

几何学基础（2022 年秋季版本）

作者：盛茂，王作勤

时间：November 14, 2022

目录

前言	iii
1 几何与公理化	1
1.1 几何简史及与代数的关系	1
1.2 公理体系：从欧几里得到希尔伯特	12
习题 1	21
2 向量与欧氏空间	26
2.1 向量与向量空间	26
2.2 欧氏空间	34
2.3 \mathbb{E}^3 上的外积	41
2.4 作为希尔伯特公理体系模型的 \mathbb{E}^3	52
习题 2	60
3 刚体变换	68
3.1 方程与图形	68
3.2 刚体变换与图形分类	80
3.3 二次曲面的刚体分类	95
习题 3	104
4 几何与变换	110
4.1 埃尔朗根纲领简介	110
4.2 \mathbb{E}^2 上的各种几何与变换群	111
习题 4	120
5 射影平面与射影变换	122
5.1 射影平面	122
5.2 射影变换	130
5.3 射影变换的不变量	138
5.4 射影几何中的一些美妙定理	148
习题 5	155
6 拓扑空间与拓扑变换	160
6.1 拓扑的一般概念	160
6.2 欧拉多面体公式	165
6.3 曲面及其分类简介	170
习题 6	178

A 附录	180
A.1 集合论初步	180
A.2 群的概念	184
A.3 向量空间	188
A.4 矩阵与行列式	192
索引	197
参考文献	202

前言

此讲义是在盛茂在 2020 年秋季《解析几何》课讲稿基础上逐渐完善的。在 2021 年秋季《几何学基础》授课中，原讲义又得到进一步的修订。该讲义也分别由盛茂和王作勤在 2021 年夏季和 2022 年夏季在清华大学丘成桐数学夏令营以英文授课方式讲过。讲课思路是按照盛茂与王作勤提出的《几何学基础》教纲开展的。教纲中原计划的几何与应用一章尚未编写。后期会按照原计划完备此书。按照原课程设置，《解析几何》其主要功能是作为《线性代数》的先修课程。其不少内容在中学几何中已为同学们所熟知。因此，该课在教学实践中经常面临线性代数内容教多教少的两难问题。根据新的教改精神，通过与陈发来老师，陈卿老师，程艺老师，及多位年青同事的交流和探讨，我们逐步形成了对《解析几何》的一个初步教改方案。此为《几何学基础》的教纲来源。我们将侧重点从《解析几何》比较注重计算的一面转向比较注重概念的几何素养一面。该讲义围绕“几何是什么”展开。从历史的观点，从人的直觉经验出发，使用同学们熟悉的中学数学语言，一步一步引领大家理解几何是什么。在教学上，我们注重与代数学入门课程《代数学基础》在内容上的配合与协调；我们以尽可能自然的方式将矩阵（作为数的一种自然推广）引出，为学生系统学习《线性代数》提供充分动机；我们也逐一将其他几何学相关课程的线头埋下。由于自身学术水平限制，教学经验不足，编写仓促，以及一些其它不利因素，导致该讲义上的诸多缺陷。遇到同学们抱怨讲义的时候，我们总是以伽罗华在 1831 年 6 月 16 号在法庭上的辩词为自己辩护：“我们是孩子，但是我们精力充沛，勇往直前... ...”（笑）。最后，我们感谢学生们，你们的收获是我们写这本讲义的动力源泉。

第 1 章 几何与公理化

1.1 几何简史及与代数的关系

在本节中，我们将对几何学的历史做一个简单的回顾，并着重介绍跟本书内容相关的几何历史发展脉络。我们无意于对几何学的历史细节做全面的介绍，而是致力于解释

- 数与形的关系，尤其是代数是如何从几何中诞生、发展、脱离并反过来对几何产生关键性的影响；
- 几何学是如何从单一的欧氏几何发展到各种各样的几何体系，并被克莱因用代数（变换群）统一到一个框架里。

『几何学的源起』

几何学是一门非常古老的学问。无论是古代中国、古埃及、古巴比伦还是古印度，在所有文明的源头，人类出于对实际生活的需要和对美的追求，都各自发展出了几何的雏形。

我们知道，长度是容易测量的，带着绳子即可，但是已知长度求面积则是一个复杂很多的几何问题。先人们在没有任何系统知识的条件下，就已经通过经验以及代代相传，学会了如何求各种基本图形的面积：

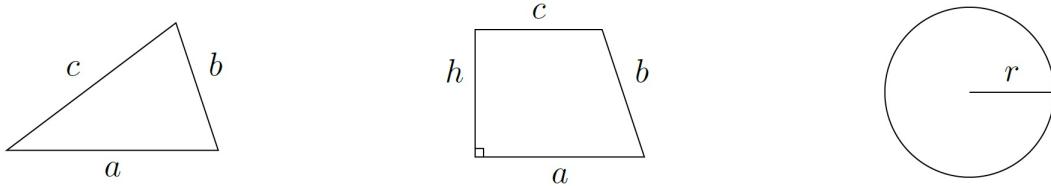


图 1.1：几种基本图形

当时的几何知识主要是由建筑师、大地测量员、税收官等人所掌握的。例如，据莫斯科纸莎草书记载，公元前 1850 年的古埃及人就已经会计算四棱台的体积，而这想必跟搭建金字塔有着密不可分的联系。而计算面积更是古埃及人的拿手好戏，因为由于尼罗河定期的泛滥，河水经常冲走已经划好的土地，法老不得不重新分配土地，只有准确计算土地面积才能公平地收税。

当然，几何学的起源也与一些脱离生产者（比如巫祝祭司等神职人员）致力于设计庙宇、金字塔等有密切关系。不过，此时的古人们并没有抽象图形的概念。例如，当他们提起长方形时，他们表示的往往是具体的长方形田地或物件的边界。而且虽然古人们有着令人叹为观止的公式，但这些公式是由经验积累而来的。一方面他们所用的计算公式并不都是正确的；另一方面，即使是正确的公式，也并没有推导。当然他们也并不关心如何推导和理解公式，而只关心这些公式的实际应用。对于这个时代的数学发展与成就，我们要从历史的角度，客观而理性地加以认识，既不必在正确性上苛求古人，也不必过于热情夸赞。

¶ 古希腊时代的几何

不可否认，古希腊时代是几何学发展成形的关键时期。这一时代的先哲们出于对自然法则认知的渴望和对永恒奥秘的探求，将几何学发展成一门基于逻辑推理、具有严格体系的学问。这些人中，首先值得一提的是米利都的泰勒斯 (Thales, 约公元前 624 年-约前 548 年)。传说他是第一个通过逻辑推理证明数学定理的人，并被誉为是哲学之父、科学之父。在提及泰勒斯时，亚里士多德曾有名言：

对于泰勒斯而言，首要问题不是我们知道什么，而是如何知道。

他所证明的定理是

定理 1.1.1. (泰勒斯定理)

半圆的内接角（即直径所对的圆周角）是直角。

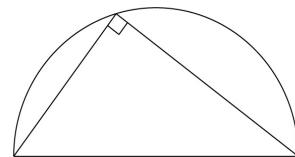


图 1.2: 泰勒斯定理

从该定理出发，泰勒斯运用逻辑推理给出了四个推论，例如“等腰三角形的底角相同”等。据说，泰勒斯还利用相似三角形的原理测量了金字塔的高度：取一根竖直的棍子，在它的影子和它的长度相等的那一刻，测量金字塔影子的长度。事实上，泰勒斯还是为几何学命名的人：他把表示“地球”的希腊词语 $\gamma\varepsilon\omega$ (geo) 和表示“测量”的希腊词语 $\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$ (metron) 合在一起，造出了拉丁语的几何这个词，并逐渐演化为英文单词 geometry.¹

接下来一个重要人物是毕达哥拉斯 (Pythagoras, 约公元前 585-前 500 年)。他建立了毕达哥拉斯学派，该学派的格言是“万物皆数”。可能是出于对音律中所出现的整数之比的启发，他们认为“一切可知的事物都有数字；因为，如果没有数字，任何事物都不可能被构想，也不可能被理解。”²

定理 1.1.2. (勾股定理，也称毕达哥拉斯定理)

直角三角形斜边的平方是直角边的平方和：

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

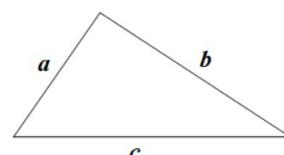


图 1.3: 勾股定理

除此之外，毕达哥拉斯学派还从正五边形出发，发现了黄金分割比（见习题 1 第 2 题）。应该说是从毕达哥拉斯学派开始，数学的研究对象即数与形开始脱离实际事物或实际形象，成为思维的抽象产物。

注意此时数的表示形式和几何之间有严格的关系：数的平方（或两个数的乘积）总是表示面积，数的立方（或三个数的乘积）总是表示体积。这也是为什么我们一般会把 x^2 读作“ x 的平方” (x square)，而不是“ x 的 2 次方”。下图展示了数、平方数、立方数的几何含义：

¹值得一体的是，在中文里，“几何”一词古已有之，但却有着完全不同的含义。明朝时徐光启和传教士利玛窦将 geometry 音译为“几何”，但直到 20 世纪初“几何”这个词才完全取代“形学”一词，成为通用术语。

²毕达哥拉斯学派所说的数是指整数，或者整数之比，即可公度比。他们甚至发展出了数字神秘主义。传说该学派成员希帕索斯 (Hippasus) 因为发现了不可共度之比的存在，而被投入大海。事实上，直到两千多年后的 19 世纪，数学家们才把无理数完全纳入数的体系，建立起完整的实数理论。

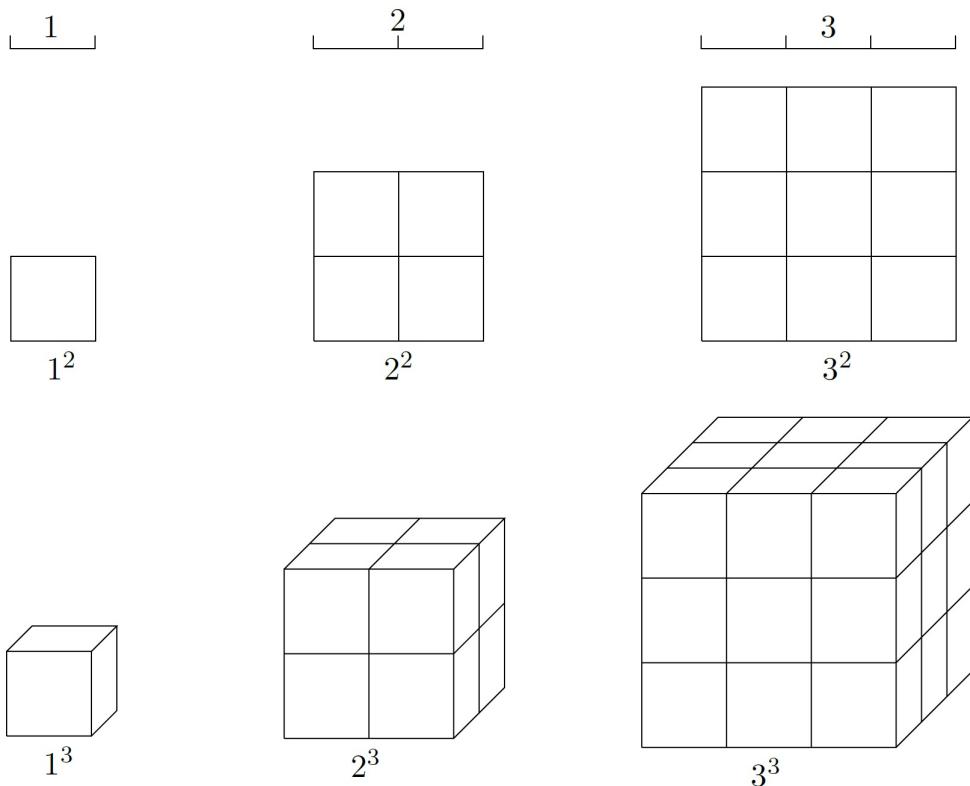


图 1.4: 数、平方数与立方数

下一个是对几何产生重要影响的是**柏拉图** (Plato, 公元前 427 年-前 347 年)。他并不是一位数学家，而是一位哲学家。他在雅典建立了一个学校，即柏拉图学园。传说该学园大门写着：

不懂几何者不得入内。

柏拉图的朋友泰特拖斯 (Theaetetus, 约公元前 417 年-前 369 年) 证明了有且仅有五个正多面体，即正四面体，立方体，正八面体，正十二面体和正二十面体 (见本书定理??)。而柏拉图则赋予这些多面体永恒的含义，因而这些多面体也被称为柏拉图多面体。

柏拉图学园培养出他那个时代最为优秀的老师和研究者，其中包括**欧多克索斯** (Eudoxus, 公元前 395-前 342 年) 和**亚里士多德** (Aristotle, 公元前 384 年-前 322 年)。关于他们的贡献，我们不一一赘述，只简要各提一句：欧多克索斯首次以明确的公理为依据演绎数学；他提出量的概念 (无理数不是“数”而是“量”) 以研究不可公度比，而且他提出了用于计算曲边形面积和曲面体体积的穷竭法；而亚里士多德讨论了定义的含义，指出公理与公设的区别，并给出很多定义、公理，后被欧几里得采纳。此外，欧多克索斯的学生梅内克缪斯 (Menaechmus, 约公元前 380-前 320 年) 则在研究三大尺规作图问题之一的“倍立方”问题时引入了圆锥曲线，大大拓展了几何学的研究对象。

亚里士多德曾指出，从不存在的定义 (例如正十面体) 出发可以推出自身矛盾的逻辑结构。而尺规作图则是确认几何对象存在性的重要手段，因为古希腊人认为直线和圆是基本图形，而尺、规是实现直线和圆的方式。由此引发了大量的仅用直尺、圆规作出给定图形的尺规作图问题，例如作出给定线段的中垂线、作出给定角的一半、给定正方形时，

作出具有两倍面积的正方形等。在此过程中，人们发现有三个看似简单的问题，一直找不到尺规作图方法，即三大尺规作图问题：

- 化圆为方：给定任意圆，用尺规做出等面积的正方形；
- 倍立方：给定任意立方体，用尺规作出具有两倍体积的立方体；
- 三等分角：给定任意角，用尺规做出其三分之一大小的角。

直到 19 世纪，人们借助于群论等工具，才证明了这三个尺规作图问题均不可解。注意，此时人们发现和研究的不可公度数依然可以尺规作图的数。事实上，直到一千多年以后，意大利数学家利奥纳多（即我们熟知的斐波那契）才证明了方程

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

的根不能用尺规作图作出，第一次表明数系所含的数超出了尺规作图所界定的范围。

总的来说，从古希腊时代开始，公理演绎法成为研究数学的主要手段，大量的数学成果开始涌现，数学本身也就逐渐成为纯理智的抽象研究，成为绝对真理的一部分。此时的数是依赖于几何的，在此后将近 2000 年的时间里，几何学几乎是全部严密数学的基础。同时，因为不可公度比的发现，几何与数开始分道扬镳，有少量数学家，开始了对于不可琢磨的数漫长征途。

¶ 《几何原本》以及古希腊晚期

《几何原本》《Elements》集希腊古典时期数学之大成，是一本承上启下的书，由欧几里得 (Euclid, 公元前 325 年-前 265 年) 在大约公元前 3 世纪完成。据说欧几里得曾对国王托勒密说过：不存在通向几何学的王室大道。可见，几何学在欧几里得的心中是普适的。它不因人而异，这也是科学的特征。事实上，《几何原本》的公理化体系对科学思维的影响是巨大的，例如牛顿的巨著《自然哲学的数学原理》就是按照《几何原本》的公理化体系而写成的。

《几何原本》共十三卷，第一卷到第六卷是平面几何（其中第五卷为比例理论），第七卷到第九卷是数论，第十卷篇幅最长，研究不可公度数（包括形如 $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ 等的数）的几何分类，第十一卷到第十三卷则是立体几何的内容。在这本书中，欧几里得从定义，公设与公理出发，用逻辑演绎的方法，证明了 465 个命题。虽然这些命题绝大部分并非欧几里得所原创，但全书的安排方式、公理公设的选择、定理由简单到复杂的排列顺序都是欧几里得所创的。

虽然用现代数学的观点看，欧几里得的证明并非“完全严格”，但是，在欧几里得那个时代，这是严格的。完全周到、细致、严密的表述，要到希尔伯特的《几何基础》的相关工作中才出现。欧几里得在《几何原本》中所展现的“定义 → 假设 → 命题”的几何学逻辑体系是人类理性思维的光辉。我们将在下一节中对这些定义、公理公设及其优劣稍做更为具体的审视。在此处，我们想要强调的是《几何原本》中几何与代数的统一性：事实上，在那个时代，几何、数学甚至科学都没有严格的区分，例如，在第 9 卷中欧几里得用反证法证明了有无穷多个素数，令人拍案叫绝：

定理 1.1.3. (《几何原本》第 9 卷命题 20)

素数有无穷多个。



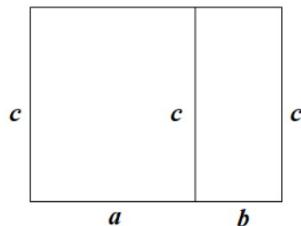
证明 用反证法。假设 p_1, \dots, p_n 为所有的素数。我们考察正整数 $N = p_1 \cdots p_n + 1$ 。因为对任意的 i , 均有 $N > p_i$, 所以 N 是一个合数。于是由定义, N 有不同于 1 和自身的因子 (即该正整数可以整除 N), 我们记之为 p 。因为 p 必为某个 p_i , 所以 p 必将整除

$$1 = N - p_1 \cdots p_n,$$

但这是不可能的。故上述假设不成立, 即存在无穷多个素数, 证毕。 \square

上文已经提到, 古希腊时代的代数往往是“几何代数”, 两个数的乘积总是被理解为矩形的面积。例如, 加法对乘法的分配率

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$



则变成《几何原本》中如下命题:

图 1.5: 加法分配率

命题 1.1.4. (《几何原本》第 2 卷命题 1)

如果矩形的一边被截成几段, 那么原先矩形的面积是各个小段和未截线段构成的矩形面积之和。



托勒密王朝把亚历山大城建设成为一个文化中心, 此时出现的《几何原本》对于古希腊数学进入了辉煌的亚历山大时期起到了不可磨灭的作用。数学的理论和应用都经历了长足的发展, 数学 (尤其是几何) 开始转变为应用理论研究更加实用的数学, 例如各种复杂量的近似计算、天文学所需的球面三角学等。此时, 数也逐渐脱离几何, 可以自由进行代数计算。例如, 阿基米德 (Archimedes, 公元前 287 年-前 212 年) 应用高超的技巧计算出 π 的近似值,

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

作为对比, 在《几何原本》中, 欧几里得虽然证明了很多不同形状的面积之比, 但并没有任何命题阐述圆的面积的“值”! 此外, 阿基米德对于欧多克索斯的穷竭法的应用也是令人赞叹的, 可以视为是微积分的雏形。他明确地提出并多次使用

公理 1.1.5. ((欧多克索斯-) 阿基米德公理)

对于任意正数 a, b , 必存在正整数 n 使得 $na > b$.



后来人们才意识到, 这个性质是实数完备性理论的重要组成部分。

¶ 中国古代的几何

跟西方相比，几何在中国也同样有着悠久的历史：在公元前十五世纪的甲骨文中，就已经出现了“规”和“矩”两个字。相传伏羲造规、矩，作方、圆，而《史记》中也记载了大禹治水时“左准绳，右规矩”。我们古代在建筑工程、水利工程上的成就，其实是离不开丰富的几何知识作为支撑的。

早在春秋末期，墨子（公元前 476 年或 480 年-前 390 年或 420 年）在《墨经》中就记载了丰富的几何学知识。事实上，《墨经》由不少内容可以视为是理论几何学的萌芽，例如他给出了点（端，体之无序而最前者也）、圆（圜，一中同长也）、平行（平，同高也）、线段相等（同长，以正相尽也）等概念的定义。遗憾的是，从秦始皇的焚书坑儒到汉武帝的独尊儒术，使得这些处于萌芽状态的思想失去了进一步发展的机会。

中国最古老的天文学和数学著作《周髀算经》³就从讨论直角三角形的性质出发，推演有关地上和天上距离测量的方法。该书中不仅记载了勾股定理，

以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日。

而且以较为隐晦的方式给出了证明。

部分成书于公元前 3 世纪、最后成书于公元 1 世纪的《九章算术》，体现了中国古代数学的实用主义特色。全书分 9 卷，目的不在于如《几何原本》那样建立理论体系，而是分 246 题，对于实际应用中碰到的各类具体问题（比如对于特定图形计算长度、面积、体积）给出了解法，而其中关于斜截三棱柱体积的计算方法，西方直到 18 世纪才得到。之后刘徽（公元 225 年-295 年）为《九章算术》作注，更是整理了其中的数学体系，奠定了相关的理论基础。此外，刘徽利用割圆术（即用正 n 边形逼近圆）得出 π 的值接近 3.1416，比阿基米德的结果更优。而南北朝时祖冲之（公元 429 年-500 年）更是给出了

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

这样一个领先西方一千多年的结果！不过，中国古代数学家并未得出 π 是无理数的结论，即无论如何精确地用有理数去表达 π ，都只能是近似的。 π 值的精确度，更多地是一个计算耐力的问题，而不是理论洞见的问题。这是一个典型的技术与科学的区别。

此外，很遗憾的是，由于程朱理学的盛行以及八股取士制度的实行，中国古代辉煌的数学成就一度濒临灭绝。明末数学家徐光启（公元 1562 年-1633 年）曾说到：

算数之学特废于近数百年间尔。废之缘有二：其一为名理之儒士苴天下之事；
其一为妖妄之术谬言数有神理，能知来藏往，靡所不效。卒于神者无一效，而
实者亡一存。

明末清初数学家梅文鼎（公元 1633 年-1721 年）发掘中国古代数学并治中西数学于一炉，对中国数学的传承和发展起到了重要作用。

总的来说，中国古代的几何学以解决实际问题（也包括天文、历法）为目标，是一种实用几何。在这个基础上，中国古代的数学家们把几何问题算术化、代数化，发展出了非常

³据李约瑟《中国科学技术史》推断，《周髀算经》成书时间不迟于公元前 1 世纪，但大部分内容应该写于公元前 4 世纪，而最古老的部分则可上溯至公元前 6 世纪甚至更早。

高超的建立算法技巧和非常高超的计算技术。此外，值得一提的是，中国古代数学并非完全没有理论证明：“问、答、术、注”的“注”中包含着很多理论证明。但可惜的是，这些证明并没有充分展开成完整的理论体系。相比之下，古希腊数学以系统性、逻辑性见长，而中国古代数学则更强调计算方法以及对物理世界的应用。

¶ 解析几何的创立

罗马人的征服让希腊文明戛然而止，大量的典籍被焚毁、遗失，之后延续千年的中世纪时期是科学的黑暗时期。在教廷的统治下，人们只能学到少量粗浅的数学，无论是数学的理论还是应用，都陷于停滞。对此，《古今数学思想》的作者克莱因 (M.Kline, 1908-1992) 说道，

我们可以看到，数学在一个自由的学术气氛中最能获得成功，那里既能对物理世界所提出的问题发生兴趣，又有人愿意从抽象方面去思考由这些问题所引起的概念，而不计其是否能谋取眼前的或实际的利益。

中世纪结束后，西方世界进入文艺复兴时期，伴之而来的是数学的复兴。事实上，此时复兴的近代数学并不能简单认为是古希腊数学的延续。此时以及此后发展出来的代数符号化、微积分等，与古希腊“纯几何思想”并不一致，而表现出了很强烈的“东方特征”：更强调计算方法以及对现实世界的应用。究其原因，在于数学复兴的源头是十字军东征所带回的存于阿拉伯世界的数学典籍：古希腊的典籍因流传到阿拉伯地区而被保留下来，同时东方数学（中国数学以及印度数学）经由印度也进入阿拉伯地区，并跟古希腊数学逐渐融合而缓慢发展。所以，复兴的数学事实上是西方数学家们在融合东西方数学的基础上发展起来的。

解析几何的出现，对于几何学以及对于整个数学而言，都是至关重要的。人们普遍认同，解析几何是 17 世纪初由法国数学家笛卡尔 (Descartes, 公元 1596 年-1650 年) 创立的。笛卡尔讨论了代数与几何的优劣。他认为几何太过严重地依赖于图示，以致毫无必要使人的想象力疲劳不堪，但同时也指出代数是混乱和含糊的艺术，使人的头脑陷入困惑。因此，他希望

