

数值代数程序说明

张学静 BA22001010

2022 年 9 月 5 日

1 提交说明

1. 将压缩包提交至邮箱 `ustcszds2020@163.com`，每章提交一次，ddl 会视情况另行通知，请关注群内公告。
2. 尽量使用校内邮箱发送邮件。
3. 文件名 + 邮件主题格式：第 1/2 组姓名学号（如：第 1 组张学静 BA22001010）。
4. 打包内容为该说明文件中包含的除 .tex 文件外的所有文件，如图 1，不要包含跑程序时出现的 .vs 或 debug 文件夹（提交的文件大小应该很小，可以以此自查）。

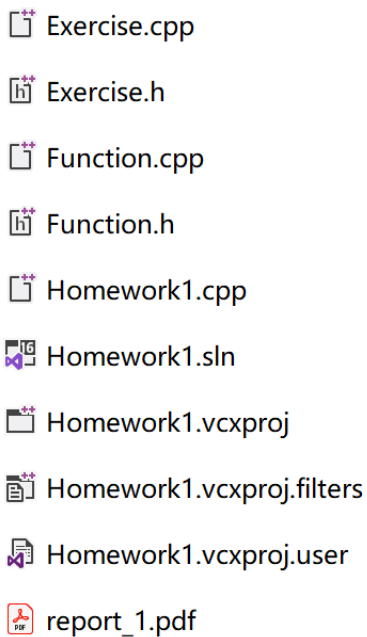


图 1: 打包内容

2 程序作业说明

1. 程序作业通常为课本上的上机习题，老师可能会加一些额外的要求。
2. 按要求完成习题内容，并在代码中添加必要的注释。其余在报告中体现。

3. 可以参考讨论但是严禁 copy 前几届或是同学的代码，应老师要求，一经发现本次作业 0 分处理。

4. 给大家建了第一次作业的框架，可以参考，也可以自己写一个更好的。

5. 不要上交跑不出来的程序。

6. 不建议将向量打印成列向量。

3 报告说明

1. 报告需要包含问题描述，程序运行结果和结果分析等内容。

2. 上交的报告应为 pdf 文件（markdown 和 word 等需要转化成 pdf）。

3. 报告中的程序运行结果最好是截图，不要直接复制文本。

4. 若用 latex 写报告，可用该文档的模板，见.tex 文件。

Homework1

R

2022 年 9 月 6 日

1 作业要求

1. 先用你熟悉的计算机语言将不选主元, 全主元和列主元 Gauss 消去法编写成通用的子程序; 然后用你编写的程序求解 84 阶方程组

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & & & & \\ 8 & 6 & 1 & & & \\ & 8 & 6 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 8 & 6 & 1 \\ & & & & 8 & 6 & 1 \\ & & & & & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{82} \\ x_{83} \\ x_{84} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 15 \\ \vdots \\ 15 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix};$$

最后将你的计算结果与方程组的精确解进行比较。

2. 先用你所熟悉的计算机语言将平方根法和改进的平方根法编写成通用的子程序; 然后用你编写的程序求解对称正定方程组 $Ax = b$, 其中

(1) b 随机的选取 (拒绝人工随机选取), 系数矩阵 A 为 100 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & & & & \\ 1 & 10 & 1 & & & \\ & 1 & 10 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & & 1 & 10 \end{pmatrix};$$

(2) 系数矩阵 A 为 40 阶 Hilbert 矩阵, 即系数矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素为 $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$,

向量 b 的第 i 个分量为 $b_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1}$.

3. 用第 1 题的程序求解第 2 题的两个方程组并比较所有的计算结果。

2 附加说明

1. 尽量使用 c++ 和 visual studio.

2. 提交内容和说明见群文件。
3. 本次作业ddl 为 2022.9.18（周日）23:59，请大家尽早提交，不要卡点。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况私聊助教沟通。

Homework2

R

2022 年 9 月 21 日

1 作业要求

先用 C++ (建议) 或者 python 将算法 2.5.1 编制成通用的子程序, 然后再用你所编制的子程序完成下面两个计算任务:

- (1) 估计 5 到 20 阶 Hilbert 矩阵的 ∞ 范数条件数.
- (2) 设

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

先随机的选取 $x \in \mathbb{R}^n$, 并计算出 $b = A_n x$; 然后再用列主元 Gauss 消去法求解该方程组, 假定计算解为 \hat{x} , 试对 n 从 5 到 30 估计计算解 \hat{x} 的精度, 并且与真实相对误差作比较.

