高等数学 A 习题课讲义

原生生物

* 高等数学 A [刘培东老师班] 习题课讲义。
* 由于高等数学是一个需要大量练习的学科，习题课的主要组织结构将会是通过**题目**进行。我会给每道题一个编号，这样大家就可以看到一学期的知识究竟需要多少个练习来掌握。
* 讲义中提到的 n 默认为正整数，n 趋于无穷时的极限均指**数列极限**。C_m^n 代表组合数 $\frac{m!}{n!(m-n)!}$，且当 $m<n$ 时定义为 0。

目录

一　难易

本次习题课主要介绍了大学数学 (主要针对高等数学 A 与线性代数 A) 相关的学习建议，不存在需要掌握的知识性内容，但仍然建议大家阅读。

§1.1　有关大学数学

说到关于大学数学的建议，自然需要先从大学数学课与中学阶段数学的本质不同讲起。我们主要分为四件事讨论：文本的重要性、抽象层级的提升、证明逻辑的强化与学习方法的差异。

1.1.1　文本

个人一直的观点是，比起课堂，**对文本的阅读** (尤其是教材) 往往是更加重要的。原因有二：一方面，大学数学的内容量大，导致上课需要快速过掉较多内容，这就导致老师的**节奏**注定只能适合一小部分人，对剩下的同学来说跟上思路是很难的 (更大的问题是 “老师以为大家会” 的东西可能是自己尚未学过的，这种默认知识背景不同的情况会导致更多问题)；另一方面，即使能够跟上，上课来不及理解更多细节也会导致**以为自己懂了**，也就是虽然听着感觉理解了，但还是无法做出对应的题目。

——当然，上面说的这两方面问题读文本也会有，但以读为主的的最大好处是，**按自己节奏阅读的成本很低**。上课时无法随时暂停、快进或重放内容，即使有了录课，如此看一段视频所花的时间也远比读一段教材要高。

接下来，我们该聊聊阅读教材的注意事项了。很显然 (这是本讲义第一次出现显然这个词，也将是最后一次)，**朗读**一遍教材是无法对学习有任何帮助的。为了让**阅读**有超出朗读的效果，有两件事必须注意。首先，一定要注意教材的**逻辑细节**，简单来说，必须知道每个证明里上一句话到下一句话是用了何种**结论**。教材上的证明往往不会太过困难，这一部分往往是可以通过自己思考解决的。其次，需要掌握教材的**思路**。小到证明的一步为什么能想到、一个定义为何要出现，大到教材为何如此编排，某章的核心内容是什么，都是**必须**有自己答案的——稍后我们会解释如此要求的理由。不过，思路相关的问题就很难通过个人思考得到了，甚至每个人的答案都可能不同。因此，遇到这些问题时最好通过**交流**进行解决，也就是积极去问同学/助教 “这个东西是如何想到的”，并在得到的答案中找到自己可以接受的解释，以此进行更深入的理解。

理论上来说，大学的所有课程都可以只通过文本资料学习，无需上课。不过，如果能跟上老师的思路，上课也确实可以收获一些阅读无法收获的东西，我们将在下面继续讨论。

1.1.2　抽象

大家学习数学的过程中实际上经历了两次抽象：小学时从两个苹果和三个苹果放在一起是五个苹果到 $2+3=5$，是**具体事物到数字**的抽象；中学时从 $(3+2)^2=2^2+2\times2\times3+3^2$ 到 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，是**从数字到符号** (也就是**代数**) 的抽象。

在大学，我们将经历第三次抽象 (也往往是非数学专业会触及的最后一次抽象)：**从符号到结构**。例如，对于**加法** (不妨考虑对任何实数的加法)，我们可以提取出它的四个核心特征 (这里的 $\exists!$ 表示**存在唯一**)：

$$a+b=b+a$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad 0+a=a$$

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad \exists! b\in\mathbb{R},\quad a+b=0$$

前两个行称为**交换律**与**结合律**，第三行代表**零的存在性**，第四个行则代表**相反数的存在性**。

反过来说，**只要满足这四个特征的运算就可以称为"加法"**。例如，考虑 $\mathbb{R}^*$，即所有非零实数，它们的乘法满足 (第四行即为**倒数**，任何非零实数都有非零的倒数)

$$ab = ba$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad 1a = a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \exists! b \in \mathbb{R}^*, \quad ab = 1$$

由此，非零实数的乘法也可以看作某种意义上的"加法"。

当然，此时的"加法"就不再是一种特定的**运算**了，而是代表了一种**结构**。简单来说，对于一个集合 A，定义 A 上的一种运算 $\oplus$ (也就是给定 A 中两个元素，生成一个新的 A 中元素)，若它满足 (第四行中的 e 即为第三行中的 e)

$$\forall a, b \in A, \quad a \oplus b = b \oplus a$$

$$\forall a, b, c \in A, \quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

$$\exists! e \in A, \quad \forall a \in A, \quad e \oplus a = a$$

$$\forall a \in A, \quad \exists! b \in A, \quad a \oplus b = e$$

则称这个集合 A 对运算 $\oplus$ 构成一个**阿贝尔群**，第三行中的 e 称为**零元**，第四行中的 b 可以记为 $-a$，也即某种"相反数"。用这套语言来说，$\mathbb{R}$ 对加法运算构成一个阿贝尔群，$\mathbb{R}^*$ 对乘法运算构成一个阿贝尔群。

——阿贝尔群这个名字并不重要，重要的是，我们把一种具体的加法运算抽象为了一个"类似加法的结构"。这样做的好处就像我们之前的每一次抽象一样，只要证明了这种结构的性质，就可以**应用在所有具有这种结构的情况里**。

例如，只要集合 A 对运算 $\oplus$ 构成一个阿贝尔群，即有

$$-(a \oplus b) = (-a) \oplus (-b)$$

解答:

由定义第四个式子可知，只要验证了

$$(a \oplus b) \oplus ((-a) \oplus (-b)) = 0$$

利用"相反数"的唯一性即可得到原式成立。利用结合律，上式左侧等于

$$((a \oplus b) \oplus (-a)) \oplus (-b)$$

再次利用结合律可将其化为

$$(a \oplus (b \oplus (-a))) \oplus (-b)$$

利用交换律可知要证

$$(a \oplus ((-a) \oplus b)) \oplus (-b)$$

再次利用结合律得到

$$((a \oplus (-a)) \oplus b) \oplus (-b)$$

利用"相反数"的定义可知这等于

$$(e \oplus b) \oplus (-b)$$

利用零元的定义可知这等于

$$b \oplus (-b)$$

最后再利用"相反数"的定义将其化为 0，即得证。

将上述定理应用在加法上，可以得到对实数 a,b 有

$$-(a+b)=(-a)+(-b)$$

而应用在非零实数乘法上，即得到了对非零实数 a,b 有

$$\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$$

由此，我们观察了一个非常简单的**将符号抽象为结构**的例子，且看到了一些好处。不过，就像之前的每一种抽象是困难的，这一层抽象也存在自己的困难，也就是需要**暂时丢弃已经学会的内容，只保留最基础的性质并通过全新的方式认知**。

* 事实上，大家以后或许还会接触到第四层，也是目前我们能研究的最高一层抽象，**将结构抽象为范畴**。例如，阿贝尔群和集合都是一个**范畴**，这样，我们就可以对比不同范畴之间的共性与不同了。

为了理解抽象，一个必须的办法是**从具体例子入手**。如果没有 $\mathbb{R}$ 对加法与 $\mathbb{R}^*$ 对乘法作为例子，下面的阿贝尔群定义将是**悬空**的。反之，若是只学具体例子，不去了解阿贝尔群的定义，就无法提取出具体例子的**共性**——而孤立地去学具体例子在大学是不可行的，因为大学数学的内容量真的很**大**。

笼统来说，所有具体例子、做题技巧整理都可以称为**低观点**，而所有结构性的内容、抽象层面的讨论都可以称为**高观点**。当然，应对考试必须掌握足够的低观点，而高观点很多则来自课程与自己的思考。高观点是必要的，就像上面所说的抽象层级，它可以做到提取低观点中的共性以**更好理解、记忆**。

* 高等数学课程中的结构想法远不如线性代数中多，但类似的寻找共性的思路仍然可以帮助大家理解很多**定义、定理的由来**。

1.1.3 证明

在大学之前，我们所谓的“证明”其实更多时候是“说明”：只要我们知道一个部分是对的，就可以直接跳过对于这部分的具体细节。

然而，在大学，这件事并不成立。这是由于大学中遇到的**逻辑**将更加复杂，甚至在有的地方反直觉，导致“知道是对的”并不成立，只有一步步**推导**出来的内容才能确信是对的。

在之后的习题课中，我们将以更严格的方式叙述逻辑，也将进一步解释为何有些“看起来对”的证明是不合理的，而有些“一时看不出理由”的推导其实是正确的。目前阶段，至少希望大家做到的是，在证明中绝大部分的**三段论**推导中看出其中用到的**结论**，通俗来说也就是**能说出每一步的理由**。

当然，这件事的做到只能算是“读懂”了一个证明，还远称不上是**学会**一个证明。与证明逻辑同等重要的是证明的**思路**，也即**能说出证明是如何想到的**——这事实上与本章开头讨论文本时的要求完全一致。

一个常见的误区是，数学家的“注意力”是凭空产生的，常人无法想到。事实上，绝大部分证明之所以读着让人感觉无法想到，是因为**写出的过程与真实思路有很大差异**。例如，虽然结构的呈现都是顺序，写证明时可能是一会儿从条件出发一会儿从结论出发研究的，可能是找了很多具体例子后研究共性，也可能是看别的证明时突然有了思路...... 知道了这些，我们就可以在遇到思路不明确的证明时多进行不同的尝试，或许就能发现想到这些其实是“自然”的——当然，这个过程里还是要再次强调与人的交流，毕竟一个人确实也不可能想清楚全部的思路。

1.1.4 方法

最后，我们来聊一聊学习方法的差别。中学数学的常见 (至少我亲身经历中常见) 的学习模式是：以记忆做题方法为主线，训练一套“什么题用什么方法”的模式，不太注重**分析与尝试**本身。

上述的做法在内容量不多时，确实可以成为有效的思路，因为通过大量题目的训练能够快速建立起“看到题目就知道该用什么”的**直觉**。大学数学里，**建立直觉**也仍然是很重要的部分——事实上前面所说的数学家的“注意力”就是一种直觉——但绝不可能只靠大量做题达成，这是因为大学的内容量已经**不可能对每个知识点都做充分多的题目**，或用我常说的话，“背是一定**背不完**的”。

那么，用什么方法能在做题不那么多的时候就达成训练直觉的目的呢？如果用最简单的方法概括，答案就是**多想、多问**。前者意味着该亲自参与的时候一定要亲自参与，例如习题课一般不会直接讲题目解答，尤其是作业题，因为这是必须自己做了才能有用的部分，没有自己的尝试就不可能知道怎洋的直觉是**有效**的，怎样是无效的；后者则意味着出现问题时需要及时沟通，因为自己想到的书上/答案写得有差别并不意味着就是错误的，说不定只是某一步需要补全，而自己做不出来时，知道这些只能依靠了解**其他人能否通过此思路走通**。

§1.2 联系

1.2.1 结构与动机

虽然刚才讲了大学数学与之前数学学习不同的四个方面，大家可以发现它们其实存在很鲜明的共性。具体来说，就是对**高观点**的更加注重。现在，我们可以详细解释何为大学数学中的高观点了。主要包含两部分：**结构**与**动机**。

无论是教材还是上课，资料一定是**顺序**呈现的，一行后接着另一行。但是，这样的顺序往往不是真正的**思路结构**。就像本次习题课的真实结构是在黑板上画了一张有着诸多连线的图一样，真正的结构往往至少是**树状**的——以教材为例，很可能每一章是为了解决某个“主要问题”，此问题可以拆分为若干“次要问题”，并可以进行进一步的拆分，直到得到个人可以解决的一个个小点。更多时候，这样的联系并非单向、逐级向下的，就以高数为例，**微分**之下的各种结论 (如微分中值定理) 与**积分**之下的各种结论 (如积分中值定理) 很多时候会存在一定程度的**对应**，而这样的对应关系会带来更复杂的连接。所有的这些对结构的分析都是掌握知识的重要一环，也可以切实提升**理解**，也即之前说的，不用记忆就培养直觉的方式。

另一个很重要但必须思考的内容就是**动机**，也即不断反问“为何能够想到”。因为数学世界的一切都是由人类创造的 (暂且忽略发明与发现的哲学讨论)，**每一个概念的创造必有其原因**。即使很多时候站在初学角度并不能感知到最准确的理由，对动机有自己的理解仍然是重要的。例如，初学导数时，的确可以将导数理解为“为了刻画**速度**出现的概念”，即使学到之后对这个概念有了更深的体会，也并不意味着用速度看待导数后对更多知识产生的理解是无效的。

当然，无论是结构还是动机都**不存在唯一的答案**。哪怕是教材的编写者所说出的结构，也并不一定就是教材是真正结构，因为其中还蕴含着编写者的整个知识体系所带来的理解。某种意义上，听课的最大意义就是**获取老师对高观点的理解**，并以此和直接阅读教材、自己思考结合，得到自己的答案。

——至于为何要强调高观点？正是因为这些部分可以超越简单的背诵，达到**在有限的时间与做题量下训练出直觉**的效果，所以，千万**不要觉得以应试为目的的学习就无需掌握高观点**，除非你能在刷题的同时记下做过的每一道题目是如何处理的。

1.2.2 问与想

在之前介绍方法时，我们已经说了“多想”与“多问”是本质性的解决方法，事实上它们就是**掌握高观点的必要方式**，也是大学数学与中学数学学习不同的本质所在。本章的最后，我们就来聊一聊具体如何多想、多问，概括起来其实只有两点：

- **简单的问题不要怕问**。

  总会有人因为担心自己的问题过于简单而害怕来交流，但其实简单的问题恰恰是最需要交流的，一方面大家会存在共性 (~~其实你不会的大家都不会，不要被群聊里活跃的人吓到~~)，另一方面解答这些问题的时间很短，而自己思考得到答案的时间则过于长了。

  同样，也不要担心自己“连这都问是不是问题太多了”。事实上，在学习的前期，出现大量问题是正常的，只有找不同人交流、解决了前期的问题后，才能搭起初步的框架，之后遇到的问题更少。

此外，一个常见的**误区**是，既然有了答案就不用和人交流不会做的题了。但事实上，**答案是无法代替得到答案的过程的**，和人交流是为了知道别人从何种角度得到答案，而非机械记忆某套固定的操作方法。所以，尤其是学习前期，比起看答案，更应该将不会做的题拿给大家交流。

* 至于问 AI，个人并不推荐，因为它有着和看答案一样的问题：学习前期无法区分结果正误，即使是正确的，也无法得知想到证明所需的知识背景。

- **困难的问题不要怕想**。

  既然大家都来到了这里，不需要觉得有什么知识是 “自己不配学” 的。如果要建立完整的体系，一般都需要掌握全部的知识——除了一些**过于困难的技巧**可以适当放弃 (真有这样的情况会在讲义里提及)，其他内容都是理应掌握的。

  如果一时觉得怎么学都无法学会，那往往实际上是**切入思路**的问题。只要能适当调整思路，多去思考**如何用自己能理解的方式构建体系**，并和人交流，一定可以达成**不用堆时间也能学会**的效果。

  对于真正困难的内容，充分思考一定是有必要的。事实上，数学上的困难往往就意味着大量不符合直觉、无法通过直觉建构的内容，那么也就必须利用思考构建起**新的直觉**来进行理解——越是困难的东西，越不能指望通过强行记忆去学，因为困难将导致更容易忘却。

希望大家能带着这两句话，完成整个本科的数学学习，并至少**学有所得**。

二　数列极限

本次习题课主要介绍了数列极限的部分技巧和一些重要的估算，知识基础为数列极限定义、一些基本的数列极限结果 (如夹逼定理、保序性、加减乘除极限等) 与单调有界数列存在极限。

§2.1　作业解答

1. (1.3 节例 7) 设 a_n 是非负数列，且
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$$
证明
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$$

解答：

分两种情况：

– 若 $a > 0$，由于根号难以处理，尝试利用分子有理化直接计算可知
$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a} = \frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}$$
由于 a 为正，分母必然非零。

直接缩小分母估算可知
$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}$$
由此，对任何 $\varepsilon > 0$，利用 a_n 极限为 a，由 $\sqrt{a}\varepsilon > 0$ 可以取 N 使得 $n > N$ 时
$$|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$$
此时即得到
$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$
从而得证。

– 若 $a = 0$，此时也即求证 $\sqrt{a_n}$ 极限为 0。对任何 $\varepsilon > 0$，利用 a_n 极限为 0，由 $\varepsilon^2 > 0$ 可以取 N 使得 $n > N$ 时
$$|a_n - 0| < \varepsilon^2$$
此时再利用 $a_n \geq 0$ 即得到
$$|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \varepsilon$$
从而得证。

* 虽然解答中直接进行了分类讨论，直接做时往往会先只考虑到 $a > 0$ 的情况，在**检查过程发现严谨性问题时** (即 $a = 0$ 时分母可能为 0，且 $\sqrt{a}\varepsilon = 0$，不是符合要求的正数) 再补充另一种情况的证明。因此，一定要注意做完以后检查每步是否能实现。

* 当然，$\sqrt{a}\varepsilon$ 与 ε^2 的构造也是先有下面的估算再回头进行的，这也是经典的**解答呈现顺序与真实思路相反**。

2. (1.3 节定理 4(3)) 设
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = l_2$$
且 $l_2 \neq 0$，证明
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$$

解答：

– 定理 4(2) 已经证明了
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$
由此只要证明
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{l_2}$$
即有
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$$

– 为说明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{l_2}$，我们需要先说明左侧**定义合理**，也即 n 充分大时 b_n **非零**。
由于 $l_2 \neq 0$，有 $\frac{|l_2|}{2} > 0$，于是存在 N 使得 $n > N$ 时
$$|b_n - l_2| < \frac{|l_2|}{2}$$
此时利用三角不等式得
$$|b_n| > \frac{|l_2|}{2}$$
从而可知 $n > N$ 时 $b_n \neq 0$，可以定义。
另一方面，直接计算可知
$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{l_2}\right| = \frac{|b_n - l_2|}{|b_n l_2|}$$
可以发现，在刚才得估算下，$n > N$ 时可以放大得到
$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{l_2}\right| < \frac{|b_n - l_2|}{l_2^2/2}$$
为了进一步控制，对任何 $\varepsilon > 0$，利用 b_n 极限为 l_2，由 $\frac{l_2^2}{2} > 0$ 存在 N_0 使得 $n > N_0$ 时
$$|b_n - l_2| < \frac{l_2^2}{2}\varepsilon$$
从而可知 $n > N$ 且 $n > N_0$ 时
$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{l_2}\right| < \frac{|b_n - l_2|}{l_2^2/2} < \varepsilon$$
也即取 $N_1 = \max\{N, N_0\}$ 可符合极限定义，得证。

3. (习题 1.3.4(1)) 用定义证明
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-3} = \frac{3}{2}$$

解答：

直接计算可知
$$\left|\frac{3n+1}{2n-3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{11}{|4n-6|}$$
对任何 $\varepsilon > 0$，直接解不等式可知使上式小于 ε 只需
$$n > \frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} + 6\right)$$
从而取 ($[x]$ 代表不超过 x 的最大整数)
$$N = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} + 6\right)\right] + 1$$
即符合要求。

4. (习题 1.3.5) 设

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

且数列 b_n 有界，即

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |b_n| < M$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$$

解答：

由条件可知

$$|a_n b_n| = |b_n||a_n| \le M|a_n|$$

对任何 $\varepsilon > 0$，利用 a_n 极限为 0，由 $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ 存在 N 使得 $n > N$ 时

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| \le M|a_n| < \varepsilon$$

