可知基本解构成这样的特解，即 $n = 2$ 时

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x|$$

$n \geq 3$ 时 (这里 $\alpha(n)$ 指 n 维单位球体积)

$$\Gamma(x) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x^{n-2}|}$$

利用球坐标换元可发现其在 0 附近积分收敛，从而分 $|x| < 1$ 与 $|x| \geq 1$ 估算积分 ($n = 2$ 时须利用 $\ln|x| < |x|$) 可验证其确实属于 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，得证。

11. (TBD)

12. (1) 利用 4.5 节开头的 Fourier 变换结论与 $\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$ 的变换为 $\mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2}$ 可知只需证明

$$P_k(D)\mathrm{e}^{-\pi|x|^2} = P_k(-2\pi x)\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$$

而归纳可以证明 (由线性性只需考虑单项式情况，先对 $Q = x_i^n$ 说明，再利用不同微分算子产生的项独立) 对多项式 Q 有

$$Q(D)\mathrm{e}^{-\pi|x|^2} = \left(Q(-2\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\Delta^n Q(-2\pi x)\right)\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$$

从而即得证。

(2) 利用调和函数的平均值性质即知其为 $P_k(0) = 0$。

(3) 利用 (1) 可知

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(P_k(x)\mathrm{e}^{-\pi t|x|^2}) &= t^{-k/2}\mathcal{F}(P_k(t^{1/2}x)\mathrm{e}^{-\pi|t^{1/2}x|^2}) \\ &= t^{-(n+k)/2}\mathrm{i}^{-k}P_k(t^{-1/2}\xi)\mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2/t} = t^{-n/2-k}\mathrm{i}^{-k}P_k(\xi)\mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2/t}\end{aligned}$$

仿照讲义 4.2 节 (积分均代表主值)

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}(P_k(x)|x|^{-n-k}),\phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}P_k(x)|x|^{-n-k}\hat{\phi}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^{(n+k)/2}}{\Gamma((n+k)/2)}\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}t^{(n+k)/2-1}P_k(x)\mathrm{e}^{-\pi t|x|^2}\hat{\phi}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi^{(n+k)/2}}{\Gamma((n+k)/2)}\int_0^{\infty}t^{(n+k)/2-1}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}(P_k(x)\mathrm{e}^{-\pi t|x|^2})\phi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi^{(n+k)/2}\mathrm{i}^{-k}}{\Gamma((n+k)/2)}\int_0^{\infty}t^{-k/2-1}\int_{\mathbb{R}^n}P_k(x)\mathrm{e}^{-\pi|x|^2/t}\phi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi^{(n+k)/2}\mathrm{i}^{-k}}{\Gamma((n+k)/2)}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{\infty}s^{k/2-1}\mathrm{e}^{-\pi s|x|^2}\mathrm{d}sP_k(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^{(n+k)/2}\Gamma(k/2)\mathrm{i}^{-k}}{\Gamma((n+k)/2)\pi^{k/2}}\int_{\mathbb{R}^n}P_k(x)|x|^{-k}\phi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

整理即得证。

5 奇异积分算子 II

1. 设 $Tf = K * f$，由有界与可积可知 $Tf \in L^2 \cap L^1$，从而可进行 Fourier 变换，得到

$$\mathcal{F}(Tf) = \hat{K}\hat{f}$$

而条件化为 $\hat{f}(0) = 0$，于是 $\hat{K}\hat{f}(0) = 0$，即得证 (或直接通过 Fubini 定理交换积分次序)。

2. 仅当：设 $\|\hat{K}\|_\infty = M$，利用 $\mathcal{F}(\varphi^R) = R^n\hat{\varphi}(R\lambda)$ 有

$$|K(\varphi^R)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{K}(\lambda)R^n\hat{\varphi}(R\lambda)\mathrm{d}\lambda\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{K}(\lambda/R)\hat{\varphi}(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right| \le M\|\hat{\varphi}\|_{L^1}$$

利用 Sobolev 嵌入定理可得右侧可被控制，从而得证。

当：由 $K(x)$ 条件可得

$$\sup_{a>0}\int_{a<|x|<2a} |K(x)|\mathrm{d}x \le \sup_{a>0}\int_{a<|x|<2a} \frac{A_1}{|x|^n}\mathrm{d}x < \infty$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{|x|>2|y|} |K(x-y)-K(x)|\mathrm{d}x \le \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{|x|>2|y|} \frac{A|y|}{|x|^{n+1}}\mathrm{d}x < \infty$$

