

热力学与统计物理习题

袁业飞 收集整理

中国科学技术大学物理学院天文学系

2023 年 3 月 10 日

1 第一章：热力学系统及其热力学势

1.1 道尔顿提出一种温标，规定在给定的压强下理想气体体积的相对增量正比于温度的增量，采用在标准大气压时水的冰点温度为 0 摄氏度，沸点温度为 100 摄氏度。试用摄氏度 t 来表示道尔顿温标的温度 τ 。

1.2 设有 A,B,C 三个气体系统，当 A 和 C 处于热平衡时满足方程

$$p_A V_A - n a p_A - p_C V_C = 0,$$

当 B 和 C 处于热平衡时满足方程

$$p_B V_B - p_C V_C + n b \frac{p_C V_C}{V_B} = 0 \quad (1)$$

式中 n, a, b 均为常数。试根据热力学第零定律，求：

(a) 各系统的状态方程；

(b) 当 A 和 B 处于热平衡时满足的关系式。

1.3 以下分别给出了两种不同物质的体膨胀系数、压强系数以及等温压缩系数这三个系数中的两个，

(a) $\alpha_p = \frac{2aT^3}{V}$, $\kappa_T = \frac{3b}{V}$;

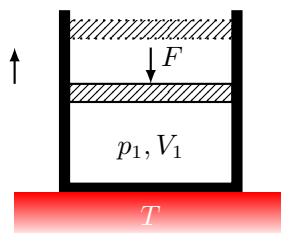
(b) $\alpha_p = \frac{1}{V} \left(\frac{a}{T^2} + \frac{b}{p} \right)$, $\kappa_T = \frac{T}{V} f(p)$ 其中 a, b 均为常数，分别求出这两种物质的状态方程。

1.4 设一质量为 M 、等温压缩系数 κ_T 和密度 ρ 都近似为常数的简单固体，若压强从 p_i 等温准静态地增加到 p_f ，计算在这等温压缩过程中，外界对该固体所做的功。

1.5 一气泡从深为 H 的海洋浮出海面，海水的温度与深度 h 的关系为 $T = T_0 - ah/H$ ，已知在海面上气泡的体积为 V_0 ，压强为 p_0 ，海水的密度为 ρ ，求气泡上浮过程中对外做的功及吸收的热量。

1.6 考察等温膨胀过程系统对外做功的问题。假设系统初态为 (p_1, V_1) ，温度为 T 。去掉作用在活塞上使之保持平衡的外力 F 让气体膨胀，体积从 V_1 变化到 V_2 ，末态的压强为 p_2 。膨胀过程中让系统始终与温度为 T 的热源保持热接触。证明系统在该不可逆膨胀过程中，系统对外所做的功要小于系统经过可逆等温膨胀过程从同样的初态变化到相同的末态所做的功。

不可逆膨胀



1.7 两个相同的木块 A 和 B，其热容量为 C 。两物体开始时的温度分别为 T_1 和 T_2 ($T_1 < T_2$)，接触后发生热传导，最后达到热平衡。

(a) 热传导前后，A,B 两物体的熵改变量分别为多少？

(b) 求 A,B 组成的系统在热传导前后的总熵变。

1.8 有一均匀的导热棒，长为 L ，横截面为 A ，密度为 ρ ，定压比热容为 C_p ，将棒一端与温度 T_1 的热源接触，另一端与温度为 T_2 的冷源接触，棒中不均匀温度分布，待稳定后，将棒撤离冷热源，保证绝热和等压，试求棒的熵变。

1.9 假设某热力学系统的熵函数为： $S = A(NVU)^{1/3}$ ，其中 A 为常数。

(a) 试给出 U, N, V 和 T 之间的关系， p, N, V 和 T 之间的关系，以及系统的定容热容量 C_V ；

(b) 现在假设两个相同的物体都由以上同一种物质组成。两者的 N 和 V 都是一样的，初始温度分别是 T_1 和 T_2 。在两者之间建立一个热机，从高温热源吸收热量，释放部分热量到低温热源，并对外做功。过程结束的时候两者达到共同的温度 T_f 。试问 T_f 参数范围？热机对外做功最大的时候， T_f 等于多少？

1.10 一种新物质具有如下状态方程， $p = AT^3/V$ ，式中 p, T, V 分别为压强、温度和体积， A 是常数，该物质的内能为 $U = BT^n \ln(V/V_0) + f(T)$ ，式中 B, n, V_0 均为常数， $f(T)$ 只依赖于温度，试确定 B, n 。

1.11 证明 $\frac{\partial(T, S)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(p, V)}{\partial(x, y)}$ ，其中 x, y 是两个任意的独立变量，并由此导出四个麦克斯韦关系式。

1.12 通过对 S 的全微分 $dS = \frac{p}{T}dV + \frac{1}{T}dU$ （将之看作为一形式）求外微分，证明：

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T.$$

1.13 某系统的吉布斯自由能为 $G(p, T) = RT \ln[ap/(RT)^{5/2}]$ ，其中 a, R 均为常数，求定压热容量 C_p 。

1.14 引入 $\beta \equiv 1/k_B T$ ，试证明：

$$\left(\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} \right)_{V, N} = U.$$

1.15 克拉默斯 (Kramers) 函数 q 定义为： $q = -J/T$ 。式中 J 为巨热力学势，证明 q 的全微分为： $dq = -Ud\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{p}{T}dV + Nd\left(\frac{\mu}{T}\right)$ ，并由此证明： $\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{V, \frac{\mu}{T}} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T, V} \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T, V}$ 。

1.16 理论上可以计算得到相对论性的正负电子对等离子的巨热力学势为 (详见: § 5.4.6):

$$J_{\pm}(T, V, \mu) = -\frac{8\pi}{12h^3c^3} \left[\mu^4 + 2\pi^2\mu^2(k_B T)^2 + \frac{7\pi^4}{15}(k_B T)^4 \right] V$$

其中 μ 为单粒子化学势。试计算系统的压强、粒子数 ($N_{\pm} = N_{e^-} - N_{e^+}$, 为电子数与正电子数差)、熵以及内能。如果系统中存在几乎等量的电子和正电子, 即 $N_{e^-} \simeq N_{e^+}$, 请问电子的化学势等于多少?

2 第二章：典型热力学系统

2.1 以单原子分子理想气体为例, 计算理想气体的熵 $S = S(T, V, N)$ 以及 $S = S(U, V, N)$ 。

2.2 一理想气体的绝热指数 $\gamma = C_p/C_V$ 是温度的函数, 求在准静态绝热过程中 T 与 p 的关系, 这些关系中用到一个函数 $F(T)$, 它由下式决定: $\ln F(T) = \int \frac{dT}{(\gamma-1)T}$ 。

2.3 证明理想气体在节流过程前后温度不变。

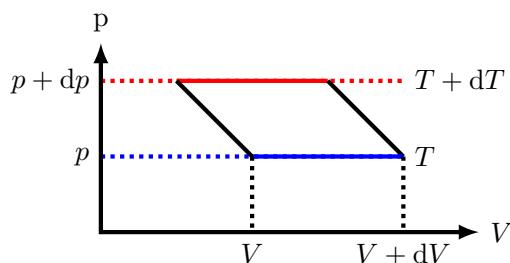
2.4 已知一实际气体的内能表达式为 $U = cT - a/V$ (其中 a, c 均为常数), 试求气体的定容比热 C_V 和定压比热 C_p 。

2.5 试由范德瓦尔斯气体的状态方程, 计算范式气体如下量:

- (a) 热膨胀系数 α ;
- (b) 定压和定容比热之差 $C_p - C_V$;
- (c) 在维持气体的温度不变, 气体的体积由 V_1 变到 V_2 的过程中气体的熵增量 $S_2 - S_1$ 。

2.6 考察与周围环境绝热的处于均匀磁场 B 中的顺磁系统。系统的磁化强度为: $M = CB/T$, 热容量为: $C_H = b/T^2$, 其中 C 和 b 是常数。当 B 准静态降为零时, 系统温度会发生怎样的变化? 为了使最终温度比初始温度变化 2 倍, 初始 B 的强度应该是多少?