从而符合极限定义，得证。

* 仍然注意我们一定是**先进行估算，再利用定义取合适的数**。

5. (习题 1.3.7) 计算极限：

(1)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

解答：

利用单调性与分子有理化技术可知

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}}$$

由此对任何 $\varepsilon > 0$，直接解不等式可知使上式小于 ε 只需

$$n > \frac{4}{\varepsilon^2}$$

从而取

$$N = \left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right] + 1$$

即符合极限定义，得证原式极限为 0。

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+10)^4}{n^4 + n^3}$$

解答：

分子分母同除以 n^4 可得上式等于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2+10/n)^4}{1+1/n}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

利用乘积极限、加法极限结论即得

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{10}{n}\right) = 2$$

进一步利用乘除法极限结论即得原式为

$$\frac{2^4}{1} = 16$$

* 请一定注意书写证明时添加**必要的文字说明**以表明**逻辑**，可以注意习题解答中**关联词**的使用。

§2.2 严谨性

2.2.1 替换原理

我们首先需要了解证明过程中最常用的原理之一 (由于我们并不关注数理逻辑的细节，本讲义将所有可以用于证明的逻辑理论称为**原理**)：**替换原理**。

举例来说，假设

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

为什么我们可以将极限定义里的 ε 替换为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 呢？事实上分为两步。首先，上式根据定义是 (默认 n、N 为正整数)

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N,\quad \forall n>N,\quad |a_n-a|<\varepsilon$$

由于 ε 本身只是一个形式的记号，我们可以将它作任意的**替换**，例如替换为 $\frac{\varepsilon}{2}$，可以得到

$$\forall\frac{\varepsilon}{2}>0,\quad \exists N,\quad \forall n>N,\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

而另一方面，我们知道一个数除以 2 是正数与这个数是正数等价，将逻辑上等价的式子进行**替换**就得到了

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N,\quad \forall n>N,\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

也就是说，这个过程里进行了两步，先对形式记号进行了替换，再对逻辑上等价的式子进行替换。每一步替换前后，所得的命题都等价。

但是，至此，我们还需要提问，这两个替换随时都可以进行吗？举例来说，考虑如下的命题

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \exists y\in\mathbb{R},\quad y>x$$

我们把 x 替换为 $2x$ 或 x^2 不会影响此命题，但如果替换为 x^2+y，就能得到荒谬的结果：

$$\forall x^2+y\in\mathbb{R},\quad \exists y\in\mathbb{R},\quad y>x^2+y$$

这意味着，对形式变量的替换似乎确实不是任何时候都可以进行的。最关键的事情是，我们需要保证替换前后变量的**自由性**不变。也即，替换前的 x 不会受第二个条件 $\exists y\in\mathbb{R}$ 约束，那么无论替换成 z 或 w 都可以，但一定**不能与** y **有关**。

本节的 “替换原理” 实际上是指第一种情况，至于第二种情况，对于等价命题的替换，确实是在任何时候都可以进行的，我们可以称为 “等价原理”。更复杂的替换**不等价命题**的情况我们将在下一节介绍。

讲到这里，就可以纠正不少同学在证明时容易犯的错误了。

题 1. 下面的两个命题 (称为命题 2、命题 3) 与 a_n 在 n 趋于无穷时极限是 a (称为命题 1) 等价吗？若不等价，它们的推出关系是怎样？

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N,\quad \forall n>N,\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{N}$$

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N,\quad \forall n>N,\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{n}$$

解答:

首先，命题 2 与命题 3 都能推出命题 1，这是由于 N、n 都是正整数，因此 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{N}$ 或 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{n}$ 都意味着 $|a_n-a|<\varepsilon$，命题 1 已经成立 (此处的严格逻辑见下一节)。

此外，命题 3 也可以推出命题 2，这是因为在 $n>N$ 的条件下 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{n}$ 也可以推出 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{N}$。

命题 1 不能推出命题 2，考虑数列

$$a_n = n^{-1/2}$$

其极限为 0，但取 $\varepsilon = 0.5$，无论如何取 N 都无法保证 $n > N$ 时 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2N}$，矛盾。

* 注意三个命题里的 ε、N、n 实际上是不同的，这是**受约束性**带来的任意替换结果。

命题 2 不能推出命题 3，不过反例相对复杂：记 $b_n = na_n$，我们进行如下的构造：

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1$$

$$b_3 = 0, \quad b_4 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \quad b_5 = \frac{4}{6}, \quad \ldots, \quad b_7 = 1$$

$$b_8 = 0, \quad b_9 = \frac{1}{3} = \frac{8}{24}, \quad b_{10} = \frac{9}{24}, \quad \ldots, \quad b_{25} = 1$$

$$\cdots$$

可以发现，由于 $|a_n| \le \frac{1}{n}$，有 $a = 0$，此时命题 3 等价于 $|b_n| \to 0$，结论不成立。对于命题 2，对任何在 $\frac{1}{k-1}$ 与 $\frac{1}{k}$ 之间的 ε (k 为正整数，若 $\varepsilon > 1$ 则取 $k = 1$)，考虑上方构造的第 k 行，令 N 为这行的第一个下标，可以验证此后均成立 (事实上下方第一个不等号就是构造的想法来源)

$$\forall n > N, \quad |b_n| \le \frac{n-1}{kN} < \frac{n}{kN} < \frac{n\varepsilon}{N}$$

这即得到了 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{N}$，结论成立。

* 上方的证明和构造稍有技巧性，需要对概念较为熟悉以后才能想到。我自己构造此数列也尝试了挺久，一个**更简单的构造**是，将上述 b_n 不为 1 的项都改为 0，可用完全相同的方式证明成立性。由此可以类似发现，b_n 只需取 0 或 1，且 1 相距 "足够远" 就能得到反例，例如只有当 $n = k!$ (k 为正整数) 时 b_n 为 1，其他为 0。

* **学会构造反例是重要的**，因为反例可以帮助大家判断一个 "看起来可能对" 的逻辑是不是真的正确。稍后我们将看到更复杂的例子。

* 事实上，进行了 "不合法的替换" 并非得到的结论一定错，但从逻辑上来说确实**无法直接推出**。

总之，在进行形式记号的替换时，必须保证**自由变量替换为自由变量**，而**不能涉及在该命题中受到约束的变量**。当然，不同命题中可能有不同的自由变量，如果在其他地方得到了一个正整数 M，将 ε 替换为 $\frac{\varepsilon}{M}$ 也是可行的。

2.2.2　任意与存在

接下来，我们将介绍大学中常用而高中几乎不会出现的，关于 "任意" 与 "存在" 的几条原理。先来看一个经典的问题 "找命题的否定"：

题 2. 给出如下命题的否定：对任意 $M > 0$，存在正整数 N 使得对任意 $n > N$ 有 $|a_n| > M$。

解答:

至少大家应该或多或少接触过 (如果没有接触过就请现在**记住**) 一个结论：一个包含任意、存在的命题的否定，只要把**任意改成存在**、**存在改成任意**，然后**将最后一句话改为否定即可**。也就是说，上述命题的否定为：

存在 $M > 0$ 使得对任意正整数 N 都存在 $n > N$ 满足 $|a_n| \le M$。

* 题目中的命题可以写为 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，下一章将讨论相关定义。

* 本部分接下来的内容都**与考试无关**，但如果大家能看完，会更能理解证明中的**逻辑**。

不知道大家是否想过，为何这样的做法是有道理的呢？这些有关证明、命题的东西就涉及到数学的一个重要且基础的分支，**数理逻辑**。正如其他数学分支一样，数理逻辑也需要一些公理与定理作为支撑，如上节所说，我们将它们称为**原理**，关于任意与存在，可以有着以下的原理：

$$(\neg\exists xA(x)) \leftrightarrow (\forall x\neg A(x))$$

我们简单介绍一下上方的记号：这里的 $A(x)$ 不是函数，而是一个关于 x 的**命题**，数理逻辑中研究的对象几乎都是命题；$\leftrightarrow$ 表示左右可以互相**推出**，我们用 $\leftarrow$ 或 $\to$ 表示单侧的推出；$\neg$ 表示对后方命题的**否定**；$\exists xA(x)$ 表示存在 x 使命题 $A(x)$ 成立，这**仍然是一个命题**，而 $\forall xA(x)$ 则表示对任何 x，命题 $A(x)$ 都成立——自然，$\forall x\neg A(x)$ 表示对任何 x，命题 $A(x)$ 都不成立。
* 注意此原理也是一个命题，而我们将它称为原理说明这个命题**恒真**，无论 $A(x)$ 是何种命题，上方命题都成立。

由此，我们可以将上方这句话解释为：以下两个命题相互等价：不存在 x 使得命题 $A(x)$ 成立、对任意 x 命题 $A(x)$ 不成立。当然，这句话很符合**直觉** (至于究竟什么是逻辑直觉，这是哲学家们研究的领域)，我们下面将用它推导出**题 2** 的更严谨解答。分为以下步骤：

1. 对于**推出** ($\to$) 的更严谨理解

   所谓的 $p \to q$ (这里的字母默认代表**命题**)，一个符合直觉的定义即，假设 p 成立，可以**证明** q 成立——篇幅所限，我们不会讨论数理逻辑中究竟何为一个证明。不过，之所以单独讨论这件事，是因为存在一个必须理解的事情：**假命题可以推出任何命题**。

   虽然这件事基本可以当作推出定义的一部分，但由于它并不像我们使用的其他原理一样符合直觉，我们必须作一定的说明。一个相对合理的理解是，这其实是为了让**任意**符合逻辑直觉。

   当我们在说**任意一个三角形都有三条边**时，我们其实在说，对任意一个图形 G，G 是三角形可以**推出** G 有三条边。这句话当然是正确的，因此，这句话**对任意图形都正确**——也就是说，在 “G 不是三角形” 时，“G 是三角形可以推出 G 有三条边” 仍然是正确的。

   一件明显的事是，无论右边的命题是不是 “G 有三条边”，我们都不希望 “G 不是三角形” 的情况影响整个命题的正确性，出于 “任意” 的语义，我们必须规定 G **不是三角形**时，无论 p 是什么命题，“**G 是三角形可以推出 p**” 都是真的，这就是所谓的假命题可以推出任何命题。

   * 另一种方式是将它理解为关联词**如果**、**则**，假设 “如果” 后的内容已经不成立，这句话本身不会被违反。

   * 事实上，在数理逻辑中，“假设 p 成立可以证明 q 成立” 并不是 $p \to q$ 的定义，两者的等价性是一个称为**演绎定理**的定理。

2. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ **恒真**

   我们将用到以下**双重否定原理**：

   $$\neg\neg p \leftrightarrow p$$

   也即对命题 p，其双重否定与自身等价。

   现在，我们假设 $p \to q$ 已经成立，来证明 $\neg q \to \neg p$。为证明 $\neg q \to \neg p$，我们进一步假设 $\neg q$ 成立，此时若 p 成立，利用 $p \to q$ 可知 q 成立。由于 $\neg q$ 成立，“$\neg q$ 不成立” 不成立，也即 $\neg\neg q$ 不成立，利用双重否定原理可知 q 不成立，这就得到了矛盾。

   * 反证法的原理是对命题 r，$\neg r$ 与 r 至少有一个成立，这称为**排中律** (注意这并没有保证两者恰有一个成立，而我们刚才证明了至多有一个，因此的确恰有一个)。

* 将 p、q 替换为 $\neg q$、$\neg p$，结合双重否定原理将等价部分进行替换即可以得到下式恒真：

$$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$$

综合上方即得下式恒真：

$$(\neg q \to \neg p) \leftrightarrow (p \to q)$$

这就是**逆否命题与原命题等价**。

3. $(\neg \forall x A(x)) \leftrightarrow (\exists x \neg A(x))$ **恒真**

   我们将已知的原理 $(\neg \exists x A(x)) \leftrightarrow (\forall x \neg A(x))$ 拆成

$$(\neg \exists x A(x)) \to (\forall x \neg A(x))$$

$$(\forall x \neg A(x)) \to (\neg \exists x A(x))$$

两块，利用第二部分推导可知可以颠倒方向后两侧同加否定，也即下方两式恒真：

$$(\neg \forall x \neg A(x)) \to (\neg\neg \exists x A(x))$$

$$(\neg\neg \exists x A(x)) \to (\neg \forall x \neg A(x))$$

利用双重否定原理可以替换得到下方两式恒真：

$$\exists x A(x) \to (\neg \forall x \neg A(x))$$

$$(\neg \forall x \neg A(x)) \to \exists x A(x)$$

将命题 $A(x)$ 利用替换原理替换为 $\neg A(x)$，可得下方两式恒真：

$$\exists x \neg A(x) \to (\neg \forall x \neg\neg A(x))$$

$$(\neg \forall x \neg\neg A(x)) \to \exists x \neg A(x)$$

再次利用双重否定原理可得下方两式恒真：

$$\exists x \neg A(x) \to (\neg \forall x A(x))$$

$$(\neg \forall x A(x)) \to \exists x \neg A(x)$$

将两个命题合并即为结论。

4. 对**任意**与**存在**的进一步讨论

   值得注意的是，在**题 2** 中，我们事实上并没有见到 $\forall x A(x)$ 或 $\exists x B(x)$ 这样形式的命题。与之相对，我们见到的是类似

$$\forall p(x), A(x), \quad \exists q(x), B(x)$$

的形式 (注意以上两个命题**并非严谨的数理逻辑写法**)，那么，它们是什么含义呢？

在第一部分推导中，我们已经得到了 $\forall p(x), A(x)$ 的含义事实上是

$$\forall x, p(x) \to A(x)$$

也就是说，当我们在说 $\forall x > 0, x^3 > 0$ 时，我们指的其实是，对任何 x，$x > 0$ 能推出 $x^3 > 0$。

然而，对于存在，$\exists q(x), B(x)$ 并不代表 $\exists x, q(x) \to B(x)$。我们以 $\exists x > 0, x^2 < 0$ 为例，这当然是一个假命题，但是正如第一部分讨论的**假命题可以推出任何命题**，既然有 x 使得 $x > 0$ 为假，$\exists x, (x > 0) \to (x^2 < 0)$ 应当是一个真命题。

仔细观察可以发现，存在事实上是在说**且**，也即 $\exists q(x), B(x)$ 的真正解释是

$$\exists x, q(x) \wedge B(x)$$

也就是说，当我们再说 $\exists x > 0, x > 1$ 时，我们指的其实是，有一个 x 使得 $x > 0$ 成立、$x > 1$ 也成立。

5. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (p \to \neg q)$ **恒真**

   * 我们默认 $\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 同时出现时先计算 $\neg$。

   先证明 $\neg(p \wedge q) \to (p \to \neg q)$ 恒真：只需说明 $\neg(p \wedge q)$ 成立时，若 p 成立则 $\neg q$ 成立。由于 $\neg(p \wedge q)$ 成立，p 与 q 不同时成立，而 p 成立则 q 不成立，利用排中律也即 $\neg q$ 成立。

   再证明 $(p \to \neg q) \to \neg(p \wedge q)$ 恒真：若 p 能推出 $\neg q$，若 p 为假则 $p \wedge q$ 不成立，若 p 为真可推出 q 为假，因此 $p \wedge q$ 也不成立，两者结合即说明 $\neg(p \wedge q)$ 必然成立。

   综合以上两部分得证。

6. $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ **恒真**

   将第五部分推导的结论拆分为

$$\neg(p \wedge q) \to (p \to \neg q)$$

$$(p \to \neg q) \to \neg(p \wedge q)$$

   利用第二部分推导并通过双重否定原理进行替换可得以下两式恒真：

$$\neg(p \to \neg q) \to (p \wedge q)$$

$$(p \wedge q) \to \neg(p \to \neg q)$$

   将 q 替换为 $\neg q$ 并通过双重否定原理进行替换可得以下两式恒真：

$$\neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$$

$$(p \wedge \neg q) \to \neg(p \to q)$$

   将两个命题合并即为结论。

7. 最终推导

   我们将**题 2** 形式化地写为

$$\forall p(M), \exists q(N), \forall r(n, N), s(n, M)$$

   这里 p、q、r、s 均代表命题。

   为了得到其否定，我们先利用第四部分推导将其改写为符合数理逻辑要求的形式

$$\forall M, p(M) \to (\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n, N) \to s(n, M)))$$

   接下来，我们想知道此命题的否定

$$\neg(\forall M, p(M) \to (\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n, N) \to s(n, M))))$$

   的等价表述。

   利用第三部分推导，将 $p(M) \to (\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n, N) \to s(n, M)))$ 视为一个命题，可知上式等价于

$$\exists M, \neg(p(M) \to (\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n, N) \to s(n, M))))$$

利用第六部分推导，将 $\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n,N) \to s(n,M))$ 视为一个命题，利用等价替换可知上式等价于

$$\exists M, p(M) \wedge \neg(\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n,N) \to s(n,M)))$$

可以发现，此时前面的部分已经符合了第四部分推导中的讨论，从而可以形式化写成

$$\exists p(M), \neg(\exists N, q(N) \wedge (\forall n, r(n,N) \to s(n,M)))$$

进一步利用关于任意与存在的原理可知上式等价为

$$\exists p(M), \forall N, \neg(q(N) \wedge (\forall n, r(n,N) \to s(n,M)))$$

利用第五部分推导可知上式等价为

$$\exists p(M), \forall N, q(N) \to \neg(\forall n, r(n,N) \to s(n,M))$$

再次利用第四部分推导可知上式可以形式化写成

$$\exists p(M), \forall q(N), \neg(\forall n, r(n,N) \to s(n,M))$$

再次利用第三部分推导、第六部分推导可知上式等价为

$$\exists p(M), \forall q(N), \exists n, r(n,N) \wedge \neg s(n,M)$$

最后利用第四部分推导形式化写为

$$\exists p(M), \forall q(N), \exists r(n,N), \neg s(n,M)$$

可以发现，这恰好是题目中存在改成任意、任意改成存在、将最后一句话改为否定的结果，符合我们之前找到的**规律**。

事实上，上方的证明并非数理逻辑上严谨的证明，但对于尚未学过数理逻辑的同学们来说已经足以作为对逻辑的**理解**。所谓大学数学的证明逻辑更加复杂，往往就是这些任意、存在、推出、否定的**相互嵌套**，如果说上述过程能对证明书写有什么启示，大概就是**分析好每一层的逻辑**，并**逐层进行操作**，而不是试图一口气给出全部的逻辑。

* 例如，本次作业里的 1.3 节例 7 中，由于 a_n 极限为 a 是**条件**，相应的极限定义中的 ε 可以**任取**，而 $\sqrt{a_n}$ 极限为 $\sqrt{a}$ 是**目标**，相应的极限定义中的 ε **需要被任意给定**。因此，我们必须以 $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|<\varepsilon$ 为目标，通过在 a_n 极限为 a 的定义中**取出**适当的值 (如 $a>0$ 时为 $\sqrt{a}\varepsilon$) 作为限制。

最后介绍两个上方并未涉及的重要性质：

1. 等价具有**自反性**、**对称性**与**传递性**：

$$p \leftrightarrow p$$

$$(p \leftrightarrow q) \to (q \leftrightarrow p)$$

$$((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \to (p \leftrightarrow r)$$

   $\wedge$ 这个符号表示**且**，也即左右两个命题都成立。上述三个定理也即：命题 p 与自身等价；对命题 p、q，若 p、q 等价则 q、p 等价；对命题 p、q、r，若 p、q 等价且 q、r 等价，则 p、r 等价。

   * 大家有兴趣可以用我们已经说的内容自行证明它们，不含存在与任意时的等价原理事实上可以通过类似思路证明。

2. **不等价命题**也可以替换：

$$(p(x) \to q(x)) \to (\forall x p(x) \to \forall x q(x))$$

$$(p(x) \to q(x)) \to (\exists x p(x) \to \exists x q(x))$$

   也就是说，只要 $p(x) \to q(x)$，无论前面如何套存在与任意，推出性仍然成立，这就说明了**题 1** 证明的第一部分是合理的。$p(x) \leftrightarrow q(x)$ 时的情况只是上述替换的特例。