另一方面，取 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使其径向对称且 $|x| \le \frac{1}{2}$ 时 $\varphi(x) = 1$、$|x| > 1$ 时 $\varphi(x) = 0$，并记 $\psi(x) = \varphi^{2b}(x) - \varphi^a(x)$，有对任何 $0 < a < b$

$$\int_{a<|x|<b} K(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} K(x)\psi(x)\mathrm{d}x - \int_{a/2<|x|<a} K(x)\psi(x)\mathrm{d}x - \int_{b<|x|<2b} K(x)\psi(x)\mathrm{d}x$$

第一项为 $\langle K, \varphi^{2b}\rangle - \langle K, \varphi^a\rangle$ 有界，后两项由第一式有界，从而整体有界。

综合以上三式，由定理 5.3 可得

$$\sup_{0<\varepsilon<R}\|\hat{K}_{\varepsilon,R}\|_\infty < \infty$$

由有界性可知存在 $a_k \to 0^+$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{a_k<|x|<1} K(x)\mathrm{d}x = L$$

由此可构造 $\tilde{K} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\tilde{K}^\wedge \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，且

$$\forall\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle\tilde{K}, \phi\rangle = \lim_{k\to\infty}\int_{|x|>a_k} K(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

下面证明 $K - \tilde{K} = a\delta$，两侧同时 Fourier 即得结论。设 $T = K - \tilde{K}$。由定义可发现 T 支集在原点，从而由习题 4.9 过程可知

$$T = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha\partial^\alpha\delta$$

但由仅当一侧可知 $|\langle\tilde{K}, \varphi^R\rangle|$ 有界，从而 $\langle T, \varphi^R\rangle$ 有界，直接 Fourier 计算可得只能 $T = c_0\delta$，即得证。

3. (TBD)

4. (TBD)

5. 设对 $K(x,y)$ 对应的参数为 δ 与 C，下考察对 $K_\varepsilon(x,y)$ 对应的参数：

   (a) 由光滑性与无穷处为 1 可知 φ 有界，于是

   $$|K_\varepsilon(x,y)| = |K(x,y)||\varphi((x-y)/\varepsilon)| \le \frac{C\|\varphi\|_\infty}{|x-y|^n}$$

   (b) 设 $\varphi(x) = \eta(|x|)$。直接计算可知

   $$|K_\varepsilon(x,y) - K_\varepsilon(x,z)| = |K(x,y)\eta(|x-y|/\varepsilon) - K(x,z)\eta(|x-z|/\varepsilon)|$$

   由于

   $$|K(x,y) - K(x,z)||\eta(|x-z|/\varepsilon)| \le \frac{C\|\varphi\|_\infty|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}$$

利用三角不等式只需证明

$$|K(x,y)||\eta(|x-y|/\varepsilon)-\eta(|x-z|/\varepsilon)|\le \frac{C'|y-z|^{\delta_0}}{|x-y|^{n+\delta_0}}$$

利用条件 (a) 只需证

$$|\eta(|x-y|/\varepsilon)-\eta(|x-z|/\varepsilon)|\le \frac{C''|y-z|^{\delta_0}}{|x-y|^{\delta_0}}$$

也即当 $s>2t>0$ 时，存在 δ_0 与 C_0 满足对任何 $r\in[s-t,s+t]$ 有 (将 x,y,z 同乘 ε 不影响结果)

$$|\eta(s)-\eta(r)|\le \frac{C_0t^{\delta_0}}{s^{\delta_0}}$$

由于在 $s<1/3$ 时左侧恒为 0，否则右侧至少为 $3^{\delta_0}C_0t^{\delta_0}$，且根据光滑性可知 η 有 Lipschitz 连续性，从而取 $\delta_0=1$ 可验证成立。

(c) 由 $\varphi((x-y)/\varepsilon)$ 的对称性与上一种情况完全相同得证。

于是，最终的 C 取为 $\max(C_0,C\|\varphi\|_\infty)$，$\delta$ 取为 $\min(\delta,1)$ 即可。

6. 设 $T=T_1-T_2$，则其满足对 $f\in L^\infty_c$，在 f 支集外，Tf 几乎处处为 0，且其为 $L^2(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子。