2.7 假设采用光子气体作为卡诺热机的工作物质, 已知光子气体的状态方程为: $p = u(T)/3$, 其中 $u(T)$ 为单位体积的光子气体的内能。设计如下的无穷小的卡诺循环:



- (a) 试计算 dW , 用 dp, dV 表示;
- (b) 在等温膨胀 (也就是等压膨胀) 过程中, 试计算光子气体从温度为 T 的热源吸收的热量 Q , 用 p, dV 表示;
- (c) 用卡诺循环的效率, 得到 W, Q 与 T, dT 之间的关系, 进一步证明: $u(T) \propto T^4$;
- (d) 试计算光子气体的绝热指数, 即在 pV 图上, 绝热曲线方程是什么?

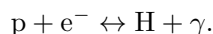
- 2.8 平衡辐射突然从具有理想反射硬壁的容积为 V_1 的空腔中辐射到具有同样器壁的容积为 V_2 的空腔中，试求终态辐射场的温度和熵的增量。
- 2.9 将空窖内平衡辐射看做热力学系统，以 T, V 作为状态参量，其内能密度与内能的关系为： $U(T, V) = u(T)V$ ，利用热力学公式导出 u 与温度 T 的关系。
- 2.10 实验测得某种顺磁物质的温度随磁场 B 和磁化强度 M 的变化率分别为 $(\frac{\partial B}{\partial T})_M = \frac{B}{T}$ ， $(\frac{\partial M}{\partial T})_B = -\frac{CB}{T^2}$ ，其中 C 为常数。试求该顺磁物质的状态方程。

3 第三章：相变和临界现象

3.1 证明：

- (a) 在 S, V 不变的情况下，稳定平衡态的 U 最小；
- (b) 在 S, p 不变的情况下，稳定平衡态的 H 最小；
- (c) 在 F, V 不变的情况下，稳定平衡态的 T 最小。

3.2 考察由等量的质子和电子以及部分中性氢原子组成的中性气体。氢原子电离-复合平衡过程为：



假设系统已达到热平衡，即系统的温度 T 和体积 V 已给定。如果系统的自由能为：

$$F = F(T, V; n_e, n_p, n_H),$$

根据 F ，可以给出质子、电子和氢原子的化学势的定义：

$$\mu_i = \left(\frac{\partial F}{\partial n_i} \right)_{T, V, n_j}, \quad n_j \neq n_i.$$

在系统进一步电离-符合平衡之后，系统的自由能 F 取极值。据此证明系统化学平衡条件为：

$$\mu_p + \mu_e^- = \mu_H.$$

如果事先给定系统的温度 T 和压强 p ，这时候系统的化学平衡条件是什么？

- 3.3 试证明在相变中物质摩尔内能的变化为： $\Delta U_m = L(1 - \frac{p}{T} \frac{dT}{dp})$ 。如果其中一相是气相，另一相是凝聚相，试将公式简化。
- 3.4 在标准大气压下， $4.0 \times 10^{-3} \text{kg}$ 的酒精沸腾转化为酒精蒸汽。已知酒精蒸汽的比容为 $0.607 \text{ m}^3/\text{kg}$ ，酒精的汽化热 $L = 8.63 \times 10^5 \text{ J/kg}$ ，酒精的比容与酒精蒸汽的比容相比可以忽略。求酒精在汽化过程中内能的变化量。
- 3.5 固体锌在 570K 到 630K 之间的蒸气压近似由下式给出： $\lg p = -\frac{6800}{T} = 9.0$ ，忽略固体的体积，蒸气作为理想气体，计算升华热。
- 3.6 两相平衡共存系统的定容热容量、体膨胀系数和等温压缩系数 C_p, α, κ_T 都是无穷大，试说明之。
- 3.7 在 $p-T$ 图中，范德瓦尔斯气体的多条等温线上，各条等温线的极大点与极小点连成了一条曲线。证明，这条曲线的方程为 $pv^3 = a(v - 2b)$ 。

3.8 对于 1 摩尔范德瓦尔斯气体，其状态方程为： $(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$ 。

- (a) 求气体在临界点处的压强 p_c ，体积 V_c ，温度 T_c ；
- (b) 用约化变量 $p_0 = p/p_c, V_0 = V/V_c, T_0 = T/T_c$ 重新写出范德瓦尔斯气体的状态方程，观察方程的形式，对于所有满足范德瓦尔斯状态方程的气体，可以得出什么结论？

3.9 狄特里奇 (Dieterici) 气体的状态方程为：

$$p = \frac{k_B T}{v - b} \exp(-a/k_B T v),$$

其中 $v = V/N$ 。试计算系统相变的临界温度 T_c ， $p_c v_c / k_B T_c$ ，以及临界指数 β, δ, γ 。

3.10 某系统的自由能 F 表达式为：

$$F(T, m) = a(T)m^2 + b(T)m^4 + c(T)m^6,$$

其中 m 为序参量， $b(T) < 0, c(T) > 0$ ，保证了系统的稳定性。画示意图表示 F 随着 $a(T)$ 变化的行为。在每一种情形中，找到系统的基态和可能的亚稳态。说明系统在某个临界温度 T_c 时反生一级相变。给出 $a(T_c)$ 的值，以及 m 在相变过程中的差值 (m 的不连续性)。

3.11 很多金属在低温和低磁场的情况下会变成超导体。在外磁场 $B = 0$ 时，两相的热容量近似为：

$$\begin{aligned} C_s(T) &= V\alpha T^3, \quad \text{超导相} \\ C_n(T) &= V[\beta T^3 + \gamma\alpha T], \quad \text{正常相} \end{aligned} \tag{2}$$

其中 V 是体积， α, β, γ 为常数。在相变过程中，体积没有明显变化，忽略体积功。

- (a) 计算两相的绝对熵 $S_n(T), S_s(T)$ ；
- (b) 实验发现，在 $B = 0$ 时，相变过程没有潜热 ($L = 0$)。试计算相变温度 T_c ，用 α, β, γ 表示；
- (c) 在零温时，超导体中的电子形成库伯对 (Cooper pairs)，导致超导体的内能减少了 $V\Delta$ ，其中 Δ 称之为超导能隙。假设在零温时正常态的内能为 $U_s(T = 0) = U_0$ ，则超导态的内能为： $U_s(T = 0) = U_0 - V\Delta$ 。试计算温度不等于零时，两相的内能： $U_s(T), U_n(T)$ ；
- (d) 比较两相的吉布斯自由能或化学势，计算超导能隙 Δ ，用 α, β, γ 表示。
- (e) 在外磁场不为零时， $dU = TdS + BdM + \mu dN$ ，这里 M 是磁矩。超导体具有良好的抗磁性，将内部磁场完全排出，即： $M_s = -VB/4\pi$ (取合适的单位)。正常金属可以认为没有磁性，即 $M_n = 0$ 。试证明金属从正常态转变超导态时的临界磁场为：

$$B_c = B_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right) \tag{3}$$

4 第四章：理想经典气体的统计理论

4.1 给出熵的玻尔兹曼统计定义，简要阐述其物理意义。一个两能级系统，能量分别为 $\epsilon_1, \epsilon_2 (\epsilon_1 < \epsilon_2)$ ，粒子数分别为 n_1, n_2 ，且 $n_1 + n_2 = N$ ，系统与一温度为 T 的热库接触。 $n_2 \rightarrow n_2 - 1, n_1 \rightarrow n_1 + 1$ ，且 $n_1 \gg 1, n_2 \gg 1$ ，试求：两能级系统的熵变；热库的熵变；以及求出 n_2/n_1 的玻尔兹曼分布。