§2.3 证明的思路

2.3.1 存在性问题的非构造证明

本节我们终于将离开上方的纯抽象逻辑层面推导，回到具体的**证明技巧**来。希望大家能在学习各种技巧性内容时也注意自身的逻辑为何是合理的。

首先，我们将考虑一类**存在性**问题：问题的最终形式是说明存在 x 满足某些性质。自然地，最直接的方法是直接找到 x，这称为**构造性证明**。构造性证明的技巧有很多，其中最重要的往往是先试着**感性认知**命题在“说什么”，再从所述的内容中找到符合要求的对象。

* 例如，通过**反例构造**说明推导不成立即是一种构造性证明。从逻辑的角度来说，反例构造是为了说明命题 p 不能推出命题 q，而只要找到命题 p 为真、命题 q 为假的**例子**，即能说明这点。由于我们之后还将见到各种各样的反例，此处不再对构造性证明做更多展开。

不过，存在性问题事实上并非一定要通过构造证明。我们来看一个经典且有趣的例子：

题 3. 证明存在正无理数 a、b 使得 a^b 是有理数。

解答：

考虑 $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，若 c 是**有理数**，取 a、b 均为 $\sqrt{2}$ 可得命题成立，**否则**，由于

$$c^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2$$

取 $a = c$、$b = \sqrt{2}$ 可得命题成立。

在这个例子中，我们并没有显式构造出结果，但却的确得到了结论，这就是依赖**排中律**：既然 c 要么是有理数要么是无理数，只要两种情况都能得到结论，就能得到原命题结论成立。

除了这样的讨论外，在高等数学中还有一个常用的构造思路，我们姑且称为**猎人兔子原理**：猎人在数轴上设立了一个长为 $x > 0$ 的坑，则一只步长小于 x 的兔子从左到右跳时一定会落到坑里。我们先用它解决下面的被称为**有理数稠密性**的问题：

题 4. 证明对任何 $a < b$，存在有理数 $x \in (a, b)$。

解答：

由于 $b - a > 0$，我们可以取出正整数 n 使得

$$\frac{1}{n} < b - a$$

此时通过猎人兔子原理已经可以感受到存在整数 m 使得 $\frac{m}{n} \in (a, b)$，下面我们来严谨证明此结论。

为了说明兔子总有一步将跳进坑里，我们其实只需要证明兔子“走过坑的第一步”一定会落在坑里。也即，我们取 m 为**满足 $m > na$ 的最小整数** m。

此时，利用最小性可以发现

$$m - 1 \le na$$

将定义与上式两侧同除以 n 得到

$$\frac{m}{n} > a, \quad \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \le a$$

而第二式即得

$$\frac{m}{n} \le a + \frac{1}{n} < b$$

从而令 $x = \frac{m}{n}$，由于其为整数除以正整数，必然为有理数，而由已证 $x \in (a, b)$，因此符合要求。

无理数稠密性其实也可以类似证明，只是有一处需要注意：

题 5. 证明对任何 $a<b$，存在无理数 $x\in(a,b)$。

解答：

我们先尝试**模仿之前的证明**：由于 $b-a>0$，我们可以取出正整数 n 使得

$$\frac{\sqrt{2}}{n}<b-a$$

此时通过猎人兔子原理已经可以感受到存在整数 m 使得 $\frac{\sqrt{2}m}{n}\in(a,b)$，下面我们来严谨证明此结论。

为了说明兔子总有一步将跳进坑里，我们其实只需要证明兔子"走过坑的第一步"一定会落在坑里。也即，我们取 m 为**满足 $\sqrt{2}m>na$ 的最小整数** m。

此时，利用最小性可以发现

$$\sqrt{2}m-\sqrt{2}\le na$$

将定义与上式两侧同除以 n 得到

$$\frac{\sqrt{2}m}{n}>a,\quad \frac{\sqrt{2}m}{n}-\frac{\sqrt{2}}{n}\le a$$

而第二式即得

$$\frac{\sqrt{2}m}{n}\le a+\frac{\sqrt{2}}{n}<b$$

但是，在令 $x=\frac{\sqrt{2}m}{n}$ 时，虽然仍然可以得到 $x\in(a,b)$，却会发现一个问题：当 $m=0$ 时，$x=0$ 是**有理数**。

由此，上述取法只能在 $0\notin(a,b)$ 时保证成立，在 $0\in(a,b)$ 时需要寻找其他证明方法。事实上这并不困难：由条件 $b>0$，因此存在正整数 n 使得 $\frac{\sqrt{2}}{n}<b$，又由于其大于 0，令 $x=\frac{\sqrt{2}}{n}$ 即得 $x\in(0,b)\subset(a,b)$，符合要求。综合这部分与之前的证明即得到结论。

* 证明的严谨性**即使步骤看似简单也需要检查**，否则很可能发生意料之外的错误。

在直接利用此原理解决了一些问题后，我们就可以研究下面这个似乎很难找到思路的问题了 (注意这仍然是一个存在性问题，因为极限存在的定义开头是 $\forall\varepsilon>0$，证明不存在则要说明 $\exists\varepsilon>0$)：

题 6. 证明 $\sin n$ 在 n 趋于无穷时的极限不存在。

解答：

我们分为三步证明：

– 初步分析

  由于 $|\sin n|\le 1$ 恒成立，这是一个**有界**数列，为了证明其极限不存在，我们可以先尝试**找**一个有界但极限不存在的数列，如 $a_n=(-1)^n$ 进行观察。

  可以发现，它不存在极限的本质原因是不断在上下振荡。我们试着将它总结为一个**引理**：若对数列 a_n，存在 $t_1<t_2$ 使得 a_n 中有无穷多项小于 t_1、有无穷多项大于 t_2，则 a_n 不存在极限。

  * 事实上，若 a_n 有界且极限不存在，一定能找到上述的 t_1 与 t_2，不过此证明需要的分析技巧较多，不在课程要求内，我们将在证明最后进行补充。

– 引理证明

若引理不成立，假设 a_n 极限为 l，则在极限定义中取 $\varepsilon=\frac{t_2-t_1}{2}$ 可得

$$\exists N,\quad \forall n>N,\quad |a_n-l|<\frac{t_2-t_1}{2}$$

* 当然，这个取法也是有了下方的估算后才得到的。

若 $l\geq\frac{t_1+t_2}{2}$，上方的式子可以说明第 N 项后所有 a_n 都满足

$$a_n>l-\frac{t_2-t_1}{2}\geq t_1$$

与有无穷多项小于 t_1 矛盾。同理，若 $l<\frac{t_1+t_2}{2}$ 与有无穷多项大于 t_2 矛盾。

综合两种情况的矛盾即得引理成立。

– 原命题证明

既然我们已经证明了引理，下面就需要找到 $t_1<t_2$ 使得有无穷多个 n 满足 $\sin n<t_1$、有无穷多个 n 满足 $\sin n>t_2$。

接下来是证明的关键：虽然我们无法知道 $\sin n$ 如何在 $\sin x$ 图像上分布，但既然它的**步长**是 1，根据猎人兔子原理，只要陷阱的长度大于 1，一定会有某个 $\sin n$ 落在陷阱中。

由此，考虑区间

$$I_k=\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right),\quad k\in\mathbb{N}^*$$

由于 I_k 长度为 $\frac{\pi}{2}>1$，且两端点均为正数，必然存在正整数 $n_k\in I_k$，而利用三角函数知识即得

$$\sin n_k>\frac{\sqrt{2}}{2}$$

由于每个区间 I_k 都在 I_{k-1} 的后方，n_k 必然单调增加，因此考虑所有 $k\in\mathbb{N}^*$ 即得到了数列 $\sin n$ 中有无穷多项大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

同理，考虑区间

$$\left(\frac{\pi}{4}+(2k-1)\pi,\frac{3\pi}{4}+(2k-1)\pi\right),\quad k\in\mathbb{N}^*$$

可以得到数列 $\sin n$ 中有无穷多项小于 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

取 $t_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$、$t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由引理即得证。

* 此证明虽然看起来较长，但过程的**思路**是非常清晰的：从类比得到引理，再用猎人兔子原理设法构造符合引理的 t_1、t_2。

– (附加) 引理逆命题证明

我们现在来证明，若 a_n **有界**且极限不存在，一定能找到 $t_1<t_2$ 使得 a_n 中有无穷多项大于 t_1、有无穷多项小于 t_2。

此命题的证明分为两步：

1. a_n 有子列极限存在

   * 子列类似子集，指数列 $a_{n_1},a_{n_2},\ldots$，其中 n_i 均为正整数，且对每个 i 有 $n_i<n_{i+1}$，也即代表从数列 a_n 中按顺序选出**无穷多项**构成的新数列。

   由于我们的实数完备性假设**单调有界数列极限存在**，只要证明 a_n 有**单调子列**，即可得到其有极限存在的子列。

   若 a_n 有单调递增子列，已经得证，下面假设 a_n 无单调递增子列，我们证明它有单调递减子列。

若对所有 n 都存在 $n_0 > n$ 使得 $a_{n_0} \geq a_n$，则任取一个 m_0，重复此过程可找到

$$a_{m_1} \geq a_{m_0}, \quad a_{m_2} \geq a_{m_1}, \quad \dots$$

且下标满足

$$m_0 < m_1 < m_2 < \dots$$

这就得到了一个单调**递增**的子列，矛盾，从而必然存在一个 n_1 使得对任何 $n_0 > n_1$ 都有 $a_{n_0} < a_{n_1}$。

进一步地，若对所有 $n > n_1$ 都存在 $n_0 > n$ 使得 $a_{n_0} \geq a_n$，只要取 $m_0 > n_1$，与上方相同仍然可以得到单调递增的子列，矛盾，从而必然存在一个 $n_2 > n_1$ 使得对任何 $n_0 > n_2$ 都有 $a_{n_0} < a_{n_2}$。

利用此过程，我们可以得到下标逐渐增大的 $n_1, n_2, \dots$ 使得

$$\forall n > n_k, \quad a_n < a_{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

而再根据这些下标逐渐增大即得

$$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \dots$$

这就得到了一个单调**递减**子列，得证。

2. t_1 与 t_2 存在

由已证，我们可以假设 a_n 的子列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ 极限为 l。

由于 a_n 极限不存在，其极限不为 l，利用极限定义的**否定**可知

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall N, \quad \exists n > N, \quad |a_n - l| \geq \varepsilon$$

取出上述 ε。若 a_n 中只有有限多项满足 $|a_n - l| \geq \varepsilon$，则取 N 为最后一项的下标即可使得对任何 $n > N$ 都有 $|a_n - l| < \varepsilon$，矛盾，于是 a_n 中必然有无穷多项满足 $|a_n - l| \geq \varepsilon$。

进一步观察此式，可发现由于 $|a_n - l| \geq \varepsilon$ 等价于 $a_n \leq l - \varepsilon$ 或 $a_n \geq l + \varepsilon$，必然有无穷多个 a_n 满足 $a_n \leq l - \varepsilon$ 或有无穷多个 a_n 满足 $a_n \geq l + \varepsilon$ (否则，由于满足任何一个的 a_n 都有限，满足 $|a_n - l| \geq \varepsilon$ 的 a_n 也将有限)。

我们先考虑第一种情况，即有无穷多个 a_n 满足

$$a_n \leq l - \varepsilon < l - \frac{2}{3}\varepsilon$$

此时，由于

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = l$$

可知

$$\exists K, \quad \forall k > K, \quad |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

也即当 $k > K$ 时均有

$$a_{n_k} > l - \frac{\varepsilon}{3}$$

从而我们得到了 a_n 中有无穷多项大于 $l - \frac{\varepsilon}{3}$。

综合上方证明，取 $t_1 = l - \frac{2\varepsilon}{3}$、$t_2 = l - \frac{\varepsilon}{3}$ 即得成立。

同理，对第二种情况，取 $t_1 = l + \frac{\varepsilon}{3}$、$t_2 = l + \frac{2\varepsilon}{3}$ 可类似证得成立。

* 这说明凡是**证明有界数列极限不存在**都可以考虑这样的 t_1、t_2 构造。

除了猎人兔子原理外，另一个常用的非构造性证明方法是**抽屉原理** (也称为**鸽笼原理**)：对正整数 m、n，将超过 mn 个苹果放入 n 个抽屉，则必有一个抽屉的苹果超过 m 个。

* 抽屉原理还有**无穷**版本：将无穷个苹果放入有限个抽屉，必有一个抽屉中有无穷多个苹果。在**题 6** 附加部分的证明中，我们从有无穷多个 a_n 满足 $|a_n - l| \geq \varepsilon$ 推出了有无穷多个 a_n 满足 $a_n \leq l - \varepsilon$ 或有无穷多个 a_n 满足 $a_n \geq l + \varepsilon$ 即是利用了此原理。

我们以抽屉原理证明一个较困难的命题结束本节，大家可以注意**从无穷项中取出充分多项**的技巧：

题 7 (附加)**.** 证明数列

$$a_n = \frac{1}{\sin(cn\pi)}$$

无界，其中 c 为无理数。

解答：

此证明事实上依赖一个很重要的引理：任何**无理数** c 满足

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \{nc\} \in (0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1)$$

这里 $\{x\} = x - [x]$ 表示 x 的小数部分，根据定义可知 $\{x\} \in [0, 1)$。

– 引理证明

取正整数 m 使得 $\frac{1}{m} < \varepsilon$。我们将区间 $[0, 1]$ 等分为 m 份，记为 $I_1, \ldots, I_m$，即

$$I_j = \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]$$

考虑 $\{c\}, \{2c\}, \ldots, \{(m+1)c\}$，这 $m+1$ 个数都落在 $[0, 1]$ 中，利用**抽屉原理**，必有两个落在同一个 I_j 中。

我们取出 I_j，并假设 $\{n_1c\} \in I_j$、$\{n_2c\} \in I_j$，且 $n_1 > n_2$，下面说明取 $n = n_1 - n_2$ 即符合要求。

利用小数部分定义可知 k 为整数时 $\{x + k\} = \{x\}$，从而有

$$\{nc\} = \{n_1c - n_2c\} = \{n_1c - n_2c - ([n_1c] - [n_2c])\} = \{\{n_1c\} - \{n_2c\}\}$$

而由条件 $|\{n_1c\} - \{n_2c\}| < \frac{1}{m}$，分正负讨论即得

$$\{nc\} \in \left[0, \frac{1}{m}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{m}, 1\right)$$

更进一步地，若 $\{nc\} = 0$，即说明其为整数，从而由 n 为正整数可知 $c = \frac{[nc]}{n}$ 为有理数，矛盾，因此 0 无法取到，这就说明了

$$\{nc\} \in \left(0, \frac{1}{m}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{m}, 1\right) \subset (0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1)$$

从而得证。

* 事实上，对 $\{nc\} \in (1 - \varepsilon, 1)$ 的情况，若 $\varepsilon < \frac{1}{2}$ 可发现 $\{2nc\} = 1 - 2(1 - \{nc\})$，若 $\varepsilon < \frac{1}{3}$ 可发现 $\{3nc\} = 1 - 3(1 - \{nc\})$...... 从而进一步利用猎人兔子原理可得存在正整数 n_0 使得 $\{n_0nc\} \in (0, \varepsilon)$，从而可以将引理中的 $(0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1)$ 改进为 $(0, \varepsilon)$，具体证明留给大家思考。

– 原命题证明

由于 c 为无理数，上方已经证明 nc 不可能为整数，因此分母不会为 0，数列 a_n 每项都存在。

利用引理，对任何 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$，存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\{nc\} \in (0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1)$，此时利用 k 为整数时 $|\sin(x+k\pi)| = |\sin x|$ 有

$$|a_n| = \frac{1}{|\sin(cn\pi)|} = \frac{1}{|\sin(\{nc\}\pi)|}$$

进一步利用 sin 的单调性 (注意我们限制了 ε 的上限) 可知 $|\sin(\{nc\}\pi)| < \sin(\varepsilon\pi)$，从而

$$|a_n| > \frac{1}{\sin(\varepsilon\pi)}$$

利用 $x > 0$ 时 $\sin x < x$ (函数极限部分将学到此结论) 即得

$$|a_n| > \frac{1}{\varepsilon\pi}$$

由于对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ 都可取到 n 使得上式成立，对任何 $M > 0$，取

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{\pi M}, \frac{1}{2}\right\}$$

即得存在 n 使得 $|a_n| > \frac{1}{\pi\varepsilon} > M$，这就证明了无界性。

2.3.2　从直觉出发

毫无疑问，我们实际碰到的证明题中，非存在性的问题将远多于存在性问题，而这部分的技巧也将更加复杂。不过，正如第一章中所说，数学最终是需要建立直觉，遇到非存在性问题时，也不妨先从**直觉**出发考虑——直到实在做不出来的时候再尝试调整直觉。事实上，**判断正误**类型的题目最适合用来培养直觉，因此，当遇到结论时，不妨尝试想想**去掉/更改某些条件后其是否还正确**，并在尝试证明或举反例的过程中加深理解。

我们先来看一个很简单的问题：

题 8. 判断正误：n 趋于无穷时，若 a_n 的奇数项构成的数列与偶数项构成的数列极限均为 a，则 a_n 极限为 a。

解答：

结论正确，证明如下：要证 a_n 极限为 a，也即对任何 ε 有

$$\exists N, \quad \forall n > N, \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

而从条件可以得到

$$\exists K_1, \quad \forall k > K_1, \quad |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$$

$$\exists K_2, \quad \forall k > K_2, \quad |a_{2k} - a| < \varepsilon$$

由此，取 $N = 2\max\{K_1, K_2\}$，则 $n > N$ 时，n 为奇数可推出 $n > 2K_1 - 1$，从而根据第一式可知 $|a_n - a| < \varepsilon$；n 为偶数可推出 $n > 2K_2$，从而根据第二式可知 $|a_n - a| < \varepsilon$。综合以上两式得成立。

事实上，我们可以从这个问题衍生出更多个判断题，此处给出正确的命题，大家可以自己证明作为练

习：

1. n 趋于无穷时，若 a_n 的奇数项构成的数列与偶数项构成的数列极限均存在，则 a_n 极限未必存在。
2. n 趋于无穷时，若 a_n 极限为 a，则 a_n 的奇数项构成的数列与偶数项构成的数列极限均为 a。
3. n 趋于无穷时，若 a_n 除以 k 余 $0, 1, \dots, k-1$ 的项构成的数列极限均为 a，则 a_n 极限为 a。
4. 若 a_n 奇数项单调增、偶数项单调减，且 n 趋于无穷时 $|a_n - a_{n+1}|$ 趋于 0，则 a_n 极限存在。

   * 证明思路：先利用反证证明有界性 (否则奇数项或偶数项趋于无穷将导致 $|a_n - a_{n+1}|$ 趋于无穷)，从而奇数项、偶数项极限均存在，再说明极限相同。

5. 若 n 趋于无穷时 $|a_n - a_{n+1}|$ 趋于 0，a_n 极限未必存在。

   * 证明思路：考虑 $a_1 = 1$、$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}$，这样得到的数列称为**调和级数**，有多种方法证明其极限不存在，我们之后将学到。

前三个命题算是直接的衍生，而第四个命题则是将原结论扩展为了一种**极限判断方法**，第五个命题是考虑其在减小条件时为何不成立。当然，这些命题并不是凭空想到的，而是在遇到相关问题时**通过对原题的理解自然产生的**，也可以作为某种**引理**存在。

即使是更复杂的题目，我们也可以通过练习培养出的直觉判断正误：

题 9. 判断正误 (两式分别判断)：若满足 $p_1 > 0$ 的**非负**数列 p_n 与数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_1 + \cdots + p_n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n}{p_1 + \cdots + p_n} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 p_n + \cdots + a_n p_1}{p_1 + \cdots + p_n} = a$$

解答:

从表面上看，两式似乎都是 a_1 到 a_n **加权平均**的形式。但是，这里的权重分配并不能保证均匀，而是某种“n 足够大时对应的权重将很小”。由此，我们可以想到两个符合条件的极端例子：

$$p_1 = 1, \quad \forall n > 1, \quad p_n = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = 1$$

前者代表“最不均匀”的情况，后者代表“最均匀”的情况。想要验证命题是否成立，可以先考虑这两个极端例子，若此时都能成立则有很大概率时正确的。

* 某种意义上，想到这两种极端情况就是想做出本题对应的必要**直觉**。

– 第一式

取数列 p_n 满足

$$p_1 = 1, \quad \forall n > 1, \quad p_n = 0$$

此时计算得第一式左侧即为

$$\lim_{n\to\infty} a_1 = a_1$$

而右侧为 a，因此任取一个第一项不等于极限的数列 a_n 就是反例，如

$$a_1 = 1, \quad \forall n > 1, \quad a_n = 0$$

- 第二式

对第二式，“最不均匀”的情况可直接由定义验证成立，“最均匀”的情况在上课已经证明成立，由此第二式大概率是正确的，我们先**设法进行证明**。

* 当然，若证明过程中卡住，根据无法证出的地方又可以**回到找反例**的步骤，并进一步判断是的确不成立还是证明方式问题，以此循环。

根据极限定义，对任何 ε，我们需要寻找 N 使得 $n > N$ 时

$$\left|\frac{a_1p_n + \cdots + a_np_1}{p_1 + \cdots + p_n} - a\right| < \varepsilon$$

将上式通分后可化为

$$\left|\frac{(a_1 - a)p_n + \cdots + (a_n - a)p_1}{p_1 + \cdots + p_n}\right| < \varepsilon$$

由此，记 $b_n = a_n - a$，则 b_n 极限为 0，这样问题就化为了寻找 N 使得 $n > N$ 时

$$\left|\frac{b_1p_n + \cdots + b_np_1}{p_1 + \cdots + p_n}\right| < \varepsilon$$

由于无法保证所有 b_i 的正负，当它们全为正 (这当然是可能的) 时上方能够尽量大，因此我们可以先利用三角不等式进行一步放缩

$$\left|\frac{b_1p_n + \cdots + b_np_1}{p_1 + \cdots + p_n}\right| \le \frac{|b_1|p_n + \cdots + |b_n|p_1}{p_1 + \cdots + p_n}$$

只要让右侧小于 ε，就能保证左侧小于 ε

至此，我们就必须用上 $\frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n}$ 趋于 0 或 b_n 趋于 0 的性质了。经过**尝试**，先用 b_n 趋于 0 的条件是较容易做出来的，大家可以自行研究先用另一个条件能否得到结论。

由于 b_n 趋于 0，对任何 δ 可以取出 N_1 使得 $n > N_1$ 时

$$|b_n| < \delta$$

利用上式，原式即可放缩为

$$\frac{|b_1|p_n + \cdots + |b_n|p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \le \frac{1}{p_1 + \cdots + p_n}\left(\sum_{i=1}^{N_1}|b_i|p_{n+1-i} + \delta\sum_{i=N_1+1}^{n}p_{n+1-i}\right)$$

可以想象，当 n 很大时，δ 后面的乘积可能很接近 $p_1 + \cdots + p_n$，无法保证它较小，因此直接将它放大为 $p_1 + \cdots + p_n$，得到

$$\frac{|b_1|p_n + \cdots + |b_n|p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \le \frac{1}{p_1 + \cdots + p_n}\sum_{i=1}^{N_1}|b_i|p_{n+1-i} + \delta$$

由于 δ 可以任取，此时第二项已经可以很小，为了保证总体小于 ε，还需要控制第一项。

由于 b_n 极限存在，其必然有界，也即存在 $M > 0$ 使得 $|b_n| < M$ 对任何 n 成立 (取 $M = \max\{|b_1|, \dots, |b_{N_1}|, \delta\} + 1$ 即可)。由于对第一项无法进行更好的处理，我们将所有 b_n 放大为 M 最终得到

$$\frac{|b_1|p_n + \cdots + |b_n|p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \le M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{p_{n+1-i}}{p_1 + \cdots + p_n} + \delta$$

可以发现，当 n 很大时，我们可以使得所有 $n + 1 - i$ 都很大 (因为它至少是 $n + 1 - N_1$)，由此可以想到将分母**截断**，只保留 $p_1 + \cdots + p_{n+1-i}$ 以符合极限定义，这样即能写成

$$\frac{|b_1|p_n + \cdots + |b_n|p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \le M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{p_{n+1-i}}{p_1 + \cdots + p_{n+1-i}} + \delta$$

利用 p_n 的极限结论，对任何 $\gamma > 0$，存在 N_2 使得 $n > N_2$ 时

$$\frac{p_n}{p_1 + \cdots + p_n} < \gamma$$

那么，只要在原式中让 $n > N_1 + N_2$，即能使得求和中每一项都小于 γ，此时即有

$$\frac{|b_1|p_n + \cdots + |b_n|p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \le M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{p_{n+1-i}}{p_1 + \cdots + p_{n+1-i}} + \delta < MN_1\gamma + \delta$$

为了让 $MN_1\gamma + \delta \le \varepsilon$，只需取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$、$\gamma = \frac{\varepsilon}{2MN_1}$ 即可。

最后，我们**综合**上述过程 (事实上答案呈现的过程往往只有下方的部分)：对**任何** $\varepsilon > 0$，取出 N_1 使得

$$\forall n > N_1, \quad |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

记 $M = \max\{|b_1|, \ldots, |b_{N_1}|, \delta\} + 1$，可发现对任何 $n \in \mathbb{N}^*$ 有 $|b_n| < M$。

进一步取出 N_2 使得

$$\forall n > N_2, \quad \frac{q_n}{q_1 + \cdots + q_n} < \frac{\varepsilon}{2MN_1}$$

* 注意此式中 M、N_1 是**自由**的，因此如此替换的逻辑是正确的，详见之前的讨论。

令 $N = N_1 + N_2$，则对任何 $n > N$，由于 $n > N_1$，拆分出 N_1 项并直接放缩有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{b_1p_n + \cdots + b_np_1}{p_1 + \cdots + p_n}\right| \\
&\le \frac{|b_1|p_n + \cdots + |b_n|p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \\
&\le \frac{1}{p_1 + \cdots + p_n}\left(M\sum_{i=1}^{N_1}p_{n+1-i} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=N_1+1}^{n}p_{n+1-i}\right) \\
&\le M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{p_{n+1-i}}{p_1 + \cdots + p_{n+1-i}} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

由于 $n + 1 - i \ge n + 1 - N_1 \ge N_2 + 1 > N_2$，对左侧求和每一项利用条件进一步放缩有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{b_1p_n + \cdots + b_np_1}{p_1 + \cdots + p_n}\right| \\
&\le M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{p_{n+1-i}}{p_1 + \cdots + p_{n+1-i}} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< M\sum_{i=1}^{N_1}\frac{\varepsilon}{2MN_1} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

这就得到了证明。

* 所有 p_n 都为 1 时，以 a_n 构造的新数列称为 a_n 的 **Cesàro 平均**，我们已经证明了 a_n 收敛时其 Cesàro 平均收敛到相同结果。

虽然这道题相对复杂，它的确在我们考试要求的范围内：所涉及的都是**基本的放缩估算技巧**，虽然复杂但并没有本质性的无法做出的内容 (事实上考试往往会有这样的基本功证明题，这就是为何需要学会**分析**思路)。

§2.4　阶估算 I

2.4.1　什么是阶

如果说上面讲的部分是关于一般的证明技巧，本次习题课的最后一节，我们就将看到贯穿整个的高等数学**最重要**技巧，对**阶**的估算。当然，在只学到序列极限时，我们只能对此给出一个初步的定义，之后我们将看到它的更多作用。

简单来说，阶就是一个数列**趋于无穷的速度** (这里无穷可能指无穷大或无穷小)。我们以**无穷小** (也即极限为 0 的数列) 为例，假设两个**不含 0 的**数列 a_n、b_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

我们考察它们的**比例**构成的数列无穷处的情况

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

若极限为 0，说明 a_n 趋于 0 的速度比 b_n 更快 (可以考虑 $\frac{1}{n^2}$ 与 $\frac{1}{n}$ 的例子)，称为 a_n 是比 b_n 更**高阶**的无穷小。若上述极限存在且非零，则称为 a_n 与 b_n 是**同阶**的无穷小；若上述极限为 1，进一步称 a_n 与 b_n 是**等价**的无穷小。

* 事实上，上述的同阶定义还可以进一步扩充。只要存在 $0 < m < M$ 使得 $\frac{a_n}{b_n} \in (m, M)$ 恒成立，即可称两个无穷小**同阶**。不过，绝大部分情况上方定义已经够用。

反之，若 $\frac{1}{a_n}$ 极限为 0，称 a_n 为一个**无穷大**。若 a_n、b_n 都是无穷大，我们也可以类似比较：若 $\frac{1}{a_n}$ 是比 $\frac{1}{b_n}$ 高阶的无穷小，则称 a_n 是比 b_n 更**高阶**的无穷大 (也即趋于无穷的速度**更快**)；若 $\frac{1}{a_n}$ 与 $\frac{1}{b_n}$ 同阶则称 a_n 是与 b_n **同阶**的无穷大；若 $\frac{1}{a_n}$ 与 $\frac{1}{b_n}$ 等价则称 a_n 是与 b_n **等价**的无穷大。

我们先了解一些常见的阶比较，首先是多项式相关的比较：

题 10. 对关于 n 的两个多项式 $p(n)$ 与 $q(n)$，判断

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$$

何时存在 (不考虑经过分母零点引起某项不存在的情况)，并在存在时计算极限。

解答:

我们设

$$p(n) = \sum_{k=0}^{s} p_k n^k, \quad q(n) = \sum_{k=0}^{t} q_k n^k$$

且首项系数 $p_s \neq 0$、$q_t \neq 0$。

分三类讨论：

- 若 $s > t$，分子分母同除以 n^s 得到原式位

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{s} p_k n^{k-s}}{\sum_{k=0}^{t} q_k n^{k-s}}$$

  将分子改写为

  $$p_s + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{p_k}{n^{s-k}}$$

  由此利用 $\frac{1}{n}$ 在 n 趋于无穷时趋于 0 即可看出分子极限应为 p_s，同理，分子由于所有项都不到 s 次，极限将为 0。

  若此分数极限存在，由分子极限为 $p_s \neq 0$ 可通过极限乘除关系得到分母极限非零，矛盾，因此极限不存在。

– 若 $s=t$，分子分母同除以 n^s，与上方类似讨论得到分子极限为 p_s、分母极限为 q_t，由它们都非零，极限为非零常数 $\frac{p_s}{q_t}$。

– 若 $s<t$，分子分母同除以 n^t，与上方类似讨论得到分子极限为 0、分母极限为 q_t，从而利用乘除极限结论可知极限为 0。

* 可以发现此极限结论**只与分子分母的最高次项有关**，这就是阶估算的其中一个用处：高阶与低阶相加减几乎可以忽略低阶部分。

对 $k>0$，我们将 n^k (和与其同阶的无穷大) 称为 k **阶无穷大**，上方的结论说明了两件事：

1. 对自然数 s，n 的 s 次多项式 $p(n)$ 是 s 阶无穷大；
2. 对自然数 s、t，n 的 s 次多项式是比 n 的 t 次多项式高阶的无穷大当且仅当 $s>t$。

这两个结论都很符合我们的直觉。还有一些与多项式无关的比较：

题 11. 证明对任何 $a>1$、$b>0$、$c>0$ 有 (这里 $\ln^c n$ 表示 $\ln n$ 的 c 次方)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^c n}{n^b}=0$$

解答：

我们分别证明这四个式子极限为 0：

– 展开可以发现

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}\le\frac{1}{n}$$

从而对任何 ε 取 $N=[1/\varepsilon]+1$ 即可使得

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

故原式得证。

* 对于阶乘我们目前并没有学到其他处理手段，只能**展开为乘法**。

– 展开可以发现

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}$$

可以发现乘积中，$k>a$ 时 $\frac{a}{k}$ 都小于 1，因此在 $n>a$ 时，删除最后一项外小于 1 的项

$$\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{n}$$

记

$$M=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{[a]}\cdot a$$

则上式即 $\frac{M}{n}$。于是我们得到 $n>a$ 时

$$0<\frac{a^n}{n!}<\frac{M}{n}$$

通过**夹逼定理**得证。

* 夹逼定理常见的应用即为放大缩小后控制得到极限，其与**极限保序性**有本质的不同，因为其保证了极限的存在性，我们之后将更详细说明。

– 通过指数放缩出多项式的一个常见方法是**二项式定理**，也即利用

$$a^n = (1 + (a-1))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (a-1)^k$$

找正整数 m 使得 $m > b$，在 $n > m$ 时，只保留展开式中次数为 m 的项即有 (展开系数 C_n^m)

$$0 < \frac{n^b}{a^n} < \frac{n^b}{C_n^m (a-1)^m} = \frac{m! n^b}{n(n-1)\dots(n-m+1)(a-1)^m}$$

由于 m 已经取定，下方为 n 的 m 次多项式，上方为 n^b，且 $b < m$，由此想到上下同除以 n^m，与**题 10** 相同可证明右侧极限为 0，进一步通过夹逼定理得证。

– 我们记 $t = \ln n$，则此式可以改写为

$$\frac{t^c}{(\mathrm{e}^b)^t}$$

进一步记 $s = 1 - \mathrm{e}^b$ 可将其写为

$$\frac{t^c}{(1+s)^t}$$

可以发现，此时与上一式已经很像，但 t **未必为整数**，因此**无法直接展开**。

为了解决此问题，我们需要将其**放缩为整数**。对任何 n，假设 n_0 是不超过 $\ln n$ 的最大整数 (也即 $[\ln n]$)，$n_0 + 1$ 应为大于 $\ln n$ 的最小整数，根据定义放大分子缩小分母有

$$\frac{t^c}{(1+s)^t} \le \frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}}$$

找正整数 m 使得 $m > c$，与第三式相同可知 $n_0 > m$ 时

$$0 < \frac{t^c}{(1+s)^t} \le \frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}} < \frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-1+1)s^m}$$

我们最后进行放缩：与第三式相同可知

$$\lim_{n_0 \to \infty} \frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}} < \frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-m+1)s^m} = 0$$

从而对任何 $\varepsilon > 0$，存在 N_0 使得 $n_0 > N_0$ 时

$$\frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}} < \frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-m+1)s^m} < \varepsilon$$

而当 $n > \mathrm{e}^{N_0+1}$ 时即可保证 $[\ln n] > N_0$，从而取 $N = [\mathrm{e}^{N_0+1}] + 1$ 即可得到 $n > N$ 时

$$\left|\frac{t^c}{(1+s)^t}\right| = \frac{t^c}{(1+s)^t} < \frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-1+1)s^m} < \varepsilon$$

这已经符合极限为 0 的定义。

* 虽然这个过程看似有些复杂，我们实际上是**通过放缩将非整数情况转化为了整数情况**。这其实也是一种阶估算：我们有自信在加 1 或减 1 时不会影响极限。此技巧在证明函数极限时将大量使用。

我们可以用 $\gg$(读作 “**远大于**”) 表示无穷大的阶数更高，利用定义可知上述讨论即代表

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^b \gg \ln^c n$$

* 若 $a_n \gg b_n$、$b_n \gg c_n$，利用极限乘法可直接由定义得到 $a_n \gg c_n$，由此写出连续的远大于号是合理的。

必须注意的是，**不是任何两个无穷大都有高低阶关系** (对无穷小自然也同理)。考虑 a_n 奇数项为 n，偶数项为 $\sqrt{n}$，$b_n = n$，由于极限 $\frac{a_n}{b_n}$、$\frac{b_n}{a_n}$ 均不存在，这两个无穷大不存在高低阶关系。

2.4.2 多项式的用处

之前对阶相关结论的证明中，我们其实已经大量应用到了阶估算的结果：**题 10** 中，我们发现对于无穷大，低阶项在与高阶项相加时可以忽略，**题 11** 中，为了说明指数函数的阶高于幂函数，我们也通过阶找到了二项式展开中合适的项进行放缩。

事实上，阶估算最大的作用在于**等价替换**，不过也要小心替换的过程，一个通用的说法是**仅当乘除法时可以替换**，我们将以例题说明：

题 12. 若关于 n 的两个函数 $f(n)$、$g(n)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

计算其他极限时何时可以将 $f(n)$ 替换为 $g(n)$？

解答：

我们先说明对任何 $h(n)$，极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{h(n)},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{h(n)}$$

的情况相同 (即同时存在或不存在，若同时存在则极限相同)。

若已知左侧极限存在，利用乘除极限结论可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{h(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{h(n)}\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{h(n)}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{h(n)}$$

同理，若已知右侧极限存在也能得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{h(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{h(n)}$$

由此，任一极限存在都能得到两极限存在且相等，即得到了情况相同 (否则只能均不存在)。

同理，对任何 $h(n)$，极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{h(n)}{f(n)}$ 与 $\lim_{n\to\infty}\frac{h(n)}{g(n)}$ 情况相同。

其他情况一般不能替换，如考虑 $f(n) = n+1$、$g(n) = n$，则极限

$$\lim_{n\to\infty}(f(n)-n) = 1,\quad \lim_{n\to\infty}(g(n)-n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{n}\right)^n = \mathrm{e},\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{g(n)}{n}\right)^n = 1$$

情况并不相同。

利用乘除极限结论可得，若 $f(n)$ 是比 $g(n)$ 高阶的无穷大，则 $f(n)+g(n)$ 是与 $f(n)$ **等价**的无穷大，这是涉及无穷大的**常见替换方式**，也即所谓的 “可以直接扔掉低阶无穷大” 背后的理论依据。在涉及函数极限时，我们会进行更多这样的讨论。

不过，即使并不是直接用到阶的题目，阶相关的思想也可能很有用，我们就以自然常数 e 相关的证明过程为例，来看看如何想到这样一些看起来颇为 “不自然” 的证明。

题 13. 证明以下极限存在 (此即定义为 e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

解答:

首先，**尝试计算几项**后可以发现此数列是单调上升的，因此可以**猜测**其单调有界，并尝试证明:

– **单调性**

证明单调性也即要证对任何正整数 n 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

* 此时一个直观的想法是写成 $\frac{(n+1)^n}{n^n} \le \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$，并进一步化为 $(n+1)^{2n+1} \le n^n(n+2)^{n+1}$。但是，由于 $n(n+2)<(n+1)^2$，我们放缩过程中很容易导致不等号反向，只能暂时放弃这样的思路。

* 另一方面，如果考虑两边的二项式直接展开，可以发现左侧前两项 1、$\frac{C_n^1}{n}$ 与右侧前两项 1、$\frac{C_{n+1}^1}{n+1}$ 完全相同，由此可以想到**展开对比系数**。这样的展开事实上也是某种阶的思想。

直接展开可知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

为了能看到各项系数的实际情况，我们将组合数展开并单独提取常数部分，将它进一步化简为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

可以发现，每项系数确实可以写为类似的形式，同理改写最后一项得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{n^{n-1}}$$

同理可以写出

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n}{n+1} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\cdots 2}{(n+1)^{n-1}} + \frac{1}{(n+1)!}\frac{n!}{(n+1)^n}$$

直接计算可发现 (这或许会称为**糖水不等式**) $0<a<b$ 且 $c>0$ 时有 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$，从而下方每个对应项都将大于上方，且下方还多出一项，这就证明了单调性结论。

