Li Jiongsheng's Linear Algebra

Exercises Solutions

高等代数 独孤九剑

李炯生线代习题解答

既在意料之外，又在情理之中，囧哥乃中国欧亨利.

整理编著：刘畅，牟卓群，余志拯
戴伯屹，马明辉，蔡幸烨，曾熊
整理时间：July 29, 2015
Email: 2609480070@qq.com

第 1 版

目　　录

第 1 章 多 项 式

1.1 整数环与数域

1.1.1 习 题

习题 1.1.1: 记 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}$. 验证 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ 是数域.

证: $(A_1), (A_2), (A_3), (A_4), (M_1), (M_2), (M_3), (D)$ 显然成立. 只需验证非零元素存在逆元. 由

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}.$$

若 $a^2 - 2b^2 = 0$，则 $\frac{a}{b} = \pm\sqrt{2}$，与 $\sqrt{2}$ 为无理数矛盾. 故 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ 是数域. □

习题 1.1.2: 记 $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbf{Z}\}$. 验证 $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ 是数环.$\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ 是数域吗?

证: 易验证 $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ 是数环. 取 $m = 2, n = 1$，则 $\frac{1}{2+\sqrt{2}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ 不是数域. □

习题 1.1.3: 设 F 是数域，a, b 和 c 是 F 中的任意三个元素，证明下列性质成立:

(1) 如果 $a + b = a + c$，则 $b = c$;

(2) 定义 $a - b = a + (-b)$，则 $a + (b - a) = b$;

(3) $a0 = 0a = 0$;

(4) $(-1)a = -a$;

(5) 如果 $ab = 0$，则 $a = 0$ 或 $b = 0$.

证:

(1) 左加 $(-a)$;

(2) $a + (b - a) = a + [b + (-a)] = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = b$;

(3) $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$，两边同加 $-a0$，得到 $a0 = 0a = 0$;

(4) 由 $a + (-1)a = [1 + (-1)]a = 0a = 0$ 得 $(-1)a = -a$;

(5) 若 $a \neq 0$，左乘 a^{-1}，得 $b = a^{-1}0 = 0$.

□

习题 1.1.4: 设 F 是所有有序实数对 (a, b) 的集合，其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 如果集合 F 的加法和乘法分别定义为

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b)(c, d) = (ac, bd).$$

那么 F 是否成为域?

(2) 如果集合 $\mathbf{F}$ 的加法和乘法分别定义为

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

与

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

那么 $\mathbf{F}$ 是否成为域?

(3) 如果 $\mathbf{F}$ 表示所有有序复数对的集合，加法与乘法仍如 (1) 与 (2) 那样规定，结论又怎样?

证:

(1) 设 $l=(e_1,e_2), o=(f_1,f_2)$. 由 $(a,b)l=(ae_1,be_2)=(a,b)$，得

$$\begin{cases} a &= ae_1, \\ b &= be_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 &= 1, \\ e_2 &= 1 \end{cases}.$$

由 $(a,b)+o=(a+f_1,b+f_2)=(a,b)$，得

$$\begin{cases} a &= a+f_1, \\ b &= b+f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 &= 0, \\ f_2 &= 0 \end{cases}.$$

取 $(a,b)=(1,0)\neq 0$，易知 (a,b) 不存在逆元，故 $\mathbf{F}$ 不是域.

(2) 容易验证 $\mathbf{F}=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$ 和 $\mathbb{C}$ 同构，故 $\mathbf{F}$ 是域.

(3) 取 $(a,b)=(i,1)\neq 0$. 设 (c,d) 为 $(i,1)$ 逆元，则 $(i,1)(c,d)=(ic-d,id+c)=(1,1)=1$. 由

$$\begin{cases} ic-d &= 1, \\ c+id &= 1 \end{cases}$$

得 $1=ic-d=i(c+id)=i$ 矛盾. 故 $\mathbf{F}$ 不是域.

□

习题 1.1.5: 证明：在交换环的定义中，如果除加法交换律外，其他公理都假设成立，则可以推出加法交换律也成立. 换句话说，在交换环的定义中，加法交换律这一公理可以去掉.

证: 一方面，$(1+1)(a+b)=(1+1)a+(1+1)b=a(1+1)+b(1+1)=(a+a)+(b+b)=a+(a+b)+b$.

另一方面，$(1+1)(a+b)=(a+b)(1+1)=(a+b)1+(a+b)1=(a+b)+(a+b)=a+(b+a)+b$. 故 $a+b=b+a$. □

1.2 一元多项式环

1.2.1 习　题

习题 1.2.1: 设多项式 $f(x), g(x) \in F[x]$. 证明: 当且仅当 $f(x) = 0$ 或 $g(x) = 0$ 时, $f(x)g(x) = 0$.

解: $\Rightarrow$ 显然成立.

$\Leftarrow$ 设 $\deg f(x) = m, \deg g(x) = n, f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0, g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, 其中 $a_m, a_n \neq 0$, 那么我们有

$$h(x) = f(x)g(x) = c_{m+n}x^{m+n} + c_{m+n-1}x^{m+n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

其中 $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$, 故 $\deg h(x) = \deg(f(x)g(x)) = m + n = 0$. 因此 $m = n = 0$. 这时 $f(x) = a_0, g(x) = b_0$, 又 $f(x)g(x) = 0$, 我们有 $f(x) = a_0 = 0$ 或 $g(x) = b_0 = 0$. □

习题 1.2.2: 设多项式 $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$, 且 $f(x) \neq 0$. 证明: 如果 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$, 则 $g(x) = h(x)$.

证: $f(x)g(x) = f(x)h(x) \Rightarrow f(x)[g(x) - h(x)] = 0$, 根据上题的结论, 我们有 $f(x) = 0$ 或 $g(x) - g(x) = 0$. 又 $f(x) \neq 0$, 故 $g(x) - h(x) = 0$, 故 $g(x) = h(x)$. □

习题 1.2.3: 设非零的实系数多项式 $f(x)$ (即系数都是实数的多项式) 满足 $f(f(x)) = f^k(x)$, 其中 k 是给定的正整数. 求多项式 $f(x)$.

解: 当 $f(x)$ 是常数 a 时取 a 满足 $a = a^k$ 即可.

设 $\deg f(x) = n \geq 1$. 注意到 $f(\beta) = \beta^k$ 对所有的 $\beta = f(\alpha)$ 成立, 只要 β 可取得足够多不同的值就可知 $f(x) = x^k$. 对每一个 β 值, 使 $f(\alpha) = \beta$ 的 α 值至多 n 个. 因此, 当 α 取了 nm 个不同的值时至少能得到 m 个不同的 β 值.α 可取得无穷多个不同的值, 于是有无穷多个不同的 $\beta = f(\alpha)$ 使 $f(\beta) = \beta^k$. 由恒等定理即得 $f(x) = x^k$. □

注:

> **定理 1.2.1 (多项式恒等定理)**
>
> 设多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的次数都不超过 n. 如果有 $n+1$ 个不同的值 a 使 $f(a) = g(a)$, 则多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等.

习题 1.2.4: 设非零的实系数多项式 $f(x)$ 满足 $f(x^2) = f^2(x)$. 求多项式 $f(x)$.

解: 设所求的多项式为

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其中 $a_n \neq 0$. 我们证明 $a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. 假设 $a_i(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 不全为 0, 设 $k < n$ 是使 $a_k \neq 0$ 的最大下标. 由 $f(x^2) = f^2(x)$, 得

$$\begin{aligned} & a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2k} + \cdots + a_1 x^2 + a_0 \\ & = \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)^2. \end{aligned}$$

比较 x^{n+k} 的系数, 得出 $0=2a_na_k$, 这与 $a_n\neq 0, a_k\neq 0$ 矛盾. 因此上述的断言正确, 即 $f(x)=a_nx^n$. 再由 $f(x^2)=f^2(x)$ 即知 $a_n=1$, 所以 $f(x)=x^n$. □

习题 1.2.5: 设实系数多项式 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 满足 $0\le a_0=a_n\le a_1=a_{n-1}\le\cdots\le a_{[n/2]}=a_{[(n+1)/2]}$, 所有这样的多项式 $P(x)$ 的集合记作 $A(n)$. 证明: 如果 $P(x)\in A(n), Q(x)\in A(m)$, 则乘积 $P(x)Q(x)\in A(n+m)$.

证: 证法一: 先证对称性. 不妨设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$, 其中 $0\le a_0=a_n\le a_1=a_{n-1}\le\cdots\le a_{[n/2]}=a_{[(n+1)/2]}, 0\le b_0=b_m\le b_1=b_{m-1}\le\cdots\le b_{[m/2]}=a_{[(m+1)/2]}, n\le m$, 而 $F(x)=P(x)Q(x)=c_{m+n}x^{m+n}+c_{m+n-1}x^{m+n-1}+\cdots+c_1x+c_0$, 其中 $c_i=\sum\limits_{j+k=i}a_jb_k, i=0,1,2,\cdots,m+n$.

进而有

$$c_i=\sum_{j+k=i}a_jb_k=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}, & 当 0\le i\le n;\\ \sum\limits_{j=0}^{n}a_jb_{i-j}, & 当 n<i<m;\\ \sum\limits_{j=i-m}^{n}a_jb_{i-j}, & 当 m\le i\le m+n.\end{cases}$$

$$c_{m+n-i}=\sum_{j+k=m+n-i}a_jb_k=\begin{cases}\sum\limits_{j=n-i}^{n}a_jb_{m+n-i-j}, & 当 0\le i\le n,\\ \sum\limits_{j=0}^{n}a_jb_{m+n-i-j}, & 当 n<i<m,\\ \sum\limits_{j=0}^{m+n-i}a_jb_{m+n-i-j}, & 当 m\le i\le m+n.\end{cases}$$

也可写成

$$c_{m+n-i}=\sum_{j+k=m+n-i}a_jb_k=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{i}a_{n-j}b_{m+j-i}, & 当 0\le i\le n,\\ \sum\limits_{j=0}^{n}a_{n-j}b_{m+j-i}, & 当 n<i<m,\\ \sum\limits_{j=i-m}^{n}a_{n-j}b_{m+j-i}, & 当 m\le i\le m+n.\end{cases}$$

由 $a_jb_{i-j}=a_{n-j}b_{m+j-i}$ 可知 $c_i=c_{m+n-i}$.

再证单调性. 当 $0\le i\le n-1$ 时,

$$\begin{aligned}c_{i+1}&=\sum_{j=0}^{i+1}a_jb_{i+1-j}=a_0b_{i+1}+\sum_{j=1}^{i}a_{j+1}b_{i-j}\\&\ge a_0b_{i+1}+\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}\ge\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}=c_i.\end{aligned}$$

又

$$c_{n+1}=\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n+1-j}>\sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}=c_n,$$

当 $n+1\le i\le[(m+n)/2]$ 时,

$$c_{i+1}=\sum_{j=0}^{n}a_jb_{i+1-j}>\sum_{j=0}^{n}a_jb_{i-j}=c_i.$$

综上知 $0 \leq c_0 = c_{m+n} \leq c_1 = c_{m+n-1} \leq \cdots \leq c_{[(m+n)/2]} = c_{[(m+n+1)/2]}$, 故 $P(x)Q(x) \in A(n+m)$.

证法二：记

$$R_{n,j}(x) = x^i + x^{i+1} + \cdots x^{n-i}, 0 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

容易发现 $P(x) \in A_n$ 的充分必要条件是存在 $b_0, b_1, \cdots, b_{\left[\frac{n}{2}\right]} \in [0, +\infty)$, 使得

$$P(x) = b_0 R_{n,0}(x) + b_1 R_{n,1}(x) + \cdots + b_{\left[\frac{n}{2}\right]} R_{n,\left[\frac{n}{2}\right]}(x).$$

再设

$$Q(x) = c_0 R_{m,0}(x) + c_1 R_{m,1}(x) + \cdots + c_{\left[\frac{m}{2}\right]} R_{m,\left[\frac{m}{2}\right]}(x),$$

那么

$$P(x)Q(x) = \sum_{i,j} b_i c_j R_{n,i}(x) R_{m,j}(x).$$

欲证 $P(x)Q(x) \in A_{m+n}$, 只要证明 $R_{n,i}(x) R_{m,j}(x) \in A_{m+n}$. 事实上. 记 $r = n - 2i, s = m - 2j$, 则

$$\begin{aligned}
R_{n,i}(x) R_{m,j}(x) &= x^{i+j}(1 + x + \cdots + x^r)(1 + x + \cdots + x^s) \\
&= x^{i+j}(R_{r+s,0}(x) + R_{r+s,1}(x) + \cdots + R_{r+s,t}(x)) \quad t = \min\{r, s\} \\
&= R_{m+n,i+j}(x) + R_{m+n,i+j+1}(x) + \cdots + R_{m+n,n+j-i}(x) \in A_{m+n}.
\end{aligned}$$

原命题得证. □

1.3 整除性与最大公因式

1.3.1 习　　题

习题 1.3.1: 设多项式 $g(x) = x^2 - 2ax + 2$ 整除多项式 $f(x) = x^4 + 3x^2 + ax + b$, 求 a 和 b. 这里 $a, b \in \mathbb{R}$.

解: 由 $f(x) = x^4 + 3x^2 + ax + b = (x^2 + 2ax + 4a^2 + 1)(x^2 - 2ax + 2) + (8a^3 - a)x + b - 8a^2 - 2$ 可知 $8a^3 - a = b - 8a^2 - 2 = 0$. 因此有 $a = 0, b = 2$ 或者 $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}, b = 3$. □

习题 1.3.2: 设 m, n 和 p 为正整数. 证明: 多项式 $g(x) = x^2 + x + 1$ 整除多项式 $f(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$.

证: 注意到

$$\sum_{k=1}^{m} x^{3k-3} = \frac{x^{3m} - 1}{x^3 - 1}, \sum_{k=1}^{n} x^{3k-2} = \frac{x^{3n+1} - x}{x^3 - 1}, \sum_{k=1}^{p} x^{3k-1} = \frac{x^{3p+2} - x^2}{x^3 - 1}.$$

我们有

$$\begin{aligned}&\frac{x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}}{x^2+x+1}\\&=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}\left(\sum_{k=1}^{m}x^{3k-3}+1+\sum_{k=1}^{n}x^{3k-2}+x+\sum_{k=1}^{p}x^{3k-1}+x^2\right)\\&=(x-1)\left(\sum_{k=1}^{m}x^{3k-3}+\sum_{k=1}^{n}x^{3k-2}+\sum_{k=1}^{p}x^{3k-1}+x^2+x+1\right).\end{aligned}$$

□

习题 1.3.3: 证明: 当 $n=6m+5$ 时, 多项式 x^2+xy+y^2 整除多项式 $(x+y)^n-x^n-y^n$; 当 $n=6m+1$ 时, 多项式 $(x^2+xy+y^2)^2$ 整除多项式 $(x+y)^n-x^n-y^n$. 这里 m 是使 $n>0$ 的整数, 而 x,y 是实数.

证: 当 $n=6m+5$ 时, 由

$$\begin{aligned}&(x+y)^n-x^n-y^n=(x+y)^{6m+5}-x^{6m+5}-y^{6m+5}\\&=\left(x^2+xy+y^2+xy\right)^{3m+2}(x+y)-x^{6m+5}-y^{6m+5}\end{aligned}$$

及二项式定理, 只需考察 $(xy)^{3m+2}(x+y)-x^{6m+5}-y^{6m+5}$ 与 x^2+xy+y^2 的整除性.

$$\begin{aligned}&(xy)^{3m+2}(x+y)-x^{6m+5}-y^{6m+5}\\&=x^{3m+3}y^{3m+2}+x^{3m+2}y^{3m+3}-x^{6m+5}-y^{6m+5}\\&=\left(x^{3m+3}-y^{3m+3}\right)\left(-x^{3m+2}+y^{3m+2}\right).\end{aligned}$$

故 $\left(x^{3m+3}-y^{3m+3}\right)\mid(xy)^{3m+2}(x+y)-x^{6m+5}-y^{6m+5}$. 又 $x^3-y^3\mid\left(x^{3m+3}-y^{3m+3}\right)$, $(x^2+xy+y^2)|x^3-y^3$, 所以 $x^2+xy+y^2\mid(xy)^{3m+2}(x+y)-x^{6m+5}-y^{6m+5}$, 进而 x^2+xy+y^2 整除 $(x+y)^n-x^n-y^n$.

事实上, 我们有一种更为简便的方法. 注意到 $x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$, 其中 $\alpha=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\beta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 令 $f(x)=(x+1)^n-x^n-1$, 则当 $n=6m+5$ 时,

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^n-1\\&=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n-\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}\right)^n-1\\&=\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{4n\pi}{3}+\sin\frac{4n\pi}{3}\mathrm{i}\right)-1\\&=\cos\left(-\frac{(6m+5)\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{(6m+5)\pi}{3}\right)\\&-\left(\cos\frac{4(6m+5)\pi}{3}+\sin\frac{4(6m+5)\pi}{3}\mathrm{i}\right)-1\\&=\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}\right)-1\\&=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)-1=0.\end{aligned}$$

同理可知 $f(\beta)=0$, 故 $f(x)=(x+1)^n-x^n-1$ 可被 $x-\alpha$ 与 $x-\beta$ 整除, 从而被 $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+x+1$ 整除. 令 $x=\frac{x}{y}$, 可知 x^2+xy+y^2 整除 $(x+y)^n-x^n-y^n$.

又 $f'(x)=n(x+1)^{n-1}-nx^{n-1}$, 则当 $n=6m+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
f'(\alpha)&=n\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{n-1}-n\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{n-1}\\
&=n\left[\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^{n-1}-\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}\right)^{n-1}\right]\\
&=n\left[\cos\left(-\frac{(n-1)\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{(n-1)\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{4(n-1)\pi}{3}+\sin\frac{4(n-1)\pi}{3}\mathrm{i}\right)\right]\\
&=n\left[\cos\left(-\frac{6m\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{6m\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{4\times 6m\pi}{3}+\sin\frac{4\times 6m\pi}{3}\mathrm{i}\right)\right]\\
&=n\left[1--1\right]=0.
\end{aligned}
$$

同理可知 $f'(\beta)=0$ 且 $f(\alpha)=f(\beta)=0$, 故 $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=\left(x^2+x+1\right)^2$ 整除. 令 $x=\frac{x}{y}$, 可知 $\left(x^2+xy+y^2\right)^2$ 整除 $(x+y)^n-x^n-y^n$. □

习题 1.3.4: 求多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式:

(1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$;
(2) $f(x)=x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5, g(x)=x^5+x^2-x+1$;
(3) $f(x)=3x^6-x^5-9x^4-14x^3-11x^2-3x-1, g(x)=3x^5+8x^4+9x^3+15x^2+10x+9$.

解:

(1) 对多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 用辗转相除法如下:

$$
\begin{array}{ll}
 & f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1\\
 & g(x)=x^3+x^2-x-1\\
q_1(x)=x & r_1(x)=-2x^2-3x-1\\
q_2(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} & r_2(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\\
q_3(x)=\frac{8}{3}x+\frac{4}{3} & r_3(x)=0
\end{array}
$$

所以 $\gcd(f(x),g(x))=x+1$.

(2) 对多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 用辗转相除法如下:

$$
\begin{array}{ll}
 & f(x)=x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5\\
 & g(x)=x^5+x^2-x+1\\
q_1(x)=x & r_1(x)=2x^4-5x^3-2x^2+7x-5\\
q_2(x)=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4} & r_2(x)=\frac{29}{4}x^3-\frac{29}{4}x+\frac{29}{4}\\
q_3(x)=\frac{8}{29}x-\frac{20}{29} & r_3(x)=0
\end{array},
$$

所以 $\gcd(f(x),g(x))=x^3-x+1$.

(3) 对多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 用辗转相除法如下:

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= 3x^6 - x^5 - 9x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1 \\
& & g(x) &= 3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9 \\
q_1(x) &= x - 3 & r_1(x) &= 6x^4 - 2x^3 + 24x^2 + 18x + 26 \\
q_2(x) &= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2} & r_2(x) &= -30x^2 - 30x - 30 \\
q_3(x) &= -\tfrac{1}{5}x^2 + \tfrac{4}{15}x - \tfrac{13}{15} & r_3(x) &= 0
\end{aligned}$$

所以 $\gcd(f(x), g(x)) = x^3 - x + 1$.

□

习题 1.3.5: 求多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$, 使得 $f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x)$, $d(x)$ 是多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

(1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;
(2) $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$, $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$;
(3) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$;
(4) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x^2 - x - 1$.

✎ **解:**

(1) 对多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 用辗转相除法如下:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 \\
g(x) &= x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 \\
f(x) &= g(x) + (x^3 - 2x) \\
g(x) &= (x+1)(x^3 - 2x) + (x^2 - 2) \\
x^3 - 2x &= x(x^2 - 2)
\end{aligned}$$

将以上各式整理后可得

$$f(x)(-x-1) + g(x)(x+2) = x^2 - 2,$$

故 $u(x) = -x - 1$, $v(x) = x + 2$, $d(x) = x^2 - 2$.

(2) 对多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 用辗转相除法如下:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6 \\
g(x) &= 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2 \\
f(x) &= (x+3)g(x) - (3x^3 + 2x^2) \\
g(x) &= (x-2)(3x^3 + 2x^2) + (3x^2 - x - 2) \\
3x^3 + 2x^2 &= (x+1)(3x^2 - x - 2) + (3x + 2) \\
3x^2 - x - 2 &= (x-1)(3x+2)
\end{aligned}$$

将以上各式整理后可得

$$f(x)\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)+g(x)\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}\right)=x+\frac{2}{3},$$

故 $u(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}, v(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}, d(x)=x+\frac{2}{3}$.

(3) 对多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 用辗转相除法如下:

$$\begin{aligned}
&f(x)=3x^3-2x^2+x+2\\
&g(x)=x^2-x+1\\
&f(x)=(3x+1)g(x)-(x-1)\\
&g(x)=x(x-1)+1\\
&x-1=(x-1)\cdot 1.
\end{aligned}$$

将以上各式整理后可得

$$f(x)x+g(x)\left(-3x^2-x+1\right)=1,$$

故 $u(x)=x, v(x)=-3x^2-x+1, d(x)=1$.

(4) 对多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 用辗转相除法如下:

$$\begin{aligned}
&f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1\\
&g(x)=x^2-x-1\\
&f(x)=\left(x^2-3\right)g(x)+(x-2)\\
&g(x)=(x+1)(x-2)+1\\
&x-2=(x-2)\cdot 1
\end{aligned}$$

将以上各式整理后可得

$$f(x)(-x-1)+g(x)\left(x^3+x^2-3x-2\right)=1,$$

故 $u(x)=-x-1, v(x)=x^3+x^2-3x-2, d(x)=1$.

□

习题 1.3.6: **用待定系数法确定多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$, 使得 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$, 其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 如下:**

(1) $f(x)=x^3, g(x)=(1-x)^2$;
(2) $f(x)=x^4, g(x)=(1-x)^4$;
(3) $f(x)=x^4-4x^3+1, g(x)=x^3-3x^2+1$.

解:

(1) 设 $u(x)=a_0+a_1x+a_2x^2, v(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ 满足

$$x^3u(x)+(1-x)^2v(x)=1.$$

我们有

$$b_0+(b_1-2b_0)\,x+(b_0-2b_1+b_2)\,x^2+(a_0+b_1-2b_2+b_3)\,x^3 \\ +(a_1+b_2-2b_3)\,x^4+(a_2+b_3)\,x^5=1.$$

取 $b_3=0$, 则

$$\begin{cases} b_0=1\\ b_1-2b_0=0\\ b_0-2b_1+b_2=0\\ a_0+b_1-2b_2+b_3=0\\ a_1+b_2-2b_3=0\\ a_2+b_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=4\\ a_1=-3\\ a_2=0\\ b_0=1\\ b_1=2\\ b_2=3\end{cases}$$

于是 $u(x)=-3x+4, v(x)=3x^2+2x+1$.

(2) 设 $u\,(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3, v\,(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ 满足

$$x^4u\,(x)+(1-x)^4v\,(x)=1.$$

我们有

$$b_0+(-4b_0+b_1)\,x+(6b_0-4b_1+b_2)\,x^2+(-4b_0+6b_1-4b_2+b_3)\,x^3 \\ +(a_0+b_0-4b_1+6b_2-4b_3)\,x^4+(a_1+b_1-4b_2+6b_3)\,x^5 \\ +(a_2+b_2-4b_3)\,x^6+(a_3+b_3)\,x^7=1.$$

故

$$\begin{cases} b_0=1\\ -4b_0+b_1=0\\ 6b_0-4b_1+b_2=0\\ -4b_0+6b_1-4b_2+b_3=0\\ a_0+b_0-4b_1+6b_2-4b_3=0\\ a_1+b_1-4b_2+6b_3=0\\ a_2+b_2-4b_3=0\\ a_3+b_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=35\\ a_1=-84\\ a_2=70\\ a_3=-20\\ b_0=1\\ b_1=4\\ b_2=10\\ b_3=20\end{cases},$$

于是 $u\,(x)=-20x^3+70x^2-84x+35, v\,(x)=20x^3+10x^2+4x+1$.

(3) 设 $u\,(x)=a_0+a_1x+a_2x^2, v\,(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ 满足

$$\left(x^4-4x^3+1\right)u\,(x)+\left(x^3-3x^2+1\right)v\,(x)=1.$$

那么有

$$\begin{cases} a_0+b_0=1\\ a_1+b_1=0\\ a_2-3b_0+b_2=0\\ -4a_0+b_0-3b_1+b_3=0\\ a_0-4a_1+b_1-3b_2=0\\ a_1-4a_2+b_2-3b_3=0\\ a_2+b_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=\frac{26}{3}\\ a_1=\frac{37}{3}\\ a_2=\frac{37}{3}\\ b_0=-\frac{16}{3}\\ b_1=-\frac{37}{3}\\ b_2=-\frac{85}{3}\\ b_3=-\frac{37}{3}\end{cases}$$

于是 $u(x)=\frac{37}{3}x^2+\frac{37}{3}x+\frac{26}{3}, v(x)=-\frac{37}{3}x^3-\frac{85}{3}x^2-\frac{37}{3}x-\frac{16}{3}$.

□

习题 1.3.7: 求次数最低的多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$，使得

(1) $(x^4-2x^3-4x^2+6x+1)u(x)+(x^3-5x-3)v(x)=x^4$;

(2) $(x^4+2x^3+x+1)u(x)+(x^4+x^3-2x^2+2x-1)v(x)=x^3-2x$.

解:

(1) 对多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 用辗转相除法如下:

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^4-2x^3-4x^2+6x+1\\
g(x)&=x^3-5x-3\\
f(x)&=(x-2)g(x)+\left(x^2-x-5\right)\\
g(x)&=(x+1)\left(x^2-x-5\right)+(x+2)\\
x^2-x-5&=(x-3)(x+2)+1\\
x+2&=(x+2)\cdot 1
\end{aligned}$$

整理后得到

$$f(x)\left(x^2-2x-2\right)+g(x)\left(-x^3+4x^2-3x-1\right)=1.$$

于是

$$f(x)\left(x^6-2x^5-2x^4\right)+g(x)\left(-x^7+4x^6-3x^5-x^4\right)=x^4.$$

取 $u(x)=x^6-2x^5-2x^4, v(x)=-x^7+4x^6-3x^5-x^4$,
此即要求的次数最低的多项式.

(2) 对多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 用辗转相除法如下:

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^4+2x^3+x+1\\
g(x)&=x^4+x^3-2x^2+2x-1\\
f(x)&=g(x)+\left(x^3+2x^2-x+2\right)\\
g(x)&=(x-1)\left(x^3+2x^2-x+2\right)+\left(x^2-x+1\right)\\
x^3+2x^2-x+2&=(x+3)\left(x^2-x+1\right)+(x-1)\\
x^2-x+1&=x(x-1)+1\\
x-1&=(x-1)\cdot 1
\end{aligned}$$

整理后得到

$$f(x)\left(-x^3-2x^2+x+1\right)+g(x)\left(x^3+3x^2+2x\right)=1,$$

则

$$f(x)\left(-x^6-2x^5+3x^4+5x^3-2x^2-2x\right)+g(x)\left(x^6+3x^5-6x^3-4x^2\right)=x^3-2x.$$

取 $u(x)=-x^6-2x^5+3x^4+5x^3-2x^2-2x, v(x)=x^6+3x^5-6x^3-4x^2$, 此即要求的次数最低的多项式.

□

习题 1.3.8: 求次数最低的多项式 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 被多项式 $(x-1)^2$ 除时余式为 $2x$, 被多项式 $(x-2)^3$ 除时余式为 $3x$.

解: 设 $f(x)=g(x)(x-1)^2+2x=h(x)(x-2)^3+3x$, 则有

$$g(x)(x-1)^2-h(x)(x-2)^3=x.$$

对两多项式用辗转相除法如下:

$$\begin{aligned}(x-2)^3&=(x-4)(x-1)^2+(3x-4)\\(x-1)^2&=\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}\right)(3x-4)+\frac{1}{9}\\3x-4&=(27x-36)\cdot\frac{1}{9}\end{aligned}$$

整理后得到

$$\left(3x^2-14x+17\right)(x-1)^2-(3x-2)(x-2)^3=1,$$

于是

$$\left(3x^3-14x^2+17x\right)(x-1)^2-\left(3x^2-2x\right)(x-2)^3=x.$$

从而 $g(x)=3x^3-14x^2+17x, h(x)=3x^2-2x$, 而 $f(x)=g(x)(x-1)^2+2x=3x^5-20x^4+48x^3-48x^2+19x$.

接着,

$$\begin{aligned}&3x^5-20x^4+48x^3-48x^2+19x-3(x-1)^2(x-2)^3\\=&4x^4-27x^3+66x^2-65x+24\end{aligned}$$

即为所要求次数最低的多项式 $f(x)$. □

习题 1.3.9: 求次数最低的多项式 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 被多项式 $x^4-2x^3-2x^2+10x-7$ 除时余式为 x^2+x+1, 被多项式 $x^4-2x^3-3x^2+13x-10$ 除时余式为 $2x^2-3$.

解: 设

$$\begin{aligned}f(x)&=g(x)\left(x^4-2x^3-2x^2+10x-7\right)+\left(x^2+x+1\right)\\&=h(x)\left(x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right)+\left(2x^2-3\right).\end{aligned}$$

于是 $g(x)\left(x^4-2x^3-2x^2+10x-7\right)-h(x)\left(x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right)=x^2-x-4$. 对两多项式用辗转相除法如下:

$$\begin{aligned}x^4-2x^3-2x^2+10x-7&=\left(x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right)+\left(x^2-3x+3\right)\\x^4-2x^3-3x^2+13x-10&=\left(x^2+x-3\right)\left(x^2-3x+3\right)+(x-1)\\x^2-3x+3&=(x-2)(x-1)+1\\x-1&=(x-1)\cdot 1\end{aligned}$$

我们得到

$$\left(x^3-x^2-5x+7\right)\left(x^4-2x^3-2x^2+10x-7\right)-\left(x^3-x^2-4x+5\right)\left(x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right)=1.$$

于是

$$\begin{aligned}&\left(x^5-2x^4-8x^3+16x^2+13x-28\right)\left(x^4-2x^3-2x^2+10x-7\right)\\-&\left(x^5-2x^4-7x^3+13x^2+11x-20\right)\left(x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right)=x^2-x-4.\end{aligned}$$

从而 $g(x)=x^5-2x^4-8x^3+16x^2+13x-28, h(x)=x^5-2x^4-7x^3+13x^2+11x-20$, 而

$$\begin{aligned}&f_0(x)=g(x)\left(x^4-2x^3-2x^2+10x-7\right)+\left(x^2+x+1\right)\\=&\left(x^5-2x^4-8x^3+16x^2+13x-28\right)\left(x^4-2x^3-2x^2+10x-7\right)+\left(x^2+x+1\right)\\=&x^9-4x^8-6x^7+46x^6-30x^5-152x^4+246x^3+75x^2-370x+197.\end{aligned}$$

而 $\left(x^4-2x^3-2x^2+10x-7\right)\left(x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right)=x^8-4x^7-x^6+33x^5-57x^4-22x^3+171x^2-191x+70$. 最后得到次数最低的多项式

$$\begin{aligned}f(x)&=f_0(x)-x\left(x^4-2x^3-2x^2+10x-7\right)\left(x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right)\\&=-5x^7+13x^6+27x^5-130x^4+75x^3+266x^2-440x+197.\end{aligned}$$

严谨起见, 我们对其次数最低的性质进行简要论证.

设 $f_1(x)$ 也是满足题意的多项式, 可得

$$\begin{cases}x^4-2x^3-2x^2+10x-7 \mid f(x)-f_1(x)\\x^4-2x^3-3x^2+13x-10 \mid f(x)-f_1(x)\end{cases},$$

则

$$\left[x^4-2x^3-2x^2+10x-7, x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right] \mid f(x)-f_1(x).$$

又因为

$$\left(x^4-2x^3-2x^2+10x-7, x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right)=1,$$

所以

$$\left(x^4-2x^3-2x^2+10x-7\right)\left(x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right) \mid f(x)-f_1(x).$$

所以 $\deg\left(f(x)-f_1(x)\right)\geq 8$ 或 $f(x)=f_1(x)$. 由于 $\deg f(x)=7$, 所以 $\deg f(x)\leq \deg f_1(x)$.
□

❀ 注: 此题即便 $x^4-2x^3-2x^2+10x-7$ 与 $x^4-2x^3-3x^2+13x-10$ 不互素也可进行求解.

先用 $\left[x^4-2x^3-2x^2+10x-7, x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right]h(x)$ 去消 $f(x)$ ($h(x)$ 不定). 直到

$$\deg f(x)<\left[x^4-2x^3-2x^2+10x-7, x^4-2x^3-3x^2+13x-10\right],$$

推论 1.1

在 $\mathbb{K}[x]$ 中, 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 两两互素. 任意给定 $r_1(x), r_2(x), \cdots, r_s(x) \in \mathbb{K}[x]$, 则存在 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $f_i(x)$ 除 $f(x)$ 余 $r_i(x)(i = 1, 2, \cdots, s)$, 而对于次数最小的 $f(x)$, 满足 $\deg f(x) < \deg f_1(x) + \deg f_2(x) + \cdots + \deg f_s(x)$, 且在相伴的情况下是唯一的.

此时 $f(x)$ 即为所求次数最小者.

习题 1.3.10: 设 $f(x)$ 是 $2n+1$ 次多项式, n 为正整数, $f(x)+1$ 被 $(x-1)^n$ 整除, 而 $f(x)-1$ 被 $(x+1)^n$ 整除, 求 $f(x)$.

解: 解法一: 易知 $(x-1)^{n-1} \mid f'(x), (x+1)^{n-1} \mid f'(x)$. 由之前推论, 我们知道存在次数小于 $2n$ 的多项式满足题目的条件. 又因为

$$\int_1^x t(1+t)^{n-1}(1-t)^{n-1}dt = \int_1^x t\left(1-t^2\right)^{n-1}dt = -\frac{1}{2n}(1+x)^n(1-x)^n,$$

所以设 $g(x) = a\int_1^x (1+t)^{n-1}(1-t)^{n-1}dt + b$ 满足 $g(x)+1$ 被 $(x-1)^n$ 整除, $g(x)-1$ 被 $(x+1)^n$ 整除. 由 $g(1) = a\int_1^1 (1+t)^{n-1}(1-t)^{n-1}dt + b = -1$, 所以 $b = -1$, 而

$$g(-1) = a\int_1^{-1} \left(1-t^2\right)^{n-1}dt - 1 = 1.$$

所以

$$a\int_1^{-1} \left(1-t^2\right)^{n-1}dt = 2 \Rightarrow -2a\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n-1}dt = 2,$$

即

$$a\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-1}du = -2 \Rightarrow a\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = -2.$$

从而

$$a\frac{(n-1)!}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)} = -2 \Rightarrow a = -\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}.$$

因此

$$g(x) = -\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\int_1^x \left(1-t^2\right)^{n-1}dt - 1,$$

所以 $x-1$ 是 $g(x)+1$ 的因式. 又 $g'(x) = -\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}(1+x)^{n-1}(1-x)^{n-1}$, 所以 $(x-1)^n \mid g(x)+1$, 同理 $(x+1)^n \mid g(x)-1$.

对 $\forall A, B \in \mathbb{C}$ 且 $A \neq 0$, 令

$$f(x) = (Ax+B)(1+x)^n(x-1)^n + g(x)$$

即为所求, 即

$$\begin{aligned}f(x)&=(Ax+B)\left(x^2-1\right)^n-\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\int_1^x(2+t-1)^{n-1}(1-t)^{n-1}dt-1\\&=(Ax+B)\left(x^2-1\right)^n+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\int_1^x\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k(t-1)^{n+k-1}\cdot 2^{n-1-k}dt-1\\&=(Ax+B)\left(x^2-1\right)^n+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{n-1-k}C_n^k}{n+k}(x-1)^{n+k}-1.\end{aligned}$$

解法二: 令

$$\begin{aligned}f(x)=a_0(x-1)^n(x+1)^{n-1}+a_1(x-1)^{n+1}(x+1)^{n-2}+\cdots\\+a_k(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-k-1}+\cdots+a_{n-1}(x-1)^{2n-1}-1,\end{aligned}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_k,\cdots,a_{n-1}$ 是待定系数, 则 $f(x)+1$ 被 $(x-1)^n$ 整除. 设法选择各待定常数 $a_k(0\le k\le n-1)$ 使 $f(x)-1$ 被 $(x+1)^n$ 整除. 为此, 只需使 $f(x)-1$ 的导数 $f'(x)$ 被 $(x+1)^{n-1}$ 整除, 并且 $f(x)-1$ 被 $x+1$ 整除.

$f'(x)$ 等于各个 $a_k(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-k-1}$ $(0\le k\le n-1)$ 的导数之和, 将各个

$$\begin{aligned}\left(a_k(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-k-1}\right)'&=(n+k)\,a_k(x-1)^{n+k-1}(x+1)^{n-k-1}\\&\quad+(n-k-1)\,a_k(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-k-2}\end{aligned}$$

相加合并同类项, 得

$$f(x)=na_0(x-1)^{n-1}(x+1)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left((n+k)\,a_k+(n-k)\,a_{k-1}\right)(x-1)^{n+k-1}(x+1)^{n-k-1}.$$

选择 $a_k(1\le k\le n-1)$ 使各个 $(x-1)^{n+k-1}(x+1)^{n-k-1}$ $(1\le k\le n-1)$ 的系数为

$$(n+k)\,a_k+(n-k)\,a_{k-1}=0,a_k=-\frac{n-k}{n+k}a_{k-1}=(-1)^k\frac{(n-1)\cdots(n-k)}{(n+1)\cdots(n+k)}a_0,$$

则 $f'(x)=a_0(x-1)^{n-1}(x+1)^{n-1}$ 被 $(x+1)^{n-1}$ 整除, 此时:

$$\begin{aligned}f(x)=a_0&\Bigg[(x-1)^n(x+1)^{n-1}-\cdots+(-1)^k\frac{(n-1)\cdots(n-k)}{(n+1)\cdots(n+k)}(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-k-1}\\&+\cdots(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n+1)\cdots(2n-1)}(x-1)^{2n-1}\Bigg]-1.\end{aligned}$$

再选 a_0 使 $f(x)-1$ 被 $x+1$ 整除, 也就是选 $f(-1)-1=0$.

$$\begin{aligned}&f(-1)-1=a_0(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n+1)\cdots(2n-1)}(-1-1)^{2n-1}-2=0\\&\Leftrightarrow a_0=(-1)^{(n-1)+(2n-1)}\frac{2\,(n+1)\cdots(2n-1)}{2^{2n-1}\,(n-1)!}=\frac{(-1)^n\,(n+1)\cdots(2n-1)}{2^{2n-2}\,(n-1)!},\end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{(-1)^n\,(n+1)\cdots(2n-1)}{2^{2n-2}\,(n-1)!}\cdot(-1)^k\frac{(n-1)\cdots(n-k)}{(n+1)\cdots(n+k)}=\frac{(-1)^{n+k}}{2^{2n-2}}C_{2n-1}^{n-k-1},\\f(x)&=\left(\sum_{0\le k\le n-1}\frac{(-1)^{n+k}}{2^{2n-2}}C_{2n-1}^{n-k-1}(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-k-1}\right)-1.\end{aligned}$$

□

1.4 唯一析因定理

1.5 实系数与复系数多项式

1.5.1 习　　题

习题 1.5.1: 把下列复系数多项式分解为一次因式的乘积:

(1) $(x+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n+(x+\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^n$;

(2) $(x+1)^n+(x-1)^n$;

(3) $x^n-C_{2n}^2x^{n-1}+C_{2n}^4x^{n-2}+\cdots+(-1)^nC_{2n}^{2n}$;

(4) $x^{2n}+C_{2n}^2x^{2n-2}\left(x^2-1\right)+C_{2n}^4x^{2n-4}\left(x^2-1\right)^2+\cdots+\left(x^2-1\right)^n$;

(5) $x^{2n+1}+C_{2n+1}^2x^{2n-1}\left(x^2-1\right)+C_{2n+1}^4x^{2n-3}\left(x^2-1\right)^2+\cdots+C_{2n+1}^{2n}x\left(x^2-1\right)^n$.

✎ **解:**

(1) 注意到

$$e^{in\alpha}+e^{in\beta}=0\Leftrightarrow e^{in(\alpha-\beta)}+1=0.$$

只需

$$n(\alpha-\beta)=(2k+1)\pi\Rightarrow\alpha-\beta=\frac{2k+1}{n}\pi,k=0,1,\cdots,n-1$$

该多项式方程的零点 x 必为实数, 记

$$\tan\alpha=\frac{\sin\theta}{x+\cos\theta},\tan\beta=\frac{-\sin\theta}{x+\cos\theta}.$$

于是

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)&=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{\frac{\sin\theta}{x+\cos\theta}-\left(\frac{-\sin\theta}{x+\cos\theta}\right)}{1+\frac{\sin\theta}{x+\cos\theta}\cdot\frac{-\sin\theta}{x+\cos\theta}}=\frac{2\sin\theta\,(x+\cos\theta)}{(x+\cos\theta)^2-\sin^2\theta}\\&=\frac{2\sin\theta\,(x+\cos\theta)}{x^2+2x\cos\theta+\cos(2\theta)}.\end{aligned}$$

解得

$$x=\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)}\left[\cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)\pm1\right]-\cos\theta.$$

当 n 为偶数时, 取

$$\begin{aligned}x&=\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)}\left[\cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)-1\right]-\cos\theta\\&=-\sin\theta\tan\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)-\cos\theta.\end{aligned}$$

当 n 为奇数时, 取

$$x=\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)}\left[\cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)+1\right]-\cos\theta$$
$$=\sin\theta\cot\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)-\cos\theta.$$

于是

$$\begin{aligned}&(x+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n+(x+\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^n\\=&\begin{cases}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x+\sin\theta\tan\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)+\cos\theta\right), & \text{当} n=2l\\ \prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x+\sin\theta\cot\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)+\cos\theta\right), & \text{当} n=2l-1\end{cases}\end{aligned}$$

(2) 同理该多项式方程的零点 x 必为纯虚数 (除去平凡零点 0), 记为 $\mathrm{i}b$, 而

$$\tan\alpha=b,\tan\beta=-b.$$

我们有

$$\tan\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2b}{1-b^2}.$$

解得

$$b=\tan\frac{2k+1}{2n}\pi,k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

于是

$$(x+1)^n+(x-1)^n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\mathrm{i}\tan\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right).$$

再注意到 n 为奇数时, 显然有平凡零点 0. 于是

$$(x+1)^n+(x-1)^n=\begin{cases}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x-\mathrm{i}\tan\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right), & \text{当} n=2l\\ x\prod\limits_{k=0,k\neq l-1}^{n-1}\left(x-\mathrm{i}\tan\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right), & \text{当} n=2l-1\end{cases},l\in N_+$$

(3) 注意到

$$x^n-C_{2n}^2x^{n-1}+C_{2n}^4x^{n-2}+\cdots+(-1)^nC_{2n}^{2n}=\frac{1}{2}\left[\left(-\sqrt{x}+i\right)^{2n}+\left(-\sqrt{x}-i\right)^{2n}\right].$$

在 (1) 中取 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 可知方程的解 $-\sqrt{x}$ 为 $-\tan\frac{2k+1}{4n}\pi,k=0,1,2,\cdots,n-1$, 即 $x=\tan^2\left(\frac{2k+1}{4n}\pi\right),k=0,1,2,\cdots,n-1$. 于是

$$x^n-C_{2n}^2x^{n-1}+C_{2n}^4x^{n-2}+\cdots+(-1)^nC_{2n}^{2n}=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\tan^2\frac{2k+1}{4n}\pi\right).$$

(4) 注意到

$$\begin{aligned}&x^{2n}+C_{2n}^2x^{2n-2}\left(x^2-1\right)+C_{2n}^4x^{2n-4}\left(x^2-1\right)^2+\cdots+\left(x^2-1\right)^n\\=&\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}\right]\\=&\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\left[\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)^{2n}+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1\right)^{2n}\right].\end{aligned}$$

由 (2) 可知方程的解为 $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\mathrm{i}\tan\left(\frac{2k+1}{4n}\pi\right)$, 即

$$x=\pm\sin\left(\frac{2k+1}{4n}\pi\right),k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

于是

$$\begin{aligned}&x^{2n}+C_{2n}^{2}x^{2n-2}\left(x^2-1\right)+C_{2n}^{4}x^{2n-4}\left(x^2-1\right)^2+\cdots+\left(x^2-1\right)^n\\&=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\sin\frac{2k+1}{4n}\pi\right)\left(x+\sin\frac{2k+1}{4n}\pi\right).\end{aligned}$$

(5) 显然方程的根满足 $x^2<1$. 注意到

$$\begin{aligned}&x^{2n+1}+C_{2n+1}^{2}x^{2n-1}\left(x^2-1\right)+C_{2n+1}^{4}x^{2n-3}\left(x^2-1\right)^2+\cdots+C_{2n+1}^{2n}x\left(x^2-1\right)^n\\&=\frac{1}{2}\left[\left(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2}\right)^{2n+1}+\left(x-\mathrm{i}\sqrt{1-x^2}\right)^{2n+1}\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2n+1}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\mathrm{i}\right)^{2n+1}+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\mathrm{i}\right)^{2n+1}\right].\end{aligned}$$

由 (2) 可知方程的解为 $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-cot\left(\frac{2k+1}{4n+2}\pi\right)$, 即

$$x=\pm\cos\left(\frac{2k+1}{4n+2}\pi\right),k=0,1,\cdots,n-1$$

显然方程具有平凡零点 0. 于是

$$\begin{aligned}&x^{2n+1}+C_{2n+1}^{2}x^{2n-1}\left(x^2-1\right)+C_{2n+1}^{4}x^{2n-3}\left(x^2-1\right)^2+\cdots+C_{2n+1}^{2n}x\left(x^2-1\right)^n\\&=x\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\cos\frac{2k+1}{4n+2}\pi\right)\left(x+\cos\frac{2k+1}{4n+2}\pi\right).\end{aligned}$$

□

习题 1.5.2: 把下列实系数多项式分解为实的不可约因式的乘积.

(i) x^4+1;　　(ii) x^6+27;

(iii) $x^4+4x^3+4x^2+1$;　　(iv) $x^{2n}-2x^n+2$;

(v) x^4-ax^2+1, $-2<a<2$;　　(vi) $x^{2n}+x^n+1$.

✎ 解:

(i)

$$\begin{aligned}x^4+1&=x^4+1+2x^2-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2\\&=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}x^6+27&=\left(x^2+3\right)\left(x^4-3x^2+9\right)\\&=\left(x^2+3\right)\left(x^4-3x^2+9\right)\\&=\left(x^2+3\right)\left[\left(x^4+6x^2+9\right)-9x^2\right]\\&=\left(x^2+3\right)\left[\left(x^2+3\right)^2-(3x)^2\right]\\&=\left(x^2+3\right)\left(x^2-3x+3\right)\left(x^2+3x+3\right).\end{aligned}$$

(iii) 令 $x=y-1$, 我们有

$$\begin{aligned}&x^4+4x^3+4x^2+1=(y-1)^4+4(y-1)^3+4(y-1)^2+1\\&=y^4-2y^2+2=\left(y^2+\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{2}+2\right)y^2\\&=\left(y^2-\sqrt{2\sqrt{2}+2}y+\sqrt{2}\right)\left(y^2+\sqrt{2\sqrt{2}+2}y+\sqrt{2}\right)\\&=\left((x+1)^2-\sqrt{2\sqrt{2}+2}\,(x+1)+\sqrt{2}\right)\left((x+1)^2+\sqrt{2\sqrt{2}+2}\,(x+1)+\sqrt{2}\right)\\&=\left(x^2+\left(2-\sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)x+\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)\\&\cdot\left(x^2+\left(2+\sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)x+\sqrt{2}+1+\sqrt{2\sqrt{2}+2}\right).\end{aligned}$$

(iv) 令

$$x^{2n}-2x^n+2=(x^n-1)^2+1=0,$$

解得 $x^n=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ 或 $x^n=1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. 我们得到 $x=2^{\frac{1}{2n}}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ 或 $x=2^{\frac{1}{2n}}e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, 其中 $k=0,1,\cdots,n-1$ 于是

$$x^{2n}-2x^n+2=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-\left(2^{\frac{2n+1}{2n}}\cos\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)x+2^{\frac{n+1}{2n}}\right).$$

(v) 由 $-2<a<2$, 我们有

$$\begin{aligned}&x^4-ax^2+1=\left(x^2+1\right)^2-(a+2)\,x^2\\&=\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{a+2}x\right)^2\\&=\left(x^2-\sqrt{a+2}x+1\right)\left(x^2+1+\sqrt{a+2}x+1\right).\end{aligned}$$

(vi) 由

$$x^{2n}+x^n+1=\left(x^n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$$

解得

$$x^n=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}},x^n=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$. 故

$$x=e^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},x=e^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

于是

$$x^{2n}+x^n+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)x+1\right).$$

□

习题 1.5.3: 证明, 复系数多项式 $f(x)$ 对所有实数 x 恒取正值的充分必要条件是, 存在没有实数根的复系数多项式 $\varphi(x)$, 使得 $f(x)=|\varphi(x)|^2$.

证: 证法一：充分性: 我们记 $\varphi(x)=a(x)+ib(x)$ 其中 $a(x),b(x)$ 均为实系数多项式, 则有:

$$f(x)=(a(x))^2+(b(x))^2$$

倘若 $f(x)$ 可以取到 0, 那么 $a(x),b(x)$ 有一个公共实根 x_0, 这使得 $\varphi(x_0)=0$ 和它没有实数根矛盾. 必要性: 首先记 $f(x)=g(x)+ih(x)$ 其中 $g(x),h(x)$ 均为实系数多项式, 那么倘若 $h(x)$ 不为 0, 避开它的零点任取一实数 x_0, 就有 $f(x_0)$ 不为正值, 从而 $h(x)\equiv 0$, 下面, 做实数域上的唯一分解:

$$f(x)=a\prod_{k=1}^{m}(x-x_k)^{\alpha_k}\prod_{k=1}^{n}(x^2+b_kx+c_k),b_k^2-4c_k<0,k=1,2,\cdots,n$$

则首先 $a>0$,α_k 均为偶数, 否则可以取到负值, 下面注意到:

$$x^2+b_kx+c_k=(x+\frac{b_k}{2})^2+(\sqrt{c_k-\frac{b_k^2}{4}})^2$$

利用公式:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

归纳可得:

$$\prod_{k=1}^{n}(x^2+b_kx+c_k)=(s(x))^2+(t(x))^2$$

从而有:

$$f(x)=\left(\sqrt{a}s(x)\prod_{k=1}^{m}(x-x_k)^{\alpha_k/2}\right)^2+\left(\sqrt{2}t(x)\prod_{k=1}^{m}(x-x_k)^{\alpha_k/2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\left|\sqrt{a}s(x)\prod_{k=1}^{m}(x-x_k)^{\alpha_k/2}+i\sqrt{a}t(x)\prod_{k=1}^{m}(x-x_k)^{\alpha_k/2}\right|^2.$$

证法二：设 $f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)$, 这里 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 属于 $\mathrm{R}[x]$, 那么对任意 x_0 属于 R, $f(x_0)=f_1(x_0)+if_2(x_0)>0$, 说明 $f_2(x)$ 恒等于 0, 即 f 其实为实系数多项式. 因其没有实根, 且恒为正, 则

$$f(x)=c(x-c_1)(x-c_1')(x-c_2)(x-c_2')\cdots(x-c_n)(x-c_n'),$$

其中 c_i 与 c_i' 为共轭复根且 $c>0$. 记 $(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)=g_1(x)+\mathrm{i}g_2(x)$

$$(x-c_1')(x-c_2')\cdots(x-c_n')=g_1(x)-\mathrm{i}g_2(x),$$

则

$$f(x)=c\left(g_1^2(x)+g_2^2(x)\right)=\left|\sqrt{c}\left(g_1(x)+\mathrm{i}g_2(x)\right)\right|^2,$$

取

$$\phi(x)=\sqrt{c}\left(g_1(x)+\mathrm{i}g_2(x)\right).$$

□

习题 1.5.4: 证明, 实系数多项式 $f(x)$ 对所有实数 x 恒取非负实数值的充分必要条件是, 存在实系数多项式 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$, 使得 $f(x)=[\varphi(x)]^2+[\psi(x)]^2$.

证: 必要性. 因实系数多项式 $f(x)$ 对所有实数恒取非负实数值. 不妨让 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上分解因式

$$f(x)=a(x-x_1)^{l_1}\cdots(x-x_s)^{l_s}\left(x^2+a_1x+b_1\right)^{e_1}\cdots\left(x^2+a_kx+b_k\right)^{e_k},$$

其中 $l_1+\cdots+l_s+2(e_1+\cdots+e_k)=\deg f(x)$ 且二次因式在 $\mathbb{R}$ 上不可约, $x_i(1\le i\le s)$ 为实根. 这里可设 $x_1<x_2<\cdots<x_s$. 注意到 $x^2+a_jx+b_j>0(1\le j\le k)$ 即 $\left(x^2+a_1x+b_1\right)^{e_1}\cdots\left(x^2+a_kx+b_k\right)^{e_k}$, 而

$$\frac{f(x)}{\left(x^2+a_1x+b_1\right)^{e_1}\cdots\left(x^2+a_kx+b_k\right)^{e_k}}=a(x-x_1)^{l_1}\cdots(x-x_s)^{l_s}$$

在 $\mathbb{R}$ 上非负. 取 $x=x_0<x_1$, 则得 $a>0$; 取 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, 则得 l_1 为偶数. 同理可得 $l_m(1\le m\le s)$ 为偶数. 考虑 $g(x)=\left(x^2+a_1x+b_1\right)^{e_1}\cdots\left(x^2+a_kx+b_k\right)^{e_k}$, 因其没有实根, 则只有共轭复根, 不妨设

$$g(x)=\left[(x-z_1)\left(x-\overline{z_1}\right)\right]^{e_1}\cdots\left[(x-z_k)\left(x-\overline{z_k}\right)\right]^{e_k},$$

记

$$g_1(x)=(x-z_1)^{e_1}\cdots(x-z_k)^{e_k}=h(x)+\mathrm{i}s(x),$$

则

$$\overline{g_1(x)}=\left(x-\overline{z_1}\right)^{e_1}\cdots\left(x-\overline{z_k}\right)^{e_k}=h(x)-\mathrm{i}s(x),$$

其中 $h(x),s(x)\in\mathbb{R}[x]$. 故

$$g(x)=g_1(x)\overline{g_1(x)}=h^2(x)-s^2(x),$$

所以

$$f(x)=\left[\sqrt{a}(x-x_1)^{l_1/2}\cdots(x-x_s)^{l_s/2}h(x)\right]^2+\left[\sqrt{a}(x-x_1)^{l_1/2}\cdots(x-x_s)^{l_s/2}s(x)\right]^2,$$

这里记 $\varphi(x)=\sqrt{a}(x-x_1)^{l_1/2}\cdots(x-x_s)^{l_s/2}h(x),\phi(x)=\sqrt{a}(x-x_1)^{l_1/2}\cdots(x-x_s)^{l_s/2}s(x)$.

充分性是显然的, 另外, 用此题结论便可证明第三题. □

注: 若 $P(x)$ 是平方和之积, 我们实际上是证明了: 任意个平方和之积仍是平方和. 对两个平方和之积, 用我们的方法可得

$$\begin{aligned}&\left(f_1^2+f_2^2\right)\left(g_1^2+g_2^2\right)=[f_1+f_2\mathrm{i}][g_1+g_2\mathrm{i}][f_1-f_2\mathrm{i}][g_1-g_2\mathrm{i}]\\&=[(f_1g_1-f_2g_2)+(f_1g_2+f_2g_1)\mathrm{i}][(f_1g_1-f_2g_2)-(f_1g_2+f_2g_1)\mathrm{i}]\\&=(f_1g_1-f_2g_2)^2+(f_1g_2+f_2g_1)^2.\end{aligned}$$

1.6 整系数与有理系数多项式

1.6.1 习 题

习题 1.6.1: 利用 Eisenstein 判别准则判定下述整系数多项式的不可约性:

(i) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;

(ii) x^4-x^3+2x+1;

(iii) x^4+1;

(iv) x^6+x^3+1;

(v) $\sum\limits_{i=0}^{p-1}(x+1)^i$, 其中 p 是素数.

证:

(1) 取 $p=2$, 显然 2 不能整除 $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$ 的首项系数, $p^2=4$ 不能整除常数项, 而 $p=2$ 整除首项系数外其他各项, 根据 Eisenstein 判别准则, 多项式在 $\mathbb{Z}$ 上不可约.

(2) 令 $x=y+1$, 则 $x^4-x^3+2x+1=(y+1)^4-(y+1)^3+2(y+1)+1=y^4+3y^3+3y^2+3y+3$. 取 $p=3$, 显然 3 不能整除 $y^4+3y^3+3y^2+3y+3$ 的首项系数, $p^2=9$ 不能整除常数项, 而 $p=3$ 整除首项系数外其他各项, 根据 Eisenstein 判别准则, 多项式在 $\mathbb{Z}$ 上不可约.

(3) 令 $x=y+1$, 我们有

$$x^4+1=(y+1)^4+1=y^4+4y^3+6y^2+4y+2,$$

取 $p=2$, 显然 2 不能整除 $y^4+4y^3+6y^2+4y+2$ 的首项系数, $p^2=4$ 不能整除常数项, 而 $p=2$ 整除首项系数外其他各项, 根据 Eisenstein 判别准则, 多项式在 $\mathbb{Z}$ 上不可约.

(4) 令 $x=y+1$, 则

$$x^4-x^3+2x+1=(y+1)^4-(y+1)^3+2(y+1)+1=y^4+3y^3+3y^2+3y+3.$$

取 $p=3$, 显然 3 不能整除 $y^4+3y^3+3y^2+3y+3$ 的首项系数, $p^2=9$ 不能整除常数项, 而 $p=3$ 整除首项系数外其他各项, 根据 Eisenstein 判别准则, 多项式在 $\mathbb{Z}$ 上不可约.

(5) 令 $x=y+1$, 则

$$x^6+x^3+1=(y+1)^6+(y+1)^3+1=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3.$$

取 $p=3$, 显然 3 不能整除 $y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3$ 的首项系数, $p^2=9$ 不能整除常数项, 而 $p=3$ 整除首项系数外其他各项, 根据 Eisenstein 判别准则, 多项式在 $\mathbb{Z}$ 上不可约.

(6) 由于

$$\begin{aligned} f(x)=\sum_{i=0}^{p-1}(x+1)^i&=\frac{(x+1)^p-1}{x}\\ &=x^{p-1}+C_p^1x^{p-2}+\cdots+C_p^{k-1}x^{p-k}+\cdots+C_p^{p-2}x+p. \end{aligned}$$

显然 p 不能整除 $f(x)$ 的首项系数, p^2 不能整除常数项, 但 p 整除首项系数外其他各项, 根据 Eisenstein 判别准则, 多项式在 $\mathbb{Z}$ 上不可约.

□

习题 1.6.2: 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是整系数多项式，且素数 p 满足: $p\nmid a_0$，$p\nmid a_1$，…，$p\nmid a_k$，$p\mid a_i$，$i=k+1,k+2,\ldots,n$，而 $p^2\nmid a_n$. 证明, $f(x)$ 具有次数不低于 $n-k$ 的整系数不可约因式.

证: 首先叙述这样一个论断：若 f 分解为整系数多项式 g 和 h 的乘积

$$f(x)=g(x)h(x),$$

则 g 与 h 之一的次数 $\geq n-k$, 并且该多项式 (对同样的 p 和 $n-k$) 满足类似的三个的条件

我们来证明这一论断. 设

$$\begin{aligned} g\left(x\right)&=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\ldots+b_{s-1}x+b_s\\ h\left(x\right)&=c_0x^r+c_1x^{r-1}+\ldots+c_{r-1}x+c_r, \end{aligned}$$

其中 $s+r=n$. 因为 $p\mid a_n=b_sc_r, p^2\mid a_n=b_sc_r$, 所以, 不妨设 $p\mid b_s, p^2\nmid b_s, p\nmid c_r$. 又 $p\nmid a_0=b_0c_0$, 所以, 不妨设 b_{s-m} 是 $b_s,b_{s-1},\cdots,b_0$ 之中第一个不被 p 整除者, 考察

$$a_{n-m}=a_{s+r-m}=b_{s-m}c_r+b_{s-m+1}c_{r-1}+\cdots+b_sc_{r-m}.$$

可知 $p\nmid a_{n-m}$, 因而 $n-m\leq k$, 即 $m\geq n-k$, 这时 g 的次数大于 $n-k$. 我们确认多项式 g 满足以下三个条件:

(i) $p\nmid b_0$;
(ii) $p\mid b_j(j=s,s-1,\cdots,s+k+1-n)$;
(iii) $p^2\nmid b_s$.

若 g 不可约, 则定理的结论已证实, 否则可重复类似讨论, 直到得出一个次数 $\geq n-k$ 的不可约因式. 证毕. □

习题 1.6.3: 设

$$f(x)=a_0x^{2n+1}+\cdots+a_nx^{n+1}+a_{n+1}x^n+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}$$

是整系数多项式, 且素数 p 适合: $p\nmid a_0,p\mid a_i,i=1,\ldots,n,p^2\mid a_i,i=n+1,\ldots,2n+1$, 但 $p^3\nmid a_{2n+1}$. 证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证: 反证法, 假如 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 有

$$\begin{aligned} f\left(x\right)&=a_0x^{2n+1}+\ldots+a_nx^{n+1}+a_{n+1}x^n+\ldots+a_{2n}x+a_{2n+1}\\ &=\left(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m\right)\left(c_0x^l+c_1x^{l-1}\cdots+c_{l-1}x+c_l\right), \end{aligned}$$

其中 $b_0,\cdots,b_m,c_0,\cdots,c_l\in\mathbb{Z},b_0\neq0,c_0\neq0,m<2n+1,l<2n+1,m+l=2n+1$.

由于 $p\mid a_{2n+1}=b_mc_l$, 因此 $p\mid b_m$ 或 $p\mid c_l$. 不妨设 $p\mid b_m$. 由于 $p\nmid a_0$, 从而 $p\mid b_0$. 于是存在 $m-k(0<k\leq m)$, 使得

$$p\mid b_m,p\mid b_{m-1},\cdots,p\mid bm+1-k,p\mid b_{m-k}.$$

由于 $a_{2n+1-(m+l-k)}=a_k=b_mc_{l-k}+b_{m-1}c_{l-k+1}+\cdots+b_{m+1-k}c_{l-1}+b_{m-k}c_l$, 且 $p\mid a_k$, 因此 $p\mid c_l$. 记 $r=$, 由于 $a_{2n+1-(m+l-k-1)}=a_{k+1}=b_mc_{l-k-1}+\cdots+b_{m+1-k}c_{l-2}+b_{m-k}c_{l-1}+b_{m-k-1}c_l$, 且 $p\mid a_{k+1}$, 因此 $p\mid l-1$. 依次下去, 可得 $p\mid c_{l-2},\cdots,p\mid c_{l+2-r}$, 最后由于

$$a_{2n+1-(m+l+1-k-r)}=a_{k+r-1}=b_mc_{l+1-k-r}+\cdots+b_{m+1-k}c_{l-r}$$
$$+b_{m-k}c_{l+1-r}+b_{m-k-1}c_{l+2-r}+\cdots+b_{m+1-k-r}c_l,$$

且 $p\mid a_1$ $(2n=k+r-1)$, 因此 $p\mid c_{l+1-r}$. 由于

$$a_{2n+1}=a_{k+r}=b_mc_{l-k-r}+\cdots+b_{m+1-k}c_{l-r-1}+b_{m-k}c_{l-r}+b_{m-k-1}c_{l+1-r}+\cdots+b_{m-k-r}c_l,$$

且 $p\nmid a_{2n+1}$, 因此 $p\nmid c_r$.

(i) 当 $k\le n$ 时, 有 $r=2n+1-k\ge n+1>k$. 因此 $p\mid c_{l-k},p\mid c_{l+1-k},\cdots,c_l$. 由于 $p^2\mid c_l$. 从而 $p^3\mid b_mc_l$, 即 $p^3\mid a_{2n+1}$, 矛盾.

(ii) 当 $k>n$ 时, 有 $r=2n+1-k\le n+1>k$, 从而 $r<k$. 于是 $p\mid b_{m-r},p\mid c_{m+1-r},\cdots,b_m$. 由于

$$a_{2n+1-r}=b_mc_{l-r}+b_{m-1}c_{l+1-r}+\cdots+b_{m+1-r}c_{l-1}+b_{m-r}c_l,$$

且 $p^2\mid a_{2n+1-r}$, 因此 $p^2\mid b_mc_{l-r}$. 由于 $p^2\mid b_m$, 因此 $p^3\mid b_mc_l$, 即 $p^3\mid a_{2n+1}$, 矛盾.

综上所述得, $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. □

习题 1.6.4: 设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 n 个不同的整数. 证明: 多项式

$$f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$$

在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上可约, 因此, $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 且 $\deg g(x)<degf(x),\deg h(x)<degf(x)$.

因为 $\deg(f(x))=2n$, 故 $\deg g(x),\deg h(x)$ 中必有一个不超过 n. 不妨设 $0<\deg g(x)<n$, 因为 $f(x)>0$, 故 $f(x)$ 无实根, 因而 $g(x),h(x)$ 均无实根, 这样 $g(x)$ 就不会变号. 又 $f(a_i)=1$, $g(a_i),h(a_i)$ 为整数, 因而它们同时为 1 或同时为 -1. 若 $\exists i$ 使得 $g(a_i)=1$, 则对 $\forall j$ 必有 $g(a_j)=1$. 因为 $\deg g(x)<n$, 而有 n 个不同的数使得 $g(a_i)=1$, 所以 $g(x)\equiv1$; 若 $\exists i$ 使得 $g(a_i)=-1$, 则 $g(x)\equiv-1$.

因此有 $\deg g(x)=\deg h(x)=n$. 又 $g(a_i)=h(a_i)$, 故 $g(x)-h(x)=b(x-a_1)\cdots(x-a_n)$. 若 $b\ne0$, 由 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的首项系数之积为 1, 我们知它们的首项系数相等, 因而等式左边次数小于 n, 矛盾.

故 $b=0$, 此时有 $g(x)\equiv h(x)$, 所以有

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1=g^2(x).$$

令 $q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, 则有 $q^2(x)+1=g^2(x)$, 即 $(g(x)-q(x))(g(x)+q(x))=1$. 对任意整数 r, 有 $g(r)-q(r)=g(r)+q(r)$, 故 $q(r)=0$, 从而 $q(x)\equiv0$, 矛盾, 因而 $f(x)$ 不可约. □

习题 1.6.5: 试给出有理系数多项式 $f(x)=x^4+px^2+q$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约的充分必要条件.

证:

(1) 当 $\Delta=p^2-4q\geq 0$ 时,

$$\begin{aligned}f(x)=x^4+px^2+q&=\left(x^2+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\\&=\left(x^2+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x^2+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right).\end{aligned}$$

若 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 只需保证 $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ 为无理数;

(2) 当 $\Delta=p^2-4q<0$ 时, 即 $2\sqrt{q}-p>0$, 此时

$$\begin{aligned}f(x)=x^4+px^2+q&=\left(x^2+\sqrt{q}\right)^2-\left(2\sqrt{q}-p\right)x^2\\&=\left(x^2-\sqrt{2\sqrt{q}-p}x+\sqrt{q}\right)\left(x^2+\sqrt{2\sqrt{q}-p}x+\sqrt{q}\right).\end{aligned}$$

若 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 只需保证 $\sqrt{2\sqrt{q}-p},\sqrt{q}$ 为无理数;

□

习题 1.6.6: 设整系数多项式 $f(x)$ 在 x 的 4 个不同整数值上都取值为 1, 则 $f(x)$ 在 x 的其它整数值上的值不可能是 -1.

证: 将这四个整数分别记为 a_1,a_2,a_3,a_4, 设 $f(x)-1=g(x)$, 则有 $g(a_1)=g(a_2)=g(a_3)=g(a_4)=0$. 又因为 a_1,a_2,a_3,a_4 互不相同, 故

$$g(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)h(x),$$

所以

$$g(n)=(n-a_1)(n-a_2)(n-a_3)(n-a_4)h(n)=f(n)-1.$$

由题意,$n-a_1,n-a_2,n-a_3,n-a_4$ 这四个数彼此不同, 其中最多只能有两个分别取作 $1,-1$, 而其他两个不能在 $-1,1$ 这两个数中取值, 故取得的 $|g(n)|$ 的最小值只能为 $(-1)\times 1\times(-2)\times 2=4$, 从而 $f(n)-1=g(n)$ 不为 -2, $f(n)\neq -1$. □

注: 上题中 $h(x)$ 也为整系数多项式, 可这么理解: $\exists$ 整系数多项式 $q(x),r(x)$ 使得

$$f(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+r(x),$$

其中 $0\leq\deg r(x)\leq 3$, 又 $r(a_1)=r(a_2)=r(a_3)=r(a_4)=0$, 故 $r(x)\equiv 0$, 此时 $h(x)=q(x)$.

习题 1.6.7: 证明，设正整数 $n\geq 12$, 并且 n 次整系数多项式 $f(x)$ 在 x 的 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个以上的整数值上取值为 ± 1, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 不可约. 次数 n 的下界 12 是否还可缩小?

证: 当 $n\geq 12$ 时, $\left[\frac{n}{2}\right]+1\geq 7$, 则其中必有不少于 4 个整数取函数值 1 或 -1. 由上题结论可知, 若 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个函数值中有 4 个 1, 则函数值不可能为 -1, 同理可知, 若其中有 4 个 -1，则函数值不可能为 1.

设 $m=\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个函数值全为 1, 分别记为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$, 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上可约, 因此, $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 且 $\deg g(x)<degf(x),\deg h(x)<degf(x)$.

显然

$$f\left(x\right)=\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x-a_m\right)k\left(x\right)+1=g\left(x\right)h\left(x\right).$$

那么有 $g(a_i)h(a_i)=1$, 则 $g(a_i)=h(a_i)=1$ 或 $g(a_i)=h(a_i)=-1$, 同理可知 $g(a_i)$ 要么全为 1, 要么全为 -1. 这样 $g(x)-1$ 或 $g(x)+1$ 至少有 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个根. 同理可知 $h(x)-1$ 或 $h(x)+1$ 至少有 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个根. 因此 $\min\left\{\deg g\left(x\right),\deg h\left(x\right)\right\}\geq\left[\frac{n}{2}\right]+1$, 然而

$$n=\deg f\left(x\right)=\deg g\left(x\right)+\deg h\left(x\right)\geq 2\left[\frac{n}{2}\right]+2>n,$$

矛盾.

当 $n=7$ 时有反例 $f\left(x\right)=x^2(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2+x\left(x-1\right)\left(x-3\right)+x\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)+1=\left(x\left(x-1\right)\left(x-3\right)+1\right)\left(x\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)+1\right)$. □

习题 1.6.8: 设整系数多项式 ax^2+bx+1 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 并且设

$$\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 n 个不同的整数, $n\geq 7$. 证明, 多项式

$$f(x)=a\varphi^2(x)+b\varphi(x)+1$$

在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. 并问次数 n 的下界 7 是否还可缩小?

证: 设 $m=\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个函数值全为 1, 分别记为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$, 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上可约, 因此, $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 且 $\deg g(x)<degf(x),\deg h(x)<degf(x)$.

这里 $f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=1$. 对这 n 个 a_i 有 $g(a_i)=h(a-i)=1$ 或者 $g(a_i)=h(a_i)=-1$.

如果 $g(a_i)=h(a_i)$ 恒等于 1, 则有 $\min\left\{\deg g\left(x\right),\deg h\left(x\right)\right\}\geq n$. 而 $\deg g\left(x\right)+\deg h\left(x\right)=2n$, 只能是 $\deg g\left(x\right)=\deg h\left(x\right)=n$.

设 $g\left(x\right)=g\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x-a_n\right)+1, h\left(x\right)=h\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x-a_n\right)+1$, 这样

$$\begin{aligned}f\left(x\right)=g\left(x\right)h\left(x\right)=gh(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2\\+\left(g+h\right)\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x-a_n\right)+1.\end{aligned}$$

对比系数发现 $gh=a,a+h=b$, 这样 $ax^2+bx+1=(gx+1)(hx+1)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 矛盾.

同理可知 $g(a_i)=h(a_i)$ 恒等于 -1 时亦矛盾.

当 $n=4$ 时有反例 $x\left(x-1\right))\left(x-2\right)\left(x-3\right)+1=\left(x^2-3x+1\right)^2$. □

1.7 多元多项式环

1.7.1 习　　题

习题 1.7.1: 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n),g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$. 证明, 如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为零多项式, 则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 至少有一个是零多项式.

证: 若 $\deg f>0,\deg g>0$, 则有

$$0=\deg 0=\deg(fg)=\deg f+\deg g>0,$$

矛盾. 故 $\deg f=0$ 或 $\deg g=0$, 即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 至少有一个是零多项式. □

习题 1.7.2: 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n),g(x_1,x_2,\cdots,x_n),h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$, 且 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$. 证明, 如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)h(x_1,x_2,\cdots$ 则 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

证:

$$fg=fh\Rightarrow f(g-h)=0,$$

由上题结论可知 $f=0$ 或 $g-h=0$, 又 $f\neq 0$, 则有 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)-h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$, 即 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. □

习题 1.7.3: 验证 $\mathbf{F}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 在 n 元多项式的加法与乘法下成为一个交换环.

证: 设

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in M_1}a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},\\
g(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in M_2}b_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},\\
h(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in M_3}c_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},
\end{aligned}$$

其中 $M_1,M_2,M_3\subseteq\mathbb{N}^n$.

(A1) 加法结合律　记 $N_1=M_1\cup M_2$, 当 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in M_1$ 但 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)\notin M_2$ 时, 约定 $b_{k_1k_2\cdots k_n}=0$; 而当 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)\notin M_1,(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in M_2$ 时, 约定 $a_{k_1k_2\cdots k_n}=0$, 则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的和; 记 $N_2=M_2\cup M_3$, 当 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in M_2$ 但 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)\notin M_3$ 时, 约定 $c_{k_1k_2\cdots k_n}=0$; 而当 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)\notin M_2,(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in M_3$ 时, 约定 $b_{k_1k_2\cdots k_n}=0$; 记 $N_3=N_1\cup M_3=(M_1\cup M_2)\cup M_3=M_1\cup(M_2\cup M_3)=$

$M_1 \cup N_2$, 类似地可约定 n 元多项式的 0 值, 则有

$$
\begin{aligned}
&\left(f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)+g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\right)+h\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \\
=&\sum_{\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in N_1}\left(a_{k_1 k_2 \cdots k_n}+b_{k_1 k_2 \cdots k_n}\right) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}+\sum_{\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in M_3} c_{k_1 k_2 \cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \\
=&\sum_{\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in N_3}\left(a_{k_1 k_2 \cdots k_n}+b_{k_1 k_2 \cdots k_n}+c_{k_1 k_2 \cdots k_n}\right) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \\
=&\sum_{\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in M_1} a_{k_1 k_2 \cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}+\sum_{\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in N_2}\left(b_{k_1 k_2 \cdots k_n}+c_{k_1 k_2 \cdots k_n}\right) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \\
=&f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)+\left(g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)+h\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\right).
\end{aligned}
$$

(A2) 加法交换律 记 $N_1=M_1 \cup M_2$, 当 $\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in M_1$ 但 $\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \notin M_2$ 时, 约定 $b_{k_1 k_2 \cdots k_n}=0$; 而当 $\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \notin M_1,\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in M_2$ 时, 约定 $a_{k_1 k_2 \cdots k_n}=0$, 则 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 与 $g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 的和

$$
\begin{aligned}
&f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)+g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\sum_{\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in N_1}\left(a_{k_1 k_2 \cdots k_n}+b_{k_1 k_2 \cdots k_n}\right) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \\
=&\sum_{\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in N_1}\left(b_{k_1 k_2 \cdots k_n}+a_{k_1 k_2 \cdots k_n}\right) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}=g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)+f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right).
\end{aligned}
$$

(A3) 存在零元素 显然存在零多项式 $0 \in \mathbf{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$.