4.2 由 $p = -\sum_l a_l \frac{\partial \epsilon_l}{\partial V}$ ，证明：

(a) 对于非相对论粒子 $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ 来说， $p = \frac{2}{3}u$ ；

(b) 对于相对论粒子 $\epsilon = pc$ 来说， $p = \frac{1}{3}u$ 。

4.3 设容器内的理想气体处于平衡态，并满足经典极限条件，试证明单位时间内碰到器壁单位面积上得平均分子数为： $\tau = \frac{1}{4}n\bar{v}$ 。

4.4 已知粒子遵从经典玻尔兹曼分布，其能量表达式为： $\epsilon = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + ax^2 + bx$ ，其中 a, b 是常数，求粒子的平均能量。

4.5 在极端相对论 ($\epsilon = pc$) 的情况下，求出由服从玻尔兹曼分布的理想气体的内能、热容量和状态方程，并与非相对论下的结果比较。

4.6 一维运动的单粒子的哈密顿量为：

$$H = \frac{p^2}{2m} + \lambda q^4,$$

证明包含 N 个粒子的该理想气体的比热为 $C_V = \frac{3}{4}Nk_B$ 。

4.7 一个具有量子化能量的三维转子体系（有两个转动自由度，无平移运动），遵守玻尔兹曼统计。试计算每个转子在高温下的自由能、熵、内能以及比热容。可利用欧拉近似公式： $\sum_{J=0}^{\infty} f(J + \frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{24}[f'(0) - f'(\infty)] + \dots$ 。

4.8 考察囚禁在偶极势的气体。在 d 维理论中，单粒子受到的势能为：

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \omega_i^2 x_i^2.$$

如果 $\epsilon \gg \hbar\omega_i$ 试计算 $d=2$ 和 $d=3$ 情形下粒子的态密度函数 $D(\epsilon)$ 。

4.9 考察受到一堵墙限制的經典气体，气体分子只能在 $x \geq 0$ 的区域运动，并受到墙的吸引力，粒子势能为：

$$V(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2.$$

粒子在 y, z 方向可自由运动。试证明粒子在 x 方向的分布函数为：

$$N(x) = 2N \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2\pi}} e^{-\alpha\beta x^2/2}.$$

进一步说明在 $x - x + \Delta x$ 的薄层内，气体局域满足理想气体公式。

4.10 试根据麦克斯韦速率分布律导出两分子的相对速度 $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ 和相对速率 $v_r = |\mathbf{v}_r|$ 的概率分布，并证明相对速率的平均值 $\bar{v}_r = \sqrt{2}v$ 。其中， $v = \sqrt{8k_B T / \pi m}$ 为气体分子的平均速度。

4.11 由麦克斯韦速度分布可得，分子存在热运动，而由多普勒效应可以知道热运动会导致高温气体光谱变宽。

(a) 假设某种分子的谱线波长为 λ_0 ，求考虑多普勒展宽后，谱线强度 I 与波长 λ 之间的关系；

(b) 求出谱线波长的平均值以及弥散宽度。

4.12 一个体积为 V 的容器被隔板分成两部分，左边部分的体积为 V_1 ，右边部分的体积为 V_2 ，容器充满稀薄气体，气体分子不能穿过隔板。整个系统与外部热库处于热平衡，热库温度为 T 。

(a) 第一种情形：左边有 N_1 个 ^4He 分子，右边有 N_2 个 ^3He 分子。在隔板上开一小孔后，两边气体可均匀混合。试求气体在混合前后的熵的改变量。假设温度很高，气体可当做经典气体；

(b) 第二种情形：容器两边都是 ^4He 气体，两边的气体压强分别为 p_1 和 p_2 ，试求开孔前后熵的改变量。若 $p_1 = p_2$ ，则熵的改变量为多少？

4.13 一固体有 N 个彼此无相互作用的粒子，粒子的自旋量子数为 1，每个粒子有三个量子态，量子数 $m = -1, 0, 1$ 。在固体中，处在量子态 $m = 1$ 和 $m = -1$ 的粒子，具有相同的能量 ϵ ， $\epsilon > 0$ ，处在状态 $m = 0$ 的粒子，能量为 0。试导出：

(a) 熵 S 与温度 T 的函数关系；

(b) 在高温极限 $\epsilon/k_B T \ll 1$ 下得比热容的表达式。

4.14 一个具有 N 个服从玻尔兹曼分布的粒子系统有两个状态，两个状态的能量与简并度分别为 ϵ_1 ， g_1 和 ϵ_2 ， g_2 ，并且有 $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ， $g_2 > g_1$ 。

(a) 求出系统的配分函数；

(b) 求出系统的内能与比热容；

(c) 求出系统的熵，并讨论当 $T \rightarrow 0\text{K}$ 与 $T \rightarrow \infty$ 时，熵的情况。

4.15 一个三能级系统，其能级分别为 $E_1 = 0$ ， $E_2 = 2\epsilon$ ， $E_3 = 10\epsilon$ 。用玻尔兹曼分布表示温度为 T 时，三个能级上粒子数的关系，并求出此时系统的平均能量以及比热容。当温度为高温或者低温极限时，其比热容可近似为多少？

4.16 A，B 两种原子随机放在晶格阵中，其中总原子数为 N ，A 原子所占比例为 x ，试求出随机分布引起的混合熵为多少？

4.17 对于一个三维的晶格阵，在正常情况下共可以容纳 N 个原子，由于某些外在原因，现产生了缺陷形成了 n 个缺陷。已知缺陷的能量比有原子的能量要少 μ ，用自由能 $F = m\mu - TS$ 最小，证明在温度为 T 时，缺陷的原子数为 $n \approx N e^{-\frac{\mu}{2k_B T}}$ 。

4.18 魏格纳晶体为二维的三角形电子晶格。其纵模的色散关系为： $\omega = \alpha\sqrt{k}$ 。试证明在晶体温度接近绝对零度时，晶体的比热 $C \sim T^4$ 。

4.19 考察郎之万的顺磁介质模型。假设介质中的磁矩为分子磁矩，每个分子磁矩的磁矩为 μ ，转动惯量为 I 。分子磁矩在磁感应强度 B 中相互作用势能为： $V = -\mu B \cos \theta$ ，其中 θ 为磁矩与外磁场的夹角。证明磁矩转动部分的巨配分函数为：

$$Z_r = (z_r)^N, \quad z_r = \left[\frac{2I}{\hbar^2 \mu B \beta^2} \right] \sinh(\beta \mu B).$$