* 这部分证明的核心思路仍然是**二项式展开后对比同次项**，而这个思路即很大程度来自于阶估算的经验——即使此处所有项对 n 而言的阶数实际上都是零阶。

– **有界性**

在上方的展开中，由于每个阶乘项后面乘的数都小于 1，我们可以得到一个直接的估算

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

那么，只要右侧有上界，自然就可以得到左侧有上界，从而有界 (左侧存在下界 0)。

在**题 11** 中，我们已经发现阶乘的增长速度远大于指数，而当 $|q|<1$ 时，以 q 为公比的等比数列求和是有界的 (可以直接从求和公式中得到)，这就提示我们可以考虑**放大为等比数列**。

实际上这个过程并不困难：当 $n\ge 2$ 时，利用定义可发现 $n!\ge 2^{n-1}$，从而有

$$1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \le 1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

从而对任何 n 都有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$，这就得到了证明。

* 此处有界性证明实际上是单调性证明**过程中**自然出现的。如果不采取这种方法证明有界性，将面临更复杂的说明。

* 放大为指数函数是最简单的有界性估算，但现实中的有界性估算往往会更加困难。学习**积分**后，我们将看到怎么用更精确的方式得到一些有界性结论。

有了这样的思想，我们就可以完成一个 e 相关的更复杂的证明，也就是 e 与阶乘倒数求和极限实际上相等：

题 14. 证明 (定义 $0! = 1$)

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

解答：

在**题 13** 中，我们已经证明了右侧数列是有界的 (它不会超过 3，且大于 0)，且由于它的每一项是前一项加一个正数 $\frac{1}{n!}$，它必然也是单调上升的。由此，右侧极限的确存在。

此外，我们已经得到了

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

由于**两侧极限都存在**，同取极限即得到

$$\mathrm{e} \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

* 注意这个所谓的**保序性**结论必须在两侧极限都存在时才能使用。

由此我们只需要证明

$$\mathrm{e} \ge \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

回到之前的表达形式，我们可以用求和写为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$$

可以发现，固定 k，每一项在 n 趋于无穷时极限都是 $\frac{1}{k!}$。但很遗憾的是，这里有**无穷多项**，而这样的求和**不能先对每项求极限**——否则考虑 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$，此求和对任何 n 都为 1，但若先对内部取极限，可以得到极限为 0，结果是荒谬的。

好消息是，我们只需要证明大于等于，而这是可以丢弃项的，哪怕是**无穷多项**：对任何 M，由上式可得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge \sum_{k=0}^{M}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$$

两侧趋于无穷 (这时即成为了 $M+1$ **个数求和**，不再存在对每项求极限的问题) 即得到

$$\mathrm{e} \ge \sum_{k=0}^{M}\frac{1}{k!}$$

由于这对任何 M 成立，上式两侧同时**对 M 取极限**得到

$$\mathrm{e} \ge \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

这就证明了结论。

事实上，刚才我们用了一种看起来很奇怪的技巧：**将一次极限转化为两次极限过程**。事实上，这种技巧可以进一步推广到更一般的情况：

题 15 (附加). 考虑有两个下标的“二重数列” $a_{n,k}$。我们进行如三个假设：

1. 对任何自然数 n、k 有 $a_{n,k} \geq 0$;
2. 固定任何 k，$a_{n,k}$ 对 n 单调递增且有界 (由此极限存在)，设
$$\alpha_k = \lim_{n\to\infty} a_{n,k}$$
3. 求和 $\sum_{k=0}^m \alpha_k$ 对 m 有上界。

则有
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^m \alpha_k = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^m a_{n,k}$$
* 为了方便起见，我们可以将 $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^m$ 记作 $\sum_{k=0}^\infty$，由此上式可以简单写为
$$\sum_{k=0}^\infty \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^\infty a_{n,k}$$

解答：

– **分析**

我们有必要先看看这个奇怪的定理是怎么回事。在刚说过无穷多项求和不能先对每项求极限以后，这个定理事实上给出了**能先对每项求极限**的一个充分条件。

为了说明这的确是我们之前对**题 14** 采取的证明方式的推广，我们令
$$a_{n,k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$$
可以发现它的确满足定理要求的三个条件 (这里 α_k 即为 $\frac{1}{k!}$)，而此时结论式的左侧为
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^m \alpha_k = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$$
右侧由于 $a_{n,k}$ 在 $k>n$ 时均为 0，实际上
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^m a_{n,k} = \sum_{k=0}^n a_{n,k}$$
进一步计算即得
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^m a_{n,k} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$
从而这就是**题 14** 的结论。

– **极限存在**

既然这与**题 14** 本质是同一个结论，我们将以相同的方式证明。首先要证明的就是涉及的极限都存在。

先看左侧，由于已知所有 $a_{n,k}$ 非负，利用极限保序性即得所有 α_k 非负，从而左侧的求和 $\sum_{k=0}^m \alpha_k$ 对 m 单调增且有下界 0，又由有上界可知极限存在。

对右侧的极限，利用 $a_{n,k}$ 单调性可知 $a_{n,k}\le\alpha_k$ 对任何 n 成立，从而

$$\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\le\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$$

于是利用左侧极限存在即有

$$\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\le\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\le\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$$

由于 $\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}$ 对 m 单调增加且有界，极限

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}$$

必然存在。进一步地，利用每一项的大小关系，由极限保序性得上述极限对 n 单调增，且对任何 n 都有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\le\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$$

这就说明了 $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}$ 对 n 单调递增且有上界，又由其有下界 0 可知极限存在。

- ***左* $\ge$ *右***

  上述过程中已经得到了对任何 n 都有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\le\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$$

  两侧同时对 n 取极限，由于已经证明了极限存在，利用保序性即有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\le\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$$

- ***右* $\ge$ *左***

  我们仍然采用**截断有限项**的方法。利用定义，对任何自然数 M 有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\ge\sum_{k=0}^{M}a_{n,k}$$

  从而可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{n,k}\ge\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{M}a_{n,k}=\sum_{k=0}^{M}\alpha_k$$

  由于上式对任何 M 成立，两侧同时对 M 同取极限得证。

* 请体会证明方法与**题 14** 的类似处 (如果大家能理解其中逻辑，事实上是几乎**一模一样**的，可以代入第一部分的具体例子操作)，这事实上是从具体的问题走向抽象的“为何可交换”的推广。

* 可以发现，这里可以交换的本质是存在某种**单调性**，与 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$ 的总量递增、每项递减不同。这事实上是实分析中**单调收敛定理**的一个特例，因此在高等数学课程中几乎不会再出现用到这样技巧的证明。

* 另一方面，试图利用阶估算避免此技巧的尝试很难成功，从这题中也能看出本质问题在于这里有一个**两次极限**的过程，因此估计单个变量的阶很难处理的。

最后，让我们用**题 14** 的结论来证明一个有意思的事实：

题 16 (附加)**.** 证明 e 是无理数。

解答：

首先，我们需要从形式

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

中分析出 e 是无理数的原因。直观来说，无论分母取得多大，e 都会落入比它更“精细”的范围内。在这个想法下，我们利用**反证法**，试图先寻找一个基本的范围，再将它更加精细化。

为了让分母能写成**阶乘**的形式，假设 e 是有理数，我们不妨设

$$\mathrm{e}=\frac{m}{n!},\quad m\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}^*$$

上述设法是合理的，因为只要 $\mathrm{e}=\frac{p}{q}$，即可使得 $\mathrm{e}=\frac{(q-1)!p}{q!}$，这样分母就成为了阶乘形式。

我们接下来证明“精细”的部分，也即对任何正整数 n 有 (利用单调有界数列存在极限，左侧的极限是存在的)

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!}<\frac{1}{n!}$$

这个估算其实并不困难，我们可以将左侧提取出 $\frac{1}{n!}$ 写成

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k-1)\dots(n+1)}$$

类似之前，如果直接放缩，当 n 为正整数时，乘积中的每项都至少为 2，因此可得 (右侧的等号来自等比数列求和)

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k-1)\dots(n+1)}\le\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2^{k-n}}=\frac{1}{n!}$$

但是，这样的方法只能说明小于等于号成立，为了进一步说明，我们只将 $n+1$ 缩小为 2，从 $n+2$ 开始的项缩小为 3，可以得到

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k-1)\dots(n+1)}\le\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2\cdot3^{k-n-1}}=\frac{3}{4n!}<\frac{1}{n!}$$

这样就成功证明了。

* 这种**放缩中调整**的技巧是非常重要的。

最后，我们将开始的**直观感受改写成结论**。由于

$$\frac{m}{n!}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$$

将右侧求和中到 $\frac{1}{n!}$ 的项移到左侧 (事实上利用了每项减去常数后极限也减去了常数) 可得

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!}=\frac{m}{n!}-1-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{n!}$$

由于右侧的所有分母都是 $n!$ 的因数，右侧必然可以写为分母为 $n!$ 的分数，但左侧在 0 与 $\frac{1}{n!}$ 之间，不可能是分母为 $n!$ 的分数，矛盾。

之后介绍函数极限时，我们将更明确给出无穷大、无穷小的含义，并展现阶估算的更多价值。

三　函数极限

本次习题课从连续函数出发，主要介绍了函数极限的概念、连续函数相关性质与证明，并证明了初等函数连续性，知识基础为函数极限定义与一些基本的极限结果。

§3.1　作业解答

1. (习题 1.3.7) 计算极限：

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}$$

解答：

利用**幂函数的连续性**与**归结原理**有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$$

* 这两个依据做题时无需明确写出，但必须有意识，否则可能在无法直接使用时犯错。对这两个依据的详细解释可见本章后续的内容。

* 一个不需要用之后知识的看法是将其看成 $(1+1/n)^n$ 乘自身后作倒数，这样就可以用乘除极限得到此结论。

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

解答：

例题中已经证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

由此存在 N 使得 $n>N$ 时

$$\mathrm{e}-\varepsilon<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}<\mathrm{e}+\varepsilon$$

取 $\varepsilon=0.01$，则左右均 $\in(0,1)$，此时

$$(\mathrm{e}-\varepsilon)^n<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}<(\mathrm{e}+\varepsilon)^n$$

令 $n\to\infty$，则左右侧极限均为 0，利用**夹逼定理**可知中间极限为 0。

* 在学过函数极限后，这题有更简单的做法，但**直接看作** $(\mathrm{e}^{-1})^n$ **并取极限是错误的**，因为这无法通过极限加减乘除或连续性得到。学完函数极限后，通过取 ln，这题可以有更直接的做法。

(6)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

解答：

直接利用乘积极限可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}=1$$

* 注意通过这三问可以看出，当 $n \to \infty$ 时，若 $a_n \to 1$、$b_n \to \infty$，$a_n^{b_n}$ 的极限可能是 0、1 或其他有限数 (事实上也可能是无穷)，这也进一步说明了直接将 a_n 或 b_n 替换为极限是不可取的。

2. (习题 1.3.8) 通过单调有界性证明下列极限存在：

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

解答：

由于此数列每一项比前一项增加了 $\frac{1}{n^2} > 0$，其单调增，又由其为正，有下界 0，只需证明有上界。

这里需要用到一个常见**裂项**技巧

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

由此可知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

这就证明了上界存在。

* 这类问题的更本质判定方法需要在学了**积分**以后介绍。

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

其中 0! 定义为 1。

解答：

见本讲义 2.4.2。

3. (习题 1.3.9) 证明

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

解答：

见本讲义 2.4.2。

4. (习题 1.3.10) 设序列 x_n 满足条件

$$|x_{n+1}| \le k|x_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

其中 $k \in (0,1)$，证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

解答：

由条件归纳可知

$$|x_n| \le k^{n-1}|x_1|$$

也即

$$-k^{n-1}|x_1| \le x_n \le k^{n-1}|x_1|$$

由于 $k \in (0,1)$，$n \to \infty$ 时 $k^n \to 0$，而上方左右均为 k^n 乘常数，从而极限为 0，利用**夹逼定理**可知中间极限为 0。

5. (1.4 节定理 3) 设 $f(x)$、$g(x)$ 是定义在点 a 的某空心邻域内的函数，且

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1, \quad \lim_{x\to a} g(x) = l_2$$

若 $l_1 > l_2$，则存在 $\delta > 0$，使得只要 $0 < |x-a| < \delta$ 即有

$$f(x) > g(x)$$

解答：

由极限定义，存在 δ_1、δ_2 使得

$$\forall 0 < |x-a| < \delta_1, \quad |f(x) - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2}$$

$$\forall 0 < |x-a| < \delta_2, \quad |g(x) - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2}$$

由此取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，即有 $0 < |x-a| < \delta$ 时 (对上方两式利用三角不等式处理)

$$f(x) > l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} = l_2 + \frac{l_1 - l_2}{2} > g(x)$$

6. (1.4 节定理 4) 设 $f(x)$、$g(x)$ 是定义在点 a 的某空心邻域内的函数，且空心邻域内满足 $f(x) \geq g(x)$，若当 $x \to a$ 时函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的极限均存在，则

$$\lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x)$$

解答：

若否，与上一题同理可知存在 δ 使得 $0 < |x-a| < \delta$ 时 $f(x) < g(x)$，与条件矛盾。

7. (1.4 节例 10) 设 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数，讨论

$$\lim_{x\to a} xD(x)$$

的存在性。

解答：

当 $a = 0$ 时，由 $D(x)$ 定义可知

$$-|x| \leq xD(x) \leq |x|$$

从而利用夹逼定理得极限存在为 0。

当 $a \neq 0$ 时，利用有理数、无理数的稠密性 (证明可见本讲义 2.3.1)，对每个正整数 n，存在 b_n、c_n 使得

$$b_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right), \quad c_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$$

则根据 $D(x)$ 定义有 $b_n f(b_n) = b_n$，$c_n f(c_n) = 0$。

另一方面，根据定义利用**夹逼定理**可得

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

而由上方计算有

$$\lim_{n\to\infty} b_n f(b_n) = a, \quad \lim_{n\to\infty} c_n f(c_n) = 0$$

从而利用**归结原理**反证可知极限不存在。

* 注意证明 $\lim_{x\to a} xD(x) \neq aD(a)$ 只能说明 a 处**不连续**，无法说明**极限不存在**。

* 利用归结原理是极限不存在的常见说明方式。

8. (习题 1.4.1(2)) 用定义证明函数极限

$$\lim_{x\to a} x^2 = a^2$$

解答:

直接计算可知

$$|x^2-a^2| = |x-a||x+a|$$

对任意 $\varepsilon>0$，要使 $|x-a||x+a|<\varepsilon$，分别控制两项：第二项只要 $|x-a|<|a|+1$ 即不超过 1，此时只需控制第一项，当 $|x-a|<\frac{\varepsilon}{2|a|+1}$ 即符合要求。
由此，取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{2|a|+1}\}$，则此时只要 $|x-a|<\delta$ 即有

$$|x^2-a^2| < (2|a|+1)\frac{\varepsilon}{2|a|+1} < \varepsilon$$

从而得证。
* 注意放缩时不能保证 $|x-a|<|a|$，因为**无法保证 a 非零**。这些细节的严谨性必须注意。

9. (习题 1.4.3) 计算极限：

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

解答:

利用二倍角公式即得

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

从而令 $t=\frac{x}{2}$ 可换元得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(2t)}{4t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{2t^2}$$

利用 $\frac{\sin x}{x}$ 在 0 处极限为 1 与乘积极限即得此极限为 $\frac{1}{2}$。
* 关于**换元**的更严谨讨论见下一章的后续内容，这本质上其实应用了复合函数的极限结论。

(7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

解答:

与之前类似，利用**分子有理化**技巧应对根号作差可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

由于右侧在 $x=0$ 时为 1，利用**初等函数连续性**可知极限也为 1。

10. (习题 1.4.4) 利用

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

计算极限：

(5)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

解答:

先换元到 0 处，令 $t=x-a$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(a+t)-\sin a}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin a\cos t+\cos a\sin t-\sin a}{t}$$

将 $\cos a$ 部分单独提出，利用 $\frac{\sin x}{x}$ 在 0 处极限为 1 可将上述极限写为

$$\cos a+\sin a\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}$$

由于已证 $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$，有

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}=\lim_{t\to 0}(-t)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=0\cdot\frac{1}{2}=0$$

从而原极限即为 $\cos a$。

* 另一个做法是利用和差化积公式将 $\sin(a+t)-\sin a$ 展开为乘积后换元。

(7)

$$\lim_{y\to 0}(1-5y)^{1/y}$$

解答：

先换元到 ∞ 处，令 $t=\frac{1}{y}$，则

$$\lim_{y\to 0}(1-5y)^{1/y}=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{5}{t}\right)^t$$

为了凑出 $1+\frac{1}{s}$ 的形式，令 $s=-\frac{t}{5}$，进一步换元得到

$$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{5}{t}\right)^t=\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{-5s}=\lim_{s\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right)^{-5}$$

利用**幂函数的连续性**即得此极限为 e^{-5}。

* 这里的两次换元成立性其实并没有想象中容易看出，至少并不在之前讨论过的复合函数极限的范畴内，因为它涉及了**无穷处的极限**。下一章将讨论推广的复合函数极限结论如何得到这类换元的合理性。

11. 求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{a^x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x^\beta}$$

其中 $a>1$、$\beta>0$。

解答：

本讲义 2.4.1 中已经证明了对任何 $a>1$、$b>0$、$c>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^c n}{n^b}=0$$

我们现在尝试将其**推广**到函数极限，证明对任何 $a>1$、$b>0$、$c>0$ 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^c x}{x^b}=0$$

这样本题的结论实际上为其特例。仍然从前往后证明：

– 第一式

为了将数列极限推广到函数极限，我们需要将函数**放缩**为数列。一个简单的想法是，我们可以将分母缩小、分子放大到**最近的整数**，也即

$$\frac{x^b}{a^x}\le\frac{([x]+1)^b}{a^{[x]}}$$

这里 $[x]$ 仍然表示不超过 x 的最大整数。
为了进行对右侧的估算，我们还需要先证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^b}{a^n}=0$$

这件事的证明与对 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=0$ 的证明完全相同，因此不再详细写出：利用**阶估算**的想法，将 a^n 二项式展开出超过 b 次的项，再分子分母同除以 n 的对应次方即可。
由此，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N 使得 $n>N$ 时

$$\left|\frac{(n+1)^b}{a^n}\right|<\varepsilon$$

而当 $x>N+1$ 时 $[x]>N$，从而 $x>N+1$ 时

$$\left|\frac{([x]+1)^b}{a^{[x]}}\right|<\varepsilon$$

利用无穷处极限的定义，我们即可以得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{([x]+1)^b}{a^{[x]}}=0$$

而由于 $\frac{x^b}{a^x}>0$，进一步通过**夹逼定理**可知所求极限存在，为 0。

– 第二式
我们这里通过一个直观的换元进行证明：令 $t=\ln x$，由于 $x\to+\infty$ 时 $\ln x\to+\infty$ (这可以方便地由定义说明，只要 $x>\mathrm{e}^M$ 即保证 $\ln x>M$)，利用第一式，由 $\mathrm{e}^b>1$ 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^c x}{x^b}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^c}{\mathrm{e}^{tb}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^c}{(\mathrm{e}^b)^t}=0$$

从而得证。
* 同样，对换元严谨性的讨论见下一章。

§3.2 连续函数

3.2.1 连续与函数极限

在聊完数列极限后，我们即需要开始讨论函数极限。与上次习题课不同，这次习题课我们将更关注**基础性**的内容，例如给连续函数介值定理、闭区间连续函数有最值、初等函数连续性这些**看似自然**的结论补充证明。我们这么做是由于，数学上，如果直接默认看似自然的结论，很可能会带来严重的错误——例如，只凭直观是很难理解“处处连续处处不可导的函数”的存在性的。因此，我们必须在**证明**，或至少**理解证明思路**，才能承认一个结论。

在叙述并证明这些结论前，我们需要先聊聊函数极限出现的理由。事实上，**连续性**应当是一个比**函数极限**更自然的命题。函数 f 在点 x_0 连续的定义如下 (我们假定存在一个包含 x_0 的开区间使得函数有定义)：

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta>0,\quad\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),\quad|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