(A4) 存在负元素 对每个多项式 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 都存在多项式

$$
-f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\sum_{\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in M_1}\left(-a_{k_1 k_2 \cdots k_n}\right) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}.
$$

(M1) 乘法结合律 设

$$
\begin{aligned}
f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)&=\sum_{\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in M_1} a_{k_1 k_2 \cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}, \\
g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)&=\sum_{\left(l_1, l_2, \cdots, l_n\right) \in M_2} b_{l_1 l_2 \cdots l_n} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}, \\
h\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)&=\sum_{\left(m_1, m_2, \cdots, m_n\right) \in M_3} c_{m_1 m_2 \cdots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n},
\end{aligned}
$$

设 $p_i=k_i+l_i, q_i=l_i+m_i, r_i=p_i+m_i=\left(k_i+l_i\right)+m_i=k_i+\left(l_i+m_i\right)=k_i+q_i, i=1,2, \cdots, n$, 且记

$$
\begin{aligned}
&P=\left\{\left(p_1, p_2, \cdots, p_n\right):\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in M_1,\left(l_1, l_2, \cdots, l_n\right) \in M_2\right\} \\
&Q=\left\{\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right):\left(l_1, l_2, \cdots, l_n\right) \in M_2,\left(m_1, m_2, \cdots, m_n\right) \in M_3\right\} \\
&R=\left\{\left(r_1, r_2, \cdots, r_n\right):\left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right) \in M_1,\left(l_1, l_2, \cdots, l_n\right) \in M_2,\left(m_1, m_2, \cdots, m_n\right) \in M_3\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\right)h\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\\
&=\left(\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in P}\sum_{\substack{k_j+l_j=p_j\\1<j<p}}a_{k_1k_2\cdots k_n}b_{l_1l_2\cdots l_n}x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}\right)\sum_{(m_1,m_2,\cdots,m_n)\in M_3}c_{m_1m_2\cdots m_n}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}\\
&=\sum_{(r_1,r_2,\cdots,r_n)\in R}\sum_{\substack{k_j+l_j+m_j=r_j\\1<j<r}}a_{k_1k_2\cdots k_n}b_{l_1l_2\cdots l_n}c_{m_1m_2\cdots m_n}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}\\
&=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in M_1}a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\left(\sum_{(q_1,q_2,\cdots,q_n)\in Q}\sum_{\substack{l_j+m_j=q_j\\1<j<q}}b_{l_1l_2\cdots l_n}c_{m_1m_2\cdots m_n}x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}\right)\\
&=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\left(g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)h\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\right).
\end{aligned}
$$

(M2) 乘法交换律

$$
\begin{aligned}
&f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in P}\sum_{\substack{k_j+l_j=p_j\\1<j<p}}a_{k_1k_2\cdots k_n}b_{l_1l_2\cdots l_n}x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}\\
&=\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in P}\sum_{\substack{l_j+k_j=p_j\\1<j<p}}b_{l_1l_2\cdots l_n}a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}=g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)
\end{aligned}
$$

(M3) 存在单位元素　存在纯量多项式 $e(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$.

(D) 加乘分配律

$$
\begin{aligned}
&f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\left(g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)+h\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\right)\\
&=\sum_{(l_1,l_2,\cdots,l_n)\in M_1}a_{l_1l_2\cdots l_n}x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in N_2}\left(b_{k_1k_2\cdots k_n}+c_{k_1k_2\cdots k_n}\right)x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\\
&=\sum_{(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in S}\left(\sum_{\substack{l_j+k_j=s_j\\1<j<s}}a_{l_1l_2\cdots l_n}\left(b_{l_1l_2\cdots l_n}+c_{k_1k_2\cdots k_n}\right)\right)x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n}\\
&=\sum_{(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in S}\left(\sum_{\substack{l_j+k_j=s_j\\1<j<s}}a_{l_1l_2\cdots l_n}b_{k_1k_2\cdots k_n}\right)x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n}\\
&+\sum_{(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in S}\left(\sum_{\substack{l_j+k_j=s_j\\1<j<s}}a_{l_1l_2\cdots l_n}c_{k_1k_2\cdots k_n}\right)x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n}\\
&=\sum_{(l_1,l_2,\cdots,l_n)\in M_1}a_{l_1l_2\cdots l_n}x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in M_2}b_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\\
&+\sum_{(l_1,l_2,\cdots,l_n)\in M_1}a_{l_1l_2\cdots l_n}x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in M_2}b_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\\
&=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)+f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)h\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right).
\end{aligned}
$$

□

1.8 对称多项式

1.8.1 习　　题

习题 1.8.1: 把下列对称多项式表为关于基本对称多项式的多项式.

(1) $\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_2^2+x_3^2\right)\left(x_3^2+x_1^2\right)$;

(2) $\left(2x_1-x_2-x_3\right)\left(2x_2-x_3-x_1\right)\left(2x_3-x_1-x_2\right)$;

(3) $\left(-x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\left(x_1-x_2+\cdots+x_n\right)\cdots\left(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}-x_n\right)$;

(4) $\sum\limits_{1\le i<j\le n}\left(x_i-x_j\right)^2$;

(5) $\sum\limits_{\binom{12\cdots n}{i_1i_2\cdots i_n}}\left(a_1x_{i_1}+a_2x_{i_2}+\cdots+a_nx_{i_n}\right)^2$, 其中求和号表示对遍历自然数 $1,2,\ldots,n$ 的所有排列 $i_1,i_2,\ldots,i_n$ 求和;

(6) $\sum\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ k\ne i,j}}\left(x_i+x_j-x_k\right)^2$.

证:

(1)

$$\begin{aligned}
&\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_2^2+x_3^2\right)\left(x_3^2+x_1^2\right)=\left(s_2-x_1^2\right)\left(s_2-x_2^2\right)\left(s_2-x_3^2\right)\\
&=s_2^3-s_2^2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+s_2\left(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2\right)-x_1^2x_2^2x_3^2\\
&=s_2\left[\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)^2-2\left(x_1+x_2+x_3\right)x_1x_2x_3\right]-\sigma_3^2\\
&=\left(\sigma_1^2-2\sigma_2\right)\left[\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3\right]-\sigma_3^2=\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1^3\sigma_3-2\sigma_2^3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\left(2x_1-x_2-x_3\right)\left(2x_2-x_3-x_1\right)\left(2x_3-x_1-x_2\right)\\
&=\left(3x_1-\sigma_1\right)\left(3x_2-\sigma_1\right)\left(3x_3-\sigma_1\right)\\
&=27x_1x_2x_3-9\sigma_1\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)+3\sigma_1^2\left(x_1+x_2+x_3\right)-\sigma_1^3\\
&=27\sigma_3-9\sigma_1\sigma_2+2\sigma_1^3.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\left(-x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\left(x_1-x_2+\cdots+x_n\right)\cdots\left(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}-x_n\right)\\
&=\left(\sigma_1-2x_1\right)\left(\sigma_1-2x_2\right)\cdots\left(\sigma_1-2x_n\right)=\sigma_1^n-2\sigma_1^{n-1}\sigma_1+4\sigma_1^{n-2}\sigma_2-\cdots\\
&=\sigma_1^n+\sum_{k=1}^n(-2)^k\sigma_1^{n-k}\sigma_k.
\end{aligned}$$

(4) $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为 2 次齐次对称多项式, 首项 $(n-1)x_1^2$, 可能出现在它后面的有 $\sigma_1^2,\sigma_1\sigma_2$. 令

$$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\left(n-1\right)\sigma_1^2+A\sigma_1^{1-1}\sigma_2=\left(n-1\right)\sigma_1^2+A\sigma_2.$$

取 $x_i=1$, 则 $s_1=n, s_2=\frac{n(n-1)}{2}$, 从而有 $(n-1)n^2+A\frac{n(n-1)}{2}=0$, 则 $A=-2n$, 故

$$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=(n-1)\,\sigma_1^2-2n\sigma_2.$$

(5) 由于

$$\sum_{\binom{12\cdots n}{i_1i_2\cdots i_n}}\left(a_1x_{i_1}+a_2x_{i_2}+\cdots+a_nx_{i_n}\right)^2=\sum_{\binom{12\cdots n}{i_1i_2\cdots i_n}}\left(a_{i_1}x_1+a_{i_2}x_2+\cdots+a_{i_n}x_n\right)^2,$$

首项为 $(n-1)!\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2x_1^2$, 可能出现在它后面的项有 x_1x_2. 令

$$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=(n-1)!\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_1^2+A\sigma_2,$$

取 $x_i=1$, 得

$$(n-1)!\sum_{i=1}^{n}a_i^2n^2+A\frac{n\left(n-1\right)}{2}=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2n!,$$

则

$$A=\frac{2}{n-1}\left[\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2(n-1)!-n!\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right].$$

故

$$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=(n-1)!\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_1^2+\frac{2}{n-1}\left[(n-1)!(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2-n!\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right]\sigma_2.$$

(6) 首项系数为 $\left[(n-1)\,(n-2)\right]x_1^2+C_{n-1}^2x_1^2=\frac{3}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,x_1^2$, 可能出现在它后面的项有 x_1x_2. 令

$$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\frac{3}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,\sigma_1^2+A\sigma_2.$$

取 $x_i=1$, 得 $\frac{3}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,n^2+A\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n\,(n-1)\,(n-2)$, 则 $A=-(3n-1)(n-2)$, 所以

$$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\frac{3}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,\sigma_1-(3n-1)\,(n-2)\,\sigma_2.$$

□

习题 1.8.2: 证明: 三次实系数方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的每个根的实部都是负数的充分必要条件为

$$a>0,\quad ab-c>0,\quad c>0.$$

证: 由韦达定理可知 $a=-\sigma_1, b=\sigma_2, c=-\sigma_3$.

充分性. 若只有一个实根, 设 $x_1=r, x_2=p+\mathrm{i}g, x_3=p-\mathrm{i}g$, 其中 $q\neq0$. 而 $a=-\sigma_1=-(r+2p), b=\sigma_2=2rp+p^2+g^2, c=-\sigma_3=-r(p^2+g^2)$. 由 $c=-r(p^2+g^2)>0$, 得 $r<0$.

$$\begin{aligned}ab-c&=-\left(r+2p\right)\left(2rp+p^2+g^2\right)+r\left(p^2+g^2\right)\\&=-2p\left(p^2+g^2\right)-2rp\left(r+2p\right)=-2p\left[\left(p+r\right)^2+g^2\right]>0,\end{aligned}$$

得 $p<0$.

若三根均为实数, 由 $ab-c>0$ 得 $ab>c>0$. 由 $a>0$ 得 $b>0$, 即 $\sigma_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1>0$.

若 x_1,x_2,x_3 不全为负, 由 $\sigma_1<0$. 不妨设 $x_1<0,x_2,x_3>0$, 则

$$\begin{aligned}
&<\delta_2=x_1\left(x_2+x_3\right)+x_2x_3\\
&\leq x_1\left(x_2+x_3\right)+\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2\\
&=\frac{1}{4}\left(3x_1+\sigma_1\right)\left(x_2+x_3\right)<0,
\end{aligned}$$

矛盾.

必要性. 若只有一个实根, 设 $x_1=r,x_2=p+\mathrm{i}g,x_3=p-\mathrm{i}g$, 其中 $r,p<0,q\neq0$, 有 $a=-\sigma_1=-\left(r+2p\right)>0,ab-c=-2p\left[\left(p+r\right)^2+g^2\right]>0,c=-r\left(p^2+g^2\right)>0$.

若三根均为实数, 则 $a=-\sigma_1>0,ab-c=-\sigma_1\sigma_2-\sigma_3>0,c=-\sigma_3>0$. □

习题 1.8.3: **设三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根是某个三角形的内角的正弦. 证明:**

$$a\left(4ab-a^3-8c\right)=4c^2.$$

证: 证法一: 记该三角形三个内角 A,B,C 所对边长为 x_1,x_2,x_3, 外接圆半径为 R. 由 $S=\frac{1}{2}x_2x_3\sin A=\frac{1}{4R}x_1x_2x_3$, 得 $\sigma_3=4RS$. 由海伦公式

$$S=\sqrt{\frac{s_1}{2}\left(\frac{s_1}{2}-x_1\right)\left(\frac{s_1}{2}-x_2\right)\left(\frac{s_1}{2}-x_3\right)}$$

得

$$\begin{aligned}
&\sigma_3^2=16R^2\cdot\frac{\sigma_1}{2}\left(\frac{\sigma_1}{2}-x_1\right)\left(\frac{\sigma_1}{2}-x_2\right)\left(\frac{\sigma_1}{2}-x_3\right)\\
&=R^2\sigma_1\left(\sigma_1-2x_1\right)\left(\sigma_1-2x_2\right)\left(\sigma_1-2x_3\right)\\
&=R^2\sigma_1\left[\sigma_1^3-2\sigma_1^2\left(x_1+x_2+x_3\right)+4\sigma_1\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)-8x_1x_2x_3\right]\\
&=R^2\sigma_1\left(-\sigma_1^3+4\sigma_1\sigma_2-8\sigma_3\right).
\end{aligned}$$

由 $\sigma_1=-2Ra,\sigma_2=(2R)^2b,\sigma_3=-(2R)^3c$, 得 $a(4ab-a^3-8c)=4c^2$.

证法二: 记该三角形三个内角分别为 A,B,C. 由韦达定理可知,

$$a=-\sum\sin A,b=\sum\sin A\sin B,c=-\sin A\sin B\sin C.$$

而

$$\begin{aligned}
&a^2\left(4b-a^2\right)=\left(\sum\sin A\right)^2\left[4\sum\sin A\sin B-\left(\sum\sin A\right)^2\right]\\
&=\left(2\sum\sin A\sin B+\sum\sin^2A\right)\left(2\sum\sin A\sin B-\sum\sin^2A\right)\\
&=4\left(\sum\sin A\sin B\right)^2-\left(\sum\sin^2A\right)^2\\
&=4\sum\sin^2A\sin^2B+8\sum\sin^2A\sin B\sin C-\sum\sin^4A-2\sum\sin^2A\sin^2B\\
&=2\sum\sin^2A\sin^2B+8\sum\sin^2A\sin B\sin C-\sum\sin^4A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4c(c+2a)&=(-4\sin A\sin B\sin C)\left(-\sin A\sin B\sin C-2\sum\sin A\right)\\&=4\sin^2A\sin^2B\sin^2C+8\sum\sin^2A\sin B\sin C.\end{aligned}$$

又

$$a\left(4ab-a^3-8c\right)=4c^2\Leftrightarrow a^2\left(4b-a^2\right)=4c(c+2a).$$

只需证明

$$\sum\sin^4A+4\sin^2A\sin^2B\sin^2C=2\sum\sin^2A\sin^2B.$$

再由余弦定理

$$\begin{aligned}&c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\Leftrightarrow\sin^2C=\sin^2A+\sin^2B-2\sin A\sin B\cos C\\\Leftrightarrow&2\sin A\sin B\cos C=\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C\\\Leftrightarrow&4\sin^2A\sin^2B\cos^2C=\sum\sin^4A+2\sin^2A\sin^2B-2\sin^2A\sin^2C-2\sin^2B\sin^2C.\end{aligned}$$

代入即可验证成立. □

习题 1.8.4: 设 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 是多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ 的 n 个根. 证明, 关于 $x_2,x_3,\dots,\cdots x_n$ 的对称多项式可以表为关于 x_1 的多项式.

证: 记 σ_k 为 $x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式, 由 $a_{n-1}=-(x_1+\sigma_1)$ 得 $\sigma_1=-x_1-a_{n-1}$, 即 $k=1$ 时结论成立. 由 $a_{n-k}=(-1)^k(x_1\sigma_{k-1}+\sigma_k)$ 得

$$\sigma_k=-x_1\sigma_{k-1}+(-1)^ka_{n-k},$$

递推知结论成立. □

习题 1.8.5: 求

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial\sigma_k}{\partial x_i}$$

其中求和号后的偏导数表示 $\sigma_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于 x_i 的偏导数.

解: 当 $k=1$ 时, $\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_i}=1$, 则 $\sum\limits_{i=1}^n\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_i}=n$.

当 $2\le k\le n$ 时, $\frac{\partial\sigma_k}{\partial x_i}=\sum\limits_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_{k-1}\le n\\ j_1,\cdots,j_{k-1}\ne i}}x_{j_1}\cdots x_{j_n}$, 则 $\sum\limits_{i=1}^n\frac{\partial\sigma_k}{\partial x_i}=(n+1-k)\sigma_{k-1}$.

若记 $\sigma_0=1$, 则可写成统一的形式

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial\sigma_k}{\partial x_i}=(n+1-k)\sigma_{k-1}.$$

□

习题 1.8.6: 设对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足

$$f(x_1+a,x_2+a,\dots,x_n+a)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中 a 是任意常数. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$. 证明:

$$n\frac{\partial g}{\partial\sigma_1}+(n-1)\sigma_1\frac{\partial g}{\partial\sigma_2}+\cdots+\sigma_{n-1}\frac{\partial g}{\partial\sigma_n}=0.$$

☞ **证:** 在

$$f\left(x_1+a,x_2+a,\cdots,x_n+a\right)=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$$

中, 对 a 求导可得

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}=0.$$

由 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=g\left(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\right)$ 得

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial \sigma_k}\cdot\frac{\partial \sigma_k}{\partial x_i}.$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial \sigma_k}\cdot\frac{\partial \sigma_k}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\left(n+1-k\right)\sigma_{k-1}\frac{\partial g}{\partial x_k}=0,$$

即

$$n\frac{\partial g}{\partial \sigma_1}+(n-1)\sigma_1\frac{\partial g}{\partial \sigma_2}+\cdots+\sigma_{n-1}\frac{\partial g}{\partial \sigma_n}=0.$$

□

习题 1.8.7: 把 n 元等幂和 $s_1,s_2,\ldots,s_6$ 表为关于 n 元基本对称多项式的多项式, 其中 $n\geq 6$.

☞ **证:** 由 Newton 恒等式, 可得

$$s_1=\sigma_1,s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2,s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

$$\begin{aligned}
&s_1=\sigma_1,s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2,s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3\\
&s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4\\
&s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5\\
&s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3+6\sigma_1^3\sigma_3-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2\\
&\quad-6\sigma_1^2\sigma_4+6\sigma_2\sigma_4+6\sigma_1\sigma_5-6\sigma_6.
\end{aligned}$$

□

习题 1.8.8: 把 n 元基本对称多项式 $\sigma_3,\sigma_4,\cdots,\sigma_6$ 表为 n 元等幂和 $s_1,s_2,\ldots$ 的多项式.

☞ **证:**

$$\begin{aligned}
&s_1=\sigma_1\\
&s_2=s_1\sigma_1-2\sigma_2\\
&s_3=s_2\sigma_1-s_1\sigma_2+3\sigma_3\\
&\ \vdots\\
&s_k=s_k\sigma_1-s_{k-1}\sigma_2+\cdots+(-1)^{k+1}k\sigma_k.
\end{aligned}$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ s_1 & -2 & & & & & \\ s_2 & -s_1 & 3 & & & & \\ s_3 & s_2 & s_1 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ s_{k-2} & -s_{k-3} & s_{k-4} & \cdots & \cdots & (-1)^{k-2}(k-1) & \\ s_{k-1} & -s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & \cdots & (-1)^{k-2}s_1 & (-1)^{k-1}k \end{vmatrix},$$

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & s_1 \\ s_1 & -2 & & & & & s_2 \\ s_2 & -s_1 & 3 & & & & s_3 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \ddots & & & s_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ s_{k-2} & -s_{k-3} & s_{k-4} & \cdots & \cdots & (-1)^{k-2}(k-1) & s_{k-1} \\ s_{k-1} & -s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & \cdots & (-1)^{k-2}s_1 & s_k \end{vmatrix}.$$

因此

$$s_k = \frac{\triangle_k}{\triangle} = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & & & & & & (-1)^{k-1}s_1 \\ s_1 & 2 & & & & & (-1)^{k-1}s_2 \\ s_2 & s_1 & 3 & & & & (-1)^{k-1}s_3 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \ddots & & & (-1)^{k-1}s_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & \cdots & \cdots & k-1 & (-1)^{k-1}s_{k-1} \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & \cdots & s_1 & (-1)^{k-1}s_k \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & & \\ s_2 & s_1 & 2 & & & \\ s_3 & s_2 & s_1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & s_1 & n-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k--2} & \cdots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}$$

□

习题 1.8.9: 把下列 n 元对称多项式表为 n 元等幂和的多项式,

(1) $\sum\limits_{1\le i<j\le n} x_i^k x_j^k$;

(2) $\sum\limits_{1\le i<j\le n} (x_i+x_j)^k$;

(3) $\sum\limits_{1\le i<j\le n} (x_i-x_j)^{2k}$.

其中 k 是正整数.

✎ 解:

(1)

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i^k x_j^k = \frac{1}{2}\left[\sum_{1\le i,j\le n} x_i^k x_j^k - \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k}\right] = \frac{1}{2}\left(s_k^2 - s_{2k}\right).$$

(2)

$$\sum_{1\le i<j\le n} \left(x_i + x_j\right)^k = \frac{1}{2}\left[\sum_{1\le i,j\le n} \left(x_i + x_j\right)^k - \sum_{i=1}^{n} \left(2x_i\right)^k\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{1\le i,j\le n}\sum_{r=0}^{k} C_k^r x_i^{k-r} x_j^r - 2^k s_k\right] = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} C_k^r \sum_{1\le i,j\le n} x_i^{k-r} x_j^r - 2^{k-1} s_k$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} C_k^r s_{k-r} s_r - 2^{k-1} s_k.$$

(3)

$$\sum_{1\le i<j\le n} \left(x_i - x_j\right)^{2k} = \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} \left(x_i - x_j\right)^{2k} = \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n}\sum_{r=0}^{2k} C_{2k}^r x_i^{2k-r} x_j^r (-1)^r$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{2k} C_{2k}^r \sum_{1\le i,j\le n} x_i^{2k-r} x_j^r (-1)^r = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{2k} (-1)^r C_{2k}^r s_{2k-r} s_r.$$

□

习题 1.8.10: 求多项式

$$f(x) = x^n + (a+b)\,x^{n-1} + \left(a^2+b^2\right)x^{n-2} + \cdots + \left(a^{n-1}+b^{n-1}\right)x + \left(a^n+b^n\right)$$

的根的等幂和 $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

解: 解法一:

$$s_{2k-1} = -\left(a^{2k+1}+b^{2k+1}\right), s_{2k} = -\left(a^k-b^k\right)^2,$$

归纳证之.

由 $\sigma_k = (-1)^k(a^k+b^k)$, 得 $s_1 = \sigma_1 = -(a+b), s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = (a+b)^2 - 2(a^2+b^2) = -(a-b)^2$, 即 $k=1$ 时结论成立.

若 $k \le m$ 时结论成立, 则

$$
\begin{aligned}
s_{2m+1} &= \sigma_1 s_{2m} - \sigma_2 s_{2m-1} + \cdots + (-1)^{2m-1}\sigma_{2m}s_1 + (-1)^{2m}(2m+1)\sigma_{2m+1} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i-1}s_{2(m+1-i)} - \sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i}s_{2k+1-2i} + (2m+1)\sigma_{2m+1} \\
&= -\sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i-1}\sigma_{2(m+1-i)} + 2\sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i-1}a^{m+1-i}b^{m+1-i} - \sum_{i=1}^{m}\sigma_{2m}\sigma_{2m-2i+1} + (2m+1)\sigma_{2m+1} \\
&= -2\sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i-1}\sigma_{2(m+1-i)} + 2\sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i-1}a^{m+1-i}b^{m+1-i} + (2m+1)\sigma_{2m+1} \\
&= 2\sum_{i=1}^{m}\left(a^{2i-1}+b^{2i-1}\right)\left(a^{2m+2-2i}+b^{2m+2-2i}\right) + 2\sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i-1}a^{m+1-i}b^{m+1-i} + (2m+1)\sigma_{2m+1} \\
&= 2\sum_{i=1}^{m}\left(a^{2m+1}+b^{2m+1}-\sigma_{2i-1}a^{m+1-i}b^{m+1-i}\right) + 2\sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i-1}a^{m+1-i}b^{m+1-i} + (2m+1)\sigma_{2m+1} \\
&= \sigma_{2m+1} = -\left(a^{2m+1}+b^{2m+1}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{2m+2} &= \sigma_1 s_{2m+1} - \sigma_2 s_{2m} + \cdots + (-1)^{2m}\sigma_{2m+1}s_1 + (-1)^{2m+1}(2m+2)\sigma_{2m+2} \\
&= \sum_{i=1}^{m+1}\sigma_{2i-1}s_{2m+3-2i} - \sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i}s_{2k+2-2i} - (2m+2)\sigma_{2m+2} \\
&= \sum_{i=1}^{m+1}\sigma_{2i-1}\sigma_{2m+3-2i} + \sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i}\sigma_{2m+2-2i} - 2\sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i}a^{m+1-i}b^{m+1-i} - (2m+2)\sigma_{2m+2} \\
&= \sum_{i=1}^{m+1}\left(a^{2i-1}+b^{2i-1}\right)\left(a^{2m+3-2i}+b^{2m+3-2i}\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(a^{2i}+b^{2i}\right)\left(a^{2m+2-2i}+b^{2m+2-2i}\right) \\
&\quad - 2\sum_{i=1}^{m}\sigma_{2i}a^{m+1-i}b^{m+1-i} - (2m+2)\sigma_{2m+2} \\
&= -\sigma_{2m+2} + \sum_{i=1}^{m+1}\left(a^{2i-1}b^{2m+3-2i}+a^{2m+3-2i}b^{2i-1}\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(a^{2i}b^{2m+2-2i}+a^{2m+2-2i}b^{2i}\right) \\
&\quad - 2\sum_{i=1}^{m}\left(a^{m+1+i}b^{m+1-i}+a^{m+1-i}b^{m+1+i}\right) \\
&= -\sigma_{2m+2} + 2a^{m+1}b^{m+1} = -\left(a^{m+1}-b^{m+1}\right)^2.
\end{aligned}
$$

即当 $k = m+1$ 时结论成立. 证毕.

解法二: 利用

$$
s_k = \begin{vmatrix}
\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
3\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
4\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
(k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & \sigma_{k-5} & \sigma_{k-6} & \cdots & \sigma_1 & 1 \\
k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & \sigma_{k-5} & \cdots & \sigma_2 & \sigma_1
\end{vmatrix}
$$

进行繁琐的计算即可. □

习题 1.8.11: **自然数** $1,2,\ldots,n$ **的**循环排列**是指排列** $12\ldots n$ **与** $j(j+1)\ldots n12\ldots(j-1), j=2,3,\ldots,n$. **如果对于** $1,2,\ldots,n$ **的每个循环排列** $j(j+1)\ldots n,12\ldots(j-1)$, **多项式** $f(x_1,\ldots,x_n)$ **满足:**

$$f\left(x_j,x_{j+1},\cdots,x_n,x_1,x_2,\cdots,x_{j-1}\right)=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),$$

其中 $j=2,3,\ldots,n$, **则** $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ **称为在未定元** $x_1,x_2,\ldots,x_n$ **的**循环变换下不变. **证明: 循环变换下不变的多项式** $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ **可表为多项式** $g_j\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x_1\varepsilon^j+x_2\varepsilon^{2j}+\cdots+x_n\varepsilon^{nj}, j=0,1,2,\cdots,n-1$ **的多项式, 其中** $\varepsilon^k\neq 1, 0<k<n, \varepsilon^n=1$.

注*:* 此题有误, 可参考许以超《代数学引论》第 *730* 页第 *9* 题.

设多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在不定元的轮回排列 *(*即 n 个特殊的排列 $12\cdots n, n12\cdots(n-1),\cdots,23\cdots n1$*)* 下不变, 试证*:*

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum a_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}g_0^{\alpha_0}g_1^{\alpha_1}\cdots g_{n-1}^{\alpha_{n-1}},$$

其中和号遍历所有非负整数 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$, 使得 $\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(n-1)\alpha_{n-1}$ 能被 n 除尽, 且

$$g_j=x_1\varepsilon^j+x_2\varepsilon^{2j}+\cdots+x_n\varepsilon^{nj}\quad(j=0,1,2,\cdots,n-1),$$

又 $\varepsilon=e^{2\pi\mathrm{i}/n}$ 是 $x^n=1$ 的一个根.

或者其《线性代数与矩阵论》第 *45* 页习题 *1.7.10.*

设域 $\mathbb{F}$ 上多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在不定元的轮回排列, 即 n 个特殊的排列

$$12\cdots n,\quad n12\cdots(n-1),\quad \cdots,\quad 23\cdots n1$$

下不变. 试证*:*

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum a_{m_0m_1\cdots m_{n-1}}g_0^{m_0}g_1^{m_1}\cdots g_{n-1}^{m_{n-1}},$$

其中和号遍历所有非负整数 $m_0,m_1,\cdots,m_{n-1}$, 使得 $m_1+2m_2+\cdots+(n-1)m_{n-1}$ 能被 n 除得尽, $m_0+m_1+\cdots+m_{n-1}=\deg(f)$, 且 $g_j=x_1\varepsilon^j+x_2\varepsilon^{2j}+\cdots+x_n\varepsilon^{nj}, 0\le j\le n-1$. 又 $\varepsilon=\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ 是 $x^n=1$ 的本原单位根.

证: 证法一: 首先证明任意多元多项式 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum\limits_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in M}a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 均可由 $g_0,g_1,\cdots,g_{n-1}$ 表示, 注意到

$$\begin{aligned}
&g_0\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x_1+x_2+\cdots+x_n\\
&g_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\cdots+x_n\varepsilon^n\\
&\cdots\cdots\\
&g_{n-1}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x_1\varepsilon^{n-1}+x_2\varepsilon^{2(n-1)}+\cdots+x_n\varepsilon^{n(n-1)},
\end{aligned}$$

则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{n(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix}.$$

因 ε 为 1 的本原根, 故 $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1}$ 各不相同, 故上面的 Vandermonde 行列式不为 0, 即 $x_1, \cdots, x_n$ 可由 $g_0, \cdots, g_{n-1}$ 表示.

不妨设

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = & \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in M} a_{k_1 k_2 \cdots k_n} \left(a_{11} g_0 + a_{12} g_1 + \cdots a_{1n} g_{n-1}\right)^{k_1} \\ & \left(a_{21} g_0 + a_{22} g_1 + \cdots a_{2n} g_{n-1}\right)^{k_2} \cdots \left(a_{n1} g_0 + a_{n2} g_1 + \cdots a_{nn} g_{n-1}\right)^{k_n}, \end{aligned}$$

其中 $\deg f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. 注意到

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \sum_{(i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}) \in M} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} g_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots g_{n-1}^{i_{n-1}},$$

其中 $i_0 + i_1 + \cdots + i_{n-1} \le k_1 + k_2 + \cdots + k_n = \deg f$. 又

$$\begin{aligned} & f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = f\left(x_2, x_3, \cdots, x_1\right) \\ & = \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in M} a_{k_1 k_2 \cdots k_n} \left(a_{11} g_0 + a_{12} \frac{g_1}{\varepsilon} + \cdots a_{1n} \frac{g_{n-1}}{\varepsilon^{n-1}}\right)^{k_1} \left(a_{21} g_0 + a_{22} \frac{g_1}{\varepsilon} + \cdots a_{2n} \frac{g_{n-1}}{\varepsilon^{n-1}}\right)^{k_2} \\ & \cdots \left(a_{n1} g_0 + a_{n2} \frac{g_1}{\varepsilon} + \cdots a_{nn} \frac{g_{n-1}}{\varepsilon^{n-1}}\right)^{k_n} = \sum_{(i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}) \in M} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} g_0^{i_0} \frac{g_1^{i_1}}{\varepsilon^{i_1}} \cdots \frac{g_{n-1}^{i_{n-1}}}{\varepsilon^{i_{n-1}}} \\ & = \varepsilon^{-(i_1 + 2i_2 + \cdots + (n-1) i_{n-1})} \sum_{(i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}) \in M} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} g_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots g_{n-1}^{i_{n-1}} = \sum_{(i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}) \in M} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} g_0^{i_0} g_1^{i_1} \cdots g_{n-1}^{i_{n-1}}, \end{aligned}$$

故 $n \mid \left(i_1 + 2i_2 + \cdots + (n-1) i_{n-1}\right)$, 由循环不变性得

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \sum_{i_0 + i_1 + \cdots + i_{n-1} \le \deg f, n \mid (i_1 + 2i_2 + \cdots + (n-1) i_{n-1})} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} g_0^{i_0} g_1^{i_1} \cdots g_{n-1}^{i_{n-1}}$$

证法二: 记

$$h\left(t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}\right) = \sum a_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}} t_0^{\alpha_0} t_1^{\alpha_1} \cdots t_{n-1}^{\alpha_{n-1}},$$

则有

$$\begin{aligned} & f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = h\left(g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}\right) \\ & = h\left(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots + \varepsilon^n x_n, \cdots, \varepsilon^n x_1 + \varepsilon^{2n} x_2 + \cdots + \varepsilon^{n^2} x_n\right), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f\left(x_n, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\right) &= h\left(\varepsilon g_0, \varepsilon^2 g_1, \cdots, \varepsilon^n g_{n-1}\right) \\ &= \sum a_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}\left(\varepsilon g_0\right)^{\alpha_0}\left(\varepsilon^2 g_1\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\varepsilon^n g_{n-1}\right)^{\alpha_{n-1}}. \end{aligned}$$

结合 n 整除 $\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(n-1)\,\alpha_{n-1}$ 知上式即 $h\left(g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}\right)$, 从而

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = f\left(x_n, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\right).$$

□

第 2 章　行列式

2.1 数域 F 上 n 维向量空间

2.1.1 习　　题

习题 2.1.1: 设 $\xi_1 = (x_1, x_2)$ 与 $\xi_2 = (y_1, y_2)$ 是二维实向量. 指出下列二维实向量空间 $\mathbb{R}^2$ 上的二元实函数中哪些是二重线性函数?

(1) $f(\xi_1, \xi_2) \equiv 1$;

(2) $f(\xi_1, \xi_2) = (x_1 - y_1)^2 + x_2 y_2$;

(3) $f(\xi_1, \xi_2) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2$;

(4) $f(\xi_1, \xi_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$;

(5) $f(\xi_1, \xi_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

解: 由例 1 可知 $\mathbb{R}^2$ 上的二重线性函数只能是如下形式

$$f(\xi_1, \xi_2) = x_1 y_1 a + x_1 y_2 b + x_2 y_1 c + x_2 y_2 d,$$

其中 a, b, c, d 是 $\mathbb{R}$ 中任意四个数.

(1) 由

$$x_1 y_1 a + x_1 y_2 b + x_2 y_1 c + x_2 y_2 d$$

不可能恒等于 1 可知此函数不是二重线性函数;

(2) 由

$$x_1 y_1 a + x_1 y_2 b + x_2 y_1 c + x_2 y_2 d$$

不能写成 $f(\xi_1, \xi_2) = (x_1 - y^1)^2 + x_2 y_2$ 可知此函数不是二重线性函数;

(3) 由于

$$f(\xi_1, \xi_2) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2 = 4 x_1 y_1,$$

取 $a = 4, b = c = d = 0$ 即可得到, 故它为二重线性函数;

(4) 取 $a = d = 0, b = 1, c = -1$ 即可得到, 故它是二重线性函数;

(5) 取 $a = d = 1, b = c = 0$ 即可得到, 故它亦是二重线性函数.

□

习题 2.1.2: 设 $\xi_1 = (x_1, x_2, x_3)$ 与 $\xi_2 = (y_1, y_2, y_3)$ 是三维实向量, 而 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$. 证明: 三维实向量空间 $\mathbb{R}^3$ 上的每个反对称二重线性函数都可以表为

$$f(\xi_1, \xi_2) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + (x_1 y_3 - x_3 y_1) f(\varepsilon_1, \varepsilon_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) f(\varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

证: 显然 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=-f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)\Rightarrow f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=0$ 且 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=-f(\varepsilon_j,\varepsilon_i)$, 其中 $i\neq j, i,j=1,2,3$, 那么有

$$\begin{aligned}
&f(\xi_1,\xi_2)=f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3,y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+y_3\varepsilon_3)\\
&=x_1f(\varepsilon_1,y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+y_3\varepsilon_3)+x_2f(\varepsilon_2,y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+y_3\varepsilon_3)\\
&+x_3f(\varepsilon_3,y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+y_3\varepsilon_3)=x_1y_1f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+x_1y_2f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\\
&+x_1y_3f(\varepsilon_1,\varepsilon_3)+x_2y_1f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)+x_2y_2f(\varepsilon_2,\varepsilon_2)+x_2y_3f(\varepsilon_2,\varepsilon_3)\\
&+x_3y_1f(\varepsilon_3,\varepsilon_1)+x_3y_2f(\varepsilon_3,\varepsilon_2)+x_3y_3f(\varepsilon_3,\varepsilon_3)=0+x_1y_2f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\\
&+x_1y_3f(\varepsilon_1,\varepsilon_3)+x_2y_1(-f(\varepsilon_1,\varepsilon_2))+0+x_2y_3f(\varepsilon_2,\varepsilon_3)\\
&+x_3y_1(-f(\varepsilon_1,\varepsilon_3))+x_3y_2(-f(\varepsilon_2,\varepsilon_3))+0=(x_1y_2-x_2y_1)f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\\
&+(x_1y_3-x_3y_1)f(\varepsilon_1,\varepsilon_3)+(x_2y_3-x_3y_2)f(\varepsilon_2,\varepsilon_3).
\end{aligned}$$

□

习题 2.1.3: 设 $\xi_1=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $\xi_2=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 n 维实向量. 定义

$$f(\xi_1,\xi_2)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

验证 $f(\xi_1,\xi_2)$ 是 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上二重线性函数.

证: 设 $\eta=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\zeta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 则

$$\begin{aligned}
&f(\lambda\eta+\mu\zeta,\xi_2)=(\lambda a_1+\mu b_1)y_1+(\lambda a_2+\mu b_2)y_2+\cdots+(\lambda a_n+\mu b_n)y_n\\
&=(\lambda a_1y_1+\lambda a_2y_2+\cdots+\lambda a_ny_n)+(\mu b_1y_1+\mu b_2y_2+\cdots+\mu b_ny_n)\\
&=\lambda(a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n)+\mu(b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_ny_n)\\
&=\lambda f(\eta,\xi_2)+\mu f(\zeta,\xi_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f(\xi_1,\lambda\eta+\mu\zeta)=x_1(\lambda a_1+\mu b_1)+x_2(\lambda a_2+\mu b_2)+\cdots+x_n(\lambda a_n+\mu b_n)\\
&=(\lambda x_1a_1+\lambda x_2a_2+\cdots+\lambda x_na_n)+(\mu x_1b_1+\mu x_2b_2+\cdots+\mu x_nb_n)\\
&=\lambda(x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n)+\mu(x_1b_1+x_2b_2+\cdots+x_nb_n)\\
&=\lambda f(\xi_1,\eta)+\mu f(\xi_1,\zeta).
\end{aligned}$$

□

2.2 n 阶行列式的定义与性质

2.2.1 习　　题

习题 2.2.1: 在自然数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列中哪个排列的逆序数最大?

✎ **解:** 对于 n, 产生的逆序数最多为 $n-1$, 对于 $n-1$, 产生的逆序数最多为 $n-2,\cdots$, 对于 2, 产生的逆序数最多为 1. 由此可知所有排列中逆序数最大应该为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{(n-1)n}{2}$, 这时有排列 $n,n-1,\cdots,1$ 满足要求. □

习题 2.2.2: 自然数 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数与正序数之和等于多少?

✎ **解:** 对于 i_k, 在它前面小于它的数的数目和在它后面小于它的数的数目之和为 i_k-1, 故其逆序数与正序数之和为 i_k-1, 由此可知任意一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数与正序数之和等于

$$\sum_{k=1}^{n}(i_k-1)=\frac{(n-1)n}{2}.$$

□

习题 2.2.3: 证明: 自然数 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个排列都可以经过至多 $n-1$ 次对换变为标准排列 $12\cdots n$.

☞ **证:** 考察任意一个排列 $i_1^0i_2^0\cdots i_n^0$, 我们先将排列中的 1 与 i_1^0 对换, 得到新的排列 $1i_2^1\cdots i_n^1$; 再讲 2 与 i_2^1 对换, 得到新的排列 $12\cdots i_n^2$; 类似地, 将排列中的 $n-1$ 与 i_{n-1}^{n-2} 对换, 得到标准的排列 $12\cdots n$, 则经过 $n-1$ 次对换, 我们必可得到标准排列, 换句话说, 自然数 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个排列都可以经过至多 $n-1$ 次对换变为标准排列 $12\cdots n$. □

习题 2.2.4: 证明: 在自然数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列中, 一定存在这样的排列, 它不能经过小于 $n-1$ 次对换变为标准排列 $12\cdots n$.

☞ **证:** 考察排列 $n12\cdots(n-1)$, 此排列至少得经过 $n-1$ 次对换才能的得到标准排列 $12\cdots n$. □

习题 2.2.5: 确定以下的奇偶性符号:

(1) $\delta\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\n&n-1&n-2&\cdots&2&1\end{pmatrix}$;

(2) $\delta\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&n&n-1&\cdots&3&2\end{pmatrix}$;

(3) $\delta\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n-1&n&n+1&n+2&\cdots&2n-1&2n\\2&4&\cdots&2n-2&2n&1&3&\cdots&2n-3&2n-1\end{pmatrix}$;

(4) $\delta\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n-1&n&n+1&n+2&\cdots&2n-1&2n\\1&3&\cdots&2n-3&2n-1&2&4&\cdots&2n-2&2n\end{pmatrix}$.

✎ **解:**

(1) 考察排列中的 k, 在它后面有 $k-1$ 个比它小的数, 故由它产生的逆序数为 $k-1$, 由此得

$$\delta\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\n&n-1&n-2&\cdots&2&1\end{pmatrix}=(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}.$$

注意到

$$(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}=\begin{cases}1, & n=4k-3\text{ 或 }4k\\-1, & n=4k-2\text{ 或 }4k-1\end{cases}.$$

(2)

$$\delta\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{0+\sum\limits_{k=2}^{n}(k-2)} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}},$$

注意到

$$(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} = \begin{cases} 1, & n=4k-3 \text{ 或 } 4k-2 \\ -1, & n=4k-1 \text{ 或 } 4k \end{cases}.$$

(3)

$$\delta\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n-2 & 2n & 1 & 3 & \cdots & 2n-3 & 2n-1 \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n} k} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \begin{cases} 1, & n=4k-1 \text{ 或 } 4k \\ -1, & n=4k-3 \text{ 或 } 4k-2 \end{cases}$$

(4)

$$\delta\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-3 & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{0+\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} = \begin{cases} 1, & n=4k-3 \text{ 或 } 4k \\ -1, & n=4k-2 \text{ 或 } 4k-1 \end{cases}.$$

□

习题 2.2.6: 确定正整数 i 和 j 的值, 使得 7 阶行列式含有以下的项:

(1) $-a_{62}a_{i5}a_{33}a_{j4}a_{46}a_{21}a_{77}$;

(2) $a_{1i}a_{24}a_{31}a_{47}a_{55}a_{63}a_{71}$.

✎ **解:**

(1) $i=5, j=1$, 此时有

$$\delta\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = (-1)^{3+0+1+2+1+0} = -1.$$

(2) $i=6, j=2$, 此时有

$$\delta\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{5+3+0+3+2+1} = 1.$$

□

习题 2.2.7: 写出 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

中的 x^3 与 x^4 项.

✎ 解: 由

$$(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + (-1)^{3+1+1} a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} = -2x^3 - 3x^3 = -5x^3$$

以及

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 10x^4$$

知 x^3 与 x^4 项分别为 $-5x^3$ 和 $10x^4$. □

习题 2.2.8: 求下列 n 阶行列式的和:

$$\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}.$$

✎ 解: 当 $n=1$ 时, 等于 a_{11}.

$n \geq 2$ 时, 当 $j_k = j_m, k \neq m$ 时, 行列式中第 k 列和第 m 列相同, 行列式值为 0, 故只需考察 $j_k \neq j_m$ 的情形. 此时 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 有 $n!$ 中不同的排列, 且对任意排列排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$, 均存在另一排列 $j_2, j_1, \cdots, j_n$, 因为 $2A_n^{n-2} = n!$, 此时它们组成的行列式值为 0, 从而

$$\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} = 0.$$

□

习题 2.2.9: 计算以下的行列式:

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; (ii) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$;

(iii) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$; (iv) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$.

✎ 解:

(i) 解法一: 记 $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$, 且 ω 是方程 $x^4 = 1$ 的本原单位根, 即 $\omega = e^{\mathrm{i}\pi/2}$. 由

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) & f(\omega) & f(\omega^2) & f(\omega^3) \\ f(1) & \frac{1}{\omega}f(\omega) & \frac{1}{\omega^2}f(\omega^2) & \frac{1}{\omega^3}f(\omega^3) \\ f(1) & \frac{1}{\omega^2}f(\omega) & \frac{1}{\omega^4}f(\omega^2) & \frac{1}{\omega^6}f(\omega^3) \\ f(1) & \frac{1}{\omega^3}f(\omega) & \frac{1}{\omega^6}f(\omega^2) & \frac{1}{\omega^9}f(\omega^3) \end{pmatrix}$$

可知

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{vmatrix} = f(1) \cdot \frac{f(\omega)}{\omega^3} \cdot \frac{f(\omega^2)}{\omega^6} \cdot \frac{f(\omega^3)}{\omega^9} \begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= f(1) \cdot \frac{f(\omega)}{\omega^3} \cdot \frac{f(\omega^2)}{\omega^6} \cdot \frac{f(\omega^3)}{\omega^9} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{vmatrix},$$

由此得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = f(1) \cdot \frac{f(\omega)}{\omega^3} \cdot \frac{f(\omega^2)}{\omega^6} \cdot \frac{f(\omega^3)}{\omega^9} = 160.$$

解法二:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{-2r_1+r_2, -3r_1+r_3, -4r_1+r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-2r_2+r_3, -7r_2+r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

$$= 160.$$

(ii)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 9 & -24 & 21 & 30 \\ 2 & -9 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{5c_1+c_2,-2c_1+c_3,-3c_1+c_4}} - \frac{1}{420}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 11 & -1 & -15 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{-7c_4+c_2,-c_4+c_3}} - \frac{1}{420}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 3 & 116 & 14 & -15 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{-8c_3+c_2}} - \frac{1}{420}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 14 & -15 \end{vmatrix} = \frac{1}{420}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -15 & 14 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{35}.$$

(iii) 解法一:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} \underline{\underline{-\frac{a}{b}c_3+c_2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & b & c \\ -a & -\frac{ad}{b} & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & \frac{1}{b}af-e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{-\frac{a}{b}r_3+r_2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & d & e-\frac{1}{b}af \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & \frac{1}{b}af-e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c \\ d & e-\frac{1}{b}af \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -b & -d \\ -c & \frac{1}{b}af-e \end{vmatrix} = (af+cd-be)^2.$$

解法二: 注意到

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} af+cd-be & & & \\ & af+cd-be & & \\ & & af+cd-be & \\ & & & af+cd-be \end{vmatrix},$$

且很难注意到

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{vmatrix},$$

又 a^2f^2 项的系数为 1, 故

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af+cd-be)^2.$$

(iv)

$$|A|^2 = |A| \cdot \left|A^T\right| = \left|AA^T\right| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & & & \\ & a^2+b^2+c^2+d^2 & & \\ & & a^2+b^2+c^2+d^2 & \\ & & & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4.$$

由行列式中 a^4 项的系数为 1 可知

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2.$$

□

习题 2.2.10: 证明以下等式:

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a^4$;

(2) 设 $a_{ij} = a_{i,j-1} + a_{i-1,j}, i,j = 1,2,\cdots,n$, 则

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1.$$

☞ 证:

(1)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{-r_1+r_2,-r_1+r_3,-r_1+r_4} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{-2r_2+r_3,-3r_2+r_4} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{-3r_3+r_4} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{-r_{i-1}+r_i,-c_{i-1}+c_i,2\le i\le n} \begin{vmatrix} 1 & a_{12}-1 & a_{13}-a_{12} & \cdots & a_{1n}-a_{1,n-1} \\ 0 & 1 & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \\
&= \cdots = \begin{vmatrix} 1 & a_{12}-1 & a_{13}-a_{12} & \cdots & a_{1n}-a_{1,n-1} \\ 0 & 1 & a_{12}-1 & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

□

习题 2.2.11: 设 $f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)$ 是 $\mathbb{F}^n$ 上 k 元函数. 如果对任意整数 $i,j,1\le i,j\le n$, 均有

$$f(\xi_1,\cdots,\xi_i,\cdots,\xi_j,\cdots,\xi_k)=f(\xi_1,\cdots,\xi_j,\cdots,\xi_i,\cdots,\xi_k),$$

则 $f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)$ 称为对称的. 数域 $\mathbb{F}^n$ 上规范对称 n 重线性函数称为 n 阶积和式 (Permanent), 记为 $\mathrm{Per}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$. 记 $\xi_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots,n$, 并记 n 阶方阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

则 n 阶积和式 $\mathrm{Per}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 也记为 $\mathrm{Per}A$. 证明:

$$\mathrm{Per}A=\sum_{\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

注: 本题有点问题, 我们可添加额外条件: 若存在 i,j 使得 $\varepsilon_i=\varepsilon_j$, 则

$$\mathrm{Per}\left(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_i,\cdots,\varepsilon_j,\cdots,\varepsilon_k\right)=0,$$

其中 ε_j 是第 j 个分量为 1, 其它分量全为 0 的 n 维向量.

证: 记 $\xi_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}\varepsilon_j$, 其中 ε_j 是第 j 个分量为 1, 其它分量全为 0 的 n 维向量. 由于 $\mathrm{Per}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是 n 重线性的, 因此

$$\mathrm{Per}\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right)=\mathrm{Per}\left(\sum_{i_1=1}^{n}a_{1i_1}\varepsilon_{i_1},\xi_2,\cdots,\xi_n\right)=\sum_{i_1=1}^{n}a_{1i_1}\mathrm{Per}\left(\varepsilon_{i_1},\xi_2,\cdots,\xi_n\right).$$

对 $\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n$ 分别作同样考察, 得到

$$\mathrm{Per}\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right)=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_n\le n}^{n}a_{1i_1}a_{1i_2}\cdots a_{1i_n}\mathrm{Per}\left(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},\cdots,\varepsilon_{i_n}\right).$$

因为当 $\varepsilon_i=\varepsilon_j$ 时,

$$\mathrm{Per}\left(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_i,\cdots,\varepsilon_j,\cdots,\varepsilon_k\right)=0.$$

因此

$$\mathrm{Per}\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right)=\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\cdots,i_n\le n\\ i_1,i_2,\cdots,i_n\text{两两不等}}}^{n}a_{1i_1}a_{1i_2}\cdots a_{1i_n}\mathrm{Per}\left(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},\cdots,\varepsilon_{i_n}\right).$$

当 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 两两不等时, $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的排列, 因此

$$\mathrm{Per}\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right)=\sum_{\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\mathrm{Per}\left(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},\cdots,\varepsilon_{i_n}\right).$$

因为 $\mathrm{Per}\,(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是规范的, 所以 $\mathrm{Per}\,(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=1$, 再由 $\mathrm{Per}\,(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是对称的, 我们可知当 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 两两不等时,

$$\mathrm{Per}\,(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},\cdots,\varepsilon_{i_n})=1.$$

进而可得

$$\mathrm{Per}A=\mathrm{Per}\,(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\sum_{\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

□

2.3 Laplace 展开定理

2.3.1 习　　题

习题 2.3.1: 利用 Laplace 展开定理计算下列行列式:

(i) $\begin{vmatrix}1&2&2&1\\0&1&0&2\\2&0&1&1\\0&2&0&1\end{vmatrix}$; (ii) $\begin{vmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}$;

(iii) $\begin{vmatrix}1&1&0&0&0&1\\x_1&x_2&0&0&0&x_3\\a_1&b_1&1&1&1&c_1\\a_2&b_2&x_1&x_2&x_3&c_2\\a_3&b_3&x_1^2&x_2^2&x_3^2&c_3\\x_1^2&x_2^2&0&0&0&x_3^2\end{vmatrix}$; (iv) $\begin{vmatrix}\lambda&0&0&\cdots&0&a\\x_1&c&b&\cdots&b&y_1\\x_2&b&c&\cdots&b&y_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\x_n&b&b&\cdots&c&y_n\\a&0&0&\cdots&0&\lambda\end{vmatrix}$.

✎ **解:**

(i) 由于行列式的第 1 列和第 3 列上零的个数最多, 所以将行列式按第 1 列、第 3 列作 Laplace

展开, 得到

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \sum_{1\le i_1<i_2\le 4} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\left((-1)^{i_1+i_2+1+3}A\begin{pmatrix} i_3 & i_4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) \\
&= (-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3+1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{2+4+1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4+1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 9.
\end{aligned}$$

(ii) 由于行列式的第 1 列和第 4 列上零的个数最多, 所以将行列式按第 1 列、第 4 列作 Laplace 展开, 得到

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= \sum_{1\le i_1<i_2\le 4} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\left((-1)^{i_1+i_2+1+4}A\begin{pmatrix} i_3 & i_4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) \\
&= (-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+1+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{1+4+1+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3+1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{2+4+1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4+1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-4) + 12 + 1 + (-4) = 5.
\end{aligned}$$

(iii) 将行列式按第 1 行、第 2 行作 Laplace 展开, 得到

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix} = \sum_{1\le j_1<j_2\le 6} A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}\left((-1)^{1+2+j_1+j_2} A\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ j_3 & j_4 & j_5 & j_6 \end{pmatrix}\right) \\
&= (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & c_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \\
&+ (-1)^{1+6+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 1 & 1 \\ b_2 & x_1 & x_2 & x_3 \\ b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2^2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \\
&+ (-1)^{2+6+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & x_1 & x_2 & x_3 \\ a_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\
&= (x_2 - x_1)\, x_3^2\, (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\
&- (x_3 - x_1)\, x_2^2\, (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\
&+ (x_3 - x_2)\, x_1^2\, (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\
&= (x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2
\end{aligned}$$

(iv) 首先算得

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} c & b & \cdots & b \\ b & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & c \end{vmatrix} \xlongequal{-r_1 + r_i, 2 \le i \le n} \begin{vmatrix} c & b & \cdots & b \\ b-c & c-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-c & \cdots & 0 & c-b \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{-\frac{b}{c-b} r_i + r, 2 \le i \le n_1} \begin{vmatrix} c+(n-1)b & 0 & \cdots & 0 \\ b-c & c-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-c & \cdots & 0 & c-b \end{vmatrix} \\
&= [c + (n-1)b](c-b)^{n-1}.
\end{aligned}$$

将行列式按第 1 列、第 $n+2$ 列作 Laplace 展开, 得到

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\
x_1 & c & b & \cdots & b & y_1 \\
x_2 & b & c & \cdots & b & y_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_n & b & b & \cdots & c & y_n \\
a & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda
\end{vmatrix} \\
=&\sum_{1\le i_1<i_2\le n+2} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ 1 & n+2 \end{pmatrix}\left((-1)^{i_1+i_2+1+(n+2)} A\begin{pmatrix} i_3 & i_4 & \cdots & i_{n+2} \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}\right) \\
=&(-1)^{1+(n+2)+1+(n+2)}\begin{vmatrix} \lambda & a \\ a & \lambda \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}
c & b & \cdots & b \\
b & c & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & b \\
b & \cdots & b & c
\end{vmatrix} \\
=&\left(\lambda^2-a^2\right)\left[c+(n-1)\,b\right](c-b)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

□

习题 2.3.2: 设 A, B, C 和 D 依次是由下表

$$
\begin{pmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & d_3
\end{pmatrix}
$$

中删去第 $1,2,3$ 和 4 列而得到的三阶行列式. 证明:

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\
a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\
a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3
\end{vmatrix} = AD-BC.
$$

☞ **证:** 将行列式按第 1 行、第 2 行以及第 3 行作 Laplace 展开, 得到

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0\\
a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0\\
a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\
0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\
0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3
\end{vmatrix}\\
=&\sum_{1\le j_1<j_2<j_3\le 6} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ j_1 & j_2 & j_3\end{pmatrix}\left((-1)^{1+2+3+j_1+j_2+j_3}A\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6\\ j_4 & j_5 & j_6\end{pmatrix}\right)\\
=&(-1)^{1+2+3+1+2+3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1\\ b_2 & c_2 & d_2\\ b_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}\\
&+(-1)^{1+2+4+1+2+3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}\\
=&AD-BC.
\end{aligned}
$$

□

习题 2.3.3: 记

$$
D=\begin{vmatrix}
a_1x_1 & b_1x_1 & a_1x_2 & b_1x_2 & a_1x_3 & b_1x_3\\
a_2x_1 & b_2x_1 & a_2x_2 & b_2x_2 & a_2x_3 & b_2x_3\\
a_1y_1 & b_1y_1 & a_1y_2 & b_1y_2 & a_1y_3 & b_1y_3\\
a_2y_1 & b_2y_1 & a_2y_2 & b_2y_2 & a_2y_3 & b_2y_3\\
a_1z_1 & b_1z_1 & a_1z_2 & b_1z_2 & a_1z_3 & b_1z_3\\
a_2z_1 & b_2z_1 & a_2z_2 & b_2z_2 & a_2z_3 & b_2z_3
\end{vmatrix},
$$

$$
\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}.
$$

证明: $D=\delta^3\Delta^2$.

✎ **解:** 首先注意到

$$
\begin{vmatrix}
x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3\\
y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & y_3\\
z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3
\end{vmatrix}
\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3, r_3\leftrightarrow r_5, r_4\leftrightarrow r_5} -
\begin{vmatrix}
x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0\\
y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 & 0\\
z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3\\
0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & y_3\\
0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3
\end{vmatrix} = -\Delta^2.
$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4, r_3 \leftrightarrow r_4, r_4 \leftrightarrow r_5} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\delta^3.$$

从而

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_1x_1 & b_1x_1 & a_1x_2 & b_1x_2 & a_1x_3 & b_1x_3 \\ a_2x_1 & b_2x_1 & a_2x_2 & b_2x_2 & a_2x_3 & b_2x_3 \\ a_1y_1 & b_1y_1 & a_1y_2 & b_1y_2 & a_1y_3 & b_1y_3 \\ a_2y_1 & b_2y_1 & a_2y_2 & b_2y_2 & a_2y_3 & b_2y_3 \\ a_1z_1 & b_1z_1 & a_1z_2 & b_1z_2 & a_1z_3 & b_1z_3 \\ a_2z_1 & b_2z_1 & a_2z_2 & b_2z_2 & a_2z_3 & b_2z_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \delta^3\Delta^2. \end{aligned}$$

□

习题 2.3.4: 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的元素 a_{ij} 都是变量 x 的可微函数, $1 \le i, j \le n$. 证明:

$$\frac{\mathrm{d}\,(\det A)}{\mathrm{d}x} = \sum_{1 \le i.j \le n} \frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}x} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式, $1 \le i, j \le n$.

证: 证法一: 由于

$$\det A = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}} \delta \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

又

$$\delta\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}=(-1)^{k-1}\delta\begin{pmatrix}k&1&2&\cdots&k-1&k+1&\cdots&n\\i_k&i_1&i_2&\cdots&i_{k-1}&i_{k+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$
$$=(-1)^{(k-1)+(i_k-1)}\delta\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k-1&k+1&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_{k-1}&i_{k+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$
$$=(-1)^{k+i_k}\delta\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k-1&k+1&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_{k-1}&i_{k+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix}.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}\left(\det A\right)}{\mathrm{d}x}=\sum_{\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}}\delta\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{k-1,i_{k-1}}\frac{\mathrm{d}a_{ki_k}}{\mathrm{d}x}a_{k+1,i_{k+1}}\cdots a_{ni_n}$$
$$=\sum_{\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}}(-1)^{k+i_k}\frac{\mathrm{d}a_{ki_k}}{\mathrm{d}x}\delta\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k-1&k+1&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_{k-1}&i_{k+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{k-1,i_{k-1}}a_{k+1,i_{k+1}}\cdots a_{ni_n}=\sum_{1\le i,j\le n}\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}x}A_{ij}.$$

证法二: 由行列式定义

$$\det A=\sum_{\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}}\delta\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}a_{1j_1}\left(x\right)a_{2j_2}\left(x\right)\cdots a_{nj_n}\left(x\right).$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(\det A)}{\mathrm{d}x} &= \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}} \delta\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \left[a_{1j_1}(x)\,a_{2j_2}(x)\cdots a_{nj_n}(x)\right]' \\
&= \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}} \delta\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1j_1}(x)\cdots a'_{ij_i}(x)\cdots a_{nj_n}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}} \delta\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} a_{1j_1}(x)\cdots a'_{ij_i}(x)\cdots a_{nj_n}(x) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_i,
\end{aligned}$$

其中 A_i 为对 A 的第 i 行求导, 而其余行不变所得到的矩阵 ($i = 1, 2, \cdots, n$). 把 A_i 按第 i 行作 Laplace 展开得

$$A_i = a'_{i1}(x)\,A_{i1} + \cdots + a'_{ij}(x)\,A_{ij} + \cdots + a'_{in}(x)\,A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(x)\,A_{ij}.$$

故

$$\frac{\mathrm{d}(\det A)}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(x)\,A_{ij} = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}x} A_{ij}.$$

□

习题 2.3.5: 给定 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$. 证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ a_{31} - a_{11} & a_{32} - a_{12} & \cdots & a_{3n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \cdots & a_{nn} - a_{1n} \end{vmatrix} = \sum_{1\le i.j\le n} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是行列式 $\det A$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, $1 \le i, j \le n$.

☞ **证:**

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\
a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \cdots & a_{3n}-a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n}
\end{vmatrix}
$$

$$
\underline{\underline{\text{升阶}}}
\begin{vmatrix}
1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{1,n-1} & a_{2n}-a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & a_{n-1,1}-a_{11} & a_{n-1,2}-a_{12} & \cdots & a_{n-1,n-1}-a_{1,n-1} & a_{n-1,n}-a_{1n} \\
0 & a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{1,n-1} & a_{nn}-a_{1n}
\end{vmatrix}
$$

$$
\underline{\underline{r_1+r_i, 3\le i\le n}}
\begin{vmatrix}
1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

再将行列式按第 1 列 Laplace 展开, 再按全为 1 的那列 Laplace 展开后即可得证. □

习题 2.3.6: 证明: 如果 n 阶行列式 Δ 的某一行 (或列) 的所有元素都是 1, 则 Δ 的所有元素的代数余子式之和等于 Δ.

☞ **证:** 假设 Δ 的第 i 行全为 1, 考察

$$
0=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n-2} & a_{i-1,n-1} & a_{i-1,n} \\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
1 & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n-2} & a_{i+1,n-1} & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{vmatrix}=\Delta-\sum_{1\le i,j\le n}A_{ij}.
$$

后面等式可以按第 1 列, 第 1 行进行 Laplace 展开得到. 因此

$$
\Delta=\sum_{1\le i,j\le n}A_{ij}.
$$

□

习题 2.3.7: 用 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 1$ 替换 n 阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

的第 i 行, 得到的行列式记为 $\Delta_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 证明:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n.$$

证:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & 1 \\ 1 & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ 1 & a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 1 \end{vmatrix} = \Delta - \Delta_1 - \Delta_2 - \cdots - \Delta_n$$

后面等式可以按第 1 列进行 Laplace 展开得到. 因此

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n.$$

□

习题 2.3.8: 给定 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z \det A - \sum_{1 \le i,j \le n} A_{ij} x_i y_j,$$

其中 A_{ij} 是行列式 $\det A$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式, $1 \le i, j \le n$.

☞ **证:** 将行列式依次按第 $n+1$ 行与第 n 列进行 Laplace 展开得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = y_1(-1)^{n+2} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+y_n(-1)^{2n+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & x_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & x_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & x_n \end{vmatrix} + z\det A = z\det A$$

$$+y_1(-1)^{n+2}\left[x_1(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{1+1}A_{11}+\cdots+x_n(-1)^{2n}\cdot(-1)^{n+1}A_{n1}\right]+\cdots$$

$$+y_n(-1)^{2n+1}\left[x_1(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{1+n}A_{1n}+\cdots+x_n(-1)^{2n}\cdot(-1)^{n+n}A_{nn}\right]$$

$$= z\det A - \sum_{1\le i.j\le n} A_{ij}x_iy_j,$$

□

习题 2.3.9: 设 $b_{ij}=(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})-a_{ij}, 1\le i,j\le n$. 证明:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

如果 $b_{ij}=(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})-ka_{ij}$, 其中 $1\le k\le n, 1\le i,j\le n$, 结论又怎样?

☞ **证:** 记 $s_i=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}, i=1,2,\cdots,n$, 则

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1-a_{11} & s_1-a_{12} & \cdots & s_1-a_{1n} \\ s_2-a_{21} & s_2-a_{22} & \cdots & s_2-a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n-a_{n1} & s_n-a_{n2} & \cdots & s_n-a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & s_1-a_{11} & s_1-a_{12} & \cdots & s_1-a_{1n} \\ s_2 & s_2-a_{21} & s_2-a_{22} & \cdots & s_2-a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_n-a_{n1} & s_n-a_{n2} & \cdots & s_n-a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{-c_1+c_i, 2\le i\le n+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ s_1 & -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ s_2 & -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{c_i+c_1, 2\le i\le n+1} \begin{vmatrix} 1-n & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (1-n)(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

如果 $b_{ij}=(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})-ka_{ij}$,

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 - ka_{11} & s_1 - ka_{12} & \cdots & s_1 - ka_{1n} \\ s_2 - ka_{21} & s_2 - ka_{22} & \cdots & s_2 - ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n - ka_{n1} & s_n - ka_{n2} & \cdots & s_n - ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & s_1 - ka_{11} & s_1 - ka_{12} & \cdots & s_1 - ka_{1n} \\ s_2 & s_2 - ka_{21} & s_2 - ka_{22} & \cdots & s_2 - ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_n - ka_{n1} & s_n - ka_{n2} & \cdots & s_n - ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-c_1 + c_i, 2 \le i \le n+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ s_1 & -ka_{11} & -ka_{12} & \cdots & -ka_{1n} \\ s_2 & -ka_{21} & -ka_{22} & \cdots & -ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & -ka_{n1} & -ka_{n2} & \cdots & -ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\frac{1}{k}c_i + c_1, 2 \le i \le n+1} \begin{vmatrix} 1 - \frac{n}{k} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -ka_{11} & -ka_{12} & \cdots & -ka_{1n} \\ 0 & -ka_{21} & -ka_{22} & \cdots & -ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -ka_{n1} & -ka_{n2} & \cdots & -ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \left(1 - \frac{n}{k}\right)(-k)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-k)^{n-1}(n-k) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

□

❀ **注:** 事实上, 当 $b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - a_{ij}$ 时,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

如果 $b_{ij}=(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})-ka_{ij}$,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-k \end{pmatrix}.$$

接着利用 $|AB|=|A|\cdot|B|$ 即可.

除此之外, 我们也可以利用

$$\det\left(I_n-\alpha\alpha^T\right)=\det\left(I_n-\alpha^T\alpha\right).$$

得到

$$\det B=\det\left(s_i-a_{ij}\right)=\left|A\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}-A\right|$$
$$=\det A\cdot(-1)^n\left|I-\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right|=\det A\cdot(-1)^n\left|I-\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right|$$
$$=(-1)^n(1-n)\det A.$$

习题 2.3.10: 计算 $2n$ 阶行列式

$$\Delta_{2n}=\begin{vmatrix} a_1 & & & & & & & b_{2n} \\ & a_2 & & & & & b_{2n-1} & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_n & b_{n+1} & & & \\ & & & b_n & a_{n+1} & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b_2 & & & & & a_{2n-1} & \\ b_1 & & & & & & & a_{2n} \end{vmatrix},$$

其中未写出的元素都是零.

✎ **解:** 不断地对行列式第 1 行和最后一行进行 Laplace 展开, 我们有

$$
\begin{aligned}
\Delta_{2n} &= \begin{vmatrix}
a_1 & & & & & & b_{2n} \\
& a_2 & & & & b_{2n-1} & \\
& & \ddots & & \iddots & & \\
& & & a_n \quad b_{n+1} & & & \\
& & & b_n \quad a_{n+1} & & & \\
& & \iddots & & \ddots & & \\
& b_2 & & & & a_{2n-1} & \\
b_1 & & & & & & a_{2n}
\end{vmatrix} \\
&= (a_1a_{2n} - b_1b_{2n}) \begin{vmatrix}
a_2 & & & & b_{2n-1} \\
& \ddots & & \iddots & \\
& & a_n \quad b_{n+1} & & \\
& & b_n \quad a_{n+1} & & \\
& \iddots & & \ddots & \\
b_2 & & & & a_{2n-1}
\end{vmatrix} \\
&= \cdots = \prod_{k=1}^{n} (a_k a_{2n+1-k} - b_k b_{2n+1-k}).
\end{aligned}
$$

□

2.4 Cramer 法则

2.4.1 习　　题

习题 2.4.1: 解下列线性方程组:

$$
(1) \begin{cases}
x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\
3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\
2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4
\end{cases};
$$

$$
(2) \begin{cases}
2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\
3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\
3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\
3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6
\end{cases}.
$$

✎ **解:**

(1)

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\3&-1&-1&-2\\2&3&-1&-1\\1&2&3&-1\end{vmatrix}=-153,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\-4&-1&-1&-2\\-6&3&-1&-1\\-4&2&3&-1\end{vmatrix}=153,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\3&-4&-1&-2\\2&-6&-1&-1\\1&-4&3&-1\end{vmatrix}=153,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&1&3\\3&-1&-4&-2\\2&3&-6&-1\\1&2&-4&-1\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&1&2&1\\3&-1&-1&-4\\2&3&-1&-6\\1&2&3&-4\end{vmatrix}=-153.$$

(2)

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&3&2\\3&3&3&2\\3&-2&-1&2\\3&-1&3&-1\end{vmatrix}=185,\Delta_1=\begin{vmatrix}4&-1&3&2\\6&3&3&2\\6&-2&-1&2\\6&-1&3&-1\end{vmatrix}=370,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&4&3&2\\3&6&3&2\\3&6&-1&2\\3&6&3&-1\end{vmatrix}=0=\Delta_3=\Delta_4.$$

因此线性方程具有唯一解 $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\frac{\Delta_2}{\Delta},\frac{\Delta_3}{\Delta},\frac{\Delta_4}{\Delta}\right)=(2,0,0,0)$.

□

习题 2.4.2: 设 a,b,c 和 d 是不全为零的实数. 证明: 线性方程组

$$\begin{cases}ax+by+cz+dt=0\\bx-ay+dz-ct=0\\cx-dy-az+bt=0\\dx+cy-bz-at=0\end{cases}.$$

具有唯一解, 其中 x,y,z 和 t 是未知数.

证: 记线性方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&-a&d&-c\\c&-d&-a&b\\d&c&-b&-a\end{pmatrix},A^T=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&-a&-d&c\\c&d&-a&-b\\d&-c&b&-a\end{pmatrix}.$$

因此

$$\left|AA^T\right| = |A|^2 = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & & & \\ & a^2+b^2+c^2+d^2 & & \\ & & a^2+b^2+c^2+d^2 & \\ & & & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$
$$= \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4.$$

又 $|A|$ 中 a^4 的系数为 -1, 所以

$$\Delta = |A| = -\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2 \neq 0,$$

由 Cramer 法则可知线性方程组具有唯一解. □

习题 2.4.3: 求下列线性方程组的解:

$$(1)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=n \\ x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=\frac{n(n+1)}{2} \\ x_1+3x_2+6x_3+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}x_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ \vdots \\ x_1+nx_2+\frac{n(n+1)}{2}x_3+\cdots+\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}x_n=\frac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots n} \end{cases};$$

$$(2)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n=1 \\ x_1+0+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \\ x_1+x_2+0+\cdots+x_{n-1}+x_n=3 \\ \vdots \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+0=n \end{cases}.$$

解:

(1) 对于 Δ_i, 我们把除第 i 列的其他列的 -1 倍加到第 i 列上, 得到行列式 Δ. 因此线性方程具有唯一解 $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\frac{\Delta_2}{\Delta},\frac{\Delta_3}{\Delta},\cdots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)=(1,1,1,\cdots,1)$.

(2) 将以上 n 个方程相加得到

$$nx_1+(n-1)\,x_2+(n-1)\,x_3+\cdots+(n-1)\,x_{n-1}+(n-1)\,x_n=\frac{n\,(n+2)}{2}.$$

联立第一个方程, 得到 $x_1=\frac{n^2-n+2}{2}$, 再依次联立第 $2,3,\cdots,n$ 个方程, 解得 $x_2=-1, x_3=-2,\cdots,x_n=-(n-1)$, 因此方程的解为 $\left(\frac{n^2-n+2}{2},-1,-2,\cdots,-(n-1)\right)$.

□

习题 2.4.4: 设三次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 满足 $f(-1)=0, f(1)=4, f(2)=3, f(3)=16$. 求 $f(x)$.

✎ **解:** 解法一: 由题意, 我们得到方程组 $\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 3 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 16 \end{cases}$. 系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 48.$$

又

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \\ 16 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 336, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 16 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 16 & 27 \end{vmatrix} = -240, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 96.$$

因此方程的解为 $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \frac{\Delta_3}{\Delta}, \frac{\Delta_4}{\Delta}\right) = (7, 0, -5, 2)$, 进而 $f(x) = 7 - 5x^2 + 2x^3$.

解法二: 利用 Lagrange 插值公式, 我们有

$$\begin{aligned} f(x) = &\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} f(-1) + \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} f(1) \\ &+ \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} f(2) + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} f(3), \end{aligned}$$

化简即可得到. □

➾ **习题 2.4.5:** 设 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 中 $n+1$ 个数, $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 中两两不同的 $n+1$ 个数. 证明: 存在唯一一个多项式 $f(x)$, $\deg f(x) \leq n$, 使得 $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

☞ **证:** 设多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. 由题意, 我们得到方程组

$$\begin{cases} a_0 + x_0a_1 + x_0^2a_2 + \cdots + x_0^na_n = y_0 \\ a_0 + x_1a_1 + x_1^2a_2 + \cdots + x_1^na_n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + x_na_1 + x_n^2a_2 + \cdots + x_n^na_n = y_n \end{cases}.$$

系数矩阵

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i) \neq 0.$$

由 Cramer 法则可知线性方程组具有唯一解. □

习题 2.4.6: 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

的系数行列式 $\Delta \neq 0$. 利用 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明: $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$ 是方程组 $(*)$ 的解.