- (a) 计算磁介质的总磁矩 M (磁化强度) ;
- (b) 在 $\beta\mu B$ 很大的情况下, 计算系统的相互作用势能平均值。

5 第五章：理想量子气体的统计理论

- 5.1 一顺磁性固体由 N 个自旋量子数为 s 的粒子组成, 粒子在格点上固定不动。试求系统的配分函数、内能、比热容、熵以及磁矩。
- 5.2 一个顺磁系统是由 N 个磁矩为 μ 的磁偶极子组成, 将系统放置在温度为 T 的均匀外场 B 中。假设磁偶极子分布满足玻尔兹曼分布, 求出系统的总磁矩; 在外场 B 给定时, 求出系统的比热容。
- 5.3 对于玻色系统, 引入巨配分函数: $\Xi = \prod_i \Xi_i = \prod_i [1 - e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}]^{-\omega_i}$, 用巨配分函数表示出系统中粒子的内能 U , 压强 p 和熵 S 。
- 5.4 证明理想玻色气体的熵为 $S_{BE} = -k_B \sum_s [f_s \ln f_s - (1 + f_s) \ln(1 + f_s)]$, 其中 f_s 为量子态 s 的占有数。
- 5.5 在弱简并条件下, 求理想玻色气体的压强和熵。
- 5.6 证明: 二维理想玻色气体不会发生玻色-爱因斯坦凝聚。光子气体为什么不能发生玻色-爱因斯坦凝聚?
- 5.7 求固体的巨配分函数 Ξ , 并求出其内能和定容比热容。然后讨论固体比热容在低温和高温极限下的近似值。
- 5.8 设理想玻色气体的粒子数、温度及体积分别为 N, T 与 V 。试根据玻色-爱因斯坦分布, 证明理想玻色气体的化学势 μ 具有如下性质:
- (a) $(\frac{\partial \mu}{\partial T})_{N,V} < \frac{\mu - \epsilon_0}{T} < 0$, 式中 ϵ_0 为单粒子基态能级的能量;
 - (b) $(\frac{\partial \mu}{\partial N})_{T,V} > 0$ 。
- 5.9 假设太阳为一个温度为 6000K 的黑体, 其辐射光谱中极大值的波长为多少? 又已知太阳的半径为 10^6km , 求其在波长为 1cm 处单位波长发生的微波功率。
- 5.10 氦氖激光器产生波长为 632.8nm 的准单色光, 光束功率为 1mW , 弥散角 10^{-4} 弧度, 带宽 0.1nm 。如果面积为 1cm^2 的黑体的热辐射, 通过恰当的滤波要形成这样一束辐射, 问黑体温度是多少?
- 5.11 已知 $u_\lambda(T) d\lambda = 8\pi \frac{hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1} d\lambda$
- (a) 分别取 $T=100\text{K}$, 200K 和 400K , 用数学软件画出 $\ln \mu_\lambda$ 和 $\ln \lambda$ 的关系即普朗克曲线;
 - (b) 维恩位移法则在此双对数图上是如何表现的?
 - (c) 从理论上证明 $\ln u(\lambda_m)$ 和 $\ln \lambda_m$ 的关系与 (b) 中的结果一致。
- 5.12 光子为玻色子, 为什么光子气体不能发生玻色爱因斯坦凝聚 (BEC)?
- 5.13 在 $d=2$ 维系统中, 态密度函数为常数。试说明 2 维时无论系统的温度都低, BEC 不能发生。

5.14 考察某玻色气体，其态密度函数为 $D(\epsilon) = C\epsilon^{\alpha-1}$ ，其中 $\alpha > 1$ 。

- (a) 试计算 BEC 发生时的临界温度 T_c ;
- (b) 在 BEC 实验中，原子被囚禁在磁势阱中。如果原子囚禁在三维势阱中，试计算临界温度 T_c 。如果原子囚禁在二维势阱中，说明临界温度 T_c 会更低一些。
- (c) 计算在 $T < T_c$ 时，在 $d = 2, 3$ 维磁势阱中凝聚的原子数目 $N(T < T_c)$ 。

5.15 证明理想费米气体的熵可表示为： $S_{FD} = -k_B \sum_j [f_j \ln f_j + (1 - f_j) \ln(1 - f_j)]$ ，式中， f_j 为量子态 j 上的粒子数。求在 $f_j \ll 1$ 时，熵的表达式。

5.16 对于理想费米气体：

- (a) 利用声速公式 $v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$ ，证明 $T = 0K$ 时的声速为 $v_s = v_F/\sqrt{3}$ ，其中 v_F 为费米速度 ($v_F = p_F/m$)；
- (b) 证明 $T = 0K$ 时，等温压缩系数与绝热压缩系数相等，满足 $\kappa_T = \kappa_S = \frac{3}{2} \frac{1}{n\mu_0}$ ，其中 $\mu_0 = \epsilon_F$ 为费米能，即零温下的化学势。

5.17 在高温时，电子的状态方程为：

$$pV = Nk_B T \left(1 + \frac{\lambda_T^3 N}{4\sqrt{2}g_s V} + \cdots \right).$$

5.18 金属中的电子。

- (a) (1) 为什么费米-狄拉克分布适用于金属中的导电电子气体？它怎样修正了电子对比热的贡献；
- (b) 金属中的电子遵守费米-狄拉克统计，为什么热发射产生的电子气体遵守麦克斯韦-玻尔兹曼统计。

5.19 铅的密度为 11.4g/cm^3 ，原子量为 208g/mol ，求出铅的原子数密度 n_{pb} ，导电电子数密度 n_e 以及其化学势。

5.20 求出强简并情况下费米气体的巨配分函数，并得到气体的巨热力学势。

$$J = -pV = -a \left(\frac{4}{15} \mu^{5/2} + \frac{\pi^2}{6\beta^2} \mu^{1/2} - \frac{7\pi^4}{1440\beta^4} \mu^{-3/2} \right) \quad (4)$$

其中， $a = 2\pi g V (2m)^{3/2} / h^3$ ， g 为简并度， $\beta = 1/k_B T$ 。

5.21 设局限在二维平面上运动的自由电子气体，其单位面积内的电子数为 Σ 。

- (a) 计算 $T = 0K$ 时的化学势 μ_0 ，内能 u_0 和压强 p_0 。
- (b) 计算 $T \neq 0K$ ，但满足 $\frac{k_B T}{\mu_0} \ll 1$ 情形下的 μ, u, S, p 。

5.22 对理想电子气体，单电子态的平均粒子数为： $f_i = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/k_B T} + 1}$ ，其中 ϵ_i 为量子态 i 的能量。

- (a) 求用粒子数密度 n 和其他常数表示化学势 μ 的公式；
- (b) 证明上述表达式在 $n\lambda^3 \ll 1$ 时回到玻尔兹曼公式，其中 λ 是热运动的德布罗意波长；

5.23 考察一个简单的半导体模型。假设系统由 N 个电子束缚态，束缚态的能量为 $-\Delta < 0$ 。在零温时，它们都被电子占满。在非零温时，一些电子被热激发到能量为正的连续导带态，这些态的态密度为： $D(\epsilon)d\epsilon = A\sqrt{\epsilon}d\epsilon$ ，其中 A 为常数。试证明，在温度 T 时，激发态平均电子数 n_c 由如下方程决定：

$$n_c = \frac{N}{e^{(\mu+\Delta)/k_B T}} = \int_0^\infty \frac{D(\epsilon)d\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1}.$$