直观来说，这个定义是为了让 x 有微小变化时 $f(x)$ 的变化也微小，从而可以对**误差**进行估计。
* 举一个简单的例子，当我们计算一个人跑步速率时，我们将使用公式 $v=\frac{s}{t}$，这里 s 代表路程，t 代表时间。但是，由于现实中的测量是有误差的，我们事实上无法得到真实的 s 与 t，只能得到某个 $s+\Delta s$、$t+\Delta t$。如果我们希望公式的结果有效，自然也就希望当 Δs、Δt 不大时，测量出的 $\frac{s+\Delta s}{t+\Delta t}$ 也能与真实的 $\frac{s}{t}$ 相差不大，也即**自变量变化微小时因变量变化也微小**——而这就是连续性的重要定义动机。

但是，如果只有连续性的定义，将出现两个问题：

1. 若函数的定义域不为开区间，上述的 “连续” 概念会在一些点难以谈论。例如，对于 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=x$，我们自然希望它是连续的，但对**端点** 0 与 1，上述的定义并不适用。

2. 即使函数的定义域是开区间，我们有时也希望极限的概念能在**函数未定义的点谈论**。例如，对于函数 $\frac{\sin x}{x}$，由于分母为 0，其在 0 点没有定义，但作图可以发现，图像在 0 处的左右两侧会在 1 的高度 “连接” 上，由此我们希望此时也能定义 “极限” 为 1 解决这个问题。

当然，我们已经学习到，为了解决第二个问题，我们定义的函数极限需要**挖去中心点**，$f(x)$ 在 x_0 处极限为 l 时的真正定义是：

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall 0<|x-x_0|<\delta,\quad |f(x)-l|<\varepsilon$$

当 f 在 x_0 处有定义且 $l=f(x_0)$ 时，我们才称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。
* 这里连续性的定义与上方的连续性定义等价性是**需要验证**的，虽然验证过程并不困难，写出两种定义即可由 $|f(x_0)-f(x_0)|=0<\varepsilon$ 直接推得。

而为了解决第一个问题，我们的答案是定义**单侧极限**，如 $f(x)$ 在 x_0 处**右极限**为 l (直观来说即**从右侧逼近**) 的定义是

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x\in(x_0,x_0+\delta),\quad |f(x)-l|<\varepsilon$$

而**左极限**为 l 的定义是

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0),\quad |f(x)-l|<\varepsilon$$

* 另一个值得验证的结论是，$f(x)$ 在 x_0 处极限为 l **当且仅当**左右极限均为 l。从极限定义推出左右极限定义是直接的，而从左右极限为 l 推出极限为 l 需要对 $\varepsilon>0$ 在两边得到的 δ 中取最小值。

本讲义对左/右极限的记号是上标 $-$ 与 $+$，即左极限、右极限分别表示为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=l,\quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=l$$

由此，对于闭区间 $[a,b]$ 上的函数，它的左端点处只能从右侧逼近，因此以

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$$

定义它的连续性 (这对一般的点称为**右连续**)；同理，右端点只能从左侧逼近，因此以左连续定义它的连续性。由此，我们可以给出任何**区间上连续函数**的定义。

至此，我们终于搞清楚了有限点处的有限极限，之后，我们将通过对左/右极限定义的进一步讨论将极限点与极限值推广到**无穷**的情况，本章将只讨论有限的情况。

3.2.2 归结原理

在给出了函数极限的定义后，我们首先希望函数相关的结论能在**数列极限**中使用。例如，有了初等函数连续性结论，我们可以直接得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+\mathrm{e}^x}{\ln(x+1)+x^2+\cos x}=2$$

那么，我们能否以此直接进行 “换元” 得到数列极限结论

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}}+1}+\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)+\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}=2$$

呢？

答案是肯定的，这就是所谓**归结原理**的一部分，它可以直接用函数结论解决数列极限问题：

题 17. 证明若

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

则对任何满足 $a_n \neq a$ 的数列 a_n，若

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

则

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$$

进一步地，若 $b = f(a)$，$a_n \neq a$ 的限制可以去除。

解答：

- **分析**

  直观来说，这个定理说明了如果函数在 $x \to a$ 时极限为 b，对任何逼近 a 的数列，函数值也将逼近 b。这确实是一个较自然的结论，而想进行证明首先还是需要写出**定义**，并从条件的定义与结论的定义中找到目标。

  题中三个式子的定义分别为

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall 0 < |x-a| < \delta, \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n > N, \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n > N, \quad |f(a_n) - b| < \varepsilon$$

  根据形式可以发现，将第二个定义中的 ε 取为第一个定义中的 δ，即可推出第三个定义中的 ε 可取为与第一个定义相同。由此可以得到证明思路。

- **原命题证明**

  对任何 $\varepsilon > 0$，由条件可取 $\delta > 0$ 使得只要 $0 < |x-a| < \delta$，即有 $|f(x) - b| < \varepsilon$，再由条件取 N 使得

$$\forall n > N, \quad |a_n - a| < \delta$$

  利用 $a_n \neq a$ 可知

$$\forall n > N, \quad 0 < |a_n - a| < \delta$$

  这就得到了

$$|f(a_n) - b| < \varepsilon$$

  符合数列极限定义。

- **进一步证明**

  若 $b = f(a)$，连续性满足，定义可改写为

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall |x-a| < \delta, \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

  由此对任何 $\varepsilon > 0$，取出 $\delta > 0$ 使得只要 $|x-a| < \delta$，即有 $|f(x) - b| < \varepsilon$，再由条件取 N 使得

$$\forall n > N, \quad |a_n - a| < \delta$$

  这就得到了

$$|f(a_n) - b| < \varepsilon$$

  符合数列极限定义。

此命题的逆否命题事实上也很常用，即只要找到了 a_n 趋于 a 使得 $f(a_n)$ 极限不存在，或两列趋于 a 的 a_n 极限不同，即可说明 $f(x)$ 在 a 处**极限不存在**，无需再回到基本定义。

反过来，数列极限是否可以解决函数极限问题呢？答案也是肯定的，这就是**归结原理**的另一部分 (事实上是上一部分的逆命题)：

题 18. 若对任何满足 $a_n \neq a$ 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

的数列 a_n 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$$

则

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

进一步地，若去除 $a_n \neq a$ 的限制，还可得到 $b = f(a)$，即 f 还在 a 点连续。

解答:

– **分析**

以 "任何满足条件的数列极限均为 b" 作为条件是很难推出可用的结论的，因此我们需要尝试**反证**。

对于这题来说，反证也即假设 $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$，找到数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$$

具体的构造思路仍然需要从定义中研究，必须注意的是，正如之前讨论过的，对数列的构造不需要**显式给出**，只需要**利用存在性保证可以符合要求**即可。

– **原命题证明**

反证。若 $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$，根据之前讨论过的命题否定构造可知

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x, 0 < |x-a| < \delta, \quad |f(x) - b| \geq \varepsilon$$

取出符合要求的 δ，对 $\delta = \frac{1}{n}$ 取出上方要求的 x 记为 a_n，则根据条件有

$$a_n \neq a, \quad a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$$

这就说明了数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

此外，由于所有 a_n 都满足 $|f(a_n) - b| \geq \varepsilon$，利用数列极限定义，取定 ε 与上述相同可知 $f(a_n)$ 极限不为 b，得证。

– **进一步证明**

由于去除 $a_n \neq a$ 的限制事实上**加强**了条件 (即可以推出原条件)，原命题结论

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

已经满足。

取定 a_n 为全为 a 的数列，利用条件即得 $f(a) = b$，得证。

3.2.3 介值定理

接下来，我们要用归结原理证明一个相对复杂 (但十分直观) 的结论，也即书上没有明确证明的**介值定理**。

题 19. 证明，若连续函数 $f(x)$ 定义在包含 $[a,b]$ 的区间上，则对任何一个在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的 t (若 $f(a)<f(b)$ 则 $t\in[f(a),f(b)]$，反之 $t\in[f(b),f(a)]$)，存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=t$。

解答:

若 $f(a)=f(b)$，此时 t 只能为 $f(a)=f(b)$，取 $c=a$ 即符合要求，于是只需证明 $f(a)\neq f(b)$ 时的情况。由于 $f(a)>f(b)$ 与 $f(a)<f(b)$ 的情况证明几乎完全对称，我们只证明 $f(a)<f(b)$ 的情况，另一情况类似可得。可以进一步假设 $f(a)<t<f(b)$，否则若 $t=f(a)$ 直接取 $c=a$ 即可，若 $t=f(b)$ 直接取 $c=b$ 即可。

根据以上讨论，我们假定了 $f(a)<t<f(b)$，接下来的证明过程相对复杂，分为以下步骤:

- **分析与构造**

  既然我们的目标是**找到**符合要求的 c，我们需要有一种构造 c 的方式。对于连续函数 $f(x)$，找函数值等于 t 的点往往需要通过**二分法**进行，这可以启示我们进行如下的构造:

  取 $x_1=\frac{a+b}{2}$，进行如下的迭代

  $$x_{n+1}=\begin{cases}x_n+\frac{b-a}{2^{n+1}} & f(x_n)\le t\\ x_n-\frac{b-a}{2^{n+1}} & f(x_n)>t\end{cases}$$

  我们对这个迭代进行几点讨论:

  1. 首先，直接计算可知

     $$x_{n+1}\le\frac{a+b}{2}+\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)(b-a)=b-\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$$

     同理 $x_{n+1}\ge a+\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$，从而可以得到每一次迭代后确实在 (a,b) 范围内。
  2. 由此，若某次迭代后 $f(x_n)=t$，我们已经找到了符合要求的 $c=x_n$，因此不妨设所有等号均不成立，也即**每次迭代后函数值均未与 t 严格相等**。
  3. 直观上来说，这个迭代在进行的过程是，若当前比需要的值更大，我们就向左寻找到左侧区间的中点，否则像右寻找到右侧区间的中点，这就是所谓的**二分法**过程。即使 $f(x)$ 并不单调，这样的迭代从直觉上来说也一定可以找到 $f(x)=t$ 的某个根 (因为每次都在一端比 t 大一端比 t 小的区间中找)，大家可以自己简单画图进行尝试。

  由于 f 在 $[a,b]$ 是连续函数，利用**归结原理**，只要极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，我们设此极限为 c，即有

  $$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)$$

  我们下面需要证明的也即 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在与 $f(c)=t$，这样，上面定义的 c 就是符合要求的点。

- **$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在**

  从直观来说，既然每步的步长都在减半，最终 x_n 一定能落到某个点附近。但是，这件事的证明并不简单，因为我们无法知道 x_n 的**极限**，且此数列未必单调，无法利用**单调有界**定理。为此，我们提供两种不同的证明方式，分别是从**猜测极限**与**利用单调有界**出发的，大家可以挑选自己喜欢的方式证明，这里我们仅会用到条件

  $$|x_{n+1}-x_n|=\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

1. (附加) 利用**题 6** 中证明的，我们知道 x_n 必然有一个子列 $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots$ 极限存在，设此极限为 c，我们下面证明 x_n 极限也为 c。
   由条件可知对任何 $\varepsilon > 0$，存在 K 使得 $k > K$ 时
   $$|x_{m_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$
   另一方面，对任何 $n > m_k$ 有
   $$|x_n - x_{m_k}| \le \sum_{t=m_k}^{n-1} |x_{t+1} - x_t| = \left(\frac{1}{2^{m_k}} - \frac{1}{2^n}\right)(b-a) < \frac{1}{2^{m_k}}(b-a)$$
   由此，可取 K_0 使得 (由子列定义 $m_{K_0} \ge K_0$)
   $$\frac{1}{2^{m_{K_0}}}(b-a) < \frac{\varepsilon}{2}$$
   则 $k > K_0$、$n > m_k$ 时必有 $|x_n - x_{m_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ (由子列定义 m_k 随 k 单调增)。
   综合以上，令 $N = m_{\max\{K,K_0\}+1}$，即有 $n > N$ 时
   $$|x_n - c| \le |x_N - c| + |x_n - x_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   * 此处**利用子列猜测极限**是一个相对复杂但有用的估算方式，不过这里并不如下一种做法简单。
2. 首先，如果 x_n 一直在增加，我们可以直接算出其极限结果为
   $$\lim_{n\to\infty}\left(x_1 + \frac{b-a}{4} + \frac{b-a}{8} + \cdots + \frac{b-a}{2^{n+1}}\right) = x_1 + \frac{b-a}{2}$$
   由此可以想到，我们不再直接考虑 x_n，而是考虑一直增加的数列与 x_n 作差。
   具体来说，令 $y_1 = x_1$，且
   $$y_{n+1} = y_n + \frac{b-a}{2^{n+1}}$$
   上方计算已经说明了 y_n 极限存在。
   再令 $z_n = y_n - x_n$，由于
   $$z_{n+1} - z_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} - (x_{n+1} - x_n)$$
   它或为 $\frac{b-a}{2^n}$，或为 0，因此 z_n 单调上升，且
   $$z_{n+1} = z_1 + (z_2 - z_1) + \cdots + (z_{n+1} - z_n) \le 0 + \frac{b-a}{2} + \cdots + \frac{b-a}{2^n} < b-a$$
   从而 z_n 是单调非负且有上界的数列，其极限存在，因此由
   $$x_n = y_n - z_n$$
   可知 x_n 极限存在，得证。
   * 这里我们用了一个奇妙的技巧，**将未必单调的数列拆成单调数列作差**。这个技巧的本质来源也在实分析中，不过利用此方法可以证明，只要极限
   $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} |x_{k+1} - x_k|$$
   存在，数列 x_n 极限也必然存在。

在之后的证明中，我们设

$$c=\lim_{n\to\infty}x_n$$

利用 f 的连续性与**归结原理**可知极限

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)$$

因此只需证明 $f(c)=t$

- $f(c)=t$

这里我们采取**反证法**，假设 $f(c)<t$ 推出矛盾。若 $f(c)>t$，可以以相似的方法推出矛盾。这又分为三步：

1. x_n 不可能单调上升

   若 x_n 一直单调上升，也就意味着对每个 n 都有

   $$f(x_n)<t,\quad x_{n+1}=x_n+\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

   此时直接计算可发现

   $$c=\lim_{n\to\infty}x_n=b$$

   将 $f(x_n)<t$ 两侧同取极限即得

   $$f(b)\le t$$

   这与条件 $f(a)<t<f(b)$ 矛盾。

2. x_n 从某一项后单调上升

   由于我们已经知道了

   $$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)<t$$

   利用数列极限保序性可知存在 N 使得 $n>N$ 时 $f(x_n)<t$，此后根据 x_n 定义，其必然一直单调增加。

3. 矛盾推出

   由于我们已经知道 x_n 并非一直单调上升，但在某一项后单调上升，它一定存在**最后一次下降**，也即存在正整数 N 满足

   $$x_N<x_{N-1},\quad \forall n>N,\quad x_n>x_{n-1}$$

   但是，直接计算可发现此时 (由 x_n 定义，增加时 x_n-x_{n-1} 必然为 $\frac{b-a}{2^n}$)

   $$\lim_{n\to\infty}x_n=x_N+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=N+1}^{m}(x_n-x_{n-1})=x_N+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=N+1}^{m}\frac{b-a}{2^n}=x_N+\frac{b-a}{2^N}$$

   而另一方面，由于 $x_N<x_{N-1}$，由数列定义必然有

   $$x_N=x_{N-1}-\frac{b-a}{2^N}$$

   对比两式可发现

   $$c=\lim_{n\to\infty}x_n=x_{N-1}$$

   于是可得

   $$f(x_{N-1})<t$$

   但这与数列构造中 $x_N<x_{N-1}$ 需要 $f(x_{N-1})>t$ 矛盾。

* 事实上最后这部分证明可以从图像上直观理解，大家可以尝试进行绘制若 $f(c) < t$，如何从。

* 这题没有标注附加，是因为其中的过程与技巧确实都是我们**已经学过**的，只是用法更加复杂。例如，其中证明 x_n 极限存在的部分是一个很好的对“不知道极限时如何证明极限存在”的补充。阅读这样较复杂的证明可以有效加深对学过知识的**应用**的理解。

由此可见，数学上，即使直观的结论证明起来也可能非常复杂 (甚至可能未必正确)，这是由于连续函数可能具有非常差的性态——大家有兴趣可以搜索一下 Weierstrass 函数——不能直接从“图像连线”进行**严谨证明**。

介值定理的最经典应用是，只要连续函数在两个点符号相反，它们之间就存在**零点**，由此可以给出一些对零点的估计，我们之后讲解习题时会涉及。

3.2.4 最值定理

最后，我们再介绍一个很有用的性质，同样是书上未给出严谨证明的，**最值定理**：

题 20 (附加)**.** 证明，若连续函数 $f(x)$ 定义在包含 $[a,b]$ 的区间上，则存在 $c_m \in [a,b]$、$c_M \in [a,b]$ 使得

$$\forall x \in [a,b], \quad f(c_m) \le f(x) \le f(c_M)$$

也即区间上 $f(c_m)$ 为**最小值**、$f(c_M)$ 为**最大值**。

解答：

仍然遵循先分析后证明的思路：

– **分析**

与介值定理不同，此定理无法通过类似“二分逼近”的方式找点，因为我们**无法预判最大值点在什么位置**。由此，必须考虑值域本身，由于介值定理已经满足，我们需要证明**区间上连续函数的值域一定为区间**，再进一步说明其为**闭区间**，就得到了最大值最小值一定存在。

事实上，为了证明此结论，我们还需要一个被称为**确界原理**的定理，它需要从单调有界定理推出，也是实数完备性的等价表述之一。

* 这个技巧本质上来自于**点集拓扑**。

– **任何有上界的集合必有上确界**

对 $\mathbb{R}$ 的**非空**子集 E，这里的上界是指 M 满足

$$\forall x \in E, \quad x \le M$$

而 E 的上确界 M_0 是指 M_0 为 E 的上界，且任何 $m < M_0$ 均不为 E 的上界，也即**最小的上界**。

接下来的证明非常有技巧性，本质想法和上课介绍过的戴德金分割类似，大家欣赏一下即可：

我们默认 $\mathbb{Q}$ 是**可数**的，也即可以排成一个数列 (可以自行搜索对此的证明)，则令 D 是所有作为 E 的上界的有理数，由于 D 是 $\mathbb{Q}$ 的子集，且个数无穷 (由于已知 E 存在上界 M，所有比 M 大的有理数都是 E 的上界，这已经有无穷多个了)，它也可以排成一个数列 $q_1, q_2, \ldots$。令

$$p_n = \min\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$$

根据定义可发现 p_n 是单调下降的，其有上界 p_1；且由于 E 非空，假设 $x \in E$，根据上界定义必然所有 $q_n \geq x$，于是所有 $p_n \geq x$，这就得到了 p_n **单调有界**，故极限存在，将极限记为 M_0。最后我们验证 M_0 为 E 的上确界：

1. 由条件，对任何 $x \in E$ 与 q_n，有 $x \leq q_n$，从而对任何 $x \in E$ 与 p_n 有 $x \leq p_n$，利用极限保序性可得 $x \leq M_0$，于是 M_0 是 E 的上界。
2. 对任何小于 M_0 的数 m，若 m 是 E 的上界，根据有理数稠密性可知存在 m 与 M_0 间的有理数，它也是 E 的上界，于是必为某个 q_k，从而对 $n \geq k$ 必然有 $p_n \leq q_k < M_0$，与 p_n 极限为 M_0 矛盾。

– **满足介值定理的函数在闭区间上值域为区间**

设满足介值定理的函数 f 在区间 $[a,b]$ 上值域为集合 E。由于 $f(a) \in E$，E 非空，且利用介值定理，我们知道 E 满足性质，若 E 包含 x、y，且 $x < y$，则 E 包含 $[x,y]$。我们下面证明满足此条件的非空集合一定为区间。这需要相对复杂的分类讨论：