证: 将该行列式按第 1 行 Laplace 展开可得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= b_i\Delta + a_{i1}(-1)^{1+2}\Delta_1 \\ &+ a_{i2}(-1)^{1+3+1}\Delta_2 + \cdots + a_{in}(-1)^{1+(n+1)+(n-1)}\Delta_n \\ &= b_i\Delta - a_{i1}\Delta_1 - a_{i2}\Delta_2 - \cdots - a_{in}\Delta_n = 0. \end{aligned}$$

即

$$a_{i1}\frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{i2}\frac{\Delta_2}{\Delta} + \cdots + a_{in}\frac{\Delta_n}{\Delta} = b_i.$$

由此 $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$ 是方程组 $(*)$ 的解. □

2.5 行列式的计算

2.5.1 习　　题

习题 2.5.1: 计算下列 n 阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & 2n-2 \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} x & a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ -a & -a & \cdots & -a & x & a \\ -a & -a & \cdots & -a & -a & x \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} \\ x_{11} & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} \\ x_{21} & x_{22} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ x_{n-2,1} & x_{n-2,2} & \cdots & x_{n-2,n-2} & 1 & a \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n-2} & x_{n-1,n-1} & 1 \end{vmatrix}$;

(8) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & x & y \\ y & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$;

(9) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ \vdots & x & 0 & \ddots & & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & & \ddots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$;

(10) $\begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \cdots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}+x_n \\ a_n+x_1 & \cdots & a_n+x_{n-1} & 1+a_n+x_n \end{vmatrix}$;

(11) $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$;

(12) $\begin{vmatrix} C_m^k & C_m^{k+1} & \cdots & C_m^{k+n-1} \\ C_{m+1}^k & C_{m+1}^{k+1} & \cdots & C_{m+1}^{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}^k & C_{m+n-1}^{k+1} & \cdots & C_{m+n-1}^{k+n-1} \end{vmatrix}$;

(13) $\begin{vmatrix} 1 & C_{m_1}^1 & \cdots & C_{m_1}^{n-1} \\ 1 & C_{m_2}^1 & \cdots & C_{m_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_{m_n}^1 & \cdots & C_{m_n}^{n-1} \end{vmatrix}$;

(14) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & x^{n-3} \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \cdots & C_{n-2}^{n-2} & x^{n-2} \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} & x^{n-1} \end{vmatrix}$;

(15) $\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$;

(16) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$;

(17) $\begin{vmatrix} \sin n\theta_1 & \sin(n-1)\theta_1 & \cdots & \sin\theta_1 \\ \sin n\theta_2 & \sin(n-1)\theta_2 & \cdots & \sin\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin n\theta_n & \sin(n-1)\theta_n & \cdots & \sin\theta_n \end{vmatrix}$;

(18) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$;

(19) $\begin{vmatrix} x & 1 & & & & \\ -n & x-2 & 2 & & & \\ & -(n-1) & x-4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & n-1 & \\ & & & -2 & x-2n+2 & n \\ & & & & -1 & x-2n \end{vmatrix}$.

(20) 计算 $2n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & \cdots & b_{2,n-1} & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & & \\ & & & a_{nn} & b_{n1} & & & \\ & & & c_{1n} & d_{11} & & & \\ & & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n} & d_{n-1,1} & \cdots & d_{n-1,n-1} & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{n,n-1} & d_{nn} \end{vmatrix}$$

其中未写出的元素都是零.

✎ 解:

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix} \xlongequal{-r_1+r_i, 2\le i\le n} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)!.$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\
3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 & n+2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & 2n-2 \\
n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1
\end{vmatrix} \\
&\xlongequal{-r_i+r_{i+1}, 1\leq i\leq n-1}
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1
\end{vmatrix} \\
&\xlongequal{-r_i+r_{i+1}, 2\leq i\leq n-1}
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{vmatrix},
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\
3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 & n+2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & 2n-2 \\
n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1
\end{vmatrix} = \begin{cases} 1, & n=1 \\ -1, & n=2 \\ 0, & n\geq 3 \end{cases}.$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix} \xlongequal[]{c_i+c_{i-1},2\le i\le n}$$

$$\begin{vmatrix} na+\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}k\right)h & (n-1)a+\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}k\right)h & (n-2)a+\left(\sum\limits_{k=2}^{n-1}k\right)h & \cdots & 2a+\left(\sum\limits_{k=n-2}^{n-1}k\right)h & a+(n-1)h \\ 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= \left[na+\frac{(n-1)n}{2}h\right]\cdot a^{n-1}.$$

(4)

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \xlongequal[]{\frac{1}{x}r_i+r_{i-1},2\le i\le n}$$

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{x^k} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{x^{k-1}} & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum\limits_{k=2}^{n-1}\frac{a_k}{x^{k-2}} & 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \sum\limits_{k=n-2}^{n-1}\frac{a_k}{x^{k-(n-2)}} & 0 & \cdots & 0 & x & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{x^k} = \sum_{k=0}^{n-1}a_kx^{n-1-k}.$$

(5) 解法一:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} x & a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ -a & -a & \cdots & -a & x & a \\ -a & -a & \cdots & -a & -a & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & a & a & a & \cdots & a+0 \\ -a & x & a & a & \cdots & a+0 \\ -a & -a & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a+0 \\ -a & -a & \cdots & -a & x & a+0 \\ -a & -a & \cdots & -a & -a & a+(x-a) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ -a & -a & \cdots & -a & x & a \\ -a & -a & \cdots & -a & -a & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a & a & a & \cdots & 0 \\ -a & x & a & a & \cdots & 0 \\ -a & -a & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a & -a & \cdots & -a & x & 0 \\ -a & -a & \cdots & -a & -a & x-a \end{vmatrix}$$

对上式右端第一个行列式, 用 -1 乘以它的第 n 行, 然后加到其它各行; 对第二个行列式的第 n 列作 Laplace 展开, 得到

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} x+a & 2a & 2a & 2a & \cdots & 0 \\ 0 & x+a & 2a & 2a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x+a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x+a & 0 \\ -a & -a & \cdots & -a & -a & a \end{vmatrix}+(x-a)\,\Delta_{n-1}$$

$$=a(x+a)^{n-1}+(x-a)\,\Delta_{n-1}.$$

考虑 Δ_n 的转置行列式, 得到

$$\Delta_n=-a(x-a)^{n-1}+(x+a)\,\Delta_{n-1}.$$

解得

$$\Delta_n=\frac{1}{2}\left[(x+a)^n+(x-a)^n\right].$$

解法二:

$$D_n(t)=\begin{vmatrix} x+t & a+t & a+t & a+t & \cdots & a+t \\ -a+t & x+t & a+t & a+t & \cdots & a+t \\ -a+t & -a+t & x+t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a+t \\ -a+t & -a+t & \cdots & -a+t & x+t & a+t \\ -a+t & -a+t & \cdots & -a+t & -a+t & x+t \end{vmatrix}$$

$$=D_n+tr.$$

$t=a$ 时, $D_n(a)=(x+a)^n$; $t=-a$ 时, $D_n(-a)=(x-a)^n$, 故

$$\begin{cases} D_n+ar=(x+a)^n \\ D_n-ar=(x-a)^n \end{cases} \Rightarrow D_n=\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}.$$

(6)

$$\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{a_{i+1}}{a_i}c_i+c_{i+1},1\le i\le n-1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 1 & \sum\limits_{k=1}^{2}\frac{a_2}{a_k} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n-2}\frac{a_{n-2}}{a_k} & \sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_k} & \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_n}{a_k} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

(7)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} \\ x_{11} & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} \\ x_{21} & x_{22} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ x_{n-2,1} & x_{n-2,2} & \cdots & x_{n-2,n-2} & 1 & a \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n-2} & x_{n-1,n-1} & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{-ac_i+c_{i+1},1\le i\le n-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{11} & 1-ax_{11} & 0 & 0 & \cdots & \\ x_{21} & x_{22}-ax_{21} & 1-ax_{22} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{n-2,1} & x_{n-2,2}-ax_{n-2,1} & \cdots & x_{n-2,n-2}-ax_{n-2,n-3} & 1-ax_{n-2,n-2} & 0 \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2}-ax_{n-1,1} & \cdots & x_{n-1,n-2}-ax_{n-1,n-3} & x_{n-1,n-1}-ax_{n-1,n-2} & 1-ax_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}(1-ax_{kk}).$$

行列式为 1 阶时, 值取 1.

(8) 将行列式按第 1 列作 Laplace 展开, 我们有

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & x & y \\ y & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x^n + (-1)^{n+1} y \cdot y^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1} y^n.$$

行列式为 1 阶时, 值取 x.

(9)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ \vdots & x & 0 & \ddots & & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & & \ddots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\quad]{-xr_1 + r_i, 2 \leq i \leq n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & -x & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & & \ddots & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\quad]{\frac{1}{x} r_i + r_1, 2 \leq i \leq n} \begin{vmatrix} \frac{1}{x}(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & -x & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & & \ddots & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1) x^{n-2}.$$

(10) 解法一:

$$
\begin{vmatrix}
1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \cdots & a_1+x_n \\
a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}+x_n \\
a_n+x_1 & \cdots & a_n+x_{n-1} & 1+a_n+x_n
\end{vmatrix}
$$

$$
= \left| I_n + \begin{pmatrix}
a_1+x_1 & a_1+x_2 & \cdots & a_1+x_n \\
a_2+x_1 & a_2+x_2 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}+x_n \\
a_n+x_1 & \cdots & a_n+x_{n-1} & a_n+x_n
\end{pmatrix} \right|
$$

$$
= \left| I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \right| = \left| I_2 + \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right|
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{k=1}^{n} a_k & n \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k & 1+\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(1+\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - n\sum_{k=1}^{n} a_k x_k.
$$

解法二:

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \cdots & a_1+x_n\\
a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}+x_n\\
a_n+x_1 & \cdots & a_n+x_{n-1} & 1+a_n+x_n
\end{vmatrix}\\
\xlongequal{\text{加边}}&\begin{vmatrix}
1 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n\\
0 & 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \cdots & a_1+x_n\\
0 & a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}+x_n\\
0 & a_n+x_1 & \cdots & a_n+x_{n-1} & 1+a_n+x_n
\end{vmatrix}\\
\xlongequal{r_1+r_i,2\le i\le n+1}&\begin{vmatrix}
1 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n\\
1 & 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\
1 & a_2 & 1+a_2 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}\\
1 & a_n & \cdots & a_n & 1+a_n
\end{vmatrix}\\
\xlongequal{\text{加边}}&\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n\\
-a_1 & 1 & 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\
-a_2 & 1 & a_2 & 1+a_2 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}\\
-a_n & 1 & a_n & \cdots & a_n & 1+a_n
\end{vmatrix}\\
\xlongequal{c_1+c_i,3\le i\le n+2}&\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\
0 & 1 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n\\
-a_1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
-a_2 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\
-a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{vmatrix}\\
\xlongequal{-c_i+c_2,a_{i-2}c_i+c_1,3\le i\le n+2}&\begin{vmatrix}
1+\sum\limits_{k=1}^n a_k & -n & 1 & 1 & \cdots & 1\\
-\sum\limits_{k=1}^n a_kx_k & 1+\sum\limits_{k=1}^n x_k & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n\\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{vmatrix}\\
=&\left(1+\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(1+\sum_{k=1}^n x_k\right)-n\sum_{k=1}^n a_kx_k
\end{aligned}
$$

(11) 将行列式按第 1 列作 Laplace 展开, 我们有

$$D_n=\begin{vmatrix}2\cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos\theta & 1\\ & & & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=2\cos\theta D_{n-1}-D_{n-2}.$$

则

$$D_n-(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\,D_{n-1}=(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\,(D_{n-1}-(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\,D_{n-2})\,,$$

递推得

$$\begin{aligned}D_n-(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\,D_{n-1}&=(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^{n-2}\left[D_2-(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\,D_1\right]\\&=(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^n.\end{aligned}$$

同时

$$D_n-(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\,D_{n-1}=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\,(D_{n-1}-(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\,D_{n-2})\,,$$

得到

$$\begin{aligned}D_n-(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\,D_{n-1}&=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{n-2}\left[D_2-(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\,D_1\right]\\&=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}D_n&=\frac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{n+1}-(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^{n+1}}{2\sin\theta\mathrm{i}}\\&=\frac{[\cos(n+1)\theta+\mathrm{i}\sin(n+1)\theta]-[\cos(n+1)\theta-\mathrm{i}\sin(n+1)\theta]}{2\sin\theta\mathrm{i}}\\&=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}C_m^k & C_m^{k+1} & \cdots & C_m^{k+n-1}\\ C_{m+1}^k & C_{m+1}^{k+1} & \cdots & C_{m+1}^{k+n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{m+n-1}^k & C_{m+n-1}^{k+1} & \cdots & C_{m+n-1}^{k+n-1}\end{vmatrix}\xlongequal{-r_i+r_{i+1},1\leq i\leq n-1}\\ &\xlongequal{-r_i+r_{i+1},2\leq i\leq n-1}\begin{vmatrix}C_m^k & C_m^{k+1} & \cdots & C_m^{k+n-1}\\ C_m^{k-1} & C_m^k & \cdots & C_m^{k+n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{m+n-2}^{k-1} & C_{m+n-2}^k & \cdots & C_{m+n-2}^{k+n-2}\end{vmatrix}\\ &=\cdots=\begin{vmatrix}C_m^k & C_m^{k+1} & \cdots & C_m^{k+n-1}\\ C_m^{k-1} & C_m^k & \cdots & C_m^{k+n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_m^{k+1-n} & C_m^{k+2-n} & \cdots & C_m^k\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$D(k,m)=\begin{vmatrix} C_m^k & C_m^{k+1} & \cdots & C_m^{k+n-1} \\ C_{m+1}^k & C_{m+1}^{k+1} & \cdots & C_{m+1}^{k+n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}^k & C_{m+n-1}^{k+1} & \cdots & C_{m+n-1}^{k+n-1} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} \frac{m}{k}C_{m-1}^{k-1} & \frac{m}{k+1}C_{m-1}^{k} & \cdots & \frac{m}{k+n-1}C_{m-1}^{k+n-2} \\ \frac{m+1}{k}C_{m}^{k-1} & \frac{m+1}{k+1}C_{m}^{k} & \cdots & \frac{m+1}{k+n-1}C_{m}^{k+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m+n-1}{k}C_{m+n-2}^{k-1} & \frac{m+n-1}{k+1}C_{m+n-2}^{k} & \cdots & \frac{m+n-1}{k+n-1}C_{m+n-2}^{k+n-2} \end{vmatrix}$$
$$=\frac{(m+n-1)(m+n-2)\cdots m}{(k+n-1)(k+n-2)\cdots k}\begin{vmatrix} C_{m-1}^{k-1} & C_{m-1}^{k} & \cdots & C_{m-1}^{k+n-2} \\ C_{m}^{k-1} & C_{m}^{k} & \cdots & C_{m}^{k+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-2}^{k-1} & C_{m+n-2}^{k} & \cdots & C_{m+n-2}^{k+n-2} \end{vmatrix}$$
$$=\frac{C_{m+n-1}^n}{C_{k+n-1}^n}D(k-1,m-1).$$

我们约定当 $k>n$ 以及 n 为负整数时, $C_n^k=0$. 由

$$D(k,m)=\frac{C_{m+n-1}^n}{C_{k+n-1}^n}D(k-1,m-1),$$

递推得

$$D(k,m)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}C_{(m+1)-i+(n-1)}^n}{\prod\limits_{i=1}^{k}C_{i+(n-1)}^n}D(0,m-k),$$

由此转化成计算第 13 题.

(13) 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & C_{m_1}^1 & \cdots & C_{m_1}^{n-1} \\ 1 & C_{m_2}^1 & \cdots & C_{m_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_{m_n}^1 & \cdots & C_{m_n}^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & A_{m_1}^1 & \cdots & A_{m_1}^{n-1} \\ 1 & A_{m_2}^1 & \cdots & A_{m_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & A_{m_n}^1 & \cdots & A_{m_n}^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}D_n.$$

而 $x(x-1)\cdots(x-(k-1))-x^k$ 可由 $x,x^2,\cdots,x^{k-1}$ 线性表示, 所以

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & m_1 & \cdots & m_1^{n-1} \\ 1 & m_2 & \cdots & m_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_n & \cdots & m_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(m_j-m_i).$$

于是

$$\text{原式}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}(m_j-m_i).$$

(14) 令

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & x^{n-3} \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \cdots & C_{n-2}^{n-2} & x^{n-2} \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} & x^{n-1} \end{vmatrix},$$

则有

$$\begin{aligned} f(x+1)&=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \cdots & 0 & (x+1) \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & (x+1)^{n-3} \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \cdots & C_{n-2}^{n-2} & (x+1)^{n-2} \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} & (x+1)^{n-1} \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{-x^{i-1}c_i+c_n,1\le i\le n-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \cdots & C_{n-2}^{n-2} & 0 \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} & x^{n-1} \end{vmatrix} \\ &=x^{n-1}. \end{aligned}$$

因此

$$f(x)=(x-1)^{n-1}.$$

(15) 注意到

$$\frac{1}{a_j+b_i}-\frac{1}{a_n+b_i}=\frac{a_n-a_j}{(a_n+b_i)(a_j+b_i)}.$$

则有

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \underline{\underline{-r_n+r_i, 1\le i\le n-1}}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{(a_n+b_1)(a_1+b_1)} & \frac{a_n-a_1}{(a_n+b_2)(a_1+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_n+b_n)(a_1+b_n)} \\ \frac{a_n-a_2}{(a_n+b_1)(a_2+b_1)} & \frac{a_n-a_2}{(a_n+b_2)(a_2+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_2}{(a_n+b_n)(a_2+b_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{-c_n+c_i, 1\le i\le n-1}}$$

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n+a_k)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

即

$$D_n = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n+a_k)} D_{n-1}.$$

又

$$D_2 = \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)},$$

因此

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n+a_k)} D_{n-1} \\ &= \cdots = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n+b_k)} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n+a_k)} \cdots \frac{\prod\limits_{k=1}^{2}(a_n-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{3}(a_n+b_k)} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{2}(b_n-b_k)}{\prod\limits_{k=1}^{2}(b_n+a_k)} D_2 \\ &= \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j)}. \end{aligned}$$

(16) 先简要说明下

❀ 注: 由于对于正整数 m, 有

$$
\begin{aligned}
&\cos m\theta+\mathrm{i}\sin m\theta=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^m\\
=&\cos^m\theta+C_m^1\cos^{m-1}\theta\cdot\mathrm{i}\sin\theta-C_m^2\cos^{m-2}\theta\cdot\sin^2\theta+\cdots\\
+&C_m^{m-1}\cos\theta\cdot\mathrm{i}^{m-1}\sin^{m-1}\theta+C_m^m\cos\theta\cdot\mathrm{i}^m\sin^m\theta\\
=&\left(\cos^m\theta-C_m^2\cos^{m-2}\theta\cdot\sin^2\theta+\cdots\right)+\mathrm{i}\left(C_m^1\cos^{m-1}\theta\cdot\sin\theta+\cdots\right)\\
=&\left[\cos^m\theta-C_m^2\cos^{m-2}\theta\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)+\cdots\right]+\mathrm{i}\left(C_m^1\cos^{m-1}\theta\cdot\sin\theta+\cdots\right).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\cos m\theta=&\cos^m\theta+C_m^2\cos^m\theta-C_m^2\cos^{m-2}\theta\\
&+C_m^4\cos^{m-4}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^2-C_m^6\cos^{m-6}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^3+\cdots\\
=&\cos^m\theta\left(1+C_m^2+C_m^4+C_m^6+\cdots\right)-\cos^{m-2}\theta\left(C_m^2+2C_m^4+\cdots\right)\\
&+\cos^{m-4}\theta\left(C_m^4+2C_m^6+\cdots\right)+\cdots.
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
2^m&=(1+1)^m=1+C_m^1+C_m^2+\cdots+C_m^m\\
0&=(1-1)^m=1-C_m^1+C_m^2-C_m^3+C_m^4-\cdots
\end{aligned}
$$

因此

$$
1+C_m^2+C_m^4+C_m^6+\cdots=\frac{1}{2}\cdot 2^m=2^{m-1}.
$$

从而

$$
\cos m\theta=2^{m-1}\cos^m\theta-\left(C_m^2+2C_m^4+\cdots\right)\cos^{m-2}\theta+\cdots.
$$

解法一: 回到原题,

$$
\text{原式}=\begin{vmatrix}
1&\cos\theta_1&2\cos^2\theta_1-1&4\cos^3\theta_1-3\cos\theta_1&\cdots&2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_1+\cdots\\
1&\cos\theta_2&2\cos^2\theta_2-1&4\cos^3\theta_2-3\cos\theta_2&\cdots&2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_2+\cdots\\
\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\
1&\cos\theta_n&2\cos^2\theta_n-1&4\cos^3\theta_n-3\cos\theta_n&\cdots&2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_n+\cdots
\end{vmatrix}
$$

这个行列式的第 3 列是两组数的和, 第 4 列是两组数的和, $\cdots$ 因此这个行列式可以拆成若干个行列式的和, 其中行列式只要第 j 列不是取含 $\cos^{j-1}\theta_i$ 的列, 那么必有两列成比例,

从而这样的行列式的值为 0. 因此可能不为 0 的行列式只有一个:

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
1 & \cos\theta_1 & 2\cos^2\theta_1 & 4\cos^3\theta_1 & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_1 \\
1 & \cos\theta_2 & 2\cos^2\theta_2 & 4\cos^3\theta_2 & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \cos\theta_n & 2\cos^2\theta_n & 4\cos^3\theta_n & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_n
\end{vmatrix} \\
=&2\cdot 4\cdots 2^{n-2}\begin{vmatrix}
1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 & \cos^3\theta_1 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_1 \\
1 & \cos\theta_2 & \cos^2\theta_2 & \cos^3\theta_2 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \cos\theta_n & \cos^2\theta_n & \cos^3\theta_n & \cdots & \cos^{n-1}\theta_n
\end{vmatrix} \\
=&2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\cos\theta_j-\cos\theta_i\right)
\end{aligned}
$$

解法二: 记 $\varepsilon_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k$，则 $\cos l\theta_k=\frac{\varepsilon_k^l+\bar{\varepsilon}_k^l}{2},\varepsilon_k\bar{\varepsilon}_k=1$. 故

$$
D=\begin{vmatrix}
1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos\left(n-1\right)\theta_1 \\
1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos\left(n-1\right)\theta_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos\left(n-1\right)\theta_n
\end{vmatrix}=\frac{1}{2^n}\begin{vmatrix}
1 & \varepsilon_1+\bar{\varepsilon}_1 & \varepsilon_1^2+\bar{\varepsilon}_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-1}+\bar{\varepsilon}_1^{n-1} \\
1 & \varepsilon_2+\bar{\varepsilon}_2 & \varepsilon_2^2+\bar{\varepsilon}_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-1}+\bar{\varepsilon}_2^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \varepsilon_n+\bar{\varepsilon}_n & \varepsilon_n^2+\bar{\varepsilon}_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^{n-1}+\bar{\varepsilon}_n^{n-1}
\end{vmatrix}.
$$

注意到

$$
\left(\varepsilon_k+\bar{\varepsilon}_k\right)^l=2^{l-1}\left(\varepsilon_k^l+\bar{\varepsilon}_k^l\right).
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
D=&\begin{vmatrix}
1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos\left(n-1\right)\theta_1 \\
1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos\left(n-1\right)\theta_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos\left(n-1\right)\theta_n
\end{vmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{vmatrix}
1 & \varepsilon_1+\bar{\varepsilon}_1 & \varepsilon_1^2+\bar{\varepsilon}_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-1}+\bar{\varepsilon}_1^{n-1} \\
1 & \varepsilon_2+\bar{\varepsilon}_2 & \varepsilon_2^2+\bar{\varepsilon}_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-1}+\bar{\varepsilon}_2^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \varepsilon_n+\bar{\varepsilon}_n & \varepsilon_n^2+\bar{\varepsilon}_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^{n-1}+\bar{\varepsilon}_n^{n-1}
\end{vmatrix} \\
=&\frac{1}{2^{n-1}}\begin{vmatrix}
1 & \varepsilon_1+\bar{\varepsilon}_1 & \left(\varepsilon_1+\bar{\varepsilon}_1\right)^2 & \cdots & \left(\varepsilon_1+\bar{\varepsilon}_1\right)^{n-1} \\
1 & \varepsilon_2+\bar{\varepsilon}_2 & \left(\varepsilon_2+\bar{\varepsilon}_2\right)^2 & \cdots & \left(\varepsilon_2+\bar{\varepsilon}_2\right)^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \varepsilon_n+\bar{\varepsilon}_n & \left(\varepsilon_n+\bar{\varepsilon}_n\right)^2 & \cdots & \left(\varepsilon_n+\bar{\varepsilon}_n\right)^{n-1}
\end{vmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\prod_{1\le j<i\le n}\left(\varepsilon_i+\bar{\varepsilon}_i-\varepsilon_j-\bar{\varepsilon}_j\right) \\
=&\frac{1}{2^{n-1}}\times 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le j<i\le n}\left(\cos\theta_i-\cos\theta_j\right)=2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\prod_{1\le j<i\le n}\left(\cos\theta_i-\cos\theta_j\right).
\end{aligned}
$$

解法三: 对于原行列式, 我们将第 $n-2$ 行加到第 n 行, 将第 $n-4$ 行加到第 $n-2$ 行, $\cdots$; 将第 $n-3$ 行加到第 $n-1$ 行, 将第 $n-5$ 行加到第 $n-3$ 行, $\cdots$, 并利用和差化积公式可

得

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & 2\cos^2\theta_1 & 2\cos\theta_1\cos 2\theta_1 & \cdots & 2\cos\theta_1\cos(n-2)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & 2\cos^2\theta_2 & 2\cos\theta_2\cos 2\theta_2 & \cdots & 2\cos\theta_2\cos(n-2)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & 2\cos^2\theta_n & 2\cos\theta_n\cos 2\theta_n & \cdots & 2\cos\theta_n\cos(n-2)\theta_n \end{vmatrix}$$

$$=2^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 & \cos\theta_1\cos 2\theta_1 & \cdots & \cos\theta_1\cos(n-2)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos^2\theta_2 & \cos\theta_2\cos 2\theta_2 & \cdots & \cos\theta_2\cos(n-2)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos^2\theta_n & \cos\theta_n\cos 2\theta_n & \cdots & \cos\theta_n\cos(n-2)\theta_n \end{vmatrix}$$

重复使用同样的消法变换可知该行列式可等于

$$2\cdot 2^2\cdots 2^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 & \cos^3\theta_1 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos^2\theta_2 & \cos^3\theta_2 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos^2\theta_n & \cos^3\theta_n & \cdots & \cos^{n-1}\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\cos\theta_j-\cos\theta_i\right).$$

同样通过和差化积公式 $\sin n\alpha-\sin(n-2)\alpha=2\cos(n-1)\alpha\sin\alpha$, 我们得到

$$\begin{vmatrix} \sin n\theta_1 & \sin(n-1)\theta_1 & \cdots & \sin\theta_1 \\ \sin n\theta_2 & \sin(n-1)\theta_2 & \cdots & \sin\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin n\theta_n & \sin(n-1)\theta_n & \cdots & \sin\theta_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2\sin\theta_1\cos(n-1)\theta_1 & 2\sin\theta_1\cos(n-2)\theta_1 & \cdots & 2\sin\theta_1\cos 2\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 2\sin\theta_2\cos(n-1)\theta_2 & 2\sin\theta_2\cos(n-2)\theta_2 & \cdots & 2\sin\theta_2\cos 2\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\sin\theta_n\cos(n-1)\theta_n & 2\sin\theta_2\cos(n-2)\theta_2 & \cdots & \cos 2\theta_2 & \sin\theta_2 \end{vmatrix}$$

$$=2^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\sin\theta_i\begin{vmatrix} \cos(n-1)\theta_1 & \cos(n-2)\theta_1 & \cdots & \cos\theta_1 & 1 \\ \cos(n-1)\theta_2 & \cos(n-2)\theta_2 & \cdots & \cos\theta_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cos(n-1)\theta_n & \cos(n-2)\theta_2 & \cdots & \cos\theta_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\sin\theta_i\cdot(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$$

$$=(-2)^{\frac{(n-1)n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\sin\theta_i\prod_{1\le i<j\le n}\left(\cos\theta_j-\cos\theta_i\right).$$

(17) 首先

$$\begin{vmatrix} \sin n\theta_1 & \sin(n-1)\theta_1 & \cdots & \sin\theta_1 \\ \sin n\theta_2 & \sin(n-1)\theta_2 & \cdots & \sin\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin n\theta_n & \sin(n-1)\theta_n & \cdots & \sin\theta_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \begin{vmatrix} \sin\theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1 \\ \sin\theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin\theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} D,$$

记 $\varepsilon_k = \cos\theta_k + \mathrm{i}\sin\theta_k$，则 $\sin l\theta_k = \frac{\varepsilon_k^l + \bar{\varepsilon}_k^l}{2\mathrm{i}}, \varepsilon_k\bar{\varepsilon}_k = 1$. 故

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{(2\mathrm{i})^n} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1 & \varepsilon_1^2 - \bar{\varepsilon}_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^n + \bar{\varepsilon}_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_n - \bar{\varepsilon}_n & \varepsilon_n^2 - \bar{\varepsilon}_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^n - \bar{\varepsilon}_n^n \end{vmatrix} \\ &= \frac{(\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1)\cdots(\varepsilon_n - \bar{\varepsilon}_n)}{(2\mathrm{i})^n} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1 & \cdots & \varepsilon_1^{n-1} + \bar{\varepsilon}_1^{n-2}\bar{\varepsilon}_1 + \cdots + \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1^{n-2} + \bar{\varepsilon}_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_n + \bar{\varepsilon}_n & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} + \bar{\varepsilon}_n^{n-2}\bar{\varepsilon}_n + \cdots + \varepsilon_n\bar{\varepsilon}_n^{n-2} + \bar{\varepsilon}_n^{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_1^{n-2}\bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1^{n-3}\bar{\varepsilon}_1^2 + \cdots + \varepsilon_1^2\bar{\varepsilon}_1^{n-3} + \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1^{n-2} + \bar{\varepsilon}_1^{n-1} \\ =&\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_1^{n-3} + \varepsilon_1^{n-5} + \cdots + \bar{\varepsilon}_1^{n-5} + \bar{\varepsilon}_1^{n-3} + \varepsilon_1^{n-1} \\ =&\left(\varepsilon_1^{n-1} + \bar{\varepsilon}_1^{n-1}\right) + \left(\varepsilon_1^{n-3} + \bar{\varepsilon}_1^{n-3}\right) + \left(\varepsilon_1^{n-5} + \bar{\varepsilon}_1^{n-5}\right) + \cdots, \end{aligned}$$

故若把第 $n-2$ 列的 -1 倍加到最后一列去, 再把第 $n-3$ 列的 -1 倍加到第 $n-1$ 列, 等等, 则

$$D = \frac{(\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1)\cdots(\varepsilon_n - \bar{\varepsilon}_n)}{(2\mathrm{i})^n} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1 & \varepsilon_1^2 + \bar{\varepsilon}_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-1} + \bar{\varepsilon}_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_n + \bar{\varepsilon}_n & \varepsilon_n^2 + \bar{\varepsilon}_n^2 & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} + \bar{\varepsilon}_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

按同样的理由可知

$$\begin{aligned} D &= \frac{(\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1)\cdots(\varepsilon_n - \bar{\varepsilon}_n)}{(2\mathrm{i})^n} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1 & (\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1)^2 & \cdots & (\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_n + \bar{\varepsilon}_n & (\varepsilon_n + \bar{\varepsilon}_n)^2 & \cdots & (\varepsilon_n + \bar{\varepsilon}_n)^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \sin\theta_1\cdots\sin\theta_n \prod_{1\le i<j\le n} (\varepsilon_j + \bar{\varepsilon}_j - \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_i) = \sin\theta_1\cdots\sin\theta_n \prod_{1\le i<j\le n} 2(\cos\theta_j - \cos\theta_i) \\ &= 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \sin\theta_1\cdots\sin\theta_n \prod_{1\le i<j\le n} (\cos\theta_j - \cos\theta_i). \end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
\sin n\theta_1 & \sin(n-1)\theta_1 & \cdots & \sin\theta_1 \\
\sin n\theta_2 & \sin(n-1)\theta_2 & \cdots & \sin\theta_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sin n\theta_n & \sin(n-1)\theta_n & \cdots & \sin\theta_n
\end{vmatrix} \\
=&(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n\prod_{1\le i<j\le n}\left(\cos\theta_j-\cos\theta_i\right) \\
=&(-2)^{\frac{(n-1)n}{2}}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n\prod_{1\le i<j\le n}\left(\cos\theta_j-\cos\theta_i\right).
\end{aligned}
$$

(18)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\
1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n
\end{vmatrix}
\xlongequal{\text{加边}}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\
1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n
\end{vmatrix} \\
&\xlongequal{-c_1+c_i,2\le i\le n}
\begin{vmatrix}
1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n
\end{vmatrix}
\xlongequal{\text{按第1行展开}} \\
&\begin{vmatrix}
2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n
\end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n
\end{vmatrix} \\
=&\left[2\prod_{k=1}^{n}x_k-\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\right]\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).
\end{aligned}
$$

(19) 首先将第 $n+1$ 列的 $1/(x-2n)$ 倍加到第 n 列, 则新行列式的 a_{nn} 项变为 $x-2n+2+\frac{n}{x-2n}$, 再将第 n 列的 $\frac{2}{x-2n+2+\frac{n}{x-2n}}$ 倍加到第 $n-1$ 列, 得到新行列式的 $a_{n-1,n-1}$ 为 $\frac{2(n-1)}{x-2n+2+\frac{n}{x-2n}}+x-2n+4$, 如此进行下去, 我们可将行列式矩阵化为上三角矩阵, 其行列式值等于对角线各元素的乘积, 记最终得到的上三角矩阵的 a_{kk} 项元素为 D_k, 我们可建立递推关系

$$D_k=x-2k+2+\frac{(n-k+1)k}{D_{k+1}},D_{n+1}=x-2n,1\le k\le n.$$

因此

$$\text{原式}=\prod_{k=1}^{n+1}D_k.$$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & & \\ -n & x-2 & 2 & & & \\ & -(n-1) & x-4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & n-1 & \\ & & & -2 & x-2n+2 & n \\ & & & & -1 & x-2n \end{vmatrix} \xlongequal{r_i + r_{i+1}, 1 \le i \le n} \begin{vmatrix} x & 1 & & & & \\ x-n & x-1 & 2 & & & \\ x-n & x-n & x-2 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n-1 & \\ x-n & x-n & \cdots & x-n & x-(n-1) & n \\ x-n & x-n & \cdots & x-n & x-n & x-n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-c_i + c_{i-1}, 2 \le i \le n+1} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & & & & \\ -(n-1) & (x-1)-2 & 2 & & & \\ & -(n-2) & (x-1)-4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & n-1 & \\ & & & -1 & (x-1)-2(n-1) & n \\ & & & \cdots & 0 & x-n \end{vmatrix}$$

$$= (x-n) D_{n-1}(x-1).$$

以此递推得

$$D_n(x) = (x-n) D_{n-1}(x-1) = (x-n)[(x-1)-(n-1)] D_{n-2}(x-2)$$
$$= (x-n)^2 D_{n-2}(x-2) = \cdots = (x-n)^{n-1} D_1(x-(n-1)) = (x-n)^{n+1}.$$

(20) 不断对行列式第 1 列和最后一列进行 Laplace 展开, 我们有

$$
\begin{aligned}
\text{原式} =& a_{11}d_{nn}\begin{vmatrix}
a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & \cdots & b_{2,n-1} \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \\
 & & a_{nn} & b_{n1} & & \\
 & & c_{1n} & d_{11} & & \\
 & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \\
c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n} & d_{n-1,1} & \cdots & d_{n-1,n-1}
\end{vmatrix} \\
&-c_{n1}b_{1n}\begin{vmatrix}
a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & \cdots & b_{2,n-1} \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \\
 & & a_{nn} & b_{n1} & & \\
 & & c_{1n} & d_{11} & & \\
 & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \\
c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n} & d_{n-1,1} & \cdots & d_{n-1,n-1}
\end{vmatrix} \\
&= (a_{11}d_{nn} - c_{n1}b_{1n})\begin{vmatrix}
a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & \cdots & b_{2,n-1} \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \\
 & & a_{nn} & b_{n1} & & \\
 & & c_{1n} & d_{11} & & \\
 & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \\
c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n} & d_{n-1,1} & \cdots & d_{n-1,n-1}
\end{vmatrix} \\
&= \cdots = \prod_{k=1}^{n}(a_{kk}d_{n+1-k,n+k-1} - c_{n+1-k,k}b_{k,n+1-k}).
\end{aligned}
$$

□

习题 2.5.2: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正整数. 证明: n 阶行列式

$$
\begin{vmatrix}
1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\
1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}
\end{vmatrix}
$$

能被 $1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-2)^2(n-1)$ 整除.

证: 证法一: 由习题 2.5.1.14 可知

$$
\begin{vmatrix}
1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\
1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1}
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
1 & A_{a_1}^1 & \cdots & A_{a_1}^{n-1} \\
1 & A_{a_2}^1 & \cdots & A_{a_2}^{n-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & A_{a_n}^1 & \cdots & A_{a_n}^{n-1}
\end{vmatrix} = 1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-1)\begin{vmatrix}
1 & C_{a_1}^1 & \cdots & C_{a_1}^{n-1} \\
1 & C_{a_2}^1 & \cdots & C_{a_2}^{n-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & C_{a_n}^1 & \cdots & C_{a_n}^{n-1}
\end{vmatrix}.
$$

显然命题成立.

证法二: 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i).$$

我们首先证明, 任取 $n+1$ 个正整数, 它们之间任意两数之差的乘积一定可被 $n!$ 整除. 以 n 为除数的余数只能为 n 个, 由抽屉原理, $n+1$ 个正整数中必有两个数除 n 的余数相同, 它们之差可被 n 整除. 剔除其中之一, 剩下 n 个数中必有两数之差可被 $n-1$ 整除, 以此类推, 2 亦可整除它们之间某两数之差, 进而 $n!$ 可整除这 $n+1$ 个数中任意两数之差的乘积.

对于正整数 k,

$$(k-1)! \mid \prod_{1\leq i\leq k-1} (x_k - x_i).$$

因此

$$1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-2)^2(n-1) = \prod_{2\leq k\leq n} (k-1)! \mid \prod_{2\leq k\leq n}\prod_{1\leq i\leq k-1} (x_k - x_i) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i).$$

证法三: 对每个正整数 k, 记 k 次多项式

$$f_k(x) = x(x-1)\cdots(x-k+1) = x^k + \sum_{i=1}^{k-1} b_{ki}x^i$$

按 $k=n, n-1, \cdots, 3$ 从大到小的顺序, 对每个 k 将原行列式 Δ 的第 $i+1$ 列 $(1\leq i\leq k-2)$ 的 b_{ki} 倍加到第 k 列, 在保持行列式值的前提下将 Δ 变成

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & f_2(a_1) & \cdots & f_{n-1}(a_1) \\ 1 & a_2 & f_2(a_2) & \cdots & f_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & f_2(a_n) & \cdots & f_{n-1}(a_n) \end{vmatrix}.$$

对 $3\leq k\leq n$, 将上式中的行列式的第 k 列除以 $(k-1)!$, 则行列式 Δ 变成 $\Delta_1 = \Delta/(2!3!\cdots(n-1)!)$, 且上式中 Δ 的第 $(i, j+1)$ 元素由 $f_j(a_i) = a_i(a_i-1)\cdots(a_i-j)$ 变成组合数 $C_{a_i}^j = \frac{a_i(a_i-1)\cdots(a_i-j+1)}{j!}$. 由此得到

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{2!3!\cdots(n-1)!} = \begin{vmatrix} 1 & C_{a_1}^1 & C_{a_1}^2 & \cdots & C_{a_1}^{n-1} \\ 1 & C_{a_2}^1 & C_{a_2}^2 & \cdots & C_{a_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_{a_n}^1 & C_{a_n}^2 & \cdots & C_{a_n}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

行列式 Δ 的各元素 $C_{a_i}^j$ 都是整数, 因此 Δ_1 是整数. Δ 被

$$d = 2!3!\cdots(n-1)! = 1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-2)^2(n-1)$$

除得到的商 Δ_1 是整数, 因而 Δ 被 d 整除. □

习题 2.5.3: (Burnside) 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 满足 $a_{ji}=-a_{ij},1\le i,j\le n$, 则方阵 A 称为斜对称方阵. 把 a_{ij} 看成未定元, 证明: 奇数阶斜对称方阵的行列式恒为零, 而偶数阶斜对称方阵的行列式是一个完全平方.

证: 证法一: 当 n 为奇数时, 由 $a_{ji}=-a_{ij}$ 可知 $A^T=-A$, 从而

$$|A|=\left|A^T\right|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|\Rightarrow|A|=0.$$

当 n 为偶数时, 即 $x=2m$ 时, 对行列式的阶数用归纳法. 当 $n=2$ 时 $D_2=\begin{vmatrix}0 & a_{12}\\ -a_{12} & 0\end{vmatrix}=a_{12}^2$ 成立. 今假设当 $n-1$ 阶时结论成立, 则当 n 阶时,

$$\begin{aligned}D_n=(a_{ij})_{n\times n}&\xlongequal[\frac{a_{2i}}{a_{12}}r_1+r_i,3\le i\le n]{}\left(a_{ij}+\frac{a_{1j}a_{2i}}{a_{12}}\right)_{n\times n}\\&\xlongequal[-\frac{a_{1i}}{a_{12}}r_2+r_i,3\le i\le n]{}\left(a_{ij}+\frac{a_{1j}a_{2i}-a_{1i}a_{2j}}{a_{12}}\right)_{n\times n}=(b_{ij})_{n\times n}.\end{aligned}$$

又 $b_{1i}=b_{2i}=0,i=3,4,\cdots,n$ 且 $b_{11}=b_{22}=0$, 将 D_n 先按第一列展开, 再讲得到的新矩阵按第 1 列展开, 我们得到 $D_n=a_{12}^2|B|$, 而 B 是 $n-1$ 矩阵, 所以由归纳假设, n 阶斜对称方阵的行列式是一个完全平方. 进一步我们可求得其值为

$$\left(\sum_{\begin{pmatrix}1&2&\cdots&2m\\ i_1&i_2&\cdots&i_{2m}\end{pmatrix};i_1<i_2,\cdots,i_{2m-1}<i_{2m}}\delta\begin{pmatrix}1&2&\cdots&2m\\ i_1&i_2&\cdots&i_{2m}\end{pmatrix}a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}\cdots a_{i_{2m-1}i_{2m}}\right)^2.$$

证法二: 已知 A 合同于一个准对角阵

$$B=\begin{pmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_m\end{pmatrix},$$

其中

$$A_i=\begin{pmatrix}0&a_i\\-a_i&0\end{pmatrix}.$$

因此存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^TBP$, 从而

$$\det A=(\det P)^2\det B=\left(\det P\prod_{i=1}^m a_i\right)^2.$$

斜对称特征值都是虚的, 偶数阶两两共轭 □

习题 2.5.4: (Minkowski) 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的元素都是实的, 并且 $a_{ii}>0,a_{ij}<0,i\ne j,\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}>0$. 证明:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}>0.$$

☞ **证:** 对行列式的阶数用归纳法. 当 $n=2$ 时 $D_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$ 成立. 今假设当 $n-1$ 阶时结论成立, 则当 n 阶时, 把第一行乘 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 加到第 i 行上去 $(2\le i\le n)$, 于是

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn}\end{vmatrix},$$

其中 $a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$, 我们要证明上面这个 $n-1$ 阶行列式仍满足已知条件:

(1) $a'_{ii}=a_{ii}-\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}=\frac{a_{ii}a_{11}-a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}$ (因为$a_{ii}>|a_{1i}|,a_{11}>|a_{i1}|$);

(2) $a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}<0$ $(i\neq j$, 因为$a_{ij}<0,-a_{i1}a_{1j}<0)$;

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{n}a'_{ij}&=\sum_{j=2}^{n}a_{ij}-\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}>-a_{i1}-a_{i1}\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}\\&=-a_{i1}\left(1+\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n}a_{1j}\right)=-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}>0.\end{aligned}$$

所以由归纳假设,

$$\begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn}\end{vmatrix}>0.$$

因此

$$\det A>0.$$

□

➻ **习题 2.5.5:** (Lovy-Desplanques) **设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的元素都是复数, 并且对任意 $|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,i=1,2,\cdots,n$, 则方阵 A 称为主角占优矩阵. 证明: 主角占优矩阵的行列式不为零.**

☞ **证:** 考察线性方程组 $Ax=0$, 假设 $\det A$ 不为 0, 则该方程存在非零解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 即

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=0,i=1,2,\cdots,n.$$

不妨设 $|x_m|=\max\{|x_i|,1\le i\le n\}>0$, 我们考察 $i=m$ 时的情况,

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{m,m-1}x_{m,m-1}+a_{mm}x_{mm}+a_{m,m+1}x_{m,m+1}+\cdots+a_{mn}x_n=0,$$

则

$$|-a_{mm}|=|a_{mm}|=\frac{\left|\sum\limits_{j=1,j\neq m}a_{mj}x_j\right|}{|x_m|}\le\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq m}|a_{mj}x_j|}{|x_m|}\le\sum_{j=1,j\neq m}|a_{mj}|.$$

与题意相矛盾. □

习题 2.5.6: 把 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

展成 λ 的多项式, 并用行列式 $\det A$ 的子式表示它的关于 λ 的各次幂的系数, 其中 $A = (a_{ij})$.

证: 解法一: 设该多项式为

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

则

$$a_0 = f(0) = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n \det A.$$

记

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} a_1 = f'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}\left(\det A^{(1)}\right)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} &= \sum_{1\le i.j\le n} \left.\left(\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}\lambda} A_{ij}^{(1)}\right)\right|_{\lambda=0} \\ &= \sum_{1\le i\le n} \left.\left(A_{ii}^{(1)}\right)\right|_{\lambda=0} = (-1)^{n-1} \sum_{1\le i\le n} A_{ii}. \end{aligned}$$

记

$$A^{(2)} = \sum_{1\le i\le n} A_{ii}^{(1)},$$

$$\begin{aligned} 2!a_2 = f''(0) = \left.\frac{\mathrm{d}\left(\det A^{(2)}\right)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} &= \sum_{1\le i.j\le n} \left.\left(\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}\lambda} A_{ij}^{(2)}\right)\right|_{\lambda=0} \\ = \sum_{1\le i\le n} \left.\left(A_{ii}^{(2)}\right)\right|_{\lambda=0} &= (-1)^{n-2} \sum_{1\le i_1<i_2\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

类似地, 可得到

$$k!a_k = f^{(k)}(0) = (-1)^{n-k} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix},$$

其中 $1 \leq k \leq n$. 即

$$a_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}.$$

解法二: 设 $A=(a_{ij})$ 的列向量组是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \cdots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & 0 - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用行列式的性质, $|\lambda I - A|$ 可以拆成 2^n 个行列式之和, 它们是

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$|-\alpha_1, \cdots, -\alpha_{j_1-1}, \lambda\varepsilon_{j_1}, -\alpha_{j_1+1}, \cdots, \lambda\varepsilon_{j_2}, \cdots, \lambda\varepsilon_{j_{n-k}}, \cdots, -\alpha_n|,$$

其中 $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k} \leq n, k = 1, 2, \cdots, n-1$.

上述第一个行列式等于 λ^n, 第二个行列式等于 $(-1)^n|A|$, 对于第三种类型的行列式, 按第 $j_1, j_2, \cdots, j_{n-k}$ 列展开, 这 $n-k$ 列元素组成的 $n-k$ 阶子式只有一个不为 0:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-k},$$

其余 $n-k$ 阶子式全为 0, 这个不等于 0 的 $n-k$ 阶子式的代数余子式为

$$\begin{aligned} &(-1)^{(j_1+j_2+\cdots+j_{n-k})+(j_1+j_2+\cdots+j_{n-k})}(-A)\begin{pmatrix} j_1{}' & j_2{}' & \cdots & j_k{}' \\ j_1{}' & j_2{}' & \cdots & j_k{}' \end{pmatrix} \\ =&(-1)^k A\begin{pmatrix} j_1{}' & j_2{}' & \cdots & j_k{}' \\ j_1{}' & j_2{}' & \cdots & j_k{}' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $\{j_1', j_2', \cdots, j_k'\} \in \{1, 2, \cdots, n\} \backslash \{j_1, j_2, \cdots, j_{n-k}\}$, 且 $j_1' < j_2' < \cdots < j_k'$. 因此第三种类型的行列式的值为

$$(-1)^k A\begin{pmatrix} j_1{}' & j_2{}' & \cdots & j_k{}' \\ j_1{}' & j_2{}' & \cdots & j_k{}' \end{pmatrix} \lambda^{n-k}.$$

由于 $1 \leq j_1' < j_2' < \cdots < j_k' \leq n$, 因此 $|\lambda I - A|$ 中 λ^{n-k} 的系数为

$$(-1)^k \sum_{1\leq j'_1<j'_2<\cdots<j'_k\leq n} A\begin{pmatrix} j_1{}' & j_2{}' & \cdots & j_k{}' \\ j_1{}' & j_2{}' & \cdots & j_k{}' \end{pmatrix},$$

其中 $k=1,2,\cdots,n-1$. 特别地, 当 $k=1$ 时, 得到 $|\lambda I-A|$ 中 λ^{n-1} 的系数为

$$-\left(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\right)=-\operatorname{tr}\left(A\right).$$

因此

$$|\lambda I-A|=\lambda^n-\operatorname{tr}\left(A\right)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^k\sum_{1\le j'_1<j'_2<\cdots<j'_k\le n}A\begin{pmatrix} j_1{}' & j_2{}' & \cdots & j_k{}' \\ j_1{}' & j_2{}' & \cdots & j_k{}' \end{pmatrix}\lambda^{n-k}$$
$$+\cdots+(-1)^n\det A.$$

□

第 3 章 矩阵

3.1 矩阵的代数运算

3.1.1 习　　题

习题 3.1.1: 求下列矩阵的乘积:

(i) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$;

(v) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$;

(vi) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{n} \\ -\frac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$;

(vii) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$;

(viii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}^n$;

(ix) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}^n$;

(x) $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$, 其中 $\omega^n = 1$.

✎ 解:

(i)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 1 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(iv) 记

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = (I+A)^n = C_n^0 I^n + C_n^1 I^{n-1}A + C_n^2 I^{n-2}A^2 + + C_n^3 I^{n-3}A^3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(v) 记

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = (I+A)^n = C_n^0 I^n + C_n^1 I^{n-1} A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(vi) 解法二: 不妨记

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{n} \\ -\frac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ -b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{n} \\ -\frac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - \frac{\lambda}{n} b_n \\ b_{n+1} = b_n + \frac{\lambda}{n} a_n \end{cases}.$$

可解得

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - \left(\frac{\lambda^2}{n^2} + 1\right) a_n.$$

从而有

$$\begin{cases} a_{n+2}+\left(-1+\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)a_{n+1}=\left(1+\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)\left[a_{n+1}+\left(-1+\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)a_n\right] \\ a_{n+2}+\left(-1-\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)a_{n+1}=\left(1-\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)\left[a_{n+1}+\left(-1-\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)a_n\right] \end{cases}.$$

又 $a_1=1, a_2=1-\lambda^2/n^2$, 则

$$\begin{cases} a_{n+1}+\left(-1+\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)a_n=\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\left(1+\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)^n \\ a_{n+1}+\left(-1-\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)a_n=-\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\left(1-\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)^n \end{cases},$$

由此得到

$$\begin{cases} a_n=\frac{\left(1+\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)^n+\left(1-\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)^n}{2} \\ b_n=\mathrm{i}\frac{-\left(1+\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)^n+\left(1-\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}\right)^n}{2} \end{cases}.$$

故

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{n} \\ -\frac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \frac{z^n+(\bar{z})^n}{2} & \mathrm{i}\frac{-z^n+(\bar{z})^n}{2} \\ \mathrm{i}\frac{z^n-(\bar{z})^n}{2} & \frac{z^n+(\bar{z})^n}{2} \end{pmatrix},$$

其中 $z=1+\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}$.

证法二: 事实上, 我们可直接将矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{n} \\ -\frac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}$ 对应于复数 $z=1+\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}$, 将 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{n} \\ -\frac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ 对应于复数 z^n, 它的 $(1,1)$ 元素 a_{11} 为复数 z^n 的实部, 即等于 $\frac{1}{2}(z+\bar{z})$; 它的 $(1,2)$ 元素 a_{12} 为复数 z^n 的虚部, 即等于 $\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$. 因此

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{n} \\ -\frac{\lambda}{n} & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \frac{z^n+(\bar{z})^n}{2} & \mathrm{i}\frac{-z^n+(\bar{z})^n}{2} \\ \mathrm{i}\frac{z^n-(\bar{z})^n}{2} & \frac{z^n+(\bar{z})^n}{2} \end{pmatrix},$$

其中 $z=1+\frac{\lambda}{n}\mathrm{i}$.

(vii)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \frac{z^n+(\bar{z})^n}{2} & \frac{z^n-(\bar{z})^n}{2\mathrm{i}} \\ -\frac{z^n-(\bar{z})^n}{2\mathrm{i}} & \frac{z^n+(\bar{z})^n}{2} \end{pmatrix},$$

其中 $z=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$.

(viii) 显然这种对角线元素为 0 的上三角矩阵, 每相乘一次 “不全为零元构成的斜线减少一条” , 乘以 $n-1$ 次后, 矩阵退化为零矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}^n=\mathbf{0}.$$

(ix) 记

$$I=\begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}^{n} = (I+A)^n$$

$$= C_n^0 I^n + C_n^1 I^{n-1}A + C_n^2 I^{n-2}A^2 + \cdots + C_n^{n-1} I A^{n-1} + C_n^n A^n$$

$$= \lambda^n \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} + C_n^1 \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$+ C_n^2 \lambda^{n-2} \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} + \cdots + C_n^{n-1}\lambda \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} + \mathbf{0}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2} & \cdots & C_n^{n-1}\lambda \\ & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & C_n^2\lambda^{n-2} \\ & & & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} \\ & & & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

(x) 令 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, 则有

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(1) & f(\omega) & f(\omega^2) & \cdots & f(\omega^{n-1}) \\ f(1) & \omega f(\omega) & \omega^2 f(\omega^2) & \cdots & \omega^{n-1} f(\omega^{n-1}) \\ f(1) & \omega^2 f(\omega) & \omega^4 f(\omega^2) & \cdots & \omega^{2(n-1)} f(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(1) & \omega^{n-1} f(\omega) & \omega^{2(n-1)} f(\omega^2) & \cdots & \omega^{(n-1)^2} f(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

□

习题 3.1.2: 计算 $AB - BA$:

(i) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}$;

(ii) $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&2\\-1&2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&1&-1\\3&-2&4\\-3&5&-1\end{pmatrix}$.

✎ **解:**

(i)

$$AB-BA=\begin{pmatrix}-3&7&2\\6&8&4\\-1&11&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&11&9\\0&-6&0\\6&6&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-4&-7\\6&14&4\\-7&5&-4\end{pmatrix}.$$

(ii)

$$AB-BA=\begin{pmatrix}9&0&2\\0&9&1\\0&0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&2&1\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

□

习题 3.1.3: 求出所有和方阵 A 可交换的方阵:

(i) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix}$;

(ii) $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

✎ **解:**

(i) 设

$$B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{31}&a_{12}+a_{32}&a_{13}+a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\3a_{11}+a_{21}+2a_{31}&3a_{12}+a_{22}+2a_{32}&3a_{13}+a_{23}+2a_{33}\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}a_{11}+3a_{13}&a_{12}+a_{13}&a_{11}+2a_{13}\\a_{21}+3a_{23}&a_{22}+a_{23}&a_{21}+2a_{23}\\a_{31}+3a_{33}&a_{32}+a_{33}&a_{31}+2a_{33}\end{pmatrix}.,$$

由 $AB=BA$ 可知 $a_{31}=3a_{13}, a_{32}=a_{13}, a_{33}=a_{11}+a_{13}=3a_{12}+a_{22}+a_{32}, a_{21}=a_{23}=0$, 故

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}-3a_{12} & 0 \\ 3a_{13} & a_{13} & a_{11}+a_{13} \end{pmatrix}.$$

(ii) 设

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} b_{14} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{24} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{34} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{44} & b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix},$$

由 $AB=BA$ 可知 $b_{43}=b_{32}=b_{21}=b_{14}, b_{44}=b_{33}=b_{22}=b_{11}, b_{41}=b_{34}=b_{23}=b_{12}, b_{42}=b_{31}=b_{24}=b_{13}$, 故

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{14} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{13} & b_{14} & b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{11} \end{pmatrix}.$$

□

习题 3.1.4: 证明: 如果方阵 A 和 B 可交换, 则

(i) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;

(ii) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$;

(iii) $(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+C_n^2A^{n-2}B^2+\cdots+C_n^{n-1}AB^{n-1}+B^n$.

证:

(i)

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A^2+AB+BA+B^2 \\ &= A^2+AB+AB+B^2 \\ &= A^2+2AB+B^2.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) &= A^2-AB+BA-B^2 \\ &= A^2-AB+AB-B^2=A^2-B^2.\end{aligned}$$

(iii) 利用数学归纳法进行证明.

当 $n=1$ 时, 结论是平凡的; 当 $n=2$ 时, 上面已证明.

假设 $n=k$ 时等式成立, 即有

$$(A+B)^k = A^k + C_k^1 A^{k-1}B + C_k^2 A^{k-2}B^2 + \cdots + C_k^{k-1} AB^{k-1} + B^k,$$

讨论 $n=k+1$ 的情形.

注意到

$$B^k A = B^{k-1}AB = B^{k-2}AB^2 = \cdots = AB^k, k \in \mathbb{N},$$

以及

$$C_k^l + C_k^{l-1} = C_{k+1}^l, l = 1, 2, \cdots, k,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&(A+B)^{k+1} = (A+B)^k (A+B)\\
&= \left(A^k + C_k^1 A^{k-1}B + C_k^2 A^{k-2}B^2 + \cdots + C_k^{k-1} AB^{k-1} + B^k\right)(A+B)\\
&= A^{k+1} + C_k^1 A^{k-1}BA + C_k^2 A^{k-2}B^2 A + \cdots + C_k^{k-1} AB^{k-1}A + B^k A\\
&+ A^k B + C_k^1 A^{k-1}B^2 + C_k^2 A^{k-2}B^3 + \cdots + C_k^{k-1} AB^k + B^{k+1}\\
&= A^{k+1} + C_k^1 A^k B + C_k^2 A^{k-1}B^2 + \cdots + C_k^{k-1} A^2 B^{k-1} + AB^k\\
&+ A^k B + C_k^1 A^{k-1}B^2 + C_k^2 A^{k-2}B^3 + \cdots + C_k^{k-1} AB^k + B^{k+1}\\
&= A^{k+1} + \left(C_k^1 + C_k^0\right) A^k B + \left(C_k^2 + C_k^1\right) A^{k-1}B^2 + \cdots\\
&+ \left(C_k^{k-1} + C_k^{k-2}\right) A^2 B^{k-1} + \left(C_k^k + C_k^{k-1}\right) AB^k + B^{k+1}\\
&= A^{k+1} + C_{k+1}^1 A^k B + C_{k+1}^2 A^{k-1}B^2 + \cdots + C_{k+1}^{k-1} A^2 B^{k-1} + C_{k+1}^k AB^k + B^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

习题 3.1.5: 设 n 阶对角矩阵 A 的对角元两两不等. 证明: n 阶方阵 B 与 A 可交换的充分必要条件是, B 为对角矩阵. 能否推广到准对角情形, 即

$$A = \operatorname{diag}\left(\lambda_1 I_{(k_1)}, \lambda_2 I_{(k_2)}, \cdots, \lambda_t I_{(k_t)}\right),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 两两不等, $k_1 + k_2 + \cdots + k_t = n$.

证: 先证必要性. 记 $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), B = (b_{ij})_{n\times n}$, 其中 $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$. 记

$$AB = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\alpha_1} \\ \overrightarrow{\alpha_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\alpha_n} \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\beta_1} \\ \overrightarrow{\beta_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\beta_n} \end{pmatrix},$$

则有

$$\overrightarrow{\alpha_1} = (\lambda_1 b_{11}, \lambda_1 b_{12}, \cdots, \lambda_1 b_{1n}), \overrightarrow{\beta_1} = (\lambda_1 b_{11}, \lambda_2 b_{12}, \cdots, \lambda_n b_{1n}).$$

由 $AB=BA$ 可知 $\overrightarrow{\alpha_1}=\overrightarrow{\beta_1}$, 因此有

$$\lambda_1 b_{11}=\lambda_2 b_{11}, \lambda_1 b_{12}=\lambda_2 b_{12}, \cdots, \lambda_1 b_{1n}=\lambda_n b_{1n}.$$

又 $\lambda_i \neq \lambda_1, i=2,3,\cdots,n$, 因此有

$$b_{12}=b_{13}=\cdots=b_{1n}=0.$$

类似地, 我们考察

$$\overrightarrow{\alpha_i}=\left(\lambda_i b_{i1}, \lambda_i b_{i2}, \cdots, \lambda_i b_{in}\right), \overrightarrow{\beta_i}=\left(\lambda_1 b_{i1}, \lambda_2 b_{i2}, \cdots, \lambda_n b_{in}\right).$$

可以得到

$$b_{i1}=b_{i2}=\cdots=b_{i,i-1}=b_{i,i+1}=\cdots=b_{in}=0, i=1,2,3,\cdots,n.$$

从而得出方阵 B 为对角方阵.

再证充分性. 记 $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n), B=\operatorname{diag}(m_1,m_2,\cdots,m_n)$, 显然有 $AB=BA=\operatorname{diag}(\lambda_1 m_1,\lambda_2 m_2,\cdots,\lambda_n m_n)$.

不能推广到准对角情形. 存在反例: 记 $A=\operatorname{diag}(m_1,m_2,\cdots,m_n)$, 若 $m_i=m_j, i\neq j$, 则存在一个“伪对角”方阵 B 满足: 对角线元素与 b_{ij}, b_{ji} 可任意取值, 其余元素均为 0, 使得 A 与 B 可交换. □

习题 3.1.6: 证明下述结论:

(i) **上三角方阵的乘积仍是上三角的;**

(ii) **如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个 n 阶上三角方阵, 且方阵 A_i 的 (i,i) 系数为零, $i=1,2,\cdots,n$, 则 $A_1A_2\cdots A_n=0$.**

证:

(i) 记 $A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij}=b_{ij}=0, i>j$. 又记 $C=AB=B=(c_{ij})_{n\times n}$. 若 $i>j$, 我们有 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. 由于 $i>j$, 对于 $k=1,2,\cdots,n$, 当 $i>k$ 时, $a_{ik}=0$; 当 $i\leq k$, 必有 $k>j$, 此时 $b_{kj}=0$. 因此必有 $a_{ik}b_{kj}=0$, 进而 $c_{ij}=0, i>j$. 故 $C=AB$ 为上三角方阵.

(ii) 记 $A_1=(a_{ij})_{n\times n}, A_2=(b_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij}=b_{ij}=0, i>j$ 且 $a_{11}=0, b_{22}=0$. 又记 $C=A_1A_2=(c_{ij})_{n\times n}$, 则有 $c_{ij}=0, i>j$ 且

$$c_{i1}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1}=\sum_{k=2}^{n} a_{ik}b_{k1}+a_{i1}b_{11}=0.$$

前者是因为 $k>1, b_{k1}=0$, 后者是因为 $a_{i1}=0$. 还有

$$c_{i2}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2}=\sum_{k=2}^{n} a_{ik}b_{k2}+a_{i1}b_{12}=0.$$

前者是因为 $k\geq 2$ 时, $b_{k2}=0$, 后者是因为 $a_{i1}=0$. 故 $C=A_1A_2$ 的第 1, 2 列系数均为 0.

接下来考察 $D=CA_3$. 记 $A_3=(d_{ij})_{n\times n}, D=(e_{ij})_{n\times n}$, 其中 $d_{ij}=0, i>j$ 且 $d_{33}=0$. 则有

$$e_{i3}=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}d_{k3}=\sum_{k=3}^{n}c_{ik}d_{k3}+c_{i1}d_{13}+c_{i2}d_{23}=0.$$

第一个式子是因为 $d_{k3}=0, k\geq 3$, 第二、第三个式子是因为 $c_{i1}=c_{i2}=0$. 故 $D=CA_3=A_1A_2A_3$ 的前三列系数均为零. 类似的讨论继续进行下去, 我们可得知 $A_1A_2\cdots A_n$ 的前 n 列系数均为 0, 即 $A_1A_2\cdots A_n=0$.

□

习题 3.1.7: 设 k 是正整数, 适合 $A^k=\mathbf{0}$ 的方阵 A 称为幂零的, 使得

$$A^k=\mathbf{0}$$

成立的最小正整数称为方阵 A 的幂零指数. 证明: 上三角方阵 A 为幂零的充分必要条件是 A 的对角元素全为零, 并且 A 的幂零指数不超过它的阶数.

证: 记 $A=(a_{ij})_{n\times n}, A^k=(b_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij}=b_{ij}=0, i>j$. 由于 A^k 的 (i,i) 元素 b_{ii} 满足 $b_{ii}=a_{ii}^k$, 再由 $A^k=\mathbf{0}$ 可知 $a_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n$. 再根据上题中的结论可知 $A^n=\mathbf{0}$, 故 A 的幂零指数不超过它的阶数. □

习题 3.1.8: 求出所有 2 阶幂零方阵.

解: 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

则有

$$A^2=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11}+a_{22}) \\ a_{21}(a_{11}+a_{22}) & a_{12}a_{21}+a_{22}^2 \end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

故 $a_{22}^2=a_{11}^2$.

1. 若 $a_{11}=a_{22}$.
   (a) 若 $a_{11}=a_{22}=0$, 则 $a_{12}=0$ 或者 $a_{21}=0$;
   (b) 若 $a_{11}=a_{22}\neq 0$, 则 $a_{12}=a_{21}=0$, 此时由 $a_{11}^2+a_{12}a_{21}=0$, 得出 $a_{11}=0$, 矛盾.
2. 若 $a_{11}=-a_{22}$, 只需满足 $a_{11}^2+a_{12}a_{21}=0$ 即可.

综上,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}, a_{11}^2+a_{12}a_{21}=0.$$

□

习题 3.1.9: 如果方阵 A 适合 $A^2=I$, 则 A 称为对合. 求出所有 2 阶对合方阵.

解: 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

则有

$$A^2=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}a_{21} & a_{12}\left(a_{11}+a_{22}\right) \\ a_{21}\left(a_{11}+a_{22}\right) & a_{12}a_{21}+a_{22}^2 \end{pmatrix}=I.$$

故 $a_{22}^2=a_{11}^2$.

1. 若 $a_{11}=a_{22}$.
   (a) 若 $a_{11}=a_{22}=0$, 则 $a_{12}=a_{21}=1$;
   (b) 若 $a_{11}=a_{22}\neq 0$, 则 $a_{12}=a_{21}=0$, 此时由 $a_{11}^2+a_{12}a_{21}=1$, 得出 $a_{11}=a_{22}=\pm 1$.
2. 若 $a_{11}=-a_{22}$, 只需满足 $a_{11}^2+a_{12}a_{21}=1$ 即可.

综上,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

或

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}, a_{11}^2+a_{12}a_{21}=1.$$

□

习题 3.1.10: 如果方阵 A 适合 $A^2=A$, 则 A 称为幂等的. 求出所有 2 阶幂等方阵.

解: 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

则有

$$A^2=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}a_{21} & a_{12}\left(a_{11}+a_{22}\right) \\ a_{21}\left(a_{11}+a_{22}\right) & a_{12}a_{21}+a_{22}^2 \end{pmatrix}=I.$$

1. 若 $a_{11}+a_{22}=1$, 当 $a_{11}^2+a_{12}a_{21}=a_{11}$ 时, $a_{12}a_{21}+a_{22}^2=a_{22}$ 亦成立, 由于 $a_{11}-a_{11}^2=a_{22}-a_{22}^2$.
2. 若 $a_{11}+a_{22}\neq 1$, 则 $a_{12}=a_{21}=0$, 于是有 $a_{11}^2=a_{11}, a_{22}^2=a_{22}$

综上,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

或

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1-a_{11} \end{pmatrix}, a_{11}^2-a_{11}+a_{12}a_{21}=0.$$

□

习题 3.1.11: 证明: 如果 A 是 n 阶对合方阵, 则 $B=\frac{1}{2}(A+I_{(n)})$ 是幂等的; 反之, 如果 B 是 n 阶幂等方阵, 则 $A=2B-I_{(n)}$ 是对合.

☞ 证: 若 A 是 n 阶对合方阵, 则

$$\begin{aligned} B^2 &= \left[\frac{1}{2}\left(A + I_{(n)}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}I_{(n)} \\ &= \frac{1}{4}I_{(n)} + \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}I_{(n)} = \frac{1}{2}\left(A + I_{(n)}\right) = B. \end{aligned}$$

反之, 若 B 是 n 阶幂等方阵, 则

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(2B - I_{(n)}\right)^2 = 4B^2 - 4B + I_{(n)} \\ &= 4B - 4B + I_{(n)} = I_{(n)}. \end{aligned}$$

□

习题 3.1.12: 适合 $A^T = A$ 的方阵称为对称方阵. 证明:

(i) 设 $B \in F^{m\times n}$, 则 BB^T 是对称的;

(ii) n 阶对称方阵 A 和 B 的乘积 AB 为对称方阵的充分必要条件是, 方阵 A 和 B 可交换.

☞ 证:

(i)

$$\left(BB^T\right)^T = \left(B^T\right)^T B^T = BB^T;$$

(ii)

$$(AB)^T = (B)^T A^T = BA.$$

□

习题 3.1.13: 适合 $A^T = -A$ 的方阵称为斜对称的. 证明:

(i) 斜对称方阵 A 和 B 的乘积 AB 为斜对称方阵的充分必要条件是 $AB = -BA$;

(ii) 斜对称方阵 A 和 B 的乘积 AB 为对称的充分必要条件是方阵 A 和 B 可交换.

☞ 证:

(i)

$$(AB)^T = (B)^T A^T = (-B)(-A) = BA$$

(ii)

$$(AB)^T = (B)^T A^T = (-B)(-A) = BA.$$

□

习题 3.1.14: 证明: 任意一个方阵 A 都可以唯一地分解为对称方阵 S 和斜对称方阵 K 之和.

☞ 证: 取

$$S = \frac{A + A^T}{2}, K = \frac{A - A^T}{2}$$

即可.

□

习题 3.1.15: 适合 $\overline{A}^T = -A$ 的复方阵称为 Hermite 方阵. 证明: 对任意 $A \in C^{m\times n}$, $A\overline{A}^T$ 是 Hermite 的.

证:

$$\overline{\left(A\overline{A}^T\right)}^T = \left(\overline{A}A^T\right)^T = \left(A^T\right)^T\overline{A}^T = A\overline{A}^T.$$

□

习题 3.1.16: 证明: 对角块都是方的准上三角方阵为幂零的充分必要条件是, 它的每一个对角块都是幂零的.

证: 记对角块矩阵 $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_n)$, 则

$$A^k = \mathrm{diag}(A_1^k, A_2^k, \cdots, A_n^k) = \mathbf{0},$$

故 $A_i^k = 0$. □

习题 3.1.17: 对角元素都相等的对角方阵称为纯量方阵. 证明: 和所有 n 阶方阵都可交换的方阵一定是纯量方阵.

证: 首先, 由上面的习题 3.1.5 可知该方阵 A 必为对角方阵. 其次, 取

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

由 $AB = BA$ 立得 A 的对角线系数均相等, 故它一定是纯量方阵. □

习题 3.1.18: 设 n 阶方阵 A 的每一行上都恰有 2 个元素为 1, 而其他元素为零, J 是元素全为 1 的 n 阶方阵. 求出所有适合 $A^2 + 2A = 2J$ 的 n 阶方阵 A.

解: 不妨设 $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}, J = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$. 注意到

$$b_{ii} = 2a_{ii} + \sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{li} = 3a_{ii} + \sum_{l=1,l\neq i}^{n} a_{il}a_{li} = 2,$$

故 a_{ii} 不等于 1, 即 $a_{ii} = 0$.

假设 $a_{1i_1} = a_{1i_2} = 1$, 易知 $a_{i_11} = a_{i_21} = 1$, 且存在 k_1, k_2 使得 $a_{i_1k_1} = a_{i_2k_2} = 1$, 故 A^2 每行元素之和为 4, 即 A^2 所有元素之和为 $4n$.

同时注意到 $2A$ 元素之和为 $4n$, $2J$ 元素之和为 $2n^2$, 则 $8n = 2n^2$, 解得 $n = 4$, 即 A 为 4 阶矩阵.

易知, 此时 A 可为以下三种情况:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

推论 3.1

对于 $2k$ 阶方阵, 存在 C_{2k-1}^{k} 个方阵 A, 使得每个方阵的每行都有 k 个元素为 1, 其它元素均为 0, 且满足 $A^2+kA=kI$. 能否将 "存在" 改为 "有且仅有"?

3.2 Binet-Cauchy 公式

3.2.1 习　　题

习题 3.2.1: 设 $A\in\mathbb{F}^{2\times 2}$. 证明: $A^2-\mathrm{tr}(A)A+(\det A)I_{(2)}=0$.

证: 证法一: 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} f(\lambda)=|\lambda E-A|=&\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{12} & \lambda-a_{22}\end{vmatrix}\\ =&\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{12}\\ =&\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda+(\det A). \end{aligned}$$

由 Hamilton—Cayley 定理可知 $A^2-\mathrm{tr}(A)A+(\det A)I_{(2)}=0$.

证法二: 直接运算即可, 注意到

$$\begin{aligned} A^2&=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}\\ a_{11}a_{21}+a_{21}a_{22} & a_{12}a_{21}+a_{22}^2\end{pmatrix},\\ \mathrm{tr}(A)A&=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{11}a_{22} & a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}\\ a_{11}a_{21}+a_{21}a_{22} & a_{11}a_{22}+a_{22}^2\end{pmatrix},\\ (\det A)\,I_{(n)}&=\begin{pmatrix} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & 0\\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

验证即可. □

习题 3.2.2: 证明: 不存在 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 使得 $AB-BA=I_{(n)}$.

证: 假设存在满足题意的 A,B, 则

$$n=\mathrm{tr}\left(I_{(n)}\right)=\mathrm{tr}\,(AB-BA)=\mathrm{tr}\,(AB)-\mathrm{tr}\,(BA)=0,$$

矛盾. 因此不存在矩阵 A,B 满足题意. □

习题 3.2.3: 利用等式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明定理 1.

证: 对等号左边的矩阵作行变换依次将第 $n+1, n+2, \cdots, 2n$ 行扩大 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 倍加到第 i 行, $i = 1, 2, \cdots, n$, 并且将 $n+1, n+2, \cdots, 2n$ 列分别与第 $1, 2, \cdots, n$ 列对换, 可得到分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ -I_{(n)} & B \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} C & 0 \\ B & -I_{(n)} \end{pmatrix} = D,$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{in}b_{nj},$$

因此 $C = AB$, 故

$$|A|\,|B| = |D| = (-1)^n\,|C|\,\left|-I_{(n)}\right| = |C| = |AB|\,.$$

□

习题 3.2.4: 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$, 其中等幂和 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, k = 1, 2, \cdots$.

(2) 记 $\varphi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + \cdots + a_{n-1,i}x^{n-1}$, 且

$$D = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

求

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \cdots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & \cdots & (n-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & 1^2 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$.