2 附加说明

1. 尽量使用 c++ 和 visual studio.
2. 提交内容和说明见群文件.
3. 本次作业ddl 为 2022.10.3 (周一) 23:59, 请大家尽早提交, 不要卡点。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况私聊助教沟通。

Homework2

R

2022 年 9 月 28 日

1 作业要求

先用 C++ 或者 Python 编制利用 QR 分解求解线性方程组和线性最小二乘问题的通用子程序；并用你编制的子程序完成下面的 3 个计算任务：

1. 求解第一章上机习题中的三个线性方程组，并将所得的计算结果与前面的结果相比较，说明各方法的优劣。

(1)

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & & & & \\ 8 & 6 & 1 & & & \\ & 8 & 6 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 8 & 6 & 1 \\ & & & & 8 & 6 & 1 \\ & & & & & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{82} \\ x_{83} \\ x_{84} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 15 \\ \vdots \\ 15 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(2) 100 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & & & & \\ 1 & 10 & 1 & & & \\ & 1 & 10 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & & 1 & 10 \end{pmatrix},$$

b 随机的选取，并用 $\|Ax - b\|_\infty$ 观察准确性。

(3) 40 阶 Hilbert 矩阵，即系数矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素为 $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ ，向量 b 的第 i 个分量为 $b_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1}$ 。

2. 求一个二次多项式 $y = at^2 + bt + c$ ，使得残向量的 2 范数最小的意义下拟合表 3.2 中数据。

3. 在房产估价的线性模型 $y = x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{11}x_{11}$ 中， a_1, a_2, \cdots, a_{11} 分别表示税，浴室数目，占地面积，居住面积，车库数目，房屋数目，居室数目，房龄，建筑类型，户型及壁炉数目， y 代表房屋价格，现根据表 3.3 和表 3.4 给出的 28 组数据，求出模型中参数的最小二乘结果。

2 附加说明

1. 尽量使用 c++ 和 visual studio.
2. 提交内容和说明见群文件。
3. 本次作业ddl 为 2022.10.16 (周日) 23:59，请大家尽早提交，不要卡点。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况私聊助教沟通。
4. 本次作业的数据在附件中，大家尽量复制，不要自己输入，防止输错。

Homework4

@rosefantasie

2022 年 10 月 19 日

1 作业要求

1. 考虑两点边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = a, 0 < a < 1, \\ y(0) = 0, y(1) = 1. \end{cases}$$

容易知道它的精确解为

$$y = \frac{1-a}{1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) + ax$$

为了把微分方程离散化, 把 $[0, 1]$ 区间 n 等分, 令 $h = 1/n, x_i = ih, i = 1, \dots, n-1$, 得到差分方程

$$\varepsilon \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = a,$$

简化为

$$(\varepsilon + h)y_{i+1} - (2\varepsilon + h)y_i + \varepsilon y_{i-1} = ah^2$$

离散化后得到线性方程组 $Ay = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & & \\ \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & \\ & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \varepsilon + h \\ & & & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) \end{pmatrix}$$

注意将线性方程组与上述差分方程进行对比得出正确的 b 向量 (尤其注意第一行和最后一行)。

对 $\varepsilon = 1, a = 1/2, n = 100$, 分别用 Jacobi 迭代法, G-S 迭代法和 SOR 迭代法求线性方程组的解, 要求 4 位有效数字, 然后比较迭代次数, 运行时间与精确解的误差。迭代法终止条件为 $\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-6}$ 。

对 $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.0001$, 考虑同样的问题。

2. 考虑偏微分方程

$$-\Delta u + g(x, y)u = f(x, y), (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

边界条件为 $u = 1$. 沿 x 方向和 y 方向均匀剖分 N 等份, 令 $h = 1/N$, 并设应用中心差分离散化后得到差分方程的代数方程组为

$$-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + (4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f(ih, jh) \quad (1)$$

取 $g(x, y) = e^{xy}$, $f(x, y) = x + y$, 分别用 **Jacobi 迭代法**, **G-S 迭代法** 和 **SOR 迭代法** 求解上述代数方程组, 并列表比较 $N = 20, 40, 60$ 时收敛所需要的迭代次数和所用的 CPU 时间, 迭代终止条件为 $\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-7}$. 要求仿照下面写的 Jacobi 迭代格式的推导过程推导出 G-S 迭代和 SOR 迭代的格式 (**在报告中写出推导过程**), 在用 SOR 迭代法求解的过程中, 请对不同的 N 使用合适的松弛因子 ω , 并在程序输出中打印松弛因子的值。可以采用 二分法 观察运行结果后选取合适的 (代码中不需要体现选取过程, 只需给出即可)。

注意本题中的三个迭代法的算法需要重新写, 不能用之前的通用算法!!!