1. 若 E 上界、下界都不存在，则 $E = \mathbb{R}$。
   此时根据定义，对任何 $t \in \mathbb{R}$，存在 $x \in E$ 使得 $x < t$ (否则 t 是下界)，存在 $y \in E$ 使得 $y > t$ (否则 t 是上界)，再利用介值定理即得 $t \in E$，得证。
2. 若 E 上界存在，下界不存在，则 $E = (-\infty, d]$ 或 $E = (-\infty, d)$。
   由 E 上界存在,我们设上确界为 d,利用上界定义可知 $E \subset (-\infty, d]$。若 $d \in E$,与上一种情况完全类似可知 $(-\infty, d]$ 中每一点均可取到,从而 $E = (-\infty, d]$,否则有 $E \subset (-\infty, d)$,我们下面证明等号成立。
   对任何 $t < d$，由上确界定义，t 不为上界，因此存在 $y \in E$ 使得 $t < y$，又由 t 不为下界可知存在 $x \in E$ 使得 $x < t$，再利用介值定理即得 $t \in E$，这就得到了证明。
3. 若 E 下界存在，上界不存在，则 $E = [c, +\infty)$ 或 $E = (c, +\infty)$。
   设 c 为 E 的下确界，证明与上一种情况完全类似。
4. 若 E 上下界均存在，则 $E = (c, d)$ 或 $E = [c, d)$ 或 $E = (c, d]$ 或 $E = (c, d)$。
   设 c 为 E 的下确界、d 为 E 的上确界，根据定义可知 $E \subset [c, d]$，接下来的讨论与第二种情况完全类似。

– **闭区间上连续函数的值域为闭区间**

由于我们已经证明了值域为区间，仍记为 E，为了证明其为闭区间，只需要排除 (半) 开区间与无穷区间的情况即可。我们接下来证明区间的右端不为无穷且不开，左端完全类似即可：

1. 区间右端不为无穷
   若区间右端为无穷，利用定义可知存在正整数 N 使得对所有正整数 $n > N$ 都有 $n \in E$ (只要 N 大于左端即可)。
   由此，利用值域定义可取出数列 $x_i \in [a, b]$ 满足 $f(x_i) = N + i$。由于 x_i 有界，其存在**收敛子列** (**题 6** 附加部分)，设此收敛子列为 $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$，则极限
   $$\lim_{n\to\infty} x_{k_n}$$
   存在，设极限为 x，则利用**归结原理**可知
   $$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x)$$
   但 $f(x_{k_n}) = N + k_n \geq N + n$，利用定义可发现极限不存在，矛盾。
2. 区间右端不开

由于已经证明区间右端不为无穷，我们设其为 d，则右端必然为 d 闭或 d 开，下面证明不为 d 开。

若区间右端为 d 开，利用定义可知存在正整数 N 使得对所有正整数 $n > N$ 都有 $d - \frac{1}{n} \in E$ (只要 $d - \frac{1}{N}$ 大于左端即可)。

由此，利用值域定义可取出数列 $x_i \in [a, b]$ 满足 $f(x_i) = d - \frac{1}{N+i}$。由于 x_i 有界，其存在**收敛子列**，设此收敛子列为 $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$，则极限

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n}$$

存在，设极限为 x，则利用**归结原理**可知

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x)$$

另一方面

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(d - \frac{1}{N+n}\right) = d$$

而 $f(x_{k_n})$ 为其子列，极限与原数列极限相同，这就得到 $f(x) = d$，与 d 不能取到矛盾。

* 取子列的方法某种意义上相对通用——不过还是并不在高等数学范围内。

综合以上，对原命题，我们考虑将 f 的定义**限制**在 $[a, b]$ 上 (也即不考虑 f 在 $[a, b]$ 外的点值)，则可知其值域一定为某闭区间 $[c, d]$。令 c_m 满足 $f(c_m) = c$、c_M 满足 $f(c_M) = d$，可发现即满足要求。

* 当然，若我们默认最值定理成立，利用介值定理可以立刻得到**闭区间上连续函数的值域是闭区间**，这个结论本身还是常用的。

比起介值定理，这个定理从直观上更难理解一些，但仍然是正确的。介值定理与最值定理的重要性在于，它们说明了**将逐点的连续性推广到区间上后获得的性质**，超越了连续性定义在**每点附近**的限制。

§3.3 初等函数连续性

接下来，我们将目光放到一个叙述起来十分简单的定理：**初等函数在定义域内连续**。此结论是可以直接使用的——从直观感受来说，初等函数可以 "画出连续的图像"，当然应该具有连续性。

不过，大家将通过接下来的分析看到，究竟需要怎样复杂的过程才能得到这一结论。

3.3.1 反函数

首先，我们必须引入一个相对抽象的理论，也即**反函数及其连续性**。事实上，不仅对数函数是指数函数的反函数，反三角函数是三角函数的反函数，就连 $\sqrt{x}$ 的定义也涉及了反函数的过程。由此，必须先给出反函数的连续性结论才能完成证明。

关于反函数的定义与基本性质如下：

题 21 (附加)**.** 设 X、Y 都是 $\mathbb{R}$ 的子集。对于定义在 $X \to Y$ 的函数 f，若定义在 $Y \to X$ 的函数 g 满足

$$\forall x \in X, \quad g(f(x)) = x$$

$$\forall y \in Y, \quad f(g(y)) = y$$

则称 g 是 y 的**反函数**。证明一个函数存在反函数当且仅当它是**双射**，且存在时反函数**唯一**。

解答:

分为四个命题:

- **存在反函数推单射**

  反证，若 f 不是单射，则存在不相等的 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$，于是 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，与它们分别为 x_1、x_2 矛盾。

- **存在反函数推满射**

  反证，若 f 不是满射，假设 $y \in Y$ 不在 f 的值域中，则有 $f(g(y)) \neq y$，矛盾。

- **双射推存在反函数**

  由满射可知对任何 $y \in Y$，存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$，又由单射可知这样的 x 唯一，从而可以定义 g 使得 $g(y)$ 为满足 $f(x) = y$ 的唯一元素 x，由此可验证其符合反函数定义。

- **反函数唯一**

  若 g_1、g_2 均为 f 反函数，对任何 $y \in Y$，利用 $g_1(f(x)) = x$ 与 $f(g_2(y)) = y$ 有

  $$g_2(y) = g_1(f(g_2(y))) = g_1(y)$$

  这就得到了 $g_1 = g_2$，从而反函数唯一。

而其**连续性**可以归结为定理:

题 22 (附加). 若定义在区间 I (这里区间可能为开、闭或半开半闭，且两端可能为无穷) 上的**连续**函数 $f(x)$ 是**严格单调**的，则其值域是某个区间 J，且存在定义在 $J \to I$ 的**连续**函数 g 为 f 的反函数。

解答:

我们不妨设 f 严格单调增，单调减的情况证明完全类似。

与**题 20** 相同，我们可以说明 f 的值域必然为区间，设为 J。由值域定义，f 在 I 到 J 上为满射；另一方面，利用严格单调性，对 J 中的 $x < y$ 应有 $f(x) < f(y)$，从而可知 f 为单射。综合上述讨论，f 为双射，由**题 21** 结论存在反函数 g。

接下来分类讨论。对 $t \in J$，若 t 不为 J 的边界点 (即闭区间端点或半闭的端点)，存在 $s > 0$ 使得 $[t-s, t+s] \subset J$，连续性可以定义。另一方面，由于 $g(t-s) \in I$、$g(t+s) \in I$，且利用 f 的严格单调性可知 $g(t-s) < g(t) < g(t+s)$，因此 $g(t)$ 不是 I 的边界点，即存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $(g(t) - \varepsilon_0, g(t) + \varepsilon_0) \subset I$ (取 $\varepsilon_0 = \min\{g(t+s) - g(t), g(t) - g(t-s)\}$ 即可)。

* 这段的说明稍显复杂，总而言之是为了证明 I **与** J **的边界点相互对应**，也即当 t 不是 J 的边界点时 $g(t)$ 不是 I 的边界点。

为了证明 g 在 t 处连续，也即要证

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall |y - t| < \delta, \quad |g(y) - g(t)| < \varepsilon$$

我们将其等价写为 (与数列极限类似可证明等价)

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \exists \delta > 0, \quad \forall |y - t| < \delta, \quad |g(y) - g(t)| < \varepsilon$$

对任何 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，将 $|g(y) - g(t)| < \varepsilon$ 改写为

$$g(t) - \varepsilon < g(y) < g(t) + \varepsilon$$

由 $\varepsilon<\varepsilon_0$ 可知上式两侧都落在 I 中。利用 f 的单调性，上式两侧同作 f 不影响结论，也即上式等价于

$$f(g(t)-\varepsilon)<y<f(g(t)+\varepsilon)$$

于是取 $\delta=\min\{f(g(t)+\varepsilon)-t,t-f(g(t)-\varepsilon)\}$ 即得 $|y-t|<\delta$ 时其必然落在上方区间内，从而 $|g(y)-g(t)|<\varepsilon$，得证连续。

若 J 的左端为闭且 t 为 J 的左端点，利用严格单调性类似讨论可知 $g(t)$ 必然为 I 的左端点，从而在上述过程中只考虑右侧可证明；对 J 的右端点 t 可证 $g(t)$ 为 I 的右端点，同理可证。

综合以上即证明了 g 的连续性。

3.3.2 指数与对数

* 在开始讨论之前，必须指出，**数列极限的加减乘除性质保证了实数的加减乘除 (除数非 0) 仍然是实数**。这是因为，实数是以“某个极限存在的有理数列的极限”定义的，因此，利用有理数的加减乘除 (除数非零) 仍然是有理数，我们才能保证有理数列极限的加减乘除仍然是有理数列的极限。实数对四则运算的封闭性是接下来一切讨论的基础。

首先，我们将聊一个在高中被规避的问题：指数函数究竟应该如何定义？对于一个正数 c，$c^{\sqrt{2}}$ 究竟是什么？这个过程需要分为三步：

题 23. 对实数 x 与整数 m，给出 x^m 的定义，并说明它在定义域内 ($m>0$ 时定义在 $\mathbb{R}$ 上，$m\leq 0$ 时定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上) 对 x 连续。

解答：

当 m 为正整数时，x^m 代表 x 与自身相乘 m 次；当 m 为 0 时，x^m 在 $x\neq 0$ 时定义为 1；当 $m<0$ 时，x^m 代表 x 与自身相乘 m 次的倒数。分类说明：

- $m=0$ 时，常函数利用定义可直接验证连续，保证落在定义域内时任取 δ 即可。
- $m>0$ 时，对任何 $x_0\in\mathbb{R}$，要使

  $$|x^m-x_0^m|<\varepsilon$$

  将左侧因式分解得到其等价于

  $$|x-x_0||x_0^{m-1}+xx_0^{m-2}+\cdots+x^{m-1}|<\varepsilon$$

  类似之前的操作，我们可以让第二项得到控制：只要 $|x-x_0|<1$，第二项中的每一项绝对值都不会超过 $(|x_0|+1)^{m-1}$，从而第二项不超过

  $$M=m(|x_0|+1)^{m-1}$$

  此时只要 $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{M}$ 即符合要求。综合以上，我们取

  $$\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{M}\right\}$$

  即可得到 $|x-x_0|<\delta$ 时

  $$|x^m-x_0^m|\leq M|x-x_0|<\varepsilon$$

  从而符合连续性定义。

– $m<0$ 时，记 $n=-m$，其为正整数。对 $x_0\neq 0$，要使

$$\left|\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x_0^n}\right|<\varepsilon$$

左侧同样因式分解为

$$\frac{|x-x_0|}{|xx_0|}\left|\frac{1}{x_0^{n-1}}+\frac{1}{xx_0^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{x^{n-1}}\right|$$

与之前类似，利用控制分母的思想，我们先取 $|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$，这样至少可以保证 $|x|>\frac{|x_0|}{2}$，从而分母不会为 0，且第二项中的每一项绝对值都不会超过 $\frac{2^{n-1}}{|x_0|^{n-1}}$，进一步对 $|xx_0|$ 部分应用此估计可得 $|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$ 时有

$$\left|\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x_0^n}\right|\leq\frac{|x-x_0|}{|xx_0|}\frac{n2^{n-1}}{|x_0|^{n-1}}\leq\frac{2|x-x_0|}{|x_0|^2}\frac{n2^{n-1}}{|x_0|^{n-1}}=\frac{n2^n}{|x_0|^{n+1}}|x-x_0|$$

记 $M=\frac{n2^n}{|x_0|^{n+1}}$，取

$$\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2},\frac{\varepsilon}{M}\right\}$$

可类似前一种情况由定义证明连续。

* 可直接由定义讨论验证运算律 $x^mx^n=x^{m+n}$、$x^my^m=(xy)^m$、$(x^m)^n=x^{mn}$ 满足。

题 24. 对正数 a 与有理数 $\frac{p}{q}$，给出 $a^{p/q}$ 的**严格定义**。

解答:

我们可以不妨设 q 为正整数 (若 q 为负整数，利用 $\frac{p}{q}=\frac{-p}{-q}$ 变换即可)。

分两步说明:

– q 为**奇数**时定义 $a^{1/q}$

考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)=x^q$。利用不等式的乘积性质 (对正数 a,b,c,d，若 $a>b$、$c>d$ 则 $ac>bd$，这可以直接作差分解得到)，$f(x)$ 在 $x>0$ 时为正且严格单调增，而由 q 为奇数可知 $f(x)$ 为奇函数，从而它在 $x<0$ 时为负且严格单调增、在 $x=0$ 时为 0，综合得到 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上**严格单调增**。

利用正整数 n 满足 $n^q\geq n$ 可知 $f(x)$ 的值域**无上界**，再由奇函数可知**无下界**，利用**题 22** 的结论，$f(x)$ 的值域只能为 $\mathbb{R}$，且存在唯一 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的连续函数 g 为 f 的**反函数**。我们记 $g(x)=x^{1/q}$。

– q 为**偶数**时定义 $a^{1/q}$

考虑定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=x^q$，与奇数时类似讨论正数与 0 可知 $f(x)$ 严格单调增。利用严格单调性，$f(0)=0$ 为 f 的**最小值**，再通过正整数 n 满足 $n^q\geq n$ 可知 $f(x)$ 的值域**无上界**，利用**题 22** 的结论，$f(x)$ 的值域只能为 $[0,+\infty)$，且存在唯一 $[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 的连续函数 g 为 f 的**反函数**。我们记 $g(x)=x^{1/q}$。

– 定义 $a^{p/q}$ 并验证**良好定义性**

对任何 $\frac{p}{q}$，我们将其化为**最简分数** (且保证分母为正整数) $\frac{p_0}{q_0}$，并定义

$$a^{p/q}=(a^{p_0})^{1/q_0}$$

当 q_0 为奇数时对 $a\in\mathbb{R}$ 可定义，否则对 $a\geq 0$ 可定义。

良好定义性包含两方面，这里仅简单说明：一个是对**定义域**的讨论，当 q_0 为偶数时，由最简分数可知 p_0 为奇数，因此 a^{p_0} 必然与 a 同号，于是只能在非负时定义；另一个是验证指数的运算律满足，由于涉及定义域问题需要的讨论相对复杂，不过仍然可以证明。

题 25 (附加). 对正数 a 与实数 t，用极限理论给出 a^t 的**严格定义**。

解答:

在**题 24** 中，我们已经给出了有理数指数的定义，且当 $a>0$ 时，它的任何有理数指数可以定义。我们如此定义 a^t：当 t 为有理数时，我们已经得到了定义，而当其为无理数时，我们**任取**一列有理数 $t_1,t_2,\dots$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t$$

并定义

$$a^t = \lim_{n\to\infty} a^{t_n}$$

这个定义的合理性并不直观：我们需要说明此极限一定**存在**，且对每一列有理数都**相等**。

当 $a=1$ 时，根据定义可发现 a 的任何有理数次方均为 1，由此可知对一切实数 t 有 $a^t=1$。因此，我们只需要讨论 $a>1$ 与 $0<a<1$ 的情况。先假设 $a>1$，证明分为四步：

– **单调性**：对有理数 $q_1<q_2$，有 $a^{q_1}<a^{q_2}$。

设 $q_1=\frac{p_1}{r_1}$、$q_2=\frac{p_2}{r_2}$，其中 r_1、r_2 为正整数，p_1、p_2 为整数。**题 24** 中已经验证了正整数次方在底数为正时的单调增性，从而可两侧同作 r_1r_2 次方得到

$$a^{q_1}<a^{q_2} \quad\Longleftrightarrow\quad a^{p_1r_2}<a^{p_2r_1}$$

另一方面 $q_1<q_2$ 同乘 r_1r_2 次方得到

$$q_1<q_2 \quad\Longleftrightarrow\quad p_1r_2<p_2r_1$$

再利用 $a>1$，由定义可知 a^m $(m\in\mathbb{Z})$ 在 m 越大时越大，从而得证单调增。

– **极限存在**：存在趋于 t 的有理数列 s_n 使得 a^{s_n} 有极限，我们将此极限记为 l。

我们希望找到**单调上升**趋于 t 的有理数列。利用有理数稠密性，令有理数 $s_1\in(t-1,t)$，进一步取有理数 $s_2\in(\max\{s_1,t-1/2\},t)$，这样可以保证 s_2 比 s_1 更大，且 $|s_2-t|<\frac{1}{2}$，同理取有理数 $s_3\in(\max\{s_2,t-1/3\},t)$，这样利用数列极限定义即可得到

$$\lim_{n\to\infty} s_n = t$$

另一方面，由于 s_n 单调增，根据已证的单调性，a^{s_n} 也单调增，且其有界 (对任何大于 t 的有理数 q，$a^{s_n}<a^q$)，这就得到极限存在。

– **弱化的连续性**：对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对**有理数** q_1、q_2，当 $q_1,q_2\in(t-\delta,t+\delta)$ 时，$|a^{q_1}-a^{q_2}|<\varepsilon$。

不妨设 $q_1\le q_2$，要使

$$|a^{q_1}-a^{q_2}|<\varepsilon$$

由单调性只需

$$a^{q_1}(a^{q_2-q_1}-1)<\varepsilon$$

取 $\delta<1$，利用单调性可知 a^{q_1} 不会超过任何 a^q，这里有理数 $q>t+1$，记 M 为上述 a^q。

进一步利用单调性，取 $\delta < \frac{1}{2N}$，N 待定，则

$$a^{q_2-q_1} - 1 < a^{1/N} - 1$$

要使其小于 $\frac{\varepsilon}{M}$，只需

$$a^{1/N} < 1 + \varepsilon$$

也即

$$(1+\varepsilon)^N > \frac{a}{M}$$

利用二项式展开可知左侧大于 $N\varepsilon$，从而只需 $N > \frac{Ma}{\varepsilon}$ 即可。由此，令

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{M}, \frac{\varepsilon}{aM}\right\}$$

通过上述讨论可知符合要求。

– **极限相同**：对所有趋于 t 的有理数列 t_n，a^{t_n} 趋于 l。

我们令 s_n 与第二部分证明中相同构造，证明的核心是三角不等式

$$|a^{t_n} - l| \le |a^{s_n} - l| + |a^{s_n} - a^{t_n}|$$

对任何 $\varepsilon > 0$，利用第三部分证明，存在 $\delta > 0$ 使得 $s_n, t_n \in (t-\delta, t+\delta)$ 时

$$|a^{s_n} - a^{t_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = t$$

对任何 $\delta > 0$，存在 N_1、N_2 使得 $n > N_1$ 时 $|s_n - t| < \delta$、$n > N_2$ 时 $|t_n - t| < \delta$，这就得到 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时 $|a^{s_n} - a^{t_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$。

另一方面，由于已知 a^{s_n} 极限为 l，存在 N_3 使得 $n > N_3$ 时

$$|a^{s_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

综合以上，$n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$ 时

$$|a^{t_n} - l| \le |a^{s_n} - l| + |a^{s_n} - a^{t_n}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