   由线性性，对任何一点 x_0，考虑 $f_{\varepsilon;x_0}$ 在 $B_\varepsilon(x_0)$ 为 1，其余为 0。记 $\alpha(x_0)=Tf(x_0)$，若对不同的 $f_{\varepsilon;x_0}$ 定义出的 $\alpha(x_0)$ 不同，考虑两不同的 f 作差，其支集不包含 x_0，但 Tf 在 x_0 非零，矛盾。

   与上类似并利用线性性，通过对 f 修改 x_0 附近邻域即可发现，对任何 f 均有 $Tf(x_0)=\alpha(x_0)f(x_0)$。

   若 $\alpha\notin L^\infty$，对任何 M 存在 $\delta>0$ 满足，$|\{x\mid \alpha(x)>M\}|>\delta$，于是存在某 B_{R_M} 使得

$$A_M=\{x\in B_{R_M}\mid \alpha(x)>M\},\quad |A_M|>\delta/2$$

   设 f 在 A_M 上为 1，否则为 0，可发现

$$\|Tf\|_{L^2}^2\ge |A_M|M^2=M^2\|f\|_{L^2}$$

   与 T 的有界性矛盾。

7. (TBD)

8. (TBD)

9. 由条件已知 $[K]_2$ 存在，由 $\|\hat{K}\hat{f}\|_{L^2}\le C\|\hat{f}\|_{L^2}$ 可知 $\hat{K}\in L^\infty$，由此类似结论 5.5 考虑 $\hat{K}_{r,R}$ 拆分估算得结论。

6 Hardy 空间与 BMO 空间

1. (TBD)

2. 本题中的 $\lesssim$ 相关均指相差只与 φ、n 有关的常数。

   由线性性只需证明对任何原子 $a(x)$ 有 $\|M_\varphi^*a\|_1\lesssim 1$ 即可，设其对应的方体为 Q，由平移不变性可不妨设其以原点为心，$2r$ 为边长。设 $Q^*=B(0,2\sqrt{n}r)$ 包含 Q，利用习题 2.1 可知 $|M_\varphi^*f(x)|\lesssim Mf(x)$，从而 (这里利用第二章结论 M 为 L^2 有界算子，再由 a 的二范数估算得到)

$$\int_{Q^*}M_\varphi^*a(x)\mathrm{d}x\le |Q^*|^{1/2}\|M_\varphi^*a\|_2\lesssim |Q^*|^{1/2}|Q|^{-1/2}\lesssim 1$$

下面考虑 $x \notin \bar{Q}^*$ 的情况，下证

$$\forall t > 0, \quad \forall |x-y| < t, \quad |\varphi_t * a(y)| \lesssim \frac{r}{|x|^{n+1}}$$

由此 Q^* 外将 $M_\varphi^* a(x)$ 放为 $\frac{r}{|x|^{n+1}}$ 并积分即可得到结论。

由于 $t \to 0^+$ 时 $\varphi_t * a(y) \to \|\varphi\|_{L^1} a(x) = 0$，只需考虑其充分大的情况。直接换元并利用微分中值定理有存在 $\frac{y-z}{t}$ 与 $\frac{y}{t}$ 间的 ξ 使得

$$|\varphi_t * a(y)| = \left| \int_Q \frac{1}{t^n}\left(\varphi\left(\frac{y-z}{t}\right) - \varphi\left(\frac{y}{t}\right)\right)a(z)\mathrm{d}z \right| \le \int_Q \frac{|z||a(z)|}{t^{n+1}}|\nabla\varphi(\xi)|\mathrm{d}z$$

当 $|x| < 2t$ 时，直接利用 $|z|$、$|a(z)|$ 与 $|\nabla\varphi|$ 有界性即可估计得结论，否则，由于 $|y| > t$，利用 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 可得 (最后一步利用了 t 充分大，从而 $|z| < r$ 相比 $|x|$ 充分小)

$$|\nabla\varphi(\xi)| \lesssim |\xi|^{-n-1} \lesssim \frac{t^{n+1}}{||x| - |x-y| - |z||} \lesssim \frac{t^{n+1}}{|x|^{n+1}}$$