✎ **解:**

(1)

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \\ =&\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ =&\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\cdot\prod_{i=1}^n(x-x_i)\cdot\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i) \\ =&\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)^2\cdot\prod_{i=1}^n(x-x_i), \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}
\varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \cdots & \varphi_0(x_n) \\
\varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_n)
\end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix}
a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\
a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1}
\end{pmatrix}^T
\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{vmatrix}
\varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \cdots & \varphi_0(x_n) \\
\varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \cdots & \varphi_{n-1}(x_n)
\end{vmatrix} = D \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).
$$

(3) 取 $a_k = (k+1)^2$, 而

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} = x \sum_{k=1}^{n} k(k-1) x^{k-2} + \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \left(x^k\right)'' + \sum_{k=1}^{n} \left(x^k\right)' = x \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)'' + \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' \\
&= \frac{n^2 x^{n+2} + \left(2n^2 + 2n - 1\right) x^{n+1} - (n+1)^2 x^n + x + 1}{(1-x)^3}.
\end{aligned}
$$

由例 1,

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \prod_{i=0}^{n-1} f\left(\omega^i\right) \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{n^2 \omega^{2i} + \left(2n^2 + 2n - 1\right) \omega^i - (n+1)^2 + \omega^i + 1}{\left(1 - \omega^i\right)^3} \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{n^2 \omega^{2i} + \left(2n^2 + 2n\right) \omega^i - \left(n^2 + 2n\right)}{\left(1 - \omega^i\right)^3}.
\end{aligned}
$$

(4) 记所求行列式值的矩阵为 A. 设 ω 满足 $\omega^n = -1$ 且 $\omega^i \neq -1, 1 \le i \le n-1$, 而 $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$. 取 n 阶矩阵

$$
B = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\
1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2}
\end{pmatrix}.
$$

容易验证

$$AB = B\mathrm{diag}\left(f(1), f(\omega), f(\omega^2), \cdots, f\left(\omega^{n-1}\right)\right).$$

上式两端各取行列式, 得到

$$\det A \det B = \left(\prod_{i=0}^{n-1} f\left(\omega^i\right)\right) \det B.$$

显然, Vandermonde 行列式 $\det B = \prod\limits_{1\le i<j\le n} (\omega^j - \omega^i) \neq 0$. 因此

$$\det A = \prod_{i=0}^{n-1} f\left(\omega^i\right).$$

□

习题 3.2.5: 利用矩阵乘法, 直接求出下列行列式 $\det AB$, 并用 Binet—Cauchy 公式加以验证:

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

解:

(1)

$$\det AB = \det \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = -3.$$

此时 $p = 2 < q = 3$, 由 Binet—Cauchy 公式,

$$\begin{aligned} \det AB &= \sum_{1\le j_1<j_2\le 3} A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-3)\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = -3. \end{aligned}$$

经检验, 两种方法得到的结果是相同的.

(2)

$$\det AB = \det \begin{pmatrix} 11 & 19 & 18 & 19 \\ 4 & 11 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \\ 8 & 13 & 13 & 14 \end{pmatrix} = 0,$$

因为我们注意到 $r_1 = r_3 + r_4$. 此时 $p = 4 > q = 2$, 由 Binet—Cauchy 公式, 立得

$$\det AB = 0.$$

经检验, 两种方法得到的结果是相同的. □

习题 3.2.6: 求矩阵 $AB = C$ 的子式 $C\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, 其中 A 为主对角线元素全为 0 而其他元素为 1 的 6 阶方阵, 而

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

✎ **解:** 首先,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

而 $r=3\le q=6$, 由本节定理 3 可知,

$$C\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le 6}A\begin{pmatrix}1&2&3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1&k_2&k_3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$=A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&4\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&2&4\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$+A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&5\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&2&5\\4&5&6\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&6\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&2&6\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$+A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&3&4\\4&5&6\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&3&5\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$+A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&3&6\\4&5&6\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&4&5\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&4&5\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$+A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&4&6\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&4&6\\4&5&6\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&5&6\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&5&6\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$+A\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}2&3&4\\4&5&6\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}2&3&5\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$+A\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&6\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}2&3&6\\4&5&6\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}2&4&5\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$+A\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}2&4&6\\4&5&6\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}2&5&6\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$+A\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}3&4&5\\4&5&6\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&6\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}3&4&6\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$+A\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&6\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}3&5&6\\4&5&6\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}4&5&6\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$=2\times(-4)+1\times(-4)+1\times(-4)+1\times(-3)+0+0+(-1)\times(-17)+0+0+0$$

$$+0+0+1\times(-19)+0+0+0+0+0+0+0=-21.$$

□

习题 3.2.7: 适合 $AA^T=I_{(n)}=A^TA$ 的 n 阶实方阵 A 称为正交的. 证明:

(1) 正交方阵的行列式等于 ±1;

(2) 位于正交方阵的 k 个行上的所有 k 阶子式的平方和等于 $1, k=1,2,\cdots,n$.

证:

(1)

$$\det\left(AA^T\right)=\det\left(I_{(n)}\right)=1=\det A\cdot\det A^T=(\det A)^2\Rightarrow\det A=\pm1.$$

(2) 记 $C=AA^T=I_{(n)}$, 我们有

$$1=C\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}=\sum_{1\le m_1<m_2<\cdots<m_k\le n}\left[A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\m_1&m_2&\cdots&m_k\end{pmatrix}\right]^2.$$

□

习题 3.2.8: 适合 $A\overline{A}^T = I_{(n)} = \overline{A}^T A$ 的 n 阶复方阵 A 称为酉方阵. 证明:

(1) 酉方阵的行列式的模为 1;

(2) 位于酉方阵的 k 个行上的所有 k 阶子式的模的平方和为 1.

证:

(1)

$$\begin{aligned}\det\left(A\bar{A}^T\right) &= \det\left(I_{(n)}\right) = 1 = \det A \cdot \det \bar{A}^T = \det A \cdot \det \bar{A}\\ &= \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2 \Rightarrow |\det A| = 1\end{aligned}$$

.

(2) 记 $C = A\overline{A}^T = I_{(n)}$, 我们有

$$\begin{aligned}1 &= C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}\\ &= \sum_{1\le m_1<m_2<\cdots<m_k\le n}\left[A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k\end{pmatrix}\overline{A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k\end{pmatrix}}\right]\\ &= \sum_{1\le m_1<m_2<\cdots<m_k\le n}\left|A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k\end{pmatrix}\right|^2.\end{aligned}$$

□

习题 3.2.9: 当 $j_1 = i_1, j_2 = i_2, \cdots, j_k = i_k$ 时, 矩阵 A 的子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 称为矩阵 A 的一个 k 阶主子式, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. 证明: 矩阵 $A\overline{A}^T$ 的每一个主子式都是非负实数.

证: 记 $C = A\overline{A}^T$, 我们有

$$\begin{aligned}&C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}\\ &= \sum_{1\le m_1<m_2<\cdots<m_k\le n}\left[A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k\end{pmatrix}\overline{A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k\end{pmatrix}}\right]\\ &= \sum_{1\le m_1<m_2<\cdots<m_k\le n}\left|A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k\end{pmatrix}\right|^2 \ge 0.\end{aligned}$$

□

习题 3.2.10: 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 证明: 方阵 AB 和 BA 的所有 k 阶主子式之和相等. 由此证明:

$$\det\left(\lambda I_{(n)} - AB\right) = \det\left(\lambda I_{(n)} - BA\right).$$

☞ **证:** 记 $C_1=AB, C_2=BA$, 注意到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} C_1\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}\\
=&\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\ \sum_{1\le m_1<m_2<\cdots<m_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}\\
=&\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\ \sum_{1\le m_1<m_2<\cdots<m_k\le n} B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}\\
=&\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} C_1\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

这是因为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 和 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 均为 $1,2,\cdots,n$ 的 k 阶子列的有序排列, 地位是相同的, 可进行交换. 又

$$
f(\lambda)=\det\left(\lambda I_{(n)}-AB\right)=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} C_1\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}\lambda^{n-k}
$$

$$
=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} C_2\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}\lambda^{n-k}=g(\lambda)=\det\left(\lambda I_{(n)}-BA\right).
$$

证毕. □

习题 3.2.11: 设 $A=(B,C)\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 其中 B 是矩阵 A 的前 k 列构成的子矩阵. 证明:

$$
|\det A|^2\le\det\left(\overline{B}^TB\right)\det\left(\overline{C}^TC\right).
$$

☞ **证:** 把 $|A|$ 按前 k 列展开, 有

$$
\det A=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} B\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ 1 & \cdots & k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{k+1} & \cdots & i_n \\ k+1 & \cdots & n \end{pmatrix}.
$$

由 Cauchy—Schwarz 不等式

$$
\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\omega_j\right|^2\le\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|\omega_j|^2\right),
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
|\det A|^2&=\left|\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} B\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ 1 & \cdots & k \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} i_{k+1} & \cdots & i_n \\ k+1 & \cdots & n \end{pmatrix}\right|^2\\
&\le\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left|B\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ 1 & \cdots & k \end{pmatrix}\right|^2\right)\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left|C\begin{pmatrix} i_{k+1} & \cdots & i_n \\ k+1 & \cdots & n \end{pmatrix}\right|^2\right)\\
&=\det\left(\bar{B}^TB\right)\det\left(\bar{C}^TC\right).
\end{aligned}
$$

□

3.3 可逆矩阵

3.3.1 习　　题

习题 3.3.1: 求下列方阵的逆矩阵:

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(3) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix},\text{其中 } \omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n};$$

(4) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

解:

(1)

$$A^* = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & -\frac14 & -\frac14 \\ \frac14 & -\frac14 & \frac14 & -\frac14 \\ \frac14 & -\frac14 & -\frac14 & \frac14 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$A^* = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 记

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2}\end{pmatrix},$$

我们注意到当 $k,l=0,1,\cdots,n-1$ 且 $k\neq l$ 时, 有

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^k\overline{\omega}^l\right)^k=\frac{1-\left(\omega^k\overline{\omega}^l\right)^n}{1-\omega^k\overline{\omega}^l}=0.$$

当 $k=l$ 时, 有

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^k\overline{\omega}^l\right)^k=n.$$

因此

$$AA^H=nI_{(n)},$$

其中 A^H 表示 A 的共轭转置矩阵. 进而有

$$A^{-1}=\frac{1}{n}A^H.$$

(4) 记题中所给矩阵为 A. 设 $A^{-1}=X=(x_{ij})$, 再根据 $AX=I_{(n)}$ 依次求解各列的 x_{ij} 值. 先考察第一列, 我们得到方程组

$$\begin{cases}2x_{11}-x_{21}=1\\ -x_{11}+2x_{21}-x_{31}=0\\ -x_{21}+2x_{31}-x_{41}=0\\ \vdots\\ -x_{n-2,1}+2x_{n-1,1}-x_{n1}=0\\ -x_{n-1,1}+2x_{n1}=0\end{cases}$$

归纳可得 $x_{k1}=kx_{11}-1$, 再根据 $-x_{n-1,1}+2x_{n1}=0$ 解得

$$x_{k1}=\frac{n+1-k}{n+1}.$$

考察 X 的第 i 列, 我们得到方程组

$$\begin{cases}2x_{1i}-x_{2i}=0\\ -x_{1i}+2x_{2i}-x_{3i}=0\\ -x_{2i}+2x_{3i}-x_{4i}=0\\ \vdots\\ -x_{i-2,i}+2x_{i-1,i}-x_{i,i}=0\\ -x_{i-1,i}+2x_{ii}-x_{i+1,i}=1\\ -x_{i,i}+2x_{i+1,i}-x_{i+2,i}=0\\ \vdots\\ -x_{n-2,i}+2x_{n-1,i}-x_{ni}=0\\ -x_{n-1,i}+2x_{ni}=0\end{cases}$$

归纳可得当 $1 \leq k \leq i$ 时, 有 $x_{ki} = kx_{1i}$; 而当 $i+1 \leq k \leq n$ 时, 有 $x_{ki} = kx_{1i} - (k-i)$, 再根据 $-x_{n-1,1} + 2x_{n1} = 0$ 解得

$$x_{1i} = \frac{n+1-i}{n+1}.$$

因此

$$x_{ki} = \begin{cases} \frac{k(n+1-i)}{n+1}, & \text{当} 1 \leq k \leq i \\ \frac{i(n+1-k)}{n+1}, & \text{当} i+1 \leq k \leq n \end{cases}$$

从而

$$A^{-1} = \frac{1}{n+1}$$
$$\times \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & \cdots & 2\times 3 & 2\times 2 & 2\times 1 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & \cdots & 3\times 3 & 3\times 2 & 3\times 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 2\times 3 & 3\times 3 & \cdots & (n-2)\times 3 & (n-2)\times 2 & (n-2)\times 1 \\ 2 & 2\times 2 & 3\times 2 & \cdots & (n-2)\times 2 & (n-1)\times 2 & (n-1)\times 1 \\ 1 & 2\times 1 & 3\times 1 & \cdots & (n-2)\times 1 & (n-1)\times 1 & n\times 1 \end{pmatrix}.$$

□

习题 3.3.2: 设 A 是 n 阶幂零方阵. 证明: 方阵 $I_{(n)} - A$ 可逆. 并且如果 A 的幂零指数为 k, 则 $\left(I_{(n)} - A\right)^{-1} = I_{(n)} + A + \cdots + A^{k-1}$.

证: 注意到当 $l \geq k$ 时, 有 $A^l = A^k A^{l-k} = 0$, 因此

$$\begin{aligned} I_{(n)} = I_{(n)} - A^n &= \left(I_{(n)} - A\right)\left(I_{(n)} + A + \cdots + A^{n-1}\right) \\ &= \left(I_{(n)} - A\right)\left(I_{(n)} + A + \cdots + A^{k-1}\right). \end{aligned}$$

因此

$$\left(I_{(n)} - A\right)^{-1} = I_{(n)} + A + \cdots + A^{k-1}.$$

□

习题 3.3.3: 证明: 设 n 阶方阵 A 不可逆, 则存在 n 阶非零的方阵 B, 使得 $AB = 0$.

证: 证法一: 若 n 阶方阵 A 不可逆且 $A \neq 0$ 时, $\det A = 0$, 则 $AA^* = \det A I_{(n)} = 0$, 取 $B = A^*$ 即可, 显然 $B \neq 0$; 当 $A = 0$ 时, B 可任取一非零方阵.

证法二: 设 $\operatorname{rank} A = r$, 则存在 n 阶可逆方阵 P 与 Q, 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q,$$

取

$$B = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(n-r)} \end{pmatrix} Q \neq 0,$$

我们有

$$AB = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QQ^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(n-r)} \end{pmatrix} Q = 0.$$

□

习题 3.3.4: 证明, 当且仅当对角元素全不为零时, 上三角方阵可逆, 并且它的逆仍是上三角的.

证: 考察任一上三角方阵 $A = (a_{ij})$, 则

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow A\text{可逆}.$$

若 A 为上三角方阵, 则 A 的元素 $a_{ij}(i<j)$ 的代数余子式 A_{ij} 都是一个上三角行列式, 且对角线上至少有一个零, 故当 $i<j$ 时 $A_{ij}=0$, 因此伴随矩阵 A^* 为上三角方阵, 则 $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$ 亦为上三角方阵. □

习题 3.3.5: 证明:

(1) 正交方阵一定可逆, 并且它的逆仍是正交方阵;
(2) 酉方阵一定可逆, 并且它的逆仍是酉方阵;
(3) 可逆对称方阵的逆仍是对称方阵;
(4) 可逆斜对称方阵的逆仍是斜对称方阵.

证:

(1) 任一正交方阵 A, 我们有 $AA^T = I_{(n)} = A^TA$, 可知 $\det A = \pm 1 \neq 0$, 因此 A 可逆且 $A^{-1} = A^T$. 又

$$A^{-1}\left(A^{-1}\right)^T = A^TA = I_{(n)} = AA^T = \left(A^{-1}\right)^T A^{-1},$$

故 A^{-1} 仍为正交方阵.

(2) 任一酉方阵 A, 我们有 $A\overline{A}^T = I_{(n)} = \overline{A}^TA$, 可知 $|\det A| = 1$, 故 $|A| \neq 0$, 因此 A 可逆且 $A^{-1} = \overline{A}^T$. 又

$$A^{-1}\overline{(A^{-1})}^T = \overline{A}^TA = I_{(n)} = A\overline{A}^T = \overline{(A^{-1})}^T A^{-1},$$

故 A^{-1} 仍为酉方阵.

(3) 任一可逆对称方阵 A, 我们有 $A^T = A$, 又

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A^{-1},$$

故 A^{-1} 仍为对称方阵.

(4) 任一可逆对称方阵 A, 我们有 $A^T = -A$, 又

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1},$$

故 A^{-1} 仍为斜对称方阵.

□

习题 3.3.6: 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 并且 $I_{(m)} - AB$ 可逆. 证明: $I_{(n)} - BA$ 也可逆, 并且 $\left(I_{(n)} - BA\right)^{-1} = I_{(n)} + B\left(I_{(m)} - AB\right)^{-1}A$.

证: 若 $I_{(m)} - AB$ 可逆, 则 $\det\left(I_{(n)} - BA\right) = \det\left(I_{(m)} - AB\right) \neq 0$, 从而 $I_{(n)} - BA$ 也可逆, 又

$$\begin{aligned}
&\left(I_{(n)} - BA\right)\left(I_{(n)} + B\left(I_{(m)} - AB\right)^{-1}A\right) \\
=&I_{(n)} + B\left(I_{(m)} - AB\right)^{-1}A - BA - BAB\left(I_{(m)} - AB\right)^{-1}A \\
=&I_{(n)} - BA + B\left(I_{(m)} - AB\right)\left(I_{(m)} - AB\right)^{-1}A \\
=&I_{(n)} - BA + BA = I_{(n)},
\end{aligned}$$

因此

$$\left(I_{(n)} - BA\right)^{-1} = I_{(n)} + B\left(I_{(m)} - AB\right)^{-1}A.$$

□

习题 3.3.7: 设 n 阶方阵 A 适合 $a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mI_{(n)} = 0$, 其中 $m \geq 1, a_0a_m \neq 0$. 证明: 方阵 A 可逆, 并求 A^{-1}.

证: 由 $a_0a_m \neq 0$ 可知 $a_0 \neq 0, a_m \neq 0$. 由

$$a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mI_{(n)} = 0$$

可得

$$\begin{aligned}
&|A|\left|a_0A^{m-1} + a_1A^{m-2} + \cdots + a_{m-1}\right| \\
=&\left|A\left(a_0A^{m-1} + a_1A^{m-2} + \cdots + a_{m-1}\right)\right| \\
=&\left|-a_mI_{(n)}\right| = (-a_m)^n \neq 0.
\end{aligned}$$

故 $\det A \neq 0$, 从而 A 可逆, 且由

$$\begin{aligned}
&A\left(-\frac{a_0}{a_m}A^{m-1} - \frac{a_1}{a_m}A^{m-2} - \cdots - \frac{a_{m-2}}{a_m}A - \frac{a_{m-1}}{a_m}\right) \\
=&-\frac{1}{a_m}\left(a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A\right) = I_{(n)}.
\end{aligned}$$

我们得到

$$A^{-1} = -\frac{a_0}{a_m}A^{m-1} - \frac{a_1}{a_m}A^{m-2} - \cdots - \frac{a_{m-2}}{a_m}A - \frac{a_{m-1}}{a_m}.$$

□

习题 3.3.8: 系数都是整数的矩阵称为整系数矩阵. 行列式等于 ± 1 的整系数矩阵称为幺模矩阵. 证明: 整系数矩阵 A 的逆矩阵仍是整系数矩阵的充分必要条件是 A 为幺模矩阵.

证: 必要性. 因为整系数矩阵 A 的逆矩阵仍为整系数矩阵, 故其行列式 $|A^{-1}|$ 为整数, 又 $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$, 且 $|A|$ 为整数, 而 1 的因子只能是 $-1, 1$, 所以只能是 $|A| = \left|A^{-1}\right| = -1$ 或者 $|A| = \left|A^{-1}\right| = 1$, 即 $|A| = \pm 1$, 所以 A 为幺模矩阵.

充分性. 因为 A 为幺模矩阵, 所以 $|A| = \pm 1$, 因此

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = A^* \text{或} - A^*.$$

而 A 为整数矩阵, 所以 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 亦为整数, 从而伴随矩阵 A^* 是整数矩阵, A^{-1} 也是整数矩阵. □

习题 3.3.9: 设 A^* 表示 n 阶方阵 A 的附属方阵, 证明:

(1) $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$, 其中 λ 是实数;

(2) $(AB)^* = B^* A^*$, 其中 B 也是 n 阶方阵.

证:

(1) 记 $B = \lambda A$, 则 B^* 中 B_{ij} 的 $n-1$ 阶子式的元素是 A_{ij} 中的 $n-1$ 阶子式的相应元素乘以 λ 得到的, 因此 $B_{ij} = \lambda^{n-1} A_{ij}$, 进而有 $B^* = \lambda^{n-1} A^*$, 即 $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$.

(2) 证法一: 由于对任意方阵 C, 均有

$$CC^* = C^* C = \det C I_{(n)},$$

故可得

$$\begin{aligned} &|A| \cdot |B| \cdot B^* A^* = |AB| \, I_{(n)} \, (B^* A^*) \\ =&(AB)^* \, (AB) \, (B^* A^*) \\ =&(AB)^* A \, (BB^*) \, A^* = (AB)^* A \, |B| \, I_{(n)} A^* \\ =&(AB)^* A \, |B| \, A^* = |A| \cdot |B| \, (AB)^*. \end{aligned}$$

在上式中, 用 $A - xI_{(n)}, B - xI_{(n)}$ 分别代替 A, B, 等式仍成立, 即有

$$\begin{aligned} &\left|A - xI_{(n)}\right| \cdot \left|B - xI_{(n)}\right| \left(B - xI_{(n)}\right)^* \left(A - xI_{(n)}\right)^* \\ =&\left|A - xI_{(n)}\right| \cdot \left|B - xI_{(n)}\right| \left[\left(A - xI_{(n)}\right) \left(B - xI_{(n)}\right)\right]^*. \end{aligned}$$

总存在实数 x_0, 使得当 $x > x_0$ 时有

$$\left|A - xI_{(n)}\right| \neq 0, \quad \left|B - xI_{(n)}\right| \neq 0.$$

于是当 $x > x_0$ 时总有

$$\left(B - xI_{(n)}\right)^* \left(A - xI_{(n)}\right)^* = \left[\left(A - xI_{(n)}\right) \left(B - xI_{(n)}\right)\right]^*.$$

设左右两端第 i 行 j 列的元素分别为 $f_{ij}(x)$ 及 $g_{ij}(x)$, 上式表明

$$f_{ij}(x) = g_{ij}(x), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

它们都是 x 的多项式, 且对所有 $x > x_0$ 都相等, 故两者恒等. 特别地, $x = 0$ 时也相等, 从而得到

$$B^* A^* = (AB)^*.$$

证法二:

$$
\begin{aligned}
&(AB)^*(i,j) = (-1)^{i+j} AB\begin{pmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & i & \cdots & n \end{pmatrix} \\
=&(-1)^{i+j} \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_{n-1}\le n} A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n \\ v_1 & v_2 & \cdots & \cdots & \cdots & v_{n-1} \end{pmatrix} \\
&B\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & \cdots & \cdots & v_{n-1} \\ 1 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \\
=&(-1)^{i+j}\sum_{k=1}^{n} A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & k-1 & k+1 & \cdots & n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} 1 & \cdots & k-1 & k+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \\
=&\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k} A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & k-1 & k+1 & \cdots & n \end{pmatrix} (-1)^{k+i} B\begin{pmatrix} 1 & \cdots & k-1 & k+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \\
=&\sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A^*(k,j)\,B^*(i,k) = B^*A^*(i,j).
\end{aligned}
$$

□

习题 3.3.10: 设 A_{ij} 是 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $\det A$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式. 证明:

$$
\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{jk} \\ A_{il} & A_{jl} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j+k+l}
$$

$$
\det A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & (i-1) & (i+1) & \cdots & (j-1) & (j+1) & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & (k-1) & (k+1) & \cdots & (l-1) & (l+1) & \cdots & n \end{pmatrix} \det A,
$$

其中 $1\le i<j\le n, 1\le k<l\le n$.

证: 不妨认为 $(i,k)=(n-1,n-1),(j,l)=(n,n)$ (不然, 分别将第 i 行和第 j 行与第 $n-1$ 行和第 n 行互换, 然后分别将第 k 列和第 l 列与第 $n-1$ 列和第 n 列互换).

由

$$
a_{h1}A_{i1}+a_{h2}A_{i2}+\cdots+a_{hn}A_{in} = \begin{cases} \det A, & \text{当} h=i \\ 0, & \text{当} h\ne i \end{cases}
$$

可知

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & A_{n-1,n-2} & A_{n,n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{n-1,n} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \det A & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}.$$

两边取行列式可得

$$\det A \begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{vmatrix} = (\det A)^2 \det A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 \end{pmatrix},$$

若 A 可逆时, $\det A \neq 0$, 则

$$\begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)+n+(n-1)+n} \det A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 \end{pmatrix} \det A.$$

若 A 不可逆时, $\det A = 0$, 由 $\operatorname{rank} A^* \leq 1$ 可知

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \leq 1,$$

则 $\begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$

因此

$$\begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)+n+(n-1)+n} \det A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 \end{pmatrix} \det A$$

成立.

也即

$$\begin{vmatrix} A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{n-1,n} & A_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)+n+(n-1)+n} \det A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 \end{pmatrix} \det A.$$

从而命题成立. □

习题 3.3.11: 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}, \lambda$ 是未定元. 证明:

$$\lambda^n \det\left(\lambda I_{(m)} - AB\right) = \lambda^m \det\left(\lambda I_{(n)} - BA\right).$$

☞ 证: 当 $\lambda=0$ 时显然成立. 下证 $\lambda\neq 0$ 的情况. 取 $m+n$ 阶方阵 $\begin{pmatrix}\lambda I_{(m)} & A\\ B & \lambda I_{(n)}\end{pmatrix}$. 我们有

$$\begin{pmatrix}I_{(m)} & 0\\ -B & I_{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda I_{(m)} & A\\ \lambda B & \lambda I_{(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda I_{(m)} & A\\ 0 & \lambda I_{(n)}-BA\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}I_{(m)} & -\frac{1}{\lambda}A\\ 0 & I_{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda I_{(m)} & A\\ \lambda B & \lambda I_{(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda I_{(m)}-AB & 0\\ \lambda B & \lambda I_{(n)}\end{pmatrix}.$$

取上述两式的行列式, 得到

$$\det\begin{pmatrix}\lambda I_{(m)} & A\\ \lambda B & \lambda I_{(n)}\end{pmatrix}=\lambda^m\det\left(\lambda I_{(n)}-BA\right)=\lambda^n\det\left(\lambda I_{(m)}-AB\right).$$

得证. □

习题 3.3.12: 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 而复数 i 适合 $\mathrm{i}^2=-1$. 证明:

$$\det\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}=\det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B).$$

☞ 证: 注意到

$$\begin{pmatrix}I_{(n)} & \mathrm{i}I_{(n)}\\ 0 & I_{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{(n)} & -\mathrm{i}I_{(n)}\\ 0 & I_{(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+\mathrm{i}B & 0\\ B & A-\mathrm{i}B\end{pmatrix}.$$

取行列式值立得

$$\det\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}=\det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B).$$

□

习题 3.3.13: 求 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式, 其中 $a_{ii}=x+a_i, i=1,2,\cdots,n$, 而 $a_{ij}=a_j, 1\leq i\neq j\leq n$.

✎ 解: 由于

$$\det A=\det A^T=\det\left(xI_{(n)}-\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \cdots & -1\end{pmatrix}\right),$$

令 $m=n,n=1$, 由第 11 题结论可知

$$x\det\left(xI_{(n)}-\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \cdots & -1\end{pmatrix}\right)=x^n\det\left(x-\begin{pmatrix}-1 & \cdots & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\right)$$
$$=x^n\left(x+\sum_{k=1}^n a_k\right).$$

因此

$$\det A=x^{n-1}\left(x+\sum_{k=1}^n a_k\right).$$

□

习题 3.3.14: 设 $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, 且 $A\begin{pmatrix} 0 & I_{(n)} \\ -I_{(n)} & 0 \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} 0 & I_{(n)} \\ -I_{(n)} & 0 \end{pmatrix}$. **证明:** $\det A = 1$.

证: 记 $M = \begin{pmatrix} 0 & I_{(n)} \\ -I_{(n)} & 0 \end{pmatrix}$. 易知 $\det M \neq 0$. 因此由题设 $AMA^T = M$ 可得 $(\det A)^2 \det M = \det M$. 所以 $(\det A)^2 = 1$, 从而 $\det A = \pm 1$. 于是只需证明 $\det A > 0$. 为此将 $2n$ 阶实方阵 A 分块为 $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$, 其中 B, C, D 和 E 都是 n 阶的. 注意到

$$(AM + MA)\, A^T = AMA^T + MAA^T = M + MAA^T = M\left(I_{(2n)} + AA^T\right).$$

上式两端取行列式, 得到

$$\det\,(AM + MA) \det A^T = \det M \det\left(I_{(2n)} + AA^T\right),$$

即

$$\det\,(AM + MA) \det A = \det M \det\left(I_{(2n)} + AA^T\right).$$

由于 AA^T 是 $2n$ 阶半正定实对称方阵, $I_{(2n)}$ 是 $2n$ 阶正定实对称方阵, 因此 $I_{(2n)} + AA^T$ 是正定的, 所以

$$\det(I_{(2n)} + AA^T) > 0.$$

现在计算 $M = \begin{pmatrix} 0 & I_{(n)} \\ -I_{(n)} & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式. 注意到

$$\begin{pmatrix} I_{(n)} & I_{(n)} \\ 0 & I_{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_{(n)} \\ -I_{(n)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(n)} & I_{(n)} \\ 0 & I_{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{(n)} & 0 \\ -I_{(n)} & -I_{(n)} \end{pmatrix}.$$

两边取行列式值, 得到

$$(\det M)\left[\det\begin{pmatrix} I_{(n)} & I_{(n)} \\ 0 & I_{(n)} \end{pmatrix}\right]^2 = \det\begin{pmatrix} -I_{(n)} & 0 \\ -I_{(n)} & -I_{(n)} \end{pmatrix} = (-1)^{2n} = 1,$$

所以 $\det M = 1$. 于是

$$\det\,(AM + MA) \det A = \det\left(I_{(2n)} + AA^T\right) > 0,$$

从而

$$\det\,(AM + MA) \neq 0.$$

现在

$$\begin{aligned} AM + MA &= \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_{(n)} \\ -I_{(n)} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_{(n)} \\ -I_{(n)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -C & B \\ -E & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \\ -B & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D - C & B + E \\ -(B + E) & D - C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由本节习题 3.3.12 的结论可知

$$\begin{aligned}\det(AM+MA) &= \det[(D-C)+\mathrm{i}(B+E)]\det[(D-C)-\mathrm{i}(B+E)]\\ &= |\det[(D-C)+\mathrm{i}(B+E)]|^2 > 0.\end{aligned}$$

从而得到 $\det A > 0$, 故 $\det A = 1$. □

注: *在典型群理论中, 满足题设的 $2n$ 阶方阵 A 称为辛方阵 (例如见华罗庚与万哲先著《典型群》(上海科学技术出版社, 1963 年版)). 本题表明, 任意一个实的辛方阵的行列式都是 1. 另外, 在上面的证明中, 主要用到的是辛方阵 A 的一个性质, 即 $(AM+MA)A^T = M(I_{(2n)}+AA^T)$. 这是证明的关键性一步. 当然, 我们可以把结论推广到复方阵中.*

推论 3.2

设 $A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$, 且 $A\begin{pmatrix}0 & I_{(n)}\\ -I_{(n)} & 0\end{pmatrix}A^T = \begin{pmatrix}0 & I_{(n)}\\ -I_{(n)} & 0\end{pmatrix}$. 证明: $\det A = 1$.

证: 将 $2n$ 阶复方阵 A 分块为 $A = \begin{pmatrix}B & C\\ D & E\end{pmatrix}$, 其中 B, C, D 和 E 是 n 阶复方阵. 由题设条件

$$A\begin{pmatrix}0 & I_{(n)}\\ -I_{(n)} & 0\end{pmatrix}A^T = \begin{pmatrix}0 & I_{(n)}\\ -I_{(n)} & 0\end{pmatrix}$$

得到

$$\begin{pmatrix}-CB^T+BC^T & -CD^T+BE^T\\ -EB^T+DC^T & -ED^T+DE^T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & I_{(n)}\\ -I_{(n)} & 0\end{pmatrix}.$$

由此得到

$$\begin{aligned}-CB^T+BC^T &= 0,\\ -CD^T+BE^T &= I_{(n)},\\ -EB^T+DC^T &= -I_{(n)},\\ -ED^T+DE^T &= 0.\end{aligned}$$

于是

$$BC^T = CB^T, \tag{3.1}$$

$$BE^T = I_{(n)} + CD^T, \tag{3.2}$$

$$DE^T = ED^T. \tag{3.3}$$

若 n 阶方阵 B 可逆, 则由

$$\begin{pmatrix}I_{(n)} & 0\\ -DB^{-1} & I_{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & C\\ D & E\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B & C\\ 0 & E-DB^{-1}C\end{pmatrix}$$

得到

$$\begin{aligned}\det A &= \det B \det\left(E - DB^{-1}C\right) = \det B \det\left(E - DB^{-1}C\right)^T \\ &= \det B \det\left(E^T - C^T\left(B^T\right)^{-1}D^T\right) = \det B\left(E^T - C^T\left(B^T\right)^{-1}D^T\right) \\ &= \det\left(BE^T - BC^T\left(B^T\right)^{-1}D^T\right).\end{aligned}$$

将式子(3.1)和(3.2)代入, 即得

$$\det A = \det\left(I_{(n)} + CD^T - CB^T\left(B^T\right)^{-1}D^T\right) = \det I_{(n)} = 1.$$

因此结论对 B 可逆的情形成立.

现在设 B 不可逆. 注意到此时式子(3.1), (3.2)和(3.3)仍成立. 考虑矩阵方程 $XC^T = CX^T$ 的解. 设 n 阶方阵 C 的秩为 $\text{rank}C = r$, 则存在 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$C = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

由 $XC^T = CX^T$ 得到

$$P^{-1}XQ^T\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QX^T\left(P^{-1}\right)^T.$$

将 n 阶方阵 $P^{-1}XQ^T$ 分块为 $P^{-1}XQ^T = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$. 代入上式, 得到

$$\begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}^T & X_{21}^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $X_{11}^T = X_{11}, X_{21} = 0$. 于是

$$P^{-1}XQ^T = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $X_{11}^T = X_{11}$, 即

$$X = P\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}\left(Q^T\right)^{-1}.$$

上式给出了矩阵方程 $XC^T = CX^T$ 的一般解. 取 $X_{11} = T_{(r)}, X_{22} = I_{(n-r)}$, 则

$$X = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & X_{12} \\ 0 & I_{(n-r)} \end{pmatrix}\left(Q^T\right)^{-1}$$

是方程 $XC^T = CX^T$ 的可逆解. 取方程 $XC^T = CX^T$ 的一个可逆解 X_0, 则 n 阶可逆方阵 X_0 满足 $X_0C^T = CX_0^T$. 于是对任意复数 λ, 有

$$(B + \lambda X_0)\,C^T = C(B + \lambda X_0)^T. \tag{3.4}$$

记 $A_\lambda = \begin{pmatrix} B+\lambda X_0 & C \\ D & E \end{pmatrix}$, 注意到 A_λ 不再满足题设条件. 记 $f(\lambda) = \det(B+\lambda X_0)$, 则

$$f(\lambda) = \det\left(\lambda I_{(n)} + BX_0^{-1}\right) X_0 = \det\left(\lambda I_{(n)} + BX_0^{-1}\right) \det X_0.$$

由于方阵 X_0 可逆, 所以 $\det X_0 \neq 0$. 而 $\det\left(\lambda I_{(n)} + BX_0^{-1}\right)$ 是关于 λ 的 n 次多项式, 因此存在任意小的正数 $\varepsilon > 0$, 使得 $\det\left(\varepsilon I_{(n)} + BX_0^{-1}\right) \neq 0$, 即 $f(\varepsilon) \neq 0$.

现在计算 $2n$ 阶方阵 $A_\lambda = \begin{pmatrix} B+\varepsilon X_0 & C \\ D & E \end{pmatrix}$ 的行列式. 由于

$$\begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \\ -D(B+\varepsilon X_0)^{-1} & I_{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B+\varepsilon X_0 & C \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B+\varepsilon X_0 & C \\ 0 & E-D(B+\varepsilon X_0)^{-1}C \end{pmatrix}.$$

两边取行列式得到

$$\begin{aligned}
\det A_\varepsilon &= \det(B+\varepsilon X_0) \det\left[E - D(B+\varepsilon X_0)^{-1}C\right] \\
&= \det(B+\varepsilon X_0) \det\left[E - D(B+\varepsilon X_0)^{-1}C\right]^T \\
&= \det(B+\varepsilon X_0) \det\left[E^T - C^T\left((B+\varepsilon X_0)^{-1}\right)^T D^T\right] \\
&= \det\left[(B+\varepsilon X_0) E^T - (B+\varepsilon X_0) C^T\left((B+\varepsilon X_0)^{-1}\right)^T D^T\right] \\
&= \det\left[BE^T + \varepsilon X_0 E^T - (B+\varepsilon X_0) C^T\left((B+\varepsilon X_0)^{-1}\right)^T D^T\right]^T.
\end{aligned}$$

由式子(3.2)和(3.4), 有

$$\begin{aligned}
\det A_\varepsilon &= \det\left[I_{(n)} + CD^T + \varepsilon X_0 E^T - C(B+\varepsilon X_0)^T\left((B+\varepsilon X_0)^{-1}\right)^T D^T\right]^T \\
&= \det\left(I_{(n)} + \varepsilon X_0 E^T\right).
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$, 立得 $\det A = \det I_{(n)} = 1$. □

❀ **注:** 此方法对于上面习题中实的情形也是适用的, 但习题中的证明方法在这里不再使用. 究其原因是在习题的证明中, 引用了结论

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B),$$

其中当 A 和 B 为实方阵时,

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A+\mathrm{i}B)|^2.$$

并且这一结论只对实方阵 A 和 B 成立. 其次, 此推论证明中当 $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ 中 B 不可逆时使用了微小摄动法, 但已不再单纯令 B 变为 $B + \varepsilon I_{(n)}$, 而是寻求一个满足 $XC^T = CX^T$ 的 n 阶可逆方阵 X_0, 并将 B 变为 $B + \varepsilon X_0$, 所以微小摄动法如何使用, 应从具体情况出发.

3.4 矩阵的秩与相抵

引理 3.1

设 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $p \times q$ 矩阵, C 和 D 分别是 $p \times n$ 和 $m \times q$ 矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \leq \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}, \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \leq \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

引理 3.2

设 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $p \times q$ 矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B.$$

引理 3.3 矩阵满秩分解定理

设 A 是 $m \times n$ 非零矩阵. 证明: 矩阵 A 的秩为 r 的充要条件是, 存在 $m \times r$ 列满秩矩阵 B 和 $r \times n$ 行满秩矩阵 C, 使得 $A = BC$.

3.4.1 习 题

习题 3.4.1: 求下列矩阵的秩:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$;

(3) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 其中 $a_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i,j \leq n$, 并且当 $1 \leq i < j \leq n, a_{ij} = j$; 而 $a_{ii} = i, i = 1, 2, \cdots, n$;

(4) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 其中 $a_{ji} = -a_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$, 并且当 $1 \leq i < j \leq n, a_{ij} = i$.

解:

(1)

$$
\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2c_2+c_4,4c_2+c_5]{2c_2+c_1,3c_2+c_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}
$$
$$
\xrightarrow[-c_3+c_5]{5c_3+c_4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$
$$
\xrightarrow[c_1\leftrightarrow c_2,c_2\leftrightarrow c_3]{-2r_2+r_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-c_2]{-c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

此即矩阵的 Hermite 标准形, 故所求矩阵的秩为 2.

(2)

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5c_1+c_3,c_1+c_4]{-3c_1+c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -13 & 6 \\ 5 & -14 & -26 & 12 \end{pmatrix}
$$
$$
\xrightarrow[13c_2+c_3,-6c_2+c_4]{-1/7c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5r_1+r_3,-2r_2+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

此即矩阵的 Hermite 标准形, 故所求矩阵的秩为 2.

(3) 注意到

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \overset{-r_1+r_i,2\le i\le n}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}
$$
$$
= (-1)^{n+1} n \neq 0,
$$

故该矩阵可逆, 因此秩为 n.

(4)

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
-1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\
-1 & -2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\
-1 & -2 & -3 & 4 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n-1 \\
-1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & n
\end{vmatrix}
\xlongequal{-ir_1+r_i, 2\le i\le n}
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
-3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-4 & -5 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-5 & -6 & -7 & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
-n-1 & -n-2 & -n-3 & \cdots & -(2n-1) & 0
\end{vmatrix}
$$

$$= (2n-1)!! \neq 0,$$

故该矩阵可逆, 因此秩为 n.

□

习题 3.4.2: 求 λ, 使得矩阵 A 的秩为最小, 其中

$$
A = \begin{pmatrix}
3 & 1 & 1 & 4 \\
\lambda & 4 & 10 & 1 \\
1 & 7 & 17 & 3 \\
2 & 2 & 4 & 3
\end{pmatrix}.
$$

解:

$$
A = \begin{pmatrix}
3 & 1 & 1 & 4 \\
\lambda & 4 & 10 & 1 \\
1 & 7 & 17 & 3 \\
2 & 2 & 4 & 3
\end{pmatrix}
\xrightarrow[-c_2+c_3, -4c_2+c_4]{-3c_2+c_1}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
\lambda-12 & 4 & 6 & -15 \\
-20 & 7 & 10 & -25 \\
-4 & 2 & 2 & -5
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[5c_3+c_4]{1/2c_3}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
\lambda-12 & 4 & 3 & 0 \\
-20 & 7 & 5 & 0 \\
-4 & 2 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\xrightarrow[-7r_1+r_3, -2r_1+r_4]{-4r_1+r_2}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
\lambda-12 & 0 & 3 & 0 \\
-20 & 0 & 5 & 0 \\
-4 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[-5r_4+r_3, -3r_4+r_2]{4c_3+c_1}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
\lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3,, r_3\leftrightarrow r_4]{c_1\leftrightarrow c_2, r_4\leftrightarrow r_2}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

当 $\lambda = 0$ 时, 方阵的秩最小, 此时 $\mathrm{rank}A = 2$. □

习题 3.4.3: 利用初等变换求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$.

✎ **解:**

(1) 取 4×8 矩阵, 并作行变换如下:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5r_1+r_3,-2r_1+r_4]{-r_4+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 37 & 26 & -5 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 17 & 12 & -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_4+r_2,-3r_3+r_4]{-r_4+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -33 & -23 & 4 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 20 & 14 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -43 & -30 & 7 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3r_4+r_2,3r_2+r_4]{4r_2+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -18 & 13 & 30 & -48 \\ 0 & 1 & 20 & 14 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-14r_4+r_2,5r_4+r_1]{r_2\leftrightarrow r_3,-r_4+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 & -294 & 215 & 495 & -796 \\ 0 & 1 & 20 & 0 & 823 & -602 & -1385 & 2228 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 41 & -30 & -69 & 111 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[7r_3+r_1]{-20r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 & 5 & 12 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 41 & -30 & -69 & 111 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}.$$

因此所求逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}.$$

(2) 记 $s=\frac{n(n+1)}{2}$, 将 $n\times 2n$ 矩阵进行行变换如下:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[1\leq i\leq n-1]{r_i+r_n}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
s & s & s & \cdots & s & s & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[2\leq i\leq n-1]{-r_{i-1}+r_i,\frac{1}{s}\times r_n}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s}
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[2\leq i\leq n-1]{r_n+r_i,\frac{1}{n}\times r_i}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s}
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[-(i-1)\times r_i+r_1,2\leq i\leq n]{-r_i+r_n,2\leq i\leq n-1}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \frac{2+s}{ns} & \frac{2}{ns} & \frac{2}{ns} & \cdots & \frac{2}{ns} & \frac{2-s}{ns} & \frac{2}{ns}
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\text{交换行}]{-r_1+r_n}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\
0 & 1 & \ddots & & \vdots & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{ns} \\
\vdots & & \ddots & 1 & 0 & \frac{1}{ns} & & \ddots & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns}
\end{pmatrix}.
$$

故所求逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} \\ \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{ns} \\ \frac{1}{ns} & & \ddots & \frac{1-s}{ns} & \frac{1+s}{ns} \\ \frac{1+s}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc:ccccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n-3} & \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-3} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{2n-7} & \frac{1}{2n-6} & \frac{1}{2n-5} & \frac{1}{2n-4} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{2n-6} & \frac{1}{2n-5} & \frac{1}{2n-4} & \frac{1}{2n-3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{2n-5} & \frac{1}{2n-4} & \frac{1}{2n-3} & \frac{1}{2n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-4} & \frac{1}{2n-3} & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{n-i}r_i, 1\le i\le n-1]{-r_n+r_i}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n\cdot 1} & \frac{1}{(n+1)\cdot 2} & \cdots & \frac{1}{(2n-4)(n-3)} & \frac{1}{(2n-3)(n-2)} & \frac{1}{(2n-2)(n-1)} & \frac{1}{(2n-1)n} & \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n\cdot 2} & \frac{1}{(n+1)\cdot 3} & \cdots & \frac{1}{(2n-4)(n-2)} & \frac{1}{(2n-3)(n-1)} & \frac{1}{(2n-2)n} & \frac{1}{(2n-1)(n+1)} & 0 & \frac{1}{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n(n-3)} & \frac{1}{(n+1)(n-2)} & \cdots & \frac{1}{(2n-4)(2n-7)} & \frac{1}{(2n-3)(2n-6)} & \frac{1}{(2n-2)(2n-5)} & \frac{1}{(2n-1)(2n-4)} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{n(n-2)} & \frac{1}{(n+1)(n-1)} & \cdots & \frac{1}{(2n-4)(2n-6)} & \frac{1}{(2n-3)(2n-5)} & \frac{1}{(2n-2)(2n-4)} & \frac{1}{(2n-1)(2n-3)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{n(n-1)} & \frac{1}{(n+1)n} & \cdots & \frac{1}{(2n-4)(2n-5)} & \frac{1}{(2n-3)(2n-4)} & \frac{1}{(2n-2)(2n-3)} & \frac{1}{(2n-1)(2n-2)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{1} & -1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-4} & \frac{1}{2n-3} & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

重复上述变换, $-r_k + r_i$, 并且将第 i 行乘以 $\frac{1}{k-i}$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, k-1$, 而 $k = n-1, n-2, \cdots, 2$.

可以发现, 左边矩阵变形为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{A_n^n} & \frac{1}{A_{n+1}^n} & \cdots & \frac{1}{A_{2n-1}^n} \\ \frac{1}{A_n^{n-1}} & \frac{1}{A_{n+1}^{n-1}} & \cdots & \frac{1}{A_{2n-1}^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{A_n^1} & \frac{1}{A_{n+1}^1} & \cdots & \frac{1}{A_{2n-1}^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_0^0}{A_n^n} & \frac{A_1^0}{A_{n+1}^n} & \cdots & \frac{A_{n-1}^0}{A_{2n-1}^n} \\ \frac{A_1^1}{A_n^n} & \frac{A_2^1}{A_{n+1}^n} & \cdots & \frac{A_n^1}{A_{2n-1}^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{n-1}^{n-1}}{A_n^n} & \frac{A_n^{n-1}}{A_{n+1}^n} & \cdots & \frac{A_{2n-2}^{n-1}}{A_{2n-1}^n} \end{pmatrix}.$$

对于右边矩阵, 进行一系列上述初等变换, 我们得到

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{A_{n-1}^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-1} \\ 0 & \frac{1}{A_{n-2}^2} & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{n-3} & \frac{1}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{A_3^2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{A_2^2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{A_1^1} & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_0^0} \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} \frac{1}{(n-1)!} & \frac{-1}{(n-2)!1!} & \cdots & \frac{(-1)^{n-4}}{3!(n-4)!} & \frac{(-1)^{n-3}}{2!(n-3)!} & \frac{(-1)^{n-2}}{1!(n-2)!} & \frac{(-1)^{n-1}}{0!(n-1)!} \\ 0 & \frac{1}{(n-2)!} & \cdots & \frac{(-1)^{n-5}}{3!(n-5)!} & \frac{(-1)^{n-4}}{2!(n-4)!} & \frac{(-1)^{n-3}}{1!(n-3)!} & \frac{(-1)^{n-2}}{0!(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3!} & \frac{-1}{2!1!} & \frac{1}{1!2!} & \frac{-1}{0!3!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2!} & \frac{-1}{1!1!} & \frac{1}{0!2!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{1!} & \frac{-1}{0!1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0!} \end{pmatrix}.$$

现将第 i 行分别乘以 $\frac{1}{(i-1)!}(i=1,2,\cdots,n)$, 得

$$\left(\begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & C_3^0 & \cdots & C_{n-2}^0 & C_{n-1}^0 \\ C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & C_4^1 & \cdots & C_{n-1}^1 & C_n^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 & C_5^2 & \cdots & C_n^2 & C_{n+1}^2 \\ C_3^3 & C_4^3 & C_5^3 & C_6^3 & \cdots & C_{n+1}^3 & C_{n+2}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{n-2}^{n-2} & C_{n-1}^{n-2} & C_n^{n-2} & C_{n+1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} & C_{2n-3}^{n-2} \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & C_{n+2}^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} & C_{2n-2}^{n-1} \end{pmatrix} P \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} C_0^0 & -C_1^0 & C_2^0 & -C_3^0 & \cdots & (-1)^{n-2}C_{n-2}^0 & (-1)^{n-1}C_{n-1}^0 \\ -C_0^1 & C_1^1 & -C_2^1 & C_3^1 & \cdots & (-1)^{n-3}C_{n-2}^1 & (-1)^{n-2}C_{n-1}^1 \\ C_0^2 & -C_1^2 & C_2^2 & -C_3^2 & \cdots & (-1)^{n-4}C_{n-2}^2 & (-1)^{n-3}C_{n-1}^2 \\ -C_0^3 & C_1^3 & -C_2^3 & C_3^3 & \cdots & (-1)^{n-5}C_{n-2}^3 & (-1)^{n-4}C_{n-1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-2}C_0^{n-2} & (-1)^{n-3}C_1^{n-2} & (-1)^{n-4}C_2^{n-2} & (-1)^{n-5}C_3^{n-2} & \cdots & C_{n-2}^{n-2} & -C_{n-1}^{n-2} \\ (-1)^{n-1}C_0^{n-1} & (-1)^{n-2}C_1^{n-1} & (-1)^{n-3}C_2^{n-1} & (-1)^{n-4}C_3^{n-1} & \cdots & -C_{n-2}^{n-1} & C_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} QR \right),$$

其中

$$P = \operatorname{diag}\left(A_n^n, A_{n+1}^n, \cdots, A_{2n-1}^n\right), \qquad Q = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{(n-1)!}, \frac{1}{(n-2)!}, \cdots, \frac{1}{1!}, \frac{1}{0!}\right)$$

$$R = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \cdots, \frac{1}{(n-1)!}\right), \qquad C_m^s = \frac{m(m-1)\cdots(m-s+1)}{s!},$$

则分块矩阵为 $\left(\left(C_{i+j-2}^{i-1}\right)_{n\times n} P, \left((-1)^{|i-j|}C_{j-1}^{i-1}\right)_{n\times n} QR\right)$, 接着用第 $n-1$ 行去减第 n 行, 第 $n-2$ 行去减第 $n-1$ 行, $\cdots$, 第 1 行去减第 2 行; 第 $n-1$ 行去减第 n 行, 第 $n-2$ 行去减第 $n-1$ 行, $\cdots$, 第 2 行去减第 3 行; $\cdots\cdots$; 第 $n-1$ 行去减第 n 行. 根据

$C_m^s = C_{m-1}^s + C_{m-1}^{s-1}$ 得

$$\left(\begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & C_3^0 & \cdots & C_{n-2}^0 & C_{n-1}^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_{n-2}^1 & C_{n-1}^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & C_3^2 & \cdots & C_{n-2}^2 & C_{n-1}^2 \\ 0 & 0 & 0 & C_3^3 & \cdots & C_{n-2}^3 & C_{n-1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-2}^{n-2} & C_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} P \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} C_0^0 & -C_1^0 & C_2^0 & -C_3^0 & \cdots & (-1)^{n-2}C_{n-2}^0 & (-1)^{n-1}C_{n-1}^0 \\ -C_1^1 & C_2^1 & -C_3^1 & C_4^1 & \cdots & (-1)^{n-3}C_{n-1}^1 & (-1)^{n-2}C_n^1 \\ C_2^2 & -C_3^2 & C_4^2 & -C_5^2 & \cdots & (-1)^{n-4}C_n^2 & (-1)^{n-3}C_{n+1}^2 \\ -C_3^3 & C_4^3 & -C_5^3 & C_6^3 & \cdots & (-1)^{n-5}C_{n+1}^3 & (-1)^{n-4}C_{n+2}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-2}C_{n-2}^{n-2} & (-1)^{n-3}C_{n-1}^{n-2} & (-1)^{n-4}C_n^{n-2} & (-1)^{n-5}C_{n+1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} & -C_{2n-3}^{n-2} \\ (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} & (-1)^{n-2}C_n^{n-1} & (-1)^{n-3}C_{n+1}^{n-1} & (-1)^{n-4}C_{n+2}^{n-1} & \cdots & -C_{2n-3}^{n-1} & C_{2n-2}^{n-1} \end{pmatrix} QR \right).$$

先考虑左边的矩阵, 由 $C_m^s = C_m^{m-s}$ 知左边矩阵可写为

$$\begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_{n-4}^{n-4} & C_{n-3}^{n-3} & C_{n-2}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & C_1^0 & \cdots & C_{n-4}^{n-5} & C_{n-3}^{n-4} & C_{n-2}^{n-3} & C_{n-1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{n-4}^0 & C_{n-3}^1 & C_{n-2}^2 & C_{n-1}^3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{n-3}^0 & C_{n-2}^1 & C_{n-1}^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C_{n-2}^0 & C_{n-1}^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & C_{n-1}^0 \end{pmatrix}.$$

由 $C_i^0 = C_j^0 (i,j \in \mathbb{N})$. 而 $C_m^s - C_{m-1}^{s-1} = C_{m-1}^s$, 即 $C_m^s = C_{m-1}^s + C_{m-1}^{s-1}$. 我们作下述初等变换: 第 n 行去减第 $n-1$ 行; 第 $n-1$ 行去减第 $n-2$ 行, 第 n 行去减第 $n-1$ 行; $\cdots\cdots$; 第 2 行去减第 1 行, 第 3 行去减第 2 行, $\cdots$, 第 n 行去减第 $n-1$ 行. 可以发现对于矩阵中的组合数 C_m^s, s 保持不变, m 不断在减小, 则最终变为

$$\begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_0^{n-4} & C_0^{n-3} & C_0^{n-2} & C_0^{n-1} \\ 0 & C_0^0 & \cdots & C_0^{n-5} & C_0^{n-4} & C_0^{n-3} & C_0^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_0^0 & C_0^1 & C_0^2 & C_0^3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C_0^0 & C_0^1 & C_0^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C_0^0 & C_0^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & C_0^0 \end{pmatrix} = I_{(n)}.$$

而设右边矩阵记做 $\left((-1)^{|i-j|}a_{ij}\right)_{n\times n} QR$ 变换后的矩阵记作 $\left((-1)^{|i-j|}s_{ij}\right)_{n\times n} QR$, 可知 s_{ij} 是由 $a_{ij}, a_{i+1,j}, \cdots, a_{nj}$ 所表示. 归纳可以发现 s_{ij} 中 $a_{ij}, a_{i+1,j}, \cdots, a_{nj}$ 是由组合数累加

的. 归纳可证

$$\begin{aligned}(-1)^{|i-j|}s_{ij}&=(-1)^{|i-j|}\sum_{k=i}^{n}C_{k-1}^{k-i}a_{kj}=(-1)^{|i-j|}\sum_{k=i}^{n}C_{k-1}^{k-i}C_{k+j-2}^{k-1}\\&=(-1)^{|i-j|}\sum_{k=i}^{n}\frac{A_{k-1}^{k-i}}{A_{k-i}^{k-i}}\frac{A_{k+j-2}^{k-1}}{A_{k-1}^{k-1}}=(-1)^{|i-j|}\sum_{k=i}^{n}\frac{A_{k+j-2}^{k-i}}{A_{k-i}^{k-i}}\frac{A_{i+j-2}^{i-1}}{A_{i-1}^{i-1}}\\&=(-1)^{|i-j|}\sum_{k=i}^{n}C_{k+j-2}^{i+j-2}C_{i+j-2}^{i-1}=(-1)^{|i-j|}C_{i+j-2}^{i-1}\sum_{k=i}^{n}C_{k+j-2}^{i+j-2}\\&=(-1)^{|i-j|}C_{i+j-2}^{i-1}C_{n+j-1}^{i+j-1},\end{aligned}$$

则此时分块阵为 $\left(P,\left((-1)^{|i-j|}s_{ij}\right)_{n\times n}QR\right)$, 左乘 P^{-1} 得 $\left(I_{(n)},P^{-1}\left((-1)^{|i-j|}s_{ij}\right)_{n\times n}QR\right)$, 则矩阵的逆为 $\left((-1)^{|i-j|}C_{i+j-2}^{i-1}C_{n+j-1}^{i+j-1}A_{n+i-1}^{n}\frac{1}{(n-j)!}\cdot\frac{1}{(j-1)!}\right)_{n\times n}$, 即

$$\begin{aligned}&\left((-1)^{|i-j|}\frac{(i+j-2)!}{(i-1)!\,(j-1)!}\frac{(n+j-1)!}{(n-i)!\,(i+j-1)!}\frac{(n+i-1)!}{(i-1)!}\frac{1}{(n-j)!}\frac{1}{(j-1)!}\right)_{n\times n}\\=&\left((-1)^{i+j}\frac{(n+i-1)!\,(n+j-1)!}{(i+j-1)\,[(i-1)!]^2[(j-1)!]^2\,(n-i)!\,(n-j)!}\right)_{n\times n}\\=&\left((-1)^{i+j}\,(i+j-1)\,C_{n+i-1}^{n-j}C_{n+j-1}^{n-i}\left(C_{i+j-2}^{i-1}\right)^2\right)_{n\times n}.\end{aligned}$$

❀ 注: 这题若通过计算余子式, 并利用 *Cauchy* 行列式计算公式, 对简化运算, 弱化技巧有明显的效果.

(4) 对于 $n\times 2n$ 矩阵

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc}2&-1&0&\cdots&\cdots&0&1&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\-1&2&-1&\ddots&&\vdots&0&1&\ddots&&&\vdots\\0&-1&2&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&0&\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&-1&2&-1&\vdots&&&\ddots&1&0\\0&\cdots&\cdots&0&-1&2&0&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{array}\right),$$

我们先将第 1 行乘以 $\frac{1}{2}$, 接着加到第 2 行, 得到

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc}1&-\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots&0&\frac{1}{2}&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&\frac{3}{2}&-1&\ddots&&\vdots&\frac{1}{2}&1&\ddots&&&\vdots\\0&-1&2&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&0&\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&-1&2&-1&\vdots&&&\ddots&1&0\\0&\cdots&\cdots&0&-1&2&0&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{array}\right),$$

将第 2 行乘以 $\frac{2}{3}$, 接着加到第 3 行, 得到

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc}
1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & -\frac{2}{3} & \ddots & & \vdots & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \ddots & & & \vdots \\
0 & 0 & \frac{4}{3} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 & \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right),$$

一直进行下去, 将第 $n-1$ 行乘以 $\frac{n-1}{n}$, 接着加到第 n 行, 得到

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc}
1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & -\frac{2}{3} & \ddots & & \vdots & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \frac{4}{3} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 & 1 & -\frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \frac{n+1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} & 1
\end{array}\right),$$

最后将第 n 行乘以 $\frac{n}{n+1}$, 得到

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc}
1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & -\frac{2}{3} & \ddots & & \vdots & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \frac{4}{3} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 & 1 & -\frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{n+1} & \frac{2}{n+1} & \frac{3}{n+1} & \cdots & \frac{n-1}{n+1} & \frac{n}{n+1}
\end{array}\right).$$

依次把第 i 行的 $\frac{i-1}{i}$ 倍加到第 $i-1$ 行, 其中 $i=n,n-1,\cdots,2$. 上述矩阵左边变为单位矩阵, 右边则为

$$\begin{pmatrix}
\frac{n}{n+1} & \frac{n-1}{n+1} & \frac{n-2}{n+1} & \cdots & \frac{3}{n+1} & \frac{2}{n+1} & \frac{1}{n+1} \\
\frac{n-1}{n+1} & \frac{2(n-1)}{n+1} & \frac{2(n-2)}{n+1} & \cdots & \frac{2\times 3}{n+1} & \frac{2\times 2}{n+1} & \frac{2\times 1}{n+1} \\
\frac{n-2}{n+1} & \frac{2(n-2)}{n+1} & \frac{3(n-2)}{n+1} & \cdots & \frac{3\times 3}{n+1} & \frac{3\times 2}{n+1} & \frac{3\times 1}{n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{2}{n+1} & \frac{2\times 3}{n+1} & \frac{3\times 3}{n+1} & \cdots & \frac{(n-2)\times 3}{n+1} & \frac{(n-2)\times 2}{n+1} & \frac{(n-2)\times 1}{n+1} \\
\frac{2}{n+1} & \frac{2\times 2}{n+1} & \frac{3\times 2}{n+1} & \cdots & \frac{(n-2)\times 2}{n+1} & \frac{(n-1)\times 2}{n+1} & \frac{(n-1)}{n+1} \\
\frac{1}{n+1} & \frac{2}{n+1} & \frac{3}{n+1} & \cdots & \frac{n-2}{n+1} & \frac{n-1}{n+1} & \frac{n}{n+1}
\end{pmatrix},$$

此即所求逆矩阵.

□

习题 3.4.4: 证明: 只用行的初等变换以及对换某两列, 任意 $m \times n$ 矩阵 A 都可以化为

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & B_{(r,n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r = \operatorname{rank} A$.

证: 若 $a_{11} = 0$, 考察非零的元素 $a_{i_1 j_1}$ (否则 $A = 0$, 结论显然), 我们交换第 1 行和第 i_1 行, 交换第 1 列和第 j_1 列, 此时得到新的矩阵 $A^{(1)}$, 且 $a_{11}^{(1)} = a_{ij} \neq 0$, 我们将矩阵矩阵 $A^{(1)}$ 第一行的 $-\frac{a_{1k}}{a_{11}}$ 倍加到第 k 行, 其中 $2 \leq k \leq m$, 而将第一行乘以 $\frac{1}{a_{11}}$, 这时得到的新矩阵的第一列除 $(1,1)$ 处的元素为 1 外, 别的元素都是 0; 再考察第 2 列, 不妨设 $a_{22} \neq 0$, 否则可以通过上面的交换行列得到新的非零 a_22, 将第 2 行的 $-\frac{a_{2k}}{a_{22}}$ 倍加到第 k 行, 其中 $k = 1, 3, 4, \cdots, m$, 接着将第二行乘以 $\frac{1}{a_{22}}$, 得到的新矩阵的前两列除 a_{11} 与 a_{22} 为 1 外, 其余元素均为 0. 仿照此法进行下去, 最终得到

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & B_{(r,n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

形状的新矩阵, 我们便完成了命题的证明. □

习题 3.4.5: 证明: 任意一个秩为 r 的矩阵都可以表为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

证: 因为 $\operatorname{rank} A = r$, 所以存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q.$$

记 $E_i = (e_{ij})$, 其它 $e_{kl} = 0$, 则 $\operatorname{rank} E_i = 1$. 于是 $\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{r} E_i$. 因此

$$A = P \begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = P \left(\sum_{i=1}^{r} E_i \right) Q = \sum_{i=1}^{r} (P E_i Q).$$

由于方阵 P 和 Q 是可逆的, 所以 $\operatorname{rank} P E_i Q = \operatorname{rank} E_i = 1$, 所以 A 是 r 个秩为 1 的 $m \times n$ 矩阵 $PE_1Q, PE_2Q, \cdots, PE_rQ$ 之和. □

习题 3.4.6: 证明:$m \times n$ 矩阵 A 的秩为 1 的充分必要条件是 $A = \alpha\beta$, 其中 α 和 β 分别是 $m \times 1$ 和 $1 \times n$ 的非零矩阵.

证: 证法一: 因为 $\operatorname{rank} A = 1$, 所以存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} Q.$$

将 m 阶方阵 P 按列分块为 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 m 维列向量, 因为 P 是可逆的, 所以列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 都是非零的. 同样将 n 阶方阵 Q 按行分块为 $Q=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$, 其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 n 维非零行向量. 于是

$$\begin{aligned}A=P\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix}Q&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}\\&=(\alpha_1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\alpha_1\beta_1.\end{aligned}$$

证法二: 由于 A 的秩为 1, 所以由满秩分解定理, 存在 $m\times 1$ 列满秩矩阵 B 和 $1\times n$ 行满秩矩阵 C, 使得 $A=BC$. 由 B 是 $m\times 1$ 矩阵, 且秩为 1, 所以 B 是 m 维非零的列向量, 而 C 是 $1\times n$, 且秩为 1, 所以 C 是 n 维非零的行向量. 因此取 $\alpha=B,\beta=C$ 即可. □

习题 3.4.7: 设 $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 证明:

$$\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B.$$

证: 首先,

$$\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}.$$

又

$$\begin{pmatrix}I_{(m)}&I_{(m)}\\0&I_{(m)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{(n)}&I_{(n)}\\0&I_{(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&A+B\\0&B\end{pmatrix},$$

因此

$$\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&A+B\\0&B\end{pmatrix}\ge\operatorname{rank}(A+B).$$

□

习题 3.4.8: 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 证明:

$$\operatorname{rank}AA^T=\operatorname{rank}A^TA=\operatorname{rank}A.$$

证: 证法一: 设 $\operatorname{rank}A=r$, 则 $r\le\min\{m,n\}$. 则有任一 r 阶主子式为

$$\begin{aligned}AA^T\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\i_1&i_2&\cdots&i_r\end{pmatrix}&=\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\k_1&k_2&\cdots&k_r\end{pmatrix}A^T\begin{pmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_r\\i_1&i_2&\cdots&i_r\end{pmatrix}\\&=\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n}\left[A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\k_1&k_2&\cdots&k_r\end{pmatrix}\right]^2.\end{aligned}$$

由于 A 有一个 r 阶子式不为 0, 因此 AA^T 有一个 r 阶主子式不为 0. 从而 $\mathrm{rank}(AA^T) \geq r$. 又由于

$$\mathrm{rank}(AA^T) \leq \mathrm{rank}A = r,$$

所以

$$\mathrm{rank}(AA^T) = r = \mathrm{rank}A.$$

从而

$$\mathrm{rank}\left(A^TA\right) = \mathrm{rank}\left[\left(A^T\right)\left(A^T\right)^T\right] = \mathrm{rank}A^T = \mathrm{rank}A.$$

证法二: 如果能够证明 n 元齐次线性方程组 $(A^TA)X = 0$ 与 $AX = 0$ 同解, 那么它们的解空间一致, 从而由解空间的维数公式, 得

$$n - \mathrm{rank}\left(A^TA\right) = n - \mathrm{rank}A,$$

由此得到 $\mathrm{rank}\left(A^TA\right) = \mathrm{rank}A$.

现在来证明 $(A^TA)X = 0$ 与 $AX = 0$ 同解. 设 η 是 $AX = 0$ 的任意一个解, 则 $A\eta = 0$, 从而 $(A^TA)\eta = 0$, 因此 η 是 $(A^TA)X = 0$ 的一个解. 反之, 设 δ 是 $(A^TA)X = 0$ 的任意一个解, 则

$$(A^TA)\delta = 0.$$

上式两边左乘 δ^T, 得

$$\delta^TA^TA\delta = 0,$$

即

$$(A\delta)^TA\delta = 0.$$

设 $(A\delta)^T = (c_1, c_2, \cdots, c_m)$ 都是实数, 因此

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_m^2 = 0,$$

由此推出 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$, 从而 $A\delta = 0$, 即 δ 是 $AX = 0$ 的一个解. 因此 $(A^TA)X = 0$ 与 $AX = 0$ 同解. 于是

$$\mathrm{rank}\left(A^TA\right) = \mathrm{rank}A.$$

由这个结论立即得出

$$\mathrm{rank}\left(AA^T\right) = \mathrm{rank}\left[\left(A^T\right)^T(A)^T\right] = \mathrm{rank}A^T = \mathrm{rank}A.$$

□

习题 3.4.9: 设 n 阶方阵 A 分块为 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, 其中 A_{11} 是 r 阶可逆矩阵. 证明: $\mathrm{rank}\,A = r$ 的充分必要条件是 $A_{22} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

证: 注意到

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_{(n-r)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(r)} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{(n-r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\left(A_{11}\right)+\mathrm{rank}\left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)=r+\mathrm{rank}\left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right).$$

若 $\mathrm{rank}A=r$, 则 $\mathrm{rank}\left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)=0$, 则 $A_{22}=A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$; 反过来, 若 $A_{22}=A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, 则 $\mathrm{rank}A=r$ 成立. □

习题 3.4.10: 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathrm{rank}\,A=r$. 从矩阵 A 中任意取出 s 个行构成 $s\times n$ 矩阵 B. 证明: $\mathrm{rank}\,B\geq r+s-n$.

证: 设 B 是取自 A 中第 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 行调到第 $1,2,\cdots,s$ 行, 得到的方阵为 $C=\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}$. 由于方阵 C 是由方阵 A 经行的初等变换得到的, 所以 C 和 A 是相抵的, 从而

$$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}C=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}.$$

现在设 $\mathrm{rank}B=k$, 则存在 s 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$B=P\begin{pmatrix}I_{(k)}&0\\0&0\end{pmatrix}Q.$$

因此

$$\begin{pmatrix}P^{-1}&0\\0&I_{(n-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}P^{-1}BQ^{-1}\\DQ^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{(k)}&0\\0&0\end{pmatrix}\\DQ^{-1}\end{pmatrix}.$$

将 $(n-s)\times n$ 矩阵 DQ^{-1} 分块为 $[D_1,D_2]$, 其中 D_1 是 $(n-s)\times r$ 矩阵, 则

$$\begin{pmatrix}P^{-1}&0\\0&I_{(n-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}I_{(k)}&0\\0&0\\D_1&D_2\end{pmatrix}.$$

又

$$\begin{pmatrix}I_{(k)}&0&0\\0&I_{(s-k)}&0\\-D_1&0&I_{(n-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{-1}&0\\0&I_{(n-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}I_{(k)}&0\\0&0\\0&D_2\end{pmatrix}.$$

而

$$\begin{pmatrix}I_{(k)}&0&0\\0&0&I_{(n-s)}\\0&I_{(s-k)}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{(k)}&0&0\\0&I_{(s-k)}&0\\-D_1&0&I_{(n-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{-1}&0\\0&I_{(n-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}I_{(k)}&0\\0&D_2\\0&0\end{pmatrix}.$$

而 $\begin{pmatrix}I_{(k)}&0&0\\0&0&I_{(n-s)}\\0&I_{(s-k)}&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}I_{(k)}&0&0\\0&I_{(s-k)}&0\\-D_1&0&I_{(n-s)}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}P^{-1}&0\\0&I_{(n-s)}\end{pmatrix}$, Q^{-1} 和 Q^{-1} 都是可

逆的, 所以

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}I_{(k)}&0\\0&D_2\\0&0\end{pmatrix}=\operatorname{rank}I_{(k)}+\operatorname{rank}D_2$$
$$=k+\operatorname{rank}D_2=\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}D_2.$$

由于 D_2 是 $(n-s)\times(n-k)$ 的, 所以 $\operatorname{rank}D_2\le n-s$. 于是

$$\operatorname{rank}A\le\operatorname{rank}B+n-s,$$

即

$$\operatorname{rank}B\ge r+s-n.$$

□

习题 3.4.11: 设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}A=r$. 从矩阵 A 中任意取出 s 个行, t 个列上的交叉元素构成的 $s\times t$ 矩阵记为 B. 证明: $\operatorname{rank}B\ge r+s+t-m-n$.

证: 设 B 是取自 $m\times n$ 矩阵 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 行与第 $j_1,j_2,\cdots,j_t$ 列的交叉位置上的元素组成的 $s\times t$ 子矩阵, 即

$$B=A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_s\\j_1&j_2&\cdots&j_t\end{pmatrix}.$$

而 C 是由 $m\times n$ 矩阵 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 行组成的 $s\times n$ 子矩阵. 由上题的证明可知

$$\operatorname{rank}C\ge\operatorname{rank}A+s-m.$$

而 B 是 $s\times n$ 矩阵 C 的 $s\times t$ 矩阵, 因此 B^T 是 $n\times s$ 矩阵 C^T 的一个 $t\times s$ 子矩阵, 所以由上题的证明可知

$$\operatorname{rank}B^T\ge\operatorname{rank}C^T+t-n.$$

而 $\operatorname{rank}B^T=\operatorname{rank}B$, $\operatorname{rank}C^T=\operatorname{rank}C$. 于是由上式得到

$$\operatorname{rank}B\ge\operatorname{rank}C+t-n.$$

又 $\operatorname{rank}A=r$, 最后得到

$$\operatorname{rank}B\ge r+s+t-m-n.$$

□

习题 3.4.12: 设 n 阶方阵 A 至少有 n^2-n+1 个元素为零. 证明: $\operatorname{rank}A<n$, 并求 $\operatorname{rank}A$ 的最大值.

证: 由于方阵 A 至少有 n^2-n+1 个元素为零, 则非零的元素最多只有 $n-1$ 个, 则 n 阶方阵 A 中必存在某一行, 使得该行的所有元素均为 0, 因此 $\det A=0$, 从而 $\operatorname{rank}A\le n-1$. 记 $n-1$ 个元素分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$, 我们取 $a_{ii}=a_i, 1\le i\le n-1$, 显然此时 $\operatorname{rank}A=n-1$. 因此 $\operatorname{rank}A$ 的最大值为 $n-1$. □

习题 3.4.13: n 阶方阵 A 的附属矩阵记为 A^*. 证明:

(1) rank $A^* = n$ 的充分必要条件是 rank $A = n$;

(2) rank $A^* = 1$ 的充分必要条件是 rank $A = n-1$;

(3) rank $A^* = 0$ 的充分必要条件是 rank $A < n-1$;

(4) 当 $n > 2$ 时, $(A^*)^* = (\det A)^{n-2}A$, 当 $n = 2$ 时, $(A^*)^* = A$.

☞ 证:

(1) 当 rank$A = n$, 有 $\det A \neq 0$, 由 $AA^* = (\det A)I_{(n)}$ 知 $\det A^* = (\det A)^{n-1} \neq 0$, 所以 rank$A^* = n$. 反过来, 若 rank $A^* = n$, 有 $\det A^* \neq 0$, 由 $AA^* = (\det A)I_{(n)}$ 知 $\det A = \sqrt[n-1]{\det A^*} \neq 0$, 所以 rank$A = n$.

(2) 当 rank$A = n-1$ 时, $\det A = 0$, 从而 $AA^* = 0$. 又 $0 = \text{rank}(AA^*) \geq \text{rank}A + \text{rank}A^* - n$, 所以 rank$A^* \leq 1$. 又因为 rank$A = n-1$, 所以 A^* 中至少有一个 $A_{ij} \neq 0$, 所以 rank$A^* = 1$. 反过来, 若 rank$A^* = 1$, 由 $AA^* = (\det A)I_{(n)}$ 可知 $\det A = 0$ 且 rank$A \leq n-1$, 而由 rank$A^* = 1$ 可知 A^* 中至少有一个 $A_{ij} \neq 0$, 故 rank$A \geq n-1$, 因此 rank$A = n-1$.

(3) 当 rank$A < n-1$ 时, A^* 中任意 $A_{ij} = 0$, 所以 $A^* = 0$, 则 rank$A^* = 0$. 反过来, 若 rank$A^* = 0$, 则有 $A^* = 0$. 因此任意 $A_{ij} = 0$, 说明 rank$A < n-1$.

(4) 若 $\det A \neq 0$, 即 A 可逆时, 当 $n > 2$ 时, 由

$$AA^* = \det AI_{(n)} \Rightarrow \det A^* = (\det A)^{n-1}, A^* = \det A \cdot A^{-1}$$

可知

$$A^*(A^*)^* = \det A^* I_{(n)} \Rightarrow (A^*)^* = \det A^*(A^*)^{-1} = (\det A)^{n-2}A.$$

当 $n = 2$ 时, 由

$$AA^* = \det AI_{(2)} \Rightarrow \det A^* = \det A, A^* = \det A \cdot A^{-1}$$

可知

$$A^*(A^*)^* = \det A^* I_{(2)} \Rightarrow \det A \cdot A^{-1}(A^*)^* = \det A \cdot I_{(2)},$$

即

$$(A^*)^* = A.$$

若 $\det A = 0$, 即 A 不可逆时, 当 $n > 2$ 时, 由 rank$A^* \leq 1 < n-1$ 可知 rank$(A^*)^* = 0$, 即 $(A^*)^* = 0$, 因此 $(A^*)^* = (\det A)^{n-2}A = 0$. 当 $n = 2$, 因为 rank$A \leq 1$, 设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad - bc = 0.$$

则有

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, (A^*)^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

综上可知, 当 $n > 2$ 时, $(A^*)^* = (\det A)^{n-2}A$, 当 $n = 2$ 时, $(A^*)^* = A$.