2 代数方程组与线性方程组的转换

2.1 Jacobi 迭代法

考虑其迭代格式 $Dx^{(k+1)} = (L + U)x^{(k)} + b$. 对第 i 行有 $D_{ii}x_i^{(k+1)} = \sum_{j \neq i} (L + U)_{ij}x_j^{(k)} + b_i$. 将 D, L, U 还原成 A 得到代数方程组

$$A_{i1}x_1 + \cdots + A_{ii}x_i + \cdots + A_{in}x_n = b_i$$

的 Jacobi 迭代式

$$A_{i1}x_1^{(k)} + \cdots + A_{ii}x_i^{(k+1)} + \cdots + A_{in}x_n^{(k)} = b_i$$

即只有与向量 b 的下标相同的位置替换成 $x^{(k+1)}$.

由此类比推广至矩阵 (或者可以直接将矩阵拉直成向量), 知代数方程组 (1) 的 **Jacobi 迭代格式**为

$$-u_{i-1,j}^{(k)} - u_{i,j-1}^{(k)} + (4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i+1,j}^{(k)} - u_{i,j+1}^{(k)} = h^2 f(ih, jh)$$

2.2 G-S 迭代法

2.3 SOR 迭代法

3 附加说明

1. 尽量使用 c++ 和 visual studio.

2. 提交内容和说明见群文件。
3. 本次作业ddl 为 2022.10.30(周日)23:59，请大家尽早提交，不要卡点。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况请提前私聊助教沟通。
4. 请确保你的程序能顺利跑出正确的结果再上交!!!
5. 没有报告的程序作业不予批改。

Homework5

@rosefantasie

2022 年 10 月 27 日

1 作业要求

1. 考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, 0 < x, y < 1, \\ u|_{\Gamma} = \varphi. \end{cases}$$

其中 Γ 为正方形区域的边界。类似于模型问题，我们得到差分方程

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{h^2}{4}\right)u_{ij} - \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = \frac{h^2}{4}f_{ij}, i, j = 1, \dots, n-1, \\ u_{i,0} = \varphi_{i,0}, u_{i,n} = \varphi_{i,n}, i = 0, 1, \dots, n, \\ u_{0,j} = \varphi_{0,j}, u_{n,j} = \varphi_{n,j}, j = 0, 1, \dots, n. \end{cases}$$

按照自然顺序排列得到系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} S' & B & & & \\ B & S' & B & & \\ & B & S' & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & B \\ & & & B & S' \end{pmatrix}$$

其中 $B = -I/4$, I 为 $n-1$ 阶单位矩阵, S' 是对角元均为 $1 = h^2/4$, 次对角元均为 $-1/4$ 的 $n-1$ 阶对称三对角阵。对 $f(x, y) = \sin(xy)$, $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$, $n = 20$.

(1) 用共轭梯度法求解差分方程, 要求 4 位有效数字。观察迭代次数和求解所用时间, 迭代终止条件为 $\|x_{k+1} - x_k\|_{\infty} < 10^{-7}$. **注意边界条件与线性方程组的关系!!**

(2) 用 SOR 迭代法求解, 用二分法找出最佳松弛因子 (需要在报告中给出), 在相同条件下观察迭代次数和求解所用时间, 并比较 SOR 迭代法和共轭梯度法的优劣。

2. 用 Hilbert 矩阵测试你所编写的共轭梯度法程序:

$$a_{ij} = (i + j + 1)^{-1}, b_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n a_{ij}, 0 \leq i, j \leq n-1.$$

对 $n = 20, 40, 60, 80$ 分别求解, 观察解是否准确, 迭代停止条件自定, 给出迭代次数和求解所用时间。

3. 分别用 Jacobi 迭代法, G-S 迭代法和共轭梯度法求解下述方程, 观察迭代次数和求解所用时间, 并对结果给出解释。

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2 附加说明

1. 尽量使用 c++ 和 visual studio.
2. 提交内容和说明见群文件。
3. 本次作业ddl 为 2022.11.6(周日)23:59, 请大家尽早提交, 不要卡点。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况请提前私聊助教沟通。
4. 请确保你的程序能顺利跑出正确的结果再上交!!!
5. 没有报告的程序作业不予批改。

Homework6

@rosefantasie

2022 年 11 月 24 日

1 作业要求

1. 求多项式方程的模最大根.