综合即得结果。

3. (TBD)

4. 本题中的 $\lesssim$ 相关均指相差只与 α, n 有关的常数。

   由线性性只需证明对任何原子 $a(x)$ 有

$$\|I_\alpha a\|_{n/(n-\alpha)} \lesssim 1$$

   设其对应的方体为 Q。由平移不变性可不妨设其以原点为心，$2r$ 为边长，与习题 2 相同定义 Q^*，并将半径放大为两倍。将 Q^* 内 $(I_\alpha a)^{n/(n-\alpha)}$ 的积分记为 I_1，Q^* 外的积分记为 I_2，只需说明两者分别有界。

   由习题 4.4 可得

$$|I_\alpha a(x)| \lesssim \|a\|_p^{\alpha p/n} Ma(x)^{1-\alpha p/n}$$

   代入 $\|a\|_p$ 的界可知其 $\lesssim |Q|^{\alpha/n-1}$，将上界记为 S。利用 Marcinkiewicz 插值定理有

$$I_1 = \int_0^S \frac{n}{n-\alpha}\lambda^{\alpha/(n-\alpha)}\mu\{x \in Q^* \mid |I_\alpha a(x)| > \lambda\}\mathrm{d}\lambda$$

   将积分拆分为 0 到 r 与 r 到 S，前者直接将第二项放为 $|Q^*|$，后者在 I_α 的估计中取 $p=1$ 并由 M 的弱 $(1,1)$ 性得到

$$\mu\{|I_\alpha a(x)| > \lambda\} \lesssim \left(\frac{\|a\|_1}{\lambda}\right)^{n/(n-\alpha)}$$

   从而综合可得

$$I_1 \lesssim |Q^*| r^{n/(n-\alpha)} + \ln\frac{|Q|^{\alpha/n-1}}{r}$$

   取 $r = |Q|^{\alpha/n-1}$ 即得 $I_1 \lesssim 1$。

   另一方面，利用 a 的性质直接计算有 ($a(y)\mathrm{d}y$ 乘 $f(x)$ 在 Q 上积分为 0)

$$I_2 \approx \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*}\left|\int_Q \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\right)a(y)\mathrm{d}y\right|^{n/(n-\alpha)}\mathrm{d}x$$

   由于 x 在 Q^* 外、y 在 Q 内，且 Q^* 包含 $2Q$，$|x| > 2|y|$ 对任何 x, y 成立，利用 Hölder 不等式将指数放入积分中，并由微分中值定理即有

$$I_2 \lesssim |Q|^{\alpha/(n-\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*}\int_Q \left(\frac{|y|}{|x|^{n-\alpha+1}}|a(y)|\right)^{n/(n-\alpha)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

   利用 $|a(y)| \le \frac{1}{|Q|}$ 可直接算出积分，对比阶即可发现最终 r 的阶数恰好为 0，从而 $I_2 \lesssim 1$，得证。

5. 由线性性只需证明对任何原子 $a(x)$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\hat{a}(y)|}{|y^n|}\mathrm{d}y\le C$$

即可，设其对应的方体为 Q，由平移不改变 Fourier 变换的模可不妨设其以原点为心，$2r$ 为边长。同理，利用伸缩 $a_\lambda(x)=\lambda^{-n}a(\lambda^{-1}y)$ 后左侧不变可不妨设 $r=1$。与习题 2 相同定义 Q^*，并将积分拆分为 Q^* 中的 I_1 与 Q^* 外的 I_2。

利用 $a(x)$ 积分为 0 可知

$$|\hat{a}(y)|=\left|\int_Q a(x)(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot y}-1)\mathrm{d}x\right|\le 2\pi|y|\int_Q|a(x)||x|\mathrm{d}x$$

从而

$$I_1\le 2\pi\int_{Q^*}\int_Q\frac{|a(x)||x|}{|y|^{n-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\int_{Q^*}\frac{1}{|y|^{n-1}}\mathrm{d}y\int_Q|a(x)||x|\mathrm{d}x$$