- (1) 通过代数过程把几何从图示的使用中解放出来；
- (2) 通过几何解释赋予代数运算意义。

事实上，笛卡尔创立解析几何的著作是发表在其旨在寻求“在一切领域建立真理的方法”的哲学著作《方法论》里，作为三篇附录之一（每篇附录都比正文长）出现的。在该附录中，笛卡尔从一个几何问题开始，把它转变为代数方程的语言，然后尽可能地简化这个方程，最后用几何的办法解出这个方程。

与笛卡尔不同，同时代的费马 (Fermat, 公元 1601 年-1665 年) 在其著作《轨迹导论》中也广泛使用直角坐标系。费马提到

每当最终方程中的两个未知量被求出的时候，我们就有了一条轨迹，该轨迹描述了一条线，直线或曲线。

笛卡尔和费马都通过建立坐标系，使用代数工具研究几何问题。二者的区别在于，费马是对古希腊人工作的继承，着眼于用代数方法对古希腊时期阿波罗尼奥斯 (Apollonius, 约公元前 262 年-前 190 年) 的工作做重新表述。而笛卡尔则很清楚代数的威力，并明确表明他在改换研究几何的方法。方法论是他一切工作的首要对象。因此，称笛卡尔为解析几何之父是完全妥当的。

解析几何的出现对于近代数学与科学的发展起到了关键性的作用：在把对于图形的分析转化为对于数的分析后，人们可以便利地处理无穷的过程，从而微积分、天体力学等学科领域开始出现并迅速发展起来。⁴

¶ 第五公设与非欧几何

在欧几里得《几何原本》中，欧几里得共提出了 5 条公设，其中第五公设在数学史上有着极其重要的影响。

公设 1.1.6. (第五公设)

若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线延长后必相交于该侧的一点。



该公设等价于如下的

公设 1.1.7. (平行公设)

过给定直线外一点，存在唯一的直线过该点且平行于给定直线。



跟其它公设相比，第五公设最为拗口也最为不显然。事实上，从《几何原本》中命题的排布也可以看出来，欧几里得本人也尽量避免使用这个公设：直到命题 29 他才不得不开始使用这个公设。此外，还要注意的是，第五公设的陈述看起来比平行公设要复杂，但却明确表明了古希腊数学的一个特征：尽量避免使用无穷（“相交”是有限点处发生的现象，而“平行”则需要延长到无穷远才能确定）。

自从古希腊后期的托勒密 (Ptolemy, 约公元 100 年-168 年) 开始，有很多数学家前仆后继，试图用其它公设/公理证明第五公设。虽然他们都失败了，但作为副产品，他们却发现了很多（在假定其它公设/公理成立的前提下）跟第五公设等价的命题，例如

- 每个三角形的内角和都是 180 度。
- 存在一个三角形，其内角和是 180 度。
- 存在一对相似而不全等的三角形。
- 存在长方形（即内角均为直角的四边形）。
- 平行于同一直线的两条直线是平行的。
- 直角三角形的勾股定理成立。
- 一般三角形的余弦定理成立。

⁴从古希腊（例如欧多克索斯）以来，“分析/解析”一词一直跟“综合”相对应，表示“从结论出发，逐步逆向寻找使得其成立的条件，直到回溯到已知的结论为止”，这也是笛卡尔把他所创立的新学科命名为“解析几何”而不是“代数几何”的原因。但是在 18 世纪，因为微积分的长足发展，人们开始用“分析”一词表示“涉及无穷过程的代数”，之后“分析学”开始专门表示“涉及极限过程（微分、积分等）的学问”。

- 存在面积任意大的三角形。

我们把另外一个大家耳熟能详但与第五公设等价的命题藏在习题 1 第 4 题里。

在所有这些试图证明第五公设的努力中，我们仅仅提一下与欧拉同时代的数学家兰伯特 (Lambert, 公元 1728 年-1777 年)。他也许是最接近于发现真相，却实际上未能发现非欧几何的人。他曾经写道：

欧几里得第五公设的证明可以发展到这样一种程度，即表面上是只剩下了一点微不足道的东西，但仔细分析表明，在这点微不足道的东西里面，潜藏着问题症结。通常，它要么包含了那个正在证明的命题，要么包含了一个相当于这个命题的假设。

顺便提一下，兰伯特还是最早证明 π 是无理数的数学家。

非欧几何的发现一般归功于三人：罗巴切夫斯基 (Lobachevsky, 公元 1793 年-1856 年)，波尔约 (J.Bolyai, 公元 1802 年-1860 年) 和高斯 (Gauss, 公元 1777 年-1855 年)。高斯应该是第一个清楚明白证明平行公设是徒劳的人，但他毕生未公开发表过或支持过这样的观点。高斯于 1825 年发表经典著作《曲面的一般研究》。在该著作中，高斯曲率被第一次引入并加以研究。高斯证明了高斯曲率仅与曲面上的度量性质有关，而与曲面的形状无关 (比如平面与圆柱面度量性质相同，但形状不同)，并指出了研究仅仅与度量相关的新的几何的可能性。后来 1854 年 6 月 10 日黎曼 (Riemann, 公元 1826 年-1866 年) 在哥廷根大学发表讲师就职演说“论几何学基础的假设”，进一步发展了这个思想，提出了流形的概念，把笛卡尔的全局坐标推广到局部坐标，指出可以通过局部结构 (黎曼度量，即“无穷靠近的任意两点之间的距离”) 去了解空间的整体距离。黎曼几何学是更加一般意义上的非欧几何学，使罗巴切夫斯基，波尔约的非欧几何学成为特例。黎曼还提到了在物理中可能的应用，后来由爱因斯坦接过了接力棒，使之成为广义相对论的数学基础，彻底变革了人类对于空间和宇宙的认识。

罗巴切夫斯基被视为“几何学的哥白尼”。他在 1829 年发表了论文《论几何学原理》，公布了一种新的几何学，其赖以建立的基础，是一个与平行公设背道而驰的假设：

过直线外一点可以作多于一条与给定直线不相交的直线。

从这个新的公设出发，他推导出了一个和谐的几何结构，没有任何内在的逻辑矛盾。罗巴切夫斯基完全认识到了他发现的新几何具有重要意义。他为此先后写了三部专著，详尽地介绍新几何。

波尔约与其父亲都毕生致力于平行公设的研究。他在其父亲于 1832 年出版的书《试论》的附录里发表了论文《绝对空间的科学》。波尔约的绝对空间几何学就是在欧氏几何的公理体系中除去了平行公设。他精辟地分析了绝对几何学的公理体系的逻辑推论，建立起一系列深刻的定理，这些定理对于欧氏几何与非欧几何同样成立。波尔约指出，不可能仅通过数学推理确定物理存在的几何空间是欧式的还是非欧的。

罗巴切夫斯基与波尔约的工作在他们生前并没有被人们所重视，直到 1868 年贝尔特拉米 (Beltrami, 公元 1835 年-1899 年) 和克莱因 (F.Klein, 公元 1849 年-1925 年) 先后独立构作出非欧几何的模型 (即非欧平面几何可以在普通欧氏空间中，作为某负常数高斯曲率的内蕴几何而实现)，证实了非

欧几何与欧氏几何是同等自治的。此后非欧几何才逐渐广为世人所接受，人类也从此突破了绝对时空概念的束缚。

¶ 射影几何

射影几何的形成也许最早可以追溯到古希腊时期对圆锥曲线的研究。其中出名的著作有阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》，而亚历山大时期的帕普斯 (Pappus, 约公元 290 年-350 年) 曾引入交比的概念，并在欧氏几何的框架里证明了射影几何的第一个定理，即帕普斯定理 (见第五章定理5.4.1)。文艺复兴之后，射影几何的先驱是与笛卡尔、费马同时代的德萨格 (Desargues, 公元 1591 年-1661 年)。他本人的职业是一位建筑师和军事工程师，但他有着非凡的想象力。受文艺复兴时期所发展起来的透视画法的启发，他写下著作《试图处理一个圆锥曲线与一个平面相交之结果的草稿》。其基本结果就是通过射影的方法统一地处理圆锥曲线，使貌似不同种类的圆锥曲线合而为一。他引入无穷远点、调和点列等概念，并证明了描述实景与截景的德萨格定理 (见第五章定理5.4.3)。之后帕斯卡 (Pascal, 公元 1623 年-1662 年) 在学习德萨格的著作后，年仅 16 岁时就证明了著名的帕斯卡定理 (见第五章定理5.4.2)。可惜的是他过早地放弃了数学，而改投到神学。虽然这几个定理最初都是在欧氏几何的框架里面所陈述和证明的，我们将在第五章中从射影几何的角度理解并证明它们。在此仅多提一句：这些定理中已经蕴含了很多新的数学思想，例如一个形状可以连续形变到另一个形状，而值得关注的性质是几何图形在变换下的不变性 (例如线的位置和相交方面的性质)。

最终使得射影几何独立称为一个几何分支的是十九世纪数学家庞斯莱 (Poncelet, 公元 1788 年-1867 年)。庞斯莱曾参加拿破仑对俄战争，被俘后在狱中写出《论图形的射影性质》，建立了射影几何的基础。他还建立了具有重要意义的对偶性原理，例如在平面射影几何中，将“点”与“线”互换，“位于”与“通过”互换，“共线”与“共点”互换，所得结论依然成立。庞斯莱使用德萨格的中心投影和无穷远点的概念来建立复射影平面的概念，而沙勒 (Chasles, 公元 1793 年-1880 年) 接续了庞斯莱的工作，强调交比及其在射影变换下不变性在射影几何中的重要性。他还开创了枚举几何学的研究，后来该方向的研究成为代数几何学的一个分支。

射影几何的发展与壮大也需要归功于冯·施陶特 (von Staudt, 公元 1798 年-1867 年)，普吕克 (Plücker, 公元 1801 年-1868 年)，克莱因等人。例如，冯·施陶特使得射影几何彻底摆脱了对长度和叠合的依靠，使人们认识到在逻辑上射影几何比欧氏几何更加基本；普吕克引入了齐次坐标系，从而将解析几何的方法引入射影几何；克莱因则把当时的各种几何都统一归纳到射影几何的框架里。

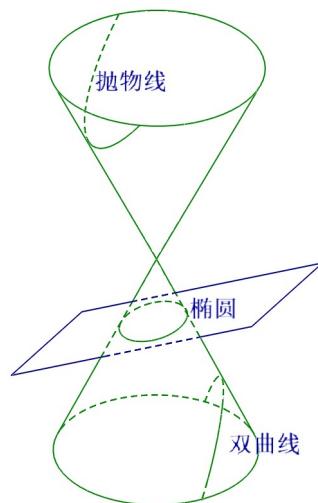


图 1.6: 圆锥曲线

¶ 埃尔朗根纲领

19世纪的几何展现出了百花齐放的特色，不同的几何涌现出来并迅速发展，而这促使人们思考如下问题：究竟什么是几何？最终克莱因用代数学中群⁵的概念，将当时所有的几何统一在同一个框架里，这就是著名的埃尔朗根纲领，是克莱因23岁时被任命为埃尔朗根大学教授时所做的就职演讲。该纲领的核心思想是

每种几何都由相应的变换群所刻画，几何要研究的正是在该变换群下保持不变的性质。

例如，欧氏平面几何主要研究的是在刚体变换群（或者欧氏变换群）之下保持不变的性质，比如长度、角度、面积。更一般地，要研究相似形理论，就需要考虑更大一点的群，即相似变换群。相比之下，射影几何所研究的是在射影变换下不变的性质。因为射影变换群是最大的（它包含了刚体变换群等作为其子群），所以射影几何是比欧氏几何更为一般的几何。当然，在射影几何中，长度、面积、角度等几何量不再保持不变。于是这些量不再是射影几何的研究对象。但是诸如代数曲线的次数，直线上四个点形成的交比等量在射影变换下仍然保持不变，从而是射影几何的研究对象（见本书第四章）。

值得一提的是，在埃尔朗根纲领接近结尾处，克莱因给出了一段关于“位置分析学”（即拓扑学）的论述，将拓扑学描述为在某种“无穷小扭曲群”下保持不变的学科，预见到了几何学的新分支“拓扑学”的兴起。虽然拓扑学的源起可以追溯到欧拉（Euler，公元1707年-1783年）的七桥问题以及凸多面体公式（见第6章定理6.2.1），但拓扑学真正成为一门学科还是19世纪末、20世纪初的事情，而克莱因本人对此也做出了非常重要的贡献。特别地，他构造出了不可定向的封闭曲面（克莱因瓶，见图6.15），拓展了人们关于拓扑曲面的理解。

¶ 几何公理化

我们知道，从现代的角度看，欧几里得公理体系并非是一个完善的公理体系，在两千多年的时间里，人们在其中发现了各种各样的问题。在19世纪后半叶，数学里的另一个重要里程碑是实数理论的建立以及分析学的严格化。从此，代数和分析有了自己坚实的基础，对几何不再有依赖关系。另一方面，非欧几何的发现让人们意识到，即使欧氏几何也只是一个人造理论，并不一定是天然而自洽的。于是，为几何学设立一个不依赖于我们的空间/物理直觉的严格公理化基础就自然而然提上了日程。

不少数学家在几何学公理化之路上都做出了很好的工作，例如帕施（Pasch，公元1843年-1930年）最早研究了直线上的序公理，并提出了用以刻画平面中序关系的帕施公理（即下文的希尔伯特公理II.4）。他还是最早（1882）建立射影几何公理体系的人。包括佩亚诺（Peano，公元1858年-1932年）在内，多位数学家先后给出了欧氏几何的公理化体系。最终，希尔伯特（Hilbert，公元1862年-1943年）在1899年出版了《几何基础》一书，给出了最受认可的欧氏几何公理体系，最终达成了为欧氏几何建立严格的公理体系的目标。

⁵群的概念最早是由阿贝尔（Abel，公元1802年-1829年）、伽罗瓦（Galois，公元1811年-1832年）等人发展起来，并用于解决高次方程的可解性。而克莱因和他的朋友李（Lie，公元1842年-1899年）则发展了用于几何的（连续）变换群理论。有关群的基本理论，参见本书附录A.2。

1.2 公理体系：从欧几里得得到希尔伯特

¶ 欧几里得公理体系

下面对欧几里得《几何原本》的公理化体系稍作展开。前文已经提及，这本书共分 13 卷。在第一卷的开篇，欧几里得就引入了 23 个定义，

定义. [几何原本开篇 23 条定义]

- (1) 点没有组成部分。
- (2) 线只有长度没有宽度。
- ⋮
- (15) 圆是平面上到给定点的距离都相等的点所给出的曲线。
- ⋮
- (23) 平行线是在同一平面中向两边无限延伸后不相交的直线。



从这里可以看到，欧几里得试图定义他需要用到的所有概念。然而，这些所谓的定义并不是通过数学性质将所定义的对象跟其它对象区分开来。事实上，后来人们才逐渐认识到，不可能在数学体系内对体系需要用到的所有概念都给出定义。

紧接着这些定义，欧几里得列出了 5 个公设与 5 个公理，即

公设. [《几何原本》5 条公设]

- (1) 由任意一点到另外任意一点可作直线。
- (2) 一条有限直线可以继续延长。
- (3) 以任一点为圆心，任一距离为半径可作圆。
- (4) 所有直角相等。
- (5) 若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线延长后必相交于该侧的一点。



以及

公理. [《几何原本》5 条公理]

- (1) 与同一量相等的量彼此相等。
- (2) 等量加等量，其和仍相等。
- (3) 等量减等量，其差仍相等。
- (4) 彼此能重合的物是全等的。
- (5) 整体大于部分。



从上述欧几里得公设与欧几里得公理，可以看出当时“公理”与“公设”的区别：公理是适用于所有学科的逻辑规则，而公设则是专指几何学中大家认可的规则。需要说明的是，欧几里得体系的“公理”一般被翻译成 common notion，而“公设”则被翻译成 postulate。如今大家一般不再做这种公理与公设的区分（如下文希尔伯特体系那般），统称公理即 axiom.

¶ 欧几里得公理体系的剖析

下面通过两个例子，近距离地剖析《几何原本》：

命题 1.2.1. (《几何原本》命题 1)

从任意给定边长出发可以作正三角形。 ♠

证明 设 AB 为给定的线段。以 A 为圆心、线段 AB 为半径作圆 BCD (公设 3)，以 B 为圆心、线段 AB 为半径作圆 ACE (公设 3)。记两圆的交点为 C ，并连接 CA 与 CB (公设 1)。因为 A 是圆 CDB 的圆心， AC 等于 AB (定义 15)。同理，因为 B 是圆 CAE 的圆心， BC 等于 BA (定义 15)。因此， CA 与 CB 都等于 AB ，从而 CA 等于 CB (公理 1)。因此，三条线段 CA ， AB ， BC 两两相等。于是，三角形 ABC 就是所求的具有给定边长 AB 的正三角形。 □

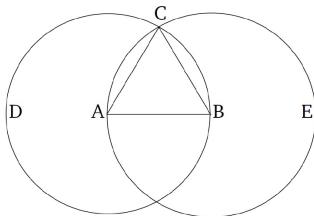


图 1.7: 《几何原本》命题 1

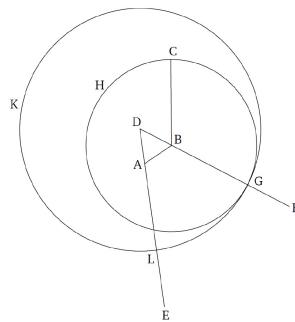


图 1.8: 《几何原本》命题 2

命题 1.2.2. (《几何原本》命题 2)

以任何一点为端点，可作跟给定直线段长度相等的线段。 ♠

证明 设 A 是给定点，而 BC 是给定线段。连接点 A 与 B (公设 1)。以 AB 为边作正三角形 $\triangle ABD$ (命题 1)。延长 DA 、 DB 为直线 AE 、 BF (公设 2)。以 B 为圆心、 BC 为半径作圆 CGH (交直线 BF 于 G) (公设 3)。以 D 为圆心、 DG 为半径作圆 GKL (交直线 AE 于 L) (公设 3)。因为 B 是圆 CGH 的圆心， BC 等于 BG (定义 15)。因为 D 是圆 GKL 的圆心， DL 等于 DG (定义 15)。因为 DA 等于 DB ，所以 AL 等于 BG (公理 3)。但是 BC 等于 BG ，所以 AL 等于 BC (公理 1)。 □

从上述两个例子，不难体会出《几何原本》的一些基本特色：

- 不假设任何对象的存在性，必须能用尺规作出来才会被认可；
- 每一步推理都有明确的依据：定义、公理、公设或者已经证明的命题；
- 公理公设的选取、命题的排布顺序都是精心设计的。

不过，《几何原本》的证明依然依赖于几何直觉。例如在证明命题 1 时，用了“两个半径相同的圆，若圆心距等于半径，则一定交于两点”这个既未假设也未证明的结论。2000 多年以来，人们在《几何原本》中发现了越来越多的漏洞：隐藏的假设，非数学的定义，逻辑上的不完备之处，对作图或物理直觉的依赖等等。但是，不可否认的是，《几何原本》对数学、科学乃至人类历史起到了无法估量的巨大作用，是史上最有影响力的著作之一。

¶ 希尔伯特公理体系

建立几何学公理体系的实质就是要把我们的空间直观加以逻辑的分析。希尔伯特在《几何基础》⁶一书中，建立了一个完善的公理系统，从而使欧氏几何获得了牢固的基础。

在希尔伯特公理体系里，首先有两组不加定义的对象，即

- 三个不加定义的本源对象：点、直线、平面；
- 涉及本源对象的三个不加定义的本源关系：
 - 关联（位于…之内）：分为直线与点关联（也称“直线包含点”、“点在直线里”）、平面与点关联（也称“平面包含点”、“点在平面里”）；
 - 在…之间：两个点在第三个点之间；
 - 合同：线段与线段合同，角与角合同。

按照希尔伯特的说法，

在任何时候，我们都可以把“点、直线、平面”换成“桌子、椅子、啤酒杯”。

也就是说，这些本源对象和本源关系不必有任何特定的含义（这是任何形式逻辑体系的起点）。但是，本源对象/关系也并非可以随意指定的：它们必须满足后面给出的公理体系。注意从本源对象、本源关系及诸多公理出发，可以衍生出“线段”、“角”等可定义对象，以及“直线与平面关联”、“三角形与三角形合同（全等）”等可定义关系。

希尔伯特公理体系共有五组，分别为关联公理、顺序公理、合同公理、平行公理，连续公理，下面逐一分析。为简单起见，在公理中将用大写字母 A, B, C, \dots 表示点，小写字母 a, b, c, \dots 表示直线，希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示平面，并且在说到“两点 A 和 B ”或“三点 A, B 和 C ”时，总表示不同的点。

¶ 希尔伯特公理体系：关联公理

关联公理所表述的是点、线、面这三种本源对象之间的关联关系：

公理.（第一组：关联公理）

- (I.1) 对于两点 A 和 B ，恒有一直线 a ，它同 A 和 B 相关联。
- (I.2) 对于两点 A 和 B ，至多有一直线，它同 A 和 B 相关联。
- (I.3) 任一直线至少跟两点相关联，且至少跟一点不关联。
- (I.4) 对于不在同一直线上的任意三点 A, B 和 C ，恒有一平面 α 同 A, B 和 C 这三点的每一点相关联。任一平面至少跟一点相关联。
- (I.5) 对于不在同一直线上的三点 A, B, C ，至多有一平面，它同 A, B, C 这三点的每一点相关联。
- (I.6) 若平面 α 跟直线 a 的两点 A 和 B 相关联，则 α 跟 a 的每一点都相关联。
- (I.7) 若两平面 α 和 β 有一公共点 A ，则它们至少还有一公共点 B 。
- (I.8) 至少有四点不在同一平面里。



⁶该书在希尔伯特生前共出版了七版（在他去世后又被后人多次修订），不同版本的公理体系有少许差别。

我们把公理 (I.1)-(I.3) 称为第一组公理中的平面公理，而把公理 (I.4)-(I.8) 称为第一组公理中的空间公理。注意后五条公理仅对三维空间有意义，其中公理 (I.7) 意味着空间的维数不超过三，而公理 (I.8) 意味着空间的维数至少是三。在仅考虑二维几何即平面时，一般去掉公理 (I.4)-(I.7) 并把公理 (I.8) 改为“至少有三点不在同一直线上”。

可以看到，关联公理仅涉及点、线、面之间的关联关系，所界定的几何信息是非常少的。如果限制仅仅使用关联公理，能够证明的性质是很少的。不过，在习题 1 第 9 题中，将会让大家寻找一个仅用关联公理就能证明的结论。此外，本书第 5 章讨论射影几何，其中关联关系是至关重要的。

¶ 希尔伯特公理体系：顺序公理

顾名思义，顺序公理表述的是点排列的顺序关系：

公理. (第二组：顺序公理)

- (II.1) 若点 B 在点 A 和点 C 之间，则 A, B, C 是同一直线上不同的三点，且 B 也在 C 和 A 之间。
- (II.2) 对于两点 A 和 C ，直线 AC 上恒有一点 B ，使得 C 在 A 和 B 之间。
- (II.3) 一直线的任意三点中，至多有一点在其他两点之间。
- (II.4) (帕施公理) 任给不共线的三点 A, B, C ，以及平面 ABC 中不过 A, B, C 的直线 a ，若 a 过线段 AB 中的某点，则 a 一定也过线段 AC 或线段 BC 中的某点。



帕施公理中出现的“线段”是由顺序关系所衍生出来的概念，其定义如下：

定义 1.2.3. (线段)

设 A 和 B 是直线 a 上的两点。我们称由 A 和 B 所成的点组为一条线段，用 AB 或 BA 表示。在 A 和 B 之间的点叫做线段 AB 的点(或线段 AB 内部的点)； A 和 B 叫做线段 AB 的端点，直线 a 上的其他的点叫做线段 AB 外部的点。

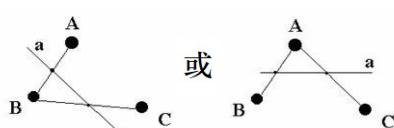


图 1.9: 帕施公理

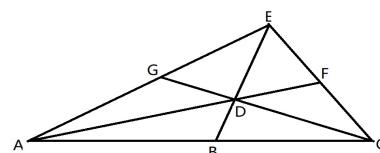


图 1.10: 定理 1.2.4 的证明

注意公理 (II.3) 仅仅断言：一直线的任意三点中，至多有一点在其他两点之间，而不是说“有且只有一点在其他两点之间”。事实上，“有且只有一点在其他两点之间”也是对的，但“有一点在其他两点之间”这个存在性论断是其他公理的推论。下面用关联公理以及顺序公理证明它：