□

习题 3.4.14: 设 A, B 是行数相同的矩阵, A 和 B 并排而成的矩阵记为 (A, B). 证明: $\operatorname{rank}(A, B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

证: 记 A 为 $m \times n$, B 为 $m \times p$ 矩阵, 而 (A, B) 为 $m \times (n+p)$ 矩阵. 又

$$\begin{pmatrix} I_{(m)} & I_{(m)} \\ 0 & I_{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

因此

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

注意 (A, B) 是矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的子矩阵, 所以有

$$\operatorname{rank}(A, B) \leq \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

□

习题 3.4.15: 设 A 是 $m \times n$ 整系数矩阵. 证明: 存在可逆的 m 阶整系数矩阵 P 和 n 阶整系数矩阵 Q (逆矩阵仍是整系数的整系数矩阵称为可逆的), 使得

$$A = P \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} Q,$$

其中 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 是正整数, 并且 $d_i \mid d_{i+1}, i = 1, 2, \cdots, r-1$.

证: 首先注意, 对调 n 阶单位方阵 $I_{(n)}$ 的第 i 行和第 j 行得到的方阵 P_{ij} 是一个幺模整数矩阵;

对于整数 a, n 阶初等方阵 $Q_{ij}(a) = I_{(n)} + aE_{ij}$ 也是幺模整数矩阵, 其中 E_{ij} 是 (i, j) 位置上元素为 1, 而其它元素为 0 的 n 阶方阵, $1 \leq i \neq j \leq n$.

另外, 两个幺模整数方阵的乘积是幺模整数方阵; 幺模整数方阵的逆方阵仍是幺模整数方阵.

因此只需证明, 可以通过某行 (或列) 乘以某个整数 a 并加到另一行 (或列) 以及对调两行 (或列) 的初等变换把 $m \times n$ 整数矩阵 A 化为形式 $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$ 即可. 现证如下:

易知对 $m \times n$ 零矩阵 A, 结论成立. 因此设 $A = (a_{ij})$ 非零, 则存在某个元素 $a_{ij} \neq 0$. 对调 A 的第 1 行和第 i 行, 以及第 1 列和第 j 列, 则 a_{ij} 调到 $(1, 1)$ 位置上. 所以不妨设 $a_{11} \neq 0$, 甚至 $a_{11} > 0$.

首先证明, 矩阵 A 可经有限次对换两行 (或列) 以及某行 (或列) 乘以某个整数加到另一行 (或列) 的初等变换化为矩阵 $B=(b_{ij})$, 其中 $b_{11}>0$, 且 b_{11} 整除其它所有元素 b_{ij}.

为此对矩阵 A 中正整数 a_{11} 用归纳法. 当 $a_{11}=1$ 时, 结论显然成立. 现在设结论对 $a_{11}<k$ 成立. 下面证明结论对 $a_{11}=k$ 成立. 如果 a_{11} 整除其它所有元素, 则结论已成立. 因此不妨设存在某个 a_{ij}, 使得 a_{11} 不整除 a_{ij}.

情形 1: $i=1$, 即 a_{11} 不整除 a_{1j}. 由 Euclid 除法, $a_{1j}=a_{11}q+r$, 其中 q,r 为整数, 且 $r<a_{11}=k$. 矩阵 A 的第 1 列乘以 $-q$ 加到第 j 列, 再对调第 1 列和第 j 列, 则矩阵 A 化为矩阵 $C=(c_{ij})$, 其中 $c_{11}=r<k$. 由归纳假设, 矩阵 C 可化为矩阵 $B=(b_{ij})$, 其中 $b_{11}>0$, 且 $b_{11}\mid b_{ij}, 1\le i\le m, 1\le j\le n$. 因此结论成立.

情形 2: $j=1$, 即 a_{11} 不整除 a_{i1}. 此时将情形 1 的证明中把列改成行, 即可证明结论成立.

情形 3: $i\neq 1, j\neq 1$, 此时 a_{11} 整除矩阵 A 中第 1 行和第 1 列上所有元素, 但不整除某个不在第 1 行和第 1 列的元素 a_{ij}. 由 Euclid 除法, 可设 $a_{1j}=a_{11}q_j, a_{i1}=a_{11}p_i$, 其中 q_j,p_i 是整数, $2\le j\le n, 2\le i\le m$. 矩阵 A 的第 1 行乘以 $-p_i$ 并加到第 i 行, $i=2,\cdots,m$, 第 1 列乘以 $-q_j$ 加到第 j 列, 得到矩阵 $C=(c_{ij})$, 其中第 1 行和第 1 列上除 $c_{11}=a_{11}$ 外其它元素全是 0. 如果矩阵 C 中 c_{ij} 都能被 c_{11} 整除, 则结论成立. 设 c_{ij} 不被 c_{11} 整除, 则将矩阵 C 中第 i 行加到第 1 行, 得到的矩阵即适合情形 1. 因此结论成立.

现在设矩阵 A 已经通过有限次对调两行 (列) 以及某行 (列) 乘以某个整数加到另一行 (列) 化为矩阵 $C=(c_{ij})$, 其中 c_{11} 整除其它所有元素 $c_{ij}, 1\le i\le n, 1\le j\le n$. 设 $c_{i1}=c_{11}q_i, c_{1j}=c_{11}p_j, 2\le i\le m, 2\le j\le n$. 矩阵 C 的第 1 行乘以 $-q_i$, 并加到第 i 行, $i=2,\cdots,m$, 第 1 列乘以 $-p_j$, 并加到第 j 列, $j=2,\cdots,n$, 则矩阵 C 化为

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \widetilde{c_{22}} & \widetilde{c_{23}} & \cdots & \widetilde{c_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \widetilde{c_{m2}} & \widetilde{c_{m3}} & \cdots & \widetilde{c_{mn}} \end{pmatrix},$$

其中 $\widetilde{c_{ij}}=c_{ij}-c_{1j}q_i, 2\le i\le m, 2\le j\le n$. 由于 $c_{11}\mid c_{ij}$, 因此 $c_{11}\mid \widetilde{c_{ij}}, 2\le i\le m, 2\le j\le n$. 对矩阵

$$\widetilde{C}=\begin{pmatrix} \widetilde{c_{22}} & \cdots & \widetilde{c_{22}} \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{c_{m2}} & \cdots & \widetilde{c_{mn}} \end{pmatrix}$$

重复上述证明, 则矩阵 $\widetilde{C}$ 可化为

$$C'=\begin{pmatrix} c'_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c'_{33} & \cdots & c'_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c'_{m3} & \cdots & c'_{mn} \end{pmatrix},$$

其中 $c_{11}\mid c'_{22}, c'_{22}\mid c'_{ij}, 3\le i\le m, 3\le j\le n$. 如此继续. 于是矩阵 A 可经有限次行 (列) 的对调和

某行 (列) 乘以某个整数并加到另一行 (列) 的初等变换化为形式 $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$

的矩阵. 即存在 m 阶可逆幺模矩阵 S 和 n 阶可逆幺模矩阵 T 使得

$$SAT = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n},$$

取 $P = S^{-1}, Q = T^{-1}$, 立即有

$$A = P\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} Q.$$

□

❀ **注:** 矩阵 $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ 中的正整数 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 称为矩阵 A 的不变因数. 可以证明, 对于正整数 $k, 1 \le k \le r$, $d_1 d_2 \cdots d_k$ 是矩阵 A 中所有 k 阶非零子式的最大公因数 D_k. 另外, 该矩阵称为整数环 $\mathbb{Z}$ 上 $m\times n$ 矩阵 A 在相抵下的标准形.

习题 3.4.16: 证明: 二阶幺模矩阵 A 可以表为矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的方幂的乘积.

☞ **证:** 由上题结论可知矩阵 A 可经有限次行 (列) 的对调和某行 (列) 乘以某个整数并加到另一行 (列) 的初等变换化为形式

$$O = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

的矩阵, 显然 $d_1 d_2 = 1$, 又 $d_i > 0$, 所以 $d_1 = d_2 = 1$.

下面我们证明, 行 (列) 的对调和某行 (列) 乘以某个整数并加到另一行 (列) 的初等变换都可以表示成 P, Q 的方幂乘积 (包括负整数幂).

对于行变换, 我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = QPQ, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = (QPQ)^n, \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^n, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = Q^{-1}PQ^{-1},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} = \left(Q^{-1}PQ^{-1}\right)^n, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-n}.$$

对于列变换, 我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = QPQ, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^n, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = (QPQ)^n, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-n}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = Q^{-1}PQ^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} = \left(Q^{-1}PQ^{-1}\right)^n.$$

因此二阶幺模矩阵 A 可以表为矩阵 P 和 Q 的方幂的乘积. □

习题 3.4.17: 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 证明: 如果矩阵 A^TA 的每一个 k 阶主子式都为零, 则 $\operatorname{rank} A < k$.

证: 由 Cauchy—Binet 公式,

$$AA^T\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} A^T\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n}\left[A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right]^2 = 0,$$

我们知

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = 0,$$

即 A 的 k 阶子式均为零, 故 $\operatorname{rank}A < k$. □

习题 3.4.18: 证明: n 阶方阵 A 都可以表为形如 $I_{(n)} + aE_{ij}$ 的方阵的乘积, 其中 E_{ij} 是 (i,j) 系数为 1 而其它系数都为零的 n 阶方阵, $1 \le i,j \le n$.

证: 设 $\operatorname{rank}A = r$, 所以存在 n 阶初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 和 n 阶初等方阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$, 使得

$$A = P_1P_2\cdots P_s\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1Q_2\cdots Q_t.$$

首先,

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=r+1}^{n}\left(I_{(n)} - E_{ii}\right).$$

接着我们说明每个初等方阵都可以表示成形如 $I_{(n)} + aE_{ij}$ 的方阵的乘积.

对于第 i 行与第 j 行对换的置换矩阵 P_{ij}, 我们有

$$\left(I_{(n)}-2E_{jj}\right)\left(I_{(n)}-E_{ji}\right)\left(I_{(n)}+E_{ij}\right)P_{ij}=I_{(n)},$$

即

$$P_{ij}=\left(I_{(n)}+E_{ij}\right)^{-1}\left(I_{(n)}-E_{ji}\right)^{-1}\left(I_{(n)}-2E_{jj}\right)^{-1}=\left(I_{(n)}-E_{ij}\right)\left(I_{(n)}+E_{ji}\right)\left(I_{(n)}-2E_{jj}\right).$$

对于将第 j 行遍乘非零的数 a, 然后加到第 i 行的初等方阵 $Q_{ij}(a)$, 我们有

$$Q_{ij}\left(a\right)=I_{(n)}+aE_{ij}.$$

对于将第 j 行遍乘非零的数 b 的初等方阵 $P_i(b)$, 我们有

$$P_i\left(b\right)=I_{(n)}+\left(b-1\right)E_{ii}.$$

同样, 列初等变换也有相应的性质.

因此 $P_i, Q_j, 1\leq s, 1\leq j\leq t$ 均可表示为形如 $I_{(n)}+aE_{ij}$ 的方阵的乘积. 进而 n 阶方阵 A 都可以表为形如 $I_{(n)}+aE_{ij}$ 的方阵的乘积. □

3.5 一些例子

3.5.1 习　题

习题 3.5.1: 证明: 设 A 是 n 阶方阵. 如果存在正整数 k, 使得 $\mathrm{rank}A^k=\mathrm{rank}A^{k+1}$, 则

$$\mathrm{rank}A^k=\mathrm{rank}A^{k+1}=\mathrm{rank}A^{k+2}=\cdots.$$

证: 设 $r=\mathrm{rank}A$, 则有

$$r=\mathrm{rank}A\geq\mathrm{rank}A^2\geq\mathrm{rank}A^3\geq\cdots.$$

记 $R=\{\mathrm{rank}A^i:i=1,2,\cdots\}$. 由于 $\mathrm{rank}A^i$ 是非负整数, 因此 R 是一个非增的非负整数序列, 所以存在正整数 k, 使得 $\mathrm{rank}A^k=\mathrm{rank}A^{k+1}$. 一方面, 对 $m\in\mathbb{N}^+$, 我们有 $\mathrm{rank}A^{k+m+1}\leq\mathrm{rank}A^{k+m}$; 另一方面, 由 Frobenius 秩不等式, 有

$$\mathrm{rank}\left(A^{k+m+1}\right)=\mathrm{rank}\left(A^mA^kA\right)\geq\mathrm{rank}A^{k+m}+\mathrm{rank}A^{k+1}-\mathrm{rank}A^k=\mathrm{rank}A^{k+m}.$$

故

$$\mathrm{rank}\left(A^{k+m+1}\right)=\mathrm{rank}A^{k+m}.$$

分别取 $m=1,2,\cdots$, 我们立得

$$\mathrm{rank}A^k=\mathrm{rank}A^{k+1}=\mathrm{rank}A^{k+2}=\cdots.$$

□

习题 3.5.2: 设 A 和 B 为 n 阶方阵. 证明:

$$\operatorname{rank}\left(AB-I_{(n)}\right) \le \operatorname{rank}\left(A-I_{(n)}\right) + \operatorname{rank}\left(B-I_{(n)}\right).$$

证: 注意到

$$\begin{pmatrix} I_{(n)} & A \\ 0 & I_{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-I_{(n)} & 0 \\ 0 & B-I_{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \\ I_{(n)} & I_{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB-I_{(n)} & AB-A \\ B-I_{(n)} & B-I_{(n)} \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\left(AB-I_{(n)}\right) &\le \operatorname{rank}\begin{pmatrix} AB-I_{(n)} & AB-A \\ B-I_{(n)} & B-I_{(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-I_{(n)} & 0 \\ 0 & B-I_{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\left(A-I_{(n)}\right) + \operatorname{rank}\left(B-I_{(n)}\right).\end{aligned}$$

□

习题 3.5.3: 证明: n 阶斜对称方阵 K 的秩是偶数, 并且秩为 r 的斜对称方阵至少有一个 r 阶主子式不为零, 同时, 所有非零的 r 阶主子式都同号.

证: 因为 $\operatorname{rank}K = r$, 所以存在 n 阶可逆方阵 P 与 Q, 使得

$$K = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

由 $K^T = -K$ 得到

$$Q^T\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^T = -P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q,$$

即

$$P^{-1}Q^T\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left(P^{-1}Q^T\right)^T.$$

记

$$P^{-1}Q^T = R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix},$$

其中 R_{11} 是 r 阶方阵, 代入上式得到 $R_{11}^T = -R_{11}, R_{21} = 0$. 于是

$$P^{-1}Q^T = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow Q^T = P\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -R_{11} & 0 \\ R_{12}^T & R_{22}^T \end{pmatrix}P^T.$$

因此

$$K = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -R_{11} & 0 \\ R_{12}^T & R_{22}^T \end{pmatrix}P^T = P\begin{pmatrix} -R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^T.$$

由于方阵 P 可逆, 所以

$$\operatorname{rank}K = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}R_{11} = r.$$

由于 R_{11} 是 r 阶的, 因此 R_{11} 是可逆斜对称方阵.

现在设 $K\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$ 是方阵 K 的任意 r 阶主子式, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$. 由 Binet—Cauchy 公式,

$$K\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = (-1)^r \left[P\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \right]^2 \det R_{11}.$$

由此看出, 如果方阵 K 的所有 r 阶主子式都为零, 则对任意 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$, $P\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} = 0$. 于是, 对行列式 $\det P$ 的前 r 列作 Laplace 展开, 得到

$$\det P = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n} P\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ r+1 & r+2 & \cdots & n \end{pmatrix} = 0,$$

和方阵 P 可逆矛盾. 因此, 方阵 K 至少有一个 r 阶主子式不为零, 由于 K 的任意奇数 m 阶主子式 M 仍为斜对称行列式, 故

$$\det M = \det(-M) = (-1)^m \det M = -\det M \Rightarrow \det M = 0.$$

因此 r 必为偶数, 故

$$K\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \left[P\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \right]^2 \det R_{11}.$$

我们可以看出, 方阵 K 的任意 r 阶非零主子式都和行列式 $\det R_{11}$ 同号. 因此, 斜对称方阵 K 所有 r 阶非零主子式都同号. □

习题 3.5.4: 设 A 和 B 为 n 阶方阵, $AB = BA = 0$, 并且 $\operatorname{rank} A^2 = \operatorname{rank} A$. 证明:

$$\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

证: 设 $\operatorname{rank} A = r$, 则存在 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q.$$

由于 $AB = BA = 0$, 所以有

$$P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB = BP\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = 0,$$

进而有

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QBP = QBP\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

将 n 阶方阵 QBP 分块为 $QBP = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 其中 B_{11} 是 r 阶的, 则由(3.6)式可得

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

因此 $B_{11}=0, B_{12}=0$ 且 $B_{21}=0$. 于是 $QBP=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$, 即

$$B=Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}P^{-1}=P\left(P^{-1}Q^{-1}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}\left(P^{-1}Q^{-1}\right)Q. \tag{3.6}$$

另一方面, 我们有

$$A^2=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

记 $QP=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$, 其中 R_{11} 是 r 阶的, 则

$$A^2=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

因此 $\operatorname{rank}A^2=\operatorname{rank}R_{11}=\operatorname{rank}A=r$, 即 R_{11} 是可逆的. 于是由

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ -R_{21}R_{11}^{-1} & I_{(n-r)} \end{pmatrix}QP=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12} \end{pmatrix}$$

得到 $R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}$ 是可逆的. 另外,

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ -R_{21}R_{11}^{-1} & I_{(n-r)} \end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_{(r)} & -R_{11}^{-1}R_{12} \\ 0 & I_{(n-r)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12} \end{pmatrix}.$$

于是,

$$QP=\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ -R_{21}R_{11}^{-1} & I_{(n-r)} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(r)} & -R_{11}^{-1}R_{12} \\ 0 & I_{(n-r)} \end{pmatrix}^{-1}.$$

两边取逆得到

$$\begin{aligned}P^{-1}Q^{-1}&=\begin{pmatrix} I_{(r)} & -R_{11}^{-1}R_{12} \\ 0 & I_{(n-r)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ -R_{21}R_{11}^{-1} & I_{(n-r)} \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} R_{11}^{-1}+R_{11}^{-1}R_{12}\left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & -R_{11}^{-1}R_{12}\left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1} \\ -\left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & \left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

记 $P^{-1}Q^{-1}=T$, 则 $P^{-1}=TQ$. 又由 $QP=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$, 有 $P=Q^{-1}\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$. 于是

$$A=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=Q^{-1}\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{pmatrix}Q,$$

而

$$\begin{aligned}B&=Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}P^{-1}=Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}TQ\\
&=Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -B_{22}\left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & B_{22}\left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}Q.\end{aligned}$$

记 $X=R_{21}-B_{22}\left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}$, 则有

$$A+B=Q^{-1}\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ X & B_{22}\left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}Q.$$

所以

$$\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ X & B_{22}\left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ -XR_{11}^{-1} & I_{(n-r)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ X & B_{22}\left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & B_{22}\left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & \left(R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A+B)&=\operatorname{rank}I_{(r)}+\operatorname{rank}B_{22}\\&=r+\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B.\end{aligned}$$

□

习题 3.5.5: **设 A 和 B 为 n 阶方阵, $AB=BA=0$. 证明: 存在正整数 k, 使得**

$$\operatorname{rank}\left(A^k+B^k\right)=\operatorname{rank}A^k+\operatorname{rank}B^k.$$

证: 由本节习题 3.5.1 可知, 存在正整数 k, 使得 $\operatorname{rank}A^k=\operatorname{rank}A^{k+1}=\operatorname{rank}\left(A^k\right)^2$, 由 $AB=BA=0$ 可知

$$A^kB^k=B^kA^k=0.$$

于是由上题结论可知

$$\operatorname{rank}\left(A^k+B^k\right)=\operatorname{rank}A^k+\operatorname{rank}B^k.$$

□

习题 3.5.6: **设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{n\times m}$. 证明: $\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}A$ 的充分必要条件是, 存在 $C\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 使得 $A=ABC$. 由此证明: 如果 $\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}A$ 且方阵 AB 幂等, 则方阵 BA 也幂等.**

证: 必要性. 若 $\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}A$, 设 $\operatorname{rank}A=r$, 所以存在 m 阶与 n 阶可逆方阵 P 与 Q, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

记 $QB = D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$, 其中 D_{11} 为 r 阶方阵. 则

$$\begin{aligned} AB = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \\ = P\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A = r.$$

所以 $r \times m$ 分块矩阵 $\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \end{pmatrix}$ 是行满秩矩阵, 则存在 r 阶与 m 阶可逆方阵 R 与 T, 使得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} R & 0 \end{pmatrix} T \\ = \begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{(m-r)} \end{pmatrix} T. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{(n-r)} \end{pmatrix} T\right)^{-1} \\ = & \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \end{pmatrix} T^{-1}\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & I_{(n-r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} QB\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{(n-r)} \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{(n-r)} \end{pmatrix} T \\ = \begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ D'_{21} & D'_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & ABT^{-1}\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & I_{(m-r)} \end{pmatrix} Q = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QBT^{-1}\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & I_{(m-r)} \end{pmatrix} Q \\ = & P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ D'_{21} & D'_{22} \end{pmatrix} Q = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = A. \end{aligned}$$

取

$$C = T^{-1}\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & I_{(m-r)} \end{pmatrix} Q$$

即可.

充分性. 若存在 $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 使得 $A = ABC$. 由

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} ABC \leq \operatorname{rank} AB$$

可知 $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} A$.

如果 $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} A$ 且方阵 AB 幂等, 则方阵 BA 也幂等. 则存在 $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 使得 $A = ABC$ 且

$$ABA = AB\left(ABC\right) = \left(AB\right)^2 C = ABC = A,$$

于是

$$\left(BA\right)^2 = BABA = B\left(ABA\right) = BA.$$

因此 BA 亦为幂等方阵. □

习题 3.5.7: 设整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公因数为 d. 证明: 存在 n 阶可逆的整系数矩阵 P, 使得

$$\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right) P = (d, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1个}).$$

证: 由上一节习题 3.4.15 结论可知, 存在可逆的 1 阶整系数矩阵 (m) 和 n 阶整系数矩阵 N, 使得

$$\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right) = m\left(d, 0, \cdots, 0\right) N = \left(d, 0, \cdots, 0\right) mN,$$

即

$$\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)\left(\frac{1}{m} N^{-1}\right) = \left(d, 0, \cdots, 0\right).$$

事实上, $m = \pm 1$.

取

$$P = \frac{1}{m} N^{-1}$$

即可满足题意. □

习题 3.5.8: 证明: 存在 n 阶可逆的整系数矩阵 P, 使得它的第 1 行为整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的充分必要条件是, 整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互素.

证: 必要性. 若存在 n 阶可逆的整系数矩阵 P, 使得它的第 1 行为整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 记 $P^{-1} = B = (b_{ij})$, 我们有

$$a_1 b_{11} + a_2 b_{12} + \cdots a_n b_{1n} = 1.$$

因此整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互素.

充分性. 若整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互素, 由上一习题 3.5.7 的结论可知存在 n 阶可逆的整系数矩阵 Q, 使得

$$\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right) Q = (1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1个}).$$

取 $P = Q^{-1} = (p_{ij})$, 由于

$$\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right) = \left(1, 0, \cdots, 0\right) Q^{-1} = \left(p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1n}\right),$$

我们知 $p_{1i} = a_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

从而此可逆整系数矩阵 P 即为满足题意的矩阵. □

3.6 线性方程组

3.6.1 习　题

习题 3.6.1: 求下列齐次线性方程组的通解:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2-2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+x_5=0 \\ 5x_1+4x_2-3x_3+4x_4-x_5=0 \end{cases}$.

解:

(1) 齐次方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

用 -1 乘矩阵 A 的第 1 行并加到第 2 行, 用 -4 乘矩阵 A 的第 1 行并加到第 3 行, 用 -2 乘矩阵 A 的第 1 行并加到第 4 行, 矩阵 A 变为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

用 $-\frac{1}{2}$ 乘矩阵 B 的第 2 行. 再用 6 乘第 2 行并加到第 3 行, 用 -2 乘第 2 行并加到第 4 行, 矩阵 B 变为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 12 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

用 $\frac{1}{12}$ 乘矩阵 C 的第 3 行. 再用 4 乘第 3 行并加到第 4 行, 矩阵 C 变为

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -5 \end{pmatrix}.$$

用 $\frac{1}{15}$ 乘矩阵 D 的第 4 行. 再用 $-\frac{3}{4}$ 乘第 4 行并加到第 3 行, 用第 4 行并加到第 2 行, 用 3 乘第 4 行并加到第 1 行. 用 -1 乘第 3 行并加到第 2 行. 用 -1 乘第 2 行并加到第 1 行, 矩阵 D 变为

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{7}{6}\\0&1&0&0&-\frac{5}{6}\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

因此, 原齐次线性方程组化为

$$\begin{cases}x_1 & & & -\frac{7}{6}x_5=0\\ & x_2 & & -\frac{5}{6}x_5=0\\ & & x_3 & =0\\ & & & x_4-\frac{1}{3}x_5=0\end{cases}.$$

于是, 求得通解为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{6}x_5\\\frac{5}{6}x_5\\0\\\frac{1}{3}x_5\\x_5\end{pmatrix}=x_5\begin{pmatrix}\frac{7}{6}\\\frac{5}{6}\\0\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix},$$

其中 x_5 是独立参数.

(2) 齐次方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\2&2&1&1&-2\\0&1&2&2&1\\5&4&-3&4&-1\end{pmatrix}.$$

用 -2 乘矩阵 A 的第 1 行并加到第 2 行, 用 -5 乘矩阵 A 的第 1 行并加到第 4 行, 矩阵 A 变为

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&-1&-1&-4\\0&1&2&2&1\\0&-1&-8&-1&-6\end{pmatrix}.$$

对换矩阵 B 的第 2 和第 3 行. 用第 2 行加到第 4 行. 用 -1 乘第 3 行. 用 6 乘第 3 行并加到第 4 行, 矩阵 B 变为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&1\\0&0&1&1&4\\0&0&0&7&19\end{pmatrix}.$$

用 $\frac{1}{7}$ 乘矩阵 C 的第 4 行. 再用 -1 乘第 4 行并加到第 3 行, 用用 -2 乘第 4 行并加到第 2 行, 用 -1 乘第 4 行并加到第 1 行. 用 -2 乘第 3 行并加到第 2 行, 用 -1 乘第 3 行并加到第 2 行. 用 -1 乘第 2 行并加到第 1 行, 矩阵 C 变为

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{19}{7} \end{pmatrix}.$$

因此, 原齐次线性方程组化为

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 4x_5 = 0 \\ \quad x_2 \qquad - 7x_5 = 0 \\ \qquad x_3 + \frac{9}{7}x_5 = 0 \\ \qquad\quad x_4 + \frac{19}{7}x_5 = 0 \end{cases}.$$

于是, 求得通解为

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_5 \\ 7x_5 \\ -\frac{9}{7}x_5 \\ -\frac{19}{7}x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_5 \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -\frac{9}{7} \\ -\frac{19}{7} \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 x_5 是独立参数.

□

习题 3.6.2: 求非齐次线性方程组的通解:

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ \qquad x_2 - \ x_3 + \ x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 = 1 \\ \quad - 7x_2 + 3x_3 + \ x_4 = -3 \end{cases};$

(2) $\begin{cases} x_1 + \ x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + \ x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}.$

✎ **解:**

(1) 它的增广矩阵为

$$(A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

用 -1 乘矩阵 (A,β) 的第 1 行加到第 3 行. 接着用 -5 乘第 2 行并加到第 3 行, 用 7 乘第 2 行并加到第 4 行. 矩阵 (A,β) 变为

$$(B,\gamma)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-4&12\\0&0&-4&8&-24\end{pmatrix}.$$

用 $\frac{1}{2}$ 乘矩阵 (B,γ) 的第 3 行. 用 4 乘第 3 行并加到第 4 行, 矩阵 (B,γ) 变为

$$(C,\xi)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

用矩阵 (C,ξ) 的第 3 行加到第 2 行, 用 -3 乘矩阵 (C,ξ) 的第 3 行加到第 1 行. 接着用 2 乘第 2 行并加到第 1 行. 矩阵 (C,ξ) 变为

$$\left(\widetilde{A},\widetilde{\beta}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&0&-1&3\\0&0&1&-2&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是得到

$$\begin{cases}x_1 & & =-8\\ \quad x_2 & -\quad x_4 & =3\\ \quad\quad x_3 & -2x_4 & =6\end{cases}$$

所以, 通解为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\3+x_4\\6+2x_4\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\3\\6\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix},$$

其中 x_4 是独立参数.

(2) 它的增广矩阵为

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\2&1&-2&1\\1&1&1&3\\1&2&-3&1\end{pmatrix}.$$

用 -2 乘矩阵 (A,β) 的第 1 行加到第 2 行, 用 -1 乘矩阵 (A,β) 的第 1 行加到第 3 行, 用

-1 乘矩阵 (A,β) 的第 1 行加到第 4 行. 矩阵 (A,β) 变为

$$(B,\gamma)=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\0&-1&4&3\\0&0&4&4\\0&1&0&2\end{pmatrix}$$

用矩阵 (B,γ) 的第 2 行加到第 4 行. 接着用 -1 乘第 3 行并加到第 4 行, 矩阵 (B,γ) 变为

$$(C,\xi)=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\0&-1&4&3\\0&0&4&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

考察第四个方程

$$0=1.$$

这显然不可能. 所以, 原方程组无解.

□

习题 3.6.3: 选择 λ 的值, 使下面线性方程组有解:

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda\end{cases}.$$

✎ **解:** 它的增广矩阵为

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}2&-1&1&1&1\\1&2&-1&4&2\\1&7&-4&11&\lambda\end{pmatrix}.$$

交换矩阵 (A,β) 的第 1 和第 2 行. 接着用 -2 乘第 1 行并加到第 2 行, 用 -1 乘第 1 行并加到第 3 行. 矩阵 (A,β) 变为

$$(B,\gamma)=\begin{pmatrix}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&-7&-3\\0&5&-3&7&\lambda-2\end{pmatrix}.$$

用第 2 行加到第 3 行, 矩阵 (B,γ) 变为

$$(C,\xi)=\begin{pmatrix}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&-7&-3\\0&0&0&0&\lambda-5\end{pmatrix}.$$

考察第 3 个方程

$$0=\lambda-5,$$

因此 $\lambda=5$.

此时有

$$(C,\xi)=\begin{pmatrix}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&-7&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

用 $-\frac{1}{5}$ 乘矩阵 (C,ξ) 的第 2 行. 接着用 -2 乘第 2 行加到第 1 行, 矩阵 (C,ξ) 变为

$$\left(\widetilde{A},\widetilde{\beta}\right)=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{5}&\frac{6}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&-\frac{3}{5}&\frac{7}{5}&\frac{3}{5}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是得到

$$\begin{cases}x_1 \quad +\frac{1}{5}x_3+\frac{6}{5}x_4=\frac{4}{5}\\ \quad x_2-\frac{3}{5}x_3+\frac{7}{5}x_4=\frac{3}{5}\end{cases}.$$

所以, 通解为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}-\frac{1}{5}x_3-\frac{6}{5}x_4\\\frac{3}{5}+\frac{3}{5}x_3-\frac{7}{5}x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\-\frac{7}{5}\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 x_3,x_4 是独立参数. □

习题 3.6.4: 推广定理 2 到矩阵方程上, 即证明: 设给定矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{m\times p}$, 而未知矩阵 $X\in\mathbb{F}^{n\times p}$, 则矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A,B)$, 其中 (A,B) 是矩阵 A 和 B 并排而成的矩阵.

证: 证法一: 设 $\operatorname{rank}A=r$, 则存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 P 和 Q, 使得

$$A=P\begin{pmatrix}I_{(r)}&0\\0&0\end{pmatrix}Q.$$

必要性. 设矩阵方程 $AX=B$ 有解 X_0, 记 $QX_0=\begin{pmatrix}R_{11}\\R_{21}\end{pmatrix}$, 其中 R_{11} 为 $r\times p$ 阶矩阵, 则

$$B=AX_0=P\begin{pmatrix}I_{(r)}&0\\0&0\end{pmatrix}QX_0=P\begin{pmatrix}I_{(r)}&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{11}\\R_{21}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}R_{11}\\0\end{pmatrix}.$$

而

$$\operatorname{rank}(A,B)=\operatorname{rank}\left(P\begin{pmatrix}I_{(r)}&0\\0&0\end{pmatrix}Q,P\begin{pmatrix}R_{11}\\0\end{pmatrix}\right)=\operatorname{rank}P\begin{pmatrix}I_{(r)}&0&R_{11}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

因为 P,Q 可逆, 我们有

$$\operatorname{rank}(A,B)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}I_{(r)}&0&R_{11}\\0&0&0\end{pmatrix}=r=\operatorname{rank}A.$$

充分性. 设 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(A,B)$. 由于

$$(A,B)=\left(P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q,B\right)=P\left[\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q,P^{-1}B\right]$$
$$=P\left[\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},P^{-1}B\right]\begin{pmatrix} Q & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 & R_{11}\\ 0 & 0 & R_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中 $P^{-1}B=\begin{pmatrix} R_{11}\\ R_{21}\end{pmatrix}$, R_{11} 为 $r\times p$ 矩阵, 所以

$$\mathrm{rank}\,(A,B)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 & R_{11}\\ 0 & 0 & R_{21}\end{pmatrix}=\mathrm{rank}A=r.$$

因此 $R_{21}=0$. 取 $X_0=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{n\times m}P^{-1}B$, 则

$$AX_0=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q\cdot Q^{-1}\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{n\times m}P^{-1}B=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}B$$
$$=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{11}\\ 0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} R_{11}\\ 0\end{pmatrix}=PP^{-1}B=B.$$

所以 $X_0=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{n\times m}P^{-1}B$ 是矩阵方程 $AX=B$ 的解.

证法二: 记 $B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p]$, 其中 β_j 是矩阵 B 的第 j 列形成的 m 维列向量, $j=1,2,\cdots,p$. 另记 $X=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p]$, 其中 α_i 是矩阵 X 的第 j 列形成的 n 维未知列向量 $j=1,2,\cdots,p$. 考虑矩阵方程

$$A\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j\right]=\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j\right],j=1,2,\cdots,p.$$

现在对 j 用归纳法证明, 矩阵方程 $A\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j\right]=\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j\right]$ 有解的充要条件是 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\left[A,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j\right]$.

当 $j=1$ 时结论显然成立. 因为矩阵方程即为 $A\alpha_1=\beta_1$, 这是通常的线性方程组.

设结论对 $j-1$ 成立. 考虑矩阵方程 $A\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j\right]=\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j\right]$. 它有解的充要条件是矩阵方程 $A\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1}\right]=\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{j-1}\right]$ 和 $A\alpha_j=\beta_j$ 都有解. 由归纳假设, 使这两个矩阵方程有解的充要条件是 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\left[A,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{j-1}\right]$ 和 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\left[A,\beta_j\right]$. 这表明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j$ 均可由矩阵 A 的列向量的极大线性无关向量组线性表出, 因此 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j$. 即结论对 j 也成立. □

❀ 注: 从证法二可以看出, 解矩阵方程 $AX=B$ 可以归结为解 p 个线性方程组 $A\alpha_j=\beta_j,j=1,2,\cdots,p$, 所以说, 矩阵方程是线性方程组的推广. 因此, 矩阵的行的初等变换在解矩阵方程中是大有作为的.

习题 3.6.5: **设 $A\in\mathbb{F}^{m\times m},X\in\mathbb{F}^{m\times p}$. 证明: 矩阵方程 $AX=0$ 有非零解的充分必要条件是方阵 A 的行列式为零.**

☞ **证:** 设 $\operatorname{rank}A=r$, 则存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 P 和 Q, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

必要性. 设矩阵方程 $AX=0$ 有非零解 X_0, 则方阵 A 的行列式必为零, 否则由 A 可逆得 $X_0=A^{-1}(AX_0)=0$, 矛盾.

充分性. 若方阵 A 的行列式为零, 则 $r<m$. 取 $X_0=Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(m-r)} \end{pmatrix}_{m\times p}$, 则

$$AX_0=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q\cdot Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(m-r)} \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(m-r)} \end{pmatrix}=0.$$

所以非零矩阵 $X_0=Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(m-r)} \end{pmatrix}_{m\times p}$ 是矩阵方程 $AX=0$ 的解. □

习题 3.6.6: 证明: 如果齐次线性方程组的系数矩阵的秩比未知量的个数小 1, 则该方程组的任意两个解成比例, 即相差一个数值因子.

☞ **证:** 设方程个数为 n, 系数矩阵 A 的秩为 $r=n-1$, 则齐次方程组的通解为

$$x=t_nQ^{-1}\varepsilon_n,$$

其中 t_n 是任意的数,$\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)$ 是第 n 个分量为 1, 其余分量为 0 的 n 维列向量,

由此我们知此方程任意两个解成比例. □

习题 3.6.7: 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times(n+1)}, X\in\mathbb{F}^{(n+1)\times n}$. 证明: 矩阵方程 $AX=I_{(n)}$ 有解的充分必要条件是, 矩阵 A 为行满秩的.

☞ **证:** 必要性. 设矩阵方程 $AX=0$ 有解 X_0. 设 $\operatorname{rank}A=r$, 则存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 P 和 Q, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$

记 $QX_0=\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix}$, 其中 R_{11} 为 $r\times n$ 矩阵. 则

$$\begin{aligned} n=\operatorname{rank}I_{(n)}=\operatorname{rank}AX_0=\operatorname{rank}P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QX_0=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QX_0 \\ =\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} R_{11} \\ 0 \end{pmatrix}=\operatorname{rank}R_{11}. \end{aligned}$$

从而由 $n=\operatorname{rank}R_{11}\le r\le n$ 可知 $r=n$, 即矩阵 A 为行满秩的.

充分性. 若矩阵 A 为行满秩的, 则存在 $n+1$ 阶可逆方阵 Q, 使得

$$A=\begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \end{pmatrix}Q.$$

取 $X_0 = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_{(n)} \\ y \end{pmatrix}$, 其中 y 为 $1\times n$ 行向量, 则有

$$AX_0 = \begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \end{pmatrix} Q\cdot Q^{-1}\begin{pmatrix} I_{(n)} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(n)} \\ y \end{pmatrix} = I_{(n)}.$$

所以矩阵 $X_0 = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_{(n)} \\ y \end{pmatrix}$ 是矩阵方程 $AX = I_{(n)}$ 的解.

除此之外, 我们也可利用上面习题 3.6.4 的结论来进行论证.

矩阵方程 $AX = I_{(n)}$ 有解的充分必要条件是, $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\left(A, I_{(n)}\right)$. 而

$$n = \mathrm{rank}I_{(n)} \le \mathrm{rank}\left(A, I_{(n)}\right) = \mathrm{rank}A \le n.$$

所以条件等价于 $\mathrm{rank}A = n$, 即矩阵 A 为行满秩的. □

习题 3.6.8: 设齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j = 0,\quad i = 1, 2, \cdots, n$$

的系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 是行满秩的. 证明: 它的解为, 对 $j = 1, 2, \cdots, n+1$,

$$x_j = (-1)^{n-j} t \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n+1} \end{pmatrix},$$

其中 t 是独立参数.

证: 首先记 $D_j = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$, 其中 $j = 1, 2, \cdots, n+1$.

注意到

$$\det\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n+1} \\ a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{n,n+1} \end{pmatrix} = 0.$$

我们按第 1 行进行 Laplace 展开可知

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}(-1)^{1+j}D_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}(-1)^{n-j}tD_j = 0.$$

即 $x_j = (-1)^{n-j}tD_j$ 是方程的解, t 为独立参数.

由于 $x_j = (-1)^{n-j}D_j$ 是方程组的解, 根据上面的习题 3.6.6 可知, 该方程组的任意两个解成比例, 因而 $x_j = (-1)^{n-j}tD_j$ 是方程的通解, t 为独立参数.

再看看　哥自己是怎么想的: 对 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时, $A=(a_{11},a_{12})$ 且 $\operatorname{rank}A=1$. 因此 a_{11},a_{12} 不全为零. 而方程组 $Ax=0$ 为 $a_{11}x_1+a_{12}x_2=0$, 所以 $\frac{x_1}{a_{12}}=\frac{x_2}{-a_{11}}=t$. 即得 $x_1=ta_{12},x_2=-ta_{11}$. 即结论对 $n=1$ 成立.

现在设结论对 $n-1$ 成立. 下面证明结论对 n 成立. 此时齐次线性方程组为 $Ax=0$, 其中系数矩阵 $A=(a_{ij})$ 是行满秩的. 因此矩阵 A 的第 1 行 $(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,n+1})$ 是非零的, 即 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,n+1}$ 不全为零. 为方便起见, 不妨设 $a_{11}\neq 0$. 将矩阵 A 的第 1 行乘以 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 加到第 i 行, $i=2,\cdots,n$, 则矩阵 A 化为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{n,n+1} \end{pmatrix},$$

其中 $b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}},2\le i\le n,2\le j\le n+1$. 记 $B=\left(b_{ij}\right),2\le i\le n,2\le j\le n+1$. 显然矩阵 B 也是行满秩的. 由归纳假设, 齐次线性方程组 $By=0,y=(x_2,x_3,\cdots,x_{n+1})^T$ 的通解为

$$x_{i+1}=(-1)^{n-1-i}t\times\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2,i} & b_{2,i+2} & \cdots & b_{2,n+1} \\ b_{32} & \cdots & b_{3,i} & b_{3,i+2} & \cdots & b_{3,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{n,i} & b_{n,i+2} & \cdots & b_{n,n+1} \end{vmatrix},i=1,2,\cdots,n. \tag{3.7}$$

而

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2,i} & b_{2,i+2} & \cdots & b_{2,n+1} \\ b_{32} & \cdots & b_{3,i} & b_{3,i+2} & \cdots & b_{3,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{n,i} & b_{n,i+2} & \cdots & b_{n,n+1} \end{vmatrix}\\
=&\begin{vmatrix} a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{2i}-\frac{a_{21}a_{1i}}{a_{11}} & a_{2,i+2}-\frac{a_{21}a_{1,i+2}}{a_{11}} & \cdots & a_{2,n+1}-\frac{a_{21}a_{1,n+1}}{a_{11}} \\ a_{32}-\frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{3i}-\frac{a_{31}a_{1i}}{a_{11}} & a_{3,i+2}-\frac{a_{31}a_{1,i+2}}{a_{11}} & \cdots & a_{3,n+1}-\frac{a_{31}a_{1,n+1}}{a_{11}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2}-\frac{a_{n1}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{ni}-\frac{a_{n1}a_{1i}}{a_{11}} & a_{n,i+2}-\frac{a_{n1}a_{1,i+2}}{a_{11}} & \cdots & a_{n,n+1}-\frac{a_{n1}a_{1,n+1}}{a_{11}} \end{vmatrix}\\
=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & a_{n,i+2} & \cdots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

于是式(3.7)化为

$$x_{i+1}=(-1)^{n-(i+1)}t\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & a_{n,i+2} & \cdots & a_{n,n+1} \end{vmatrix},i=1,2,\cdots,n. \tag{3.8}$$

将上式代入齐次线性方程组 $Ax=0$ 中的第一个方程 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,n+1}x_{n+1}=0$, 得到

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{a_{11}}\sum_{i=1}^{n} a_{1,i+1}x_{i+1} \\ &= -t\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-(i+1)}\frac{a_{1,i+1}}{a_{11}}\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & a_{n,i+2} & \cdots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

注意

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+1} & a_{2,i+2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & a_{n,i+1} & a_{n,i+2} & \cdots & a_{n,n+1} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.10}$$

将上述行列式按第 1 行作 Laplace 展开, 得到

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{1+i}a_{1,i}\times\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

于是有

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{1+i}a_{1,i}\times\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n+1} \end{vmatrix} \\ =&\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}a_{1,i+1}\times\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & a_{n,i+2} & \cdots & a_{n,n+1} \end{vmatrix} \\ =&-a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

将上式代入(3.10), 得到

$$x_1 = (-1)^{n-1}t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}.$$

这就证明, 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解具有题示的形式 □

❀ 注: 由于齐次线性方程组 $Ax=0$ 的系数矩阵 A 的秩为 n, 而未知元 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 的个数为 $n+1$. 因此方程组 $Ax=0$ 的解构成的解空间是 1 维的. 再注意到式(3.10). 易知方程组 $Ax=0$ 具有一个非零解. 由此证明了本习题. 这里采用归纳法和矩阵的行的初等变换, 尽管所用篇幅较长, 却是容易想到的.

习题 3.6.9: 设 n 阶方阵 A 和 B 的秩分别为 r 和 $n-r$. 求矩阵方程

$$AXB=0$$

的通解.

解: 由 $\operatorname{rank}A=r,\operatorname{rank}B=n-r$ 可知, 存在 n 阶可逆矩阵 P,Q 和 S,T, 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, B=S\begin{pmatrix} I_{(n-r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T.$$

记 $QXS=R=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$, 其中 R_{11} 为 $r\times(n-r)$ 矩阵, 则

$$0=AXB=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QXS\begin{pmatrix} I_{(n-r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T,$$

即

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QXS\begin{pmatrix} I_{(n-r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0,$$

则 $R_{11}=0$. 因此

$$QXS=R=\begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\Rightarrow X=Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}S^{-1},$$

其中 R_{12},R_{21},R_{22} 分别为任意给定的 $r\times r,(n-r)\times(n-r),(n-r)\times r$ 矩阵. □

3.7 矩阵的广义逆

3.7.1 习　题

习题 3.7.1: 设 A 和 B 分别是 $m\times n$ 和 $m\times p$ 矩阵, X 是 $n\times p$ 未知矩阵. 证明: 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $B=AA^-B$. 当有解时, 它的通解为

$$X=A^-B+\left(I_{(n)}-A^-A\right)W,$$

其中 W 是任意的 $n\times p$ 矩阵.

证: 设矩阵方程 $AX=B$ 有解 X_0, 则 $B=AX_0$. 因此

$$AA^-B=AA^-\left(AX_0\right)=\left(AA^-A\right)X_0=AX_0=B.$$

反之, 设 $B = AA^-B$ 成立. 取 $X_0 = A^-B$. 于是 $AX_0 = AA^-B = B$, 即 X_0 是矩阵方程 $AX = B$ 的解.

因为矩阵方程 $AX = B$ 有解, 因此对于矩阵 A 的取定的广义逆 A^-, $AA^-B = B$. 取 $X = A^-B + \left(I_{(n)} - A^-A\right) W$, 则

$$AX = AA^-B + A\left(I_{(n)} - A^-A\right) W = B + \left(A - AA^-A\right) W = B.$$

即 $X = A^-B + \left(I_{(n)} - A^-A\right) W$ 是矩阵方程 $AX = B$ 的解. 反之, 设 X_0 是矩阵方程 $AX = B$ 的解, 即 $AX_0 = B$. 取 $W = X_0$, 则

$$A^-B + A\left(I_{(n)} - A^-A\right) X_0 = A^-AX_0 + X_0 - A^-AX_0 = X_0,$$

即 X_0 可表为所说的形式. 这就证明, $X = A^-B + \left(I_{(n)} - A^-A\right) W$ 是矩阵方程 $AX = B$ 的通解. □

习题 3.7.2: 设 A, B 和 C 分别是 $m \times n, p \times q$ 和 $m \times q$ 矩阵, X 是 $n \times p$ 未知矩阵. 证明: 矩阵方程 $AXB = C$ 有解的充分必要条件是 $(I_{(m)} - AA^-)C = 0$ 和 $C(I_{(q)} - B^-B) = 0$, 并且当有解时, 它的通解为

$$X = A^-CB^- + \left(I_{(n)} - A^-A\right) Y + Z\left(I_{(p)} - B^-B\right) + \left(I_{(n)} - A^-A\right) W \left(I_{(p)} - B^-B\right),$$

其中 Y, Z 和 W 是任意的 $n \times p$ 矩阵.

证: 设矩阵方程 $AXB = C$ 有解 X_0, 则 $C = AX_0B$. 因此

$$\begin{aligned}
\left(I_{(m)} - AA^-\right) C &= \left(I_{(m)} - AA^-\right) AX_0B = AX_0B - \left(AA^-A\right) X_0B \\
&= AX_0B - AX_0B = 0 \\
C\left(I_{(q)} - B^-B\right) &= AX_0B\left(I_{(q)} - B^-B\right) = AX_0B - AX_0\left(BB^-B\right) \\
&= AX_0B - AX_0B = 0.
\end{aligned}$$

反之, 设 $(I_{(m)} - AA^-)C = 0$ 和 $C(I_{(q)} - B^-B) = 0$ 成立, 即 $C = AA^-C = CB^-B$. 取 $X_0 = A^-CB^-$. 于是

$$AX_0B = A\left(A^-CB^-\right) B = \left(AA^-C\right) B^-B = CB^-B = C,$$

即 X_0 是矩阵方程 $AX = B$ 的解.

因为矩阵方程 $AXB = C$ 有解, 因此对于矩阵 A 的取定的广义逆 A^-, $(I_{(m)} - AA^-)C = 0$ 和 $C(I_{(q)} - B^-B) = 0$ 成立. 取

$$X = A^-CB^- + \left(I_{(n)} - A^-A\right) Y + Z\left(I_{(p)} - B^-B\right) + \left(I_{(n)} - A^-A\right) W \left(I_{(p)} - B^-B\right),$$

则

$$\begin{aligned}
AXB = A&\left[A^-CB^- + \left(I_{(n)} - A^-A\right) Y + Z\left(I_{(p)} - B^-B\right)\right. \\
&\left. + \left(I_{(n)} - A^-A\right) W \left(I_{(p)} - B^-B\right)\right] B = \left(AA^-C\right) B^-B + \left(A - AA^-A\right) YB \\
&+ AZ\left(B - BB^-B\right) B + \left(A - AA^-A\right) W \left(B - BB^-B\right) \\
&= CB^-B = C.
\end{aligned}$$

即 $X=A^-CB^-+\left(I_{(n)}-A^-A\right)Y+Z\left(I_{(p)}-B^-B\right)+\left(I_{(n)}-A^-A\right)W\left(I_{(p)}-B^-B\right)$ 是矩阵方程 $AXB=C$ 的解. 反之, 设 X_0 是矩阵方程 $AXB=C$ 的解, 即 $AX_0B=C$. 取 $Y=Z=X_0, W=-X_0$, 则

$$\begin{aligned}&A^-CB^-+\left(I_{(n)}-A^-A\right)X_0+X_0\left(I_{(p)}-B^-B\right)\\&+\left(I_{(n)}-A^-A\right)X_0\left(I_{(p)}-B^-B\right)=A^-\left(AX_0B\right)B^-+\left(I_{(n)}-A^-A\right)X_0\\&+X_0\left(I_{(p)}-B^-B\right)+\left(I_{(n)}-A^-A\right)\left(-X_0\right)\left(I_{(p)}-B^-B\right)\\&=A^-\left(AX_0B\right)B^-+X_0-A^-AX_0+X_0-X_0B^-B\\&-X_0+X_0B^-B+A^-AX_0-A^-AX_0B^-B=X_0,\end{aligned}$$

即 X_0 可表为所说的形式. 这就证明, $X=A^-CB^-+\left(I_{(n)}-A^-A\right)Y+Z\left(I_{(p)}-B^-B\right)+\left(I_{(n)}-A^-A\right)W\left(I_{(p)}-B^-B\right)$ 是矩阵方程 $AXB=C$ 的通解. □

习题 3.7.3: 设 A,B 和 C 分别是 $m\times p, q\times n$ 和 $m\times n$ 矩阵, X 和 Y 分别是 $p\times n$ 和 $m\times q$ 未知矩阵. 证明: 方程 $AX-YB=C$ 有解的充分必要条件是 $(I_{(m)}-AA^-)C(I_{(q)}-B^-B)=0$, 而且当有解时, 它的通解为

$$\begin{aligned}&X=A^-C+A^-ZB+\left(I_{(p)}-A^-A\right)W,\\&Y=-\left(I_{(m)}-AA^-\right)CB^-+Z-\left(I_{(m)}-AA^-\right)ZBB^-,\end{aligned}$$

其中 W 和 Z 分别是任意的 $p\times n$ 和 $m\times q$ 矩阵.

证: 设矩阵方程 $AX-YB=C$ 有解 X_0,Y_0, 则 $C=AX_0-Y_0B$. 因此

$$\begin{aligned}&\left(I_{(m)}-AA^-\right)C\left(I_{(n)}-B^-B\right)=\left(I_{(m)}-AA^-\right)\left(AX_0-Y_0B\right)\left(I_{(n)}-B^-B\right)\\&=\left[AX_0-Y_0B-\left(AA^-A\right)X_0+AA^-Y_0B\right]\left(I_{(n)}-B^-B\right)\\&=\left(-Y_0B+AA^-Y_0B\right)\left(I_{(n)}-B^-B\right)=-Y_0B--Y_0\left(BB^-B\right)\\&+AA^-Y_0B-AA^-Y_0\left(BB^-B\right)=0.\end{aligned}$$

反之, 设 $(I_{(m)}-AA^-)C(I_{(q)}-B^-B)=0$ 成立, 即 $C-AA^-C-\left(I_{(m)}-AA^-\right)CB^-B=0$. 取 $X_0=A^-C, Y_0=-\left(I_{(m)}-AA^-\right)CB^-$. 于是

$$AX_0-Y_0B=AA^-C+\left(I_{(m)}-AA^-\right)CB^-B=C,$$

即 X_0,Y_0 是矩阵方程 $AX-YB=C$ 的解.

因为矩阵方程 $AX-YB=C$ 有解, 因此对于矩阵 A 的取定的广义逆 A^-, $(I_{(m)}-AA^-)C(I_{(q)}-B^-B)=0$ 成立. 取

$$\begin{aligned}&X=A^-C+A^-ZB+\left(I_{(p)}-A^-A\right)W,\\&Y=-\left(I_{(m)}-AA^-\right)CB^-+Z-\left(I_{(m)}-AA^-\right)ZBB^-,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
&AX-YB=A\left[A^{-}C+A^{-}ZB+\left(I_{(p)}-A^{-}A\right)W\right]\\
&-\left[-\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)CB^{-}+Z-\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)ZBB^{-}\right]B\\
&=AA^{-}C+AA^{-}ZB+(A-AA^{-}A)W+\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)CB^{-}B\\
&-ZB+\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)ZBB^{-}B=AA^{-}C+AA^{-}ZB+CB^{-}B-AA^{-}CB^{-}B\\
&-ZB+ZB-AA^{-}ZB=AA^{-}C+\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)CB^{-}B=C,
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&X=A^{-}C+A^{-}ZB+\left(I_{(p)}-A^{-}A\right)W,\\
&Y=-\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)CB^{-}+Z-\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)ZBB^{-},
\end{aligned}$$

是矩阵方程 $AX-YB=C$ 的解. 反之, 设 X_0,Y_0 是矩阵方程 $AX-YB=C$ 的解, 即 $AX_0-Y_0B=C$. 取 $W=X_0,Z=Y_0$, 则

$$\begin{aligned}
&A^{-}C+A^{-}Y_0B+\left(I_{(p)}-A^{-}A\right)X_0\\
=&A^{-}\left(AX_0-Y_0B\right)+A^{-}Y_0B+\left(I_{(p)}-A^{-}A\right)X_0\\
=&A^{-}AX_0-A^{-}Y_0B+A^{-}Y_0B+X_0-A^{-}AX_0=X_0,
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&-\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)CB^{-}+Y_0-\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)Y_0BB^{-}\\
&=-\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)\left(AX_0-Y_0B\right)B^{-}+Y_0-\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)Y_0BB^{-}\\
&=-AX_0B^{-}+Y_0BB^{-}+AA^{-}AX_0B^{-}-AA^{-}Y_0BB^{-}\\
&+Y_0-Y_0BB^{-}+AA^{-}Y_0BB^{-}=Y_0,
\end{aligned}$$

即 X_0,Y_0 可表为所说的形式. 这就证明,

$$\begin{aligned}
&X=A^{-}C+A^{-}ZB+\left(I_{(p)}-A^{-}A\right)W,\\
&Y=-\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)CB^{-}+Z-\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)ZBB^{-},
\end{aligned}$$

是矩阵方程 $AX-YB=C$ 的通解. □

习题 3.7.4: 证明: 存在 $m\times k$ 矩阵 A 和 $l\times n$ 矩阵 B 的广义逆 A^- 和 B^-, 使得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B + \operatorname{rank}\left[\left(I_{(m)} - AA^-\right) C \left(I_{(n)} - B^-B\right)\right],$$

其中 C 是 $m\times n$ 矩阵.

证: 记 $\operatorname{rank}A = r, \operatorname{rank}B = s$, 则存在 m,k,l,n 阶可逆矩阵 P,Q,R 与 T, 使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q, B = R\begin{pmatrix} I_{(s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T.$$

于是

$$A^- = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_{(r)} & D \\ E & F \end{pmatrix}_{k\times m} P^{-1}, B^- = T^{-1}\begin{pmatrix} I_{(s)} & G \\ H & I \end{pmatrix}_{n\times l} R^{-1},$$

其中 D,E,F 和 G,H,I 分别为任意的 $r\times(m-r)$, $(k-r)\times r$, $(k-r)\times(m-r)$ 以及 $s\times(l-s)$, $(n-s)\times s$, $(n-s)\times(l-s)$ 矩阵.

一方面, 取 $D=0, H=0$, 则有

$$AA^- = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QQ^{-1}\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ E & F \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$B^-B = T^{-1}\begin{pmatrix} I_{(s)} & G \\ 0 & I \end{pmatrix} R^{-1}R\begin{pmatrix} I_{(s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T = T^{-1}\begin{pmatrix} I_{(s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T.$$

因此

$$\left(I_{(m)} - AA^-\right) C \left(I_{(n)} - B^-B\right) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(m-r)} \end{pmatrix} P^{-1}CT^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(n-s)} \end{pmatrix} T.$$

记 $P^{-1}CT^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ 分别为 $r\times s$, $r\times(n-s)$, $(m-r)\times s$, $(m-r)\times(n-s)$ 矩阵.

我们有

$$\left(I_{(m)} - AA^-\right) C \left(I_{(n)} - B^-B\right) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(m-r)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(n-s)} \end{pmatrix} T = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix} T.$$

由于 P,T 均可逆, 我们有

$$\operatorname{rank}C_{22} = \operatorname{rank}\left(I_{(m)} - AA^-\right) C \left(I_{(n)} - B^-B\right).$$

另一方面,

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \\ 0 & 0 & I_{(s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $K=\begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 0 & C_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 K,L 分别为 $m\times l, k\times n$ 矩阵, 则

$$\begin{pmatrix} I_{(m)} & -K \\ 0 & I_{(l)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(k)} & -L \\ 0 & I_{(n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{22} \\ 0 & 0 & I_{(s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} &= \operatorname{rank} I_{(r)}+\operatorname{rank} I_{(s)}+\operatorname{rank} C_{22} \\ &= \operatorname{rank} A+\operatorname{rank} B+\operatorname{rank}\left(I_{(m)}-AA^{-}\right)C\left(I_{(n)}-B^{-}B\right).\end{aligned}$$

□

习题 3.7.5: 验证 $\overline{(A^{+})}^{T}=\left(\overline{A}^{T}\right)^{+}$.

证: 对于复数域上的 Penrose 方程组

$$\begin{cases} AXA=A, \\ XAX=X, \\ \overline{(AX)}^{T}=AX, \\ \overline{(XA)}^{T}=XA, \end{cases},$$

其中 A 为给定的 $m\times n$ 矩阵.

设矩阵 $A=BC$, 其中 B 和 C 分别是列满秩和行满秩矩阵, 则 Penrose 方程组的唯一解为

$$A^{+}=X=\overline{C}^{T}\left(C\overline{C}^{T}\right)^{-1}\left(\overline{B}^{T}B\right)^{-1}\overline{B}^{T}.$$

一方面,

$$\overline{(A^{+})}^{T}=\overline{\left(\overline{C}^{T}\left(C\overline{C}^{T}\right)^{-1}\left(\overline{B}^{T}B\right)^{-1}\overline{B}^{T}\right)}^{T}=B\left(\overline{B}^{T}B\right)^{-1}\left(C\overline{C}^{T}\right)^{-1}C.$$

另一方面, 由于 $\overline{A}^{T}=\overline{C}^{T}\overline{B}^{T}$, 且 $\overline{C}^{T},\overline{B}^{T}$ 仍分别为列满秩和行满秩矩阵, 则关于 $\overline{(A^{+})}^{T}$ 的 Penrose 方程组的唯一解为

$$\begin{aligned}\left(\overline{A}^{T}\right)^{+}=X' &= \overline{\left(\overline{B}^{T}\right)}^{T}\left(\left(\overline{B}^{T}\right)\overline{\left(\overline{B}^{T}\right)}^{T}\right)^{-1}\left(\overline{\left(\overline{C}^{T}\right)}^{T}\left(\overline{C}^{T}\right)\right)^{-1}\overline{\left(\overline{C}^{T}\right)}^{T} \\ &= B\left(\overline{B}^{T}B\right)^{-1}\left(C\overline{C}^{T}\right)^{-1}C=\overline{(A^{+})}^{T}.\end{aligned}$$

□

第 4 章 线性空间

4.1 线性空间的定义

4.1.1 习　　题

习题 4.1.1: 判断以下的集合 V 关于所规定的运算是否成为线性空间.

(1) 取 V 为所有实数对 (x_1, x_2) 的集合; $\mathbb{F}$ 为实数域 $\mathbb{R}$; 向量的加法规定为: 对 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V, (x_1, x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + x_1 y_2)$; 纯量与向量的乘法规定为: 对任意 $\lambda \in \mathbb{F}, (x_1, x_2) \in V, \lambda(x_1, x_2) = \left(\lambda x_1, \lambda x_2 + \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 1)x_1^2\right)$;

(2) 取 V 为所有实数对 (x_1, x_2) 的集合; $\mathbb{F}$ 为实数域 $\mathbb{R}$; 向量的加法规定为: 对 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$, $(x_1, x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; 纯量与向量的乘法规定为: 对任意 $\lambda \in \mathbb{F}, (x_1, x_2) \in V, \lambda(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$;

(3) 取 V 为所有满足 $f(x^2) = f^2(x)$ 的实函数集合; $\mathbb{F}$ 为实数域 $\mathbb{R}$; 加法规定为: 对 $f(x), g(x) \in V$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; 纯量与向量的乘法规定为: 对任意 $\lambda \in \mathbb{F}, f(x) \in V$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$;

(4) 取 V 为所有满足 $f(-1) = 0$ 的实函数集合; 数域 $\mathbb{F}$ 为实数域 $\mathbb{R}$; 向量的加法规定为函数的加法; 纯量与向量的乘法规定为实数与函数的乘法;

(5) 取 V 是所有满足 $a_1 > 0$ 的有序 n 元实数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的集合; 数域 $\mathbb{F}$ 为实数域 $\mathbb{R}$; 向量的加法与纯量与向量的乘法和 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 相同;

(6) 取 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶可逆方阵的集合; 取数域为 $\mathbb{F}$; 向量的加法规定为矩阵的加法, 纯量与向量的乘法规定为纯量与矩阵的乘法;

(7) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵 A_0. 取 V 是所有满足 $A_0 B = B A_0$ 的数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵 B 的集合; 取数域为 $\mathbb{F}$; 向量的加法以及纯量与向量的乘法同 (6);

(8) 取 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的所有幂等方阵的集合; 数域取为 $\mathbb{F}$; 向量的加法, 以及纯量与向量的乘法同 (6);

(9) 取 V 是所有定义在实轴上的复值函数; 数域 $\mathbb{F}$ 为复数域 $\mathbb{C}$; 向量的加法规定为函数的加法, 纯量与向量的乘法规定为复数与函数的乘法;

(10) 取 V 为所有定义在实轴上且满足 $f(-x) = \overline{f(x)}$ 的复函数集合, 其中 $\bar{z}$ 表示复数 z 的共轭; 取数域 $\mathbb{F}$ 为实数域 $\mathbb{R}$; 向量的加法, 以及纯量与向量的乘法同 (9).

证:

(1) 首先对于任意 $\alpha, \beta \in V$, V 中有唯一的向量 $\alpha + \beta$ 与之对应, 并且对任意纯量 $\lambda \in F$, 向量 $\alpha \in V$, V 中有唯一的向量 $\lambda\alpha$ 与之对应.

(A1) 加法结合律:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\gamma &= ((x_1,x_2)+(y_1,y_2))+(z_1,z_2)\\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)+(z_1,z_2)\\ &= (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2+x_1y_1+x_1z_1+y_1z_1).\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\alpha+(\beta+\gamma) &= (x_1,x_2)+((y_1,y_2)+(z_1,z_2))\\ &= (x_1,x_2)+(y_1+z_1,y_2+z_2+y_1z_1)\\ &= (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2+x_1y_1+x_1z_1+y_1z_1).\end{aligned}$$

两者相等.

(A2) 加法交换律

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= (x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)\\ \beta+\alpha &= (y_1,y_2)+(x_1,x_2)=(y_1+x_1,y_2+x_2+y_1x_1).\end{aligned}$$

两者相等.

(A3) 具有零向量. 取 $0=(0,0)$, 我们有

$$\alpha+0=(x_1,x_2)+(0,0)=(x_1,x_2).$$

(A4) 具有负向量. 对 $\alpha=(x_1,x_2)$, 我们取 $-\alpha=\left(-x_1,-x_2+x_1^2\right)$, 则有

$$\alpha+(-\alpha)=(x_1,x_2)+\left(-x_1,-x_2+x_1^2\right)=(0,0).$$

(M1) 一方面,

$$\begin{aligned}\lambda(\mu\alpha)=\lambda(\mu(x_1,x_2))&=\lambda\left(\mu x_1,\mu x_2+\frac{\mu(\mu-1)}{2}x_1^2\right)\\ &=\left(\lambda\mu x_1,\lambda\mu x_2+\frac{\lambda\mu(\mu-1)}{2}x_1^2+\frac{\lambda(\lambda-1)\mu^2}{2}x_1^2\right)\\ &=\left(\lambda\mu x_1,\lambda\mu x_2+\frac{\lambda\mu(\lambda\mu-1)}{2}x_1^2\right).\end{aligned}$$

另一方面,

$$(\lambda\mu)\alpha=(\lambda\mu)(x_1,x_2)=\left(\lambda\mu x_1,\lambda\mu x_2+\frac{\lambda\mu(\lambda\mu-1)}{2}x_1^2\right).$$

两者相等.

(M2)

$$1\cdot\alpha=1\cdot(x_1,x_2)=\left(1\cdot x_1,1\cdot x_2+\frac{1\times(1-1)}{2}x_1^2\right)=(x_1,x_2).$$

(D1) 乘法对向量加法的分配律.

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha+\beta)&=\lambda((x_1,x_2)+(y_1,y_2))=\lambda(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)\\&=\left(\lambda(x_1+y_1),\lambda(x_2+y_2+x_1y_1)+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}(x_1+y_1)^2\right)\\&=\left(\lambda x_1+\lambda y_1,\lambda x_2+\lambda y_2+\lambda x_1y_1+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}(x_1+y_1)^2\right)\\&=\left(\lambda x_1+\lambda y_1,\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}y_1^2+\lambda^2x_1y_1+\lambda x_2+\lambda y_2\right).\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\lambda\alpha+\lambda\beta&=\lambda(x_1,x_2)+\lambda(y_1,y_2)\\&=\left(\lambda x_1,\lambda x_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2\right)+\left(\lambda y_1,\lambda y_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}y_1^2\right)\\&=\left(\lambda x_1+\lambda y_1,\lambda x_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2+\lambda y_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}y_1^2+\lambda^2x_1y_1\right)\\&=\left(\lambda x_1+\lambda y_1,\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}y_1^2+\lambda^2x_1y_1+\lambda x_2+\lambda y_2\right).\end{aligned}$$

(D2) 乘法对纯量加法的分配律.

$$(\lambda+\mu)\alpha=(\lambda+\mu)(x_1,x_2)=\left((\lambda+\mu)x_1,(\lambda+\mu)x_2+\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)}{2}x_1^2\right).$$

而

$$\begin{aligned}&\lambda\alpha+\mu\alpha=\lambda(x_1,x_2)+\mu(x_1,x_2)\\=&\left(\lambda x_1,\lambda x_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2\right)+\left(\mu x_1,\mu x_2+\frac{\mu(\mu-1)}{2}x_1^2\right)\\=&\left(\lambda x_1+\mu x_1,\lambda x_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2+\mu x_2+\frac{\mu(\mu-1)}{2}x_1^2+\lambda\mu x_1^2\right)\\=&\left((\lambda+\mu)x_1,(\lambda+\mu)x_2+\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)}{2}x_1^2\right).\end{aligned}$$

两者相等.

所以此集合 V 关于所规定的运算能成为线性空间.

(2) 由于

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\alpha&=(\lambda+\mu)(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\\\lambda\alpha+\mu\alpha&=\lambda(x_1,x_2)+\mu(x_1,x_2)=(x_1,x_2)+(x_1,x_2)=(2x_1,2x_2).\end{aligned}$$

两者并不相等, 所以此集合 V 关于所规定的运算不能成为线性空间.

(3) 由习题 1.2.4 可知 V 中的多项式只能为 $0,1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots$. 取 $\alpha=1,\beta=x$, 则 $\alpha+\beta=1+x\notin V$, 故此集合 V 关于所规定的运算不能成为线性空间.

(4) 若 $f,g\in V$, 即 $f(-1)=g(-1)=0$, 则 $(f+g)(-1)=f(-1)+g(-1)=0,(\lambda f)(-1)=\lambda f(-1)=0$, 所以 $f+g,\lambda f\in V$. 易验证八条公理对此集合 V 成立, 所以此集合 V 关于所规定的运算能成为线性空间.

(5) 取 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V, \lambda = -1$ 且 $a_1 > 0$, 则 $\lambda\alpha = (-1)(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \alpha = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$, 而此时 $-a_1 < 0$, 故 $\lambda\alpha \notin V$, 所以此集合 V 关于所规定的运算不能成为线性空间.

(6) 由于零矩阵不可逆, 故此集合 V 不含零向量, 所以此集合 V 关于所规定的运算不能成为线性空间.

(7) 若 $A_0B_1 = B_1A_0, A_0B_2 = B_2A_0, \lambda \in \mathbb{F}$, 则 $A_0(B_1 + B_2) = (B_1 + B_2)A_0, A_0(\lambda B_1) = (\lambda B_1)A_0$, 故 $B_1 + B_2, \lambda B_1 \in V$. 又矩阵的加法以及纯量与矩阵的乘法满足八条公理, 所以此集合 V 关于所规定的运算能成为线性空间.

(8) 任取 $A \in V, A \neq 0$, 即 $A^2 = A$. 取 $\lambda \neq 0$ 或 1, 则有 $(\lambda A)^2 \neq \lambda A$, 否则 $A = 0$, 矛盾. 故此集合 V 关于所规定的运算不能成为线性空间.

(9) 设 $f \in V, f(x) = u(x) + v(x)\mathrm{i}$, 取 $g(x) = u_1(x) + v_1(x)\mathrm{i}, h(x) = u_2(x) + v_2(x)\mathrm{i}, \lambda = a + b\mathrm{i}$, 我们有

$$(g+h)(x) = g(x) + h(x) = (u_1(x) + u_2(x)) + (v_1(x) + v_2(x))\mathrm{i} \in V,$$
$$\lambda g(x) = (a + b\mathrm{i})(u_1(x) + v_1(x)\mathrm{i}) = (au_1(x) - bv_1(x)) + (bu_1(x) + av_1(x))\mathrm{i} \in V.$$

易验证此时八条公理成立, 所以此集合 V 关于所规定的运算能成为线性空间.

(10) 设 $f \in V, f(x) = u(x) + v(x)\mathrm{i}$, 由 $f(-x) = \overline{f(x)}$ 可知 $u(-x) + v(-x)\mathrm{i} = \overline{u(x) + v(x)\mathrm{i}} = u(x) - v(x)\mathrm{i}$, 即 $u(-x) = u(x), v(-x) = -v(x)$, 故 $u(x)$ 为偶函数, $v(x)$ 为奇函数.
取 $g(x) = u_1(x) + v_1(x)\mathrm{i}, h(x) = u_2(x) + v_2(x)\mathrm{i}, \lambda \in \mathbb{R}, u_1(x), u_2(x)$ 为偶函数, $v_1(x), v_2(x)$ 为奇函数. 由于 $u_1(x) + u_2(x), \lambda u_1(x)$ 仍为偶函数, $v_1(x) + v_2(x), \lambda v_1(x)$ 仍为奇函数, 我们知

$$(g+h)(x) = g(x) + h(x) = (u_1(x) + u_2(x)) + (v_1(x) + v_2(x))\mathrm{i},$$
$$\lambda g(x) = \lambda(u_1(x) + v_1(x)\mathrm{i}) = \lambda u_1(x) + \lambda v_1(x)\mathrm{i}.$$

易验证此时八条公理成立, 所以此集合 V 关于所规定的运算能成为线性空间.

□

4.2 线性相关

4.2.1 习　题

习题 4.2.1: 判断下列向量是否线性无关.

(1) $\alpha_1 = (2, -3, 1), \alpha_2 = (3, -1, 5), \alpha_3 = (1, -4, 3)$;
(2) $\alpha_1 = (4, -5, 2, 6), \alpha_2 = (2, -2, 1, 3), \alpha_3 = (6, -3, 3, 9), \alpha_4 = (4, -1, 5, 6)$;
(3) $\alpha_1 = (1, 0, 0, 2, 5), \alpha_2 = (0, 1, 0, 3, 4), \alpha_3 = (0, 0, 1, 4, 7), \alpha_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

✎ **解:**

(1) 设 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=0$, 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由系数矩阵可逆可知, 该线性方程组只有零解. 从而此组向量线性无关.

(2) 设 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4\alpha_4=0$, 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由系数矩阵不可逆可知, 该线性方程组有非零解

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

从而此组向量线性相关.

(3) 设 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4\alpha_4=0$, 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

对系数矩阵进行初等行变换如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}\xrightarrow[-5r_1+r_5]{-2r_1+r_4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow[-4r_2+r_5]{-3r_2+r_4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{14}r_5,r_4\leftrightarrow r_5]{-4r_4+r_3,-7r_3+r_5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[3r_4+r_2,-2r_4+r_1]{-4r_4+r_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此系数矩阵是列满秩的, 该线性方程组只有零解. 从而此组向量线性无关.

□

习题 4.2.2: 设向量 α,β,γ 线性无关. 向量 $\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$ 是否线性无关?

解: 设 $\lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2(\beta+\gamma)+\lambda_3(\gamma+\alpha)=0$, 即 $(\lambda_1+\lambda_3)\alpha+(\lambda_1+\lambda_2)\beta+(\lambda_2+\lambda_3)\gamma=0$. 由向量 α,β,γ 线性无关可知

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases},$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

由系数矩阵可逆可知, 该线性方程组只有零解. 从而此组向量线性无关. □

习题 4.2.3: 设纯量 λ 满足下列条件之一, 求 λ:

(1) 向量 $(1+\lambda,1-\lambda),(1-\lambda,1+\lambda)\in\mathbb{C}^2$ 线性相关;

(2) 向量 $(\lambda,1,0),(1,\lambda,1),(0,1,\lambda)\in\mathbb{R}^3$ 线性相关;

如果在 (1) 中将 $\mathbb{C}^2$ 换成 $\mathbb{Q}^2$. 在 (2) 中将 $\mathbb{R}^3$ 换为 $\mathbb{Q}^3$, 结论又怎样? 这里 $\mathbb{Q}^2$ 和 $\mathbb{Q}^3$ 分别是所有二元有理数组和三元有理数组的集合构成的有理数域上的线性空间.

证:

(1) 设 $x_1(1+\lambda,1-\lambda)+x_2(1-\lambda,1+\lambda)=0$, 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}1+\lambda&1-\lambda\\1-\lambda&1+\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

由题意可知, 系数矩阵不可逆, 即 $(1+\lambda)^2-(1-\lambda)^2=4\lambda=0$, 所以 $\lambda=0$.