由于 Q 与 Q^* 大小均已放缩为常数，右侧即能被常数控制。

另一方面，直接利用 Cauchy 不等式可得

$$I_2^2\le\|\hat{a}\|_2^2\int_{\mathbb{R}^n\backslash Q^*}|y|^{-2n}\mathrm{d}y=\|a\|_2^2\int_{\mathbb{R}^n\backslash Q^*}|y|^{-2n}\mathrm{d}y$$

由于 $\|a\|_2$ 有界、第二项直接计算积分有界，即得 I_2 有界，综合两部分得最终结论。

6. 本题中的 $\lesssim$ 相关均指相差只与 n,ε 有关的常数。

设 Q_k 为原点为中心、边长 2^{k-1} 的方体，并记

$$s_k=\int_{Q_k}f(x)\mathrm{d}x,\quad g_k(x)=\big(f(x)-s_k|Q_k|^{-1}\big)\chi_{Q_k}(x)$$

由条件可知 $g_k(x)\to f(x)$，从而记 $h_k(x)=g_k(x)-g_{k-1}(x)$ (设 $g_0(x)=0$) 有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k(x)$$

此外，利用定义计算可发现 h_k 支集在 Q_k 中，且积分为 0，由此只需证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k|\|h_k\|_\infty<+\infty$$

即可通过对每个 h_k 除以常数得到构造。

直接计算可得

$$h_k(x)=\begin{cases}s_{k-1}|Q_{k-1}|^{-1}-s_k|Q_k|^{-1} & x\in Q_{k-1}\\ f(x)-s_k|Q_k|^{-1} & x\in Q_k\backslash Q_{k-1}\\ 0 & x\notin Q_k\end{cases}$$

而利用条件直接放缩并积分可知 $|s_k|\lesssim 2^{-k\varepsilon}$，从而再由 $|Q_k||Q_{k-1}|^{-1}=2^n$ 可得

$$|Q_k|\|h_k\|_\infty\lesssim\max(2^{-k\varepsilon},|Q_k|\|f\|_{L^\infty(Q_k\backslash Q_{k-1})})$$

再次利用条件可知

$$\|f\|_{L^\infty(Q_k\backslash Q_{k-1})}\lesssim\frac{1}{1+(2^{k-1})^{n+\varepsilon}}\lesssim 2^{-k(n+\varepsilon)}\lesssim|Q_k|^{-1}2^{-k\varepsilon}$$

综合即得

$$|Q_k|\|h_k\|_\infty\lesssim 2^{-k\varepsilon}$$

从而求和收敛，得证。

7. 本题中的 $\lesssim$ 相关均指相差只与 n,ε 有关的常数。

   设 Q_k 为原点为中心、边长 2^{k-1} 的方体，分步进行估算。

   由于 $(1+|x|^{n+\varepsilon})^{-1}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的积分收敛，利用 $|f(x)|\le|f(x)-f_{Q_0}|+|f_{Q_0}|$，只需证明

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f_{Q_0}|}{1+|x|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x<+\infty$$

   进一步地，由于

$$\int_{Q_0}\frac{|f(x)-f_{Q_0}|}{1+|x|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x\le\int_{Q_0}|f(x)-f_{Q_0}|\mathrm{d}x\lesssim\|f\|_*<+\infty$$

   只需证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{Q_k\setminus Q_{k-1}}\frac{|f(x)-f_{Q_0}|}{1+|x|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x<+\infty$$

   而进一步分解得到

$$\int_{Q_k\setminus Q_{k-1}}\frac{|f(x)-f_{Q_0}|}{1+|x|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x\le\int_{Q_k\setminus Q_{k-1}}\frac{|f(x)-f_{Q_k}|}{1+|x|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{k}\int_{Q_k\setminus Q_{k-1}}\frac{|f_{Q_j}-f_{Q_{j-1}}|}{1+|x|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x$$

   将第一项的分母放为 $C_0 2^{k(n+\varepsilon)}$，并将积分区域放大至 Q_k，即得第一项 $\lesssim 2^{-k\varepsilon}\|f\|_*$。对第二项，相同放缩分母，并对分子估算

$$|f_{Q_j}-f_{Q_{j-1}}|=\frac{1}{|Q_{j-1}|}\left|\int_{Q_{j-1}}(f(x)-f_{Q_j})\mathrm{d}x\right|\lesssim\frac{1}{|Q_j|}\left|\int_{Q_j}(f(x)-f_{Q_j})\mathrm{d}x\right|\le\|f\|_*$$