定理 1.2.4. (共线三点，必有一点在中间)

一直线上任意三点，必有一点在其他两点之间。



证明 设 A, B, C 在同一条直线上， A 不在 B, C 之间，且 C 不在 A, B 之前。由公理 (I.3)，该直线外必有点 D 。由公理 (I.1)，存在连接 B, D 的直线。由公理 (II.2)，直线 BD 上存在点 E 使得 D 在 B, E 之间。对 $\triangle EBC$ 和直线 AD 应用帕施公理，可知直线 AD 交线段 EC 与某点 F 。同理对 $\triangle EBA$ 和直线 CD 应用帕施公理，可知直线 CD 交线段 EA 与某点 G 。接着对 $\triangle AFE$ 和直线 CG 应用帕施公理，可知点 D 是线段 AF 中的点。于是可以对 $\triangle AFC$ 和直线 ED 应用帕施公理，从而证明了 B 在 A, C 之间。□

因此，在希尔伯特公理体系中就只写“至多有一点在其他两点之间”，而不是正确但更强的“恰有一点在其他两点之间”。这种处理方式体现的是公理体系的“极小性”，或者说，公理之间的“独立性”：公理中的每个论断都是必要的，独立于其他公理的，而不能是别的公理的推论。

¶ 顺序公理与“侧”的概念

顺序公理中的前三条描述了直线上的顺序关系，而第四条帕施公理描述的是平面顺序关系。在几何上，顺序关系最重要的表现在于把点集分成两组，即“两侧”的概念。先给出直线上“点的某侧”的概念：

定义 1.2.5. (直线上一点的“同侧”)

在直线 a 上给定任意一点 O 。对于 a 上异于点 O 的两点 A, B ，如果点 O 不在 A 和 B 之间，则称 A, B 两点位于点 O 的同侧，否则称它们位于点 O 的异侧。♣

可以证明 (留作习题)

定理 1.2.6. (直线上点的两侧)

直线 a 上任意一点 O 把直线 a 恰好分成两侧 (即：直线 a 上除了 O 之外的点分为两个集合， a^+ 与 a^- ，使得 a^+ 里任意两点都在 O 的同侧， a^- 里的任意两点都在 O 的同侧，且 a^+ 里的点跟 a^- 里的点则一定位于 O 的异侧)。♥

类似地，可以定义“平面被直线所分割而成的侧”的概念：

定义 1.2.7. (平面上一直线的“同侧”)

在直线 α 上给定任意一条直线 α 。对于 α 上不在 a 中的两点 A, B ，如果线段 AB 跟 a 不相交，则称 A, B 两点位于直线 a 的同侧，否则称它们位于直线 a 的异侧。♣

注意由公理 (I.2)，若 A, B 在 a 的异侧，则线段 AB 与 a 交于唯一的一点。不难想象，下述结论依然是正确的：

定理 1.2.8. (平面上直线的两侧)

平面 α 上任意一条直线 a 把平面 α 恰好分成两侧 (请读者仿照上文写出这句话的具体含义)。♥

公理化方法的优点在于其严格性，但是即使这样一个“看似显然”的结论，其证明也远非几句话就能说清楚的。为了不陷入过多的细节，我们将不加证明地承认它。

此外，不必再引入描述空间顺序的新公理，还可以证明：任何平面也把空间分成两

侧。我们把空间两侧的定义以及上述定理“空间版”的陈述留作习题（见习题1第11题）。

以下概念是直观而自然的：把直线 a 上任一点 O 的每一侧都叫做以 O 为起点的射线，把平面 α 上任意一条直线 a 的每一侧都叫做以 a 为边界的半平面，把空间中任意平面 α 的每一侧都叫做以 α 为边界的半空间。

两点确定了一条线段。类似地，从同一点出发的两条射线确定了一个角：

定义 1.2.9. (角)

设 α 是一平面，而 h 和 k 是 α 中从一点 O 起始的、不属于同一直线的两条射线。

我们把这一对射线 h 和 k 所组成的线组叫做一个角，用 $\angle(h, k)$ 或 $\angle(k, h)$ 表示。

点 O 称为这个角的顶点，射线 h 和 k 叫做这个角的边。



注意，这里所定义的“角”都是我们常义下小于平角的角。读者可以尝试定义“角的内部”、“角的大小比较”等关系，此处不再赘述。

¶ 希尔伯特公理体系：合同公理

有了“侧”和“角”的概念，接下来给出第三组公理：

公理. (第三组：合同公理)

- (III.1) 设 A 和 B 是一直线 a 上的两点， A' 是该直线或另一直线 a' 上的点，则在直线 a' 上点 A' 的任意给定的一侧，恒有一点 B' ，使得线段 AB 和线段 $A'B'$ 合同【记为 $AB \equiv A'B'$ 】。
- (III.2) 若两线段 $A'B'$ 和 $A''B''$ 都和线段 AB 合同，则线段 $A'B'$ 和 $A''B''$ 合同。
- (III.3) 设 AB 和 BC 是在同一直线 a 上除了端点 B 之外无公共点的两条线段，且设 $A'B'$ 和 $B'C'$ 在这直线或另一直线 a' 上除了端点 B' 之外无公共点的两条线段。若 $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, 则 $AC \equiv A'C'$ 。
- (III.4) 设给定了平面 α 上的一个角 $\angle(h, k)$ ，平面 α' 上的直线 a' 和在 α' 上 a' 的一侧。设 h' 是 a' 里以点 O' 为起点的一条射线。则平面 α' 上恰有一条射线 k' 使 $\angle(h', k')$ 的内部被包含在 a' 的这给定的一侧，且使 $\angle(h, k)$ 与 $\angle(h', k')$ 合同【记为 $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ 】。每个角都跟自身合同。
- (III.5) 若两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 之间有下列合同关系，

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

则有合同关系 $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ 。



合同公理中的前三条描述的是直线元素（线段）的合同，而后两条描述的是平面元素（角与三角形）的合同。跟顺序关系类似，空间元素的合同则是直线、平面合同的推论。从本质上来说，合同公理给出的是运动或迁移的概念：公理 (III.1)-(III.3) 描述了线段迁移的性质，其中公理 (III.3) 是加法的基础，公理 (III.4) 给出了角的迁移，而公理 (III.5) 则是三角形迁移的基础。

三角形的概念以及三角形的合同都是由前述概念、关系所衍生的可定义概念、可定

义关系。例如，三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 合同的意思是所有对应边以及对应角合同，即

$$\begin{aligned} AB &\equiv A'B', & AC &\equiv A'C', & BC &\equiv B'C', \\ \angle BAC &\equiv \angle B'A'C', & \angle ABC &\equiv \angle A'B'C', & \angle ACB &\equiv \angle A'C'B'. \end{aligned}$$

为了跟通用的术语一致，此时也称三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 全等。

利用公理 (III.5) 以及公理 (III.4)，不难证明用以判定三角形全等的 (SAS) 判据、(ASA) 判据，而三角形全等的 (SSS) 判据以及 (AAS) 判据的证明则更加复杂。我们将不加证明地承认它们。我们再次提及以下事实：从公理体系出发，即使看似很显然的结论，其证明也未必简单。例如，

若两个角都跟第三个角合同，则这两个角合同。

这个事实需要用到 (SSS) 判据来证明⁷，而角的大小比较关系事实上是依赖于该结论的。

¶ 希尔伯特公理体系：平行公理与连续公理

接下来列出剩下两组公理，其中平行公理是一条平面公理，而两条连续公理则都是直线公理：

公理. (第四组：平行公理(又称欧几里得公理))

(IV) 设 a 是任一直线， A 是 a 外的任一点，则在 a 和 A 所确定的平面上，至多有一条直线通过 A ，而且和 a 不相交。



可以证明，在假设前三组公理的前提下，过直线外一点至少可作一条直线与给定直线不相交。于是结合平行公理可知，过直线 a 外一点 A 恰有一条直线跟给定直线不相交，该直线就叫做通过 A 的 a 的平行线。(从这里以及前文，我们一再看到选取公理时的标准之一：公理的断言应该是独立于其它公理的。) 希尔伯特对平行公理的评价是

平行公理的引进，使几何的基础大大地简化了，也使几何的构造容易多了。

最后是连续公理，它被分为两个部分，其中第一部分即前面提到的阿基米德公理，它的作用是替连续的要求做准备，而第二部分即直线完备公理，则是完成整个公理体系的临门一脚⁸。

公理. (第五组：连续公理)

(V.1) (阿基米德公理) 若 AB 和 CD 是任意两线段，则必存在一个数 n 使得沿 A 到 B 的射线上，自 A 作首尾相接的 n 个线段 CD ，必将越过 B 点。

(V.2) (直线完备公理) 一直线上的点集连同其次序关系与合同关系不可能再被扩充，使得该直线上原来元素之间所具有的关系，从公理 I-III 所推出的直线次序与合同的基本性质以及公理 (V.1) 都仍旧保持。



⁷该事实最初被希尔伯特在《几何基础》中列为公理，后来 1911 年罗森塔尔证明该事实可由其它公理推出。

⁸在《几何基础》第一版中并没有完备公理，后来由庞加莱等数学家像希尔伯特指出后，第二版中才加入，这样才能得到我们所熟悉的三维空间几何。此外，还需要说的是，在希尔伯特《几何基础》的中心思想，是尽量不用连续公理而展开几何学。换而言之，希尔伯特在这本书里的重大成就之一，恰恰在于他发现不用连续公理，也能发展出丰富的几何学体系。

读者不难体会到，希尔伯特对公理的分组方式使得几何的逻辑结构变得非常清晰。而且，在这样的划分下，我们可以自然地取出某些组公理，研究相应的几何学。

在学习公理化思想的时候一定要注意：几何公理化的目的是用逻辑分析我们的几何直观，从而使我们在运用几何直观时，有完备的逻辑体系可以依靠。几何公理化并不意味着要摒弃几何直观，把几何变成逻辑符号推导（不过，“公理体系与逻辑推导”相结合这一点，近些年在“定理的机器证明”等方面大放异彩）。再次强调一下，

几何公理化并不意味着要摒弃几何直观，几何直观在数学中从来都是不可或缺的！

¶ 在公理体系里证明定理举例：垂线的存在唯一性

接下来展示一下如何在希尔伯特公理体系内证明平面几何中几个熟知的结果。我们的目的不是从希尔伯特公理体系出发，重新建立平面几何，而只是通过几个例子，向大家展示公理化方法的严格性。请读者仔细体会“证明过程是如何不依赖于几何图形的”以及“任何一个看似显然的结论，其证明也未必平凡”这两点。

为了不陷入过多的细节，将不加证明地假定一些结论（有兴趣的同学可以查阅希尔伯特《几何基础》，找到如何在公理体系内证明这些结论）。例如，我们将承认

定理 1.2.10. (外角定理)

三角形的外角大于不相邻的内角。



以及

定理 1.2.11. (对顶角定理)

对顶角相等。



我们先给出中点的定义：

定义 1.2.12. (中点)

若点 O 位于点 A 与点 B 之间，且 AO 与 OB 合同，则称 O 为 A 与 B 的中点。

首先需要证明的是中点的存在性和唯一性：

定理 1.2.13. (中点的存在唯一性)

任意两点 A, B 有唯一的中点。



证明 首先证明存在性。由公理 (I.3)，存在不在直线 AB 上的点 C 。于是， C 落在直线 AB 的一侧。由公理 (III.4)，在直线 AB 的另一侧，存在射线 BD ，使得 $\angle CAB = \angle DBA$ 。由公理 (III.1)，可以在射线 BD 上选取点 D 使得 BD 与 AC 合同。根据定义 1.2.7，线段 CD 与直线 AB 相交于唯一的点 O 。由定理 1.2.10 以及反证法可知，点 O 不同于点 A 与点 B ，且 B 不在 A 与 O 之间，且 A 不在 B 与 O 之间。于是由定理 1.2.4，点 O 位于点 A 与点 B 之间。最后，由三角形合同的 AAS 判据可知 AO 与 BO 合同，即 O 是 A 与 B 的中点。

接下来证明唯一性。假设 O' 是 A 与 B 的另一个中点。由公理 (II.3)，要么 O' 位于 A 与 O 之间，要么 O 位于 A 与 O' 之间。不妨设 O' 位于 A 与 O 之间，则⁹

$$AO > AO' = O'B > OB,$$

矛盾。同理若 O 位于 A 与 O' 之间也得到矛盾。于是中点必然唯一。 □

定义 1.2.14. (直角)

设 O 位于 A 与 B 之间，且 C 是直线 AB 之外的一点。如果 $\angle AOC$ 与 $\angle BOC$ 合同，则我们称 $\angle AOC$ 是一个直角。此时我们称 OC 与 AB 垂直，并记为 $OC \perp AB$. 

当然，直角的存在性也是需要证明的。对于下面这个定理，我们仅证明 (1)，而把 (2) 的证明留作习题 (注意 (2) 在欧几里得公理体系里是作为公设存在的)。

定理 1.2.15. (直角的存在唯一性)

- (1) 直角是存在的。
- (2) 所有直角均合同。



证明 【(1) 的证明】由公理 (I.1) 以及公理 (I.3)，存在 $\angle AOB$. 由公理 (III.1)，可以取 A 与 B ，使得 AO 与 BO 合同。由定理 1.2.13， A 与 B 有唯一的中点 C 。根据 SSS， $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOC$ 是合同的，从而 $\angle ACO$ 与 $\angle BCO$ 合同。于是， $\angle ACO$ 是直角. □

我们证明：

定理 1.2.16. (垂线的存在唯一性)

任给点 A 与直线 l ，存在唯一一条包含 A 且垂直于 l 的直线。



证明 我们分两种情况讨论。

若点 A 位于直线 l 上，则由公理 (III.4) 以及定理 1.2.15(1)，存在点 B 使得 $AB \perp l$. 再由公理 (III.4) 以及定义，该直线是唯一的。

若点 A 不在直线 l 上，则由公理 (I.3)，可以在直线 l 上取不同的点 B 与 C 。因为点 A 在 l 的一侧，由公理 (III.4) 以及公理 (III.1)，在 l 的另一侧存在点 A' 使得

$$\angle ABC = \angle A'BC, \quad AB = A'B.$$

由定义 1.2.7，线段 AA' 交直线 l 于唯一一点 O . 由 SAS 判据， $\triangle ABO$ 与 $\triangle A'BO$ 合同。于是 $\angle AOB$ 为直角，从而直线 AO 即为所求。

最后证明该直线的唯一性。设直线 l 上存在不同的两个点 D, E ，使得直线 AD 与 AE 均垂直于 l . 因为点 A 唯一直线 l 的一侧，由公理 (III.1)，在直线 l 的另一侧存在点 B ，使得 AD 与 EB 合同。由公理 (III.5) 以及定理 1.2.15(2)， $\triangle ADE \cong \triangle BED$. 因为 $AE \perp l$, $\angle AED$ 是直角。同理 $\angle BDE$ 是直角。由公理 (III.4)， B 位于直线 AD 上，而这跟公理 (I.2) 矛盾。 □

最后，需要指出的是，在上述证明过程中我们仅仅用了前三组公理。

⁹严格说来，此处需要先定义线段之间的 $>$ 关系，并证明其基本性质如传递性、三分性等。相关的内容见习题 1 第 13 题。

习题 1

1. [勾股定理]

- (a). 用毕达哥拉斯的方法证明勾股定理：如图，过 C 作 AB 和 GF 的垂线 CD 和 DE 。证明正方形 S_1 的面积 = 矩形 $EFDB$ 的面积，正方形 S_2 的面积 = 矩形 $GEDA$ 的面积，并由此证明勾股定理。
- (b). 试用三国时东吴人赵爽《周髀算经注》中的“弦图”证明勾股定理。

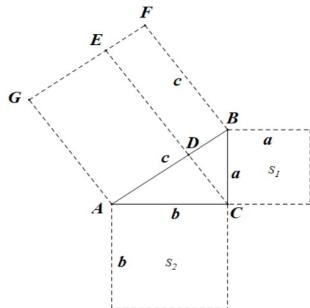


图 1.11：毕达哥拉斯证明勾股定理

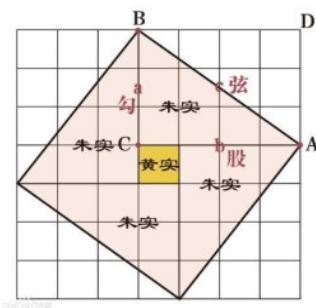


图 1.12：弦图

2. [黄金分割]

黄金分割是毕达哥拉斯学派的重要成果。若线段 A_0A_1 上的点 A_2 满足 $\frac{A_0A_1}{A_0A_2} = \frac{A_0A_2}{A_2A_1}$ ，则称 A_2 为 A_0A_1 的**黄金分割点**。

- (a). 证明：在五角星中（见图1.14），对角线的交点是对角线的黄金分割点。
- (b). 黄金分割的最大特性是其自相似性：



图 1.13：黄金分割

- (i). 设 A_2 是 A_0A_1 的黄金分割点。在线段 A_0A_2 上取 A_3 使得 $A_0A_3 = A_2A_1$ 。
求证： A_3 是 A_0A_2 的黄金分割点。

(ii). 应该如何选取点 A_4 ，使之是 A_0A_3 的黄金分割点？

3. [不可公度数的存在性]

毕达哥拉斯学派对五角星的研究不仅引出了黄金分割点，而且引出了不可公度量的存在性。两条长度分别为 a 、 b 的线段**可公度**的含义是：存在长度为 c 的线段以及整数 m, n ，使得 $a = mc, b = nc$ 。

- (a). 求证：若长度分别为 a 、 b 的线段可公度，则用以下“辗转丈量法”，一定可以在有限步后得到 c （从而该过程结束）。

辗转丈量法：不妨设 $a > b$ ，则存在整数 n_1 使得 $a = n_1b + a_1$ ，其中 $0 \leq a_1 < b$ 。若 $a_1 = 0$ ，则 $c = b$ ，过程结束。否则重复上述过程，得到整数 n_2 使得 $b = n_2a_1 + b_1$ ，其中 $0 \leq b_1 < a_1$ 。若 $b_1 = 0$ ，则 $c = a_1$ ，过程结束。否则继续重复，得到整数 n_3 使得 $a_1 = n_3b_1 + a_2$ ，其中 $0 \leq a_2 < b_1$ 。一直重复，直到 $a_n = 0$ 或者 $b_n = 0$ 时停止。

(b). 如图，在正五边形 $ABCDE$ 中，记 $|AC| = a_1, |AB| = b_1, |ac| = a_2, |ab| = b_2$ 。

证明 $a_2 = a_1 - b_1, b_2 = 2b_1 - a_1$ 。

(c). 由 (b) 迭代给出无穷递降数列 $a_1 > a_2 > \dots$ ，并证明 AC 和 AB 不可公度。

(d). 在边长为 1 的正方形中作出类似的图，证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

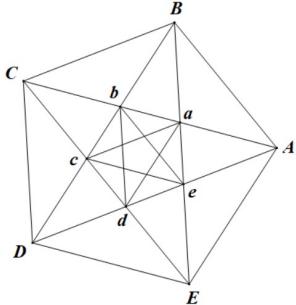


图 1.14: 五边形与五角星

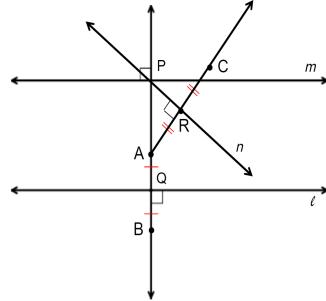


图 1.15: 平行公设的伪证

4. [平行公设的伪证]

非欧几何的创始人之一是 J. 波尔约。他的父亲 F. 波尔约 (F.Bolyai, 1775-1856) 是高斯的同学兼好友，特别注重平行公设的研究。F. 波尔约曾经给出过平行公设的一个错误证明，其中他不小心用了一个跟平行公设等价的命题。请找出来。

证明 设 P 是不在直线 l 上的一点。从 P 向 l 作垂线，垂足为 Q 。过 P 作垂直于 PQ 的直线 m ，则 m 平行于 l 。设 n 是一条过 P 且不同于 m 和 PQ 的直线。设 PR 是 n 上的射线，介于 PQ 与 m 上以 P 为起点的某射线之间。在 P, Q 之间取点 A 。令 B 是 A 关于直线 l 的对称点 (即直线 PQ 上唯一使得 Q 位于 A, B 之间且 $AQ = QB$ 的点)。令 R 为从 A 向 n 所作垂线的垂足。设 C 是 A 关于直线 n 的对称点。则 A, B, C 不共线。于是存在圆 G 过 A, B, C 三点。因为 l 垂直平分该圆的弦 AB ，而 n 垂直平分该圆的弦 AC ，故 l, n 相交于圆 G 的圆心。于是平行公设得证。 \square

5. [又一个伪证]

下面是一个用欧几里得公设 3 直接证明《几何原本》命题 2 的尝试：

以 A 为圆心， BC 为半径作圆 (公设 3)。则圆上任意一点到 A 的连线段即为所求。

这个证明错在哪儿？

6. [阿波罗尼奥斯圆]

阿波罗尼奥斯的八卷本著作《圆锥曲线论》代表了古希腊几何的最高水准。他曾给出了另一种构造圆的方式：设 A, B 是平面上的两点， k 是不等于 1 的常数，则所有满足 $\frac{PA}{PB} = k$ 的点 P 的轨迹是一个圆。证明这个事实。

7. [线段合同是等价关系]

证明“线段合同”满足如下性质：

(a). (自反性) 任何线段都跟自己合同： $AB \equiv AB$.

(b). (对称性) 若 $AB \equiv A'B'$, 则 $A'B' \equiv AB$.

(c). (传递性) 若 $AB \equiv A'B'$, $A'B' \equiv A''B''$, 则 $AB \equiv A''B''$.