(1) 用 C++ 编制利用幂法求多项式方程 $f(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1x + \alpha_0 = 0$ 的模最大根的通用子程序。

(2) 利用你所编制的子程序求下列各高次方程的模最大根。

(i) $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$;

(ii) $x^3 - 3x - 1 = 0$;

(iii) $x^8 + 101x^7 + 208.01x^6 + 10891.01x^5 + 9802.08x^4 + 79108.9x^3 - 99902x^2 + 790x - 1000 = 0$.

要求输出迭代次数, 用时和最大根的值 (注意正负)。(由于我自己写的程序迭代次数和用时的统计都在通用函数里, 故截图中没有体现)

```
void Exercise_1_1()
{
    cout << "Exercise_1_1" << endl << endl;
    vector<double> a = { 3, -5, 1 };
    int times = 1000;
    double x = find_largest_root(a, times);
    cout << "The largest root is " << x << endl << endl;
}
```

图 1: 第一题建议代码格式, 输入系数向量 a 和最大迭代次数 $times$

2. 求实矩阵的全部特征值.

(1) 用 C++ 编制利用隐式 QR 算法 (课本算法 6.4.3) 求一个实矩阵的全部特征值的通用子程序。

(2) 利用你所编制的子程序计算方程 $x^4 + x^3 + 1 = 0$ 的全部根.

(3) 设

$$A = \begin{pmatrix} 9.1 & 3.0 & 2.6 & 4.0 \\ 4.2 & 5.3 & 4.7 & 1.6 \\ 3.2 & 1.7 & 9.4 & x \\ 6.1 & 4.9 & 3.5 & 6.2 \end{pmatrix}$$

求当 $x = 0.9, 1.0, 1.1$ 时 A 的全部特征值，并观察并在报告中叙述分析特征值实部、虚部和模长的变化情况。

要求输出迭代次数和所有特征值，特征值可以直接用 `complex` 类型输出成 (x,y) 的形式也可以改成 $x+iy$ （可能要手动写一个）的输出。

```
void Exercise_2_3()
{
    cout << "Exercise_2_3" << endl << endl;
    int n = 4;
    double x = 0.9;
    while (x <= 1.1) {
        cout << "x=" << x << "时" << endl;
        vector<vector<double>>> A = { {9.1,3.0,2.6,4.0},{4.2,5.3,4.7,1.6},{3.2,1.7,9.4,x},{6.1,4.9,3.5,6.2} };
        complex<double> c = {0,0};
        vector<complex<double>>> z(n, c);
        implicit_qr(A, z);
        cout << "The eigenvalues are: " << endl;
        for (int i = 0; i < n; i++) cout << z[i] << " ";
        cout << endl << endl;
        x += 0.1;
    }
}
```

图 2: 第二题建议代码格式

2 本次作业涉及到的算法

本次作业涉及到的算法较多，希望大家不要偷工减料。作业需要写的函数如下图（可以多不能少）。

```
//第六题
double find_largest_root(const vector<double>& a, int times); //用幂法求多项式模最大根
void hessenberg_decomp(vector<vector<double>>& A, vector<vector<double>>& R, vector<double>& b); //上 Hessenberg 分解，Hessenberg 阵存在 A 中，Householder 变换的 v 和 beta 存在 R 和 b 中
void two_step_displacement_qr(vector<vector<double>>& R, vector<vector<double>>& b); //双重步位移的 QR 迭代，n 存在 R 中，并直接对 H12 和 H23 作变换
void implicit_qr(vector<vector<double>>& A, vector<complex<double>>& z); //隐式 QR 算法
```

图 3: 推荐完成的函数

幂法求模最大根参考课本 P165-166 的描述。

上 Hessenberg 分解参考课本 P181 算法 6.4.1.

双重步位移的 QR 迭代参考课本 P193 算法 6.4.2.

隐式 QR 算法参考课本 P194 算法 6.4.3.

特别提醒：请看懂文字描述再根据算法写代码!!!!!!!!!!