(2) 设 $x_1(\lambda,1,0)+x_2(1,\lambda,1)+x_3(0,1,\lambda)=0$, 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\1&\lambda&1\\0&1&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

由题意可知, 系数矩阵不可逆, 即 $\lambda^3-2\lambda=0$, 所以 $\lambda=0,-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

如果在 (1) 中将 $\mathbb{C}^2$ 换成 $\mathbb{Q}^2$. 在 (2) 中将 $\mathbb{R}^3$ 换为 $\mathbb{Q}^3$, 则两小题中的 λ 都只能为 0. □

习题 4.2.4: 在什么条件下, 向量 $(1,a_1,a_1^2),(1,a_2,a_2^2),(1,a_3,a_3^2)\in\mathbb{C}^3$ 线性相关? 将结论推广到 $\mathbb{C}^n$.

证: 设 $\lambda_1(1,a_1,a_1^2)+\lambda_2(1,a_2,a_2^2)+\lambda_3(1,a_3,a_3^2)=0$, 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\a_1^2&a_2^2&a_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

由题意可知, 系数矩阵不可逆, 即 $\prod_{1\le i<j\le 3}(a_j-a_i)=0$, 只需存在 $1\le i<j\le 3$, 使得 $a_i=a_j$.

对于 $\mathbb{C}^n$, 我们有向量 $(1,a_1,a_1^2,\cdots,a_1^{n-1}),(1,a_2,a_2^2,\cdots,a_2^{n-1}),(1,a_n,a_n^2,\cdots,a_n^{n-1})\in\mathbb{C}^n$ 线性相关的充要条件是存在 $1\le i<j\le n$, 使得 $a_i=a_j$.

事实上, 我们写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

该系数矩阵为 n 阶 Vandermonde 矩阵, 其行列式值 $\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)=0$, 只需存在 $1\le i<j\le 3$, 使得 $a_i=a_j$. □

习题 4.2.5: 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{F}^n$ 线性相关, $k\ge 2$. 证明对任意 $\alpha_{k+1}\in\mathbb{F}^n$, 存在不全为零的纯量 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\in\mathbb{F}$, 使得向量 $\alpha_1+\lambda_1\alpha_{k+1},\alpha_2+\lambda_2\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_k+\lambda_k\alpha_{k+1}$ 线性相关.

证: 由题意, 设 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots,l_k\alpha_k=0$, 其中 $l_i,1\le i\le k$ 不全为零.

设 $x_1(\alpha_1+\lambda_1\alpha_{k+1})+x_2(\alpha_2+\lambda_2\alpha_{k+1})+\cdots+x_k(\alpha_k+\lambda_k\alpha_{k+1})=0$, 即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_k\alpha_k+(x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+\cdots+x_k\lambda_k)\,\alpha_{k+1}=0.$$

取

$$\begin{cases} x_1=l_1 \\ x_2=l_2 \\ \vdots \\ x_k=l_k \\ x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+\cdots+x_k\lambda_k=0 \end{cases}.$$

由此得出

$$\lambda_1l_1+\lambda_2l_2+\cdots+\lambda_kl_k=0.$$

设 l_i 中不为零的数依次为 $l_{i_1},l_{i_2},\cdots,l_{i_m},1\le m\le k$.

若 m 为偶数, 则取

$$\begin{cases} \lambda_{i_1}=\frac{1}{l_{i_1}},\lambda_{i_3}=\frac{1}{l_{i_3}},\cdots,\lambda_{i_{m-1}}=\frac{1}{l_{i_{m-1}}} \\ \lambda_{i_2}=-\frac{1}{l_{i_2}},\lambda_{i_4}=-\frac{1}{l_{i_4}},\cdots,\lambda_{i_m}=-\frac{1}{l_{i_m}} \\ \lambda_i=1,i\notin\{i_j\,|1\le j\le m\} \end{cases}.$$

若 m 为奇数, 则取

$$\begin{cases} \lambda_{i_1}=\frac{1}{l_{i_1}},\lambda_{i_3}=\frac{1}{l_{i_3}},\cdots,\lambda_{i_{m-2}}=\frac{1}{l_{i_{m-1}}} \\ \lambda_{i_2}=-\frac{1}{l_{i_2}},\lambda_{i_4}=-\frac{1}{l_{i_4}},\cdots,\lambda_{i_{m-1}}=-\frac{1}{l_{i_{m-1}}} \\ \lambda_{i_m}=0 \\ \lambda_i=1,i\notin\{i_j\,|1\le j\le m\} \end{cases}.$$

显然我们取得的纯量 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 不全为零, 并且 $x_i = l_i$ 亦不全为零, 即此时向量 $\alpha_1+\lambda_1\alpha_{k+1},\alpha_2+\lambda_2\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_k+\lambda_k\alpha_{k+1}$ 线性相关. □

习题 4.2.6: 取集合 V 为实数域 $\mathbb{R}$, 数域为有理数域 $\mathbb{Q}$. 集合 V 的向量加法规定为实数的加法, 纯量与向量的乘法规定为有理数与实数的乘法, 则 V 成为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间. 证明: 在线性空间 V 中, 实数 1 与 α 线性无关的充分必要条件是, α 为无理数.

证: 必要性. 若实数 1 与 α 线性无关, 采用反证法. 假设 α 是有理数, 即 $\alpha=\frac{p}{q}$, 其中 p,q 为有理数且 $q\neq 0$. 我们有 $-p+q\alpha=0$, 矛盾. 因此 α 为无理数.

充分性. 若 α 为无理数. 设 $\lambda_1+\lambda_2\alpha=0$, 则 λ_2 必为零. 否则 $\alpha=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 为有理数, 矛盾. 进而 $\lambda_1=0$, 故实数 1 与 α 线性无关. □

习题 4.2.7: 设 V 是所有实函数构成的实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 证明下列向量线性无关.

(i) x, x^4 ; (ii) xe^x, e^{2x} ;

(iii) $\sin x, \cos x$; (iv) $\sin x, e^x$.

证:

(i) 若 $\lambda_1 x+\lambda_2 x^4=0$, 设 $x\neq 0$. 假设 $\lambda_2\neq 0$, 则有 $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=x^3$, 等式左边是个常数, 右边是个变化的函数, 这是不可能的. 因此 $\lambda_2=0$, 从而 $\lambda_1=0$, 故此组向量线性无关.

或者由左端是零多项式得出 $\lambda_1=\lambda_2=0$.

(ii) 若 $\lambda_1 xe^x+\lambda_2 e^{2x}=0$, 设 $x\neq 0$. 假设 $\lambda_2\neq 0$, 则有 $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{e^x}{x}$, 等式左边是个常数, 右边是个变化的函数, 这是不可能的. 因此 $\lambda_2=0$, 从而 $\lambda_1=0$, 故此组向量线性无关.

或者取 $x=0$, 得 $\lambda_2=0$. 取 $x=1$, 得 $\lambda_1 e+\lambda_2=0$, 从而 $\lambda_1=\lambda_2=0$.

(iii) 若 $\lambda_1\sin x+\lambda_2\cos x=0$, 设 $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$. 假设 $\lambda_2\neq 0$, 则有 $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\cot x$, 等式左边是个常数, 右边是个变化的函数, 这是不可能的. 因此 $\lambda_2=0$, 从而 $\lambda_1=0$, 故此组向量线性无关.

或者取 $x=0$, 得 $\lambda_2=0$. 取 $x=\frac{\pi}{2}$, 得 $\lambda_1=0$, 从而 $\lambda_1=\lambda_2=0$.

(iv) 若 $\lambda_1\sin x+\lambda_2 e^x=0$, 设 $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$. 假设 $\lambda_2\neq 0$, 则有 $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{e^x}{\sin x}$, 等式左边是个常数, 右边是个变化的函数, 这是不可能的. 因此 $\lambda_2=0$, 从而 $\lambda_1=0$, 故此组向量线性无关.

或者取 $x=0$, 得 $\lambda_2=0$. 取 $x=\frac{\pi}{2}$, 得 $\lambda_1+\lambda_2 e^{\frac{\pi}{2}}=0$, 从而 $\lambda_1=\lambda_2=0$.

□

习题 4.2.8: 设 V 是所有连续实函数构成的实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 证明: 向量 $\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx,\cdots$ 线性无关.

证: 若它们线性相关, 则存在 $\sin k_1x,\sin k_2x,\cdots,\sin k_nx$ 及不全为 0 的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 使得 $\lambda_1\sin k_1x+\lambda_2\sin k_2x+\cdots+\lambda_n\sin k_nx=0$.

两边同乘以 $\cos k_ix$, 并在 $[-\pi,\pi]$ 上对 x 积分, 立得 $\lambda_i=0, i=1,2,\cdots,n$. 矛盾. □

习题 4.2.9: 设 t 个 n 维行向量 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}), i=1,2,\cdots,t\leq n$ 满足 $2|a_{ii}|>\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{ik}|, i=1,2,\cdots,t$. 证明: 向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性无关.

☞ **证:** 反证法. 将矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{pmatrix}$ 写成 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 的形式, 其中

$$\beta_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{ti} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

考察 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 中前 t 个向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$, 假设它们线性相关, 即存在 t 个不全为零的纯量 $i_1, i_2, \cdots, i_t$, 使得

$$i_1\beta_1 + i_2\beta_2 + \cdots + i_t\beta_t = 0.$$

记 $|i_m| = \max\left\{|i_j| : 1 \le j \le t\right\}$, 显然 $i_m \ne 0$. 考察各个向量中的第 m 个分量, 我们有

$$i_1\alpha_{m1} + i_2\alpha_{m2} + \cdots + i_{m-1}\alpha_{m,m-1} + i_m\alpha_{m,m} + i_{m+1}\alpha_{m,m+1} + \cdots + i_t\alpha_{m,t} = 0.$$

因此有

$$\begin{aligned} 2|\alpha_{mm}| &= \left|\alpha_{mm} - \sum_{k\ne m} \frac{i_k}{i_m}\alpha_{mk}\right| \le |\alpha_{mm}| + \sum_{k\ne m}\left|\frac{i_k}{i_m}\right||\alpha_{mk}| \\ &\le |\alpha_{mm}| + \sum_{k\ne m}|\alpha_{mk}| = \sum_{k=1}^{t}|\alpha_{mk}| \le \sum_{k=1}^{n}|\alpha_{mk}|. \end{aligned}$$

这与已知条件矛盾, 故向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关, 矩阵 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$ 的列秩小于 t, 其行秩亦小于 t, 故 $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1t}), (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2t}), \cdots, (a_{t1}, a_{t2}, \cdots, a_{tt})$ 线性无关, 进而知向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关. □

习题 4.2.10: 设数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 线性无关, 添加向量 $\beta \in V$ 到向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 中. 证明: 在向量 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 中, 能够由前面的向量线性表出的向量不多于 1 个.

☞ **证:** 反证法. 假设能够由前面的向量线性表出的向量多于 1 个, 任取其中两个 $\alpha_m, \alpha_n, 0 \le m < n \le k$. 规定 $\alpha_0 = \beta$. 它们可分别由 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ 以及 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性表示, 即分别存在 m 和 n 个不全为零的纯量 $i_0, i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}$ 和 $j_0, j_1, j_2, \cdots, j_{n-1}$, 使得

$$\begin{aligned} \alpha_m &= i_0\beta + i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2 + \cdots + i_{m-1}\alpha_{m-1}, \\ \alpha_n &= j_0\beta + j_1\alpha_1 + j_2\alpha_2 + \cdots + j_{n-1}\alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

显然 $i_0 \ne 0, j_0 \ne 0$. 否则 $i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2 + \cdots + i_{m-1}\alpha_{m-1} - \alpha_m = 0, j_1\alpha_1 + j_2\alpha_2 + \cdots + j_{n-1}\alpha_{n-1} - \alpha_n = 0$, 进而可知向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 线性相关, 矛盾.

因此有

$$\begin{aligned} \beta + \frac{i_1}{i_0}\alpha_1 + \frac{i_2}{i_0}\alpha_2 + \cdots + \frac{i_{m-1}}{i_0}\alpha_{m-1} - \frac{1}{i_0}\alpha_m = 0 \\ \beta + \frac{j_1}{j_0}\alpha_1 + \frac{j_2}{j_0}\alpha_2 + \cdots + \frac{j_{n-1}}{j_0}\alpha_{n-1} - \frac{1}{j_0}\alpha_n = 0. \end{aligned}$$

故

$$\left(\frac{i_1}{i_0}-\frac{j_1}{j_0}\right)\alpha_1+\left(\frac{i_2}{i_0}-\frac{j_2}{j_0}\right)\alpha_2+\cdots+\left(\frac{i_{m-1}}{i_0}-\frac{j_{m-1}}{j_0}\right)\alpha_{m-1}$$
$$+\left(-\frac{1}{i_0}-\frac{j_m}{j_0}\right)\alpha_m-\frac{j_{m+1}}{j_0}\alpha_{m+1}-\cdots-\frac{j_{n-1}}{j_0}\alpha_{n-1}+\frac{1}{j_0}\alpha_n=0.$$

注意到 $\frac{1}{j_0}\neq 0$, 我们知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关, 进而知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 亦线性相关. 故假设不成立, 在向量 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 中, 能够由前面的向量线性表出的向量应不多于 1 个. □

习题 4.2.11: 求向量 $\alpha_1=(4,-1,3,-2),\alpha_2=(8,-2,6,-4),\alpha_3=(3,-1,4,-2),\alpha_4=(6,-2,8,-4)$ 的所有极大线性无关向量组.

解: 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 写成矩阵形式, 并对其进行初等行变换如下:

$$\begin{pmatrix}4&-1&3&-2\\8&-2&6&-4\\3&-1&4&-2\\6&-2&8&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3,-6r_1+r_4]{-r_3+r_2,-8r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-2&14&-4\\0&-1&7&-2\\0&-2&14&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3,2r_2+r_4]{-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-7&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

从而可知矩阵的秩为 2, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩也应为 2. 只需取线性无关的两个向量即可, 有以下 4 组:

$$\alpha_1,\alpha_3;\alpha_1,\alpha_4;\alpha_2,\alpha_3;\alpha_2,\alpha_4.$$

□

习题 4.2.12: 设 A 是 n 阶方阵. 证明: $\mathrm{rank}A^n=\mathrm{rank}A^{n+1}=\mathrm{rank}A^{n+2}=\cdots$.

证: 由 $A^{k+1}=A^k\cdot A$ 可知 A^{k+1} 的列向量都是 A^k 的列向量的线性组合. 因此 A^{k+1} 的列向量可由 A^k 的列向量的极大线性无关组线性表出, 也即 A^{k+1} 的列向量的极大线性无关组可由 A^k 的列向量的极大线性无关组线性表出. 由 Steinitz 替换定理可知 $\mathrm{rank}A^{k+1}\leq\mathrm{rank}A^k$.

因此 $n\geq\mathrm{rank}A\geq\mathrm{rank}A^2\geq\cdots\geq 0$, 故存在 $m,1\leq m\leq n$, 使得 $\mathrm{rank}A^m=\mathrm{rank}A^{m+1}$. 由 Steinitz 替换定理, A^m 与 A^{m+1} 的列向量的极大线性无关组等价, 从而 A^m 的列向量可由 A^{m+1} 的列向量线性表出, 也即存在 n 阶方阵 P, 使得 $A^m=A^{m+1}P$, 所以 $A^{m+1}=A^{m+2}P$. 故 $\mathrm{rank}A^{m+1}\leq\mathrm{rank}A^{m+2}=\mathrm{rank}A^{m+1}A\leq\mathrm{rank}A^{m+1}$, 即 $\mathrm{rank}A^{m+1}=\mathrm{rank}A^{m+2}$. 同理可得 $\mathrm{rank}A^m=\mathrm{rank}A^{m+1}=\mathrm{rank}A^{m+2}=\cdots$, 由 $1\leq m\leq n$ 知命题成立. □

习题 4.2.13: 设 A 和 B 都是 $m\times n$ 矩阵. 证明: $\mathrm{rank}(A+B)\leq\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B$.

证: 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$. 设 $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\},\{\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_s}\}$ 分别为 A,B 列向量的极大无关组. 由 $A+B=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$ 得 $A+B$ 的列向量可由 A,B 的列向量线性表出, 也即可以由 $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_s}\}$ 线性表出.

故 $A+B$ 的列向量的极大线性无关组 $\{\gamma_{k_1},\gamma_{k_2},\cdots,\gamma_{k_t}\}$ 可由 $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_s}\}$ 线性表出. 由 Steinitz 替换定理可知 $t\leq r+s$, 即 $\mathrm{rank}(A+B)\leq\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B$. □

4.3 基与坐标

4.3.1 习　题

习题 4.3.1: 证明: 在四维实行向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 向量 $\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(0,0,1,1),\alpha_3=(1,0,0,4),\alpha_4=(0,0,0,2)$ 构成一组基. 并求标准基向量 $\varepsilon_i=\left(0,\cdots,0,\underset{\text{第}i\text{个}}{1},0,\cdots,0\right)$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 下的坐标, $i=1,2,3,4$.

解: 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\\a_4&b_4&c_4&d_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\\a_4&b_4&c_4&d_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&-1&0&0\\-2&2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

因此 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 下的坐标分别为 $(0,0,1,-2),(1,0,-1,2),\left(0,1,0,-\frac{1}{2}\right),\left(0,0,0,\frac{1}{2}\right)$.

□

习题 4.3.2: 证明: 在三维复向量空间 $\mathbb{C}^3$ 中, 向量 $\alpha_1=(2\mathrm{i},1,0),\alpha_2=(2,-1,1),\alpha_3=(0,1+\mathrm{i},1-\mathrm{i})$ 构成一组基. 并求标准基向量 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的坐标.

解: 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}2\mathrm{i}&2&0\\1&-1&1+\mathrm{i}\\0&1&1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-\mathrm{i}}{2}&-\mathrm{i}&-1\\-\frac{\mathrm{i}}{2}&-1&\mathrm{i}\\\frac{-1+\mathrm{i}}{4}&\frac{1+\mathrm{i}}{2}&1\end{pmatrix}.$$

因此标准基向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的坐标分别为 $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2},-\frac{\mathrm{i}}{2},\frac{-1+\mathrm{i}}{4}\right),\left(-\mathrm{i},-1,\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right),(-1,\mathrm{i},1)$.

□

习题 4.3.3: 在数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维向量空间 $\mathbb{F}^n$ 中, 求向量 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 下的坐标, 其中

$$\alpha_j=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{j\text{个}},0,0,\cdots,0,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

✎ **解:** 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ a_2 - a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} - a_n \\ a_n \end{pmatrix}.$$

于是, 所求坐标为 $(a_1 - a_2, a_2 - a_3, \cdots, a_{n-1} - a_n, a_n)$. □

习题 4.3.4: **在数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 2 阶方阵构成的线性空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 中, 求一组基 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, 使得对每个 j, $A_j^2 = A_j$.**

✎ **解:** 取

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即可. □

习题 4.3.5: **证明: 在所有次数 $\le n$ 的多项式构成的线性空间 $\mathbb{F}_n[x]$ 中, 向量 $1, x + a, (x+a)^2, \cdots, (x+a)^n$ 构成一组基, 其中 $a \in \mathbb{F}$, 并求向量 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 在这组基下的坐标.**

✎ **解:** 设 $\lambda_0 + \lambda_1(x+a) + \cdots + \lambda_n(x+a)^n = 0$, 令 $y = x + a$, 得 $\lambda_0 + \lambda_1 y + \cdots + \lambda_n y^n = 0$. 左边是关于 y 的零多项式, 故 $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, 从而 $1, x+a, (x+a)^2, \cdots, (x+a)^n$ 线性无关. 又因为 $\dim \mathbb{F}_n[x] = n+1$, 故 $1, x+a, (x+a)^2, \cdots, (x+a)^n$ 构成一组基.

设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1(x+a) + \cdots + b_n(x+a)^n$, 两边同时求 i 阶导数, 并令 $x = -a$ 得 $f^{(i)}(-a) = i! b_i$, 即

$$b_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(-a) = \sum_{k=0}^{n-i} \mathrm{C}_{i+k}^{i} (-a)^k a_{i+k}.$$

故所求坐标为

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (-a)^k a_k, \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{k+1}^{1} (-a)^k a_{k+1}, \cdots, \sum_{k=0}^{1} \mathrm{C}_{n-1+k}^{n-1} (-a)^k a_{n-1+k}, a_n \right).$$

□

习题 4.3.6: **证明: 所有实数的集合作为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间是无限维的; 所有复数的集合作为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间也是无限维的.**

☞ **证:** 反证法. 若 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = n$, 则 $\mathbb{R}$ 中任意 $n+1$ 个数线性相关.

对于 $\{\ln p_1, \ln p_2, \cdots, \ln p_{n+1}\}$, 使得

$$\lambda_1 \ln p_1 + \lambda_2 \ln p_2 + \cdots + \lambda_{n+1} \ln p_{n+1} = 0.$$

不妨设 λ_i 为整数, 否则两边同乘以 λ_i 分母的最小公倍数即可, 则有

$$p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdots p_{n+1}^{\lambda_{n+1}} = 1.$$

显然 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$, 矛盾.

因此 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$, 而 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cdot \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = 2 \cdot \infty = \infty$. □

4.4 基变换与坐标变换

4.4.1 习　　题

习题 4.4.1: 求四维实向量空间 $\mathbb{R}^4$ 中由基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 到基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 的过渡矩阵, 并求向量 $\alpha = 1, -1, 1, -1$ 在这两组基下的坐标:

$$(1)\ \begin{cases} \alpha_1 = (1,0,0,0)\,, & \beta_1 = (1,1,0,0) \\ \alpha_2 = (0,1,0,0)\,, & \beta_2 = (1,0,1,0) \\ \alpha_3 = (0,0,1,0)\,, & \beta_3 = (1,0,0,1) \\ \alpha_4 = (0,0,0,1)\,, & \beta_4 = (1,1,1,1) \end{cases};$$

$$(2)\ \begin{cases} \alpha_1 = (1,2,-1,0)\,, & \beta_1 = (2,1,0,1) \\ \alpha_2 = (1,-1,1,1)\,, & \beta_2 = (0,1,2,2) \\ \alpha_3 = (-1,2,1,1)\,, & \beta_3 = (-2,1,1,2) \\ \alpha_4 = (-1,-1,0,1)\,, & \beta_4 = (1,3,1,2) \end{cases}.$$

解:

(1) 由题意知

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故过渡矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由

$$(1, -1, 1, -1) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可知向量 $\alpha = 1, -1, 1, -1$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的坐标为

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 1, -1).$$

由

$$(1, -1, 1, -1) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可知向量 $\alpha = 1, -1, 1, -1$ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 下的坐标为

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 2, 0, -1).$$

(2) 由题意知

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故过渡矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由

$$(1, -1, 1, -1) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可知向量 $\alpha = 1, -1, 1, -1$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的坐标为

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{10}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{2}{13}, -\frac{16}{13}\right).$$

由

$$(1, -1, 1, -1) = (y_1, y_2, y_3, y_4)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

可知向量 $\alpha = 1, -1, 1, -1$ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 下的坐标为

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = \left(-\frac{9}{13}, \frac{15}{13}, -\frac{16}{13}, -\frac{1}{13}\right).$$

□

习题 4.4.2: 在数域 $\mathbb{F}$ 上的所有关于 $\cos x$ 的次数 $\leq n$ 的多项式构成的线性空间中, 试写出由基 $\{1, \cos x, \cdots, \cos nx\}$ 到基 $\{1, \cos x, \cdots, \cos^n x\}$ 的过渡矩阵.

解: 设

$$(1, \cos x, \cdots, \cos^n x) = (1, \cos x, \cdots, \cos nx)\, A,$$
$$(1, \cos x, \cdots, \cos nx) = (1, \cos x, \cdots, \cos^n x)\, B,$$

则 $B = A^{-1}$.

由 $\cos kx = 2\cos x \cos(k-1)x - \cos(k-2)x$ 可知 $\cos kx$ 是关于 $\cos x$ 的首项系数为 2^{k-1} 的 k 次多项式, 因此 B 是对角元为 $b_{ii} = 2^{i-1}$ 的上三角方阵, 从而 A 是对角元为 $a_{ii} = \frac{1}{2^{i-1}}$ 的上三角方阵.

由

$$\cos^j x = a_{1j} + a_{2j}\cos x + \cdots + a_{nj}\cos(n+1)x,$$

两边同乘以 $\cos ix$ 并在 $[-\pi, \pi]$ 上对 x 积分, 得 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^j x \cos ixdx = a_{ij}\pi$, 即

$$a_{ij} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^j x \cos ixdx.$$

由

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^j x \cos ixdx = \frac{1}{i}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^j xd\sin ix = \frac{j}{i}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{j-1} x \sin x \sin ixdx$$
$$= -\frac{j}{i^2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{j-1} x \sin xd\cos ix = \frac{j}{i^2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(j\cos^j x - (j-1)\cos^{j-2} x\right)\cos ixdx$$

得

$$\left(j^2 - i^2\right)\int_{-\pi}^{\pi} \cos^j x \cos ixdx = j(j-1)\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{j-2} x \cos ixdx,$$

从而 $\left(j^2 - i^2\right) a_{ij} = j(j-1)\, a_{i,j-2}$.

当 $i \neq j$ 时, $a_{ij} = \frac{j(j-1)}{j^2 - i^2} a_{i,j-2}$.

由 $A=(a_{ij})$ 为对角元是 $a_{ii}=\frac{1}{2^{i-1}}$ 的上三角方阵及上式可知: 当 $i.j$ 奇偶性不相同时, $a_{ij}=0$; 当 $i<j$ 且奇偶性相同时,

$$\begin{aligned}a_{ij}&=\frac{j(j-1)}{(j+i)(j-i)}\cdot\frac{(j-2)(j-3)}{(j-2+i)(j-2-i)}\cdots\frac{(i+2)(i+1)}{(i+2+i)(i+2-i)}a_{ii}\\&=\frac{j!/i!}{\frac{j+i}{2}\cdot\frac{j-i}{2}\cdot\frac{j-2+i}{2}\cdot\frac{j-2-i}{2}\cdots(i+1)\cdot 1}\cdot\frac{1}{2^{j-1}}\\&=\frac{j!}{\left(\frac{j+i}{2}\right)!\left(\frac{j-i}{2}\right)!}\cdot\frac{1}{2^{j-1}}=\frac{C_j^{\frac{j-i}{2}}}{2^{j-1}}.\end{aligned}$$

规定 $\frac{j-i}{2}\notin\mathbb{N}$ 时, $C_j^{\frac{j-i}{2}}=0$, 则可写为统一的形式

$$a_{ij}=\frac{C_j^{\frac{j-i}{2}}}{2^{j-1}}.$$

$\square$

习题 4.4.3: 设 V 是所有定义在当轴上由复值函数构成的复线性空间, 在 V 中取向量 $f_1(x)=1, f_2(x)=e^{\mathrm{i}x}, f_3(x)=e^{-\mathrm{i}x}, g_1(x)=1, g_2(x)=\cos x, g_3(x)=\sin x$, 其中 $^2=-1$. 证明: 向量 f_1,f_2,f_3 和 g_1,g_2,g_3 分别是线性无关的, 并求三阶可逆方阵 A, 使得

$$(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,f_3)A.$$

证: 设 $\lambda_1+\lambda_2 e^{\mathrm{i}x}+\lambda_3 e^{-\mathrm{i}x}=0, \mu_1+\mu_2\cos x+\mu_3\sin x=0$.

取 $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$, 得

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\\lambda_1+\mathrm{i}\lambda_2-\mathrm{i}\lambda_3=0\\\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases},\quad\begin{cases}\mu_1+\mu_2=0\\\mu_1+\mu_3=0\\\mu_1-\mu_2=0\end{cases}.$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0, \mu_1=\mu_2=\mu_3=0$. 故向量 f_1,f_2,f_3 和 g_1,g_2,g_3 均是线性无关的.

由 $e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x, e^{-\mathrm{i}x}=\cos x-\mathrm{i}\sin x$ 可知

$$\cos x=\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}x}+\frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}x}, \sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}e^{\mathrm{i}x}-\frac{1}{2\mathrm{i}}e^{-\mathrm{i}x},$$

从而得到

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\mathrm{i}}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{\mathrm{i}}{2}\end{pmatrix}.$$

$\square$

习题 4.4.4: 在四维实向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的标准基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 下, 超球面的方程为 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$. 设 $\alpha_1=(1,1,1,1), \alpha_2=(1,1,-1,-1), \alpha_3=(1,-1,1,-1), \alpha_4=(1,-1,-1,1)$. 试求该超球面在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 下的方程.

证: 记 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 到 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 的过渡矩阵为 A, 即

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A.$$

由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\,y=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\,Ay=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\,x$ 得 $x=Ay$. 由

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

得 $A^TA=4I_{(4)}$, 即 $x^Tx=1$ 化为 $y^TA^TAy=4y^Ty=1$, 方程化为

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=\frac{1}{4}.$$

□

习题 4.4.5: 在数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维行向量空间 $\mathbb{F}^n$ 中, 给定 n 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{F}^n$, 便可确定数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$, 反之亦然. 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基的充分必要条件为方阵 A 可逆.

证: $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基 $\Leftrightarrow\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 线性无关 $\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$ 的行秩为 n $\Leftrightarrow \mathrm{rank}A=n\Leftrightarrow A$ 可逆. □

4.5 同构

4.5.1 习　　题

习题 4.5.1: 证明: 所有实数的集合 $\mathbb{R}$ 作为实线性空间与本章 4.1 节例 2 中的实线性空间 $\mathbb{R}^+$ 同构.

证: 作映射 $\eta:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\eta(\alpha)=\ln\alpha$. 若 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+,\lambda\in\mathbb{R}$, 则

$$\eta\,(\alpha\oplus\beta)=\eta\,(\alpha\beta)=\ln\alpha\beta=\ln\alpha+\ln\beta=\eta\,(\alpha)+\eta\,(\beta)\,,$$
$$\eta\,(\lambda\circ\alpha)=\eta\left(\alpha^\lambda\right)=\ln\alpha^\lambda=\lambda\ln\alpha=\lambda\eta\,(\alpha)\,,$$

即 η 为同构映射. 因此结论成立. □

习题 4.5.2: 如果有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间 V_1 和 V_2 之间存在一一对应, 那么线性空间 V_1 和 V_2 一定同构吗?

证: 取 $V_1=\mathbb{Q},V_2=\mathbb{Q}^2$, 则 V_1,V_2 存在一一对应. 但 $\dim_{\mathbb{Q}}V_1=1\neq2=\dim_{\mathbb{Q}}V_2$, 因此 V_1,V_2 不同构. □

习题 4.5.3: 设 V 是 n 维复线性空间. 取集合 V, 数域 $\mathbb{F}$ 为实数域 $\mathbb{R}$. 定义 V 中向量的加法为复线性空间 V 的向量加法, 而纯量 λ 与向量的乘法定义为实数与 V 中的向量的乘法. 如此得到的实线性空间记为 V^-. 试确定 $\dim_{\mathbb{R}} V^-$.

证: 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 V 作为复线性空间的一组基. 容易验证 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \mathrm{i}\alpha_1, \mathrm{i}\alpha_2, \cdots, \mathrm{i}\alpha_n\}$ 是 V^- 作为实线性空间的一组基. □

习题 4.5.4: 设 V 是 n 维实线性空间. 如果保留 V 的向量加法, 但在纯量 λ 乘以向量时, 限定纯量 λ 只取有理数, 如此得到的有理域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间记为 $\widetilde{V}$. 线性空间 $\widetilde{V}$ 是否是有限维的?

证: 由习题 4.3.6 可知 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$, 故 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} \cdot \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = n \cdot \infty = \infty$. □

4.6 子空间

4.6.1 习　　题

习题 4.6.1: 在数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶方阵构成的线性空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中, 所有满足 $\mathrm{tr}A = 0$ 的方阵的集合记为 W. 证明: W 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间, 并求 $\dim W$.

证: 显然零矩阵 $0 \in W$, 所以 $W \neq \varnothing$.

若 $\alpha, \beta \in W, \lambda \in \mathbb{F}$, 则 $\mathrm{tr}\,(\alpha+\beta) = \mathrm{tr}\alpha + \mathrm{tr}\beta = 0, \mathrm{tr}\,(\lambda\alpha) = \lambda\mathrm{tr}\alpha = 0$, 即 $\alpha+\beta, \lambda\alpha \in W$, 因此 W 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

当 $i \neq j$ 时, 取 $\alpha_{ij} = E_{ij}$; 当 $i = j \leq n-1$ 时, 取 $\alpha_{ii} = E_{ii} - E_{nn}$. 易知其为 W 的一组基, 故 $\dim W = n^2 - 1$. □

习题 4.6.2: 在数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶方阵构成的线性空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中, 所有对称方阵的集合记为 S, 所有斜对称方阵的集合记为 K. 证明: S 和 K 都是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间; $S + K = \mathbb{F}^{n\times n}, S \cap K = \{0\}$; 并求 $\dim S, \dim K$.

证: 显然零矩阵 $0 \in S, K$, 故 $S, K \neq \varnothing$.

若 $\alpha, \beta \in S, \lambda \in \mathbb{F}$, 则 $(\alpha+\beta)^T = \alpha^T + \beta^T = \alpha + \beta, (\lambda\alpha)^T = \lambda\alpha^T = \lambda\alpha$, 即 $\alpha+\beta, \lambda\alpha \in S$, 因此 S 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

若 $\alpha, \beta \in K, \lambda \in \mathbb{F}$, 则 $(\alpha+\beta)^T = \alpha^T + \beta^T = -\alpha - \beta = -(\alpha+\beta), (\lambda\alpha)^T = \lambda\alpha^T = -\lambda\alpha$, 即 $\alpha+\beta, \lambda\alpha \in K$, 因此 K 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则 $A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) \in S + K$, 即 $\mathbb{F}^{n\times n} \subset S + K$, 显然 $S + K \subset \mathbb{F}^{n\times n}$, 因此 $S + K = \mathbb{F}^{n\times n}$.

设 $A \in S \cap K$, 则由 $A \in S$ 得 $A^T = A$; 由 $A \in K$ 得 $A^T = -A$, 从而 $A = 0$, 即 $S \cap K = \{0\}$.

取 $\alpha_{ii} = E_{ii}, \alpha_{ij} = E_{ij} + E_{ji} (j > i)$. 易知其为 S 的一组基, 故 $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$.

由维数定理可知 $\dim S + \dim K = \dim\,(S \cap K) + \dim\,(S + K)$, 从而得到 $\dim K = \frac{n(n-1)}{2}$.

□

习题 4.6.3: 在 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 中, 所有形如 $\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$ 的矩阵集合记为 V_1, 所有形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$ 的矩阵集合记为 V_2. 证明: V_1 和 V_2 都是 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的子空间, 并求 $\dim V_1, \dim V_2, \dim(V_1 + V_2), \dim(V_1 \cap V_2)$.

☞ 证: 显然 V_1, V_2 是 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的子空间, 且 $\dim V_1 = \dim V_2 = 3, \dim(V_1+V_2) = 4, \dim(V_1\cap V_2) = 2$. □

习题 4.6.4: 在数域 $\mathbb{F}$ 上的所有关于 x 的多项式构成的线性空间 $\mathbb{F}[x]$ 中, 所有满足 $f(-x) = f(x)$ 的多项式 $f(x)$ 的集合记为 W. 所有满足 $f(-x) = -f(x)$ 的多项式 $f(x)$ 的集合记为 U. 证明. W 与 U 都是 $\mathbb{F}[x]$ 的子空间, 并且 $W\cap U = \{0\}, W+U = \mathbb{F}[x]$.

☞ 证: 由 $0 \in W, U$ 可知 $W, U \neq \emptyset$.

若 $f(x), g(x) \in W, \lambda \in \mathbb{F}$, 则

$$
\begin{aligned}
(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),\\
(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x),
\end{aligned}
$$

即 $(f+g)(x), (\lambda f)(x) \in W$, 因此 W 是子空间.

若 $f(x), g(x) \in U, \lambda \in \mathbb{F}$, 则

$$
\begin{aligned}
(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x),\\
(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = -\lambda f(x) = -(\lambda f)(x),
\end{aligned}
$$

即 $(f+g)(x), (\lambda f)(x) \in U$, 因此 U 是子空间.

若 $f(x) \in W\cap U$, 则由 $f(x) \in W$ 得 $f(-x) = -f(x)$; 由 $f(x) \in U$ 得 $f(-x) = -f(x)$, 从而 $f(x) = 0$, 即 $W\cap U = \{0\}$.

若 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 则 $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \in W+U$, 即 $\mathbb{F}[x] \subset W+U$, 又 $W+U \subset \mathbb{F}[x]$, 因此 $W+U = \mathbb{F}[x]$. □

习题 4.6.5: $\mathbb{F}^n$ 中下列子集合是否是子空间? 如果是子空间, 则确定它的维数, 并给出一组基; 如果不是子空间, 则写出它所生成的子空间, 并给出一组基.

(1) $W = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n : a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0\}$;
(2) $U = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n : a_1, a_2, \cdots, a_n$不同时大于零, 或不同时小于零$\}$;
(3) $V = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n :$ 有某个i, 使$a_i > 0, 1 \le i \le n\}$.

✎ 解:

(1) 是. $\dim V = n-1$. $\{\varepsilon_i - \varepsilon_n \,|1 \le i \le n-1\}$ 为一组基;
(2) 不是. 由 $\varepsilon_i \in U$ 得 $\mathbb{F}^n(U) = \mathbb{F}^n$ 且 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 为一组基.
(3) 同 (2).

□

习题 4.6.6: 设 U, V 和 W 是线性空间 L 的子空间. 证明:

(1) 等式 $U\cap(V+W) = (U\cap V) + (U\cap W)$ 不一定成立.
(2) 等式 $U\cap(V+(U\cap W)) = (U\cap V) + (U\cap W)$ 恒成立

☞ 证:

(1) 取 $L = \mathbb{R}^2, \mathbb{F} = \mathbb{R}, \alpha = (1,1), \beta = (0,1), \gamma = (1,0)$. 当 $U = L(\alpha), V = L(\beta), W = L(\gamma)$ 时 $U\cap(V+W) = U, (U\cap V) + (U\cap W) = \{0\}$.

(2) 若 $\alpha \in U\cap(V+(U\cap W))$, 则 $\alpha \in U$ 且 $\alpha \in (V+(U\cap W))$, 故 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in V, \alpha_2 \in U\cap W$. 由 $\alpha_2 \in U\cap W$ 得 $\alpha_2 \in U$, 从而 $\alpha_1 = \alpha-\alpha_2 \in U$, 即 $\alpha_1 \in U\cap V$, 因此 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2 \in (U\cap V)+(U\cap W)$.

反之, 若 $\alpha \in (U\cap V)+(U\cap W)$, 则 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in U\cap V, \alpha_2 \in U\cap W$. 显然有 $\alpha_1 \in V$, 故 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2 \in V+(U\cap W)$. 又 $\alpha_1, \alpha_2 \in U$, 故 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2 \in U$, 因此 $\alpha \in U\cap(V+(U\cap W))$, 故等式 $U\cap(V+(U\cap W)) = (U\cap V)+(U\cap W)$ 恒成立.

□

习题 4.6.7: 设 U 和 W 是线性空间 V 的子空间. 证明: 等式 $U\cup W = U+W$ 成立的充分必要条件是 $U\subset W$, 或者 $W\subset U$.

证: 充分性. 不妨设 $U\subset W$, 则 $U\cup W = W, U+W = W$, 于是等式 $U\cup W = U+W$ 成立.

必要性. 若 $U \not\subseteq W$ 且 $W \not\subseteq U$, 则存在 α_1, α_2, 使得 $\alpha_1 \in U, \alpha_1 \notin W, \alpha_2 \in W, \alpha_2 \notin U$, 从而 $\alpha_1+\alpha_2 \notin U$ 且 $\alpha_1+\alpha_2 \notin W$. 于是 $\alpha_1+\alpha_2 \notin U\cup W$. 但 $\alpha_1+\alpha_2 \in U+W$, 这与 $U\cup W = U+W$ 矛盾. □

习题 4.6.8: 设 U, V 和 W 是线性空间 L 的子空间. 证明:

$$(U+V)\cap(U+W) = U+(U+V)\cap W.$$

证: 由 $U\subset U+V, U\subset U+W$ 得 $U\subset(U+V)\cap(U+W)$. 显然 $(U+V)\cap W\subset(U+V)\cap(U+W)$, 故 $U+(U+V)\cap W\subset(U+V)\cap(U+W)$.

反之, 若 $\alpha \in (U+V)\cap(U+W)$, 则 $\alpha = \beta_1+\beta_2 \in U+V, \alpha = \gamma_1+\gamma_2 \in U+W$, 其中 $\beta_1, \gamma_1 \in U, \beta_2 \in V, \gamma_2 \in W$. 于是 $\gamma_2 = \beta_1+\beta_2-\gamma_1 = (\beta_1-\gamma_1)+\beta_2 \in U+V$, 故 $\gamma_2 \in (U+V)\cap W$, 从而 $\alpha = \gamma_1+\gamma_2 \in U+(U+V)\cap W$, 所以有 $(U+V)\cap(U+W)\subset U+(U+V)\cap W$, 因此 $(U+V)\cap(U+W) = U+(U+V)\cap W$. □

习题 4.6.9: 证明: 数域 $\mathbb{F}$ 上的无限维线性空间 V 一定含有无限维真子空间.

证: 任取非零 $\alpha_1 \in V$, 由 V 是无限维可知 $V-V(\alpha_1)$ 非空. 再任取非空 $\alpha_2 \in V-V(\alpha_1)$, 同理可知 $V-V(\alpha_1,\alpha_2)$ 非空. 继续上述操作, 可得一组向量 $s = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\}$. 由 α_i 的取法易得 s 线性无关. 记 $s_0 = \{\alpha_2, \alpha_3, \cdots\}$, 则 $V(s_0)$ 是 V 的无限维子空间. 由 $\alpha_1 \notin V(s_0)$ 可知 $V(s_0)$ 是 V 的真子空间. □

习题 4.6.10: 分别求下列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 生成的子空间 W_1 与 W_2 的维数, 并给出子空间 $W_1\cap W_2$ 与 W_1+W_2 的一组基:

(1) $\alpha_1 = (1,2,1,-2), \alpha_2 = (2,3,1,0), \alpha_3 = (1,2,2,-3)$,
$\beta_1 = (1,1,1,1), \beta_2 = (1,0,1,-1), \beta_3 = (1,3,0,-4)$;

(2) $\alpha_1 = (1,1,0,0), \alpha_2 = (0,1,1,0), \alpha_3 = (0,0,1,1)$,
$\beta_1 = (1,0,1,0), \beta_2 = (0,2,1,1), \beta_3 = (1,2,1,2)$.

证:

(1) $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$.

设 $\alpha = x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3 = y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3 \in W_1\cap W_2$. 由 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3-y_1\beta_1-y_2\beta_2-y_3\beta_3 = 0$ 得 $(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) = t_1(5,-1,-2,0,0,1)+t_2(-2,1,1,1,0,0)$, 从而 $\alpha = -t_1\beta_3-t_2\beta_1$, 即 $\{\beta_1, \beta_3\}$ 为 $W_1\cap W_2$ 的一组基.

由 $\dim(W_1+W_2)=4$ 可知 $W_1+W_2=\mathbb{F}^4$, 可取 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 作为一组基.

(2) $\dim W_1=\dim W_2=3$.

设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3\in W_1\cap W_2$. 由 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3-y_1\beta_1-y_2\beta_2-y_3\beta_3=0$ 得 $(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)=t_1(2,0,2,1,0,1)+t_2(1,1,1,1,1,0)$, 从而 $\alpha=t_1(\beta_1+\beta_3)+t_2(\beta_1+\beta_2)$, 即 $\{\beta_1+\beta_2,\beta_1+\beta_3\}$ 为 $W_1\cap W_2$ 的一组基.

由 $\dim(W_1+W_2)=4$ 可知 $W_1+W_2=\mathbb{F}^4$, 可取 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 作为一组基.

□

习题 4.6.11: 设线性空间 V 中的向量 α,β 和 γ 满足 $\alpha+\beta+\gamma=0$. 证明: $V(\alpha,\beta)=V(\beta,\gamma)$.

证: 由 $\alpha+\beta+\gamma=0$ 可知 $\alpha=-\beta-\gamma\in V(\beta,\gamma)$. 又 $\beta\in V(\beta,\gamma)$, 于是 $V(\alpha,\beta)\subset V(\beta,\gamma)$. 同理有 $V(\beta,\gamma)\subset V(\alpha,\beta)$. 因此 $V(\alpha,\beta)=V(\beta,\gamma)$. □

习题 4.6.12: 设 α,β 是线性空间 V 中的向量, W 是 V 的子空间. 向量 α 与子空间 W 生成的子空间记为 U, 向量 β 与子空间 W 生成的子空间记为 K. 证明: 如果 $\beta\in U$, 但 $\beta\notin W$, 则 $\alpha\in K$.

证: 由题意可知 $U=V(\alpha)+W, K=V(\beta)+W$. 由 $\beta\in U=V(\alpha)+W$ 可知 $\beta=\lambda\alpha+\gamma$, 其中 $\gamma\in W$. 因为 $\beta\notin W$, 所以 $\lambda\neq 0$, 故 $\alpha=\frac{1}{\alpha}(\beta-\gamma)\in V(\beta)+W=K$. □

习题 4.6.13: 设 A 和 B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵. 证明: 等式 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}AB$ 的充分必要条件是, 方程组 $ABx=0$ 的解一定是方程组 $Bx=0$ 的解.

证: 记解空间 $V_B=\{x\in\mathbb{F}^p: Bx=0\}, V_{AB}=\{x\in\mathbb{F}^p: ABx=0\}$.

显然 $V_B\subset V_{AB}$. 因此 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}AB\Leftrightarrow\dim V_B=\dim V_{AB}\Leftrightarrow V_B=V_{AB}$, 即方程组 $ABx=0$ 的解一定是方程组 $Bx=0$ 的解. □

习题 4.6.14: 设 A,B 和 C 分别是 $m\times n, n\times p$ 和 $p\times q$ 矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}AB+\operatorname{rank}BC\leq\operatorname{rank}ABC+\operatorname{rank}B.$$

证: 记解空间 $V_B=\{x\in\mathbb{F}^p: Bx=0\}, V_{AB}=\{x\in\mathbb{F}^p: ABx=0\}, V_{BC}=\{x\in\mathbb{F}^q: BCx=0\}, V_{ABC}=\{x\in\mathbb{F}^q: ABCx=0\}$. 记 $V_1=\{x\,|\,x=By, y\in V_{AB}\}, V_2=\{x\,|\,x=BCy, y\in V_{ABC}\}$.

若 $x\in V_2$, 则 $x=BCy=B\cdot(Cy)$, 其中 $y\in V_{ABC}$. 于是 $Cy\in V_{AB}$, 故 $x\in V_1$, 即 $V_2\subset V_1$.

因此 $\dim V_2\leq\dim V_1\Leftrightarrow\dim V_{ABC}-\dim V_{BC}\leq\dim V_{AB}-\dim V_B\Leftrightarrow\dim V_{ABC}+\dim V_B\leq\dim V_{AB}+\dim V_{BC}\Leftrightarrow\operatorname{rank}AB+\operatorname{rank}BC\leq\operatorname{rank}ABC+\operatorname{rank}B$. □

习题 4.6.15: A,B,C 的意义同上题. 证明: 如果 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}AB$, 则 $\operatorname{rank}BC=\operatorname{rank}ABC$.

证: 由 $V_B\subset V_{AB}$ 及 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}AB$ 得 $V_B=V_{AB}$. 若 $x\in V_{ABC}$, 则 $Cx\in V_{AB}$, 即 $Cx\in V_B$, 从而 $x\in V_{BC}$, 于是 $V_{ABC}\subset V_{BC}$. 又 $V_{BC}\subset V_{ABC}$, 故 $V_{BC}=V_{ABC}$. 因此 $\operatorname{rank}BC=\operatorname{rank}ABC$. □

习题 4.6.16: 设 A 是 n 阶方阵,k 是正整数, 并且 $\operatorname{rank}A^k=\operatorname{rank}A^{k+1}$. 证明:

$$\operatorname{rank}A^k=\operatorname{rank}A^{k+1}=\operatorname{rank}A^{k+2}=\cdots.$$

证: 在上题习题 4.6.15 中将 A,B,C 分别取为 A,A^k,A, 我们得到 $\operatorname{rank}A^{k+1}=\operatorname{rank}A^{k+2}$, 即 $\operatorname{rank}A^k=\operatorname{rank}A^{k+1}=\operatorname{rank}A^{k+2}$. 同理可得 $\operatorname{rank}A^k=\operatorname{rank}A^{k+1}=\operatorname{rank}A^{k+2}=\cdots$. □

习题 4.6.17: 设 $P_1, P_2, \cdots, P_k, Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ 都是 n 阶方阵, 并且 $P_iQ_j = Q_jP_i, \text{rank}P_i = \text{rank}P_iQ_i, 1 \le i, j \le k$. 证明:

$$\text{rank}P_1P_2\cdots P_k = \text{rank}P_1\cdots P_kQ_1\cdots Q_k.$$

证: $k = 1$ 时结论成立.

假设 $k-1$ 时结论成立, 即 $\text{rank}P_1P_2\cdots P_{k-1} = \text{rank}P_1\cdots P_kQ_1\cdots Q_{k-1}$. 由 $V_{P_1\cdots P_{k-1}} \subset V_{P_1\cdots P_{k-1}Q_1\cdots Q_{k-1}}$ 可知 $V_{P_1\cdots P_{k-1}} = V_{P_1\cdots P_{k-1}Q_1\cdots Q_{k-1}}$. 对 k 时的情况, 若 $x \in V_{P_1\cdots P_kQ_1\cdots Q_k} = V_{P_1\cdots P_{k-1}Q_1\cdots Q_{k-1}P_kQ_k}$, 则 $P_kQ_kx \in V_{P_1\cdots P_{k-1}Q_1\cdots Q_{k-1}} = V_{P_1\cdots P_{k-1}}$, 于是 $x \in V_{P_1\cdots P_{k-1}P_kQ_k}$.

又 $V_{P_1\cdots P_kQ_k} \subset V_{Q_1\cdots Q_{k-1}P_1\cdots P_kQ_k} = V_{P_1\cdots P_kQ_1\cdots Q_k}$, 故 $V_{P_1\cdots P_kQ_1\cdots Q_k} = V_{P_1\cdots P_kQ_k}$, 即 $\text{rank}P_1\cdots P_kQ_1\cdots Q_k = \text{rank}P_1\cdots P_kQ_k$. 由 $\text{rank}P_kQ_k = \text{rank}P_k$, 即 $\text{rank}Q_k^TP_k^T = \text{rank}P_k^T$. 在习题 4.6.15 中将 A, B, C 分别取为 $Q_k^T, P_k^T, P_{k-1}^T\cdots P_1^T$, 则有 $\text{rank}P_k^T\cdots P_1^T = \text{rank}Q_k^TP_k^T\cdots P_1^T$, 也即 $\text{rank}P_1\cdots P_k = \text{rank}P_1\cdots P_kQ_k$, 因此 $\text{rank}P_1P_2\cdots P_k = \text{rank}P_1\cdots P_kQ_1\cdots Q_k$. □

习题 4.6.18: 设 A 是 n 阶复方阵, 则方阵 $G = \overline{A}^TA$ 称为方阵 A 的 *Gram* 方阵. 证明: $\text{rank}G = \text{rank}A$.

证: 若 $x \in V_G$, 则 $Gx = A^HAx = 0$, 从而 $x^HA^HAx = (Ax)^HAx = 0$, 故 $Ax = 0$, 所以有 $x \in V_A$, 即 $V_G \subset V_A$. 显然 $V_A \subset V_G$. 因此 $V_A = V_G$, 也即 $\text{rank}G = \text{rank}A$. □

4.7 直和

4.7.1 习　　题

习题 4.7.1: 在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 记

$$V = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0\},$$
$$W = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 = a_2 = \cdots = a_n\}.$$

V 和 W 显然是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明: $\mathbb{R}^n = V \oplus W$.

证:

□

习题 4.7.2: 在数域 $\mathbb{F}$ 上的 $2n$ 维向量空间 $\mathbb{F}^{2n}$ 中, 记

$$V = \left\{(a_1, a_2, \cdots, a_{2n}) \in \mathbb{F}^{2n} : a_i = a_{n+i}, 1 \le i \le n\right\},$$
$$W = \left\{(a_1, a_2, \cdots, a_{2n}) \in \mathbb{F}^{2n} : a_i = -a_{n+i}, 1 \le i \le n\right\}.$$

V 和 W 显然是 $\mathbb{F}^{2n}$ 的子空间. 证明: $\mathbb{F}^{2n} = V \oplus W$.

证:

□

习题 4.7.3: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是四维复向量空间 $\mathbb{C}^4$ 中的向量, $\mathbb{C}^4$ 中分别由向量集合 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 和 $\{\alpha_3, \alpha_4\}$ 生成的子空间记为 V 和 W. 试判断 $\mathbb{C}^4 = V \oplus W$ 是否成立?

(1) $\alpha_1=(0,1,0,1),\alpha_2=(0,0,1,0),\alpha_3=(1,0,1,0),\alpha_4=(1,1,0,0)$;
(2) $\alpha_1=(-1,1,1,0),\alpha_2=(0,1,-1,1),\alpha_3=(1,0,0,0),\alpha_4=(0,0,0,1)$;
(3) $\alpha_1=(1,0,0,1),\alpha_2=(0,1,1,0),\alpha_3=(1,0,1,0),\alpha_4=(0,1,0,1)$.

☞ 证:

□

习题 4.7.4: 设 U,V 和 W 是线性空间 L 的子空间. 如果其中每一个都与另外两个之和的交是零子空间, 则这三个子空间称为无关的. 证明: $L=U\oplus(V\oplus W)$ 的充分必要条件是, U,V,W 是无关的, 并且 $L=U+V+W$.

☞ 证:

□

习题 4.7.5: 举例说明, 线性空间 L 的子空间 U,V,W 两两之交为零子空间, 但子空间 U,V,W 并不一定无关.

☞ 证:

□

习题 4.7.6: 证明: 三个子空间无关的充分必要条件是它们的和的维数等于它们的维数的和.

☞ 证:

□

习题 4.7.7: 设 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 是线性空间 V 的子空间. 证明下列命题等价:

(1) 和 $V_1+V_2+\cdots+V_k$ 是直和;
(2) $V_j\cap\left(V_1+V_2+\cdots+V_{j-1}+V_{j+1}+\cdots+V_k\right)=\{0\},j=1,2,\cdots,k$;
(3) $V_1\cap V_2=\{0\},(V_1+V_2)\cap V_3=\{0\},\cdots,(V_1+V_2+\cdots+V_{k-1})\cap V_k=\{0\}$.

☞ 证:

□

4.8 商空间

4.8.1 习　　题

习题 4.8.1: 在数域 $\mathbb{F}$ 上的所有关于未定元 x 的多项式构成的线性空间 $\mathbb{F}[x]$ 中, 记

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_n[x]&=\{f(x)\in\mathbb{F}[x]:\deg f(x)<n\},\\ W&=\{f(x)\in\mathbb{F}[x]:f(-x)=f(x)\}.\end{aligned}$$

$\mathbb{F}[x]$ 和 W 都是 $\mathbb{F}[x]$ 的子空间. 商空间 $\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}_n[x]$ 和 $\mathbb{F}[x]/W$ 是否是有限维的?

☞ 证:

□

习题 4.8.2: 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵, β 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 中的向量, 并且 $\operatorname{rank}(A,B)=\operatorname{rank}A$. 记方程组 $Ax=0$ 的解空间为 V_A. 设向量 α 是方程组 $Ax=\beta$ 的一个特解. 证明: 方程组 $Ax=\beta$ 的所有解构成 $\mathbb{F}^n$ 中向量 α 所在的模 V_A 同余类.

证:

□

习题 4.8.3: 设 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 的子空间. 证明: 存在数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵 A, 使得齐次方程组 $AX=0$ 的解空间 V_A 为 W.

证:

□

习题 4.8.4: 设 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 中的子空间. 证明: 对于 $\mathbb{F}^n$ 中每个向量 α, 总存在数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵 A 和向量 $\beta\in\mathbb{F}^m$, 使得线性方程组 $Ax=\beta$ 的所有解的集合就是向量 α 所在的模 W 同余类.

证:

□

习题 4.8.5:

证:

□

第 5 章 线性变换

5.1 映射

5.2 线性映射

5.2.1 习　　题

习题 5.2.1: 设 $\mathbb{F}[x]$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上所有一元多项式 $f(x)$ 的集合. 定义映射 $\mathscr{A}:\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}[x]$ 如下: 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, 则令 $\mathscr{A}(f(x))=f(x+1)-f(x)$. 证明 $\mathscr{A}$ 是线性映射.

证:

$\square$

习题 5.2.2: 数域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶方阵构成的线性空间记为 $\mathbb{F}^{n\times n}$. 定义映射 $\mathscr{A}:F^{n\times n}\to F^{n\times n}$ 如下: 设 $X\in F^{n\times n}$, 则令 $\mathscr{A}(X)=AX-XA$, 其中 A 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中给定的方阵. 证明 $\mathscr{A}$ 是线性映射.

证:

$\square$

习题 5.2.3: 数域 $\mathbb{F}$ 上 k 维列向量空间记为 $\mathbb{F}^k$. 定义映射 $\mathscr{A}:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 如下: 设 $\alpha\in\mathbb{F}^n$, 则令 $\mathscr{A}(\alpha)=A\alpha$, 其中 A 是 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 中固定的矩阵. 证明 $\mathscr{A}$ 是线性映射, 并且 $\mathscr{A}$ 为零映射的充分必要条件是 A 为零矩阵.

证:

$\square$

习题 5.2.4: 设 $\mathbb{C}$ 是复数域. 求映射 $\mathscr{A}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, 使得当 $\mathbb{C}$ 视为实数域上线性空间时 $\mathscr{A}$ 是线性的, 而当 $\mathbb{C}$ 视为复数域上线性空间时 $\mathscr{A}$ 不是线性的.

证:

$\square$

习题 5.2.5: 设 $\mathbb{F}^n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维行向量空间, π 是自然数集合 $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots,n\}$ 到自身上的映射. 定义映射 $\mathscr{A}_\pi:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ 如下: 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{F}^n$, 则令 $\mathscr{A}_\pi(\boldsymbol{x})=(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\cdots,x_{\pi(n)})$. 证明 $\mathscr{A}_\pi$ 是线性映射, 并求 $\mathscr{A}_\pi$ 在基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$ 下的方阵, 其中 $\varepsilon_j=(0,\cdots,0,\underset{j}{1},0,\cdots,0)$, 记 $\mathbb{N}$ 到自身上所有双射的集合为 S_n. 设 $\pi\in S_n$, 则 $\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 排列 $\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)$ 的奇偶性符号记为 $\mathrm{sgn}(\pi)$. 证明

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{x})=\sum_{\pi\in S_n} mathrmsgn(\pi)\mathscr{A}_\pi(\boldsymbol{x})$$

是 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^n$ 的线性映射, 并求出 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$ 下的方阵.

☞ 证:

□

➾ **习题 5.2.6:** 是否存在线性映射 $\mathscr{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 使得 $\mathscr{A}(1,-1,1)=(1,0)$, $\mathscr{A}(1,1,1)=(0,1)$?

☞ 证:

□

➾ **习题 5.2.7:** 在实数域 $\mathbb{R}$ 上 2 维行向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中, 记

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-3,1);\\&\boldsymbol{\beta}_1=(1,0),\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,1),\ \boldsymbol{\beta}_3=(1,1).\end{aligned}$$

是否存在线性映射 $\mathscr{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, 使得 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\beta}_j$, $j=1,2,3$?

☞ 证:

□

➾ **习题 5.2.8:** 证明: 映射 $\mathscr{A}:U\to V$ 为线性映射的充分必要条件是, 对任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in U$, 均有 $\mathscr{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mu\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$.

☞ 证:

□

➾ **习题 5.2.9:** 在所有 2 阶实方阵构成的线性空间 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 中, 取 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. 定义映射 $\mathscr{A}:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ 与 $\mathscr{B}:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ 如下: 设 $X\in\mathbb{R}^{2\times2}$, 则令 $\mathscr{A}(X)=AX$, $\mathscr{B}(X)=XA$. 证明: 映射 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 都是线性的, 并求出它们在基 $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right.$ 下的方阵.

☞ 证:

□

➾ **习题 5.2.10:** $\mathbb{R}^{2\times2}$ 中所有形如 $\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$ 的方阵集合记为 V, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$. 显然 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上线性空间. 视复数域 $\mathbb{C}$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上线性空间. 定义映射 $\mathscr{A}:\mathbb{C}\to V$ 如下: 设 $\boldsymbol{\alpha}=a+ib\in\mathbb{C}$, $a,b\in\mathbb{R}$, 则令 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$. 证明 $\mathscr{A}$ 是实线性空间 $\mathbb{C}$ 到 V 上的可逆线性映射, 并且对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}$, $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$.

☞ 证:

□

➾ **习题 5.2.11:** 定义映射 $\mathrm{tr}:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$ 如下: 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 则令 $\mathrm{tr}(A)=a11+a_{22}+\cdots+a_{nn}$. 证明映射 tr 是线性映射, 并且对任意 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

☞ 证:

□

习题 5.2.12: 设 $\mathscr{A}:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$ 是线性映射, 并且对任意 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$. 证明: $\mathscr{A}=\lambda\mathrm{tr}$, 其中 $\lambda\in\mathbb{F}$.

证:

□

5.3 线性映射的代数运算

5.3.1 习　　题

习题 5.3.1: 设 $\{\varepsilon_1,\varepsilon\}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 2 维行向量空间 $\mathbb{F}^2$ 的基, 线性映射 $\mathscr{A}:\mathbb{F}^2\to\mathbb{F}^2$ 与 $\mathscr{B}:\mathbb{F}^2\to\mathbb{F}^2$ 分别把 $\{\varepsilon_1,\varepsilon\}$ 映为 $\{\varepsilon,0\}$ 与 $\{0,\varepsilon\}$. 证明 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{O}$, 但 $\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$.

证:

□

习题 5.3.2: 定义微商映射 $\mathscr{D}:\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}[x]$ 如下: 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, 则令 $\mathscr{D}(f(x))=f(x)$, 其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的微商. 定义积分映射 $\mathscr{S}:\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}[x]$ 如下: 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, 则令 $\mathscr{S}(f(x))=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明: 映射 $\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{S}$ 是线性的, 且 $\mathscr{D}$ 是满射, 但不是单射; 而 $\mathscr{S}$ 是单射, 但不是满射. 求 $\mathscr{S}\mathscr{D}-\mathscr{D}\mathscr{S}$.

证:

□

习题 5.3.3: 定义映射 $\mathscr{A}:\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}[x]$ 如下: 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, 令 $\mathscr{A}(f(x))=xf(x)$. 设 $\mathscr{D}$ 是微商映射. 证明: $\mathscr{A}$ 是线性的; $\mathscr{A}\mathscr{D}-\mathscr{D}\mathscr{A}$ 是单位映射.

证:

□

习题 5.3.4: 设 U 与 V 分别是数域 $\mathbb{F}$ 上 m 维与 n 维线性空间. 取定 $\alpha\in U$. 所有满足 $\mathscr{A}(\alpha)=0$ 的线性映射 $\mathscr{A}:U\to V$ 的集合记为 K. 证明: K 在线性映射的加法以及纯量与线性映射的乘法下成为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 求 $\dim K$.

证:

□

习题 5.3.5: 设 $\mathscr{A}:V\to V$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性映射. 所有满足 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{O}$ 的线性映射 $\mathscr{B}:V\to V$ 的集合记为 R. 证明集合 R 在线性映射的加法以及纯量与线性映射的乘法下成为数域 F 上的线性空间. 选择适当的线性映射 $\mathscr{A}$, 使得 $\dim R=0$, 或 n, 或 n^2.

证:

□

习题 5.3.6: 设 $\mathscr{D}:\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}[x]$ 是微商映射, $\mathscr{S}:\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}[x]$ 是积分映射. 确定映射 $\mathscr{D}^n\mathscr{S}^n$ 与 $\mathscr{S}^n\mathscr{D}^n$, $n=1,2,\cdots,n$.

证:

□

习题 5.3.7: 定义映射 $\mathscr{A}:\mathbb{F}_n[x]\to\mathbb{F}_n[x]$ 如下, 设 $f(x)\in\mathbb{F}_n[x]$, 则令 $\mathscr{A}(f(x))=f(x+1)$. 证明:

$$\mathscr{A}=\mathscr{E}+\frac{\mathscr{D}}{1!}+\frac{\mathscr{D}^2}{2!}+\cdots+\frac{\mathscr{D}^n}{n!},$$

其中 $\mathscr{E}:\mathbb{F}_n[x]\to\mathbb{F}_n[x]$ 是单位映射, $\mathscr{D}:\mathbb{F}_n[x]\to\mathbb{F}_n[x]$ 是微商映射.

证:

□

习题 5.3.8: 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间. 所有线性映射 $\mathscr{A}:V\to V$ 构成数域 $\mathbb{F}$ 上 n^2 维线性空间记为 U. 取定 $\mathscr{A}\in U$. 定义映射 $P_{\mathscr{A}}:U\to U$ 如下: 设 $\mathscr{X}\in U$, 则令 $P_{\mathscr{A}}(\mathscr{X})=\mathscr{A}\mathscr{X}$. 证明 $P_{\mathscr{A}}$ 是线性的. 对映射 $\mathscr{Q}:U\to U$, 是否存在 $\mathscr{A}\in U$, 使得 $\mathscr{Q}=P_{\mathscr{A}}$?

证:

□

5.4 像与核

5.4.1 习　　题

习题 5.4.1: 设 $\mathscr{D}:\mathbb{F}_n[x]\to\mathbb{F}_n[x]$ 是微商映射. 求 $\rho(\mathscr{A})$ 与 $\nu(\mathscr{A})$. 等式 $\mathbb{F}_n[x]=\operatorname{Im}(\mathscr{D})\oplus\operatorname{Ker}(\mathscr{D})$ 是否成立?

解:

□

习题 5.4.2: 取 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-4&4\end{pmatrix}$. 定义线性映射 $\mathscr{A}:\mathbb{C}^{2\times2}\to\mathbb{C}^{2\times2}$ 如下: 设 $X\in\mathbb{C}^{2\times2}$, 则令 $\mathscr{A}(X)=AX$. 求 $\rho(\mathscr{A})$.

解:

□

习题 5.4.3: 设 $\mathscr{A}:V\to V$ 是数域上 n 维线性空间 V 到自身的线性映射, 且 $\rho(\mathscr{A}^2)=\rho(\mathscr{A})$. 证明: $\operatorname{Im}(\mathscr{A})\cap\operatorname{Ker}(\mathscr{A})=\{0\}$.

证: 设 $\rho(\mathscr{A}^2)=\rho(\mathscr{A})=r$, 取 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A})$ 的基 $\{\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$, 它可以扩充为 U 的基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$, 则

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}A_{11}&0\\A_{21}&0\end{pmatrix},$$

$$\mathscr{A}^2(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}A_{11}^2&0\\A_{11}A_{21}&0\end{pmatrix}.$$

由 $r=\rho(\mathscr{A}^2)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A_{11}^2&0\\A_{11}A_{21}&0\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A_{11}&0\\A_{21}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}\le\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}=\operatorname{rank}A_{11}\le r$ 可知 A_{11} 可逆.

若 $\alpha \in \operatorname{Im}(\mathscr{A}) \cap \operatorname{Ker}(\mathscr{A})$, 则由 $\alpha \in \operatorname{Im}\mathscr{A}$ 可知 $\alpha = \mathscr{A}(\beta)$, 且 $\mathscr{A}^2(\beta) = \mathscr{A}(\alpha) = 0$.

设 $\beta = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix}$, 则

$$\alpha = \mathscr{A}(\beta) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} A_{11}X_{11} \\ A_{21}X_{11} \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{A}^2(\beta) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} A_{11}^2X_{11} \\ A_{11}A_{21}X_{11} \end{pmatrix} = 0,$$

即 $A_{11}^2X_{11} = 0$. 由 A_{11} 可逆可知 $X_{11} = 0$, 从而

$$\alpha = A(\beta) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} A_{11}X_{11} \\ A_{21}X_{11} \end{pmatrix} = 0.$$

因此 $\operatorname{Im}(\mathscr{A}) \cap \operatorname{Ker}(\mathscr{A}) = \{0\}$. □

习题 5.4.4: 设 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 到自身的所有线性映射构成的线性空间, $\mathscr{A} \in W$, 且 $\rho(\mathscr{A}) = k$. 定义线性映射 $\mathscr{T}_{\mathscr{A}} : W \to W$ 如下: 设 $\mathscr{X} \in W$, 令 $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}(\mathscr{X}) = \mathscr{A}\mathscr{X}$. 求 $\rho(\mathscr{T}_{\mathscr{A}})$ 与 $\nu\mathscr{T}_{\mathscr{A}}$.

解:

□

习题 5.4.5: 设 $\mathscr{A} : U \to U$ 是线性映射. 证明: 存在线性映射 $\mathscr{B} : U \to U$, 使得 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{O}$, 且 $\rho(\mathscr{A}) + \rho(\mathscr{B}) = \dim U$.

证:

□

习题 5.4.6: 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 U 到自身的线性映射, 证明:

$$\rho(\mathscr{A}\mathscr{B}) + \rho(\mathscr{B}\mathscr{C}) \leq \mathscr{B} + \rho(\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}).$$

证:

□

习题 5.4.7: 设 $\mathscr{A} : U \to U$ 是线性映射, $\rho(\mathscr{A}) = 1$. 证明: 存在唯一 $\lambda \in \mathbb{F}$, 使得 $\mathscr{A}^2 = \lambda\mathscr{A}$, 而且当 $\lambda \neq 1$ 时, $\mathscr{E}_U - \mathscr{A}$ 是可逆线性映射.

证:

□

习题 5.4.8: 设 $V_0, V_1, \cdots, V_{n+1}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上有限维线性空间, $V_0 = V_{n+1} = \{0\}$. 设 $\mathscr{A}_i : V_i \to V_{i+1}$ 是线性映射, $i = 0, 1, \cdots, n$, 且 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_{i+1}) = \operatorname{Im}(\mathscr{A}_i), i = 0, 1, \cdots, n-1$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0.$$

证:

□

习题 5.4.9: 设 $\mathscr{A}:\mathbb{F}^3\to\mathbb{F}^3$ 定义如下: 对 $(x,y,z)\in\mathbb{F}^3$, 令 $\mathscr{A}((x,y,z))=(0,x+y,0)$. $\mathbb{F}^3$ 中由向量 $\varepsilon_1=(1,0,0)$ 与 $\varepsilon_2=(0,1,0)$ 生成的子空间分别记为 U 与 V. 等式 $\mathscr{A}(U\cup V)=\mathscr{A}(U)\cap\mathscr{A}(V)$ 是否成立?

解:

□

习题 5.4.10: 设 $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 证明: $\mathrm{rank}(A+B)=\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B$ 的充分必要条件是, 存在数域 $\mathbb{F}$ 上 m 阶与 n 阶可逆方阵 P 与 Q 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad PBQ=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & I_{(s)}\end{pmatrix},$$

其中 $r=\mathrm{rank}A, s=\mathrm{rank}B$, 且 $r+s\le\min m,n$.

证:

□

5.5 线性变换

5.5.1 习　　题

习题 5.5.1: 设线性变换 $\mathscr{A}:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 在基 $\{(1,0),(0,1)\}$ 下的方阵为 $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$. 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\{(1,1),(1,-1)\}$ 与 $\{(1,0),(1,1)\}$ 下的方阵.

解:

□

习题 5.5.2: 设线性变换 $\mathscr{A}:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ 在基 $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ 下的方阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}.$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\{(0,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,0)\}$ 下的方阵.

解:

□

习题 5.5.3: 设数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 是子空间 U 与 W 的直和, 则对任意 $\alpha\in V$, 存在唯一一对向量 β 与 $\gamma,\beta\in U,\gamma\in W$, 使得 $\alpha=\beta+\gamma$. 定义映射 $\mathscr{A}:V\to V$ 如下: 设 $\alpha\in V$, 则令 $\mathscr{A}(\alpha)=\beta$. 映射 $\mathscr{A}$ 称为 V 沿子空间 W 在 U 上的投影变换. 证明:

(1) 投影变换 $\mathscr{A}$ 是线性变换;

(2) 线性变换 $\mathscr{B}:V\to V$ 为投影变换当且仅当 $\mathscr{B}$ 为幂等变换, 即 $\mathscr{B}$ 满足 $\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$;

(3) 线性变换 $\mathscr{B}:V\to V$ 为投影变换当且仅当 $\mathscr{I}-\mathscr{B}$ 为投影变换, 其中 $\mathscr{I}$ 单位映射.

☞ 证:

□

➾ **习题 5.5.4:** 记 $U=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2:x_1=x_2\}$, $V_1=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2:x_1=0\}$, $V_2=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2:x_2=0\}$. 显然, U,V_1 与 V_2 是 $\mathbb{C}^2$ 的子空间, 并且 $\mathbb{C}^2=U\oplus V_1=U\oplus V_2$. 设 $\mathscr{A}_1:V\to V$ 与 $\mathscr{A}_2:V\to V$ 分别是 $\mathbb{C}^2$ 沿 V_1 与 V_2 在 U 上的投影变换. 证明: $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2=\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_2\mathscr{A}_1=\mathscr{A}_1$.

☞ 证:

□

➾ **习题 5.5.5:** 证明: 线性变换 $\mathscr{A}:V\to V$ 在 V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 下的方阵相等的充分必要条件是, $\mathscr{A}$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 下的方阵与基 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 到 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 的过渡矩阵可交换.

☞ 证:

□

➾ **习题 5.5.6:** 设 $\mathscr{A}:V\to V$ 是线性变换. 证明: 存在 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $f(\mathscr{A})=0$.

☞ 证:

□

➾ **习题 5.5.7:** 设 A,B,C 与 $D\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 定义映射 $\mathscr{P}:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}^{n\times n}$ 如下: 设 $X\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 则令 $\mathscr{P}(X)=AXB+CX+XD$. 证明 $\mathscr{P}:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}^{n\times n}$ 是线性变换, 并且当 $C=D=0$ 时, $\mathscr{P}:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}^{n\times n}$ 可逆的充分必要条件是, 方阵 A 与 B 可逆.

☞ 证:

□

➾ **习题 5.5.8:** 设 $\mathscr{A}:V\to V$ 与 $\mathscr{B}:V\to V$ 是幂等变换, 即 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}, \mathscr{B}^2=\mathscr{B}$. 证明:

(1) $\operatorname{Im}(\mathscr{A})=\operatorname{Im}(\mathscr{B})$ 的充分必要条件是 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}, \mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$;
(2) $\operatorname{Ker}(\mathscr{A})=\operatorname{Ker}(\mathscr{B})$ 的充分必要条件是 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A}, \mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

☞ 证:

(1)
(2)

□

➾ **习题 5.5.9:** 设 $\mathscr{A}:V\to V$ 是线性变换, 且 k 是正整数. 证明: $\operatorname{Im}(\mathscr{A}^k)=\operatorname{Im}(\mathscr{A}^{2k})$ 的充分必要条件是 $V=\operatorname{Im}(\mathscr{A}^k)\oplus\operatorname{Ker}(\mathscr{A}^k)$.

☞ 证:

□

➾ **习题 5.5.10:** 设 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 相似. 证明: A^T 与 B^T 相似, A^2 与 B^2 相似; 并且当 A,B 可逆时, A^{-1} 与 B^{-1} 也相似.

☞ 证:

□

习题 5.5.11: 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = 0$. 证明: 方阵 A 相似于方阵 $\begin{pmatrix} 0 & A_{r\times(n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

证:

□

习题 5.5.12: 证明: 秩为 r 的幂等方阵 A(即 A 满足 $A^2 = A$) 相似于 $\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

证:

□

习题 5.5.13: 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$, 且 $(f(\lambda), g(\lambda)) = 1$. 证明:

$$\operatorname{rank} f(A) + \operatorname{rank} g(A) = n + \operatorname{rank} f(A)g(A).$$

证:

□

5.6 不变子空间

5.6.1 习　　题

习题 5.6.1: 设 $\mathscr{A}: V \to V$ 与 $\mathscr{B}: V \to V$ 是线性变换, U 是 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 证明: U 是 $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ 与 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 的不变子空间. 如果 $\mathscr{A}$ 可逆, 则 U 也是 $\mathscr{A}^{-1}$ 的不变子空间.