8. [线段迁移的唯一性]

注意在公理 (III.4) 中, 关于角度迁移用的语句“恰有一条射线”, 即角度迁移是唯一的, 而在公理 (III.1) 中, 关于线段迁移用的语句是“恒有一点”, 即公理并没有预设线段迁移的唯一性。请利用公理 (III.4) 和公理 (III.5) 证明线段迁移公理 (III.1) 中的点 B' 是唯一的。

9. [平行公理的前置定理]

希尔伯特平行公理(即公理 IV)的表述中暗藏着一个他已经承认的定理, 该定理仅用关联公理就可以证明。写出它并证明它。

10. [帕施公理与直线上点的个数](*)

(a). 设 α 是一个满足关联公理 (I.1)-(I.3) 以及顺序公理 (II.1)-(II.3) 的平面。求证:
 α 中任意直线上至少有 5 个点。

(b). 设 α 是一个满足关联公理 (I.1)-(I.3) 以及顺序公理 (II.1)-(II.4) 的平面。

(i). α 中直线上任意四个点, 总是可以记成 A, B, C, D , 使得 B 在 A 和 C 之间, 且 B 也在 A 和 D 之间, 同时 C 在 B 和 D 之间, 且 C 也在 A 和 D 之间。

(ii). 证明: 任何直线上存在无穷多个点。

(c). 考虑模 5 的整数域 $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 。它有 5 个元素:

$$\mathbb{F}_5 := \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}.$$

其中的运算定义为

$$\bar{m} + \bar{n} := \overline{m+n}, \quad \bar{m} \cdot \bar{n} := \overline{m \cdot n}.$$

可以验证若 $0 \neq \bar{m} \in \mathbb{F}_5$, 则存在唯一的 $\bar{n} \in \mathbb{F}_5$ 使得 $\bar{m} \cdot \bar{n} = \bar{1}$ 。我们称 \bar{n} 为 \bar{m} 的逆, 并记之为 \bar{m}^{-1} 。例如, 因为 $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{1}$, 所以 $\bar{2}^{-1} = \bar{3}$ 。

下面考虑“平面”

$$\alpha := \{(x, y) | x, y \in \mathbb{F}_5\},$$

对于任意 $(a, b) \neq (0, 0)$, 称

$$L_{a,b,c} := \{(x, y) \in \alpha \mid ax + by + c = 0\}$$

为 α 中的一条直线。

设 $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ 是 α 中的三个点。若 $\bar{2}b_i = a_i + c_i$, 则称 B 位于 A 与 C 之间。

求证:

(i). α 中的每条直线上恰有 5 个点。

(ii). 平面 α 满足关联公理 (I.1)-(I.3) 以及顺序公理 (II.1)-(II.3)。

(iii). 平面 α 不满足帕施公理(即顺序公理 (II.4))。

【于是, 如果没有帕施公理, 仅仅假设关联公理以及其他顺序公理, 是可以出现“只有有限个点的直线”的。】

11. [“两侧”]

- (a). 证明定理1.2.6。
- (b). 用二十分钟思考定理1.2.8的证明，写出证明概要，并标出在证明过程中你需要用哪些中间的结论（不必证明）。
- (c). 写出这两个定理的空间版本（不必证明，但如果你愿意，可以写出证明概要）。

12. [三角形全等]

- (a). 求证：若 $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle A \equiv \angle A'$, 则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 全等。
- (b). 承认角的可加性。求证：若 $AB \equiv AB'$, $CB \equiv CB'$, 则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C$ 全等。
- (c). 求证：若 $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$, 则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 全等。
- (d). 利用合同公理和以上命题，证明角的合同有传递性，即：若 $\angle A \equiv \angle B$, $\angle B \equiv \angle C$, 则 $\angle A \equiv \angle C$ 。

13. [大小比较]

- (a). 给定线段 AB 和 CD , 若把 CD 迁移到直线 AB 上点 A 处的 B 侧后得到 AD , 且 D 位于线段 AB 内, 则称 $AB > CD$ 。证明：
- (i). 全序性：给定线段 AB 和 CD , $AB > CD$, $AB \equiv CD$, $AB < CD$ 三者必有其一。
- (ii). 传递性：若 $AB < CD$, $CD < EF$, 则 $AB < EF$ 。
- (b). 给出 $\angle(h, k) > \angle(h', k')$ 的定义，并证明角度比较的传递性和全序性。

14. [相似]

利用希尔伯特几何公理，试证明：如图，若 $AB = \lambda AB'$, $AC = \lambda AC'$, 则 $BC = \lambda B'C'$ 。（提示：依次对 λ 是 2, 自然数, 有理数和实数证明）

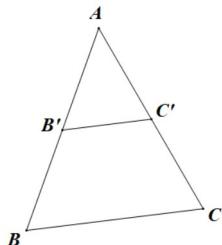


图 1.16: 相似

15. [直角的唯一性]

- (a). 利用合同公理和三角形全等的 SAS 判据，证明：若两角合同，则其补角合同。
- (b). 利用合同公理，证明定理1.2.15(2)，即所有直角都合同。

16. [希尔伯特公理体系里的勾股定理]

希尔伯特在《几何基础》中，基于前四组公理（特别地，他甚至避开了阿基米德公理），建立起比例理论，并应用比例理论建立了面积论。希尔伯特面积论的主要定理是两个多边形面积相等当且仅当它们拼补相等。

这里我们仅解释“拼补相等”的概念：两个多边形 P 和 P' **拼补相等**，是指在拼补上有限个两两合同的三角形后，它们可以被剖分成有限个两两合同的三角形。

- (a). 说明为什么上述结论可以推出勾股定理。
- (b). 在承认“多边形不能跟它的一部分拼补相等”的前提下，给出“多边形 P 的面积大于多边形 P' 的面积”的定义，并证明：在 ABC 中，若 $\angle A$ 小于直角，则 $|AB|^2 + |AC|^2 > |BC|^2$ ；若 $\angle A$ 大于直角，则 $|AB|^2 + |AC|^2 < |BC|^2$ 。
17. [空间的垂直]^(*)
- 首先给出空间中垂直的定义：若直线 l 与平面 α 相交且交于点 A ，且 l 垂直于平面 α 内任一过 A 的直线，则称直线 l 垂直于平面 α 。这个定义的合理性是由问题9以及下面第(a)问所保证的。
- (a). 利用关联公理证明：同一平面上的两直线或有一个公共点，或无公共点；两平面或无公共点，或有一公共直线；一平面和不在其上的一条直线或无公共点，或有一公共点。
- (b). 设直线 l 与平面 α 交于点 A 。利用问题16的结论证明：若平面 α 内存在两条过 A 的不同直线 l_1, l_2 均与直线 l 垂直，则直线 l 垂直于平面 α 。
- (c). 证明：若直线 l 与平面 α 垂直，且直线 l' 平行于直线 l ，则直线 l' 也与平面 α 垂直。
- (d). 证明：过空间中一点，有且只有一条直线与已知平面垂直。
- (e). 证明：空间中过一点存在三条直线两两垂直，但不存在四条直线两两垂直。
18. [从希尔伯特公理到第五公设]^(*)

利用希尔伯特的关联公理、顺序公理、合同公理以及阿基米德公理，证明平面里下述断言是等价的：

- (a). 过直线外一点，存在唯一一条直线跟已知直线平行。
- (b). 任意三角形的内角和等于两个直角之和。
- (c). 存在一个三角形，其内角和等于两个直角之和。
- (d). 若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线延长后必相交于该侧的一点。

第 2 章 向量与欧氏空间

本章先从几何变换的角度出发，逐步建立向量运算的法则，从而从几何上给出线性代数的基本对象：欧氏平面及欧氏空间。然后引入坐标系，将向量运算归结为数的运算。最后一节将从熟悉的实数理论出发，构建欧氏空间的模型并验证希尔伯特公理体系。

2.1 向量与向量空间

2.1.1 反射与平移

¶ 反射变换

记 X 为由希尔伯特公理所确定的平面或空间。从现在开始，将承认中学几何里所熟知的结论，而不再一一在希尔伯特公理体系里加以证明。

由定理1.2.16，对于平面中任意直线 l 以及任意点 A ，存在唯一直线 l' 包含 A 且跟 l 垂直。令 O 为 l 与 l' 的交点。则由希尔伯特公理 (III.1)，在直线 l' 上点 O 的另一侧，存在唯一的点 B 使得 $AO \equiv BO$ 。

定义 2.1.1. (反射)

给定平面 α 内的任意直线 l ，

- (1) 称如上所得到的点 B 为点 A 关于直线 l 的反射点。
- (2) 称映射

$$R_l : \alpha \rightarrow \alpha, \quad A \mapsto R_l(A) = B$$

为平面 α 内关于直线 l 的反射变换，并称 l 为其反射轴。



于是，熟悉的反射变换也可以被轻易纳入到希尔伯特公理体系。不难验证，

命题 2.1.2. (反射变换的性质)

- (1) 对于任意 $A \in l$ ，有 $R_l(A) = A$ 。
- (2) $R_l \circ R_l = \text{Id}$ ，其中 $\text{Id} : \alpha \rightarrow \alpha$ 是 α 到自身的恒等变换。



注意，(2) 说明了 R_l 的逆映射也是 R_l ，从而 $\{\text{Id}, R_l\}$ 构成了一个最简单的（只有两个元素的）群。类似地，根据习题 1 第 17 题里“空间中从一点到一个平面的垂线的存在唯一性”，可以定义空间里关于平面 α 的反射变换 R_α ，且它也满足以上性质。

命题 2.1.3. (线段的反射)

设 P, Q 关于直线 l （或平面 α ）的反射点为 P', Q' 。则

- (1) $PQ \equiv P'Q'$ 。
- (2) 在跟直线 l （或平面 α ）垂直的直线 PP' 上取一点 D ，使得 P 和 P' 都位于 D 点的同一侧。则 $\angle DPQ$ 与 $\angle DP'Q'$ 互补。



证明 分情况讨论。先设 P, Q 都不位于直线 l 上，且 P, Q 所在直线跟直线 l (或平面 α) 不垂直。

若 P, Q 位于直线 l (或平面 α) 的同一侧，则 $PP'Q'Q$ 是一个梯形，且点 D 位于底边 PP' 的延长线上。因为该梯形关于直线 l (或平面 α) 对称，它是一个等腰梯形，于是上面两个结论都成立。

若 P, Q 位于直线 l (或平面 α) 的异侧，则同样的论证说明 $PP'QQ'$ 是一个等腰梯形，且点 D 位于底边 PP' 的延长线上。因为 PQ 与 $P'Q'$ 是该等腰梯形的对角线，同样可知两个结论都成立。

最后，对于 P 或 Q 位于直线 l (或平面 α) 上的情况，以及 P, Q 所在直线跟直线 l (或平面 α) 垂直的情况，只要简单修改上述论证(此时梯形将会退化成三角形或者线段)即可。 \square

¶ 向量

给定 X 中任意两点 A, B ，存在唯一一条连接它们的线段 AB 。但是，线段仅仅包含了“长度”信息(在希尔伯特公理体系中，两条线段合同当且仅当它们在迁移下可重合，直观的理解就是它们的长度一样)。我们知道，不同的两点所确定的“方向”也是一个很重要的几何信息，而方向是由角度确定的：

定义 2.1.4. (方向)

设 $AB, A'B'$ 是两条线段。若它们满足以下条件之一：

- (1) $A = A'$: A, B, B' 共线，且 B, B' 在该直线上点 A 的同侧，
 - (2) $A \neq A'$: B, B' 都在直线 AA' 的同侧或都在直线 AA' 上，且在直线 AA' 上存在点 D ，使得 A, A' 在 D 的同侧，且 $\angle DAB = \angle DA'B'$ (此处允许零角或平角)，
- 则称 AB 与 $A'B'$ 方向相同。



当然，这里需要验证“方向相同”跟定义中 D 的选取无关(见习题 2 第 3 题)。我们用符号 \overrightarrow{AB} 表示带有方向的线段，即**向量**，称点 A 为向量 \overrightarrow{AB} 的**起点**，而称点 B 为 \overrightarrow{AB} 的**终点**。注意向量 \overrightarrow{AB} 的方向跟 A, B 两点的前后顺序有关。由定义，

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \iff \begin{cases} AB \equiv A'B', \\ AB \text{ 与 } A'B' \text{ 方向相同。} \end{cases}$$

下述引理是定义的直接推论：

引理 2.1.5

若 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ ，则 $B = B'$.



为了方便起见，我们允许向量的起点与终点是同一个点，即允许使用向量 \overrightarrow{AA} ：它的长度为零，且没有方向。注意对于任意 A, B ，总有 $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ ，也就是说，该向量与点 A 的选取无关。我们把它叫做**零向量**，并记为 $\vec{0}$ ，即

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA}.$$

¶ 平移变换

为了定义向量之间的运算，下面引入平移变换的概念：

定义 2.1.6. (平移变换)

设 $\tau : X \rightarrow X$ 是平面或者空间 X 到自身的映射。如果存在向量 \vec{v} 使得

$$\overrightarrow{P\tau(P)} = \vec{v}, \quad \forall P \in X,$$

则称 τ 是 X 上的一个平移变换，并称 \vec{v} 为该平移变换的平移向量。



定义中的条件可等价换成

引理 2.1.7

映射 $\tau : X \rightarrow X$ 是 X 上的平移变换当且仅当

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\tau(P)\tau(Q)}, \quad \forall P, Q \in X.$$



证明 根据定义，映射 $\tau : X \rightarrow X$ 是 X 上的平移变换当且仅当

$$\overrightarrow{P\tau(P)} = \overrightarrow{Q\tau(Q)}, \quad \forall P, Q \in X.$$

上式等价于 $PQ\tau(Q)\tau(P)$ 为平行四边形（当 Q 在直线 $P\tau(P)$ 上，则视之为“退化”的平行四边形），即

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\tau(P)\tau(Q)}, \quad \forall P, Q \in X.$$



平移变换跟反射变换有着密切的关系：

命题 2.1.8. (关于两个平行平面或直线的反射)

设 α_1, α_2 是空间 X 中的两个平行平面（或者 l_1, l_2 是平面 X 里两条平行直线），则

$$\tau := R_{\alpha_2} \circ R_{\alpha_1} \quad (\text{或者 } \tau := R_{l_2} \circ R_{l_1})$$

是 X 上的一个平移变换。



证明 对于任意 $P, Q \in X$ ，令 P', Q' 为 P, Q 关于 α_1 的反射点， $P'' = \tau(P), Q'' = \tau(Q)$ 为 P', Q' 关于 α_2 的反射点。因为 α_1 和 α_2 平行，所以 P, P', P'' 共线。在该直线上选取点 D 使得 P, P', P'' 位于点 D 的同一侧。两次运用命题 2.1.3，可得

$$PQ \equiv P''Q'', \quad \angle DPQ = \angle DP''Q'',$$

即 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P''Q''}$ 。于是由引理 2.1.7 知 τ 是一个平移变换。



特别地，存在非常多的平移变换：

定理 2.1.9. (特定平移变换的存在唯一性)

设 A, B 为 X 中任给（可以相同的）两点，则存在唯一的平移变换 $\tau : X \rightarrow X$ 使得

$$\tau(A) = B.$$



证明 先证存在性。若 $A = B$ ，则恒等变换即满足条件。

若 $A \neq B$ ，可利用反射构造所需的平移。令 M 为线段 AB 的中点。令 α_1, α_2 分别

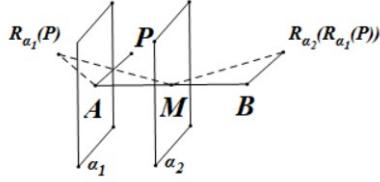


图 2.1: 两个反射

为和直线 AB 垂直相交于 A 和 M 的平面 (在二维情形, 则取跟直线 AB 垂直相交于 A 和 M 的直线, 下文做类似修改即可), 则 α_1 与 α_2 平行。令 $R_{\alpha_i}, i = 1, 2$ 为 X 中关于平面 α_i 的反射变换。复合映射 $\tau := R_{\alpha_2} \circ R_{\alpha_1}$ 即为所求:

- 由命题2.1.8, τ 是一个平移变换;
- $\tau(A) = R_{\alpha_2} \circ R_{\alpha_1}(A) = R_{\alpha_2}(R_{\alpha_1}(A)) = B$.

再证明唯一性。设 P 为空间任意一点, τ 是上述平移变换, 而 τ' 是另一将 A 映到 B 的平移变换, 则对于任意 $P \in X$,

$$\overrightarrow{P\tau'(P)} = \overrightarrow{A\tau'(A)} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{P\tau(P)}.$$

由引理2.1.5得 $\tau'(P) = \tau(P)$ 。由于是 P 任意点, 所以 $\tau' = \tau$. □

接下来证明两个平移变换的复合也是平移变换, 且平移变换的复合是可交换的:

定理 2.1.10. (平移的复合)

设 τ_1 和 τ_2 为 X 上的两个平移变换, 则 $\tau_2 \circ \tau_1$ 也是一个平移变换, 而且

$$\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_2$$



证明 首先证明两个平移的复合 $\tau_2 \circ \tau_1$ 也是平移。设 A, B 为空间中任意两点。记

$$A' = \tau_1(A), A'' = \tau_2(A'), A^* = \tau_2(A), B' = \tau_1(B), B'' = \tau_2(B'),$$

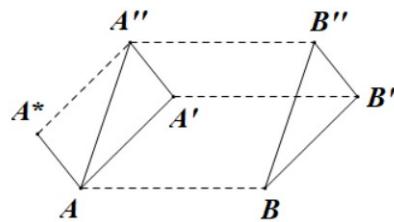


图 2.2: 平移的复合

由定义,

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}, \quad \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{B'B''}.$$

故 $ABB'B'$ 和 $A'B'B''A''$ 都是平行四边形, 从而 $ABB''A''$ 也是平行四边形, 即

$$\overrightarrow{A\tau_2 \circ \tau_1(A)} = \overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \overrightarrow{B\tau_2 \circ \tau_1(B)},$$

于是 $\tau_2 \circ \tau_1$ 是一个平移变换。

下证 $\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_2$ 。由定义, $\overrightarrow{AA^*} = \overrightarrow{A\tau_2(A)} = \overrightarrow{\tau_1(A)\tau_2 \circ \tau_1(A)} = \overrightarrow{A'A''}$, 故

$AA'A''A^*$ 为平行四边形, 从而

$$\overrightarrow{\tau_2(A)\tau_1 \circ \tau_2(A)} = \overrightarrow{A\tau_1(A)} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A^*A''} = \overrightarrow{\tau_2(A)\tau_2 \circ \tau_1(A)}.$$

于是由引理2.1.5及点 A 的任意性可知 $\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_2$ 。 \square

由定理2.1.9和定理2.1.10, 若 τ_1 是把 A 映为 B 的唯一平移变换, τ_2 是把 B 映为 A 的唯一平移变换, 则 $\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_2$ 是把 A 映为 A 的唯一平移变换, 即恒等变换。换而言之, τ_2 是 τ_1 在映射复合下的逆变换:

推论 2.1.11. (平移变换的逆变换)

若 τ_1 是把 A 映为 B 的平移变换, τ_2 是把 B 映为 A 的平移变换, 则 $\tau_2 = \tau_1^{-1}$ 。 

用群论的语言 (参见附录 A.2), 定理2.1.10和推论2.1.11说明平面或空间的所有平移变换的集合关于“映射复合运算”形成一个阿贝尔群 (见定义A.2.1)。

2.1.2 向量与向量空间

¶ 平移变换集合与向量集合

接下来将在向量组成的集合

$$\mathcal{V} = \{X \text{ 所有的向量 } \overrightarrow{AB}\}$$

与平移变换组成的集合

$$\mathcal{T} = \{X \text{ 上所有的平移变换 } \tau\}$$

之间建立双射, 从而可以把“平移变换之间的复合运算”(即上面所提到的阿贝尔群结构)移植到向量集合上, 建立向量之间的加法运算。

对于任意 $\tau \in \mathcal{T}$ 以及 $A \in X$, 我们令

$$\Phi(\tau) = \overrightarrow{A\tau(A)} \in \mathcal{V}.$$

注意由平移变换的定义, 对于任意 $B \in X$, 有 $\overrightarrow{A\tau(A)} = \overrightarrow{B\tau(B)}$, 故向量 $\Phi(\tau)$ 不依赖于点 A 的选取, 从而是良定的。

下面证明

定理 2.1.12. (向量集合 = 平移变换集合)

映射 $\Phi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{V}$ 是一个双射, 且满足

- (1) $\Phi(Id) = \overrightarrow{0}$, 其中 Id 为恒等映射;
- (2) 设 $\Phi(\tau) = \overrightarrow{AB}$, 则 $\Phi(\tau^{-1}) = \overrightarrow{BA}$. 

证明 先定义映射 $\Psi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}$ 如下: 对任意 $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}$, 令 $\Psi(\overrightarrow{AB})$ 为由定理2.1.9所确定的唯一满足 $\tau(A) = B$ 的平移变换 τ 。我们有

- $\Phi \circ \Psi = Id_{\mathcal{V}}$ (从而 Φ 为满射): 若 $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}$, 记 τ 为使得 $\tau(A) = B$ 的平移变换, 则

$$\Phi \circ \Psi(\overrightarrow{AB}) = \Phi(\tau) = \overrightarrow{A\tau(A)} = \overrightarrow{AB}.$$

- $\Psi \circ \Phi = Id_{\mathcal{T}}$ (从而 Φ 为单射): 若 $\tau \in \mathcal{T}$, 则对于任意 A , $\Psi \circ \Phi(\tau) = \Psi(\tau(A)) = \tau$.

于是映射 Φ 为双射，而 Ψ 为其逆映射。

最后，由定义，立刻可验证

- (1) $\Phi(\text{Id}) = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$;
- (2) 若 $\Phi(\tau) = \overrightarrow{AB}$ ，则 $\tau(A) = B$ ，即 $\tau^{-1}(B) = A$ ，从而 $\Phi(\tau^{-1}) = \overrightarrow{BA}$ 。

□

¶ 向量加法

下面把集合 \mathcal{T} 上的“映射复合运算”移植到集合 \mathcal{V} 上。为了符号简便起见，我们将把 \mathcal{V} 中的元素（即向量 \overrightarrow{AB} ）记为 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ 。

定义 2.1.13. (向量加法)

在 \mathcal{V} 上定义加法运算如下：

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v} := \Phi(\Psi(\vec{u}) \circ \Psi(\vec{v})).$$



注意由定理2.1.10，上述定义是有意义的，因为两个平移变换 $\Psi(\vec{u})$ 和 $\Psi(\vec{v})$ 的复合还是平移变换，从而被 Φ 映为一个向量。

由定义不难验证向量加法满足如下的三角形法则：

命题 2.1.14. (加法的三角形法则)

对任意向量 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{BC} ，有

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

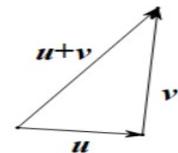


图 2.3: 三角形法则

证明 根据定义，

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \Phi(\Psi(\overrightarrow{BC}) \circ \Psi(\overrightarrow{AB})).$$

因为 $\Psi(\overrightarrow{AB})(A) = B, \Psi(\overrightarrow{BC})(B) = C$ ，所以

$$\Psi(\overrightarrow{BC}) \circ \Psi(\overrightarrow{AB})(A) = C.$$

于是 $\Phi(\Psi(\overrightarrow{BC}) \circ \Psi(\overrightarrow{AB})) = \overrightarrow{AC}$ 。

□

利用 Φ 和 Ψ ，可以把“映射复合”的特定性质移植到 \mathcal{V} 上：

- ① 从映射复合的结合律可得上述加法运算的结合律：

结合律 对任意 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ ，均有 $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ 。

- ② 恒等映射是映射复合运算的单位元，于是 $\overrightarrow{0}$ 也是加法运算的单位元：

单位元 对任意 $\vec{u} \in \mathcal{V}$ ，均有 $\vec{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \vec{u} = \vec{u}$ 。

- ③ 由注记2.1.11，对于 $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ，若令 $-\vec{u} = \overrightarrow{BA} \in \mathcal{V}$ ，则：

逆元存在 对任意 $\vec{u} \in \mathcal{V}$ ，均有 $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \overrightarrow{0}$ 。

- ④ 由定理2.1.10，平移变换的复合满足交换律，从而加法运算也满足交换律：

交换律 对任意 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ ，均有 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ 。

上述①，②，③说明 $(\mathcal{V}, +)$ 是一个群，而加上④则说明 $(\mathcal{V}, +)$ 是一个阿贝尔群。

这 4 条的证明类似于上述命题的证明。以②和④为例：

$$\vec{u} + \vec{0} = \Phi(\Psi(\vec{u}) \circ \Psi(\vec{0})) = \Phi(\Psi(\vec{u}) \circ \text{Id}) = \Phi(\Psi(\vec{u})) = \vec{u}.$$

以及

$$\vec{u} + \vec{v} = \Phi(\Psi(\vec{u}) \circ \Psi(\vec{v})) = \Phi(\Psi(\vec{v}) \circ \Psi(\vec{u})) = \vec{v} + \vec{u}.$$

¶ 向量的数乘

严格说来，我们只定义过线段长度是否相同（即合同），并可以衍生定义出“一条线段比另一条线段长”这样的概念（见习题 1 第 13 题），但并没有给线段长度赋以具体的数值。但是，即使不对向量赋以长度值，对于任意向量 \vec{u} ，利用相似三角形也可以很容易构作出“与 \vec{u} 同向且长度为 \vec{u} 的两倍”的向量。更进一步，还可以依次构造出 \vec{u} 的正整数倍或正有理数倍长度的向量。最后，利用完备性公理，可以证明（整个过程类似于下文定理2.2.4的证明）对于任意实数 $\lambda > 0$ ，存在与 \vec{u} 同向且长度为 \vec{u} 的 λ 倍的向量（习题 1 第 14 题）。

于是，通过研究相似三角形，可以在集合 \mathcal{V} 上引入一个新运算即数乘运算：

定义 2.1.15. (数乘)

对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及任意 $\vec{u} \in \mathcal{V}$ ，定义向量 $\lambda\vec{u}$ 如下：

$$\lambda\vec{u} = \begin{cases} \vec{0}, & \lambda = 0; \\ \text{跟向量 } \vec{u} \text{ 具有相同方向且长度为 } \vec{u} \text{ 的 } \lambda \text{ 倍的向量, } \lambda > 0; \\ (-\lambda)(-\vec{u}), & \lambda < 0. \end{cases}$$



由定义，当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{u}$ 为跟向量 $-\vec{u}$ 具有相同方向（也称“跟向量 \vec{u} 具有相反方向”）且长度为 \vec{u} 的 $-\lambda$ 倍的向量。

向量的数乘运算满足如下基本性质：

定理 2.1.16. (数乘的性质)

数乘运算

$$\mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad (\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda\vec{u}$$

满足

⑤ “数与数的乘法” 与 “数与向量的数乘” 这两种乘法运算是相容的：

乘法相容性 对任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathcal{V}$ ，均有 $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$ 。