如果： $n_c \ll N$ ， $k_B T \ll \Delta$ ，以及： $e^{\mu/k_B T} \ll 1$ ，则：

$$2\mu \simeq -\Delta + k_B T \ln \left[\frac{2N}{A\sqrt{\pi}(k_B T)^3} \right]$$

5.24 白矮星和中子星。

- (a) 一个白矮星的质量为 $2 \times 10^{30} \text{kg}$ ，其半径为 10^7m ，假设其中全部的电子已电离，求出电子和核子的费米能，假设白矮星的温度为 10^7K ，此时电子、核子的简并程度如何？
- (b) 若是一个相同质量以及温度的中子星，其半径为 10km ，此时电子、核子的简并程度又是如何的？
- (c) 假设中子星核区由自由的中子、质子和电子组成，并且它们都是极端相对论简并气体，试根据重子数守恒、化学平衡条件以及电中性条件证明中子星核区中子和质子数密度之比为： $n_n : n_p = 8 : 1$ 。

5.25 半定性地分析白矮星非相对论性模型。假设白矮星的质量半径分别为 M, R ，它由自由的电子与等量质子组成。

- (a) 取零温近似，估算所有电子的总内能 U_e ；
- (b) 根据量纲分析，星体的自引力能为 $E_g = -\gamma GM^2/R$ ，其中 γ 为约等于 1 的无量纲的常数，它依赖于星体内部具体的密度分布。当星体达到流体静力学平衡时，其总能量 $E = E_g + U_e$ 取极值。据此证明白矮星的质量-半径关系满足： $R \sim R^{-1/3}$ (参见式??)；
- (c) 试说明为什么可以忽略掉质子内能对总能量的贡献？

5.26 钱德拉塞卡极限：白矮星的最大质量。考虑铁白矮星，即白矮星内部由铁原子核加电子组成。白矮星内部的压强主要来自电子的费米简并压。根据统计物理，可以得到白矮星的状态方程如下：

$$\rho = 9.74 \times 10^8 \mu_e x_e^3 \text{ kgm}^{-3} \quad (5)$$

$$p = 1.42 \times 10^{24} \phi(x_e) \text{ Nm}^{-2} \quad (6)$$

其中 μ_e 为电子的平均分子量，即将原子核平均分给每个电子，每个电子分到的核子数。对于铁白矮星，显然， $\mu_e = 56/26 \simeq 2.15$ 。公式中 x_e 为无量纲化电子的费米动量，即电子的费米动量 p_F 与 $m_e c$ 的比值：

$$x_e = \frac{p_F}{m_e c} \quad (7)$$

在密度低的时候，有 $x_e \ll 1$ ，即电子是非相对论的。在密度高的时候有 $x_e \gg 1$ ，即电子是极端相对论的。 $\phi(x)$ 的表达式为：

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \{x(1+x^2)^{1/2}(2x^2/3 - 1) + \ln[x + (1+x^2)^{1/2}]\} \quad (8)$$

简单分析可知：

$$\phi(x) \simeq \frac{1}{15\pi^2} x^5, \quad (x \ll 1) \quad (9)$$

$$\phi(x) \simeq \frac{1}{12\pi^2} x^4, \quad (x \gg 1) \quad (10)$$

也就是说，在密度比较低的时候，电子的非相对论的 ($x_e \ll 1$)，状态方程近似为：

$$p \sim \rho^{5/3} \quad (11)$$

在密度比较高的时候，电子变得极端相对论 ($x_e \gg 1$)，状态方程近似为：

$$p \sim \rho^{4/3} \quad (12)$$

请通过数值计算如下的常微分方程组，得到一系列的白矮星的质量和半径关系 (M, R)。其中质量请用太阳质量为单位 ($M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$)。

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \quad (13)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (14)$$

注意，为了得到白矮星的最大质量，核心处 ($r = 0$) 的密度 (ρ_c) 应该取高于 $x_e = 1$ 对应的密度。现在有很多现成的小程序可以直接调用，例如 python scipy 中的 odeint, matlab 中的 ode 等等。数值计算得到的白矮星的最大质量是多少？请根据计算结果作如下两幅图：(1) $\rho_c - M$; (2) $M - R$ 。数据点取最大质量附近的系列值（参考文献：Chandrasekhar, S., 1931, Astrophysical Journal, vol. 74, p.81）

5.27 奥本海默极限：中子星的最大质量。奥本海默在最初研究中子星最大质量的时候，假设中子星由纯中子组成。中子星内部的压强由中子的费米简并压提供。根据统计物理，可以得到中子气体的状态方程：

$$\rho = 1.80 \times 10^{20} \chi(x_n) \text{ kg m}^{-3} \quad (15)$$

$$p = 1.62 \times 10^{37} \phi(x_n) \text{ N m}^{-2} \quad (16)$$

其中 $x_n = p_F/m_n c$ 为中子无量纲化的费米动量。 $\chi(x), \phi(x)$ 的表达式为：

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \frac{1}{8\pi^2} \{x(1+x^2)^{1/2}(2x^2 + 1) - \ln[x + (1+x^2)^{1/2}]\} \\ \phi(x) &= \frac{1}{8\pi^2} \{x(1+x^2)^{1/2}(2x^2/3 - 1) + \ln[x + (1+x^2)^{1/2}]\} \end{aligned} \quad (17)$$

简单分析可知：

$$\chi(x) \simeq \frac{1}{3\pi^2} x^3, \quad \phi(x) \simeq \frac{1}{15\pi^2} x^5, \quad (x \ll 1) \quad (18)$$

$$\chi(x) \simeq \frac{1}{4\pi^2} x^4, \quad \phi(x) \simeq \frac{1}{12\pi^2} x^4, \quad (x \gg 1) \quad (19)$$

对于纯中子气体的状态方程，也可以采用如下形式的状态方程：

$$\rho = 5.71 \times 10^{17} (\sinh t - t) \text{ kg m}^{-3} \quad (20)$$

$$p = 1.71 \times 10^{34} [\sinh t - 8 \sinh(t/2) + 3t] \text{ N m}^{-2} \quad (21)$$

其中：

$$t = 4 \sinh^{-1}(p_F/m_n c) = 4 \ln \left(x_n + [1 + x_n^2]^{1/2} \right) \quad (22)$$

对于典型的中子星来说，它的半径非常接近同样质量黑洞的史瓦西 (Schwarzschild) 半径，因此，必须用广义相对论版的流体静力学平衡方程，Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程组处理：

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G \left[m(r) + \frac{4\pi r^3 p(r)}{c^2} \right]}{r^2 \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]} \left[\rho(r) + \frac{p(r)}{c^2} \right] \quad (23)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (24)$$

请通过数值计算，得到一系列的中子星的质量和半径关系 (M, R)。数值计算得到的中子星的最大质量是多少？请根据计算结果作如下两幅图：(1) $\rho_0 - M$ ；(2) $M - R$ (参考文献：Oppenheimer, J. R.; Volkoff, G. M., 1939, Physical Review, vol. 55, Issue 4, pp. 374-381)

5.28 将费米-狄拉克分布改写为

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} = \frac{1}{e^{\eta(x-1)} + 1} \quad (25)$$

其中 $x \equiv \epsilon/\mu$, $\eta \equiv \mu/k_B T$

(a) 分别取 $\eta = \mu/k_B T = 20, 50$ ，用数学软件绘出 $f(\epsilon)$ 和 $df(\epsilon)/d\epsilon$ 与 $x = \epsilon/\mu$ 的关系曲线；