证:

□

习题 5.6.2: 设 U 是线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 的不变子空间. 证明: $\widetilde{U} = \{\alpha \in V : \mathscr{A}(\alpha) \in U\}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证:

□

习题 5.6.3: 设 $\mathscr{A}: V \to V$ 是线性变换, $0 \neq \alpha \in V$, 证明: V 中由向量 $\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^k(\alpha), \cdots$ 生成的子空间 U 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 设 $\dim U = r$, 证明: $\{\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{r-1}(\alpha)\}$ 是 U 的基. 求 $\mathscr{A}|_U$ 在这组基下的方阵.

证:

□

习题 5.6.4: 设 $\mathscr{A}: V \to V$ 是线性变换, $\lambda_0 \in \mathbb{F}$. 记

$$V_{\lambda_0}(\mathscr{A}) = \{\alpha \in V : \text{存在某个正整数}k, \text{使}(\mathscr{A} - \lambda_0\mathscr{I})^k(\alpha) = 0\}.$$

证明: $V_{\lambda_0}(\mathscr{A})$ 是 V 的子空间, 而且是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证:

□

习题 5.6.5: 设 V 是 n 维复线性空间, $\mathscr{A}: V \to V$ 是线性变换. 证明: V 的每个子空间都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间的充分必要条件是 $\mathscr{A}$ 为纯量变换, 即 $\mathscr{A} = \lambda\mathscr{I}$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$.

☞ 证:

□

➾ 习题 5.6.6: 设 V 是 2 维复线性空间, 线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 下的方阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 求线性变换 $\mathscr{A}$ 的所有不变子空间.

✎ 解:

□

➾ 习题 5.6.7: 设 V 是区间 $[0,1]$ 上所有连续实函数构成的实线性空间, U 是 V 中所有偶函数构成的子空间, W 是 V 中所有奇函数构成的子空间. 设 $\mathscr{A}: V \to V$ 是积分变换, 即对任意

$$f(x) \in V, \mathscr{A}(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

U 与 W 是否是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间?

✎ 解:

□

➾ 习题 5.6.8: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\mathbb{F}$ 中两两不等的 n 个数, 线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 在 V 的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 下的方阵为 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. 求 $\mathscr{A}$ 的不变子空间的个数.

✎ 解:

□

5.7 特征值与特征向量

5.7.1 习　　题

➾ 习题 5.7.1: 求下列方阵的特征多项式, 特征值及属于每个特征值的特征向量:

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;　　(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(iii) $\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_{1n} \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} a_n \\ a_n a_1 & \cdots & a_n a_{n-1} & a_n^2 \end{pmatrix}$;　(iv) $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$.

✎ 解:

□

➾ 习题 5.7.2: 设 n 阶可逆方阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 求逆方阵 A^{-1} 的特征值.

✎ 解:

□

习题 5.7.3: 设 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 且 $f(\lambda)$ 是关于 λ 的多项式. 证明: 方阵 f(A) 的特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$. 特别地, 当 $f(\lambda)=\lambda^2$ 时, 方阵 A 的特征值为 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$.

证:

□

习题 5.7.4: 证明: 方阵 A 的属于不同特征值的特征向量线性无关.

证:

□

习题 5.7.5: 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是方阵 A 的分别属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关. 并且 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$ 也是方阵 A 的特征向量. 证明: $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m$.

证:

□

习题 5.7.6: 满足 $A^k=0$ 的方阵 A 称为幂零方阵, 其中 k 是正整数. 证明: 方阵 A 为幂零的充分必要条件是, 方阵 A 的特征值全为零.

证:

□

习题 5.7.7: 设 A 与 B 为 n 阶复方阵, 且方阵 A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)$. 证明: 方阵 $\varphi(B)$ 可逆的充分必要条件是, 方阵 A 与 B 没有公共特征值.

证:

□

习题 5.7.8: 设 A 与 B 为 n 阶复方阵, 则关于未知方阵 X 的方阵方程 $AX=XB$ 只有零解的充分必要条件是, 方阵 A 与 B 没有公共特征值.

证:

□

习题 5.7.9: 设 A,B 为 n 阶方阵. 定义映射 $\mathscr{P}_{A,B}:\mathbb{F}^{n\times n}\times\to\mathbb{F}^{n\times n}$ 如下: 设 $X\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 则令 $\mathscr{P}_{A,B}(X)=AX-XB$, 显然 $\mathscr{P}_{A,B}$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 到自身的线性变换. 证明: 线性变换 $\mathscr{P}_{A,B}$ 可逆的充分必要条件是, 方阵 A 与 B 没有公共的特征值.

证:

□

习题 5.7.10: 证明: 方阵 A 的最小多项式为 $d(\lambda)=\lambda-a$ 的充分必要条件是, 方阵 $A=aI_{(n)}$.

证:

□

习题 5.7.11: 证明: 准对角方阵的最小多项式等于每个对角块的最小多项式的最小公倍式.

证:

□

习题 5.7.12: 求下列方阵的最小多项式:

$$\text{(i)}\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\qquad \text{(ii)}\ \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 7 & -4 \end{pmatrix};\qquad \text{(iii)}\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

✎ 解:

□

习题 5.7.13: 求下列方阵的特征多项式与最小多项式:

$$\text{(i)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n};\qquad \text{(ii)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

✎ 解:

□

习题 5.7.14: 举例说明, 不相似的方阵可以具有相同的特征多项式与最小多项式.

✎ 解:

□

习题 5.7.15: 求 3 阶方阵 A, 使得方阵 A 的最小多项式是 λ^2.

✎ 解:

□

习题 5.7.16: 取方阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 定义映射 $\mathscr{A}: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 如下: 设 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则令 $\mathscr{A}(X) = AX$. 证明: 线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式等于方阵 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.

☞ 证:

□

设 $\mathscr{A}: V \to V$ 是线性变换, 且 $U_1, U_2, \ldots, U_k$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$. 证明: 线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式等于 $\mathscr{A}|_{U_1}, \mathscr{A}|_{U_2}, \cdots, \mathscr{A}|_{U_k}$ 的最小多项式的最小公倍式.

习题 5.7.17:

☞ 证:

□

习题 5.7.18: 设 n 阶方阵 A 满足 $A^k = 0, k$ 是正整数. 求方阵 $I_{(n)} - A$ 的逆方阵.

✎ 解:

□

习题 5.7.19: 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = aA, a \neq 1$, 且 $\det A = 0$. 求方阵 $I_{(n)} - A$ 的逆方阵.

✎ 解:

□

习题 5.7.20: 设 n 阶复方阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix} a_1(1-a_1) & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & a_2(1-a_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1}a_n \\ -a_na_1 & \cdots & -a_na_{n-1} & a_n(1-a_n) \end{pmatrix}.$$

当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足什么条件时方阵 A 可逆, 并当 A 可逆时, 求逆方阵 A^{-1}.

解:

□

5.8 特征子空间

5.8.1 习　　题

习题 5.8.1: 设 n 阶复方阵 A 满足 $A^k=I_{(n)}$, k 为正整数. 证明: 方阵 A 相似于对角方阵.

证:

□

习题 5.8.2: 如果方阵 N 满足 $N^k=0$, k 为正整数, 则方阵 N 称为幂零方阵. 使得 $N^k=0$ 的最小正整数 k 称为幂零方阵 N 的幂零指数. 证明: 幂零指数为 n 的 n 阶幂零复方阵 N 相似于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

证:

□

习题 5.8.3: 由于方阵 A 的迹 $\operatorname{tr}(A)$ 是方阵在相似下的不变量, 因此可以定义线性变换 $\mathscr{A}:V\to V$ 在 V 的某组基下的方阵 A 的 $\operatorname{tr}(A)$ 为线性变换 $\mathscr{A}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\mathscr{A})$. 证明: 如果 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\operatorname{tr}(\mathscr{A})=0$, 则存在 V 的一组基, 使得线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的方阵的主对角元都是零.

证:

□

习题 5.8.4: 设 3 阶实方阵 A 在实数域上不相似于上三角阵, 即不存在 3 阶可逆实方阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 是上三角方阵. 证明: 方阵 A 在复数域上相似于对角方阵.

证:

□

习题 5.8.5: 设 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的 n 个特征值两两不等. 证明线性变换 $\mathscr{A}$ 是可对角化.

☞ 证:

□

➾ 习题 5.8.6: 设 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化, 且 U 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 证明: 线性变换 $\mathscr{A}$ 在 U 上的限制 $\mathscr{A}|_U$ 也是可对角化的.

☞ 证:

□

➾ 习题 5.8.7: 取定 n 阶复方阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 定义线性变换 $\mathscr{A}_1 : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 与 $\mathscr{A}_2 : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 如下:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1(X) &= AX, && X \in \mathbb{C}^{n\times n} \\ \mathscr{A}_2(X) &= AX - XA, && X \in \mathbb{C}^{n\times n} \end{aligned}$$

如果方阵 A 可对角化, 问线性变换 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 是否也可对角化?

☞ 证:

□

➾ 习题 5.8.8: 设 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 可交. 证明线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 具有公共特征向量. 进而证明: 设 i 是下标集合, V 的线性变换集合 $\{\mathscr{A}_\nu : \nu \in I\}$ 中任意两个线性变换 $\mathscr{A}_{\nu_1}$ 与 $\mathscr{A}_{\nu_2}$ 可交换, 则线性变换 $\mathscr{A}_\nu, \nu \in I$ 具有公共特征向量.

☞ 证:

□

➾ 习题 5.8.9: 设 n 阶复方阵 A 与 B 可交换. 证明: 存在 n 阶可逆方阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 都是上三角方阵, 即方阵 A 与 B 可以同时相似于上三角形. 试推广到任意多个两两可交换的方阵的情形.

☞ 证:

□

5.9 特征值的界

5.9.1 习　　题

➾ 习题 5.9.1: 设复方阵 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, U 是酉方阵. 证明: 方阵 UA 的特征值 λ_0 满足

$$\min\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\} \le |\lambda_0| \le \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}.$$

☞ 证:

□

➾ 习题 5.9.2: 证明: 酉方阵 U 的任意一个子方阵 U_1 的特征值的模不大于 1.

☞ 证:

□

习题 5.9.3: 设 A 是 n 阶方阵, M 是 k 阶方阵, $k \leq n$, 且存在 $n \times k$ 列满秩矩阵 P, 使得 $AP = PM$. 证明: 方阵 M 的特征值一定是方阵 A 的特征值.

证:

□

习题 5.9.4: 设 O 是奇数阶实正交方阵, 且 $\det O = 1$. 证明: 方阵 O 具有特征值 1.

证:

□

习题 5.9.5: 证明: 行列式为 -1 的实正交方阵具有特征值 -1.

证:

□

习题 5.9.6: 设 A 与 B 是 n 阶实正交方阵, 且 $\det A = -\det B$. 证明: $\det(A+B) = 0$.

证: 证法一：注意到

$$\det AB^T = \det A \det B^T = -\det B \det B^T = -\det BB^T = -1.$$

由上题习题 5.9.5 可知 -1 是 AB^T 的特征值, 即 $\det\left(AB^T + I_{(n)}\right) = 0$, 又 $\det B^T = \det B \neq 0$, 因此

$$\det(A+B) = \frac{1}{\det B^T} \det\left(AB^T + I_{(n)}\right) = 0.$$

证法二：由

$$\begin{aligned} detA \cdot \det(A+B) &= detA \cdot \det\left(A^T + B^T\right) = \det\left(I + AB^T\right), \\ \det B \cdot \det(A+B) &= \det B \cdot \det\left(A^T + B^T\right) = \det\left(I + BA^T\right) \end{aligned}$$

得 $(detA - \det B)\det(A+B) = 0$. 又 $|detA - \det B| = 2 \neq 0$, 故 $\det(A+B) = 0$. □

习题 5.9.7: 设 A 是 n 阶实方阵, 且方阵 $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ 的最大与最小特征值分别为 μ_1 与 μ_n. 证明: 方阵 A 的特征值 λ_0 的实部 $\Re\lambda_0$ 满足 $\mu_n \leq \Re\lambda_0 \leq \mu_1$.

证:

□

习题 5.9.8: 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶复方阵, 且

$$m_A = \min_{1\leq i\leq n}\left\{|a_{ii}| - \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} |a_{ij}|\right\} > 0,$$

证明: $|\det A| \geq (m_A)^n$.

证: 证法一：对于矩阵 $A - \lambda I_n$, 若 $|\lambda| < m_A$ 时, 由

$$|a_{ii} - \lambda| - \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} |a_{ij}| \geq |a_{ii}| - |\lambda| - \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} |a_{ij}| \geq m_A - |\lambda| > 0$$

可知 $A - \lambda I_n$ 是主角占优方阵, 故 $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$.

因此 $\det(A-\lambda I_n)$ 的根, 也即 A 的特征值 λ_i 均满足 $|\lambda_i| \geq m_A$, 因此

$$|\det A| = |\lambda_1|\,|\lambda_2|\cdots|\lambda_n| \geq (m_A)^n.$$

证法二：由 Gersgorin 圆盘定理可知, 对复方阵 A 的任意特征值 $\lambda_j (j=1,2,\cdots,n)$ 一定落在某个圆盘 $|z-a_{ii}| \leq P_i$ 内, 再利用绝对值不等式我们有

$$|a_{ii}| - \left|\lambda_j\right| \leq \left|\lambda_j - a_{ii}\right| \leq P_i = \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} \left|a_{ij}\right|,$$

即

$$\left|\lambda_j\right| \geq |a_{ii}| - \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} \left|a_{ij}\right| \geq m_A > 0.$$

由此得

$$|\det A| = |\lambda_1|\,|\lambda_2|\cdots|\lambda_n| \geq (m_A)^n.$$

□

第 6 章　Jordan 标准形

6.1　根子空间

6.1.1　习　　题

习题 6.1.1: 设 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 下的方阵为 $\mathscr{A}$, 求线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值和根子空间:

$$\text{(i)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \qquad \text{(ii)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解:

□

习题 6.1.2: 证明: n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化的充分必要条件是, 所有根向量都是特征向量.

证:

□

习题 6.1.3: 证明: n 维复线性空间 V 的非零向量都是线性变换 $\mathscr{A}$ 的根向量的充分必要条件是, 线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值都相等.

证:

□

习题 6.1.4: 证明: n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的属于不同特征值的根向量线性无关.

证:

□

习题 6.1.5: 证明: 3 阶复方阵 A 与 B 相似的充分必要条件是, 方阵 A 与 B 具有相同的特征多项式与最小多项式.

证:

□

习题 6.1.6: 举例说明, 最小多项式相同的 4 阶幂零方阵 A 与 B 不一定相似.

证:

□

习题 6.1.7: (Fitting) 设 $\mathscr{A}$ 是属于 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换. 证明: 存在线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 V_1 和 V_2, 使得 $V = V_1 \oplus V_2$, 并且线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V_1 上的限制 $\mathscr{A}|_{V_1}$ 是可逆的, 而在 V_2 上的限制 $\mathscr{A}|_{V_2}$ 是幂零的. 简单地说, 任意线性变换 $\mathscr{A}$ 都可以分解为可逆线性变换 $\mathscr{A}|_{V_1}$ 与幂零线性变换 $\mathscr{A}|_{V_2}$ 的直和. (注意, 如果数域 $\mathbb{F}$ 是复数域, 则本题可用第一分解定理加予证明. 这里要求给出一个不用空间第一分解定理的证明.)

解:

□

习题 6.1.8: 利用上题证明空间第一分解定理.

证:

□

习题 6.1.9: 设 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式为 $d(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda$
其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的全部不同特征值. 并设 W_j 是线性变换 $(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{I})^{m_j}$ 的核, $j = 1, 2, \cdots, t$. 证明:

(1) 根子空间 $W_{\lambda_j} = W_j, j = 1, 2, \cdots, t$;
(2) 线性变换 $\mathscr{A}$ 在 W_j 上的限制 $\mathscr{A}|_{W_j}$ 的最小多项式为 $(\lambda-\lambda_j)^{m_j}, j = 1, 2, \cdots, t$.

证:

□

习题 6.1.10: 设数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式为 $d(\lambda) = p_1^{m_1}(\lambda)\,p_2^{m_2}(\lambda)\cdots p_t^{m_t}(\lambda)$, 其中 $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \cdots, p_t(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上互不相同的首一多项式. 并设 W_j 是线性变换 $p_j^{m_j}(\mathscr{A})$ 的核. 证明:

(1) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_t$;
(2) 线性变换 $\mathscr{A}$ 在 W_j 上的限制 $\mathscr{A}|_{W_j}$ 的最小多项式为 $p_j^{m_j}(\lambda), j = 1, 2, \cdots, t$.

证:

□

习题 6.1.11: 设 3 维实向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在标准基下的方阵为

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

记线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式 $d(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$, 其中 $p_1(\lambda), p_2(\lambda)$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上首一不可约多项式. 设 W_j 是线性变换 $p_j(\mathscr{A})$ 的核, $j = 1, 2$.

(1) 分别求子空间 W_1 与 W_2 的基;
(2) 求线性变换 $\mathscr{A}|_{W_1}$ 与 $\mathscr{A}|_{W_2}$ 分别在所求基下的方阵 $A_j, j = 1, 2$.

解:

□

习题 6.1.12: 设 3 维实向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在标准基下的方阵为

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&2&-1\\2&2&0\end{pmatrix}.$$

求可对角化线性变换 $\mathscr{D}$ 与幂零变换 $\mathscr{N}$, 使得 $\mathscr{A}=\mathscr{D}+\mathscr{N}$, 且 $\mathscr{D}\mathscr{N}=\mathscr{N}\mathscr{D}$.

解:

□

6.2 循环子空间

6.2.1 习　　题

习题 6.2.1: 设 3 维复向量空间 $\mathbb{C}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{C}^3$ 的标准基下的方阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&\mathrm{i}&0\\-1&2&-\mathrm{i}\\0&1&1\end{pmatrix},$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$. 求向量 $\varepsilon_1=(1,0,0)$ 与 $\alpha=(1,0,\mathrm{i})$ 的最小多项式.

解:

□

习题 6.2.2: 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维复线性空间 V 的 k 次幂零变换. 证明: 由非零向量 $\alpha_0\in V$ 生成的循环子空间 C_0 的维数不超过 k.

证:

□

习题 6.2.3: 证明: 6 阶幂零方阵 N_1 与 N_2 相似的必要与充分条件是, 它们具有相同的秩和最小多项式.

证:

□

习题 6.2.4: 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维复线性空间 V 的 k 次幂零变换, 且 V 分解为循环子空间 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 的直和. $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 中维数为 j 的子空间的个数记为 n_j, $j=1,2,\cdots,k$. 证明:

(1) $\dim(\mathrm{Im}\,(\mathscr{A}))=n_2+2n_3+\cdots+(k-1)n_k$;

(2) $n_j=\dim(\mathrm{Im}\,(\mathscr{A}^{j+1}))+\dim(\mathrm{Im}\,(\mathscr{A}^{j-1}))-2\dim(\mathrm{Im}\,(\mathscr{A}^{j})), j=1,2,\cdots,k$;

(3) V 本身是非零向量 α 生成的循环子空间的充分必要条件是, $\dim(\mathrm{Im}\,(\mathscr{A}^j))=n-j, j=1,2,\cdots,n$.

☞ 证:

□

➺ 习题 6.2.5: 设 $\mathscr{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换. 如果存在非零向量 $\alpha_0 \in V$, 使得由向量 α_0 生成的循环子空间 $C_0 \in V$, 则 $\mathscr{A}$ 称为循环变换, 向量 α_0 称为 $\mathscr{A}$ 的循环向量. 证明，$\mathscr{A}$ 为循环变换的充分必要条件是, 存在 V 的基, 使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的方阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

并由此证明, $\mathscr{A}$ 为循环变换的充分必要条件是, $\mathscr{A}$ 的最小多项式等于 $\mathscr{A}$ 的特征多项式. 注: 形如 A 的方阵称为友方阵.

☞ 证:

□

➺ 习题 6.2.6: 设 $\mathscr{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 2 维向量空间 $\mathbb{F}^2$ 的线性变换, 非零向量 $\alpha \in \mathbb{F}^2$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量. 证明: 向量 α 是 $\mathscr{A}$ 的循环向量.

☞ 证:

□

➺ 习题 6.2.7: 设 3 维实向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的标准基下的方阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. 证明: $\mathscr{A}$ 不具有循环向量. 求向量 $\alpha = (1, -1, 3)$ 生成的循环子空间.

☞ 证:

□

➺ 习题 6.2.8: 证明: 如果数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的二次幂 $\mathscr{A}^2$ 为循环变换, 则 $\mathscr{A}$ 本身也是循环变换. 反之是否成立?

☞ 证:

□

➺ 习题 6.2.9: 设数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 可对角化. 证明:

(1) 如果 $\mathscr{A}$ 是循环变换, 则 $\mathscr{A}$ 的 n 个特征值两两不同;

(2) 如果 $\mathscr{A}$ 的 n 个特征值两两不同, 且 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的完全特征向量组, 则 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 是循环向量.

☞ 证:

□

➺ 习题 6.2.10: 设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的可交换的线性变换, 且 $\mathscr{A}$ 是循环变换. 证明, 存在多项式 $f(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$, 使得 $\mathscr{B} = f(\mathscr{A})$.

☞ 证:

□

➾ **习题 6.2.11:** 设 $\mathscr{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换, 而且 V 的任意一个与 $\mathscr{A}$ 可交换的线性变换 $\mathscr{B}$ 都可表为 $\mathscr{A}$ 的多项式. 证明: $\mathscr{A}$ 是循环变换.

☞ 证:

□

➾ **习题 6.2.12:** 设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换. 证明: V 的每个非零向量都是 $\mathscr{A}$ 的循环向量的充分必要条件为, $\mathscr{A}$ 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 在 F 上不可约.

☞ 证:

□

6.3 Jordan 标准形的概念

6.3.1 习　　题

➾ **习题 6.3.1:** 设 A 是 n 阶复方阵, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是方阵 A 的所有不同特征值. 证明:

(1) 存在正整数 m, 使得 $\operatorname{rank}A^m=\operatorname{rank}A^{m+1}=\operatorname{rank}A^{m+2}=\cdots$;

(2) 设 m_j 是使 $\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^{m_j}=\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^{m_j+1}=\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^{m_j+2}=\cdots$ 的最小正整数, 则方阵 A 的最小多项式 $d(\lambda)$ 为

$$d(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{m_t};$$

(3) 设 $(\lambda-\lambda_j)^l$ 是方阵 A 的属于特征值 λ_j 的初等因子, 则 $l\le m_j$;

(4) 设方阵 A 的初等因子组为

$$\begin{array}{cccc}
(\lambda-\lambda_1)^{m_{11}}, & (\lambda-\lambda_1)^{m_{12}}, & \cdots, & (\lambda-\lambda_1)^{m_{1k_1}},\\
(\lambda-\lambda_2)^{m_{21}}, & (\lambda-\lambda_2)^{m_{22}}, & \cdots, & (\lambda-\lambda_2)^{m_{2k_2}},\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
(\lambda-\lambda_t)^{m_{t1}}, & (\lambda-\lambda_t)^{m_{t2}}, & \cdots, & (\lambda-\lambda_t)^{m_{tk_t}},
\end{array}$$

其中属于特征值 λ_j 且次数为 l 的初等因子 $(\lambda-\lambda_j)^l$ 的个数记为 n_{jl}, 并约定, 当 $(\lambda-\lambda_j)^l$ 不是方阵 A 的初等因子时, $n_{jl}=0$, 则

$$n_{jl}=\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^{l+1}+\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^{l-1}-2\operatorname{rank}(A-\lambda_jI)^{l},$$

其中 $1\le l\le m_j, j=1,2,\cdots,t$.

❀ *注: 习题 1 建议采用如下步骤求方阵 A 的 Jordan 标准形:*

(1) 求出方阵 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)$, 并求出方阵 A 的全部不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$;

(2) 对每个特征值 λ_j, 由

$$\operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{m_j-1} > \operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{m_j} = \operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{m_j+1} = \cdots$$

求出 m_j;

(3) 对每个 $l, 1 \le l \le m_j$, 计算

$$n_{jl} = rank(A-\lambda_j I)^{l+1} + rank(A-\lambda_j I)^{l-1} - 2rank(A-\lambda_j I)^{l},$$

由此确定 $(\lambda-\lambda_j)^l$ 是否是方阵 A 的初等因子, 以及初等因子 $(\lambda-\lambda_j)^l$ 在方阵 A 的初等因子组中出现的次数;

(4) 根据 (3) 中所确定的方阵 A 的初等因子组, 写出方阵 A 的 *Jordan* 标准形.

☞ 证:

□

习题 6.3.2: 利用习题 1 的方法, 求出下列方阵 A 的 Jordan 标准形:

(i) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;　　(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$;

(iii) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;　　(iv) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & -3 \end{pmatrix}$;

(v) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;　　(vi) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

✎ 解:

□

习题 6.3.3: 设 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 与做小多项式 $d(\lambda)$ 分别为

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{e_1}(\lambda-\lambda_2)^{e_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_t},$$
$$d(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{m_t},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 是方阵 $\mathscr{A}$ 的全部不同特征值. 证明: 线性变换 $(\mathscr{A}-\lambda_j\mathscr{I})^{e_j}$ 与 $(\mathscr{A}-\lambda_j\mathscr{I})^{m_j}$ 的核相等.

☞ 证:

□

6.4 λ 矩阵的相抵

6.4.1 习　题

习题 6.4.1: 求下列 λ 矩阵的 Smith 标准形, 并求出它们的行列式因子, 不变因子和初等因子组:

(i) $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$;

(iii) $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$; (iv) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$;

(v) $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5+\lambda \end{pmatrix}$; (vi) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$.

解:

□

习题 6.4.2: 证明: 任意一个满秩 λ 方阵 $A(\lambda)$ 都可表为 $A(\lambda)=P(\lambda)Q(\lambda)$, 其中 $P(\lambda)$ 是可逆 λ 方阵, $Q(\lambda)$ 是上三角 λ 方阵, 而且它的对角元都是首一多项式, 对角线以上的元素都是次数小于同一列的对角元的次数的多项式. 并证明这种表法唯一.

证:

□

习题 6.4.3: 证明: 对 n 阶 Hermite 方阵 H_1 和 H_2, λ 方阵 $H_1+\lambda H_2$ 的不变因子都是实系数多项式.

证:

□

6.5 Jordan 标准形的求法

6.5.1 习　题

习题 6.5.1: 求下列方阵的 Jordan 标准形:

(i) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; (iv) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$;

(v) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 3 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$; (vi) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(vii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$; (viii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$;

(ix) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^2_{n\times n}$; (x) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \alpha & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}_{n\times n}, n \geq 3$;

(xi) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$; (xii) $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$.

✎ **解:**

□

习题 6.5.2: 设 n 阶方阵 J 为

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

$f(\lambda)$ 是关于 λ 的多项式. 证明:

$$f(J)=\begin{pmatrix}f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f(\lambda)\end{pmatrix}.$$

证:

□

习题 6.5.3: 证明: 一组两两可交换的可对角化方阵可以用同一个可逆方阵相似于对角形.

证:

□

习题 6.5.4: 证明: 方阵 A 的最小多项式 $d(\lambda)$ 的某次幂能被 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 整除.

证:

□

习题 6.5.5: 证明: 方阵 A 相似于对角形的充分必要条件为, 它的初等因子都是一次的.

证:

□

习题 6.5.6: 设 A 是可逆方阵. 证明 AB 和 BA 相似. 当 A 不可逆时, 结论是否仍成立?

证:

□

习题 6.5.7: 设方阵 A 的特征值全是 1. 证明方阵 A 的任意次幂都与 A 相似.

证:

□

习题 6.5.8: 设 A 是 n 维复线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的某组基下的方阵. 证明:$\mathscr{A}$ 是循环变换的充分必要条件为, 方阵 A 的特征方阵 $\lambda I_{(n)}-A$ 的 $n-1$ 阶行列式因子 $D_{n-1}(\lambda)=1$.

证:

□

6.6 一些例子

6.6.1 习　　题

习题 6.6.1: 设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 把 n 阶单位方阵 $I_{(n)}$ 的第 $1, 2, \cdots, n$ 行分别调到第 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 行得到的方阵称为置换方阵. 证明: 置换方阵相似于对角形.

证:

□

习题 6.6.2: 证明: 所有 n 阶轮回方阵

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

可以经同一个可逆方阵 P 化为标准形.

证:

□

习题 6.6.3: 设 A 和 B 是 n 阶方阵, 且方阵 $\operatorname{diag}(A, A)$ 和 $\operatorname{diag}(B, B)$ 相似. 证明: 方阵 A 和 B 相似.

证:

□

习题 6.6.4: 已知 5 阶方阵 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 和 $d(\lambda)$ 分别为

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda+7)^2, \quad d(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+7).$$

求方阵 A 的 Jordan 标准形.

解:

□

习题 6.6.5: 设 A 是 n 阶可逆矩阵, 且 A 和 A^k 相似, k 是正整数. 证明: 方阵 A 的特征值都是单位根.

证:

□

习题 6.6.6: 设方阵 A 和任意一个可逆方阵都可交换. 证明: A 是纯量方阵.

证:

□

习题 6.6.7: 设方阵 C 和每一个与方阵 A 可交换的多项式都可交换. 证明: 方阵 C 可以表示为方阵 A 的多项式.

☞ 证:

□

➾ 习题 6.6.8: 设 n 阶方阵 A 不可逆. 证明: $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}A^2$ 的充分必要条件是, 方阵 A 的属于特征值 0 的初等因子都是一次的.

☞ 证:

□

➾ 习题 6.6.9: (Weyl) 证明: n 阶复方阵 A 与 B 相似的充分必要条件是, 对于每个复数 a 和每个正整数 k, $\operatorname{rank}\left(aI_{(n)} - A\right)^k = \operatorname{rank}\left(aI_{(n)} - B\right)^k$.

☞ 证:

□

6.7 实方阵的实相似

6.7.1 习　　题

➾ 习题 6.7.1: 证明: 方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

相似于对角形, 但不实相似于对角形.

☞ 证:

□

➾ 习题 6.7.2: 设 $2k$ 维实线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的最小多项式 $d(\lambda)$ 为 $d(\lambda) = \left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)^k$, 其中 a, b 为实数, 且 $a^2 - 4b < 0$. 证明: 存在 V 的基, 使得线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的方阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -b & -a & 1 & & & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & & -b & -a & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & -b & -a & 1 & \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & -b & -a \end{pmatrix}.$$

☞ 证:

□

习题 6.7.3: 证明: 任意一个实方阵 A 都相似于准对角形, 其对角块具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_0 & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

或者

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & & & & & & & \\ -b & -a & 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & & & & & \\ & & -b & -a & 0 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & & \\ & & & & & -b & -a & 0 & 1 & \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & -b & -a & \end{pmatrix},$$

其中 λ_0, a 和 b 都是实数, 且 $a^2 < 4b$.

证:

□

习题 6.7.4: 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵. 视 A 为复方阵, 它的特征多项式和最小多项式分别记为 $\varphi(\lambda)$ 和 $d(\lambda)$. 证明: 作为数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, A 的特征多项式和最小多项式仍分别为 $\varphi(\lambda)$ 和 $d(\lambda)$.

证:

□

习题 6.7.5: 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵. 视 A 为复方阵, 它的行列式因子和不变因子分别记为

$$D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_n(\lambda) \quad \text{和} \quad d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda).$$

证明: 作为数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, A 的行列式因子和不变因子仍分别是

$$D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_n(\lambda) \quad \text{和} \quad d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda).$$

证:

□

习题 6.7.6: 设 A 和 B 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵. 证明: 方阵 A 和 B 在数域 $\mathbb{F}$ 上相似的充分必要条件是, 方阵 A 和 B 相似.

证:

□

第 7 章 Euclid 空间

7.1 内积

7.1.1 习　　题

习题 7.1.1: 设 $\mathbb{R}^2$ 是所有 2 维实行向量的集合连同标准内积构成的 2 维 Euclid 空间, $A = (a_{ij})$ 是 2 阶实对称方阵. 定义 $f_A(x, y) = xAy^T$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}^2$. 证明: 二元实函数 $f_A(x, y)$ 是内积的充分必要条件为 $a_11 > 0, a_{22} > 0$, 且 $\det A > 0$.

证:

□

习题 7.1.2: $\mathbb{R}^2$ 的意义同习题 1. 设 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ 的标准内积记为 $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$. 定义 $\mathbb{R}^2$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 如下; 对于 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, 令 $\mathscr{A}(x) = (-x_2, x_1)$. 构造 $\mathbb{R}^2$ 的一个内积 $[x, y]$, 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^2$, 均有 $[x, \mathscr{A}(x)] = 0$.

证:

□

习题 7.1.3: 所有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ 收敛的实数序列 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 的集合记为 V. 定义 V 中序列 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 与 $y = (y_1, y_2, \cdots)$ 的加法为 $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots)$; 定义纯量 $\lambda \in \mathbb{R}$ 与序列 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in V$ 的乘积为 $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots)$, 于是 V 在如此的加法和纯量与序列的乘法下成为实线性空间. 证明: V 上二元实函数 $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ 是 V 的一个内积, 其中 $x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots) \in V$.

证:

□

习题 7.1.4: 设 V_1 与 V_2 是 Euclid 空间. 记 $V_1 \times V_2 = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in V_1, \beta \in V_2\}$. 在 $V_1 \times V_2$ 中定义加法: 对 $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in V_1 \times V_2$, 令 $(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$; 定义纯量 $\lambda \in \mathbb{R}$ 与 $(\alpha, \beta) \in V_1 \times V_2$ 的乘积为 $\lambda(\alpha, \beta) = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$. 于是 $V_1 \times V_2$ 在如此的加法和纯量与向量的乘法下成为实线性空间. 定义 $V_1 \times V_2$ 上二元实函数为

$$[(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)] = [\alpha_1, \alpha_2] + [\beta_1, \beta_2],$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in V_1, \beta_1, \beta_2 \in V_2$, 且 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 与 $[\beta_1, \beta_2]$ 分别是 V_1 与 V_2 的内积. 证明: 二元实函数 $[(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)]$ 是 $V_1 \times V_2$ 的一个内积.

证:

□

习题 7.1.5: 证明:

(1) n 维 Euclid 空间 V 中向量 α 与 β 正交的充分必要条件是

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2;$$

(2) 设 $\alpha,\beta\in V$, 且 $\|\alpha\|=\|\beta\|$, 则向量 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 正交;

(3) (平行四边形法则) 设 $\alpha,\beta\in V$, 则

$$\|\alpha+\beta\|^2+\|\alpha-\beta\|^2=2\,\|\alpha\|+2\|\beta\|^2.$$

☞ 证:

□

➬ **习题 7.1.6:** 证明: n 维 Euclid 空间 V 中向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是, 它们的 Gram 方阵 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left((\alpha_i,\alpha_j)\right)_{n\times n}$ 可逆, 其中 (α,β) 是 V 的内积.

☞ 证:

□

7.2 正交性

7.2.1 习　　题

➬ **习题 7.2.1:** (Bessel 不等式) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组两两正交的单位向量, $\alpha\in V$, 并记 $a_i=(\alpha,\alpha_i), i=1,2,\cdots,k$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2\le\|\alpha\|^2,$$

而且向量 $\beta=\alpha-\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\alpha_i$ 与每个向量 α_i 都正交, $i=1,2,\cdots,k$.

☞ 证:

□

➬ **习题 7.2.2:** 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组向量. 证明下面的命题等价:

(1) $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的标准正交基;

(2) (Parseval 等式) 对任意 $\alpha,\beta\in V$,

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{k}(\alpha,\alpha_i)(\alpha_i,\beta);$$

(3) 对任意 $\alpha\in V$,

$$\|\alpha\|^2=\sum_{i=1}^{k}|(\alpha,\alpha_i)|^2.$$

☞ 证:

□

➻ **习题 7.2.3: 所有次数小于 $n+1$ 的实系数多项式 $f(x)$ 的集合 $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ 连同内积 $(f(x),g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $f(x),g(x) \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$ 一起构成 Euclid 空间. 设 $f_j(x) = x^j, j = 0,1,\cdots,n-1$. 求 $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ 中与多项式 $f_0(x), f_1(x),\cdots,f_{n-1}(x)$ 都正交的多项式.**

✎ **解:** 设 $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ 中与多项式 $f_0(x), f_1(x),\cdots,f_{n-1}(x)$ 都正交的多项式为 $g(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. 由

$$(g(x), f_i(x)) = \int_0^1 x^i g(x)\,dx = \frac{1}{i+1}a_0 + \frac{1}{i+2}a_1 + \cdots + \frac{1}{i+n+1}a_n = 0$$

得

$$\left(\frac{1}{i+2}, \frac{1}{i+3}, \cdots, \frac{1}{i+n+1}\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{i+1}a_0, \quad 0 \le i \le n-1,$$

也即 $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T = -a_0\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n}\right)^T$, 其中 $A = (a_{ij})_{n\times n} = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{n\times n}$.

记 $B = A^{-1} = (b_{ij})_{n\times n}$, 由习题 2.5.1.15 计算 A 的行列式及余子式可得

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}(n+i)!(n+j)!ij}{(i!)^2(j!)^2(n-i)!(n-j)!(i+j)} = (-1)^{i+j}C_n^iC_{n+i}^iC_n^jC_{n+j}^j\frac{ij}{i+j},$$

则 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T = -a_0A^{-1}\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n}\right)^T = -a_0B\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n}\right)^T$.

又

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}\cdot\frac{1}{j} = (-1)^iC_n^iC_{n+i}^i i\sum_{j=1}^n(-1)^jC_n^jC_{n+j}^j\frac{1}{i+j}.$$

记 $F(x) = x(x+1)\cdots(x+n)$, $G(x) = (1-x)(2-x)\cdots(n-x)$, 有

$$F'(-j) = (-j)(-j+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-j) = (-1)^j j!(n-j)!,$$
$$G(-j) = (j+1)(j+2)\cdots(j+n) = \frac{(n+j)!}{j!},$$

其中 $0 \le j \le n$.

由 Lagrange 插值公式可知

$$G(x) = \sum_{j=0}^n \frac{F(x)}{F'(-j)(x+j)}G(-j) = \sum_{j=0}^n(-1)^jC_n^jC_{n+j}^j\frac{F(x)}{x+j}.$$

取 $x = i, 1 \le i \le n$, 有 $G(i) = 0, F(i) \ne 0$, 从而有 $\sum\limits_{j=0}^n(-1)^jC_n^jC_{n+j}^j\frac{1}{i+j} = 0$, 也即 $\sum\limits_{j=1}^n(-1)^jC_n^jC_{n+j}^j\frac{1}{i+j} = -\frac{1}{i}$. 故 $\sum\limits_{j=1}^n b_{ij}\cdot\frac{1}{j} = (-1)^{i+1}C_n^iC_{n+i}^i$. 于是 $a_i = (-1)^iC_n^iC_{n+i}^ia_0$, 因此

$$g(x) = a_0\sum_{i=0}^n(-1)^iC_n^iC_{n+i}^ix^i, a_0 \in \mathbb{R}.$$

□

习题 7.2.4: $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ 的意义同习题 3. 利用 Gram—Schmidt 正交化, 由 $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ 的基 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ 求出 $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ 的一组标准正交基.

解: 记 $g_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i C_{k+i}^i x^i$, 由于 $(-1)^k \frac{1}{C_{2k}^k} g_k(x)$ 是 k 次首一多项式, 故其为 Gram—Schmidt 正交化得到的基.

又

$$\|g_n(x)\|^2 = (g_n(x), g_n(x)) = (g_n(x), (-1)^n C_{2n}^n x^n) = (-1)^n C_{2n}^n \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i C_{n+i}^i \frac{1}{i+n+1}.$$

在上题习题 7.2.3 中取 $x = n+1$, 有 $G(n+1) = (-1)^n n!, F(n+1) = \frac{(2n+1)!}{n!}$, 从而

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i C_{n+i}^i \frac{1}{i+n+1} = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\, C_{2n}^n},$$

故 $\|g_n(x)\|^2 = \frac{1}{2n+1}, \|g_n(x)\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 因此 $(-1)^k \frac{1}{C_{2k}^k} g_k(x)$ 的模长为 $\frac{1}{\sqrt{2k+1}C_{2k}^k}$.

令 $h_k(x) = (-1)^k \sqrt{2k+1} g_k(x) = \sqrt{2k+1}\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{i+k} C_k^i C_{k+i}^i x^i$, 则 $\{h_0(x), h_1(x), \cdots, h_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ 的一组标准正交基. □

习题 7.2.5: 设 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组标准正交基, 向量 $\alpha_j \in V$ 在这组基下的坐标为 $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jn})^T, j = 1, 2, \cdots, n$. 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 的 Gram 方阵为 $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = ((a_i, \alpha_j))_{n\times n}$. 证明: $\det G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\det(x_{ij}))^2$.

证:

□

习题 7.2.6: 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组基. 对 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 施行 Gram—Schmidt 正交化得到的正交向量组记为 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$. 证明:

$$\|\beta_j\|^2 = \frac{\det G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j)}{\det G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{j-1})}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

其中约定零个向量的 Gram 方阵的行列式为 1.

证:

□

习题 7.2.7: 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一组向量. 证明:

$$\det G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \|\alpha_1\|^2 \|\alpha_2\|^2 \cdots \|\alpha_n\|^2,$$

等号当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 两两正交或其中含有零向量时成立. 由此证明: 如果 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实方阵, 则

$$(\det A)^2 \le \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

证:

□

➬ **习题 7.2.8:** 举例说明, 方阵 A 的行向量两两正交, 它的列向量并不一定两两正交.

☞ **证:**

□

➬ **习题 7.2.9:** 设 O 是 n 阶正交方阵, 而方阵 $A=\operatorname{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 证明: 方阵 OA 的特征值 λ_0 满足 $m\le|\lambda_0|\le M$, 其中

$$m=\min\left\{|a_j|:1\le j\le n\right\},\quad M=\max\left\{|a_j|:1\le j\le n\right\}.$$

☞ **证:**

□

➬ **习题 7.2.10:** 证明: 正交方阵 O 的任意一个子方阵的特征值的绝对值小于或等于 1.

☞ **证:**

□

➬ **习题 7.2.11:** 证明: 如果 n 阶正交方阵 O 的行列式为 1, 则方阵 O 可以表为有限多个形如 $O_{jk}=I_{(n)}+(\cos\theta-1)(E_{jj}+E_{kk})+\sin\theta(E_{jk}-E_{kj})$ 的方阵的乘积, 其中 E_{st} 是 (s,t) 位置上的元素为 1 而其他元素都为零的 n 阶方阵, 并且 $1\le j\le k\le n$. 如果 n 阶正交方阵 O 的行列式为 -1, 则还应添加上方阵 $\operatorname{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{n-1\text{个}},-1)$.

☞ **证:**

□

➬ **习题 7.2.12:** 设 $\alpha=\beta+\mathrm{i}\gamma$ 是正交方阵 O 的属于特征值 λ 的特征向量, 其中 β 与 γ 是实向量, $\mathrm{i}^2=-1$. 证明: $|\lambda|=1$, 而且当 $\lambda\notin\mathbb{R}$ 时, 实向量 β 与 γ 正交, 且范数相等.

☞ **证:** 由 $O\alpha=\lambda\alpha$ 得 $\alpha^HO^HO\alpha=\alpha^HO^TO\alpha=\alpha^H\alpha=|\lambda|^2\alpha^H\alpha$, 即 $|\lambda|=1$.

当 $\lambda\notin\mathbb{R}$ 时, $\lambda^2\ne1$, 由 $\alpha^TO^TO\alpha=\alpha^T\alpha=\lambda^2\alpha^T\alpha$ 得

$$\alpha^T\alpha=\left(\beta^T+\mathrm{i}\gamma^T\right)(\beta+\mathrm{i}\gamma)=\left(\beta^T\beta-\gamma^T\gamma\right)+\mathrm{i}\left(\beta^T\gamma+\gamma^T\beta\right)=0,$$

即 $\beta\perp\gamma$ 且 $\|\beta\|=\|\gamma\|$. □

➬ **习题 7.2.13:** 设 λ 是 n 阶斜对称实方阵 K 的非零特征值, $\alpha=\beta+\mathrm{i}\gamma$ 是属于 γ 的特征向量, 其中 β 与 γ 是实向量. 证明: λ 是纯虚数, 而且实向量 β 与 γ 正交, 范数相等.

☞ **证:**

□

➬ **习题 7.2.14:** 设 A 是秩为 r 的 n 阶实方阵. 证明: 存在 n 阶正交方阵 O 和 n 阶置换方阵 P, 使得 $A=PTO$, 其中

$$T=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}t_{11}&0&\cdots&0\\t_{21}&t_{22}&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\t_{r1}&t_{r2}&\cdots&t_{rr}\end{pmatrix}&O_{r\times(n-r)}\\ *_{(n-r)\times r}&O_{(n-r)\times(n-r)}\end{pmatrix},$$

并且对角元 $t_{11}, t_{22}, \cdots, t_{rr}$ 都是正数.

证:

□

习题 7.2.15: 设 U 与 W 是 n 维 Euclid 空间 V 的子空间. 证明:

$$(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}, \quad (U\cap W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}.$$

证:

□

习题 7.2.16: 设 $\mathbb{R}^4$ 是所有 4 维实行向量空间连同标准内积一起构成的 Euclid 空间. $\mathbb{R}^4$ 中由向量 $\alpha=(1,0,-1,1)$ 与 $\beta=(2,3,-1,2)$ 生成的子空间记为 U. 求正交补 $U^{\perp}$ 的一组标准正交基.

证:

□

习题 7.2.17: 设 $\mathbb{R}_4[x]$ 是所有次数小于 4 的实系数多项式集合连同内积 $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ 构成的 Euclid 空间, 其中 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_4[x]$. 求 $\mathbb{R}_4[x]$ 中由零次多项式生成的子空间 U 的正交补 $U^{\perp}$.

证:

□

习题 7.2.18: 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 是所有 n 阶实方阵集合连同内积 $(X,Y)=\mathrm{tr}(XY^T)$ 构成的 Euclid 空间, 其中 $X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 求 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中由纯量方阵生成的子空间 U 的正交补 $U^{\perp}$.

证:

□

习题 7.2.19: 设 V_1 与 V_2 是有限维 Euclid 空间. 记 $V_1\times V_2=\{(\alpha,\beta):\alpha\in V_1,\beta\in V_2\}$. 在 $V_1\times V_2$ 中定义加法: 设 $(\alpha_1,\beta_1)\in V_1,(\alpha_2,\beta_2)\in V_2$, 则令 $(\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)$; 并定义纯量 $\lambda\in\mathbb{R}$ 与 $(\alpha,\beta)\in V_1\times V_2$ 的乘积 $\lambda(\alpha,\beta)=(\lambda\alpha,\lambda\beta)$. 于是 $V_1\times V_2$ 在此加法与乘法下成为实线性空间. 设 $f_1(\alpha,\beta)$ 与 $f_2(\gamma,\delta)$ 分别是 Euclid 空间 V_1 与 V_2 的内积. 证明: $V_1\times V_2$ 具有唯一一个内积 $f((\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2))$, 它满足:

(1) $V_2=V_1^{\perp}$;

(2) 当 $\alpha,\beta\in V_1$ 时, $f((\alpha,0),(\beta,0))=f_1(\alpha,\beta)$;

当 $\alpha,\beta\in V_2$ 时, $f((0,\alpha),(0,\beta))=f_2(\alpha,\beta)$.

证:

□

7.3 线性函数与伴随变换

7.3.1 习 题

习题 7.3.1: 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的线性变换. 证明: $\mathrm{tr}(\mathscr{A}^*\mathscr{A}) \geq 0$, 其中等号当且仅当线性线性变换 $\mathscr{A}$ 为零变换时成立.

证:

□

习题 7.3.2: 设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的线性变换, $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 可交换, $\mathscr{A}^*$ 与 $\mathscr{A}$ 可交换. 证明: $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}^*$ 也可交换.

证:

□

习题 7.3.3: 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的线性变换. 证明: $\mathscr{A}$ 的伴随变换 $\mathscr{A}^*$ 的像空间 $\mathscr{A}^*(V)$ 是 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ 的正交补.

证:

□

习题 7.3.4: 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的可逆线性变换. 证明: $\mathscr{A}$ 的伴随变换 $\mathscr{A}^*$ 也是可逆变换, 并且 $(\mathscr{A}^*)^{-1} = \left(\mathscr{A}^{-1}\right)^*$.

证:

□

习题 7.3.5: 设 β 和 γ 是 n 维 Euclid 空间 V 的固定向量. 证明: 由 $\mathscr{A}(\alpha) = (\alpha, \beta)\gamma$ 所定义的变换 $\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换, 其中 $\alpha \in V$. 求 $\mathscr{A}$ 的伴随变换 $\mathscr{A}^*$.

证:

□

习题 7.3.6: 设 $\mathbb{R}_4[x]$ 是所有次数小于 4 的实系数多项式集合连同内积 $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,dx$ 构成的 Euclid 空间, 其中 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_4[x]$. 设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathbb{R}_4[x]$ 的微商变换. 求 $\mathscr{D}$ 的伴随变换 $\mathscr{D}^*$.

证:

□

习题 7.3.7: 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 是所有 n 阶实方阵集合连同内积 $(X, Y) = \mathrm{tr}(XY^T)$ 构成的 Euclid 空间, 其中 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 设 P 是固定的 n 阶可逆方阵, 由 $\mathscr{A}_P(X) = P^{-1}XP$ 所定义的变换 $\mathscr{A}_P$ 显然是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的线性变换, 其中 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 求 $\mathscr{A}_P$ 的伴随变换 $\mathscr{A}_P^*$.

证:

□

习题 7.3.8: 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 n 维的 Euclid 空间 V 的标准正交基, V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的方阵为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$. 证明:

$$a_{ij} = \left(\mathscr{A}^*(\alpha_i), \alpha_j\right), \quad 1 \leq i.j \leq n.$$

☞ 证:

□

7.4 规范变换

7.4.1 习　　题

➾ 习题 7.4.1: 举例说明, 方阵 A 本身不是规范的, 但它的平方 A^2 却是规范的.

☞ 证:

□

➾ 习题 7.4.2: 证明: 规范方阵 A 与 B 正交相似的充分必要条件是, 方阵 A 与 B 相似.

☞ 证:

□

➾ 习题 7.4.3: 方阵 A 与 A^TA 可交换, 方阵 A 是否一定是规范的?

☞ 证:

□

➾ 习题 7.4.4: 证明: 一组两两可交换的规范方阵可以同时正交相似于准对角形. 即设 I 是下标集合, 规范方阵集合 $\{A_\nu : \nu \in I\}$ 满足: 对任意 $\nu, \mu \in I, A_\nu A_\mu = A_\mu A_\nu$, 则存在正交方阵 O, 使得方阵 $O^T A_\nu O$ 为定理 6 中准对角形 (7.4.1), 其中 $\nu \in I$.

☞ 证:

□

➾ 习题 7.4.5: 证明: n 阶实方阵 A 为规范的充分必要条件是, 存在实系数多项式 $f(\lambda)$, 使得 $A^* = f(A)$.

☞ 证:

□

➾ 习题 7.4.6: 设 $\alpha = \beta + \mathrm{i}\gamma$ 是实规范方阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 其中 β 与 γ 是实向量. 证明:

(1) α 是 A^T 属于特征值 $\overline{\lambda}$ 的特征向量;

(2) 当 $\lambda \notin \mathbb{R}$ 时, β 与 γ 正交且范数相等.

☞ 证:

□

7.5 正交变换

7.5.1 习　　题

➾ 习题 7.5.1: 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的保内积变换. 即对任意 $\alpha, \beta \in V, (\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)) = (\alpha, \beta)$. 证明: 保内积变换 $\mathscr{A}$ 是线性变换, 因而 $\mathscr{A}$ 是正交变换. 举例说明, 保向量范数的

变换不一定是线性变换.

☞ 证:

□

➽ 习题 7.5.2: 设 α 和 β 是 n 维 Euclid 空间 V 的向量, $\|\alpha\| = \|\beta\|$. 证明: 存在正交变换 $\mathscr{A}$, 使得 $\mathscr{A}(\alpha) = \beta$.

☞ 证:

□

➽ 习题 7.5.3: 设 α_1, α_2 与 β_1, β_2 是 n 维 Euclid 空间 V 的两对向量, $\|\alpha_i\| = \|\beta_i\|, i = 1, 2$, 且向量 α_1 与 α_2 的夹角等于 β_1 与 β_2 的夹角. 证明: 存在正交变换 $\mathscr{A}$, 使得 $\mathscr{A}(\alpha_1) = \beta_1, \mathscr{A}(\alpha_2) = \beta_2$.

☞ 证:

□

➽ 习题 7.5.4: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的两组向量. 证明; 存在满足 $\mathscr{A}(\alpha_j) = \beta_j, j = 1, 2, \cdots, k$ 的正交变换 $\mathscr{A}$ 的充分必要条件是这两组向量的 Gram 方阵相等.

☞ 证:

□

➽ 习题 7.5.5: 求正交变换 O, 使得 $B = O^T AO$ 是正交方阵 A 在正交相似下的标准形:

(1) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

(2) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☞ 证:

□

➽ 习题 7.5.6: 设 $O = (a_{ij})$ 是 3 阶实正交方阵, 且 $\det O = 1$. 证明:

$$(1 - \mathrm{tr}O)^2 + \sum_{1 \le i < j \le 3} (a_{ij} - a_{ji})^2 = 4.$$

此结论可否推广?

☞ 证:

□

➽ 习题 7.5.7: 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的线性变换. 如果存在 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 U, 使得对任意 $\alpha \in U$, 均有 $\|\mathscr{A}(\alpha)\| = \|\alpha\|$, 对任意 $\alpha \in U^{\perp}$, 均有 $\mathscr{A}(\alpha) = 0$, 则 $\mathscr{A}$ 称为部分正交. 证明:

(1) 部分正交变换的伴随变换仍是部分正交的;

(2) 部分正交变换的特征值的绝对值不超过 1.

☞ 证:

□

➻ 习题 7.5.8: 设 n 阶正交方阵 O 的特征值不等于 -1. 证明: 方阵 $I_{(n)}+O$ 可逆, 方阵 $K=\left(I_{(n)}-O\right)\left(I_{(n)}+O\right)^{-1}$ 是斜对称方阵, 且 $O=\left(I_{(n)}-K\right)\left(I_{(n)}+K\right)^{-1}$.

☞ 证:

□

7.6 自伴变换与斜自伴变换

7.6.1 习　题

➻ 习题 7.6.1: 证明: n 维 Euclid 空间 V 的自伴变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的乘积 AB 仍是自伴的充分必要条件是, A 与 B 可交换.

☞ 证:

□

➻ 习题 7.6.2: 设 $\mathbb{R}[x]$ 是所有实系数多项式集合连同内积 $(f(x), g(x))=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$ 一起构成的 Euclid 空间, 其中 $f(x), g(x)\in\mathbb{R}[x]$. 回答下面的问题:

(1) $\mathbb{R}[x]$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 定义如下: 设 $\mathscr{A}(f(x))=xf(x)$, 其中 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$. 线性变换 $\mathscr{A}$ 是否是自伴的?

(2) Euclid 空间 $\mathbb{R}[x]$ 的微商变换 $\mathscr{D}$ 是否是自伴的?

☞ 证:

□

➻ 习题 7.6.3: 设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的斜自伴变换. 证明: 对任意 $\alpha\in V$, $(\mathscr{A}(\alpha), \alpha)=0$. 反之是否成立?

☞ 证:

□

➻ 习题 7.6.4: 设 n 维 Euclid 空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$, 且对任意 $\alpha\in V$, $\|\mathscr{A}(\alpha)\|\le\|\alpha\|$. 证明: $\mathscr{A}$ 是自伴的.

☞ 证: 取 $\operatorname{Im}(A)$ 的标准正交基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$, 扩充为 V 的标准正交基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n\}$. 由 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$ 可知当 $1\le i\le r$ 时, $\alpha_i=\mathscr{A}(\beta_i)=\mathscr{A}^2(\beta_i)=\mathscr{A}(\alpha_i)$, 从而 $\mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} I_{(r)} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $A_{12}=\begin{pmatrix} a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$.

若 $A_{12}=0$, 则 $\exists i,j(1\le i\le r, r+1\le j\le n)$ 使得 $a_{ij}\ne 0$. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=$ $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}X_{11}\\X_{21}\end{pmatrix}$, 则

$$\mathscr{A}(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}I_{(r)}&A_{12}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11}\\X_{21}\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}X_{11}+A_{12}X_{21}\\0\end{pmatrix}.$$

取 $x_i=\frac{1}{a_{ij}}, x_j=1$, 其余为 0, 则

$$X_{11}+A_{12}X_{21}=\left(a_{1j},\cdots,a_{i-1,j},\frac{1}{a_{ij}}+a_{ij},a_{i+1,j},\cdots,a_{nj}\right)^T.$$

从而

$$\begin{aligned}\|\mathscr{A}(\alpha)\|^2&=a_{1j}^2+\cdots+a_{i-1,j}^2+\left(\frac{1}{a_{ij}}+a_{ij}\right)^2+a_{i+1,j}^2+\cdots+a_{nj}^2\\&\ge\left(\frac{1}{a_{ij}}+a_{ij}\right)^2=\frac{1}{a_{ij}^2}+2+a_{ij}^2>\frac{1}{a_{ij}^2}+1=\|\alpha\|^2,\end{aligned}$$

即 $\|\mathscr{A}(\alpha)\|>\|\alpha\|$, 矛盾, 所以 $A_{12}=0$, 因此 $\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}I_{(r)}&0\\0&0\end{pmatrix}$, 显然是自伴的. □

习题 7.6.5: 设 n 维 Euclid 空间 V 的自伴变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^k=\mathscr{I}$, k 为正整数. 证明: $\mathscr{A}^2=\mathscr{I}$.

证:

□

习题 7.6.6: 设 $\mathscr{A}$ 是 2 维 Euclid 空间 V 的斜自伴变换. 证明, 对任意 $\alpha\in V$, $(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))=(\det\mathscr{A})(\alpha,\beta)$.

证:

□

习题 7.6.7: 设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是 3 维 Euclid 空间 V 的斜自伴变换. $\mathscr{A}\ne 0$, 且 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A})=\operatorname{Ker}(\mathscr{B})$. 证明: 存在实数 λ, 使得 $\mathscr{B}=\lambda\mathscr{A}$.

证:

□

习题 7.6.8: 设 λ_1 是 n 阶实对称方阵 $S=(s_{ij})$ 的最大特征值. 证明: $\lambda_1\ge\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}s_{kl}$.

证:

□

习题 7.6.9: 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的自伴变换, V_0 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 证明: 存在向量 $\alpha_0\in V_0$, 使得

$$R(\alpha_0)=\min\{R(\alpha_0):\alpha\in V_0^*\}.$$

并且 $R(\alpha_0)$ 是自伴变换 $\mathscr{A}$ 的特征值, α_0 是属于特征值 $R(\alpha_0)$ 的特征向量.

☞ **证:**

□

习题 7.6.10: (Fischer) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的自伴变换 $\mathscr{A}$ 的特征值, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. 设 V_k 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 证明: 对 $k = 1, 2, \cdots, n$,

$$\lambda_{n+1-k} = \min_{V_k} \max \left\{ R(\alpha) : \alpha \in V_k^* \right\}.$$

☞ **证:**

□

习题 7.6.11: 设所有 n 维实行向量集合连同标准内积构成的 Euclid 空间记为 $\mathbb{R}^n$, A 是 n 阶实对称方阵. 定义方阵 A 的 Rayleigh 商 $R(x)$ 为 $R(x) = \frac{xAx^T}{xx^T}$, 其中 x 是 $\mathbb{R}^n$ 中非零行向量. 将关于自伴变换的定理 4 与定理 5 移到实对称方阵上.

☞ **证:**

□

习题 7.6.12: 设 $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ 是 n 阶实对称方阵 A 的所有特征值. 证明:

$$\sup_{X:k\times n} \frac{\lambda_k\left(XAX^T\right)}{\lambda_1\left(XX^T\right)} = \lambda_k(A), \quad \inf_{X:k\times n} \frac{\lambda_1\left(XAX^T\right)}{\lambda_k\left(XX^T\right)} = \lambda_{n+1-k}(A), \quad \forall k = 1, 2, \cdots, n.$$

☞ **证:** 我们得添加条件: A 为半正定方阵, 否则有反例: 取

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \\ & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 1 \end{pmatrix},$$

则有

$$XX^T = \begin{pmatrix} 4 & \\ & 1 \end{pmatrix}, XAX^T = \begin{pmatrix} 16 & \\ & -1 \end{pmatrix},$$

从而 $\frac{\lambda_2\left(XAX^T\right)}{\lambda_1\left(XX^T\right)} = -\frac{1}{4} > -1 = \lambda_2(A)$, 矛盾.

记 $A = O\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)O^T = ODO^T$, 其中 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n \geq 0$. 我们有

$$\sup_{X:k\times n} \frac{\lambda_k\left(XAX^T\right)}{\lambda_1\left(XX^T\right)} = \sup_{X:k\times n} \frac{\lambda_k\left(XODO^TX^T\right)}{\lambda_1\left(XOO^TX^T\right)} = \sup_{Y:k\times n} \frac{\lambda_k\left(YDY^T\right)}{\lambda_1\left(YY^T\right)} = \sup_{X:k\times n} \frac{\lambda_k\left(XDX^T\right)}{\lambda_1\left(XX^T\right)}.$$

取

$$\alpha_0 = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ \alpha \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{k.k-1} \end{pmatrix} = 0 \text{的非零解}, & 2 \leq k \leq n \end{cases}.$$

记 $\alpha_0=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$, 由 XX^T 半正定得 $\lambda_1(XX^T)>0$, 而

$$\begin{aligned}\lambda_k\left(XDX^T\right)&=\min_{\alpha}\frac{\alpha XDX^T\alpha^T}{\alpha\alpha^T}\leq\frac{\alpha_0XDX^T\alpha_0^T}{\alpha_0\alpha_0^T}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_iX_{ij}\right)^2}{\alpha_0\alpha_0^T}=\frac{\sum\limits_{j=k}^{n}\mu_j\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_iX_{ij}\right)^2}{\alpha_0\alpha_0^T}\\&\leq\mu_k\frac{\sum\limits_{j=k}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_iX_{ij}\right)^2}{\alpha_0\alpha_0^T}=\mu_k\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_iX_{ij}\right)^2}{\alpha_0\alpha_0^T}=\mu_k\frac{\alpha_0XX^T\alpha_0^T}{\alpha_0\alpha_0^T}\\&\leq\mu_k\max_{\alpha}\frac{\alpha XX^T\alpha^T}{\alpha\alpha^T}=\mu_k\lambda_1\left(XX^T\right),\end{aligned}$$

即

$$\frac{\lambda_k\left(XDX^T\right)}{\lambda_1\left(XX^T\right)}\leq\mu_k=\lambda_k\left(A\right)\Rightarrow\sup_{X:k\times n}\frac{\lambda_k\left(XDX^T\right)}{\lambda_1\left(XX^T\right)}\leq\lambda_k\left(A\right).$$

取 $X=(I_k,0)$, 记 $D_1=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k),D_2=\mathrm{diag}(\mu_{k+1},\mu_{k+2},\cdots,\mu_n)$, 则 $XDX^T=D_1,XX^T=I_k,\lambda_k\left(XDX^T\right)=\lambda_k\left(D_1\right)=\mu_k,\lambda_1\left(XX^T\right)=1$, 即 $\frac{\lambda_k\left(XDX^T\right)}{\lambda_1\left(XX^T\right)}=\mu_k=\lambda_k\left(A\right)$, 因此

$$\sup_{X:k\times n}\frac{\lambda_k\left(XAX^T\right)}{\lambda_1\left(XX^T\right)}=\lambda_k\left(A\right).$$

同理有

$$\inf_{X:k\times n}\frac{\lambda_1\left(XAX^T\right)}{\lambda_k\left(XX^T\right)}=\lambda_{n+1-k}\left(A\right).$$

□

7.7 正定对称方阵与矩阵的奇异值分解

7.7.1 习　题

为方便起见, 引用如下记号: $A>0$ 表示 A 是正定对称方阵; $A\geq0$ 表示 A 是半正定对称方阵; $A>B$ 表示对称方阵 A 与 B 之差 $A-B>0$; $A\geq B$ 表示对称方阵 A 与 B 之差 $A-B\geq0$.

习题 7.7.1: 设 A 与 B 是 n 阶方阵, $A\geq0,B\geq0$, 且 A^2 与 B^2 正交相似. 证明方阵 A 与 B 正交相似.

证:

□

习题 7.7.2: 设 S 是 n 阶对称方阵. 证明: 存在唯一的 n 阶对称方阵 S_1, 使得 $S=S_1^3$. 方阵 S_1 称为方阵 S 的立方根, 记为 $\sqrt[3]{S}$.

证:

□

习题 7.7.3: 设 $A>0,B>0$. 证明: AB 的所有特征值都是正的.

证:

□

习题 7.7.4: 设 $S > 0$. 证明: 存在可逆三角方阵 P, 使得 $S = P^T P$.

证:

□

习题 7.7.5: 设 n 阶方阵 $S \geq 0$, 且 $\operatorname{rank} S = 1$. 证明: 存在非零行向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $S = x^T x$.

证:

□

习题 7.7.6: 设 n 阶对称方阵 S 的前 $n-1$ 个顺序主子式

$$S\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1,$$

且 $\det S \geq 0$. 证明: $S \geq 0$.

证:

□

习题 7.7.7: 设 $A \geq 0, B \geq 0$. 证明: $\det(A+B) \geq \det A + \det B$.

证:

□

习题 7.7.8: 设 $S \geq 0$. 证明:

$$\det S \leq S\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} (k+1) & (k+2) & \cdots & n \\ (k+1) & (k+2) & \cdots & n \end{pmatrix},$$

其中 $k = 1, 2, \cdots, n$.

证:

□

习题 7.7.9: 设 $S = (a_{ij})_{n \times n} \geq 0$. 证明:

$$\det S \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

并且等号当且仅当方阵 S 为对角方阵时成立.

证:

□

习题 7.7.10: (Hadamard 不等式) 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵. 证明:

$$\det A \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2},$$

其中等式当且仅当方阵 A 的 n 个列向量两两正交时成立.

证:

□

习题 7.7.11: 设 S_1 与 S_2 是 n 阶对称方阵, $S_1 \geq 0$, 且 $\det(S_1 + \mathrm{i}S_2) = 0$, 其中 $\mathrm{i}^2 = -1$. 证明: 存在非零实的行向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $x(S_1 + \mathrm{i}S_2) = 0$.

证:

□

习题 7.7.12: 设 $S > 0$. 证明: 对任意实的行向量 x 与 y,

$$\left(xSy^T\right)^2 \leq \left(xSx^T\right)\left(ySy^T\right),$$

其中等式当且仅当向量 x 与 y 线性相关时成立.

证:

□

习题 7.7.13: 设 n 阶实方阵 A 的极分解唯一. 证明: 方阵 A 可逆.

证:

□

习题 7.7.14: 证明: n 阶实方阵 A 规范的充分必要条件是, 方阵 A 具有极分解 $A = SO = OS$, 其中 $S \geq 0$, O 为正交方阵.

证:

□

习题 7.7.15: 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的线性变换. 证明: 存在 V 的部分正交变换 $\mathscr{B}$ 和半正定自伴变换 $\mathscr{C}$, 其中 $\operatorname{Ker}\mathscr{B} = \operatorname{Ker}\mathscr{C}$, 使得 $\mathscr{A} = \mathscr{B}\mathscr{C}$, 并且变换 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{C}$ 是唯一的; 证明线性变换 $\mathscr{A}$ 规范的充分必要条件是, 变换 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{C}$ 可交换.

证:

□

习题 7.7.16: 证明: 任意 N 阶实方阵都可以分解为三个 n 阶实对称方阵的乘积.

证:

□

习题 7.7.17: 设 A 与 B 是 $m \times n$ 实矩阵. 证明: $AA^T = BB^T$ 的充分必要条件是 $A = BO$, 其中 O 是某个 n 阶正交方阵.

证:

□

习题 7.7.18: 证明: 实方阵 A 的所有奇异值恰是所有非零特征值的充分必要条件是 $A \geq 0$.

证:

□

习题 7.7.19: 设 $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_r(A)$ 是 n 阶实对称方阵 A 的所有奇异值. 证明:

$$\sigma_k(A) = \sup_{X:k\times n} \frac{\sigma_k(XA)}{\sigma_1(X)}, \quad \sigma_{n+1-k}(A) = \inf_{X:k\times n} \frac{\sigma_1(XA)}{\sigma_k(X)}, \quad \forall k = 1, 2, \cdots, r.$$

证:

□

7.8 方阵的正交相似

7.8.1 习　题

习题 7.8.1: 设 λ 是 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值. 记 $a = \max\{|a_{ij}| : 1 \le i,j \le n\}$. 利用 Schur 定理, 证明: $|\lambda| \le na$.

证:

□

习题 7.8.2: 设 $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \cdots, \lambda_n(A)$ 是 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值. 证明 Schur 不等式:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\operatorname{Re}\left(\lambda_j(A)\right)\right)^2 \le \sum_{1 \le i,j \le n} \left|\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right|^2;$$
$$\sum_{j=1}^{n} \left(\operatorname{Im}\left(\lambda_j(A)\right)\right)^2 \le \sum_{1 \le i,j \le n} \left|\frac{a_{ij}-a_{ji}}{2}\right|^2.$$

证:

□

7.9 一些例子

先介绍三个引理:

引理 7.1

AB 的非零特征值和 BA 的一样, 且重数也一样. 如果 A, B 都是方阵那么全体特征值都一样.

引理 7.2

$A > 0, B > 0, AB = BA$ 那么 $AB > 0$. (因为由上,AB 特征值和 $\sqrt{A}B\sqrt{A}$ 的一样, 所以都是正的. 且 $AB = BA$ 表明 AB 实对称, 所以正定.)

引理 7.3

$A \ge 0, B > 0, AB = BA$ 那么 $AB \ge 0$. (类似 2)

7.9.1 习　　题

习题 7.9.1: 设 $A>0$, 且 $\exists k\in\mathbb{Z}_+$ 使得方阵 B 与 A 的 k 次幂可交换. 证明方阵 B 与 A 可交换.

证: 设 $A=ODO^T$, 其中 $D=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n), a_i>0$. 则由题有 $BA^k=A^kB$. 而

$$\begin{aligned} BA^k=A^kB \quad &\Leftrightarrow \quad BOD^kO^T=OD^kO^TB \\ &\Leftrightarrow \quad O^TBOD^k=D^kO^TBO \\ &\overset{D=\mathrm{diag}}{\Leftrightarrow} \quad O^TBOD=DO^TBO \\ &\Leftrightarrow \quad BODO^T=ODO^TB \\ &\Leftrightarrow \quad BA=AB \end{aligned}$$

得证. □

习题 7.9.2: 设 $A>0, B$ 是对称阵. 求证多项式 $\det(\lambda A-B)$ 的根都是实数.

证: 设 $P=\sqrt{A}^{-1}, P^TAP=I$. 于是

$$\det(\lambda A-B)=\det(\lambda I-P^TBP)\det(A)$$

然而 P^TBP 是对称矩阵, 故 $\det(\lambda I-P^TBP)$ 的根都是实数. 得证. □

习题 7.9.3: 设 n 阶方阵 $A>0, B$ 是 $n\times m$ 列满秩矩阵. 求 $n+m$ 阶方阵 $C=\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ 的逆.

解: 注意到

$$M=\begin{pmatrix} A^{-1}-A^{-1}B(B^TA^{-1}B)^{-1}B^TA^{-1} & A^{-1}B(B^TA^{-1}B)^{-1} \\ (B^TA^{-1}B)^{-1}B^TA^{-1} & -(B^TA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

满足 $MC=CM=I$. 即得. □

习题 7.9.4: $A>0, B>0, AB=BA$. 求证 $AB>0$.

证: 由 $AB=BA=B^TA^T=(AB)^T$ 故 A,B 实对称. 又

$$\det(\lambda I-AB)=\det(\lambda I-\sqrt{A}B\sqrt{A})$$

, 而 $\sqrt{A}B\sqrt{A}$ 正定, 故 AB 特征值全正, 故 $AB>0$. 得证. □

习题 7.9.5: 设 n 阶实方阵 A 的顺序主子式都非零. 证明: 存在对角元全为 1 的下三角方阵 P,Q 使得 $A=P\,\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)Q^T$. 其中

$$d_k=\frac{A\begin{pmatrix} 1 & \ldots & k \\ 1 & \ldots & k \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1 & \ldots & (k-1) \\ 1 & \ldots & (k-1) \end{pmatrix}}$$

以上, 约 $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=1$

证: 对 n 执行数学归纳法.$n=1$ 时显然. 若 $n=m_0$ 时成立, 则 $n=m_0+1$ 时:

设 A_1 是 A 的前 m_0 行 m_0 列,A_1 的顺序主子式均不为 0. 对 A_1 使用归纳假设, 设 m_0 阶对角元全为 1 的下三角方阵 P,Q 使得 $A_1=P\operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_n)Q^T$. 也即:

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & \alpha \\ \beta^T & c \end{pmatrix}$$

其中 $D=\operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_{m_0}),d_k=\dfrac{A\begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1 & \dots & (k-1) \\ 1 & \dots & (k-1) \end{pmatrix}}$. 由条件,$d_k\neq 0(k\in(0,m_0]\cap\mathbb{Z})$. 于是 D 可逆.

设 $P_1=\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\beta^T D^{-1} & 1 \end{pmatrix}P,Q_1=\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\alpha^T D^{-T} & 1 \end{pmatrix}Q$ 则计算得:

$$P_1AQ_1^T=\operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_{m_0},c')$$

. 再考虑行列式, 有:(由于 P_1,Q_1 是下三角)

$$c'=\frac{A\begin{pmatrix} 1 & \dots & m_0+1 \\ 1 & \dots & m_0+1 \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1 & \dots & m_0 \\ 1 & \dots & m_0 \end{pmatrix}}=d_{m_0+1}.$$

完成归纳. 得证. □

习题 7.9.6: 设 n 阶对称方阵 $A>0$. 证明: 对任意行向量 $x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$xAx^T+yA^{-1}y^T\geq 2xy^T.$$

证: 设 $A=ODO^T,xO=x'=(x_1,\cdots,x_n),yO=y'=(y_1,\cdots,y_n)$, 其中

$D=\operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_n),a_k>0$. 则原式 $\Leftrightarrow x'Dx'^T+y'D^{-1}y'^T\geq 2x'y'^T$. 注意到:
上式左边减右边 $=\sum_{k=1}^n(x_k\sqrt{a_k}-y_k/\sqrt{a_k})^2\geq 0$. 得证.
取等 $\Leftrightarrow x'\sqrt{D}=y\sqrt{D^{-1}}\Leftrightarrow x'D=y'\Leftrightarrow xA=y$. □

习题 7.9.7: 求证对任意非零行向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 有:

$$f(x)=\sum_{j=1}^n x_j^2-\sum_{j=1}^{n-1}x_jx_{j+1}>0$$

并求 f 的下确界和 $f|_{x_n=1}$ 的最小值.

证: f 下确界显然是 0.

通过求多元函数极值的方法知道 $f|_{x_n=1}$ 的最小值是 $\frac{n+1}{2n}(@x_k=\frac{k}{n})$. □

习题 7.9.8: 设 n 阶方阵 $A>0$. 证明:$\{x\in\mathbb{R}^n|xAx^T\leq 1\}$ 是有界的, 并且体积为

$$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\sqrt{\det A}}.$$

☞ 证: 利用代换 $x' = x\sqrt{A}$ 即可. □

习题 7.9.9: 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})>0, B=(b_{ij})>0$. 求证:$A$和$B$ 的哈达玛乘积

$$A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$$

正定.