⑥ 1 不仅是数与数的乘法的单位元，而且也是数乘的单位元：

数乘单位元 对任意 $\vec{u} \in \mathcal{V}$ ，均有 $1\vec{u} = \vec{u}$ 。

⑦ 数的加法对数乘有分配律：

第一分配律 对任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathcal{V}$ ，均有 $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$ 。

⑧ 向量加法对数乘也有分配律：

第二分配律 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ ，均有 $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ 。



证明 仅证明⑤和⑧的一部分，其余留作练习。

对于⑤, 可以按照 λ, μ 的正负性, 分 5 种情况讨论。这里仅讨论两种情形:

- 情形 1: $\lambda > 0, \mu > 0$ 。

此时 $\lambda\mu > 0$ 。于是由定义,

$$\begin{aligned}\lambda(\mu u) &= \lambda(\text{跟向量 } \vec{u} \text{ 具有相同方向且长度为 } \vec{u} \text{ 的 } \mu \text{ 倍的向量}) \\ &= \text{跟向量 } \vec{u} \text{ 具有相同方向且长度为 } \vec{u} \text{ 的 } \lambda\mu \text{ 倍的向量} \\ &= (\lambda\mu)\vec{u}.\end{aligned}$$

- 情形 2: $\lambda > 0, \mu < 0$ 。

此时 $\lambda\mu < 0$ 。于是由定义,

$$\lambda(\mu\vec{u}) = \lambda((- \mu)(-\vec{u})) = (-\lambda\mu)(-\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}.$$

剩下的三种情形

- 情形 3: $\lambda < 0, \mu > 0$;
- 情形 4: $\lambda < 0, \mu < 0$;
- 情形 5: $\lambda = 0$ 或 $\mu = 0$

的证明留作练习。

对于⑧, 我们同样分类讨论:

- 情形 1: $\lambda > 0$ 。

不妨设 $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{BC}$, 并记 $\lambda\vec{u} = \overrightarrow{AB'}$, $\lambda\vec{v} = \overrightarrow{B'C'}$, 如图所示。

由于

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \lambda = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}},$$

$\triangle ABC$ 相似于 $\triangle AB'C'$, 故有

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \lambda,$$

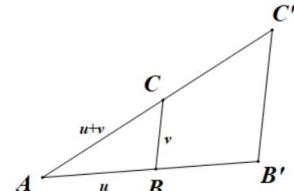


图 2.4: 相似三角形

即 $\overrightarrow{AC'} = \lambda \overrightarrow{AC}$, 从而结合命题 2.1.14 可得

$$\lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(\vec{u} + \vec{v}).$$

- 情形 2: $\lambda < 0$ 。

由定义及情形 1, 有

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = (-\lambda)((-\vec{u}) + (-\vec{v})) = (-\lambda)(-\vec{u}) + (-\lambda)(-\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}.$$

- 情形 3: $\lambda = 0$. 结论显然成立。

□

于是, 按照附录 A.3 的定义 A.3.1 可知, 在被赋予加法和数乘后, \mathcal{V} 是一个 (实) 向量空间。向量空间是现代数学中最基本的研究对象之一。

2.2 欧氏空间

2.2.1 向量的内积

¶ 范数与平行四边形法则

我们还可以赋予向量空间 \mathcal{V} 很多别的结构。例如，如果固定一个单位长度，则可以赋予每个向量一个长度，从而得到一个“向量长度函数”

$$|\cdot| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{v} \mapsto |\vec{v}|.$$

不难验证

命题 2.2.1. (范数的性质)

\mathcal{V} 上的函数 $|\cdot|$ 满足

- (1) (正定性) 对于任意 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 有 $|\vec{v}| \geq 0$; 且 $|\vec{v}| = 0 \iff \vec{v} = 0$;
- (2) (正齐次性) 对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 均有 $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}|$;
- (3) (三角不等式) 对于任意 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, 均有 $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.



于是根据定义 A.3.7, \mathcal{V} 上的“向量长度函数”是一个“范数”。

下面说明在 \mathcal{V} 上还有一个隐藏在范数结构背后的结构，即所谓的**内积结构**（参见定义 A.3.9），而该结构跟大家所熟悉的勾股定理密切相关。勾股定理可以用向量和范数的语言表述如下：

定理 2.2.2. (勾股定理)

若 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ 且 $\vec{u} \perp \vec{v}$, 则 $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.



从勾股定理出发，可以证明

定理 2.2.3. (平行四边形法则)

对于任意 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, 均有 $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$.



证明 把 \vec{v} 向 \vec{u} 所在直线上作垂直投影，得向量的“正交分解” $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ，其中 \vec{v}_2 与 \vec{u} 垂直， \vec{v}_1 与 \vec{u} 同向或反向，如图所示：

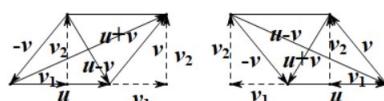


图 2.5: v 向 u 方向的正交分解

由勾股定理，

$$|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u} \pm \vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2,$$

故

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 &= |\vec{u} + \vec{v}_1|^2 + |\vec{u} - \vec{v}_1|^2 + 2|\vec{v}_2|^2 \\ &= 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}_1|^2 + 2|\vec{v}_2|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2. \end{aligned}$$

□

¶ 内积

当然，可以认为隐藏在平行四边形法则背后的是余弦定理，而后者恰好是跟向量之间的夹角相关的。于是，从平行四边形法则出发（即仅从满足特定条件的长度出发），有望得到角度的信息。为此，对于任意 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ ，受余弦定理启发，令

$$f(\vec{u}, \vec{v}) := \frac{1}{2}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2).$$

函数 f 被称为长度函数 $|\cdot|$ 的极化，它满足如下美妙的性质：

定理 2.2.4. (内积性质)

函数 $f : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

- (1) (正定性) 对任意 $\vec{u} \in \mathcal{V}$ ，均有 $f(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$ ；且 $f(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ；
- (2) (对称性) 对任意 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ ，均有 $f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$ ；
- (3) (双线性性) 对任意 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}, \lambda \in \mathbb{R}$ ，均有
 - (a) $f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$, $f(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{u}, \vec{w})$ ；
 - (b) $f(\lambda \vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{u}, \lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}, \vec{v})$ 。



证明 (1) 由定义可得（注意，该计算说明为什么定义中会有系数 $\frac{1}{2}$ ）

$$f(\vec{u}, \vec{u}) = \frac{1}{2}(|2\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}|^2) = |\vec{u}|^2,$$

故由命题2.2.1的正定性即得欲证。

(2) 由向量加法交换律即得

$$f(\vec{v}, \vec{u}) = \frac{1}{2}(|\vec{v} + \vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2) = \frac{1}{2}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2) = f(\vec{u}, \vec{v}).$$

(3a) 由对称性，只需证明二者之一即可。下面证明

$$f(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{u}, \vec{w}).$$

将 f 的定义代入上式并整理，要证的式子变成

$$|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 - |\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{v} + \vec{w}|^2 - |\vec{w} + \vec{u}|^2 + |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = 0.$$

为此，我们对以下 4 组向量分别应用平行四边形法则：

- 对 $\vec{u} + \vec{v}$ 和 \vec{w} 用： $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 + |\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}|^2 - 2|\vec{u} + \vec{v}|^2 - 2|\vec{w}|^2 = 0$ ；
- 对 $\vec{v} - \vec{w}$ 和 \vec{u} 用： $-|\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}|^2 - |\vec{v} - \vec{w} - \vec{u}|^2 + 2|\vec{v} - \vec{w}|^2 + 2|\vec{u}|^2 = 0$ ；
- 对 \vec{v} 和 $\vec{u} + \vec{w}$ 用： $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 + |\vec{v} - \vec{u} - \vec{w}|^2 - 2|\vec{v}|^2 - 2|\vec{u} + \vec{w}|^2 = 0$ ；
- 对 \vec{v} 和 \vec{w} 用： $-2|\vec{v} + \vec{w}|^2 - 2|\vec{v} - \vec{w}|^2 + 4|\vec{v}|^2 + 4|\vec{w}|^2 = 0$ 。

上述四个式子相加即得欲证。

(3b) 同样由对称性，只需证明二者之一即可。下面证明

$$f(\lambda \vec{u}, \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}, \vec{v}).$$

这个证明跟以前所学定理的证明有所不同：为了处理任意实数与向量的乘法，需要使用实数的完备性。我们将按照 λ 为自然数，整数，有理数，实数进行分级，一步一步证明。

【第一级】 λ 为正整数：若 $\lambda = 0$ 或 1 ，该式自动成立。若 $\lambda = k \in \mathbb{N}$ ，用归纳法证明：设命题对正整数 $k - 1$ 成立，则

$$\begin{aligned} f(k\vec{u}, \vec{v}) &= f(\vec{u} + (k-1)\vec{u}, \vec{v}) \stackrel{(3a)}{=} f(\vec{u}, \vec{v}) + f((k-1)\vec{u}, \vec{v}) \\ &\stackrel{\text{归纳假设}}{=} f(\vec{u}, \vec{v}) + (k-1)f(\vec{u}, \vec{v}) = kf(\vec{u}, \vec{v}). \end{aligned}$$

【第二级】 λ 为整数：只需考虑 $\lambda = k \in \mathbb{Z}_{<0}$ ，此时由

$$f(k\vec{u}, \vec{v}) + f(-k\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

即得欲证。

【第三级】 λ 为有理数：将 λ 写作 $\lambda = \frac{m}{n}$ ，其中 $(m, n) = 1$ 且 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 。由第二级，只需对 $\lambda = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 证明该结论即可。由第一级，有

$$nf\left(\frac{1}{n}\vec{u}, \vec{v}\right) = f\left(n\left(\frac{1}{n}\vec{u}\right), \vec{v}\right) = f\left(\left(n\frac{1}{n}\right)\vec{u}, \vec{v}\right) = f(\vec{u}, \vec{v}),$$

故有 $f\left(\frac{1}{n}\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{1}{n}f(\vec{u}, \vec{v})$ 。

【第四级】 λ 为实数：由欧多克索斯-阿基米德公理，对任意正整数 n ，存在整数 m 使得

$$\frac{m}{n} \leq \lambda < \frac{m+1}{n}$$

由 (3a) 以及第三级的结论，可得

$$\begin{aligned} &|f(\lambda\vec{u}, \vec{v}) - \lambda f(\vec{u}, \vec{v})| \\ &\stackrel{(3a)}{=} |f\left(\frac{m}{n}\vec{u}, \vec{v}\right) - \frac{m}{n}f(\vec{u}, \vec{v}) + f\left((\lambda - \frac{m}{n})\vec{u}, \vec{v}\right) - (\lambda - \frac{m}{n})f(\vec{u}, \vec{v})| \\ &\stackrel{\text{第三级}}{=} |f\left((\lambda - \frac{m}{n})\vec{u}, \vec{v}\right) - (\lambda - \frac{m}{n})f(\vec{u}, \vec{v})| \\ &\leq |f\left((\lambda - \frac{m}{n})\vec{u}, \vec{v}\right)| + |\lambda - \frac{m}{n}| |f(\vec{u}, \vec{v})| \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left| |(\lambda - \frac{m}{n})\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{v}|^2 - |(\lambda - \frac{m}{n})\vec{u}|^2 \right| \right\} + (\lambda - \frac{m}{n}) |f(\vec{u}, \vec{v})| \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{2} \left| |(\lambda - \frac{m}{n})\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{v}|^2 \right|}_{I} + \frac{1}{2n^2} |\vec{u}|^2 + \frac{1}{n} |f(\vec{u}, \vec{v})|. \end{aligned}$$

另一方面，由三角不等式易证（习题 2 第 5 题 (b) 问）

$$||\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{v}|^2| \leq 3|\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|, \quad \forall \vec{u}, \vec{v}.$$

于是上式的第 I 项

$$I \leq 3 \frac{1}{n^2} |\vec{u}|^2 + \frac{2}{n} |\vec{u}| |\vec{v}|.$$

从而对于任意固定的 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ ，

$$|f(\lambda\vec{u}, \vec{v}) - \lambda f(\vec{u}, \vec{v})| \leq \frac{2}{n^2} |\vec{u}|^2 + \frac{1}{n} |\vec{u}| |\vec{v}| + \frac{1}{n} |f(\vec{u}, \vec{v})|.$$

于是对于任意 $\varepsilon > 0$ ，通过选取充分大的 n ，就有

$$|f(\lambda\vec{u}, \vec{v}) - \lambda f(\vec{u}, \vec{v})| < \varepsilon.$$

这说明 $f(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}, \vec{v})$ 。

□

按照定义 A.3.9，函数 f 是 \mathcal{V} 上的一个内积（也称作点积或者数量积）。一般把两个向量 \vec{u}

和 \vec{v} 的内积记为 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 或 (\vec{u}, \vec{v}) 或 $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ 。于是从 \mathcal{V} 上的 (满足平行四边形法则的) 范数结构出发, 可以得到 \mathcal{V} 上的一个内积结构, 且二者满足

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2).$$

这个式子常被称为**极化恒等式**。

注 2.2.5. 对于抽象的向量空间而言, 内积结构强于范数结构:

(1) 若 (\cdot, \cdot) 是任意抽象向量空间 V 上的一个内积, 可以验证

$$|\vec{u}| := \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$$

是 V 上的一个范数 (见附录 A.3 练习 1), 被称为该内积的**诱导范数**。于是有内积结构必有范数结构。

(2) 反之, 抽象向量空间 V 上的范数不一定是由它上面的某个内积所诱导的 (见习题 2 第 6 题)。事实上, 仔细阅读和分析上面对定理 2.2.4 所给出的几何证明, 可得如下结论: 若抽象向量空间上的范数满足平行四边形法则, 则一定存在内积诱导出该范数。

¶ 内积的几何含义

内积结构的重要性在于它给出了角度的信息。对于 \mathcal{V} 中任意两个向量, 可以通过平移变换, 使得它们起点相同, 从而得到它们的夹角, 且该夹角的大小不依赖于起点的选择。为方便起见, 规定零向量 $\vec{0}$ 跟任意向量的夹角为 $\pi/2$, 即零向量跟任意向量**垂直** (也称**正交**)。注意勾股定理对于零向量依然成立。回忆一下中学阶段的余弦定理,

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC| \cos \angle BAC.$$

利用内积与长度的关系 (即极化恒等式), 可以把余弦定理翻译成

定理 2.2.6. (余弦定理)

设 \vec{u}, \vec{v} 夹角为 θ , 则有 $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$.



作为推论, 我们得到

命题 2.2.7. (内积与角度)

设 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, 则有

- (1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 当且仅当 $\vec{u} \perp \vec{v}$ 。
- (2) 若 $|\vec{v}| = 1$, 则 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 的绝对值等于 \vec{u} 向 \vec{v} 方向所作投影向量的长度, 且当二者夹角小于 $\pi/2$ 时 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 为正, 当夹角大于 $\pi/2$ 时 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 为负。



证明 (1) 设 $\vec{u} \perp \vec{v}$, 由余弦定理得 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 。反之, 若 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, 则由余弦定理, 要么 $\vec{u} = \vec{0}$ 或 $\vec{v} = \vec{0}$, 要么 $\cos \theta = 0$, 即 $\theta = \pi/2$ 。于是总有 $\vec{u} \perp \vec{v}$ 。

(2) 设 $|\vec{v}| = 1$, 则 $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cos \theta$ 。但由余弦的几何意义, \vec{u} 在 \vec{v} 方向的投影向量的长度为 $|\vec{u}| |\cos \theta|$, 于是结论成立。□

若 $|\vec{v}| = 1$, 称 \vec{v} 为一个**方向向量**, 并称 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 为 \vec{u} 往 \vec{v} 所作投影的**有向长度**。对于任意非零向量 \vec{v} , $\text{dir}(\vec{v}) := \vec{v}/|\vec{v}|$ 就是 \vec{v} 方向的方向向量。

总而言之，内积可被视为是勾股定理外化而成的结构，它不仅蕴含了向量的长度信息，还蕴含了向量间夹角的信息。

2.2.2 欧氏空间

¶ 单位正交基与坐标映射

按照定义A.3.10，被赋予了内积结构的向量空间叫做欧氏空间。于是，我们仅用几何就构建出了欧氏空间 \mathcal{V} 。所得到的欧氏空间 \mathcal{V} 可以是二维的或者三维的，取决于起始对象是平面平移（面向量）还是空间平移（空间向量）。几何方法的优点之一在于其“对称性”：在前面所有处理过程中，除了零向量 $\vec{0}$ ，所有别的向量都是“平等”的，即没有一个向量比别的向量更特殊。

打破对称往往是从外部理解几何的开始。本节通过引入特定的方向向量并赋予它们特殊地位（即建立直角坐标系），将向量空间 \mathcal{V} 中的元素及相关的运算（加法、数乘、内积）代数化。这可被视为是毕达哥拉斯学派“万物皆数”理念的某种体现。

为了行文的便利，下面取定 \mathcal{V} 为空间向量的集合。

定义 2.2.8. (单位正交基)

若 \mathcal{V} 中的三个向量 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 满足

- (1) $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 均为单位向量： $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$ ，
- (2) $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 两两垂直： $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y, \vec{e}_y \perp \vec{e}_z, \vec{e}_x \perp \vec{e}_z$ ，

则称 $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ 为 \mathcal{V} 的一组单位正交基。



单位正交基的存在性是显然的：任给一个单位向量，在跟它垂直的平面内任取两个互相垂直的单位向量，这三个向量就构成一组单位正交基。显然，单位正交基并不唯一。

固定单位正交基，就可以在空间 \mathcal{V} 中的向量和实数三元组之间建立一一对应：

命题 2.2.9. (坐标映射)

在空间中取定一组单位正交基 $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ，记

$$x(\vec{v}) := \vec{v} \cdot \vec{e}_x, \quad y(\vec{v}) := \vec{v} \cdot \vec{e}_y, \quad z(\vec{v}) := \vec{v} \cdot \vec{e}_z$$

分别为 \vec{v} 向 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 的投影的“有向长度”。则

$$\vec{v} = x(\vec{v})\vec{e}_x + y(\vec{v})\vec{e}_y + z(\vec{v})\vec{e}_z,$$

且映射

$$c : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3], \quad \vec{v} \longmapsto c(\vec{v}) = (x(\vec{v}), y(\vec{v}), z(\vec{v}))$$

是一个双射。



证明 对于任意 $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ ，分别记 P 向 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 的投影为 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ ，则

$$\overrightarrow{OA} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_x)\vec{e}_x, \quad \overrightarrow{OB} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_y)\vec{e}_y, \quad \overrightarrow{OC} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z.$$

分别记 P 向平面 OBC, OAC, OAB 的投影点为 D, E, F ，则 $OAFB - CEPD$ 为长方

体, 且 OP 为它的一条对角线。于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},\end{aligned}$$

即 $\vec{v} = x(\vec{v})\vec{e}_x + y(\vec{v})\vec{e}_y + z(\vec{v})\vec{e}_z$.

由此立刻可得 c 是单射: 若 $c(\vec{v}) = c(\vec{u})$, 则

$$\vec{v} = x(\vec{v})\vec{e}_x + y(\vec{v})\vec{e}_y + z(\vec{v})\vec{e}_z = x(\vec{u})\vec{e}_x + y(\vec{u})\vec{e}_y + z(\vec{u})\vec{e}_z = \vec{u}.$$

最后, c 是满射: 给定任意有序数组 (x_0, y_0, z_0) , 令

$$\vec{v} = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z,$$

则 $\vec{v} \in \mathcal{V}$ 且 $c(\vec{v}) = (x_0, y_0, z_0)$. □

命题中的 $x(\vec{v}), y(\vec{v}), z(\vec{v})$ 分别被称为向量 v 的 \vec{e}_x -坐标, \vec{e}_y -坐标以及 \vec{e}_z -坐标。

作为推论, 我们有如下的“空间勾股定理”:

定理 2.2.10. (空间勾股定理)

对于任意单位正交基 $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, 以及任意 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 有

$$|\vec{v}|^2 = x(\vec{v})^2 + y(\vec{v})^2 + z(\vec{v})^2,$$

其中 $x(\vec{v}), y(\vec{v}), z(\vec{v})$ 分别为向量 \vec{v} 的 \vec{e}_x -坐标, \vec{e}_y -坐标以及 \vec{e}_z -坐标。

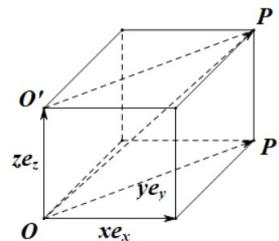


图 2.6: 空间勾股定理

¶ 三维欧氏空间 \mathbb{E}^3

跟本章第一节类似, 利用双射 c , 可以把 \mathcal{V} 上的向量加法、数乘与内积结构都移植到 \mathbb{R}^3 上。例如, 对于 $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$, 利用映射 c 诱导的“结构搬迁”, 我们不妨定义

$$\begin{aligned}(x, y, z) + (x', y', z') &:= c(c^{-1}(x, y, z) + c^{-1}(x', y', z')), \\ \lambda(x, y, z) &:= c(\lambda c^{-1}(x, y, z)), \\ (x, y, z) \cdot (x', y', z') &:= c^{-1}(x, y, z) \cdot c^{-1}(x', y', z').\end{aligned}$$

但是, 上述三个式子不便于使用。因此, 需要把右端计算出来:

命题 2.2.11. (结构搬迁的结果)

对于 $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

- (1) $c(c^{-1}(x, y, z) + c^{-1}(x', y', z')) = (x + x', y + y', z + z')$,
- (2) $c(\lambda c^{-1}(x, y, z)) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$,
- (3) $c^{-1}(x, y, z) \cdot c^{-1}(x', y', z') = xx' + yy' + zz'$.



证明 (1) 若 $c^{-1}(x, y, z) = \vec{u}, c^{-1}(x', y', z') = \vec{v}$, 则

$$\vec{u} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad \vec{v} = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$$

从而

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{e}_x + (y + y')\vec{e}_y + (z + z')\vec{e}_z,$$

即

$$c(c^{-1}(x, y, z) + c^{-1}(x', y', z')) = c(\vec{u} + \vec{v}) = (x + x', y + y', z + z').$$

(2) 若 $c^{-1}(x, y, z) = \vec{u}$, 则 $\lambda\vec{u} = \lambda x\vec{e}_x + \lambda y\vec{e}_y + \lambda z\vec{e}_z$, 从而

$$c(\lambda c^{-1}(x, y, z)) = c(\lambda\vec{u}) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

(3) 若 $c^{-1}(x, y, z) = \vec{u}, c^{-1}(x', y', z') = \vec{v}$, 则

$$\begin{aligned} c^{-1}(x, y, z) \cdot c^{-1}(x', y', z') &= (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \cdot (x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z) \\ &= xx' + yy' + zz'. \end{aligned}$$

□

因为最终的计算公式都是简单的数的计算, 所以不妨跳过“几何意义”, 直接定义

定义 2.2.12. (\mathbb{R}^3 上的加法与数乘)

对 $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们定义

$$(x, y, z) + (x', y', z') := (x + x', y + y', z + z')$$

$$\lambda(x, y, z) := (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$



定义 2.2.13. (\mathbb{R}^3 上的内积)

对 $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, 定义

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') := x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$$



不难验证:

- 赋予由定义2.2.12给出的加法与数乘后, \mathbb{R}^3 是一个向量空间(即满足定义A.3.1)。
- 在向量空间 \mathbb{R}^3 上, 由定义2.2.13所给出的乘积满足内积的三条性质(见定义A.3.9)。

我们称赋予了上述加法、数乘、内积的空间 \mathbb{R}^3 为三维欧氏空间, 并记为 \mathbb{E}^3 .