(b) 根据所绘出的曲线，说明费米-狄拉克分布随温度增高而变化的情况。

6 第六章：系综理论

6.1 假设系统中有 N 个粒子，选 Γ 空间的坐标为：($\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N$)，不妨假设系统的哈密顿量为 H 。

(a) 试用微正则系综理论，证明广义的能均分定理：

$$\left\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij} k_B T$$

其中 x_i 可取 Γ 空间的任一坐标，比如 $x_i = q_i/p_i$ ；

(b) 证明如下的维里定理：

$$\left\langle \sum_{i=1}^{3N} q_\alpha \dot{p}_\alpha \right\rangle = -3N k_B T$$

6.2 两个系统的配分函数为 Z_1 和 Z_2 ，在相同的外界条件下将这两个系统相互热接触，证明之后的系统配分函数 $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$ ，并求出系统的能量，得到热力学系统中两个系统能量的相加性结论。

- 6.3 有两个耦合系统组成的微正则系综，可以证明当两个系统的温度相等的时候，微正则系综的熵取极值。试证明，只有在两个子系统的热容量为正的条件下，微正则系综的熵取极大值，而不是极小值。
- 6.4 试由正则分布证明：体系的熵 $S = -k_B \sum_s \rho_s \ln \rho_s$ ，式中 ρ_s 是体系处在状态 s 的概率。
- 6.5 一个链状的系统，链子只可以向其中一端延伸，假设每次向外延伸距离固定为 L 且每延伸一次能量增加 $\Delta\epsilon$ 。(1) 求链子的配分函数；(2) 温度为 T ($\Delta\epsilon \ll k_B T$) 时，链子的长度平均值。
- 6.6 一个系统表面由 N_0 个吸附格点组成，每个格点之间没有相互作用，每个格点内部结构又是由 A、B 两个小格点组成。当系统未吸附外来分子时，系统能量为 0，若 A 吸附了一个分子，则能量为 $-\epsilon_A$ ；若 B 吸附了一个分子，则能量为 $-\epsilon_B$ ；若 A、B 同时都吸附了一个分子时，A 和 B 间存在相互作用势 μ_{AB} 。求系统的吸附率 $\theta(T, \mu_{AB}) = \langle N \rangle / N_0$ 。
- 6.7 有两种不同分子组成的混合理想气体，处于平衡态。设该气体满足经典极限条件，且可以把分子当做质点(即忽略其内部运动自由度)。试用正则系综求该气体的 $p, \langle E \rangle, S, \mu_i (i = 1, 2)$ 。
- 6.8 有一极端相对论性的理想气体，粒子质能关系为： $\epsilon = cp$ ($p = |\mathbf{p}|, c$ 为光速)，并满足非简并条件。设粒子的内部运动自由度可以忽略(即可将粒子看成质点)。试证明系统总粒子数为 N 的正则系综的配分函数为：

$$Z(T, V) = \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \right]^N.$$

并求该气体的 $p, \langle E \rangle, S, \mu, C_V, C_p$ 。气体的状态方程是否满足理想气体的状态方程： $pV = Nk_B T$ ？

- 6.9 **三态 Potts 模型**。Potts 模型是 R.B.Potts 在 1952 年提出的。假设模型有 N 个格点位置，分别标上 $1, 2, \dots, N$ 。每个位置 i 与一个自旋量 σ_i 相对应，可以有 q 个取值，分别为 $1, 2, \dots, q$ ，两个相邻的自旋 σ_i 和 σ_j 相互作用的能量为： $-J\delta_{\sigma_i \sigma_j}$ ，这里 $\delta_{\sigma_i \sigma_j}$ 为 Kronecker 符号。系统的哈密顿量为：

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i \sigma_j}.$$

如当 q 为偶数时可映射为自旋为 $1/2(q+1)$ 的伊辛模型；当 q 为奇数时可映射为自旋为 $1/2(q-1)$ 的伊辛模型。这些模型的研究对超导超流等问题有着重要的意义。

(a) 在 $T = 0$ 时，系统有多少个基态？

(b) 3 态的 Potts 模型等价于如下的哈密顿系统：

$$H = -\frac{2}{3}J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j,$$

其中 \mathbf{s}_i 可能的取值为：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

试发展一个平均场理论，自治地计算系统的磁矩 $\mathbf{m} = \langle \mathbf{s}_i \rangle$ 。计算平均场的自由能，说明即使在外场的情况下，系统也存在一个一级相变。

6.10 用正则分布求出相对论性单原子气体分子的自由能，并求出其物态方程、内能、熵以及化学势。

6.11 一个量子小提琴弦振动的频率可以为 $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ 。每个振动可以看作独立的谐振子。忽略零点振动能，振动频率为 $p\omega$ 的振动模式的总能量为： $E_N = N\hbar p\omega$ ，其中 N 为正整数。

(a) 写出在温度 T 时，弦振动的平均能量的表达式，并证明在高温时，量子弦的自由能为：

$$F = -\frac{\pi^2}{6} \frac{k_B^2 T^2}{\hbar \omega};$$

(b) 量子弦的配分函数为：

$$Z = \sum_N p(N) e^{-\beta E_N},$$

其中 $p(N)$ 为将整数 N 分解为一系列正整数之和的分配方案数。当 N 很大时，

$$p(N) \simeq \frac{1}{4\sqrt{3}N} e^{\sqrt{\frac{2N}{3}}\pi},$$

上式为哈代-拉马努金公式。对相对性的量子弦， $E_N = \sqrt{N}\hbar\omega$ 。证明相对论的量子弦存在最大的温度 T_{\max} ：

$$T_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi} \hbar \omega.$$

6.12 一个一维的长弹性分子链可以看作为一个由 N 个链条首尾线性而成。每个链条有两个量子数： (n, l) ，其中链条的长度 $l = a$ 或者 $l = b$ 。链条的固有频率分别为 ω_a 和 ω_b 。因此，链条的能量为：

$$E(n, l) = \begin{cases} (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_a, & l = a, \\ (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_b, & l = b. \end{cases}$$

假设整个链条处于温度为 T 的环境中，链条两段的张力为 F 。试求链条的平均能量、平均长度，以及分析在低温和高温极限下的表达式。

6.13 用巨正则分布求出相对论性单原子气体分子的巨热力学势，并求出其物态方程、内能、熵以及化学势。

6.14 一个由两个原子组成的系统，每个原子存在三个量子态，其能量分别为 $0, \epsilon, 3\epsilon$ 且无简并，将系统与 T 温度接触，根据以下具体情况，求系统的配分函数。(1) 原子服从玻色爱因斯坦统计的全同粒子；(2) 原子服从费米狄拉克统计的全同粒子；(4) 原子服从玻尔兹曼统计并且是可分辨的。

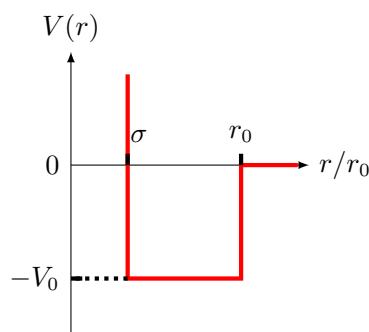
6.15 同上题，系统有三个量子态，其能量分别为 $0, \epsilon, 3\epsilon$ 且无简并，体系允许最多有两个全同粒子，如果 (1) 体系的粒子为费米子 (2) 体系的粒子为玻色子，求体系的巨配分函数、平均粒子数。