得证。

当 $a \in (0,1)$ 时，将第一部分的单调增证明改为单调减，其他部分类似改写即可。

利用此定义，我们可以证明其**严格单调性**：

题 26. 当 $a > 0$ 且 $a \ne 1$ 时，证明定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = a^x$ 严格单调增或严格单调减。

解答：

我们只证明 $a > 1$ 时严格单调增，$a \in (0,1)$ 时严格单调减证明类似。

题 25 中，我们已经证明了对有理数 q_1、q_2，$q_1 < q_2$ 时 $a^{q_1} < a^{q_2}$，接下来分为三部分：

– 若 $x < y$，且 x 为有理数，y 为无理数。构造有理数列 y_n 使得其极限为 y，取定 (x, y) 中

的有理数 z，在极限定义中取 $\varepsilon = y - z$ 可知存在 N 使得 $n > N$ 时 $y_n > z$，从而

$$a^{y_n} > a^z > a^x$$

由此取极限得到

$$a^y \geq a^z > a^x$$

得证。

- 若 $x < y$，且 x 为无理数，y 为有理数。与上类似，构造有理数列 x_n 使得其极限为 x 可得证。
- 若 $x < y$，且 x、y 均为无理数，取有理数 $z \in (x, y)$，利用上方两部分可知

$$a^y > a^z > a^x$$

从而得证。

综合所有情况可知 a^x 严格单调增。

进一步地，**连续性**也是容易证明的：

题 27. 对正数 a，证明定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = a^x$ 是连续函数。

解答：

由 a^x 定义，对所有有理数 q 有 $a^q > 0$，进一步通过单调性可知对任何 $x \in \mathbb{R}$ 有 $a^x > 0$。

对任何 $x_0 \in \mathbb{R}$，有

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1|$$

与**题 25** 中弱化延续性的证明类似，对任何 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N 使得

$$a^{1/N} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}, \quad 1 - a^{-1/N} < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$$

从而再通过单调性可知只需取

$$\delta = \frac{1}{N}$$

即有 $|x - x_0| < \delta$ 时

$$-\varepsilon < -a^{x_0}(1 - a^{-\delta}) < |a^x - a^{x_0}| < a^{x_0}(a^{\delta} - 1) < \varepsilon$$

这就证明了连续性。

在讨论完指数函数后，**对数函数**的讨论就显得简单了，只需要补充一个**值域**结论：

题 28. 当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时，证明定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = a^x$ 值域为 $(0, +\infty)$。

解答：

我们已经证明了 a^x 恒大于 0，从而由**题 22** 可知 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$ 的某个子区间，接下来说明其为 $(0, +\infty)$。

仍然只证明 $a > 1$ 的情况，$a \in (0, 1)$ 时证明类似。对正整数 N，利用 $a^N = (1+(a-1))^N > N(a-1)$ 即可知 a^x 可取任意大，区间右端只能为 $+\infty$；由于 $a^{-N} = \frac{1}{a^N}$，即得 $a^{-N} < \frac{1}{N(a-1)}$，从而 a^x

可取任意接近 0，区间左端只能为 0。

由于对底数 $a > 0$、$a \neq 1$，指数函数 a^x 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的严格单调连续函数，且其值域为 $(0, +\infty)$，根据**题 22**，**存在唯一**定义在 $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 的**连续**函数为其反函数，记为 $\log_a x$。

3.3.3　幂函数

由于当 $x > 0$ 时有 $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$，想要证明幂函数的连续性，一个简单方法是先说明函数**组合**的连续性结论：

题 29. 证明若 $f(x)$、$g(x)$ 定义域相同且连续，则 $f(x) \pm g(x)$、$f(x)g(x)$ 连续；且 $g(x)$ 非零处 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 连续。

解答：

考虑任何 x_0 处：

- 对任何 $\varepsilon > 0$，由定义存在 $\delta_1 > 0$、$\delta_2 > 0$ 使得 $|x - x_0| < \delta_1$ 时

  $$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  $|x - x_0| < \delta_2$ 时

  $$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  从而取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 即有 $|x - x_0| < \delta$ 时

  $$|(f(x) \pm g(x)) - (f(x_0) \pm g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

  即符合连续性定义。

- 对任何 $\varepsilon > 0$ 要使

  $$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| < \varepsilon$$

  为了构造出 $f(x) - f(x_0)$ 与 $g(x) - g(x_0)$，我们利用分解 (本质是加 $f(x_0)g(x)$ 后减去这项)

  $$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = g(x)(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$$

  由于 $g(x)$ 在 x_0 处极限为 $g(x_0)$，存在 δ_0 使得 $|x - x_0| < \delta_0$ 时 $|g(x) - g(x_0)| < 1$，此时

  $$|g(x)| < |g(x_0)| + 1$$

  另一方面，由定义存在 $\delta_1 > 0$、$\delta_2 > 0$ 使得 $|x - x_0| < \delta_1$ 时

  $$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|g(x_0)| + 2}$$

  $|x - x_0| < \delta_2$ 时 (加 1 是为了保证分母不为 0)

  $$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x_0)| + 2}$$

  这样令 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ 即有

  $$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq (|g(x_0)| + 1)|f(x) - f(x_0)| + (|f(x_0)| + 1)|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

  即符合连续性定义。

– 利用上一部分证明，只需证明 $g(x)$ 非零处 $\frac{1}{g(x)}$ 连续即可。

由于

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}\right|=\frac{|g(x)-g(x_0)|}{|g(x)||g(x_0)|}$$

与数列极限时类似，我们先取 δ_1 使得 $|x-x_0|<\delta_1$ 时 $|g(x)-g(x_0)|<\frac{|g(x_0)|}{2}$，此时

$$|g(x)|>\frac{|g(x_0)|}{2}$$

进一步取 δ_2 使得 $|x-x_0|<\delta_2$ 时

$$|g(x)-g(x_0)|<\frac{|g(x_0)|^2}{2}\varepsilon$$

综合两部分，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}\right|\leq\frac{2|g(x)-g(x_0)|}{|g(x_0)|^2}<\varepsilon$$

即符合连续性定义。

题 30. 证明若 $f(x)$ 在 x_0 连续，$g(t_0)=x_0$ 且 $g(t)$ 在 t_0 连续，则 $f(g(t))$ 也在 t_0 连续。

解答：

对任意 $\varepsilon>0$，由定义可知存在 $\delta_0>0$ 使得 $|x-x_0|<\delta_0$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\delta_0$$

存在 $\delta>0$ 使得 $|t-t_0|<\delta$ 时

$$|g(t)-g(t_0)|<\delta_0$$

此时有

$$|f(g(t))-f(g(t_0))|<\varepsilon$$

即符合连续性定义。

对于幂函数，一个比起指数函数更麻烦的地方在于，它的**定义域**会随着指数的不同而有差别。这虽然不至于非常复杂，但确实需要细致的讨论：

题 31. 证明 $f(x)=c$ (c 为常数) 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

* 注意 $f(x)=x^0$ 在 $x\neq 0$ 时为 1，否则**没有定义**，定义域与 $f(x)=1$ 不同。

解答：

对任何 x_0、任何 $\varepsilon>0$，取 $\delta=1$ 即有 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon$$

即符合连续性定义。

题 32. 当 $a>0$ 且为最简形式分母是奇数的有理数时，证明 $f(x)=x^a$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

解答:

当 $x>0$ 时，由 $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$ 与函数组合的连续性结论可知连续；当 $x<0$ 时，由 $x^a=-\mathrm{e}^{a\ln(-x)}$ (利用奇函数性质) 与函数组合的连续性结论可知连续。由此，我们只需要再证明在 0 处连续即可。

利用定义可知 $0^a=0$，从而只需要证明

$$\lim_{x\to 0}x^a=0$$

由于 e^x 单调增，由反函数定义可知 $\ln x$ 在定义域内单调增，于是进一步通过定义可发现 $x>0$ 时 $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$ 是单调增函数，再结合 e^x 恒正可知对任何 $\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时

$$0<x^a<\delta^a$$

同理当 $-\delta<x<0$ 时

$$-\delta^a<x^a<0$$

由此，要使

$$|x^a|<\varepsilon$$

只需

$$\delta^a\leq\varepsilon$$

由此，取 $\delta=\varepsilon^{1/a}$ 即符合极限定义，得证连续性。

题 33. 当 $a<0$ 且为最简形式分母是奇数的有理数时，证明 $f(x)=x^a$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续 (注意在两个区间上连续是指在它们上**分别**连续)。

解答:

当 $x>0$ 时，由 $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$ 与函数组合的连续性结论可知连续；当 $x<0$ 时，由 $x^a=-\mathrm{e}^{a\ln(-x)}$ (利用奇函数性质) 与函数组合的连续性结论可知连续。

题 34. 当 $a>0$ 且 a 不是最简形式分母为奇数的有理数时，证明 $f(x)=x^a$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

解答:

当 $x>0$ 时，由 $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$ 与函数组合的连续性结论可知连续，由此只需要证明在 0 处连续。证明方式与**题 32** 完全相同。

题 35. 当 $a<0$ 且 a 不是最简形式分母为奇数的有理数时，证明 $f(x)=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

解答:

此时直接由 $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$ 与函数组合的连续性结论可知连续。

综合以上，我们终于证明了**幂函数在定义域内连续**。

3.3.4　三角与反三角

接下来，我们来谈论三角函数。事实上，对于三角函数，我们会遇到一个和指数函数一样的问题，即其**严格定义**是不明确的。具体来说，弧度制本身需要用弧长来定义，但我们从未知道“弧长”究竟是什么，自然也就无从谈起 $\sin x$ 独立于几何的定义。

很遗憾，对于三角函数，我们现在的数学知识并不足以给出一个它的严格定义。一个可以完全避免循环论证与几何的方法是通过**级数**进行定义，而我们此处必须将

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin x < x < \tan x$$

与三角函数的**运算律** (如奇偶性、和差角公式) 当作某种可以直接使用的**公理**进行理解。

至此，我们下面来证明三角函数是连续的，我们此处只证明 sin 的连续性即可，具体原因将在之后讨论：

题 36. 从 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时 $\sin x < x < \tan x$ 出发证明 $\sin x$ 是连续函数。

解答:

直接利用和差化积公式并将 cos 放大为 1 可知

$$|\sin x - \sin y| = \left|2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}\right| \leq 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right|$$

由于 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时 $\sin x < x$，利用奇函数性质可知 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时 $|\sin x| \leq |x|$，在 $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ 时由 $|\sin x| \leq 1$ 此式仍然成立，从而可知

$$|\sin x - \sin y| \leq 2\frac{|x-y|}{2} = |x-y|$$

由此，对任何 x_0 与任何 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$ 可得 $|x - x_0| < \delta$ 时

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon$$

即符合连续性定义。

除此以外，我们还需要证明一个以后经常使用的**重要极限**：

题 37. 从 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时 $\sin x < x < \tan x$ 出发证明

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

解答:

在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，对不等式两端同除以 $\sin x$ 可得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

令 $x \to 0^+$，由**夹逼定理**即得

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

利用 $\frac{x}{\sin x}$ 为偶函数，可知 (这里本质上也是利用了换元，将 x 换为 $-x$，严谨性见之后讨论)

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(-x)}{\sin(-x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

从而即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

再利用倒数极限结论即可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{1}=1$$

有了 sin 后，arcsin 自然也是可以定义的，只要基于如下结论：

题 38. 考虑定义在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ 上的 $\sin x$，证明它是一个严格单调增的函数，且值域即为 $[-1,1]$。

解答：

利用和差化积公式可以得到，对 $-\frac{\pi}{2}\le x<y\le\frac{\pi}{2}$ 有

$$\sin y-\sin x=2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

由于 $\frac{y-x}{2}\in(0,\frac{\pi}{2}]$、$\frac{x+y}{2}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，利用 sin、cos 性质可知右端为正，从而严格单调性成立。进一步由 $\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$、$\sin\frac{\pi}{2}=1$ 可得值域结论。

由此，结合反函数的连续性，我们即得到了 arcsin 的良好定义性与**连续**性。

3.3.5 补充与结论

最后，我们对上述的讨论进行一些补充，并给出最终结论。首先，上一部分对函数组合连续性的讨论也可以**推广**到函数极限中：

题 39. 证明若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=l_1$$
$$\lim_{x\to x_0}g(x)=l_2$$

则

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=l_1\pm l_2$$
$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=l_1l_2$$

且 $l_2\ne 0$ 时

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$$

解答：

由于**题 29** 中事实上只用到了 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 点处的连续性即可保证加减乘除 (除数不为 0) 时连续，我们定义

$$f_0(x)=\begin{cases}f(x) & x\ne x_0\\ l_1 & x=x_0\end{cases},\quad g_0(x)=\begin{cases}g(x) & x\ne x_0\\ l_2 & x=x_0\end{cases}$$

由极限与 x_0 点处值无关可知 $f_0(x)$、$g_0(x)$ 在 x_0 处极限与 $f(x)$、$g(x)$ 相同，从而由定义它们均在 x_0 处连续，进一步利用**题 29** 结论得证。

不过，复合的连续性的推广会有点麻烦：

题 40. 证明若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

$$\lim_{t\to t_0} g(t) = x_0$$

未必有

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t)) = l$$

但当 f 在 x_0 **连续**，即 $l = x_0$ 时，上式成立。

解答：

– 取

$$g(t) = 0, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

并取 $t_0 = 0$，则直接计算可知

$$\lim_{t\to t_0} g(t) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t)) = \lim_{t\to t_0} 1 = 1$$

– 若 f 在 x_0 连续，有 $l = f(x_0)$。对任意 $\varepsilon > 0$，由定义可知存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $|x - x_0| < \delta_0$ 时

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta_0$$

存在 $\delta > 0$ 使得 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时

$$|g(t) - x_0| < \delta_0$$

此时有

$$|f(g(t)) - f(x_0)| < \varepsilon$$

即符合极限定义。

* 对比定义可发现，前一种情况能举出反例的本质原因出现在我们定义极限时要求**挖去中心点**，但无法保证 t 在 t_0 附近挖去中心点的区域时 $g(t)$ 能落进 x_0 附近挖去中心点的区域。

此外，反函数存在性与连续性结论的**逆命题**事实上也成立，我们以闭区间为例，开区间可以类似证明：

题 41. 若定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 是单调的，且值域是某个闭区间 $[c,d]$，则 f 连续。

解答：

不妨设 $f(x)$ 单调**增**，单调减时证明类似。

我们先说明 $f(x)$ 在 $x_0 \in (a,b]$ 处**左**连续。若否，利用定义可知

$$\exists\varepsilon > 0, \quad \forall\delta > 0, \quad \exists x \in (x_0 - \delta, x_0), \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

利用单调增性，取出 ε，上式即代表

$$\forall\delta > 0, \quad \exists x \in (x_0 - \delta, x_0), \quad f(x) \leq f(x_0) - \varepsilon$$

> 取 $t=f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}$，由于 $t<f(x_0)\le d$ 且存在 x 使得
>
> $$f(x)\le f(x_0)-\varepsilon<t$$
>
> 即可知 $t\in[c,d]$。
>
> 另一方面，利用单调性，若有点 x_1 使得 $f(x_1)=t$，由于 $t<f(x_0)$ 应有 $x_1<x_0$，但存在 $x\in(x_1,x_0)$ 使得
>
> $$f(x)\le f(x_0)-\varepsilon<t$$
>
> 这就得到了 $x>x_1$ 且 $f(x)<f(x_1)$，与单调增矛盾。于是 t 不在 $f(x)$ 值域中，与值域是闭区间 $[c,d]$ 矛盾。
>
> 完全类似可以证明 $f(x)$ 在 $x_0\in[a,b)$ 处**右**连续，从而其在中间部分连续，左端点右连续，右端点左连续，符合连续性定义。

* 由此无论是证明了严格单调与值域，还是证明了严格单调与连续，都能得到反函数存在连续，这给出了证明**反函数连续**的两种做法。

得到这些结论后，由于 $\cos x$ 在不同区间可以写为 $\sqrt{1-\sin^2 x}$ 或 $-\sqrt{1-\sin^2 x}$，通过已证的结论与复合函数连续性可以进一步得到 $\cos x$ 连续，进而 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 也在定义域内连续。与 $\sin x$ 类似验证单调性后，即可得到反三角函数的存在性与连续性。至此，我们证明了所有**基本初等函数连续**，利用连续函数和差积商与复合在定义域内的连续性，我们终于得到了**初等函数在定义域内连续**。

回到本章的开头，相信通过本章的篇幅，大家已经感受到了这些看似简单的结论背后的复杂性——如果不利用连续性，甚至连 $x>0$ 时 $\sqrt{x}$ 一定存在都是难以说明的。这些复杂并不是画蛇添足，而是**数学对超越直观的尝试**。只有超越了直观，我们才可能以逻辑体系建构出**不会出错**的数学工具。

四　有限与无穷

本次习题课主要介绍了无穷相关的性质，包括左右极限定义，无穷大、无穷小的定义，以无穷大为极限的情况，与一些阶估算、换元技巧，知识基础为函数极限的定义与理解。

§4.1　无穷大

4.1.1　无穷的邻域

4.1.2　无穷大处的极限

题 42. 证明对任何 $a>1$、$b>0$、$c>0$ 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^c x}{x^b}=0$$

题 43. 证明

$$\lim_{x\to0^+}x^x=1$$

题 44. 证明对多项式 f 有

$$\lim_{x\to0}f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

题 45. 证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

题 46. 计算

$$\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

4.1.3　作为极限的无穷大

题 47. 对关于 x 的两个多项式 $p(x)$ 与 $q(x)$，计算极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$$

题 48. 证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

存在，以此证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$$

题 49 (附加)**.** 对连续函数 f，若 (这里 A 为实数或 $\pm\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$$

§4.2 阶估算 II

4.2.1 无穷大的阶

题 50. 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x^2+x^3}+x}$$

题 51 (附加)**.** 考虑满足递推

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$$

的数列 a_n，证明只要 $a_1>0$ 即有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$$

进一步证明这是一个 $\frac{1}{2}$ 阶的无穷大，并计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

4.2.2 无穷小的阶

题 52. 对正实数 a 与实数 α，计算

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x},\quad\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x},\quad\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$$

题 53. 计算

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}},\quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

题 54. 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{\sin x+\ln(1-x^2)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}$$

题 55. 若对任何实数 x 有

$$|a_1\sin x+a_2\sin(2x)+a_3\sin(3x)|\le|\sin x|$$

证明

$$|a_1+2a_2+3a_3|\le 1$$

§4.3 换元法

4.3.1 连续与归结

题 56. 若 f 为连续函数，且 (这里 A、B、C 为实数或 $\pm\infty$)

$$\lim_{x\to A}f(x)=B$$

$$\lim_{t\to C}g(t)=A$$

则

$$\lim_{t\to C}f(g(t))=\lim_{x\to A}f(x)=B$$

题 57. 设 A、B 为实数或 $\pm\infty$，则

$$\lim_{x\to A}f(x)=B$$

当且仅当对任何满足

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A$$

且 a_n 均不等于 A (若 A 为无穷，不等直接成立) 的数列 a_n 有

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=B$$

题 58. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}}$$

4.3.2 如何换元

题 59. 证明当右侧极限存在时

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{t}=4\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

题 60. 计算

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\sin x)^{\tan x}$$

题 61. 计算

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\big(\ln(x^2+x)-2\ln(x+1)\big)$$

题 62. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$$

是否存在 $k>0$ 使得极限

$$\lim_{x\to+\infty}x^k(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

为非零常数？

题 63. 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^x-3^x}{x^2}$$

五 导数

本次习题课补充了部分连续函数相关的习题，并介绍了导数相关的计算与证明技巧，知识基础为函数极限、连续函数基本知识、导数定义与初等函数导数结果。

§5.1 连续函数补充

5.1.1 介值定理构造

题 64. 若定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 f 存在反函数，证明 f 严格单调。

5.1.2 函数迭代

§5.2 定义

5.2.1 导数的运算

5.2.2 可导性与近似

§5.3 计算

5.3.1 高阶导数

5.3.2 微分