¶ n 维欧氏空间 \mathbb{E}^n

从 $n = 3$ 时的代数公式受启发, 对任意自然数 $n \geq 1$, 我们可以在

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

上面定义

- (1) 加法: $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n);$
- (2) 数乘: $\lambda(x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n);$
- (3) 内积: $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$

可以验证

命题 2.2.14. (\mathbb{E}^n 的结构)

- (1) 集合 \mathbb{R}^n 上赋予加法后成为一个阿贝尔群。
- (2) 集合 \mathbb{R}^n 上赋予加法与数乘后成为一个 (n 维) 向量空间。
- (3) 向量空间 \mathbb{R}^n 上的内积满足内积的定义，从而成为一个 (n 维) 欧氏空间。

\mathbb{R}^n 上赋予了上述加法、数乘、内积后所得的 n 维欧氏空间被记为 \mathbb{E}^n 。



我们称

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

为 \mathbb{E}^n 的标准正交基，称

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$$

为向量 \vec{x} 关于标准正交基的坐标分解。

注意到

$$x_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}_1, \dots, x_n = \vec{x} \cdot \vec{e}_n,$$

从而 \vec{x} 关于标准正交基的坐标分解可以被写成

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + \dots + (\vec{x} \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n = \sum_{i=1}^n (\vec{x} \cdot \vec{e}_i)\vec{e}_i.$$

2.3 \mathbb{E}^3 上的外积

对我们而言， \mathbb{E}^3 是最重要也最特殊的欧氏空间，不仅仅因为我们生活的空间是三维的，而且还因为在 \mathbb{E}^3 上除了加法、数乘、内积（以及范数）结构之外，还有一个在数学和物理中都非常重要的结构：外积。外积跟我们所学过的所有运算都有所不同：它不是可交换的，而是反交换的。

2.3.1 \mathbb{E}^3 上的外积

¶ 右手螺旋法则

因为外积的反交换性，定义和计算外积时所涉及到的向量的顺序是很重要的。因此，在引入外积之前，首先引入右手螺旋法则的概念：

定义 2.3.1. (右手螺旋法则)

设 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 为空间中三个不共面的向量，则 \vec{w} 在 \vec{u}, \vec{v} 所决定的平面的某侧。如果这三个向量满足

右手螺旋测试：以右手握拳，手指在 \vec{u}, \vec{v} 所决定的平面里弯曲，大拇指朝外 \vec{w} 所在的那侧，则手指弯曲的方向就是从 \vec{u} 到 \vec{v} 的方向，

则称有序向量组 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ 满足右手螺旋法则。



满足右手螺旋法则的坐标系叫做右手系：

定义 2.3.2. (右手系)

在空间上取定一点 O 作为坐标系原点。设 $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ 是 \mathbb{E}^3 的一组单位正交基。如果它们满足右手螺旋法则，则称坐标系 $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ 为右手系。



右手系的一个等价刻画是

从 \vec{e}_z 轴的正向看向原点， \vec{e}_x 沿逆时针方向转 $\frac{\pi}{2}$ 到 \vec{e}_y 。

我们还可以把 $\vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y$ 依次序替换为 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 或 $\vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_x$ 。

规定右手系的核心在于用它指定了坐标轴基向量的一种正排序，因此我们也称右手系给出了三维欧氏空间的一个正定向。类似地，对于平面坐标系 $(O; e_x, e_y)$ ，如果从 e_x 沿逆时针方向转 $\frac{\pi}{2}$ 得到 e_y ，则我们称该坐标系给出了平面的一个正定向。

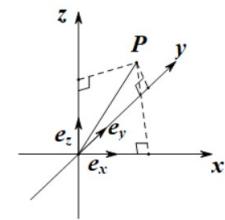


图 2.7: 右手系

¶ 外积的定义

下面定义三维空间中两个向量的外积：

定义 2.3.3. (外积)

对于任意 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}^3$ ，定义它们的外积(也称作叉积或向量积) $\vec{u} \times \vec{v}$ 为满足以下条件的唯一向量：

- (1) $|\vec{u} \times \vec{v}|$ 等于以 \vec{u}, \vec{v} 为边的平行四边形的面积；
- (2) 其方向与 \vec{u}, \vec{v} 所在平面垂直，且使得 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ 满足右手螺旋法则。

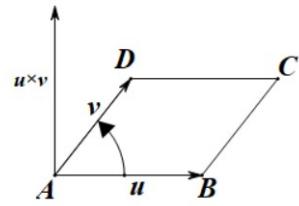


图 2.8: 外积

注 2.3.4. 若 \vec{u}, \vec{v} 平行，或者 \vec{u}, \vec{v} 之一为零向量 $\vec{0}$ ，则由定义中的 (1) 可知 $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ ，从而此时并不需要用定义中的 (2) 来指定方向。

例 2.3.5. 由定义可知：若 $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ 是一个右手系，则

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y.$$

特别地，外积运算不满足结合律：

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x, \quad \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{e}_x \times \vec{0} = \vec{0}.$$

下述定理给出外积的基本性质：

定理 2.3.6. (外积的基本性质)

\mathbb{E}^3 上的外积运算 \times 满足

- (1) (反对称性) 对任意 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}^3$ ，均有 $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$ 。
- (2) (双线性性) 对任意 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{E}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ，均有
 - (a) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$, $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$;
 - (b) $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$ 。



证明 (1), (2b) 由定义即得。

(2a) 的几何证明较为复杂, 我们将它留作习题(分 4 问, 见习题 2 第 14 题)。 \square

注 2.3.7. 由反对称性, 对任意 $\vec{u} \in \mathbb{E}^3$, 均有 $\vec{u} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{u}$, 即

$$\vec{u} \times \vec{u} = 0.$$

反之, 若一个“乘积运算” $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \times \vec{v}$ 满足

(1') (弱反对称性) 对任意 $\vec{u} \in \mathbb{E}^3$, 均有 $\vec{u} \times \vec{u} = 0$ 。

和 (2) 即双线性性, 则反对称性 (1) 一定成立:

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} + \vec{v} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} \\ &\implies \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}. \end{aligned}$$

于是, 在假设双线性性的前提下, (1) 与 (1') 是等价的。

警告: 譬如 $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$ 之类的式子是没有意义的, 因为没有指定外积的计算顺序: 一定要指明是 $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ 还是 $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ (一般而言这两种顺序所算出的向量甚至连方向都不一样)。

¶ 外积的几个恒等式

设 \vec{u}, \vec{v} 为 \mathbb{E}^3 中的向量。根据定义, 若 \vec{u}, \vec{v} 的夹角为 θ , 则

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta.$$

结合余弦定理 $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$, 可得如下的

命题 2.3.8. (拉格朗日恒等式)

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$



另一个非常有用的恒等式是

命题 2.3.9. (BAC-CAB 恒等式)

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}.$$



该恒等式的证明将被留作习题(见习题 2 第 15 题)。注意该式可被改写为

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

这是它被称为 BAC-CAB(谐音 back-cab “后面的出租车”, 便于记忆) 恒等式的原因。由此可得

命题 2.3.10. (雅可比恒等式)

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}.$$



证明 由 BAC-CAB 恒等式以及内积的对称性得

$$\begin{aligned} &\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) \\ &= (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} + (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{u}) \vec{v} - (\vec{w} \cdot \vec{v}) \vec{u} = \vec{0}. \end{aligned}$$

\square

注 2.3.11. 若向量空间上的某个乘法结构满足反对称性、双线性和雅可比恒等式, 则称之为一个李代数结构。它是现代数学和物理中的一个非常常见的重要结构。

¶ 外积的坐标公式

接下来用向量的坐标给出外积的计算公式。取定右手系 $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, 并记

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z, \quad \vec{v} = x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z,$$

则由例2.3.5, 反对称性以及 $\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$ 可得

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z) \times (x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z) \\ &= x_1 y_2 \vec{e}_x \times \vec{e}_y + x_1 z_2 \vec{e}_x \times \vec{e}_z + y_1 x_2 \vec{e}_y \times \vec{e}_x + y_1 z_2 \vec{e}_y \times \vec{e}_z + z_1 x_2 \vec{e}_z \times \vec{e}_x + z_1 y_2 \vec{e}_z \times \vec{e}_y \\ &= (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{e}_x \times \vec{e}_y + (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{e}_x \times \vec{e}_z + (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{e}_y \times \vec{e}_z \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{e}_x + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{e}_y + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

特别地, 通过取 $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ 为标准正交基, 就有

命题 2.3.12. (外积的坐标公式)

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$



更好地记忆和理解上述公式, 下面引入行列式的记号。对任意 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 记

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

并称之为二阶行列式。则

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

二阶行列式具有非常明确的几何意义: 考虑平面向量 $\vec{u} = (a, b), \vec{v} = (c, d)$ 。以原点为一个顶点, 以 \vec{u}, \vec{v} 为边, 张成一个平行四边形。则由拉格朗日恒等式, 该平行四边形的面积为

$$\begin{aligned} \text{面积} &= |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \\ &= |ad - bc|. \end{aligned}$$

换而言之, 以平面向量 $\vec{u} = (a, b), \vec{v} = (c, d)$ 为行的二阶矩阵, 其行列式的绝对值等于以 \vec{u} 和 \vec{v} 为邻边的平行四边形的面积。当然, 行列式本身的值可能是负数, 但这并不是什么坏事: 若从 \vec{u} 到 \vec{v} 是正定向 (即从 \vec{u} 沿着夹角转到 \vec{v} 是逆时针方向), 则该行列式的值为正; 若从 \vec{u} 到 \vec{v} 是负定向, 则该行列式的值为负 (见习题 2 第 17 题)。所以行列式的正负性表征了用这两个向量表示该平行四边形时的“定向”。因此我们引入

定义 2.3.13. (平行四边形的有向面积)

称该行列式的值 $ad - bc$ 为由有序向量组 $\vec{u} = (a, b)$ 和 $\vec{v} = (c, d)$ 张成的 (定向) 平行四边形的有向面积。



注意, “由有序向量组 $\vec{u} = (a, b)$ 和 $\vec{v} = (c, d)$ 张成的 (定向) 平行四边形”与“由有序向量组 $\vec{v} = (c, d)$ 和 $\vec{u} = (a, b)$ 张成的 (定向) 平行四边形”虽然在几何上看上去是一样的,

但因为向量排序不同，所得的“定向”是相反的，从而它们的有向面积相差一个负号。

¶ 平行六面体的有向面积

还可以进一步计算由有序空间向量组

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (x_1, y_1, z_1), \\ \vec{v} &= (x_2, y_2, z_2), \\ \vec{w} &= (x_3, y_3, z_3)\end{aligned}$$

张成的(定向)平行六面体的体积。为此，我们记 $\vec{u} \times \vec{v}$ 与 \vec{w} 的夹角为 θ ，则

$$\text{体积} = \underbrace{|\vec{u} \times \vec{v}|}_{\text{底面面积}} \cdot \underbrace{||\vec{w}| \cdot \cos \theta|}_{\text{高}} = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|.$$

我们把

$$V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) := (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

称作 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 的**混合积**。上述计算说明，三个空间向量的混合积的绝对值就是以它们为邻边的平行六面体的体积。同样地，该混合积的符号表征了“用这三个向量(所组成的有序向量组)表示该平行六面体的‘定向’”，因此可以自然定义

定义 2.3.14. (平行六面体的有向体积)

称混合积 $V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ 为由有序向量组 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 张成的(定向)平行六面体的**有向体积**。



注 2.3.15. 在立体几何中，并不强调体积的“方向”。但在一些后续的数学与物理课程中(如电磁学中的高斯定律)，有向体积是必不可少的概念。

¶ 三阶行列式

跟二维情形类似，该定向体积可以被写成行列式的形式：

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

利用内积与外积的坐标公式进行计算，可得该行列式的值：

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2) \cdot (x_3, y_3, z_3) \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3.\end{aligned}$$

于是，三阶行列式的计算公式为：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3.$$

由此可知三个向量循环换序后不改变定向，即 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ 的定向跟 $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ 以及 $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ 的定向一致：

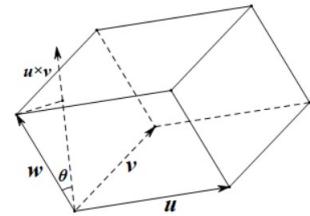


图 2.9：平行六面体

命题 2.3.16. (混合积的循环不变性)

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v}.$$



把上述行列式的公式整理一下，就可以建立三阶行列式与二阶行列式的联系：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} &= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(x_2z_3 - x_3z_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2) \\ &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

把上述公式跟外积的计算公式

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{e}_2 \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

对比一下，还可以得到用“三阶行列式”表达的外积计算公式：

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

其中跟之前不一样的是，第一行的元素都是向量！

我们把三阶行列式的基本性质列举如下：

定理 2.3.17. (行列式的基本性质)

函数

$$\det : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \mapsto \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

满足如下性质：

- (1) (归一化) $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$.
- (2) (反交换性) $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\det(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$.
- (3) (三重线性性) $\det(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w})$,
 $\det(\vec{u}, \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}) + \mu \det(\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w})$,
 $\det(\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1) + \mu \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2)$.



证明 (1) 由定义即得。

(2) 是命题**2.3.16**以及外积反交换性的直接推论。

(3) 是内积、外积双线性性的直接推论。 □

这些性质可被推广到 n 维欧氏空间：满足类似于上述条件 (1), (2), (3) 的函数

$$\det : \underbrace{\mathbb{E}^n \times \cdots \times \mathbb{E}^n}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

被称作 n 阶行列式。跟二维、三维类似，它的值是“ n 维平行 $2n$ 面体”的有向体积。有关行列式的最基本理论，特别是它与矩阵计算的关系，可参见附录 A.4.

2.3.2 应用：球面几何初步

作为向量理论的应用，下面将证明球面上的正弦定理与余弦定理。我们知道，二维球面是三维欧氏空间中最简单也最对称的曲面。为了简单起见，取球面的中心为原点、半径为 1，即仅考虑

$$S^2 = \{v \in \mathbb{E}^3 \mid |v| = 1\}.$$

对于其它半径的球面，以下诸结论作一个简单的伸缩即可（习题 2 第 22 题）。

¶ 球面上的线与角

首先定义球面上的“直线”。当然，球面上的线都不是直的。什么样的线可以被认为是“直线”呢？我们需要回到欧氏空间中直线的特征，即我们熟知的“两点之间直线最短”。在将来的微分几何课程中将会证明，给定球面上的任意两点，从一点到另一点的所有路径中，沿着大圆的道路是最短的（这就是从北京到纽约的飞机并不是飞跃太平洋而是从北极上空经过的原因）。因为这样的最短线并不“直”，所以给它取一个别的名字：

定义 2.3.18. (测地线)

称球面上的大圆（即过球心的平面与球面的交线）为球面上的测地线。



显然，球面上的任意两条完整的测地线均相交于球面上对径的两个点。

因为球面就落在三维欧氏空间里，可以借用欧氏几何定义球面上两条测地线的夹角：

定义 2.3.19. (球面上的角)

称球面上两条测地线所在平面形成的二面角为这两条测地线在交点处的夹角。



可以验证，该角也等于这两个大圆在球面上该交点处的切线（均落在球面在该点处的切平面内）的夹角。

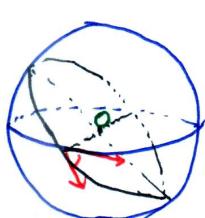


图 2.10：球面的角

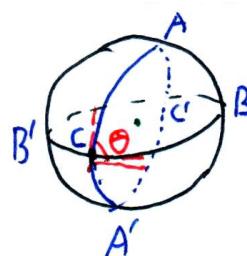


图 2.11：球面二三角形

受天文学的推动，自古希腊以来（例如托勒密、阿基米德、梅涅劳斯（Menelaus，约公元 70 年-140 年），人们就孜孜不倦地研究球面几何学。事实上，梅涅劳斯最早意识到球面上的大圆是对应于欧氏空间中直线的对象。

¶ 球面多边形的面积

球面上的一个重要研究对象是球面多边形。类比于欧氏空间的定义，**球面多边形**指的是球面上由多条**测地线段**（即大圆的劣弧）所围成的区域。当然，因为球面是封闭的，需要指定哪一侧是“围成的区域”：除非上下文指定，一般总是指小于半球的区域。

平面上边数最少的多边形是三角形。跟平面几何不同的是，球面上还存在边数更少的多边形，即**球面二角形**，也叫做**球面新月形**。例如，图2.11中由大圆弧 CAC' 和 CBC' 所围成的小于半球的区域就是一个球面二角形。当然，球面二角形的两条边都是球面上大圆的半圆。

阿基米德曾发现了一个非常美妙的性质（传说阿基米德是如此喜欢这个结果，以至于他让人把这个结果刻在他的墓碑上）：

球与它的外接圆柱的体积之比以及表面积之比均为 3 比 2。

特别地，从圆柱的表面积公式可得

定理 2.3.20. (阿基米德定理)

单位球面的面积为 4π 。



由此可得

命题 2.3.21. (球面二角形的面积)

夹角为 θ 的球面二角形的面积为 2θ 。



证明 若存在正整数 n 使得 $\theta = 2\pi/n$ ，则 n 个同样的球面二角形恰好铺满整个球面。于是该球面二角形的面积为

$$\text{面积} = \frac{4\pi}{n} = 2\frac{2\pi}{n} = 2\theta.$$

若存在正整数 n 和 m 使得 $\theta = 2m\pi/n$ ，则它恰由 m 个上述球面二角形组成，于是该球面二角形的面积为

$$\text{面积} = m\frac{4\pi}{n} = 2\frac{2m\pi}{n} = 2\theta.$$

对于一般的 θ ，通过夹挤原理逼近，即取两个收敛于 θ 的数列 $\frac{2m_k\pi}{n_k}$, $\frac{2m'_k\pi}{n'_k}$ ，使得

$$\frac{2m_k\pi}{n_k} \leq \theta \leq \frac{2m'_k\pi}{n'_k},$$

则有

$$2\frac{2m_k\pi}{n_k} \leq \text{面积} \leq 2\frac{2m'_k\pi}{n'_k},$$

从而夹角为 θ 的球面二角形的 面积 = 2θ 。 □

还可以进一步计算球面三角形的面积。根据定义，球面三角形的边都是大圆的劣弧。跟平面几何类似，对于球面三角形 ABC ，我们记顶点 A, B, C 处的角为 $\angle A, \angle B, \angle C$ ，并记它们所对的边为 a, b, c 。下述定理最早由荷兰数学家吉拉尔 (Girard, 公元 1595 年-1632 年) 证明：

定理 2.3.22. (吉拉尔定理)

球面三角形 ABC 的面积为 $\angle A + \angle B + \angle C - \pi$.



证明 分别记 A, B, C 的对径点为 A', B', C' 。

由命题2.3.21, 我们得到

$$\begin{aligned}\text{Area}(\triangle ABC) + \text{Area}(\triangle A'BC) &= 2\angle A, \\ \text{Area}(\triangle ABC) + \text{Area}(\triangle AB'C) &= 2\angle B, \\ \text{Area}(\triangle ABC) + \text{Area}(\triangle ABC') &= 2\angle C.\end{aligned}$$

对径的三角形面积相等, 所以

$$\text{Area}(\triangle ABC') = \text{Area}(\triangle A'B'C).$$

最后, 因为球面的面积是 4π , 故

$$\text{Area}(\triangle ABC) + \text{Area}(\triangle A'BC) + \text{Area}(\triangle AB'C) + \text{Area}(\triangle A'B'C) = 2\pi.$$

联立上面五个式子可得

$$2\text{Area}(\triangle ABC) + 2\pi = 2\angle A + 2\angle B + 2\angle C.$$

于是命题得证。 □

观察上述球面二角形与三角形的面积公式, 不难猜出下述

命题 2.3.23. (球面多边形的面积)

设球面 n 边形 P 的角分别为 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 则它的面积是

$$\text{Area}(P) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi.$$



证明 固定一个顶点, 将它与所有顶点用测地线段相连, 可将该球面 n 边形剖分成 $n-2$ 个球面三角形。于是由吉拉尔定理得到欲证的结论。 □

在本书最后一章, 我们将用该公式证明欧拉的凸多面体公式。

注 2.3.24. 吉拉尔定理 (以及球面多边形面积公式) 是微分几何中著名的高斯-博内-陈定理的特例。

¶ 球面正弦定理与余弦定理

因为球面是具有旋转不变性的几何对象, 而向量的运算也具有旋转不变性, 所以向量是研究球面几何学的重要工具。下面用向量法证明球面正弦定理与球面余弦定理。

对于单位球上的球面三角形 $\triangle ABC$, 根据定义有

$$a = \angle BOC, \quad \angle A = \text{半平面 } AOC \text{ 与半平面 } AOB \text{ 之间的夹角},$$

$$b = \angle COA, \quad \angle B = \text{半平面 } BOC \text{ 与半平面 } BOA \text{ 之间的夹角},$$

$$c = \angle AOB, \quad \angle C = \text{半平面 } COA \text{ 与半平面 } COB \text{ 之间的夹角}.$$

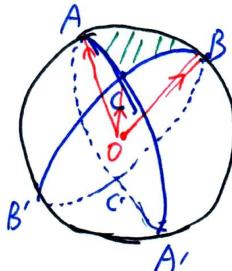


图 2.12: 球面三角形

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \cos \angle AOB = \cos c, \quad |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sin \angle AOB = \sin c, \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= \cos \angle BOC = \cos a, \quad |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| = \sin \angle BOC = \sin a, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= \cos \angle AOC = \cos b, \quad |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}| = \sin \angle AOC = \sin b.\end{aligned}$$

于是由混合积的轮换对称性以及 BAC-CAB 恒等式，可得（这是习题 2 第 21 题 (a) 的特例）

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) &= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot ((\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA})\overrightarrow{OB}) \\ &= (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\end{aligned}$$

因为 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$ 的夹角等于半平面 AOB 与 AOC 之间的夹角（即 $\angle A$ ），所以

$$\sin b \sin c \cos \angle A = \cos a - \cos b \cos c.$$

这就证明了球面三角形的余弦定理（另外两个公式同理可得），

定理 2.3.25. (球面三角形余弦定理)

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \angle A, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \angle B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \angle C.\end{aligned}$$



类似地，由 BAC-CAB 恒等式以及混合积的轮换对称性，可得

$$(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) = ((\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC})\overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}))\overrightarrow{OA}.$$

两边同取长度，得

$$\sin c \sin b \sin \angle A = |\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC})|$$

这就证明了球面三角形正弦定理（另外两个公式同理可得），其形式与平面三角形正弦定理类似：

定理 2.3.26. (球面三角形正弦定理)

$$\frac{\sin \angle A}{\sin a} = \frac{\sin \angle B}{\sin b} = \frac{\sin \angle C}{\sin c} = \frac{|\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC})|}{\sin a \sin b \sin c}.$$



在证明过程中，可以发现 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}$ 这三个向量对于研究球面三角形 ABC 很重要。若记这三个向量所对应的单位向量为 $\overrightarrow{OC'}$, $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$ （从而 A', B', C' 都在球面上），则 \overrightarrow{OA} 等恰好也是 $\overrightarrow{OB'} \times \overrightarrow{OC'}$ 等对应的单位向量。球面三角形 $A'B'C'$ 被称为球面三角形 ABC 的对偶三角形。

若记球面三角形 $A'B'C'$ 的边为 a', b', c' ，则（注意 $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$ 反向）

$$a' = \angle B'OC' = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} \text{ 与 } \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \text{ 的夹角} = \pi - \angle A.$$

类似可以证明其它 5 个关系（注意三角形 ABC 也是三角形 $A'B'C'$ 的对偶）。于是

命题 2.3.27. (球面对偶三角形)

设球面三角形 $A'B'C'$ 是球面三角形 ABC 的对偶，则

$$a' + \angle A = b' + \angle B = c' + \angle C = a + \angle A' = b + \angle B' = c + \angle C' = \pi.$$

特别地，如果对球面三角形 $A'B'C'$ 应用余弦定理，并用上述关系把三角形 $A'B'C'$ 的边、角转化为三角形 ABC 的边与角，可得

定理 2.3.28. (球面三角形余弦定理, 对偶版本)

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \angle a,$$

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos \angle b,$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos \angle c.$$



由此不难证明两个球面三角形全等当且仅当三条边对应相等 (SSS)，也当且仅当三个角对应相等 (AAA)(由球面三角形面积公式，角度确定的球面三角形，其面积是确定的。注意球面三角形没有相似的概念。)。

¶ 球面几何与希尔伯特公理体系

下面从希尔伯特公理的角度，简要剖析球面几何与平面几何的区别。为了分析球面几何满足平面希尔伯特公理的哪几条，首先需要在球面几何中指定点、线、关联、介于、合同等概念：

称 S^2 中的点为 **S -点**。称 S^2 中的大圆即测地线为 **S -直线**。

“关联”关系由集合的“属于”所确定。对于关联公理，只需验证平面公理即公理 (I.1)-(I.3)：

- 因为任何两条 S -直线都有两个公共点，希尔伯特公理 (I.2) 不成立，
- 不难看出希尔伯特公理 (I.1) 以及 (I.3) 依然成立。

为了让尽可能多的顺序公理成立，需要合理地定义“ S -介于”的概念：

定义 2.3.29. (球面几何中的“介于”)