6.16 仿造三维固体的德拜理论，计算面积为 L^2 的原子层（二维晶格）在高温和低温下的内能和热容量。

- 6.17 被吸附在液体表面上的分子形成一种二维气体，分子之间相互作用为两两作用的短程力，且只与两分子的质心距离有关，不妨假设分子之间相互作用势能为： $\phi(r)$ 。试根据正则系综，证明在第二维里系数的近似下，该气体的物态方程为 $pA = Nk_B T(1 + \frac{B_2}{A})$ ，其中 A 为液面的面积， B_2 由下式给出： $B_2 = -\frac{N}{2} \sum (e^{-\phi(r)/k_B T} - 1) 2\pi r dr$
- 6.18 在低密度时，氮气 (N_2) 分子的状态方程可写为：

$$\frac{pV}{Nk_B T} = 1 + a_2(T) \frac{N}{V}$$

其中 $a_2(T)$ 为第二维里系数。可以用如下的方半高无穷大方势阱来模拟分子之间的相互作用。



其中 σ 为分子的半径， r_0 为分子的力程， V_0 为分子之间相互作用的势能大小。另一方面，从实验上测得不同温度下的 $a_2(T)$ 为：

温度 (K)	$a_2(T)$ K/atm
100	-1.80
200	-4.26×10^{-1}
300	-5.49×10^{-2}
400	1.12×10^1
500	-4.26×10^1

试给出 σ 、 r_0 和 V_0 的实验测量值。

- 6.19 证明：气体的压强 p ，体积 V ，温度 T 与气体的巨配分函数的对数 $\ln \Xi$ 间有关系 $pV = k_B T \ln \Xi$ 。该关系式是统计力学与热力学之间的重要桥梁。
- 6.20 对于单原子分子气体组成的玻尔兹曼理想气体，试由巨正则分布证明，在一小体积 V 中有 n 个分子的概率服从泊松分布，即

$$p_n = \frac{1}{n!} \langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle} \quad (26)$$

- 6.21 证明费米气体的巨配分函数 Ξ 可以写成 $\Xi = \prod_i [1 + \exp(-\alpha - \beta \epsilon_i)]$ ，式中， ϵ_i 为单粒子状态 i 的能量， $\alpha = -\beta \mu$ ， $\beta = 1/k_B T$ ， T, μ 分别为气体的温度和化学势。
- 6.22 在长方形的导体空腔内，频率为 ν 的光子数的涨落的方均根值是多少？它与平均光子数的关系？
- 6.23 求费米分布和玻色分布的涨落，并证明在不同能级，玻色分布和费米分布的涨落是互不相关的。

- 6.24 对于巨正则系综，证明： $\langle EN \rangle \neq \langle E \rangle \langle N \rangle$ 。这说明系统的平均能量 $\langle E \rangle$ 与平均粒子数 $\langle N \rangle$ 是有关联的。

7 气体动力论

- 7.1 考虑一维的气体。假设一开始它们位于坐标原点，速度服从麦克斯韦分布，即初始时刻气体的分布函数为 $\rho(q, p, t=0) = \delta(q)f(p)$ ，其中 $f(p) = \exp(-p^2/2mk_B T)/\sqrt{2\pi mk_B T}$ ， δ 为狄拉克 δ 函数。在没有外力作用的情况下，在 t 时刻气体的分布函数则为：

$$\rho(q, p, t) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(q - \frac{p}{m}t\right) + \delta\left(q + \frac{p}{m}t\right) \right] f(p).$$

- (a) 证明 $\rho(q, p, t)$ 满足刘维尔方程，并在相空间 (q, p) 画出分布函数 $\rho(q, p, t)$ ；
 - (b) 推导 t 时刻 $\langle q^2 \rangle(t)$ 和 $\langle p^2 \rangle(t)$ 的表达式；
 - (c) 假设在 $q = \pm q_0$ 处各有堵硬墙，在时间足够长 ($t \rightarrow \infty$) 之后， $\rho(q, p, t)$ 是如何分布的？请在相空间画出 t 时刻分布函数 $\rho(q, p, t)$ ；
 - (d) 将分布函数 ρ 在某个宏观小微观大的尺度平均，比如取大于分辨率尺度对 ρ 平均（称之为粗粒平均）得到平均过后的分布函数 $\tilde{\rho}$ 。试说明在经历足够长的时间之后，气体的 $\tilde{\rho}$ 是静态的，与时间无关。
- 7.2 归一化的分布密度 $\rho(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$ 是 Γ 空间的概率分布函数，可以定义与 ρ 对应的熵： $S(t) = - \int d^N \mathbf{q} d^N \mathbf{p} [\rho \ln \rho]$ ，显然熵 S 是分布函数 ρ 的泛函： $S(t) = S[\rho]$ 。
- (a) 如果系统的哈密度量为 H 。如果系统的分布函数 ρ 满足相应的刘维尔方程，证明： $dS/dt = 0$ ；
 - (b) 平衡态时，系统能量的系综平均值 $\langle H \rangle$ 等于系统热力学内能 U 。求系统达到平衡态时的分布函数 ρ_{eq} ，它使得 $S[\rho]$ 达到极大值（提示：用拉格朗日未定乘子法讨论）；
 - (c) 证明 $\partial \rho_{\text{eq}} / \partial t = 0$ ；
 - (d) 系统的熵在从非平衡态向平衡的演化过程中，即 ρ 向 ρ_{eq} 演化过程中，熵应该是不断增加的。如何理解 ρ 在演化过程中又满足 $dS/dt = 0$ ？

- 7.3 考虑由质子和电子组成的等离子体。系统中有 N 个质子和电子，系统的体积为 V ，因此质子和电子的平均数密度为 $n_0 = N/V$ 。质子和电子分别满足弗拉索夫方程：

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m_p} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + e \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] f_p(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m_e} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} - e \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] f_e(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= 0, \end{aligned}$$

其中有效的库伦势为：

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{q}, t) = V_{\text{ext}}(\mathbf{q}) + e \int d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' \varphi(\mathbf{q} - \mathbf{q}') [f_p(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t) - f_e(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t)], \quad (27)$$

这里 $V_{\text{ext}}(\mathbf{q})$ 为外部电荷产生的静电势，库伦势 $\varphi(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$ 满足泊松方程： $\nabla^2 \varphi(\mathbf{q} - \mathbf{q}') = 4\pi \delta^3(\mathbf{q})$ 。

- (a) 假设单粒子的密度满足如下静态的形式: $f_i = g_i(\mathbf{p})n_i(\mathbf{q})$ ($i = p, e$)。试说明有效势满足的方程如下:

$$\nabla^2 V_{\text{eff}} = 4\pi\rho_{\text{ext}} + 4\pi e[n_p(\mathbf{q}) - n_e(\mathbf{q})],$$

其中 ρ_{ext} 为外部电荷密度。上式表明, 有效势 V_{eff} 由外部电荷分布和等离子体内部分离电荷共同产生;

- (b) 进一步假设质子和电子密度弛豫到了平衡态分布, 即 $n_{p,e} = n_0 \exp[\pm eV_{\text{eff}}/k_B T]$, 则有效势满足如下的方程:

$$\nabla^2 V_{\text{eff}} = 4\pi [\rho_{\text{ext}} + n_0(e^{eV_{\text{eff}}/k_B T} - e^{-eV_{\text{eff}}/k_B T})].$$