3 附加说明

1. 尽量使用 `c++` 和 `visual studio`.
2. 提交内容和说明见群文件。
3. 本次作业ddl 为 **2022.12.11(周日)23:59**，请大家尽早提交，不要卡点。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况请提前私聊助教沟通。
4. 请确保你的程序能顺利跑出正确的结果再上交!!!
5. 没有报告的程序作业不予批改。

Homework7

@rosefantasie

2022 年 11 月 24 日

1 作业要求

1. 求实对称三对角阵的**全部特征值和特征向量**。

(1) 用 C++ 编制利用**过关 Jacobi 方法**求实对称三对角阵全部特征值和特征向量的通用子程序。

(2) 利用你所编制的子程序求矩阵（从 50 阶到 100 阶）

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

的**全部特征值和特征向量**。

参考课本 P217, 设你的程序经过 k 步迭代后停止了, 得到 $Q_k = J_1 \cdots J_k$ 及 $AQ_k = Q_k A_k$, 要求程序直接输出 50, 60, 70, 80, 90, 100 阶的 Q_k 和 A_k (指助教跑的时候可以直接看到所有结果) 且给出每次求解的迭代次数和所用时间, **报告里只需给出 50 阶的两个矩阵截图, 对于 60, 70, 80, 90, 100 阶, 请在报告中给出从小到大排序后的全部特征值。**

交上来的源文件中的参考输出格式:

n=xx, 迭代次数: x, 用时 xxx s.

Ak=

[矩阵]

Qk=

[矩阵]

2. 求实对称三对角阵的**指定特征值及对应的特征向量**。

(1) 用 C++ 编制先利用**二分法**求实对称三对角阵指定特征值, 再利用**反幂法**求对应特征向量的通用子程序。

(2) 利用你所编制的子程序求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}_{100 \times 100}$$

的**最大和最小特征值及对应的特征向量**。

要求输出迭代次数，用时，特征值和特征向量。参考输出格式：最小特征值：x, 迭代次数：y, 用时：z ms.

2 涉及算法

过关 Jacobi: 先看懂 P211-213 的经典 Jacobi 方法，再参考 P217 过关 Jacobi 方法的描述。

二分法：参考 P223 推论 7.4.1 下面的文字描述。其中变号数的计算见算法 7.4.1。

反幂法：P169 6.3 节开头的迭代格式。

特别提醒：请看懂文字描述再根据算法写代码!!!!!!!!!!

3 附加说明

1. 尽量使用 c++ 和 visual studio.
2. 提交内容和说明见群文件。
3. 本次作业ddl 为 2022.12.22(冬至)23:59，请大家尽早提交，不要卡点。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况请提前私聊助教沟通。
4. 请确保你的程序能顺利跑出正确的结果再上交!!! 可以用 Mathematica/Matlab 等工具来验证你的解是否正确。
5. 没有报告的程序作业不予批改。

Homework8

@rosefantasie

2022 年 11 月 24 日

1 作业要求

参考课本 7.6.2 节 (P234-240)SVD 迭代完成 SVD 算法 7.6.3, 并对附件 svddata.txt 中的矩阵作 SVD 分解 $A = P\Sigma Q$ 。并计算 $PP^T - I, QQ^T - I, P\Sigma Q - A$ 的绝对值最大的元素, 依次用 ep, eq, et 表示。

要求输出迭代次数, 从小到大排序的所有奇异值以及上面要求的三个值。

输出格式为: (可以更详细, 不能比下面的简单)

迭代次数: x

奇异值从小到大:

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

ep = xx

eq = xx

et = xx

以下内容不需要在报告中给出, 但要在上交的程序中输出。

A=PTQ(可以用别的字母, 但是要在最上面说明)

T=

[矩阵]

P=

[矩阵]

Q=

[矩阵]

特别提醒: 请把整节内容看懂再根据算法写代码!!!!!!!

2 附加说明

1. 尽量使用 c++ 和 visual studio.
2. 提交内容和说明见群文件。

3. 本次作业ddl 为 2022.12.31(周六)23:59，请大家尽早提交，不要卡点。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况请提前私聊助教沟通。以及该 ddl 也是所有作业的补交期限。迟交的作业会视情况酌情扣分。

4. 请确保你的程序能顺利跑出正确的结果再上交!!! 可以用 Mathematica/Matlab 等工具来验证你的解是否正确。

5. 没有报告的程序作业不予批改。