设 A, B, C 是球面上三个点。若存在包含 A, B, C 但严格小于半圆的大圆弧，使得在该圆弧上 B 按通常意义介于 A 与 C ，则我们称 B 是 S 介于 A 与 C 之间的。



注意，根据这个定义，如果 A, C 是球面上的一组对径点，则球面上任意点都不位于 A, C 之间。由此可以得到 S -线段的定义：

S -线段 AC 即 S -介于 A, C 之间的点的全体。

对于顺序公理，我们有

- 取 A, C 为对径点，即可知道希尔伯特公理 (II.2) 不成立，
- 不难看出希尔伯特公理 (II.1) 以及 (II.3) 依然成立。
- 可以证明希尔伯特公理 (II.4) 即帕施公理对球面几何依然成立。

接下来借用欧氏几何中相应的概念定义球面上 S -线段与 S -角的合同。因为 S -角就是欧氏几何中的角，我们不必另外定义 S -角的合同。对于 S -线段，可以定义

定义 2.3.30. (S -线段的合同)

设 AB 和 CD 是球面上的两条 S -线段，且 \mathbb{E}^3 连接 A 与 B 的弦（即 \mathbb{E}^3 中的线段 AB ）与 \mathbb{E}^3 连接 C 与 D 的弦在 \mathbb{E}^3 中合同，则称 S -线段 AB 和 S -线段 CD 合同。



令人惊奇的是，对于合同公理（当然，公理的陈述需要做少许修改。例如对于公理 (III.1)，需要把“设 A, B 是一直线 a 上的两点”改成“设 AB 是一条 S -线段”），可以验证：

- 所有希尔伯特公理 (III.1)-(III.5) 都依然成立。

作为推论，对于球面三角形，依然可以用 (SAS), (SSS), (ASA) 作为全等判据。但是，

(1) (AAS) 不是球面三角形的全等判据（在平面时可用该判据，是因为平面三角形内角和恒为 2π ）。读者不难找出反例。

(2) 球面三角形有一个新的全等判据：(AAA) 判据。

最后，因为球面几何中不存在 S -平行线（任何两条 S -直线都相交），也不存在向无穷远延伸的 S -射线，所以不必考虑平行公理 (IV) 以及阿基米德公理 (V.1)。当然，直线完备性公理 (V.2) 也无从谈起。

2.4 作为希尔伯特公理体系模型的 \mathbb{E}^3

在集合 \mathbb{R}^3 上，可以完全忘记它的几何背景，用代数运算定义出具有向量加法、数乘、内积、外积结构的三维欧氏空间 \mathbb{E}^3 ：

$$\begin{aligned}(x, y, z) + (x', y', z') &:= (x + x', y + y', z + z'), \\ \lambda(x, y, z) &:= (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \\ (x, y, z) \cdot (x', y', z') &:= x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z', \\ (x, y, z) \times (x', y', z') &:= (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx').\end{aligned}$$

下面验证 \mathbb{E}^3 满足所有的希尔伯特公理。

¶ 指定“点、线、面”与“关联、介于、合同”

首先，需要指定 \mathbb{E}^3 这个模型中的本源对象即点、线、面：

- 显然，可以把 \mathbb{E}^3 中的每个元素 (x, y, z) 都叫做 \mathbb{E}^3 中的一个“点”。
- 给定 \mathbb{E}^3 中的任意元素 (x_1, y_1, z_1) 和任意非零元素 (x_2, y_2, z_2) （可以相同），称

$$l := \{(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{E}^3$$

为 \mathbb{E}^3 中的一条“直线”。注意：给定 (x_1, y_1, z_1) 和非零元素 (x_2, y_2, z_2) ，可以建立从 l 到 \mathbb{R} 中一个一一对应，即把 l 中的元素 $(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2)$ 与 \mathbb{R} 中的元素 t 对应起来。

- 类似地，给定 \mathbb{E}^3 中任意元素 (x_1, y_1, z_1) ，以及满足 $(x_2, y_2, z_2) \times (x_3, y_3, z_3) \neq 0$ 的

任意元素 (x_2, y_2, z_2) 和 (x_3, y_3, z_3) , 称

$$\alpha := \{(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2) + s(x_3, y_3, z_3) \mid t, s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{E}^3$$

为 \mathbb{E}^3 中的一个“平面”。

注意这三个定义暗含了“维数”与“参数个数”的关系：点是0维的，其定义中没有参数；直线是1维的，其定义中有一个参数；平面是2维的，其定义中有两个参数。

接下来指定三个本源关系：

- 因为点、线、面都是集合 \mathbb{E}^3 的子集（或元素），“关联”关系就是集合包含关系。
- 为了定义同一直线上三点的“介于”关系，我们将 l 与 \mathbb{R} 等同起来，并用 \mathbb{R} 上的序关系定义 l 上的序关系：

定义 2.4.1. (介于)

若三个不同的元素 A, B, C 均位于直线 $l = \{(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 上，且 A, B, C 所对应的参数 t_A, t_B, t_C 满足

t_B 介于 t_A 与 t_C 之间（即要么 $t_A < t_B < t_C$ ，要么 $t_C < t_B < t_A$ ），

则称点 B 介于点 A 与点 C 之间。 

注意同一条直线可能有不同的表现形式，例如

$$\{(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, y_1, z_1) + t(3x_2, 3y_2, 3z_2) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

故我们需要验证上述“介于”的概念不依赖于同一直线不同表现形式的选取。

命题 2.4.2. (“介于”是良定的)

“介于”的概念不依赖于同一直线不同表现形式的选取。 

证明 设

$$\{(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x'_1, y'_1, z'_1) + t(x'_2, y'_2, z'_2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

是同一直线 l 的不同表现形式，其中由定义， $(x_2, y_2, z_2) \neq 0, (x'_2, y'_2, z'_2) \neq 0$ 。因为 A, B, C 是三个不同的点，它们在这两个表现形式中对应于两组两两不同的参数 t_A, t_B, t_C 和 t'_A, t'_B, t'_C 。于是

$$(x_1, y_1, z_1) + t_A(x_2, y_2, z_2) = (x'_1, y'_1, z'_1) + t'_A(x'_2, y'_2, z'_2),$$

$$(x_1, y_1, z_1) + t_B(x_2, y_2, z_2) = (x'_1, y'_1, z'_1) + t'_B(x'_2, y'_2, z'_2),$$

$$(x_1, y_1, z_1) + t_C(x_2, y_2, z_2) = (x'_1, y'_1, z'_1) + t'_C(x'_2, y'_2, z'_2).$$

两两相减可得

$$(t_B - t_A)(x_2, y_2, z_2) = (t'_B - t'_A)(x'_2, y'_2, z'_2),$$

$$(t_C - t_B)(x_2, y_2, z_2) = (t'_C - t'_B)(x'_2, y'_2, z'_2),$$

从而

$$\frac{t'_B - t'_A}{t_B - t_A}(x'_2, y'_2, z'_2) = \frac{t'_C - t'_B}{t_C - t_B}(x'_2, y'_2, z'_2).$$

因为 $(x'_2, y'_2, z'_2) \neq 0$, 所以

$$\frac{t'_B - t'_A}{t'_C - t'_B} = \frac{t_B - t_A}{t_C - t_B},$$

即 “ t_B 位于 t_A 与 t_C 之间” 当且仅当 “ t'_B 位于 t'_A 与 t'_C 之间”。 \square

- 最后我们给出“合同”的概念。合同表达的是长度和角度的度量相等关系，而长度和角度跟内积结构密切相关：例如利用 \mathbb{E}^3 的内积结构，线段 AB 的长度是

$$|AB| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}},$$

而角度则可由余弦定理给出。于是我们定义

定义 2.4.3. (合同)

(1) 设 AB 和 $A'B'$ 是两条线段。若它们长度相同，即 $|AB| = |A'B'|$ ，则我们称 AB 和 $A'B'$ 是合同的。

(2) 设 $\angle CAB$ 和 $\angle C'A'B'$ 是两个角，如果

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|AB||AC|} = \frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}}{|A'B'||A'C'|},$$

则我们称角 $\angle CAB$ 和 $\angle C'A'B'$ 是合同的。



¶ \mathbb{E}^3 满足关联公理

界定了本源概念和本源关系后，下面开始验证诸公理。首先验证关联公理。

命题 2.4.4. (两点确定唯一直线)

给定任意不同的两点 $A(x_A, y_A, z_A)$ 和 $B(x_B, y_B, z_B)$ ，有唯一直线 l 通过这两点。



证明 存在性：由假设， $v := (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \neq 0$ 。记 $u = (x_A, y_A, z_A)$ ，则

$$l := \{u + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$

是一条包含 A 和 B 的直线（它们对应的参数为 $t_A = 0, t_B = 1$ ）。

为了证明唯一性，设 $l' = \{u' + tv' \mid u' \in \mathbb{R}\}$ 是另一条过 A 和 B 的直线。于是，存在 t'_A, t'_B 使得

$$u = u' + t'_A v', \quad u + v = u' + t'_B v'.$$

由此可得

$$\begin{cases} u = u' + t'_A v', \\ v = (t'_B - t'_A)v', \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} u' = u - \frac{t'_A}{t'_B - t'_A}v, \\ v' = \frac{1}{t'_B - t'_A}v. \end{cases}$$

于是对于任意 $t \in \mathbb{R}$,

$$u + tv = u' + (t'_A + t(t'_B - t'_A))v' \in l',$$

$$u' + tv' = u + \frac{t - t'_A}{t'_B - t'_A}v \in l,$$

即 $l \subset l'$ 且 $l' \subset l$ 。故 l 和 l' 是同一条直线，从而唯一性得证。 \square

命题 2.4.4 蕴含了关联公理 (I.1) 和 (I.2)。公理 (I.3) 是显然的。为了证明公理 (I.4)

以及 (I.5)，我们只需证明

命题 2.4.5. (三点确定唯一平面)

对于任意不共线三个点 $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ 和 $C(x_C, y_C, z_C)$, 存在唯一的平面 α 通过这三个点。



证明 存在性依然是显然的：只需取

$$\alpha = \{u + tv + sw \mid t, s \in \mathbb{R}\},$$

其中 $u = (x_A, y_A, z_A)$, $v = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, $w = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$ 。注意由 A, B, C 不共线可知 (v, w) 是不平行的非零向量，从而 $v \times w \neq 0$ 。

为了证明唯一性，依然假设还有另一个平面

$$\alpha' = \{u' + tv' + sw' \mid t, s \in \mathbb{R}\},$$

通过 A, B, C 三点，即存在实数 $t'_A, s'_A, t'_B, s'_B, t'_C, s'_C$ 使得

$$u = u' + t'_A v' + s'_A w',$$

$$u + v = u' + t'_B v' + s'_B w',$$

$$u + w = u' + t'_C v' + s'_C w'.$$

由此可以解出

$$u = u' + t'_A v' + s'_A w',$$

$$v = (t'_B - t'_A)v' + (s'_B - s'_A)w',$$

$$w = (t'_C - t'_A)v' + (s'_C - s'_A)w'.$$

以及

$$\begin{aligned} u' &= u + \frac{t'_A s'_C - s'_A t'_C}{D} v + \frac{s'_A t'_B - s'_B t'_A}{D} w, \\ v' &= \frac{s'_C - s'_A}{D} v - \frac{s'_B - s'_A}{D} w, \\ w' &= -\frac{t'_C - t'_A}{D} v + \frac{t'_B - t'_A}{D} w, \end{aligned}$$

其中 $D = (t'_B - t'_A)(s'_C - s'_A) - (s'_B - s'_A)(t'_C - t'_A)$ 。于是 $\alpha \subset \alpha'$ 且 $\alpha' \subset \alpha$ ，即 $\alpha = \alpha'$ ，从而唯一性得证。 \square

事实上我们也已经证明了公理 (I.6)：由命题 2.4.4 的证明，过 A, B 的直线中任意一点必可被写成

$$A + t(B - A)$$

的形式。另一方面，若一个平面 $\alpha = \{u + tv + sw \mid t, s \in \mathbb{R}\}$ 过 A, B ，即

$$A = u + t_A v + s_A w, \quad B = u + t_B v + s_B w,$$

则对于任意 t ,

$$A + t(B - A) = u + (t_A + t(t_B - t_A))v + (s_A + t(s_B - s_A))w \in \alpha.$$

最后，公理 (I.8) 是比较显然的，而公理 (I.7) 的验证将被留作习题。

¶ \mathbb{E}^3 满足顺序公理

根据“介于”的定义，顺序公理 (II.1), (II.2), (II.3) 可被归结为实数域 \mathbb{R} 上的序结构，其证明是比较容易的。下面给出验证公理 (II.4)(即帕施公理) 的证明思路

命题 2.4.6. (验证帕施公理)

\mathbb{E}^3 满足帕施公理。



证明 设 A, B, C 是不共线的三点， l 是 A, B, C 所在平面内不过 A, B, C 的一条直线。设 l 过线段 AB 中的某个点，需要证明 l 过线段 BC 或线段 AC 中的某个点。证明分成两步：

第一步：证明该结论对于 \mathbb{E}^2 中的一种特殊构型成立，即

在 \mathbb{E}^2 中考虑 $A_1(0, 0), B_1(1, 0), C_1(0, 1)$ 。若 \mathbb{E}^2 中不过 A_1, B_1, C_1 的直线 l 通过某个点 $(a, 0)$ ，其中 $0 < a < 1$ ，则它必与线段 A_1C_1 或 B_1C_1 相交。

该结论不难用平面解析几何证明，故留作习题。

第二步：把一般情形化归为上述特殊情形。

设 α 是过 A, B, C 的平面，则由命题 2.4.5 的证明，

$$\alpha = \{A + t(B - A) + s(C - A) \mid t, s \in \mathbb{R}\}.$$

定义映射

$$\Phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \alpha, \quad (t, s) \mapsto A + t(B - A) + s(C - A).$$

可以验证 Φ 满足以下的性质 (习题 2 第 29 题)

- (i) Φ 是双射，
- (ii) Φ 把 \mathbb{E}^2 中的直线映射成平面 α 上的直线，且反之亦然 (即 Φ^{-1} 把平面 α 上的直线映为 \mathbb{E}^2 中的直线)，
- (iii) Φ 把 \mathbb{E}^2 中线段 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 映为平面 α 中的 AB, BC, CA 。

于是，由 (ii)， $\Phi^{-1}(l)$ 是 \mathbb{E}^2 中的一条过线段 A_1B_1 中某点的直线。由第一步的结论， $\Phi^{-1}(l)$ 必然与线段 A_1C_1 或 B_1C_1 相交。再用映射 Φ 的性质，可知 l 必然与线段 AC 或 BC 相交。□

用本书后面将要引入的术语，映射 Φ 事实上建立了平面 \mathbb{E}^2 与平面 α 之间的一个“仿射对应”。这个证明的第二步其实是证明帕施公理的仿射不变性，从而只要把结论化归到仿射变换下最简单的情形予以证明即可，而这正是证明的第一步所做的事。

¶ \mathbb{E}^3 满足合同公理

为了验证合同公理，首先需要给出“直线 l 上某点 A 的一侧”的刻画。为此，只要在 l 上任取不同于点 A 的一个点，记之为点 B 。则 l 可表示成

$$l = \{A + t(B - A) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

此时，可以证明 (习题)

引理 2.4.7. (直线上点的两侧的刻画)

直线 l 上点 A 的两侧分别为“使得 $t > 0$ 的点”和“使得 $t < 0$ 的点”。 \diamond

由此出发，不难验证合同公理 (III.1) 和公理 (III.3)，而公理 (III.2) 由线段合同的定义即得。

为了验证合同公理 (III.4)，同样需要给出“平面 α 上某直线 l 的一侧”的刻画。为此，可取不同的两点 $A, B \in l$ ，并取平面 α 上不在 l 上的某点 C 。则 α 可表示成

$$\alpha = \{A + t(B - A) + s(C - A) \mid t, s \in \mathbb{R}\}.$$

注意由 A, B, C 的选取， A, B, C 不共线，从而 $(B - A) \times (C - A) \neq 0$ 。此时可以证明

引理 2.4.8. (直线上点的两侧的刻画)

平面 α 上直线 l 的两侧分别为“使得 $s > 0$ 的点”和“使得 $s < 0$ 的点”。 \diamond

下面验证有关角迁移的合同公理：

命题 2.4.9. (验证角的迁移)

\mathbb{E}^3 满足合同公理 (III.4)。 \spadesuit

证明 根据角的合同的定义，仅需证明

给定 α 中的直线 l 以及 l 上满足 $|AB| = 1$ 的两点 A, B 。则对于任意 $|x| \leq 1$ ，在 l 的任意指定的一侧，存在点 C 使得 $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|AC|} = x$ 。

为此，首先在 l 的指定侧取点 D ，则可以把 α 的该侧表示为

$$\alpha_+ = \{A + t(B - A) + s(D - A) \mid t \in \mathbb{R}, s > 0\}.$$

先说明欲证的结论对 $x = 0$ 成立，即存在 $E \in \alpha_+$ 使得 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ 。也就是说，需要找到 $t \in \mathbb{R}$ 以及 $s > 0$ ，使得

$$(t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

为此，只要取 $s = 1$ 以及 $t = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ 即可。

接着考虑 $x \neq 0$ 。因为点 E 也在 α_+ 内，故可以把 α_+ 写做

$$\alpha_+ = \{A + t(B - A) + s(E - A) \mid t \in \mathbb{R}, s > 0\}.$$

为了找到所求的点 C ，只要试试形如 $C = A + x(B - A) + s(E - A)$ 的点，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |AC|x$ 当且仅当

$$x = x\sqrt{x^2 + s^2|AE|^2},$$

而该方程显然有唯一正根 $s = \sqrt{\frac{1-x^2}{|AE|^2}} > 0$ 。

最后，“角的合同”的传递性是定义的直接推论。而为了证明公理陈述中的唯一性，根据模型 \mathbb{E}^3 中角的合同的定义、传递性以及“侧”的刻画，只需证明若存在 $t' \in \mathbb{R}$ 以及 $s' > 0$ 使得 $C' = A + t'(B - A) + s'(E - A)$ 满足

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}}{|AB||AC'|} = x,$$

则 C' 在射线 AC 上。上述方程等价于

$$t = x\sqrt{t^2 + (s')^2|AE|^2}.$$

注意若 $x = 0$, 则 $t = 0$, 从而由垂线的唯一性(在该模型中可以直接验证)可得欲证的结论。若 $x \neq 0$, 由方程可知即 t, x 同号, 且

$$\frac{1}{|x|} = \sqrt{1 + \frac{(s')^2}{t^2}|AE|^2}.$$

对前述关于 s 的方程做同样处理可得

$$\frac{1}{|x|} = \sqrt{1 + \frac{(s)^2}{x^2}|AE|^2}.$$

对比一下我们得到

$$\frac{s}{|x|} = \frac{s'}{|t|}.$$

于是 $s/x = s'/t$ 。这说明

$$C = A + x[(B - A) + \frac{s}{x}(E - A)], \quad C' = A + t[(B - A) + \frac{s}{x}(E - A)],$$

从而由 t, x 同号可知 C' 确实在射线 AC 上。 \square

还需验证最后一个关于角与线段迁移的关系, 即三角形的合同公理:

命题 2.4.10. (验证三角形的合同公理)

\mathbb{E}^3 满足合同公理 (III.5)。



证明 假设 $AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ 。需要验证 $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, 即证

$$\frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|BC||BA|} = \frac{\overrightarrow{B'C'} \cdot \overrightarrow{B'A'}}{|B'C'||B'A'|}.$$

根据条件以及线段合同的定义,

$$|AB| = |A'B'|, \quad |AC| = |A'C'|, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}.$$

于是

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= (\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'}) \cdot (\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'}) = |B'C'|^2 \end{aligned}$$

且

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{B'A'} \cdot (\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'}) = \overrightarrow{B'A'} \cdot \overrightarrow{B'C'},$$

从而命题得证。 \square

¶ \mathbb{E}^3 满足平行公理与连续公理

因为我们把任意直线跟 \mathbb{R} 保结构地恒等起来, 连续性公理 (V.1) 以及 (V.2) 事实上是实数域 \mathbb{R} 的相应性质的推论, 因此我们此处从略。¹

¹需要指出的是, 这些公理都不是天然成立的: 确实可以构造出满足其他公理但不满足 (V.1) 或 (V.2) 的几何体系。

最后，我们证明

命题 2.4.11

\mathbb{E}^3 满足平行公理 (IV.1)。



证明 证明思路类似于命题2.4.6，因此只给出概要。

设 l 为任一直线， A 是 l 之外任意一点。在 l 中取两点 B, C ，则平面

$$\alpha = \{B + t(C - B) + s(A - B) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

是一个包含 l 和 A 的唯一平面。跟命题2.4.6的证明类似，可取双射 $\Phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \alpha$ 使得

- 直线（或线段）被映成直线（或线段），且反之亦然；
- 点 $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ 分别被映成 B, C 与 A 三点。

于是问题转化成：

平面 \mathbb{E}^2 中至多存在一条过 $(0, 1)$ 且平行于 x -轴（即直线 $y = 0$ ）的直线。

后者的证明是显然的：

$$\{(0, 1) + t(a, b) \mid t \in \mathbb{R}\} \cap \{(x, y) \mid y = 0\} = \emptyset \iff b = 0,$$

而 $b = 0$ 时，对任意 $a \neq 0$ ， $\{(0, 1) + t(a, b) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 均给出同一条直线。 \square

习题 2

1. [反射与旋转]

设 X 是平面, $O \in X$ 。若映射 $\mathcal{R}_O : X \rightarrow X$ 满足

- \mathcal{R}_O 保持点 O 不变, 即 $R(O) = O$,
- \mathcal{R}_O 保持点长度不变, 即对任意 $P, Q \in X$, 均有 $|PQ| = |\mathcal{R}_O(P)\mathcal{R}_O(Q)|$,
- \mathcal{R}_O 不是反射,

则称 \mathcal{R}_O 是一个**旋转变换**, 并称 O 为其**旋转中心**。求证:

- (a). 若 l, m 是两条直线, 且 $l \cap m = O$, 则反射变换的复合 $R_m \circ R_l$ 是一个以 O 为旋转中心的旋转变换。
- (b). 旋转变换 \mathcal{R}_O 的逆映射 \mathcal{R}_O^{-1} 也是一个以 O 为旋转中心的旋转变换。
- (c). 给定任意满足 $|OP| = |OQ|$ 的三个点 O, P, Q , 存在唯一以 O 为旋转中心的旋转变换 \mathcal{R}_O 使得 $\mathcal{R}(P) = Q$ 。
- (d). 两个具有相同旋转中心的旋转变换 R_O 与 R'_O 的复合映射依然一个以 O 为旋转中心的旋转变换。
- (e). (*) 两个具有不同旋转中心的旋转变换 R_{O_1} 与 R_{O_2} 的复合映射要么是个旋转变换, 要么是平移变换。

2. [反射的复合]

证明下列命题:

- (a). 证明反射变换一定不是平移变换。
- (b). 证明: 若两个反射变换的复合是平移变换, 则它们的反射轴(或者反射平面)平行。
- (c). 三个反射的复合有可能是平移或旋转吗?

3. [方向的基本性质]

- (a). 求证“方向相同”是良定的, 即该概念跟定义2.1.4中 D 点的选取无关。
- (b). 求证: 若 \overrightarrow{AB} 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 方向相同, 则 $\overrightarrow{A'B'}$ 与 \overrightarrow{AB} 方向相同。
- (c). 求证: 若 \overrightarrow{AB} 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 方向相同, $\overrightarrow{A'B'}$ 与 $\overrightarrow{A''B''}$ 方向相同, 则 \overrightarrow{AB} 与 $\overrightarrow{A''B''}$ 方向相同。

4. [对称性与可加性蕴含平行四边形法则]

设 V 是一个向量空间, 且函数 $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对称性

$$f(u, v) = f(v, u), \quad \forall u, v \in V$$

以及可加性

$$f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w), \quad \forall u, v, w \in V.$$

求证: 以下平行四边形法则成立

$$f(u + v, u + v) + f(u - v, u - v) = 2f(u, u) + 2f(v, v).$$

5. [范数的性质]

- (a). 证明命题2.2.1.
- (b). 证明范数(参见定义A.3.7)满足如下不等式: $|||u + v|||^2 - ||v|||^2| \leq 3||u||^2 + 2||u||\|v\|$.

(c). 设 $\|\cdot\|$ 是向量空间 V 上的一个范数。对于任意 $u, v \in V$, 定义

$$d(u, v) := \|u - v\|.$$

证明：函数 d 是一个距离函数（见定义??）。

(d). 在 \mathbb{R} 上定义 $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ 。证明：它是一个距离函数，但不存在 \mathbb{R} 上的范数 $\|\cdot\|$ 使得 $d(x, y) = \|x - y\|$.