   从而直接计算积分并综合可得

$$\int_{Q_k\setminus Q_{k-1}}\frac{|f(x)-f_{Q_0}|}{1+|x|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x\lesssim k2^{-k\varepsilon}\|f\|_*$$

   求和即得证有界。

8. (TBD)

9. 根据定义可发现 $\langle I_\alpha f,g\rangle=\langle f,I_\alpha g\rangle$，从而其对偶算子即为自身。由于 $L^{n/(n-\alpha)}$ 与 $L^{n/\alpha}$ 对偶，原子 Hardy 空间与 BMO 对偶，从习题 4 考虑对偶算子即得结论。

7 Littewood-Paley 理论与乘子

1.

2.

3.

4.

5.

6.

8 综合练习

1. (TBD)

2. (TBD)

3. 记 $g(x)=|x|,\quad x\in[-1/2,1/2]$，直接计算 Fourier 级数，利用 Jordan 判别法可知收敛，从而得到

$$|x|=\frac{1}{4}-\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\pi^2(2k+1)^2}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(2k+1)x}$$

取 $x=\frac{N+l}{4N}$，且 $|l|\le N$，代入可知

$$\frac{\mathrm{i}l\pi^2}{4N}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}l(2k+1)/(4N)}$$

对任何不超过 N 次的 $P(x)$，利用上式左侧展开 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}lx}$ 求导中的 l，再重新合并，可得到

$$P'(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k8N}{(2k+1)^2\pi}P\left(x+\frac{2k+1}{4N}\right)$$

4. 记 (注意 $j=N$ 时左侧系数为 0，于是 g 符合要求)

$$g(x)=\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N}\cot\frac{j\pi}{2N}\sin(2\pi jx)$$

- 函数值符合要求

  直接配对计算可知 $g(1/(2N))=\frac{N-1}{2N}$，且 $g(1/2)=0$。

  另一方面，直接计算可知

$$2g\left(\frac{k}{2N}\right)-g\left(\frac{k-1}{2N}\right)-g\left(\frac{k+1}{2N}\right)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\cot\frac{j\pi}{2N}\sin(2\pi jk/(2N))(1-\cos 2\pi j/(2N))$$

  利用三角函数变换可将右侧求和中改写为

$$\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N}\left(\cos\frac{2\pi j(k-1)}{2N}-\cos\frac{2\pi j(k+1)}{2N}\right)=0$$

  于是可知其等差，得到结论。

- $g(t)+t-1/2$ 正负性

  考虑 $g'+1$，将其看作 $\cos 2\pi x$ 的多项式，注意 $j=N$ 的项为 0，于是其 $N-1$ 次，至多 $N-1$ 个根；而 $\cos 2\pi x$ 一个周期中至多两次取某个值，由此其至多 $2N-2$ 个根，从而 $g(t)+t-1/2$ 的全部根即为上述的点，且不存在重根，每次符号均变化。

  第一段 $(0,1/(2N))$ 中直接估算可得其为负，从而即知结论成立。

- $\|g\|_1$ 计算

  由正负性可知积分即

$$\sum_{j=1}^{2N}(-1)^j\int_{(j-1)/2N}^{j/(2N)}g(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{2N}(-1)^j\int_{(j-1)/2N}^{j/(2N)}(t-1/2)\mathrm{d}t$$

  第一项可以进一步写成若干三角级数的求和，并利用

$$\sum_{j=1}^{2N}(-1)^j\cos\frac{2\pi ij}{2N}$$

  可互相抵消说明其为 0，而第二项积分结果即为 $\frac{1}{4N}$，这就说明了 $\|g\|_1=1/(4N)$。

- f 的展开式

  由周期性只需说明 $x=0$ 时，直接分部积分计算可得 (注意 $f(0)=f(1)$)

$$\int_0^1 f'(t)(t-1/2)\mathrm{d}t = f(0) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

  由 $|k|<N$ 时 $\hat{f}(k)=0$ 可知 $f(t)$ 积分为 0，且 $f'(t)$ 不足 N 阶的 Fourier 系数为 0，利用正交性可知 $f'(t)g(t)$ 积分为 0，最终得到

$$f(0) = \int_0^1 f'(t)(t-1/2)\mathrm{d}t$$