# 期中考试答案

**问题 1** 判断题。请在以下正确的命题前打勾，错的命题前打叉。

（1）任何两个线段都是可公度的。

（2）希尔伯特公理体系由关联公理，次序公理，合同公理和平行公理组成。

（3）两个反射的复合总是平移。

（4）三个反射的复合不可能是平移。

（5）设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 为 $E^3$ 中任意向量，则 $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ 与 $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ 同向。

（6）刚体变换群是交换群。

（7）两个反射的复合总是刚体变换。

（8）刚体变换群的元素中除单位元之外都是无穷阶的。

（9）刚体变换保持内积。即设 $\phi : E^3 \to E^3$ 为刚体变换，则下列等式恒成立：$\langle \phi(u), \phi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$。

（10）任意非空集合上都存在距离函数。

**解：**只有（4）（7）（10）正确，其余错误。

**问题 2** 利用向量代数求解以下命题。

(a) 证明三角形的三条中线相交于一点。

(b) 求顶点为 $P_1 = (1, 2, 3), P_2 = (2, 4, 1), P_3 = (1, -3, 5), P_4 = (4, -2, 3)$ 的四面体的体积。

**解：**(a) 同第四次作业 2。(b) 同第四次作业 9。

**问题 3** 已知 $\mathbf{u} = (3, 4, 5), \mathbf{v} = (0, 1, 2), \mathbf{w} = (-1, 0, 1)$。试计算

(i)$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w}$。

(ii)$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 和 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$。

(iii) 角 $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 的余弦值。

**解：**(i)$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w} = (7, 11, 15)$。

(ii)$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 14$，$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (1, -2, 1)$。

(iii)$\cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \dfrac{14}{5\sqrt{10}}$。

**问题 4** (a) 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 为 $E^3$ 向量。试证二重外积展开式：$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}$。

(b) 设 $\mathbf{v}_i, 1 \leq i \leq 4$ 为 $E^3$ 中向量。试证如下等式：$\langle \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$。

**解：**(a) 同第四次作业 5。(b) 同第五次作业 4(1)。

**问题 5** 试求解下列平面或直线的参数方程。

(a) 过点 $(3,-1,4),(1,0,-3)$，且垂直与平面 $2x+5y+z=0$ 的平面。

(b) 过点 $(3,-1,4)$，且垂直于平面 $2x+5y+z=0$ 的直线。

**解：**(a) 所求平面内有两个不共线的方向：$(2,5,1),(3,-1,4)-(1,0,-3)=(2,-1,7)$，故平面参数方程为 $\begin{cases} x=3+2t_1+2t_2 \\ y=-1-t_1+5t_2 \\ z=4+7t_1+t_2 \end{cases}$。

(b) 所求直线的方向为 $(2,5,1)$，故直线的参数方程为 $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1+5t \\ z=4+t \end{cases}$。

**问题 6** (a) 设 $d: E^3\times E^3\to\mathbb{R}$ 为距离函数。试证对任意 $\lambda>0$，$\lambda\cdot d$ 仍然为距离函数。

(b) 令 $D$ 为 $E^3$ 所有距离函数的集合。我们定义 $D$ 上的关系 $R=\{(d,\lambda\cdot d)\in D\times D|\lambda>0\}$。试证 $R$ 给出了 $D$ 上的等价关系 $\sim$。

(c) 试证等价类集合 $D/\sim$ 是一个无穷集合。

**解：**(a) 正定性：由 $d(X,Y)\geq 0$ 且 $d(X,Y)=0$ 当且仅当 $X=Y$，以及 $\lambda>0$，得 $\lambda d(X,Y)\geq 0$ 且 $\lambda d(X,Y)=0$ 当且仅当 $X=Y$。对称性：由 $d(X,Y)=d(Y,X)$，得 $\lambda d(X,Y)=\lambda d(Y,X)$。三角不等式：由 $d(X,Y)+d(Y,Z)\geq d(X,Z)$ 且 $\lambda\geq 0$，得 $\lambda d(X,Y)+\lambda d(Y,Z)=\lambda(d(X,Y)+d(Y,Z))\geq\lambda d(X,Z)$。故 $\lambda\cdot d$ 也是距离函数。

(b) 自反性：取 $\lambda=1$，知 $d\sim d$。对称性：设 $d_1\sim d_2$，则存在 $\lambda>0$ 使得 $d_2=\lambda d_1$，因此 $d_1=\dfrac{1}{\lambda}d_2$，$\frac{1}{\lambda}>0$，故 $d_2\sim d_1$。传递性：设 $d_1\sim d_2, d_2\sim d_3$，则存在 $\lambda,\mu>0$，使得 $d_2=\lambda d_1, d_3=\mu d_2$，故 $d_3=\lambda\mu d_1$，$\lambda\mu>0$，因此 $d_1\sim d_3$。综上，$\sim$ 是等价关系。