☞ 证: 设 $S=(s_{ij})=\sqrt{B}>0$. 那么对任何 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 有:

$$x(A\circ B)x^T = \sum_{t=1}^{n}(x_1s_{1t},\cdots,x_ns_{nt})A(x_1s_{1t},\cdots,x_ns_{nt})^T \geq 0$$

故而 $A\circ B$ 半正定 (实对称是显然). 又上式取等等价于 $\forall t,i: x_is_{it}=0$. 这将导致 $xBx^T=0, x=0$. 故 $A\circ B$ 是正定的. □

习题 7.9.10: n 阶方阵 A,B,C 满足 $A\leq B, C>0, AC=CA, BC=CB$. 求证 $AC\leq BC$.

☞ 证: 设 $S=B-A\geq 0$, 则 $SC=CS$. 又 $C>0$, 故 $SC\geq 0, AC\leq BC$. □

习题 7.9.11: (加强版)n 阶方阵 A,B 满足 $0\leq A\leq B$. 求证:$\det A+\det(B-A)\leq \det B$.

☞ 证: 若 $\det B>0$, 设 $Q=\sqrt{B}^{-1}$. 则 $QBQ^T=I, QAQ^T$ 半正定. 故可再设正交矩阵 O 使得

$$OQAQ^TO^T = D = \mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n), a_k\geq 0$$

.

设 $P=OQ$ 则 $PBP^T=I, PAP^T=D$. 则对任何 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 有:

$$xIx^T = xPBP^Tx^T = (xP)B(xP)^T \geq (xP)A(xP)^T = x(PAP^T)x^T$$

这将导致

$$x(I-D)x^T\geq 0$$

故 $I\geq D$, 从而 $a_k\leq 1$

从而 $\det A+\det(B-A)\leq\det B \Leftrightarrow \det(PAP^T)+\det(P(B-A)P^T)\leq\det(PBP^T) \Leftrightarrow 1\geq\prod_{k=1}^n a_k+\prod_{k=1}^n(1-a_k) \Leftarrow 1\geq\prod_{k=1}^n(a_k+(1-a_k))$. 这显见成立. 于是此时得证.

若 $\det B=0$. 那么首先, 对任何 $\varepsilon>0, \varepsilon I+B$ 是正定的, 且显然 $\varepsilon I+B\geq A$. 于是由上,$\det(\varepsilon I+B)\geq\det A+\det(\varepsilon I+B-A)$. 令 $\varepsilon\to 0$, 即证.

证毕. □

习题 7.9.12: 设 n 阶方阵 A,B 满足 $0<A\leq B$, 求证 $A^{-1}\geq B^{-1}$.

☞ 证: $B\geq A\Rightarrow\sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}\geq I\Rightarrow\sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}-I$特征值全非负 $\Rightarrow\sqrt{A}(\sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}-I)\sqrt{A^{-1}}$特征值全非负 $\Rightarrow BA^{-1}-I$特征值全非负 $\Rightarrow\sqrt{B^{-1}}(B\sqrt{A^{-1}}-I)\sqrt{B}$特征值全非负 $\Rightarrow\sqrt{B^{-1}}(B\sqrt{A^{-1}}-I)\sqrt{B}\geq 0\Rightarrow\sqrt{B}(\sqrt{A^{-1}})\sqrt{B}\geq I\Rightarrow A^{-1}\geq B^{-1}$. □

习题 7.9.13: 设 n 阶方阵 A,B 满足 $0\leq A\leq B$, 求证 $\sqrt{A}\leq\sqrt{B}$.

☞ 证: 先考虑 $B>0$ 的情况, 此时注意到

$$(\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A})\text{和}\sqrt{(\sqrt{B}-\sqrt{A})}(\sqrt{B}+\sqrt{A})\sqrt{(\sqrt{B}-\sqrt{A})}$$

特征值相同, 而后者是实对称矩阵, 特征值都是实数. 故 $(\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A})$ 特征值都是实数.

又注意到

$$(\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A})+((\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A}))^T=2(B-A)\geq 0$$

故 $(\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A})$ 只有非负特征值.(否则设非零向量 $\alpha\in\mathbb{R}:(\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A})\alpha=\lambda\alpha,\lambda<0.$, 那么 $\alpha^T(\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A})\alpha=\lambda\alpha^T\alpha<0$, 故

$$\alpha^T((\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A})+((\sqrt{B}-\sqrt{A})(\sqrt{B}+\sqrt{A}))^T)\alpha<0$$

故 $\alpha^T(2(B-A))\alpha<0$, 这不科学.)

从而 $\sqrt{(\sqrt{B}+\sqrt{A})}(\sqrt{B}-\sqrt{A})\sqrt{(\sqrt{B}+\sqrt{A})}$ 特征值全非负, 从而半正定. 因此

$$(\sqrt{B}-\sqrt{A})=\sqrt{(\sqrt{B}+\sqrt{A})}^{-1}\sqrt{(\sqrt{B}+\sqrt{A})}(\sqrt{B}-\sqrt{A})\sqrt{(\sqrt{B}+\sqrt{A})}\sqrt{(\sqrt{B}+\sqrt{A})}^{-1}\geq 0$$

对于 $B\geq 0$, 此时对任何 $\varepsilon>0,\sqrt{B}+\varepsilon I>0$. 又 $B+2\varepsilon\sqrt{B}+\varepsilon^2 I\geq A$, 由前面的结论, 有 $\sqrt{B}+\varepsilon I=\sqrt{B+2\varepsilon\sqrt{B}+\varepsilon^2 I}\geq\sqrt{A}$. 也就是说

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\varepsilon>0,x(\sqrt{B}+\varepsilon I)x^T\geq x\sqrt{A}x^T$$

令 $\varepsilon\to 0$ 得

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,x(\sqrt{B})x^T\geq x\sqrt{A}x^T$$

. 此即 $\sqrt{A}\leq\sqrt{B}$, 得证. □

习题 7.9.14: 设 A 是 n 阶对称方阵. 记 $|A|=\sqrt{A^2},A_+=(|A|+A)/2,A_-=(|A|-A)/2$. 求证:

(1) **$|A|$ 满足 $A\leq|A|,-A\leq|A|,A|A|=|A|A$. 且若方阵 B 满足 $A\leq B,-A\leq B,AB=BA$, 则 $|A|\leq B$.**
(2) **A_+ 满足 $A\leq A_+,AA_+=A_+A$ 且半正定. 且若半正定方阵 B 满足 $A\leq B,AB=BA$, 则**
$A_+\leq B$.
(3) **A_- 满足 $-A\leq A_-,AA_-=A_-A$ 且半正定. 且若半正定方阵 B 满足 $-A\leq B,AB=BA$, 则 $A_-\leq B$.**
(4) **若对称方阵 B 满足 $AB=BA$, 则存在方阵 C 满足:$A\leq C,B\leq C,AC=CA,BC=CB$ 且若有方阵 C' 满足 $A\leq C',B\leq C',AC'=C'A,BC'=C'B$ 则 $C\leq C'$.**

证: 设 $A=ODO^T$, 其中 O 正交,$D=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$. 则

$$-A=O(-D)O^T,|A|=O\mathrm{diag}(|a_1|,\cdots,|a_n|)O^T$$

. 且 $\mathrm{diag}(|a_1|,\cdots,|a_n|)$ 为 $|D|$.

(1)

$$|A|A = O(D|D|)O^T \overset{D=\text{diag}}{=} O(|D|D)O^T = A|A|$$

.

$$|A| - A = O\text{diag}(1-\text{sgn}(a_1))|a_1|, \cdots, (1-\text{sgn}(a_n))|a_n| \geq 0$$

,

$$|A| + A = O\text{diag}(1+\text{sgn}(a_1))|a_1|, \cdots, (1+\text{sgn}(a_n))|a_n| \geq 0$$

若有方阵 B 满足 $A \leq B, -A \leq B, AB = BA$, 则设 $O^TBO = C$, 只需证" 若 $D \leq C, -D \leq C, CD = DC$ 则 $|D| \leq C$" 成立.

此时 $0 = (D-D)/2 \leq (C+C)/2 = C$, 从而 $C = \sqrt{C^2}$. 故欲证 $C \geq |D|$, 由上一大题有只需证 $C^2 \geq D^2$. 这等价于 (由 $CD = DC$)

$$(C+D)(C-D) \geq 0$$

这等价于 $\sqrt{C+D}(C-D)\sqrt{C+D} \geq 0$, 等价于 $C - D \geq 0$. 此即证.

(2),(3) 与 (1) 类似.

(4) 取 $C = (A + B + |B - A|)/2$ 即得.

□

习题 7.9.15: 设 S_1, S_2 是两个半正定 n 阶方阵, 则它们可被同时相合到对角矩阵.

证: 显然 $S_1 + S_2$ 半正定. 设 $\text{rank}(S_1 + S_2) = r$, 不妨 $r \geq 1$($r = 0$ 将导致 $S_1 = S_2 = 0$, 此时显然). 设 $O(S_1+S_2)O^T = \begin{pmatrix} D_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $D = \text{diag}(d_1, \cdots, d_r) > 0, O$ 正交.

设 $P = \begin{pmatrix} \sqrt{D_{r\times r}}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} O$, 则 $P(S_1+S_2)P^T = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 再设

$$PS_1P^T = \begin{pmatrix} P_{1(r\times r)} & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{pmatrix},$$

则

$$PS_2P^T = \begin{pmatrix} I_r - P_1 & -P_2 \\ -P_2^T & -P_3 \end{pmatrix},$$

因为 $S_2 \geq 0$, 所以 $PS_2P^T \geq 0$, 所以 $-P_3 \geq 0$.

因为 $S_1 \geq 0$, 所以 $PS_1P^T \geq 0$, 所以 $P_3 \geq 0$.

所以 P_3 的特征值既全非正, 又全非负, 只好全是 0, 于是 $P_3 = 0$. 也就是说 $0 \leq S_1' = PS_1P^T = \begin{pmatrix} P_{1(r\times r)} & P_2 \\ P_2^T & 0 \end{pmatrix}$. 从而 $S_1' \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} \geq 0$ 对任何 $i \neq j$ 全成立.

这将导致 $P_2 = 0$. 从而 $PS_1P^T = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

再设正交矩阵 $O_1 : O_1P_1O_1^T = D_1, D_1$ 是对角阵.

最后, 设 $Q = \begin{pmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} P$, 则 $QS_1Q^T = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 对角,$QS_2Q^T = \begin{pmatrix} I_r - D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 也对角. 显然 Q 可逆. 即证. □

习题 7.9.16: 若 $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0, xAx^T > 0$, 则称 A 是广义正定的.
设 $S = (A + A^T)/2, K = (A - A^T)/2$.

(1) A 广义正定等价于 S 正定.
(2) 设 $f_A(\lambda) = \det(\lambda S - K)$. 求证如果 A 广义正定那么 f_A 的根除了零就是纯虚数.
(3) 设 A 广义正定, 且 f_A 所有非零的根是 $\pm a_1, \cdots, \pm a_s$, 其中 $a_1 \geq \cdots \geq a_s > 0$, 是虚数单位. 则 A 相合于如下的准对角方阵

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 & a_s \\ -a_s & 1 \end{pmatrix}, I_{n-2s}\right)$$

并且 f_A 的根是广义正定方阵在相合下的全系不变量.

证:

(1) $xAx^T = x(S+K)x^T = xSx^T$. 即证.
(2) 设 $OSO^T = D = \operatorname{diag}\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_k > 0$, 其中 O 正交. 再设 $P = O\sqrt{D^{-1}}$. 那么

$$PSP^T = I$$

设 $K_1 = PKP^T$, 则 $K_1^T = -K_1, K_1$ 反对称. 又 $\det(\lambda S - K) = \det(S)\det(\lambda I - K_1)$, 故 $\det(\lambda S - K)$ 的根不是零就是纯虚数且正是 $K_1 = PKP^T$ 的特征值.
(3) 由 K_1 反对称, 存在正交矩阵 O_1 :

$$O_1 K_1 O_1^T = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ -k_1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & k_t \\ -k_t & 0 \end{pmatrix}, 0_{(n-2t)\times(n-2t)}\right)$$

其中 k_j 全正，从大到小.
又 f_A 的根正是 K_1 的特征值, 故 $s = t, k_j = a_j$, 所以 $(O_1P)A(O_1P)^T = (O_1P)(S + K)(O_1P)^T = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 & a_s \\ -a_s & 1 \end{pmatrix}, I_{n-2s}\right)$.
如果 $B = QAQ^T, Q$ 可逆, 那么设 $S_B = (B + B^T)/2, K_B = (B - B^T)/2, \det(\lambda S_B - K_B) = \det(Q)\det(\lambda S - K)\det(Q^T)$, 确实有 f_B 的根和 f_A 的根. 若有 $C : f_C = f_A$ 那么它们都相合于 $\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 & a_s \\ -a_s & 1 \end{pmatrix}, I_{n-2s}\right)$, 从而相合.

□

习题 7.9.17: 设 μ 是实数,C 是 n 阶实方阵, 且 $A = \mu I + C$ 满足 $AA^T = I = A^TA$, 其中 $^2 = -1$. 证明 $C^T = -C$ 且

(1) 若 $\operatorname{rank}C < n$ 则 $A = \pm I$.
(2) 若 $\operatorname{rank}C = n$ 则 n 是偶数且存在 n 阶实正交方阵 O:

$$O^TAO = \operatorname{diag}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} \mu & \sqrt{\mu^2-1} \\ -\sqrt{\mu^2-1} & \mu \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \mu & \sqrt{\mu^2-1} \\ -\sqrt{\mu^2-1} & \mu \end{pmatrix}}_{n/2\text{个}}\right).$$

证: 由 $AA^T=A^TA=I$ 有:$CC^T=C^TC,\mu(C+C^T)=0,\mu^2I-CC^T=I$. 于是:$n\mu^2=\operatorname{tr}(\mu^2I)=\operatorname{tr}(CC^T+I)\geq n,\mu^2\geq 1$. 进而 $C+C^T=0$.

由 C 反对称, 设正交矩阵 O 使得

$$O^TCO=\operatorname{diag}(\operatorname*{diag}_{1\geq l\geq r,b_l\neq 0,\text{可能是空矩阵(大小为零)}}\begin{pmatrix}0&b_l\\-b_l&0\end{pmatrix},\operatorname*{diag}_{l\geq 2r+1,\lambda_l\in\mathbb{R}}(\lambda_l))$$

记 $D=O^TCO$.

(1) 此时 C 有特征值 0, 故 $\exists l_0:\lambda_{l_0}=0$. 又易得 $\mu^2I=DD^T+I$, 考虑 l_0,l_0 位, 有 $\mu^2=1$. 于是 $I=\mu^2I=DD^T+I$,$\operatorname{tr}DD^T=0$, 故 $D=0,C=0,A=\pm I$.

(2) 此时 C 没有零特征值且 $D+D^T=0$. 故 D 的第二项是空的, 从而 n 是偶数. 又 $\mu^2I=DD^T+I$, 于是

$$D=\operatorname{diag}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0&\sqrt{\mu^2-1}\\-\sqrt{\mu^2-1}&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&\sqrt{\mu^2-1}\\-\sqrt{\mu^2-1}&0\end{pmatrix}}_{n/2\text{个}}\right)$$

, 从而 O^TAO 即有所需形式. 证毕.

$\square$

习题 7.9.18: 设 $A=B+C$, 使得 $AA^T=A^TA=I$, 其中 $^2=-1,B,C$ 是 n 阶实方阵. 证明,A 正交相抵于

$$\operatorname{diag}\left(I_{n-2t},\begin{pmatrix}\mu_1&\sqrt{\mu_1^2-1}\\-\sqrt{\mu_1^2-1}&-\mu_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\mu_t&\sqrt{\mu_t^2-1}\\-\sqrt{\mu_t^2-1}&-\mu_t\end{pmatrix}\right)$$

其中 $\operatorname{rank}C=2t,\mu_k$ 是方阵 B 所有大于 1 的奇异值, 且 1 是方阵 B 的 $n-2t$ 重奇异值.

证: 对 B 发动奇异值分解. 设 $O_1'BO_2'=\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1I_{m_1},\cdots,\lambda_kI_{m_k})$, 其中 O_1',O_2' 是正交矩阵,λ_j 按从大到小,m_j 是对应奇异值的重数. 再设 $A'=O_1'AO_2',D=O_1'CO_2'$. 由 $AA^T=I=A^TA$ 得:$\Lambda-DD^T=I,DD^T=D^TD,\Lambda D^T+D\Lambda=0,\Lambda D+D^T\Lambda=0$

首先根据 $\Lambda-DD^T=I$ 有 $\lambda_j\geq 1$. 故 Λ 可逆.

注意到 $0=\Lambda(\Lambda D^T+D\Lambda)-(\Lambda D+D^T\Lambda)\Lambda=\Lambda^2D^T-D^T\Lambda^2$ 以及 Λ 是对角阵, 有:

$$\Lambda D^T=D^T\lambda$$

从而 $0=\Lambda D+D^T\Lambda=\Lambda(D+D^T),D+D^T=0$. 将 D 依照 Λ 的方式分块, 代入 $\Lambda D^T+D\Lambda=0$, 并依照 $D+D^T=0$, 得到

$$D=\operatorname{diag}(H_1,\cdots,H_k),\text{其中} H_j+H_j^T=0$$

故再设 $O_jH_jO_j^T=\operatorname*{diag}_l\left(\begin{pmatrix}0&h_{jl}\\-h_{jl}&0\end{pmatrix}\right)$, 其中 O_j 是正交矩阵. 设 $O=\operatorname{diag}(O_1,\cdots,_k)$, 那么 O 也正交. 并且注意到 $O\Lambda O^T=\Lambda$. 设 $D'=ODO^T,O_3=OO_1',O_4=O_2'O^T$ 那么有:

$$O_3AO_4=\operatorname*{diag}_l\left(\begin{pmatrix}\lambda_j&h_{jl}\\-h_{jl}&\lambda_j\end{pmatrix}\right)$$

又根据 $AA^T = A^TA = I$, 有 $(O_3AO_4)(O_3AO_4)^T = (O_3AO_4)^T(O_3AO_4) = I$. 代入, 并注意 $\lambda \geq 1$, 即得证. □

习题 7.9.19: 称复方阵 A_1, A_2 实正交相抵, 如果存在实正交方阵 O_1, O_2 使得 $A_2 = O_1A_1O_2$. 称复方阵 A 为复正交方阵, 如果 $AA^T = A^TA = I$. 证明: 复正交方阵的实部的奇异值是复正交方阵正交相抵下的全系不变量.

证: 若复正交方阵 A_1, A_2 实部奇异值一样, 根据上一题, 它们实正交相抵于同一个矩阵, 因此它们实正交相抵.

若复正交方阵 A_1, A_2 实实正交相抵, 显然它们实部奇异值相同. 得证. □

习题 7.9.20: 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 从大到小依次是 n 阶半正定对称方阵 A 的全体特征值. 如果 A 每一列的元素都是零和, 求证: $\lambda_{n-1} \leq \frac{n}{n-1}\min\{a_{jj} : 1 \leq j \leq n\}$.

证: 由 $A \geq 0$, 可设 $x_i \in \mathbb{R}^n$ 使得 $Ax_i^T = \lambda_i x_i^T$ 且它们线性无关, 且 $x_ix_j^T = \delta_{ij}$, 其中 δ_{ij} 当 $i = j$ 时为 1, 其余时候为 0. 设 J 是每个元素都是 1 的 n 阶方阵.

由于 A 对称, 故其每一行也是零和, 从而 $A(1, \cdots, 1)^T = 0$. 又 $A \geq 0$ 从而 $\lambda_n = 0$.

$\forall \alpha \in \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$, 设 $\alpha = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j x_j$. 那么,

$$\alpha A \alpha^T = \sum i = 1^{n-1}\lambda_i\alpha_i^2 \geq \lambda_{n-1}\sum i = 1^{n-1}\alpha_i^2 = \lambda_{n-1}\alpha\alpha^T$$

故 $\alpha(A - \lambda_{n-1}(I - \frac{1}{n}J)\alpha^T \geq 0$.

显然 $(1, \cdots, 1)(A - \lambda_{n-1}(I - \frac{1}{n}J)(1, \cdots, 1)^T = 0$.

如果 A 属于 0 的特征子空间是不少于 2 维, 那么 $\lambda_{n-1} = 0$. 又 $a_{jj} \geq 0$, 故此时原题显然成立.

否则,A 属于 0 的特征子空间是 1 维,$x_n = c(1, \cdots, 1), c \neq 0$. 从而 $\forall \beta \in \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\} = \mathbb{R}^n$, 设 $\beta = \alpha + t(1, \cdots, 1), \alpha \in \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$. 那么

$$\begin{aligned}\beta(A - \lambda_{n-1}(I - \frac{1}{n}J)\beta^T &= \alpha(A - \lambda_{n-1}(I - \frac{1}{n}J)\alpha^T + t^2(1, \cdots, 1)(A - \lambda_{n-1}(I - \frac{1}{n}J)(1, \cdots, 1) \\ &\quad + \alpha(A - \lambda_{n-1}(I - \frac{1}{n}J)(1, \cdots, 1)^T + (1, \cdots, 1)(A - \lambda_{n-1}(I - \frac{1}{n}J)\alpha^T \\ &= \alpha(A - \lambda_{n-1}(I - \frac{1}{n}J)\alpha^T\end{aligned}$$

所以 $\forall \beta, \beta(A - \lambda_{n-1}(I - \frac{1}{n}J)\beta^T \geq 0$.

从而 $P = A - \lambda_{n-1}(I - \frac{1}{n}J) \geq 0$. 于是 P 的对角元都非负, 这就得到

$$a_{jj} \geq \lambda_{n-1}(1 - 1/n), \forall j.$$

这就得到了证明. □

习题 7.9.21: 设 $A > 0$, 求证:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-xAx^T} dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

证: 做代换 $y = x\sqrt{A}$ 即得. □

习题 7.9.22: 设 $A>0, B=B^T$ 是实矩阵, 求证:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x(A+B)x^T}dx=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A+B)}}.$$

证: 类似上一题. □

习题 7.9.23: 设 $A>0, B=B^T$ 是实矩阵, 求证:$|\det(A+B)|\geq \det A$.

证: 设 $P=\sqrt{A^{-1}}, P^TAP=I$, 注意到 P^TBP 是实对称矩阵, 于是存在正交矩阵 O:

$$D=O^TP^TBPO$$

是某个对角阵. 显然 $O^TP^TAPO=I$.

于是 $|\det(A+B)|=|\det(I+D)|/(\det OP)^2\geq|\det(I)|/(\det P)^2=\det A$. 得证. □

习题 7.9.24: 设 $A>0$ 是实矩阵,A_i 是 A 去掉第 i 行 i 列以后的矩阵. 设 $Q(x)=xAx^T$, 求证

$$\min Q|_{x_i=1}=\det A/\det A_i$$

其中 $x\in\mathbb{R}$.

证: 当 $i=1$ 时, 设 $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b^T & A_1\end{pmatrix}$. 再设 $P=\sqrt{A_1^{-1}}, bP=c=(c_1,\cdots,c_{n-1}$. 那么,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & P^T\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c\\ c^T & I\end{pmatrix}$$

把上面矩阵记作 B. 由 $A>0, a>0$. 于是

$$\frac{\det A}{\det A_i}=\frac{\det B/(\det P)^2}{1/(\det P)^2}=\det B=\det B\det\begin{pmatrix} 1 & -a^{-1}c\\ 0 & I\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} a & 0\\ c^T & I-a^{-1}cc^T\end{pmatrix}$$

故 $\frac{\det A}{\det A_i}=a-cc^T$.

而

$$\begin{aligned}\min_{x_1=1}xAx^T&=\min_{x_1=1}x\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & P^T\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}x^T\\ &=\min_{x_1=1}x\begin{pmatrix} a & c\\ c^T & I\end{pmatrix}x^T\\ &=\min_{x_1=1}\left(a-cc^T+\sum_{j=1}^{n-1}(x_{j+1}-c_j)^2\right)\\ &=a-cc^T\\ &=\frac{\det A}{\det A_i}.\end{aligned}$$

于是 $i=1$ 时得证.

对于其他情况, 利用 $T_{i1}=I-E_{ii}-E_{11}+E_{1i}+E_{i1}$ 变成 $i=1$ 的情况. 得证. □

习题 7.9.25: 设 $A>0, B>0$,A_i, B_i 分别是 A, B 弃掉第 i 行 i 列的子式. 求证:

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_i+B_i)}\geq\frac{\det A}{\det A_i}+\frac{\det B}{\det B_i}.$$

☞ 证: 根据上一题,

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_i+B_i)}=\min_{x_i=1}x(A+B)x^T\geq\min_{x_i=1}xAx^T+\min_{x_i=1}xBx^T=\frac{\det A}{\det A_i}+\frac{\det B}{\det B_i}$$

得证. □

习题 7.9.26: 设 $A>0$. 求证:

$$\min_B\left\{\frac{1}{n}\mathrm{tr}(AB):B>0,\det B=1\right\}=\sqrt[n]{\det(A)}.$$

☞ 证: 设 $A=ODO^T$, 其中 O 正交,$D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n),d_k>0$. 那么:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathrm{tr}(AB) &= \frac{1}{n}\mathrm{tr}(ODO^TB)\\ &= \frac{1}{n}\mathrm{tr}(DO^TBO)\\ &\underset{O^TBO=(c_{ij})}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_ic_{ii}\\ &\underset{AM-GM}{\geq} \prod_{i=1}^n d_i^{1/n}c_ii^{1/n}\\ &\underset{\text{习题}7.7.9}{\geq} \prod_{i=1}^n d_i^{1/n}(\det C)^{1/n}\\ &= (\det A)^{1/n}\end{aligned}$$

即证. □

习题 7.9.27: $A>0,B>0$. 求证: $\sqrt[n]{\det(A+B)}\geq\sqrt[n]{\det A}+\sqrt[n]{\det B}$.

☞ 证: 由上一题,

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\det(A+B)} &= \frac{1}{n}\min_{C>0,\det C=1}(\mathrm{tr}((A+B)C))\\ &\geq \frac{1}{n}\min_{C>0,\det C=1}(\mathrm{tr}(AC))+\frac{1}{n}\min_{C>0,\det C=1}(\mathrm{tr}(BC))\\ &= \sqrt[n]{\det A}+\sqrt[n]{\det B}\end{aligned}$$

即证. □

习题 7.9.28: 设 $\lambda_k(A)$ 是指实方阵 A 的第 k 大特征值 (计重). 求证:

(1) 如果实数 $a\in[0,1]$,A,B 为 n 阶实对称方阵, 则

$$\lambda_1(aA+(1-a)B)\leq a\lambda_1(A)+(1-a)\lambda_1(B),\lambda_n(aA+(1-a)B)\geq a\lambda_n(A)+(1-a)\lambda_n(B)$$

(2) 如果更有 $B\geq 0$, 那么 $\lambda_1(A+B)\geq\lambda_1(A),\lambda_n(A+B)\geq\lambda_n(A)$.

☞ 证: 由 Rayleigh 商定理, 本题显见成立. □

7.10 Euclid 空间的同构

第 8 章 酉空间

8.1 酉空间的概念

8.1.1 习　　题

习题 8.1.1: 设 a, b, c, d 是复数, $\mathbb{C}^2$ 是 2 维复的行向量空间, 定义 $\mathbb{C}^2$ 上的二元复值函数 f 为

$$f(\alpha, \beta) = ax_1\overline{y_1} + bx_2\overline{y_1} + cx_1\overline{y_2} + dx_2\overline{y_2},$$

其中 $\alpha = (x_1, x_2), \beta = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$. 试确定 a, b, c 和 d, 使得 $f(\alpha, \beta)$ 是 $\mathbb{C}^2$ 的内积.

证:

□

习题 8.1.2: 证明: 酉空间 V 中向量 α 与 β 正交的充分必要条件是, 对任意一对复数 a 与 b,

$$\|a\alpha + b\beta\|^2 = \|a\alpha\|^2 + \|b\beta\|^2.$$

证:

□

习题 8.1.3: 设 V 是 n 维复线性空间. 如果映射 $\sigma : V \to V$ 满足: 对任意 $\alpha, \beta \in V$ 和任意复数 λ, $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta), \sigma(\lambda\alpha) = \overline{\lambda}\sigma(\alpha), \sigma^2(\alpha) = \alpha$, 则 σ 称为共轭映射. V 中适合 $\sigma(\alpha) = \alpha$ 的向量 α 称为关于共轭映射 σ 的实向量. 记

$$R_\sigma(V) = \{\alpha \in V : \sigma(\alpha) = \alpha\}.$$

证明:

(1) $R_\sigma(V)$ 是 n 维实线性空间;

(2) 每个 $\alpha \in V$ 都可以唯一地表为 $\alpha = \beta + \mathrm{i}\gamma$, 其中 $\beta, \gamma \in R_\sigma(V), \mathrm{i}^2 = -1$ 是复数;

(3) 设 (β_1, β_2) 是 $R_\sigma(V)$ 的内积, 则

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2) + (\gamma_1, \gamma_2) + \mathrm{i}((\beta_1, \gamma_2) - (\beta_2, \gamma_1))$$

是 V 的内积, 其中 $\alpha_1 = \beta_1 + \mathrm{i}\gamma_1, \alpha_2 = \beta_2 + \mathrm{i}\gamma_2$, 且 $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in R_\sigma(V)$.

证:

□

习题 8.1.4: 证明: 任意二阶酉方阵 U 都可以分解为

$$U=\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}\theta_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\theta_3} & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}\theta_4} \end{pmatrix},$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 和 τ 都是实数.

证:

□

习题 8.1.5: 记 n 阶复方阵 A 为 $A=B+\mathrm{i}C$, 其中 B 与 C 是实方阵, 且 $\mathrm{i}^2=-1$. 证明: 方阵 A 为酉方阵的充分必要条件是, 方阵 B^TC 是对称的, 且 $B^TB+C^TC=I_{(n)}$.

证:

□

习题 8.1.6: 所有 n 阶复方阵构成的复线性空间记为 $\mathbb{C}^{n\times n}$, 取内积为 $(A,B)=\mathrm{tr}AB^*, A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 求 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中所有对角方阵构成的子空间 W 的正交补.

证:

□

8.2 复方阵的酉相似

8.2.1 习　　题

习题 8.2.1: 设 α 与 β 分别是 n 维酉空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 与伴随变换 $\mathscr{A}^*$ 的特征向量. 证明: 如果它们所属的特征值不共轭, 则它们相互正交.

证:

□

习题 8.2.2: 证明: n 维酉空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 为规范的充分必要条件是, $\mathscr{A}$ 的每个特征向量也是它的伴随变换 $\mathscr{A}^*$ 的特征向量.

证:

□

习题 8.2.3: 证明: n 维酉空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 为规范的充分必要条件是, $\mathscr{A}$ 的不变子空间也是它的伴随变换 $\mathscr{A}^*$ 的不变子空间.

证:

□

习题 8.2.4: 证明: n 维酉空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 为规范的充分必要条件是, $\mathscr{A}$ 的每个不变子空间的正交补是 $\mathscr{A}^*$ 的不变子空间.

证:

□

习题 8.2.5: 设规范方阵 A 与方阵 B 可交换. 证明: 方阵 A 与方阵 B^* 可交换.

证:

□

习题 8.2.6: 设规范方阵 A 与规范方阵 B 可交换. 证明: AB 是规范方阵.

证:

□

习题 8.2.7: 设 A 与 B 是规范方阵. 证明: 方阵 A 与 B 酉相似的充分必要条件是, 方阵 A 与 B 相似.

证:

□

习题 8.2.8: 证明: 两两可交换的 n 阶规范方阵集合可以同时酉相似于对角形.

证:

□

习题 8.2.9: 设 n 阶规范方阵 $A = B + \mathrm{i}C, B^* = B, C^* = C$, 方阵 A 的任意两个特征值的实部与虚部分别不相等, 且 x 是方阵 A, B 与 C 中某个方阵的特征向量. 证明: 存在复数 λ, 实数 μ 与 ν, 使得

$$xA = \lambda x, \quad xB = \mu x, \quad xC = \nu x,$$

并且 $\lambda = \mu + \mathrm{i}\nu$.

证:

□

习题 8.2.10: 所有 n 阶复方阵的集合连同内积 $(A, B) = \mathrm{tr}(AB^*)$ 构成的酉空间记为 $\mathbb{C}^{n\times n}$, 其中 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 设 $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 定义 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的线性变换 $\mathscr{T}_G(A) = GA$. 证明: $\mathscr{T}_G$ 为酉变换的充分必要条件是, G 为酉方阵.

证:

□

习题 8.2.11: 设 W 是 n 维酉空间 V 的子空间, 则 $V = W \oplus W^\perp$. 即对每个 $\alpha \in V$, 存在唯一一对向量 $\beta, \gamma, \beta \in W, \gamma \in W^\perp$, 使得 $\alpha = \beta + \gamma$. 定义 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}(\alpha) = \beta - \gamma$. 证明: $\mathscr{A}$ 是酉变换.

证:

□

习题 8.2.12: 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维酉空间 V 的自伴变换. 证明:

(1) 对任意 $\alpha \in V$, $\|\alpha + \mathrm{i}\mathscr{A}(\alpha)\| = \|\alpha - \mathrm{i}\mathscr{A}(\alpha)\|$;

(2) $\alpha + \mathrm{i}\mathscr{A}(\alpha) = \beta + \mathrm{i}\mathscr{A}(\beta)$ 的充分必要条件是 $\alpha = \beta$;

(3) $\mathscr{I} - \mathrm{i}\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{I} + \mathrm{i}\mathscr{A}$ 都是可逆的;

(4) 变换

$$\mathscr{U} = (\mathscr{I} - \mathrm{i}\mathscr{A})(\mathscr{I} + \mathrm{i}\mathscr{A})^{-1}$$

是酉变换, 它称为 $\mathscr{A}$ 的 Cayley 变换.

☞ 证:

□

➾ 习题 8.2.13: 设方阵 S 与 T 分别是实对称与实斜对称方阵, 且 $\det\left(I_{(n)}-T-\mathrm{i}S\right)\neq 0$. 证明 $\left(I_{(n)}+T+\mathrm{i}S\right)\left(I_{(n)}-T-\mathrm{i}S\right)^{-1}$ 是酉方阵.

☞ 证:

□

➾ 习题 8.2.14: 设 n 阶复方阵 O 满足 $OO^T=I_{(n)}, O^*=O$, 则方阵 O 称为正交 Hermite 的. 证明正交 Hermite 方阵 O 实正交相似于如下的准对角形:

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} a_1 & ib_1 \\ -ib_1 & a_1 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_s & ib_s \\ -ib_s & a_s \end{pmatrix},\underbrace{1,\cdots,1}_{t\text{个}},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{n-2s-t\text{个}}\right).$$

☞ 证:

□

8.3 正定 Hermite 方阵与矩阵的奇异值分解

8.3.1 习　　题

➾ 习题 8.3.1: 设 n 阶复方阵 $A=B+\mathrm{i}C$, 其中 $B=\frac{1}{2}\left(A+\overline{A}\right), C=-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(A-\overline{A}\right)$, 并且 A 是半正定 Hermite 方阵. 证明: $\mathrm{rank}A\leq\mathrm{rank}B, \mathrm{rank}C\leq\mathrm{rank}B$.

☞ 证:

□

➾ 习题 8.3.2: 设 H 是 n 阶正定 Hermite 方阵, A 是 $n\times m$ 列满秩矩阵. 求逆方阵 $\begin{pmatrix} H & A \\ A^* & O \end{pmatrix}^{-1}$.

☞ 证:

□

➾ 习题 8.3.3: 设 A 是 n 阶复方阵, $\mathbb{C}^n$ 是 n 维复的行向量空间. 记 $K(A)=\{x\in\mathbb{C}^n : xA=0\}$, 它称为方阵 A 的零空间. 设 H_1 与 H_2 是 n 阶 Hermite 方阵, 其中 $H_1\geq 0, \mathrm{rank}H_1=r$, 且 $K(H_1)\subset K(H_2)$. 证明: 存在 $n\times r$ 列满秩矩阵 P 与 r 阶实对角方阵 D, 使得 $H_1=PP^*$ 且 $H_2=PDP^*$.

☞ 证:

□

➾ 习题 8.3.4: 设 H_1 与 H_2 是 n 阶正定 Hermite 方阵. 证明: 方阵 H_1H_2 的特征值都是正的.

☞ 证:

□

习题 8.3.5: 设 λ 与 λ_2 分别是 n 阶正定 Hermite 方阵 H 的最大与最小特征值, α 是任意 n 维非零复的行向量. 证明:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_n} = \sup_{\|\alpha\|=1} \alpha H \alpha^* \alpha H^{-1} \alpha^*.$$

证:

□

习题 8.3.6: 设 A 与 B 是 n 阶 Hermite 方阵. 证明:

$$\mathrm{tr}(AB)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2B^2),$$

并且等号当且仅当 $AB = BA$ 时成立.

证:

□

习题 8.3.7: 设 A 与 B 是 n 阶 Hermite 方阵. 证明:

$$2\mathrm{tr}(AB) \leq \mathrm{tr}(A^2) + \mathrm{tr}(B^2),$$

并且等号当且仅当 $A = B$ 时成立.

证:

□

习题 8.3.8: 证明: 复方阵 A 的所有奇异值恰是所有非零特征值的充分必要条件是, 方阵 A 为半正定 Hermite 方阵.

证:

□

习题 8.3.9: 设 A 是规范方阵. 证明: $A^+A = AA^+$.

证:

□

习题 8.3.10: 设 A 是 $m \times n$ 列满秩矩阵. 证明: $A^+ = A^*$ 的充分必要条件是 $A^*A = I_{(n)}$.

证:

□

8.4 一些例子

8.4.1 习　　题

习题 8.4.1: 设 n 阶 Hermite 方阵 $H = (h_{ij}) > 0$. 证明: $\det H \leq h_{11}h_{22}\cdots h_{nn}$.

证:

□

习题 8.4.2: 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶复方阵. 证明:

$$|\det A|^2 \le \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ik}|^2\right).$$

证:

$\square$

习题 8.4.3: 设 n 阶 Hermite 方阵 $H>0$. 证明:

$$\det H \le H\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} H\begin{pmatrix} (r+1) & (r+2) & \cdots & n \\ (r+1) & (r+2) & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

证:

$\square$

习题 8.4.4: 设 n 阶复方阵 A 的每个元素的模等于 1. 证明: $|\det A|^2 \le n^n$.

证:

$\square$

习题 8.4.5: 设 H_1 与 H_2 是正定 Hermite 方阵, 且 H_1-H_2 是正定的. 证明: 方阵 $H_2^{-1}-H_1^{-1}$ 是正定的.

证:

$\square$

习题 8.4.6: 设 A 是行满秩的 $m\times n$ 复矩阵, B 为 $n\times p$ 复矩阵. 证明:

$$\det\left[B^*\left(I_{(n)}-A^*(AA^*)^{-1}A\right)B\right] \le \det B^*B.$$

证:

$\square$

第 9 章 双线性函数

9.1 双线性函数的概念

9.1.1 习　　题

习题 9.1.1: 设 $\mathbb{R}^2$ 是 2 维实的行向量空间, 向量 $\alpha = (x_1, x_2), \beta = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2$ 上下列函数是否是双线性函数:

(i) $f(\alpha, \beta) = 1$;

(ii) $f(\alpha, \beta) = (x_1 - y_1)^2 + x_2 y_2$;

(iii) $f(\alpha, \beta) = (x_1 + y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$;

(iv) $f(\alpha, \beta) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

解:

(i)

□

习题 9.1.2: 所有 2×3 实矩阵构成的实线性空间记为 $\mathbb{R}^{2\times 3}$. 设方阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

定义空间 $\mathbb{R}^{2\times 3}$ 上的双线性函数 f 为

$$f(X, Y) = \mathrm{tr}(X^T AY), \quad X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

(1) 求双线性函数 f 在空间 $\mathbb{R}^{2\times 3}$ 的基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E21, E_{22}, E_{23}\}$ 下的方阵, 其中 E_{ij} 是第 i 行第 j 列交叉位置上的元素为 1 而其它元素为 0 的 2×3 矩阵, $1 \le i \le 2, 1 \le j \le 3$;

(2) 判断双线性函数 f 是否是非退化的.

解:

□

习题 9.1.3: 设 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是所有 n 阶复方阵构成的复线性空间, V 是空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中所有迹为零的方阵构成的子空间. 定义空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上双线性函数 f 为

$$f(X, Y) = n\mathrm{tr}(XY) - (\mathrm{tr}X)(\mathrm{tr}Y), \quad X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

证明:

(1) f 是空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上退化的双线性函数;

(2) 取双线性函数 f 的定义域为 V, 则 V 上双线性函数 f 是非退化的;

(3) 设 A 是 n 阶非零的斜 Hermite 方阵, 即 $A^* = -A$, 这里 A^* 是 A 的共轭转置, 则 $f(A,A) \leq 0$.

☞ 证:

□

➽ **习题 9.1.4:** 设 f 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的双线性函数. 证明: 对空间 V 的任意子空间 V_1 与 V_2 有

$$(V_1+V_2)^{\perp_L} = V_1{}^{\perp_L} \cap V_2{}^{\perp_L}; \quad (V_1+V_2)^{\perp_R} = V_1{}^{\perp_R} \cap V_2{}^{\perp_R}.$$

如果 f 非退化, 则有

$$(V_1\cap V_2)^{\perp_L} = V_1{}^{\perp_L} + V_2{}^{\perp_L}; \quad (V_1\cap V_2)^{\perp_R} = V_1{}^{\perp_R} + V_2{}^{\perp_R}.$$

☞ 证:

□

➽ **习题 9.1.5:** 设 f 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的双线性函数, W 是 V 的子空间, 将 f 的定义域限定在 W 上时, f 是非退化的. 证明:

$$V = W \oplus W^{\perp_L} = W \oplus W^{\perp_R}.$$

☞ 证:

□

➽ **习题 9.1.6:** 设 f 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的非退化双线性函数, h 是 V 上双线性函数. 证明:

(1) 存在 V 的唯一线性变换 $\mathscr{A}_h$, 使得对任意 $\alpha,\beta\in V$, $h(\alpha,\beta) = f(\mathscr{A}_h(\alpha),\beta)$;

(2) 双线性函数 h 非退化的充分必要条件是, 线性变换 $\mathscr{A}_h$ 可逆;

(3) 存在 V 的唯一线性变换 $\mathscr{B}_h$, 使得对任意 $\alpha,\beta\in V$, $f(\beta,\alpha) = f(\mathscr{B}(\alpha),\beta)$.

☞ 证:

□

➽ **习题 9.1.7:** 设 f 是 V 上非退化双线性函数, $\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换, 证明: 存在 V 的唯一线性变换 $\mathscr{A}^*$, 使得对任意 $\alpha,\beta\in V$, $f(\mathscr{A}(\alpha),\beta) = f(\alpha,\mathscr{A}^*(\beta))$.

☞ 证:

□

➽ **习题 9.1.8:** 设 f 是 V 上双线性函数. 证明: 存在 V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$, 使得

$$\left(f\left(\alpha_i,\beta_j\right)\right) = \mathrm{diag}(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{r\text{个}},\underbrace{0,\cdots,0}_{n-r\text{个}}),$$

其中 $r = \operatorname{rank} f$.

证:

□

习题 9.1.9: 设 f 是 V 上双线性函数. 对于给定的向量 $\beta, \gamma \in V$, 定义 V 到自身的映射 $\beta \otimes \gamma$ 如下: 设 $\alpha \in V$, 则令 $(\beta \otimes \gamma)(\alpha) = f(\alpha, \beta)\gamma$. 显然 $\beta \otimes \gamma$ 是 V 的线性变换. 求线性变换 $\beta \otimes \gamma$ 的迹 $\operatorname{tr}(\beta \otimes \gamma)$.

证:

□

习题 9.1.10: 设 f 是 V 上双线性函数. 证明: f 可以分解为两个线性函数的乘积的充分必要条件是, f 的秩为 1.

证:

□

9.2 对称双线性函数与二次型

9.2.1 习　　题

习题 9.2.1: 已知有理数域 $\mathbb{Q}$ 上 3 阶对称方阵 S 为

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

求 $\mathbb{Q}$ 上 3 阶可逆方阵 P, 使得 $P^T SP$ 是对角形.

解:

□

习题 9.2.2: 求有理数域 $\mathbb{Q}$ 上 2 阶可逆方阵 P, 使得 $P^T \operatorname{diag}(5,5)P = \operatorname{diag}(1,1)$.

解:

□

习题 9.2.3: 求下列实对称方阵在相合 (通过实方阵) 下的标准形:

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 0_{(n)} & I_{(n)} \\ I_{(n)} & 0_{(n)} \end{pmatrix}$;

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

(iv) $\begin{pmatrix} 0_{(n)} & I_{(n)} & 0 \\ I_{(n)} & 0_{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(v) $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$; (vi) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$.

✎ **解:**

(i)

□

习题 9.2.4: 把下列实线性空间 V 上二次型化为标准形:

(i) $2x_1^2+3x_2^2+10x_1x_2+16x_1x_3+2x_2x_3$; (ii) $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+4x_4^2+x_1x_2+x_2x_4$;

(iii) $\sum\limits_{j=1}^{n-1} x_jx_{j+1}$; (iv) $\sum\limits_{1\le i<j\le n} x_ix_j$;

(v) $\sum\limits_{1\le i<j\le n} (-1)^{i+j}x_ix_j$; (vi) $\sum\limits_{1\le i<j\le n} |i-j|\, x_ix_j$.

✎ **解:**

□

习题 9.2.5: 证明: 如果二次型 $Q(\alpha)=0$ 的充分必要条件为 $\alpha=0$, 则 $Q(\alpha)$ 或者是正定的, 或者是负定的.

☞ **证:**

□

习题 9.2.6: 设二次型 $Q(\alpha)=xSx^T$, 其中方阵 S 的顺序子式 $S\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j \\ 1 & 2 & \cdots & j \end{pmatrix} \neq 0, j=1,2,\cdots,n$. 证明: 二次型 $Q(\alpha)$ 可以化为

$$Q(\alpha)=S\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}y_1^2+\frac{S\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{S\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}y_2^2+\cdots+\frac{S\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}}{S\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}}y_n^2.$$

☞ **证:**

□

习题 9.2.7: 求下列复对称方阵在相合 (通过复方阵) 下的标准形, 其中 $\mathrm{i}^2=-1$.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & \cdots & n+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2+\mathrm{i} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ n+\mathrm{i} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{\mathrm{i}}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\mathrm{i}}{2} & 1 & \frac{\mathrm{i}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\mathrm{i}}{2} & 1 & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{\mathrm{i}}{2} & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\sum\limits_{j=1}^{n-1} x_j x_{j+1}$;

(4) $\sum\limits_{1\le k<l\le n} (k+\mathrm{i}l)\, x_k x_l$.

✎ **解:**

(1)

(2)

(3)

(4) 把二次型 $Q(\alpha)$ 写成矩阵形式, $Q(\alpha) = xSx^T$, 其中

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+2\mathrm{i}}{2} & \frac{1+3\mathrm{i}}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1+(n-1)\mathrm{i}}{2} & \frac{1+n\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1+2\mathrm{i}}{2} & 0 & \frac{2+3\mathrm{i}}{2} & \cdots & \cdots & \frac{2+(n-1)\mathrm{i}}{2} & \frac{2+n\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1+3\mathrm{i}}{2} & \frac{2+3\mathrm{i}}{2} & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{(n-2)+(n-1)\mathrm{i}}{2} & \frac{(n-2)+n\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1+(n-1)\mathrm{i}}{2} & \frac{2+(n-1)\mathrm{i}}{2} & \cdots & \cdots & \frac{(n-2)+(n-1)\mathrm{i}}{2} & 0 & \frac{(n-1)+n\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1+n\mathrm{i}}{2} & \frac{2+n\mathrm{i}}{2} & \cdots & \cdots & \frac{(n-2)+n\mathrm{i}}{2} & \frac{(n-1)+n\mathrm{i}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

考察矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1+2\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} & \cdots & \cdots & 1+(n-1)\,\mathrm{i} & 1+n\mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} & 0 & 2+3\mathrm{i} & \cdots & \cdots & 2+(n-1)\,\mathrm{i} & 2+n\mathrm{i} \\ 1+3\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & (n-2)+(n-1)\,\mathrm{i} & (n-2)+n\mathrm{i} \\ 1+(n-1)\,\mathrm{i} & 2+(n-1)\,\mathrm{i} & \cdots & \cdots & (n-2)+(n-1)\,\mathrm{i} & 0 & (n-1)+n\mathrm{i} \\ 1+n\mathrm{i} & 2+n\mathrm{i} & \cdots & \cdots & (n-2)+n\mathrm{i} & (n-1)+n\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},$$

用第 $n-1$ 行去减第 n 行, $\cdots$, 第 2 行去减第 1 行, 我们得到矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1+2\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} & \cdots & \cdots & 1+(n-1)\,\mathrm{i} & 1+n\mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} & -[1+2\mathrm{i}] & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ \mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} & -[2+3\mathrm{i}] & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & \cdots & \cdots & (n-2)+(n-1)\,\mathrm{i} & -[(n-2)+(n-1)\,\mathrm{i}] & 1 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & \cdots & \cdots & \mathrm{i} & (n-1)+n\mathrm{i} & -[(n-1)+n\mathrm{i}] \end{pmatrix}$$

用第 $n-1$ 列去减第 n 列, $\cdots$, 第 1 列去减第 2 列; 第一行乘以 α; 第 1 列乘以 α_0, 我们得到

$$\frac{1}{\alpha^2}\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1\alpha & \mathrm{i}\alpha & \cdots & \cdots & \mathrm{i}\alpha & \mathrm{i}\alpha \\ -\alpha_1\alpha & 2\alpha_1 & 2\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathrm{i}\alpha & 2\alpha & 2\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (n-2)\,\alpha & 0 \\ \mathrm{i}\alpha & 0 & \cdots & 0 & (n-2)\,\alpha & 2\alpha_{n-2} & (n-1)\,\alpha \\ \mathrm{i}\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n-1)\,\alpha & 2\alpha_{n-1} \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha=1+\mathrm{i},\alpha_k=-(k+(k+1)\mathrm{i}),k=1,2,\cdots,n-1$, 我们用到了 $k\alpha+2\alpha_k+(k+1)\alpha=-\mathrm{i}\alpha$. 将所有行加到第一行; 将所有列加到第一列. 我们得到

$$\frac{1}{\alpha^2}\begin{pmatrix} 2\,(-n+\mathrm{i}) & -1+\mathrm{i} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n\alpha \\ -1+\mathrm{i} & 2\alpha_1 & 2\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 2\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (n-2)\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (n-2)\,\alpha & 2\alpha_{n-2} & (n-1)\,\alpha \\ -n\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n-1)\,\alpha & 2\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{\alpha^2}\det A.(n\geq 2)$$

由于 $|2\,(-n+\mathrm{i})|=2\sqrt{n^2+1},|-1+\mathrm{i}|+|-n\alpha|=\sqrt{2}\,(1+n)$, 故 $\left(2\sqrt{n^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{2}\,(1+n)\right)^2=2(n-1)^2>0$, 即 $|2\,(-n+\mathrm{i})|>|-1+\mathrm{i}|+|-n\alpha|$.
而 $|2\alpha_1|=2\sqrt{5},|-1+\mathrm{i}|+|2\alpha|=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, 则 $|2\alpha_1|>|-1+\mathrm{i}|+|2\alpha|$.
$|2\alpha_k|=2\sqrt{k^2+(k+1)^2},|k\alpha|+|(k+1)\,\alpha|=\sqrt{2}\,(k+k+1)$. 由柯西不等式可知

$$\left(1^2+1^2\right)\left(k^2+(k+1)^2\right)>(k+k+1)^2$$

且取等不成立. 所以

$$|2\alpha_k|>|k\alpha|+|(k+1)\,\alpha|\,,k=2,3,\cdots,n-1.$$

因此方阵 A 为主角占优矩阵, 则 $\det A\neq 0$, 故原行列式不为零.

因此所求标准形为 $I_{(n)}$.

❀ 注: 我们对行列式的求解进行了一些探究.

记

$$A_n(k)=\begin{vmatrix} 2(-n+\mathrm{i}) & -1+\mathrm{i} & & & & & \\ -1+\mathrm{i} & 2\alpha_1 & 2\alpha & & & & \\ & 2\alpha & 2\alpha_2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & (k-1)\alpha & \\ & & & & (k-1)\alpha & 2\alpha_{n-2} & k\alpha \\ & & & & & k\alpha & 2\alpha_k \end{vmatrix},$$

$$B_k=\begin{vmatrix} 2\alpha_1 & 2\alpha & & & & & \\ 2\alpha & 2\alpha_2 & 3\alpha & & & & \\ & 3\alpha & 2\alpha_3 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & (k-1)\alpha & \\ & & & & (k-1)\alpha & 2\alpha_{k-1} & k\alpha \\ & & & & & k\alpha & 2\alpha_k \end{vmatrix},$$

则可知 $A_n(k)$ 与 $B(k)$ 均满足 $A_n(k)=2\alpha_kA_n(k-1)-k^2\alpha^2A_n(k-2)$, $B_k=2\alpha_kB_{k-1}-k^2\alpha^2B_{k-2}$.

将 $\det A$ 按最后一行展开可知 $\det A=(-1)^nn\alpha\left((-1+\mathrm{i})(n-1)!\alpha^{n-2}+(-1)^{n+1}n\alpha B_{n-1}\right)+(-1)^nn\alpha(1+\mathrm{i})(n-1)!\alpha^{n-2}+A_n(n-1)=2(-1)^n(-1+\mathrm{i})n!\alpha^{n-1}+A_n(n-1)$.

所以, 若能求出 $A_n(k)$ 与 $B(k)$ 的通项公式, 便可求得 $\det A$, 即可求得原行列式的值 $\frac{1}{\alpha^2}\det A$.

□

习题 9.2.8: 设 $f(\alpha,\beta)$ 是 n 维实线性空间 V 上双线性函数, 并且对任意非零向量 $\alpha\in V$, $f(\alpha,\alpha)>0$. 证明: 存在 V 的一组基 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$, 使得 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的方阵是如下的准对角形:

$$diag\left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ -a_1 & 1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 1 & a_s \\ -a_s & 1\end{pmatrix},\underbrace{1,\cdots,1}_{n-2s\text{个}}\right),$$

其中 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_s>0$.

证:

□

习题 9.2.9: 定义所有 n 阶实方阵构成的实线性函数空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上对称双线性函数 $f(X,Y)$ 为

$$f(X,Y)=\mathrm{tr}XY^T,\quad X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

求 $f(X,Y)$ 的正、负惯性指数.

✎ 解:

□

习题 9.2.10: 设 $Q(\alpha)=\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j$ 是 n 维实线性空间 V 的正定二次型. 证明:

$$Q(\beta)=\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i,j\neq k}}\left(a_{ij}-\frac{a_{ik}a_{jk}}{a_{kk}}\right)x_ix_j$$

是关于自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n$ 的正定二次型.

☞ 证:

□

习题 9.2.11: 设 f 是 n 维实的行向量集合连同标准内积构成的 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上双线性函数, $O(n,\mathbb{R})$ 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的所有正交变换的集合. 如果对任意 $\mathscr{A}\in O(n,\mathbb{R})$ 均有, 均有 $f(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))=f(\alpha,\beta)$, 则称为在 $O(n,\mathbb{R})$ 下是不变的. 求所有在 $O(n,\mathbb{R})$ 下不变的双线性函数 f.

✎ 解:

□

习题 9.2.12: 将上一习题中实数域 $\mathbb{R}$ 改为复数域 $\mathbb{C}$, 即求 n 维复的行向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的所有在 $O(n,\mathbb{C})$ 下不变的双线性函数 $f(\alpha,\beta)$, 这里 $O(n,\mathbb{C})$ 是所有 n 阶复正交方阵的集合.

✎ 解:

□

习题 9.2.13: 设 $\mathbb{C}^2$ 是所有 2 维复的行向量 $\alpha=(x_1,x_2)$ 构成的复线性空间, $Q(\alpha)=x_1^2-x_2^2$ 是 $\mathbb{C}^2$ 的二次型. 设线性变换 $\mathscr{A}:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 满足:

$$Q(\mathscr{A}(\alpha))=Q(\alpha),\quad \alpha\in\mathbb{C}^2,$$

则 $\mathscr{A}$ 称为保二次型 $Q(\alpha)$ 的. 证明:

(1) 设 $\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{C}^2$ 的基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ 下的方阵为 $A=(a_{ij})$, 其中 $\varepsilon_1=(1,0),\varepsilon_2=(0,1)$, 则 $a_{22}=\pm a_{11},a_{21}=\pm a_{12},a_{11}^2-a_{12}^2=1$;

(2) 如果 $\det A=1$, 则存在非零复数 c, 使得

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} c+\frac{1}{c} & c-\frac{1}{c}\\ c-\frac{1}{c} & c+\frac{1}{c}\end{pmatrix};$$

如果 $\det A=-1$, 则存在非零复数 c, 使得

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} c+\frac{1}{c} & c-\frac{1}{c}\\ -c+\frac{1}{c} & -c-\frac{1}{c}\end{pmatrix}.$$

☞ 证:

(1)

□

习题 9.2.14: (**伪 Euclid 空间**) 所谓 Euclid 空间是指赋以内积 (α,β) 的实线性空间 V, 而内积 (α,β) 是 V 上的正定对称双线性函数. Euclid 空间概念之推广即是伪 Euclid 空间. 其定义如下: n 维实线性空间 V 上的非退化对称双线性函数 (α,β) 称为 V 的一个内积. 实线性空间 V 连同取定的一个内积 (α,β) 称为伪 Euclid 空间, 内积 (α,β) 的正惯性指数 p 称为伪 Euclid 空间 V 的指数. 如果 V 的基 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 满足:

$$(\xi_i,\xi_j)=\varepsilon_i\delta_{ij},\quad 1\leq i,j\leq n,$$

其中当 $1\leq i\leq p$ 时, $\varepsilon_i=1$, 当 $p+1\leq i\leq n$ 时 $\varepsilon_i=-1$, 则 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 称为伪 Euclid 空间 V 的一组标准正交基. 如果线性变换 $\mathscr{A}:V\to V$ 满足:

$$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))=(\alpha,\beta),\quad \alpha,\beta\in V,$$

则 $\mathscr{A}$ 称为伪正交变换. 证明:

(1) 伪正交变换是可逆的, 并且它的逆变换仍是伪正交变换;
(2) 伪正交变换的乘积仍是伪正交变换.

证:

(1)

□

9.3 斜对称双线性函数

9.3.1 习　　题

习题 9.3.1: 设 4 阶斜对称方阵 K 为

$$K=\begin{pmatrix}0&2&-1&3\\-2&0&4&-2\\1&-4&0&1\\-3&2&-1&0\end{pmatrix}.$$

求 4 阶有理系数可逆方阵 P, 使得

$$P^TKP=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right).$$

解:

$\square$

习题 9.3.2: 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间, $L(V,V,\mathbb{F})$ 是 V 上所有双线性函数构成的数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 对任意 $f \in L(V,V,\mathbb{F})$, 记 $(\mathscr{P}(f))(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}f(\alpha,\beta) - \frac{1}{2}f(\beta,\alpha)$. 显然 $\mathscr{P}(f) \in L(V,V,\mathbb{F})$. 定义线性空间 $L(V,V,\mathbb{F})$ 的变换 $\mathscr{P}$ 如下: 对于 $f \in L(V,V,\mathbb{F})$, 令 f 在 $\mathscr{P}$ 下的像为 $\mathscr{P}(f)$. 证明:

(1) $\mathscr{P}$ 是 $L(V,V,\mathbb{F})$ 的线性变换, 并且 $\mathscr{P}^2 = \mathscr{P}$;

(2) $\mathscr{P}$ 的秩为 $\frac{n(n-1)}{2}$;

(3) 设 $\mathscr{B}$ 是 V 的线性变换, 对任意 $f \in L(V,V,\mathbb{F})$, 记 $(\widetilde{\mathscr{B}}(f))(\alpha,\beta) = f(\mathscr{B}(\alpha),\mathscr{B}(\beta))$. 显然 $\widetilde{\mathscr{B}}(f) \in L(V,V,\mathbb{F})$. 定义空间 $L(V,V,\mathbb{F})$ 的变换 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 如下: 对于 $f \in L(V,V,\mathbb{F})$, 令 f 在 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 下的像为 $\widetilde{\mathscr{B}}(f)$. 则 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 是 $L(V,V,\mathbb{F})$ 的线性变换, 而且和 $\mathscr{P}$ 可交换.

证:

(1)

(2)

(3)

$\square$

习题 9.3.3: 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $L_1(\alpha)$ 与 $L_2(\alpha)$ 是 V 上的线性函数. 证明: $f(\alpha,\beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha)$ 是 V 上的斜对称双线性函数, 而且当且仅当 $L_1, L_2 \in V^*$ 线性相关时 f 为零函数.

证:

$\square$

习题 9.3.4: 设 f 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间 V 的斜对称双线性函数. 证明: $\mathrm{rank} f = 2$ 的充分必要条件是, 存在线性无关的 $L_1, L_2 \in V^*$, 使得

$$f(\alpha,\beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha).$$

证:

$\square$

习题 9.3.5: 设 $\mathbb{R}^3$ 是 3 维实的行向量空间, f 是 $\mathbb{R}^3$ 上斜对称双线性函数. 证明: 存在 $L_1, L_2 \in (\mathbb{R}^3)^*$, 使得

$$f(\alpha,\beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha).$$

证:

$\square$

习题 9.3.6: 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, f 与 g 是 V 上的斜对称双线性函数. 证明: $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} g$ 的充分必要条件是, 存在 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 使得对任意 $\alpha, \beta \in V$, 均有 $f(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta)) = g(\alpha,\beta)$.

证:

□

习题 9.3.7: (辛几何) 所谓 Euclid 空间是赋以一个给定的内积 (α,β) 的实线性空间, 而内积 (α,β) 是正定对称双线性函数, 它当然是非退化的. 如果将内积取成非退化斜对称双线性函数, 则引出所谓辛空间. 其定义如下: 设 f 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间 V 的非退化斜对称双线性函数, 则 f 称为 V 的一个辛内积. 线性空间 V 连同一个取定的辛内积 f 称为辛空间. 显然辛空间 V 应是偶数维的. 设 $\dim V = n = 2k$. 如果辛空间 V 的向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$ 满足

$$f(\alpha_i,\alpha_j)=0, f(\beta_i,\beta_j)=0, f(\alpha_i,\beta_j)=\delta_{ij},\quad 1\le i,j\le k,$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号, 则 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$ 称为 V 的一组辛基. 如果线性变换 $\mathscr{A}: V\to V$ 适合 $f(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))=f(\alpha,\beta)$, 则 $\mathscr{A}$ 称为辛变换. 如果 $\mathscr{A}: V\to V$ 是辛空间 V 的线性变换, 则由

$$f(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=f(\alpha,\widetilde{\mathscr{A}}(\beta)),\quad \alpha,\beta\in V$$

所定义的变换 $\widetilde{\mathscr{A}}: V\to V$ 称为 $\mathscr{A}$ 的辛伴随变换. 如果 $\widetilde{\mathscr{A}}=\mathscr{A}$ (或者 $\widetilde{\mathscr{A}}=-\mathscr{A}$), 则线性变换 $\mathscr{A}$ 称为辛自伴 (或者辛斜自伴) 的. 证明:

(1) 每一个辛空间 V 都具有辛基;
(2) 设 $h(\alpha,\beta)$ 与 $g(\alpha,\beta)$ 是 V 的辛内积, 则存在可逆线性变换 $\mathscr{A}: V\to V$, 使得对任意 $\alpha,\beta\in V$, $g(\alpha,\beta)=h(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))$;
(3) 对每个线性变换 $\mathscr{A}: V\to V$, 均有 $\widetilde{(\widetilde{\mathscr{A}})}=\mathscr{A}$, 并且都可以唯一地分解为一个辛自伴变换与一个辛斜自伴变换的和;
(4) 辛空间 V 的辛斜自伴变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的辛基下的方阵 A 具有如下形式:

$$A=\begin{pmatrix} M & N \\ K & L\end{pmatrix},$$

其中 M,N,K 与 L 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的 k 阶方阵, 并且 $N^*=N, K^*=K, L=-M^*$, 这里 B^* 表示方阵 B 的共轭转置.

证:

(1)
(2)
(3)
(4)

□

9.4 共轭双线性函数与 Hermite 型

9.4.1 习　　题

习题 9.4.1: 把下列 Hermite 型 $H(\alpha)$ 化为标准型:

$$(1)\ H(\alpha)=\sum_{j=1}^{n-1}\left(x_j\overline{x_{j+1}}+x_{j+1}\overline{x_j}\right);$$

$$(2)\ H(\alpha)=\sum_{1\le k,l\le n}|k-\mathrm{i}l|\,x_k\overline{x_l},\text{其中 } \mathrm{i}^2=-1.$$

解:

(1) 由于 $H(\alpha)=\sum\limits_{j=1}^{n-1}\left(x_j\overline{x_{j+1}}+x_{j+1}\overline{x_j}\right)=xHx^*$, 其中

$$H=\begin{pmatrix}0&1&&&\\1&0&1&&\\&1&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&1&0\end{pmatrix}.$$

对 H 进行合同变换如下

$$\begin{pmatrix}0&1&&&&&\\1&0&1&&&&\\&1&0&1&&&\\&&1&0&1&&\\&&&1&\ddots&\ddots&\\&&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac12c_2+c_1]{\frac12r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&1&\frac12&&&&\\1&0&1&&&&\\\frac12&1&0&1&&&\\&&1&0&1&&\\&&&1&\ddots&\ddots&\\&&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac12r_1+r_3,-\frac12c_1+c_3]{-r_1+r_2,-c_1+c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&&&&\\0&-1&\frac12&&&&\\0&\frac12&-\frac14&1&&&\\&&1&0&1&&\\&&&1&\ddots&\ddots&\\&&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac12c_2+c_3]{\frac12r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&&&&\\0&-1&0&&&&\\0&0&0&1&&&\\&&1&0&1&&\\&&&1&\ddots&\ddots&\\&&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&&1&0\end{pmatrix}.$$

如此进行下去, 可知 A 有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个特征值为正, 有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个特征值为负, 其标准形为

$$\operatorname{diag}\left(I_{\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)},-I_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)}\right).$$

(2) 由于

$$H(\alpha)=\sum_{1\le k,l\le n}|k-\mathrm{i}l|\,x_k\overline{x_l}=x(|k-\mathrm{i}l|)_{n\times n}x^*=x(a_{kl})_{n\times n}x^*,$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), a_{kl}=\sqrt{k^2+l^2}$.

先证明一个引理. 注意到

引理 9.1

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是不同的正数, 且 $c_i, i=1,2,\cdots,n$ 是任意实数, 满足 $c_1+c_2+\cdots+c_n=0$, 则对任意 $s\in(0,1)$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_i+a_j\right)^s c_i c_j\le 0.$$

$$a^s=\frac{s}{\Gamma(1-s)}\int_0^{+\infty}\left(1-e^{-ax}\right)x^{-(s+1)}dx, 0<s<1.$$

事实上, 利用分部积分及换元, 令 $u=ax$, 我们可知

$$\int_0^{+\infty}\left(1-e^{-ax}\right)x^{-(s+1)}dx=\frac{-1}{s}\int_0^{+\infty}\left(1-e^{-ax}\right)dx^{-s}$$
$$=\left[-\frac{x^{-s}}{s}\left(1-e^{-ax}\right)\right]_0^{+\infty}+\frac{a}{s}\int_0^{+\infty}x^{-s}e^{-ax}dx$$
$$=\frac{a^s}{s}\int_0^{+\infty}u^{-s}e^{-u}du=\frac{a^s}{s}\Gamma(1-s).$$

稍加整理即可得上式.

记 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ie^{-a_ix}$, 则有 $f(0)=0$, 又

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_i+a_j\right)^s c_ic_j=\frac{s}{\Gamma(1-s)}\int_0^{+\infty}\left[f^2(0)-f^2(x)\right]x^{-(s+1)}dx$$
$$=\frac{-s}{\Gamma(1-s)}\int_0^{+\infty}f^2(x)\,x^{-(s+1)}dx\le 0.$$

回到原题, 取 $s=1/2, a_i=i^2$, 我们可知 $(a_{kl})_{n\times n}=\left(\sqrt{k^2+l^2}\right)_{n\times n}$ 是非负定的. 因此其标准形为

$$\operatorname{diag}(1,-I_{(n-1)}).$$

□

再介绍个与此有关的问题.

例 9.1: 设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是全不相同的正实数, 且矩阵 $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$, 其中

$$b_{ij}=\frac{b_ib_j\left(b_i^2+b_j^2\right)}{(b_i+b_j)\left(b_i^3+b_j^3\right)\left(b_i^4+b_j^4\right)}.$$

引理 9.2

设 $A, B \in \mathcal{M}_n$ 为正定矩阵. 定义它们的 Hadamard 积为:

$$A \circ B = \left(a_{i,j} b_{i,j}\right)_{1 \le i,j \le n}.$$

我们有 $A \circ B$ 是正定的.

求证: $\det B > 0$.

证:

事实上, 二次型 $\sum\limits_{1 \le i,j \le n} b_{ij} x_i x_j$ 正定, 所以可以配方成为 $\sum\limits_{k=1}^{l} \left(x \cdot y^{(k)}\right)^2$, 其中 $y^{(k)} = \left(y_1{}^{(k)}, \cdots, y_n{}^{(k)}\right)$ 是向量, $\cdot$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的普通内积, 于是 $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{l} y_i{}^{(k)} y_j{}^{(k)}$, 进而

$$\sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} b_{ij} x_i x_j = \sum_{k=1}^{l} a_{ij} \left(x_i y_i{}^{(k)}\right)\left(x_j y_j{}^{(k)}\right) \ge 0.$$

法二. 不妨设原来空间 V 的一组基是 $(e_i)_{1 \le i \le n}$. 考虑张量积 $A \otimes B$, 显然在 $V \otimes V$ 上半正定. 取 $(e_i \otimes e_i)_{1 \le i \le n}$ 张成的子空间, 在其上的限制恰好是 $A \circ B$, 于是半正定.

引理 9.3

设 $A, B \in \mathcal{M}_n$ 为正定矩阵. 我们有 $A + B$ 是正定的.

引理 9.4

设 $a_i > 0$，且 a_i 全不相同，$i = 1, 2, \cdots, n$. 我们知 Cauchy 方阵 $A = \left(\frac{1}{a_i + a_j}\right)_{n \times n}$ 是正定矩阵.

事实上, 首先由 A 为实对称矩阵，$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ne 0$，则

$$X'\left(\frac{1}{a_i + a_j}\right)_n X = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{a_i + a_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{\infty} x_i x_j e^{-(a_i + a_j)t} dt$$
$$= \int_0^{\infty} \left(x_1 e^{-a_1 t} + \cdots + x_n e^{-a_n t}\right)^2 dt$$

因为 $a_1, \cdots, a_n$ 彼此不同，若

$$x_1 e^{-a_1 t} + \cdots + x_n e^{-a_n t},$$

必有 $a_1=\cdots=x_n=0$，矛盾. 由于 $(x_1e^{-a_1t}+\cdots+x_ne^{-a_nt})^2>0$，因而

$$\int_0^{\infty}(x_1e^{-a_1t}+\cdots+x_ne^{-a_nt})^2dt>0,$$

从而 A 为正定的.

由此可知 $\left(\frac{1}{b_i+b_j}\right)_{n\times n}$, $\left(\frac{1}{b_i^3+b_j^3}\right)_{n\times n}$, $\left(\frac{1}{b_i^4+b_j^4}\right)_{n\times n}$ 均为正定的. 进而知 $\left(\frac{b_ib_j}{\left(b_i+b_j\right)^2\left(b_i^4+b_j^4\right)}\right)_{n\times n}$ 是正定的.

而

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_i^2+b_j^2-b_ib_j}&=\frac{1}{\left(b_i+b_j\right)^2-3b_ib_j}=\frac{1}{\left(b_i+b_j\right)^2}\frac{1}{1-\frac{3b_ib_j}{\left(b_i+b_j\right)^2}}\\&=\frac{1}{\left(b_i+b_j\right)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{3b_ib_j}{\left(b_i+b_j\right)^2}\right]^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^kb_i{}^kb_j{}^k}{\left(b_i+b_j\right)^{2k+2}}.\end{aligned}$$

因此 $\left(\frac{1}{b_i^2+b_j^2-b_ib_j}\right)_{n\times n}$ 是正定的, 进而 $\left(\frac{1}{\left(b_i+b_j\right)^2\left(b_i^4+b_j^4\right)}\cdot\frac{b_i^2b_j^2}{b_i^2+b_j^2-b_ib_j}\right)_{n\times n}$ 是正定的.

注意到

$$\begin{aligned}b_{ij}&=\frac{b_ib_j\left(b_i^2+b_j^2\right)}{\left(b_i+b_j\right)\left(b_i^3+b_j^3\right)\left(b_i^4+b_j^4\right)}=\frac{b_ib_j\left(b_i^2+b_j^2\right)}{\left(b_i+b_j\right)^2\left(b_i^4+b_j^4\right)\left(b_i^2+b_j^2-b_ib_j\right)}\\&=\frac{1}{\left(b_i+b_j\right)^2\left(b_i^4+b_j^4\right)}\cdot\frac{b_ib_j\left(b_i^2+b_j^2\right)}{b_i^2+b_j^2-b_ib_j}=\frac{1}{\left(b_i+b_j\right)^2\left(b_i^4+b_j^4\right)}\cdot\left(b_ib_j+\frac{b_i^2b_j^2}{b_i^2+b_j^2-b_ib_j}\right)\\&=\frac{b_ib_j}{\left(b_i+b_j\right)^2\left(b_i^4+b_j^4\right)}+\frac{1}{\left(b_i+b_j\right)^2\left(b_i^4+b_j^4\right)}\cdot\frac{b_i^2b_j^2}{b_i^2+b_j^2-b_ib_j}.\end{aligned}$$

因此 B 亦为正定的. □

习题 9.4.2: 求下列 Hermite 型 $H(\alpha)$ 的秩与符号差:

(1) $H\left(\alpha\right)=a\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\overline{x_j}+\sum\limits_{1\le k\ne l\le n}\left(x_k\overline{x_l}+x_l\overline{x_k}\right);$

(2) $H\left(\alpha\right)=\sum\limits_{1\le k\ne l\le n}\left|x_k-x_l\right|^2.$

解:

□

习题 9.4.3: 设 n 维复线性空间 V 上 Hermite 型为

$$H\left(\alpha\right)=\sum_{1\le k,l\le n}\left(akl+k+l\right)x_k\overline{x_l},$$

其中 a 是常数, 证明: $H\left(\alpha\right)$ 的秩与符号差和复数 a 无关.

证:

□

习题 9.4.4: 设 r 与 s 分别是 n 维复线性空间 V 上的 Hermite 型 $H(\alpha)$ 的秩与符号差, 证明: 存在 V 的子空间 W, 使得 $\dim W=\frac{1}{2}(r-s)$, 并且对任意非零向量 $\alpha\in W$, 均有 $H(\alpha)<0$.

证:

□

习题 9.4.5: 把下列 Hermite 方阵在复相合下化为标准型:

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & \cdots & (n-1)+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2-\mathrm{i} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (n-1)-\mathrm{i} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mathrm{i}}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\mathrm{i}}{2} & 1 & \frac{\mathrm{i}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2} & 1 & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2} & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

解:

□

参考文献

[1] 高等代数解题方法, 张贤科, 许甫华, 清华大学出版社

[2] 高等代数学, 张贤科, 许甫华, 清华大学出版社

[3] 高等代数学习指导书, 丘维声, 高等教育出版社

[4] 高等代数新方法, 王品超, 中国矿业大学出版社

[5] 线性代数与矩阵论, 许以超, 第一版和第二版, 高等教育出版社

[6] 线性代数 (数学专业用), 李尚志, 高等教育出版社

[7] 线性代数学习指导, 李尚志, 中国科学技术大学出版社

[8] 大学数学解题法诠释, 徐利治等, 安徽教育出版社

[9] 高等代数习题解, 杨子胥, 山东科学技术出版社

[10] 高等代数范例选解, 朱尧辰, 中国科学技术大学出版社