上式是关于 V_{eff} 非线性的方程, 不好求解。将该方程线性化, 得到如下的德拜方程:

$$\nabla^2 V_{\text{eff}} = 4\pi [\rho_{\text{ext}} + V_{\text{eff}}/\lambda_D^2].$$

试给出德拜长度 λ_D 的表达式。

- (c) 试说明德拜方程有如下的通解:

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{q}' G(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \rho_{\text{ext}}(\mathbf{q}'),$$

其中 $G(\mathbf{q}) = \exp(-|\mathbf{q}|/\lambda_D)/|\mathbf{q}|$ 是库伦屏蔽势;

- (d) 给出弗拉索夫近似的自洽条件, 并用粒子之间的距离解释;
(e) 试说明特征弛豫时间 ($\tau \simeq \lambda_D/v$) 与温度无关, 该特征时标的倒数对应等离子体的振荡频率, 即德拜频率 ω_D 。

7.4 利用分子运动论可以讨论气体的输运, 例如气体的热导率。考察在两个无限大平行板之间的气体的热传导。假设一块板位于 $x_1 = 0$ 处, 板的温度为 T_1 , 另一块板位于 $x_2 = d$ 处, 板的温度为 T_2 。作为零阶近似, 假设气体已达到局域热平衡, 各处气体的温度为 $T(x)$, 因此, 单粒子的密度分布为:

$$f_1^0(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{n(x)}{[2\pi m k_B T(x)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m k_B T(x)}\right].$$

- (a) 证明气体的速度 $\mathbf{u} = \langle \mathbf{p}/m \rangle^0 = 0$, 上标 0 的意思是对零阶分布求平均;
(b) 证明如下的零阶平均值分别为:

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle^0 &= 3m k_B T, & \langle p^4 \rangle^0 &= 15(m k_B T)^2, \\ \langle p^6 \rangle^0 &= 105(m k_B T)^3, & \langle p_x^2 p^4 \rangle^0 &= 35(m k_B T)^3; \end{aligned}$$

- (c) 由于零阶近似时气体的速度为零, 不能给出气体的输运性质。为了讨论气体的输运, 最好能得到一个不含时的一阶近似分布函数 $f_1^1(x, \mathbf{p})$ 。线性化玻尔兹曼方程, 并采用单碰撞时标近似, 即 $(\partial f / \partial t)_c \simeq -(f_1^1 - f_1^0)/\tau_c$, 其中 τ_c 为气体分子的平均碰撞时标。则玻尔兹曼方程简化为:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_x}{m} \frac{\partial}{\partial x} \right] f_1^0 \simeq -\frac{f_1^1 - f_1^0}{\tau_c}.$$

- (d) 根据 f_1^1 计算气体沿 x 方向的热流 h_x , 并得到热传导系数 K ;

(e) 当气体处于稳恒态时, 气体的温度分布 $T(x)$ 是什么?

7.5 利用分子运动论推导带电分子气体的电导率。考察在空间不受限制的稀薄的带电分子气体, 分子质量和电荷分别为 m, q 。假设空间充满了无限的离子晶格, 不考虑离子的运动。在无外电场的情况下, 分子达到热平衡, 即单分子的密度分布为:

$$f_1^0(\mathbf{p}) = \frac{n}{[2\pi mk_B T]^{3/2}} \exp \left[-\frac{p^2}{2mk_B T} \right].$$

之后, 加上微弱的均匀电场, 电场强度为 \mathbf{E} , 带电分子会达到新的平衡。假设分子-分子之间以及分子与晶格之间的碰撞时标为 τ_c , 并采用单碰撞时标近似, 试计算:

(a) 近似到一阶的新的分布函数 f_1^1 ;

(b) 电导率的定义为: $\sigma \mathbf{E} = nq\langle \mathbf{v} \rangle$ 。

7.6 根据粒子数、动量和能量守恒可以给出流体力学方程组:

$$\begin{aligned} \partial_t n + \partial_\alpha (nv_\alpha) &= 0, \\ \partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha &= -\frac{1}{\rho} \partial_\beta P_{\alpha\beta}, \\ \partial_t \epsilon + u_\alpha \partial_\alpha \epsilon &= -\frac{1}{n} \partial_\alpha h_\alpha - \frac{1}{n} P_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

其中 n 为局域粒子数密度, \mathbf{v} 为流体速度, $v_{\alpha\beta}$ 为流体的速度张量, ϵ 为流体的内能。其中 $\mathbf{c} = \mathbf{p}/m - \mathbf{v}$ 为流体中分子的本动速度。

(a) 对零阶密度,

$$f_1^0(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{n(\mathbf{q}, t)}{[2\pi mk_B T(\mathbf{q}, t)]^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\mathbf{p} - m\mathbf{v}(\mathbf{q}, t))^2}{2mk_B T(\mathbf{q}, t)} \right].$$

试计算压强张量 $P_{\alpha\beta}^0 = mn\langle c_\alpha c_\beta \rangle^0$, 以及热流矢量 $h_\alpha^0 = nm\langle c_\alpha c^2/2 \rangle^0$;

(b) 推导 $n(\mathbf{q}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{q}, t)$ 和温度 $T(\mathbf{q}, t)$ 满足的零阶流体动力学方程;

(c) 证明上式意味着 $D_t \ln(nT^{-3/2}) = 0$, 其中 $D_t = \partial_t + u_\alpha \partial_\beta$ 是沿着流线的随体导数;

(d) 在对动量 \mathbf{p} 积分之后, 用 $n(\mathbf{q}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{q}, t)$ 和温度 $T(\mathbf{q}, t)$ 等表示函数 $H^0(t) = \int d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} f_1^0(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \ln f_1^0(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$;

(e) 利用流体方程计算 dH^0/dt ;

(f) 利用 dH^0/dt 的结果, 讨论流体向平衡态演化的过程中行为。

7.7 利用分子运动论讨论气体的粘滞。考察在两个无限大平行板之间的气体的粘滞 (内摩擦)。假设一块板位于 $y_1 = 0$ 处, 板的速度为零, 另一块板位于 $y_2 = d$ 处, 板的速度为 $v_x = v_0$ 。作为零阶近似, 假设气体已达到整体热平衡, 各处气体的温度为 T , 密度也是整体均匀的。因此, 单粒子的密度分布为:

$$f_1^0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{n}{[2\pi mk_B T]^{3/2}} \exp \left[-\frac{1}{2mk_B T} ((p_x - m\alpha y)^2 + p_y^2 + p_z^2) \right];$$

其中 $\alpha = v_0/d$ 为速度梯度。

- (a) 以上近似并不满足玻尔兹曼方程，因为碰撞项消失，但 $df_1^0 \neq 0$ 。因此必须引入一阶近似项： $f_1^1(\mathbf{p})$ ，它满足线性化的玻尔兹曼方程。采用单碰撞时标近似， $f_1^1(\mathbf{p})$ 满足的方程为：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right] f_1^0 \simeq -\frac{f_1^1 - f_1^0}{\tau_x},$$

其中 τ_x 为特征的碰撞时标。

- (b) 计算单位时间、穿过位于 y 处的 y 平面 (y = 常速的平面) 单位面积、净的沿着 x 方向的动量流量 Π_{xy} ；
- (c) 当流体达到稳恒态时， Π_{xy} 不依赖于 y 坐标，因此，相邻的两个 y 平面之间的内摩擦力 $F_x = -\Pi_{xy}$ 。定义粘滞系数为： $\eta = F_x/\alpha$ ，试给出 η 的表达式。