(c) 设 $d_1$ 为离散距离：$d_1(X,Y)=\begin{cases} 0, & X=Y \\ 1, & X\neq Y \end{cases}$，$d_2$ 为欧氏距离：$d_2(X,Y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$。则易验证 $d_1, d_1+d_2, d_1+2d_2,\cdots$ 两两不等价，因此无穷集合 $\{[d_1+nd_2]|n\in\mathbb{N}\}\subset D/\sim$，故 $D/\sim$ 是无穷集合。

**问题 7** 令 $\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 为 $E^3$ 的标准直角坐标系。设有刚体变换 $\phi: E^3\to E^3$。

(a) 试证存在直角坐标系 $\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$ 使得 $\phi(\sum\limits_{i=1}^{3}x_i\mathbf{e}_i)=\sum\limits_{i=1}^{3}x_i\mathbf{e}'_i+O'$。

(b) 试证 $\phi$ 是双射。

**解：**(a) 记 $T_{\mathbf{u}}$ 为沿 $\mathbf{u}$ 的平移变换。设 $O' = \phi(O)$，设 $\tilde{\phi} = T_{-O'} \circ \phi$ 也为刚体变换，则 $\tilde{\phi}(O) = O$。令 $\mathbf{e}'_i = \tilde{\phi}(\mathbf{e}_i)$，则由 $\tilde{\phi}$ 的保距性，知 $|\mathbf{e}'_i| = |\overrightarrow{O\mathbf{e}'_i}| = |\overrightarrow{\tilde{\phi}(O)\tilde{\phi}(\mathbf{e}_i)}| = |\overrightarrow{O\mathbf{e}_i}| = |\mathbf{e}_i| = 1$，且 $\langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j \rangle = \langle \overrightarrow{O\mathbf{e}'_i}, \overrightarrow{O\mathbf{e}'_j} \rangle = -\langle \overrightarrow{O\mathbf{e}'_i}, -\overrightarrow{O\mathbf{e}'_j} \rangle = \dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{O\mathbf{e}'_i}|^2 + |\overrightarrow{O\mathbf{e}'_j}|^2 - |\overrightarrow{\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j}|^2) = \dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{O\mathbf{e}_i}|^2 + |\overrightarrow{O\mathbf{e}_j}|^2 - |\overrightarrow{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j}|^2) = -\langle \overrightarrow{O\mathbf{e}_i}, -\overrightarrow{O\mathbf{e}_j} \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$（其中 $i \neq j$），故 $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ 构成一个坐标系。

设 $X = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$，则 $x_i = \langle \overrightarrow{OX}, \mathbf{e}_i \rangle$。设 $\tilde{\phi}(X) = \sum_{i=1}^3 x'_i \mathbf{e}'_i$，则同上有 $x'_i = \langle \overrightarrow{O\tilde{\phi}(X)}, \mathbf{e}'_i \rangle = \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{O\mathbf{e}_i} \rangle = \langle \overrightarrow{OX}, \mathbf{e}_i \rangle = x_i$，因此 $\phi(\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i) = T_{O'} \circ \tilde{\phi}(\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i) = T_{O'}(\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}'_i) = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}'_i + O'$。

(b) 先证 $\phi$ 是单射。若 $\phi(X) \neq \phi(Y)$，则 $|\overrightarrow{\phi(X)\phi(Y)}| = |\overrightarrow{XY}| > 0$，故 $X \neq Y$。因此 $\phi$ 是单射。再证 $\phi$ 是满射。由 $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ 是坐标系，知 $E^3$ 中的任意点 $Y$ 都有 $Y = \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{e}'_i + O'$。令 $X = \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{e}_i$，则由 (a)，有 $\phi(X) = Y$。因此 $\phi$ 是满射。综上，$\phi$ 是双射。

**思考题**　对任意自然数 $n \geq 1$，我们定义 $E^3$ 中的 $n$ 次曲面为某一非零 $n$ 次三元多项式的零点集。给定 $E^3$ 中不超过 $m \geq 3$ 个不同的点。问是否总存在一个 $m-2$ 次曲面穿过所有的给定点？注意到这个问题在 $m = 3$ 情形是显然成立的。

**解：**存在。设这 $m$ 个点为 $X_1, \cdots, X_m$。对 $X_1, X_2, X_3$ 三点，必有一平面通过它们，设为 $Ax + By + Cz + D = 0$，其中 $A, B, C$ 不全为 0。对 $i \geq 4$，设 $X_i = (x_i, y_i, z_i)$，设曲面方程为 $(Ax+By+Cz+D)\prod_{i=4}^{m}(x+y+z-x_i-y_i-z_i) = 0$。则显然该曲面通过 $X_1, \cdots, X_m$ 这 $m$ 个点；且由于 $A, B, C$ 不全为 0，因此 $x, y, z$ 中必有一项次数为 $m-2$。该曲面即为所求。