6. [不由内积诱导的范数]

在 \mathbb{R}^2 上定义 $|(x, y)|_1 := |x| + |y|$ 。

(a). 证明 $|\cdot|_1$ 是范数。

(b). 证明不存在内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ 使得 $\langle u, u \rangle_1 = |u|_1^2$.

7. [\mathbb{R}^3 上另一个内积]

在 \mathbb{R}^3 上定义函数二元 f 如下：对于 $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3)$, 令

$$f(u, v) := x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

(a). 验证 f 是 \mathbb{R}^3 (赋以通常的向量空间结构) 上的一个内积。

(b). 在该内积下, 向量 $(1, 0, 1)$ 的长度是多少?

(c). 在该内积下, 向量 $(1, 0, 1)$ 与 $(1, 0, 0)$ 的夹角是多少?

(d). 在该内积下, 写出所有跟向量 $(1, 0, 1)$ 垂直的向量。

8. [加法、数乘与内积的代数验证]

验证 \mathbb{E}^3 的结构：

(a). 赋予由定义2.2.12给出的加法与数乘后, \mathbb{R}^3 是一个向量空间。

(b). 在向量空间 \mathbb{R}^3 上, 由定义2.2.13所给出的乘积满足内积的三条性质。

9. [向量计算：长度、角度与内积]

已知 $\vec{a} = (3, 1, 4)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$, $\vec{c} = (-1, 2, -1)$, 对下面的各组 (\vec{x}, \vec{y}) , 求 $\vec{x} \cdot \vec{y}$, $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ 和 $\angle(\vec{x}, \vec{y})$ (即 \vec{x}, \vec{y} 的夹角):

(a). $\vec{x} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{b} + \vec{c}$;

(b). $\vec{x} = 4\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{y} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.

10. [闵可夫斯基问题]

(a). 设 $A_1A_2 \cdots A_n$ 是平面凸 n 边形。令 v_i 为跟第 i 条边 A_iA_{i+1} (默认 $A_{n+1} = A_1$) 垂直指向多边形外部、且长度等于 $|A_iA_{i+1}|$ 的向量。求证： $v_1 + \cdots + v_n = 0$.

(b). 设 P 是空间凸多面体, 并记其面为 P_1, \dots, P_n 。令 v_i 为跟第 i 个面 P_i 垂直 (指向多面体外部)、且长度等于 P_i 的面积的向量。求证： $v_1 + \cdots + v_n = 0$.

【令人惊奇的是, 德国数学家闵可夫斯基 (Minkowski, 1864-1909) 证明了上述结论的逆命题：给定一组和为 0(且可以张成全空间) 的向量, 存在唯一的凸多面体使其各面的外法向为给定的向量, 且各面的面积为该向量的长度。这个结论及其各种变体和推广是现代凸几何的重要论题。】

11. [向量方法在平面几何中的应用]

(a). 设 O, P, Q, R 为平面上不同的四点, 证明 P, Q, R 三点共线当且仅当存在不全

为零的实数 α, β, γ , 满足 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 且使得

$$\alpha \overrightarrow{OP} + \beta \overrightarrow{OQ} + \gamma \overrightarrow{OR} = 0.$$

- (b). 试用 (a) 证明如下命题: 设 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 为平面上不平行的两个向量, 则对于平面上任一向量 \overrightarrow{OR} , 存在唯一的实数组 (α, β) 使得

$$\overrightarrow{OR} = \alpha \overrightarrow{OP} + \beta \overrightarrow{OQ}$$

- (c). (梅涅劳斯定理) 设 P, Q, R 分别是三角形 $\triangle ABC$ 三条边所在直线上的点, 如图所示。求证: P, Q, R 共线当且仅当

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1.$$

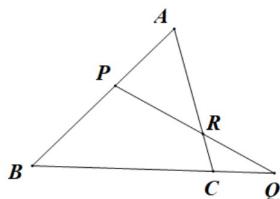


图 2.13: 梅涅劳斯定理

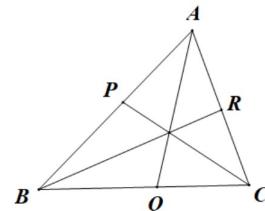


图 2.14: 塞瓦定理

- (d). (塞瓦定理) 设 P, Q, R 是三角形 $\triangle ABC$ 三边上的点, 如图所示。求证: AQ, BR, CP 共点当且仅当

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1.$$

特别地, 证明三角形三条中线共点 (称为该三角形的重心)、三条角平分线共点 (称为该三角形的内心)。

- (e). 令 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}$ 为任意四个向量。证明

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + (\mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0.$$

由此证明三角形的三条高共点 (称为该三角形的垂心)。

- (f). (*) (欧拉线) 求证: 三角形 $\triangle ABC$ 的外心 O (即外接圆的圆心)、重心 G 、垂心 H 共线, 且 $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ 。

12. [向量法在立体几何中的应用]

- (a). 设 A, B, C, D 是空间里任意四个点。证明:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

特别地, 若四面体 $ABCD$ 满足 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ 以及 $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD}$, 则必有 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ 。

- (b). 求证: 若 E^3 中的四点 A, B, C, D 满足 $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = \frac{\pi}{2}$, 则 $ABCD$ 为矩形。

- (c). 设 $ABCD$ 为空间四面体。将该四面体的每个顶点与跟它相对面三角形的重心相连, 得到四条线。求证: 这四条线共点 (该点叫做四面体的重心)。

- (d). (面积的勾股定理) 在四面体 $OABC$ 中, 若 OA, OB, OC 两两垂直, 则

$$S_{\triangle ABC}^2 = S_{\triangle OAB}^2 + S_{\triangle OAC}^2 + S_{\triangle OBC}^2.$$

13. [n 维欧氏空间]

- (a). 给出 n 维欧氏空间 \mathbb{E}^n 中线段长度的定义。
- (b). 给出 n 维欧氏空间 \mathbb{E}^n 中角度的定义。
- (c). 写出 n 维欧氏空间 \mathbb{E}^n 中的勾股定理。
- (d). 写出 n 维欧氏空间 \mathbb{E}^n 中的余弦定理。
- (e). 利用余弦定理证明柯西不等式

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) \geq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$$

14. [外积的可加性]

用外积的几何定义证明外积的可加性，即命题2.3.6的(2a)。

- (a). 求证：若对任意 $u, v, w \in \mathbb{E}^3$ 均有 $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$ 成立，则 $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ 成立。
- (b). 求证：若 $u, v, w \in \mathbb{E}^3$ 是共面的向量，则 $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$ 成立。
- (c). 求证：若 u, v, w 两两垂直，则 $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$ 成立。
- (d). 求证：对任意 $u, v, w \in \mathbb{E}^3$ ，均有 $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$ 成立。

15. [BAC-CAB 恒等式的证明]

分别用两种方法证明 BAC-CAB 恒等式（即命题2.3.9）。

- (a). 几何方法：

- (i). 先设 v, w 平行，证明恒等式成立。
- (ii). 然后设 v, w 垂直且均为单位向量，证明恒等式成立。
- (iii). 对于一般情形证明恒等式成立。

- (b). 代数方法：用坐标展开计算。

16. [BAC-CAB 恒等式与雅可比恒等式的等价性]

在命题2.3.10中我们用 BAC-CAB 恒等式以及内积的对称性证明了雅可比恒等式。事实上，在承认外积的基本性质时，雅可比恒等式也蕴含了 BAC-CAB 恒等式。为此我们先给出定义：设 V 是一个内积空间，若一个二元运算 $\times : V \times V \rightarrow V$ 满足下述“外积公理”，

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a});$
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c});$
- $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b};$
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0;$
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = (|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2)^{1/2}$

则我们称 \times 是 V 上的一个外积。下设内积空间 V 上赋有一个外积。求证：

- (a). $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c});$
- (b). $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c};$
- (c). 雅可比恒等式蕴含了 BAC-CAB 恒等式。

17. [定向与行列式]

- (a). 设 u, v 是平面向量，考虑两行分别为 u, v 的行列式。

- (i). 求证：若从 u 到 v 是正定向（即从 u 沿着夹角转到 v 是逆时针方向），则该行列式

的值为正；若从 u 到 v 是负定向，则该行列式的值为负。

(ii). 把 u, v 视为空间中的 $z=0$ 平面里的向量。问：该行列式的正负性与 u, v 外积的方向有什么关系？

(b). 下设 u, v, w 为空间向量。考虑以 u, v, w 为行的行列式，即混合积 $V(u, v, w)$ 。

(i). 求证： u, v, w 形成右手系当且仅当 $V(u, v, w)$ 为正。

(ii). 求证： $V(u, v, w) = V(v, w, u) = V(w, u, v)$ 。

18. [哈密尔顿四元数]

考虑 4 维向量空间

$$\mathbb{H} := \{\mathbf{u} = u_1 + u_2\mathbf{i} + u_3\mathbf{j} + u_4\mathbf{k} \mid u_i \in \mathbb{R} (1 \leq i \leq 4)\}.$$

对于 \mathbb{H} 中的任意两个元素

$$\mathbf{u} = u_1 + u_2\mathbf{i} + u_3\mathbf{j} + u_4\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = v_1 + v_2\mathbf{i} + v_3\mathbf{j} + v_4\mathbf{k},$$

我们定义 加法：

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := u_1 + v_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{i} + (u_3 + v_3)\mathbf{j} + (u_4 + v_4)\mathbf{k} \in \mathbb{H}$$

数乘：

$$\lambda \mathbf{u} := \lambda u_1 + \lambda u_2\mathbf{i} + \lambda u_3\mathbf{j} + \lambda u_4\mathbf{k}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathbb{H}$$

四元数乘法：

$$\begin{aligned} \mathbf{u} * \mathbf{v} := & (u_1 v_1 - u_2 v_2 - u_3 v_3 - u_4 v_4) + (u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_4 - u_4 v_3)\mathbf{i} + \\ & (u_1 v_3 - u_2 v_4 + u_3 v_1 + u_4 v_2)\mathbf{j} + (u_1 v_4 + u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_4 v_1)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

在不引起混淆的情况下，简记 $\mathbf{u} * \mathbf{v}$ 为 \mathbf{uv} 。我们称

$$\text{Re}(\mathbb{H}) := \{u_1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \mid u_1 \in \mathbb{R}\}$$

为 \mathbb{H} 的 **实轴**，且称

$$\text{Im}(\mathbb{H}) := \{\mathbf{u} = 0 + u_2\mathbf{i} + u_3\mathbf{j} + u_4\mathbf{k} \mid u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}\}$$

为 \mathbb{H} 中的 **虚超平面**。

(a). 验证下述 1, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 的四元数乘法表：

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,$$

$$1 * \mathbf{i} = \mathbf{i} = \mathbf{i} * 1, \quad 1 * \mathbf{j} = \mathbf{j} = \mathbf{j} * 1, \quad 1 * \mathbf{k} = \mathbf{k} = \mathbf{k} * 1,$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = i, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

(b). 验证四元数乘法 * 满足结合律：

$$(\mathbf{uv})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{vw}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{H};$$

(c). 我们把虚超平面的点 $\mathbf{u} \in \text{Im}(\mathbb{H})$ 视作 \mathbb{E}^3 中的点 (u_2, u_3, u_4) 。证明：对于任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Im}(\mathbb{H})$,

$$\mathbf{u} * \mathbf{v} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v},$$

其中 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 分别是 \mathbb{E}^3 中的内积与外积。

19. [行列式的计算]

计算以下行列式：

$$(a). \begin{vmatrix} 20 & 22 \\ 8 & 28 \end{vmatrix};$$

$$(b). \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$(c). \begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}.$$

20. [向量计算：外积，面积与体积]

(a). 设 $\mathbf{a} = (1, 2, 3), \mathbf{b} = (-2, 0, 5), \mathbf{c} = (0, 4, 1)$, 求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

(b). 求顶点为 $P_1(1, 2, 3), P_2(2, 4, 1), P_3(1, 3, 5)$ 的三角形的面积。

(c). 求顶点为 $P_1(1, 2, 3), P_2(2, 4, 1), P_3(1, 3, 5), P_4(4, 2, 3)$ 的四面体的体积。

21. [面积/体积的乘积]

(a). 求证：对于任意 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{E}^3$, 均有

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

(b). 求证：对于任意 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f} \in \mathbb{E}^3$, 均有

$$((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c})((\mathbf{d} \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{f}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{f} \end{pmatrix}.$$

22. [半径为 R 的球面]

对于半径为 R 的球面, 写出对应的定理2.3.20, 命题2.3.21, 定理2.3.22, 命题2.3.23, 定理2.3.26以及定理2.3.28。

23. [球面三角形全等判据]

(a). 给出球面三角形全等 (AAS) 判据不成立的反例。

(b). 证明球面三角形全等的 (SAS) 判据。

(c). 证明球面三角形全等的 (SSS) 判据。

(d). 证明球面三角形全等的 (AAA) 判据。

24. [球面直角三角形]

设 $\triangle ABC$ 是单位球面上的三角形, 且 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 为直角。求证:

(a). $\cos c = \cos a \cos b$.

另: 当 a, b, c 非常接近于 0 时, 该式跟平面几何的勾股定理有什么关系?

(b). $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}, \sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$ 。

(c). $\cos A = \frac{\tan b}{\tan c} \cos B = \frac{\tan a}{\tan c}$ 。

(d). 记 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 则 $\cos S = \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}$ 。

25. [球面几何的帕施公理]

证明帕施公理对球面几何依然成立。

26. [庞加莱上半平面]

考虑复平面的上半平面

$$\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

我们称 \mathbb{H}^2 中跟 y 轴平行的(上)半直线以及圆心在实轴上的(上)半圆为 \mathbb{H}^2 中测地线。换而言之, \mathbb{H}^2 中有两类测地线,

$$\ell_x := \{x + it \mid t > 0\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\ell_{c,r} := \{c + re^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\} \quad (c, r \in \mathbb{R}, r > 0).$$

设 z_1, z_2, z_3 是 \mathbb{H}^2 中落在同一测地线上的三个点, 且它们对应的参数为 t_i , $1 \leq i \leq 3$ 或者 θ_i (取决于它们落在哪类测地线上)。若 t_2 是介于 t_1 和 t_3 之间 (或者 θ_2 是介于 θ_1 与 θ_3 之间的), 则我们称点 z_2 是介于点 z_1 与 z_3 之间的。

对于 \mathbb{H}^2 中任意两点 z_1, z_2 , 我们定义它们之间的距离为

$$d(z, w) := \begin{cases} \left| \log \left(\frac{\operatorname{Im}(z_1)}{\operatorname{Im}(z_2)} \right) \right| & \text{若 } z_1, z_2 \in \ell_x; \\ \left| \log \left(\frac{\tan \frac{\theta_1}{2}}{\tan \frac{\theta_2}{2}} \right) \right| & \text{若 } z_1, z_2 \in \ell_{c,r}. \end{cases}$$

求证:

- (a). \mathbb{H}^2 满足关联公理 (I.1)-(I.3)。
- (b). \mathbb{H}^2 满足顺序公理 (II.1)-(II.4)。
- (c). 在 \mathbb{H}^2 中定义线段合同以及角度合同的概念, 并证明 \mathbb{H}^2 满足合同公理 (III.1)-(III.5)。
- (d). 设 ℓ 是 \mathbb{H}^2 中的一条测地线, 而 p 是 \mathbb{H}^2 中不在 ℓ 上的一个点。则存在无穷多条过 p 且跟 ℓ 不相交的测地线。**【于是平行公理 (IV.1) 不成立】**

27. [“侧”的刻画]

- (a). 证明引理2.4.7。
- (b). 证明引理2.4.8。
- (c). 取定不同的两点 $A, B \in l$ 。对于平面 α 上不在 l 上的任意一点 C , 取点 D 使得 $ABCD$ 为平行四边形。给出平行四边形 $ABCD$ 的有向面积的符号与点 C 所在“侧”的关系, 并证明。

28. [剩余希尔伯特公理的验证]

- (a). 验证 E^3 满足关联公理 (I.7),(I.8)。
- (b). 验证 E^3 满足顺序公理 (II.1),(II.2), (II.3)。
- (c). 验证 E^3 满足合同公理 (III.1),(III.2), (III.3)。

29. [帕施公理证明细节]

在验证 E^3 满足帕施公理 (即命题2.4.6) 时, 我们留了两处细节未证明。请补充证明细节。

- (a). 证明第一步中所提到的 E^2 的特殊构型满足帕施公理。
- (b). 证明第二步中所提到的映射 Φ 满足所给出的三个性质。

30. [可构造平面]

我们用以下方式定义平面中的可构造点、可构造直线、可构造圆：

- 点 $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$ 是可构造点。
- 由任意两个可构造点确定的直线是可构造直线。
- 以一个可构造点为圆心且过另一个可构造点的圆是可构造圆。
- 任意两条可构造直线的交点是可构造点。任意可构造直线与可构造圆的交点是可构造点。任意两个可构造圆的交点是可构造点。

称 \mathbb{E}^2 中所有可构造点构成的集合 Σ 称为可构造平面（这些点恰好是可以通过尺规作图得到的点集）。若点 $(a, 0) \in \Sigma$ ，则称数 $a \in \mathbb{R}$ 为**可构造数**。所有可构造数的集合记为 S 。

- (a). 证明： S 在四则运算下封闭（从而 S 是 \mathbb{R} 的一个子域）。
- (b). 证明：尺规作图可以作出正五边形。
- (c). (*) 证明：集合 $S \times S = \{(x, y) | x, y \in S\} \subset \mathbb{E}^2$ 满足希尔伯特平面公理体系中除了直线完备性公理之外的所有公理。

第3章 刚体变换

本章研究欧氏空间里的几何对象。我们将首先探讨如何通过方程研究欧氏空间中最简单的图形即平面与直线，并对曲线与曲面做简单介绍。本章的重点是学习和理解刚体变换，尤其是几何对象在刚体变换下的分类问题。特别地，将详细探讨平面二次曲线以及空间二次曲面的分类问题。

3.1 方程与图形

3.1.1 \mathbb{E}^3 中的平面

¶ 平面参数方程

上节中我们证明了， \mathbb{E}^3 中任意不共线的三点 $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$ 决定了唯一一个平面，即

$$\alpha = \{(a_1, a_2, a_3) + t\vec{u} + s\vec{v} \mid t, s \in \mathbb{R}\},$$

其中

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3).$$

于是，点 $P(x, y, z)$ 落在平面 α 上当且仅当存在 $t, s \in \mathbb{R}$ ，使得

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3).$$

上述方程可被写为

$$\begin{cases} x = a_1 + tu_1 + sv_1, \\ y = a_2 + tu_2 + sv_2, \\ z = a_3 + tu_3 + sv_3, \end{cases}$$

该方程组被称为平面 α 的参数方程。注意条件“ A, B, C 三点不共线”等价于

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) \neq 0.$$

我们也把方程

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u} + s\vec{v} \quad \text{或} \quad \overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v}$$

叫做该平面参数方程的向量形式。

¶ 平面一般方程

从参数方程出发，不难“看出”一个平面 α 是如何“从一个点出发，沿着两个不同方向（及它们组合出来的所有方向）平直延伸”而得到的。但是，参数方程也有一些缺陷：

- 任给空间中一个点 Q ，要判定 Q 是否在 α 中，我们需要解一个具有三个方程（含两个未知数）的方程组，而这样的方程组并不总是好解。

- 每个平面里都有无穷多个点，而任取三个不共线的点都可以写出一个参数方程，这些参数方程并不一样。因此，同一个平面有无穷多种不同的参数方程。特别地，给定两个参数方程，并不能直接看出它们是否代表同一个平面。

所以，一个自然的问题是：是否有一种更简单的方式表示平面，使得

- 可以比较容易判定一个点在不在一个给定的平面上？
- 可以比较容易判定两个表达式是否代表同一个平面？

幸运的是，确实有这样的方式去表示平面，而且不难找到它：因为在参数方程中，参数并不是本质的（即同一个点在不同参数方程中所对应的参数是不一样的），所以一个自然的想法是“通过消去参数，找到同一平面中点的坐标之间本质的关系”！

经过非常复杂的消元计算，可以把参数方程化为

$$(u_2v_3 - u_3v_2)x + (u_3v_1 - u_1v_3)y + (u_1v_2 - u_2v_1)z = (u_2v_3 - u_3v_2)a_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)a_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)a_3.$$

但是，如果从事后诸葛亮的角度重新审视所得的方程，却可以看出这个方程具有明确的几何含义（因而几乎是显然的）：点 P 落在由 A, B, C 张成的平面 α 中，当且仅当由 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 所张成的平行六面体的体积为零。因为

$$\overrightarrow{AP} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3), \quad \overrightarrow{AB} = \vec{u}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v},$$

所以

$$(x - a_1, y - a_2, z - a_3) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0,$$

而这正是我们刚刚得到的方程！（从这里也可以再次看到了条件 $u \times v \neq 0$ 的必要性：若 $u \times v = 0$ ，则空间中所有点都满足该方程，从而所得到的并不是平面 α 的方程）

如果记

$$\begin{aligned} N_1 &= u_2v_3 - u_3v_2, & N_2 &= u_3v_1 - u_1v_3, & N_3 &= u_1v_2 - u_2v_1, \\ -D &= (u_2v_3 - u_3v_2)a_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)a_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)a_3, \end{aligned}$$

则上述讨论说明平面方程一定可以表示成

$$N_1x + N_2y + N_3z + D = 0$$

的形式，其中 $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (N_1, N_2, N_3) \neq 0$ 。

命题 3.1.1. (平面方程的一般形式)

任何平面都可被表示成

$$N_1x + N_2y + N_3z + D = 0 \tag{3.1.1}$$

的形式，其中 $\vec{n} = (N_1, N_2, N_3) \neq 0$ 。反之，任给 $\vec{n} = (N_1, N_2, N_3) \neq 0$ ，方程 (3.1.1) 给出了空间中的一个平面。

【该方程被称作平面的一般方程】



证明 还需证后一半。不失一般性，假设 $N_1 \neq 0$ 。则

$$x + \frac{N_2}{N_1}y + \frac{N_3}{N_1}z + \frac{D}{N_1} = 0.$$

若记 $y = t, z = s$, 则该方程变成

$$\begin{cases} x = -\frac{D}{N_1} - \frac{N_2}{N_1}t - \frac{N_3}{N_1}s, \\ y = t, \\ z = s, \end{cases}$$

而这恰好表示过点 $(-\frac{D}{N_1}, 0, 0)$ 且沿着两个方向

$$u = \left(-\frac{N_2}{N_1}, 1, 0\right), \quad v = \left(-\frac{N_3}{N_1}, 0, 1\right)$$

平直延伸的平面。

□

还可以用向量内积的语言, 把平面的一般方程写成

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} + D = 0.$$

给定一个平面的一般方程, 很容易验证一个点是否在该平面中: 只要把点的坐标代入方程, 比较方程左右两边的值是否相同即可, 这比从方程组中解未知数要容易太多了。

同样地, 给定两个一般方程, 也很容易判定它们是否代表同一个平面:

引理 3.1.2

两个一般方程代表同一个平面, 即

$$\{(x, y, z) \mid N_1x + N_2y + N_3z + D = 0\} = \{(x, y, z) \mid N'_1x + N'_2y + N'_3z + D' = 0\}$$

当且仅当 $N_1 : N_2 : N_3 : D = N'_1 : N'_2 : N'_3 : D'$ 。

◇

我们把证明留作习题。

¶ 平面一般方程系数的几何意义

当然, 平面方程

$$N_1x + N_2y + N_3z + D = 0$$

里出现的系数也并不都是有效系数, 因为如果把所有系数乘以一个非零常数, 得到的方程所表示的还是同一个平面。引理3.1.2告诉我们, 在模去这个乘法因子的意义下, 方程的系数是本质的, 从而应该有着明确的几何意义。

系数的几何意义也不难发现:

命题 3.1.3. (平面的法向量)

向量 $\vec{n} = (N_1, N_2, N_3)$ 表示的是平面

$$N_1x + N_2y + N_3z + D = 0$$

的法向量(即跟平面垂直的向量)。

◆

证明 若 P, Q 是平面中的点, 则

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} + D = 0, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{OQ} + D = 0,$$

从而

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0.$$

于是, \vec{n} 跟平面中的任意直线都垂直, 即 \vec{n} 是该平面的一个法向量。 □

注意如果一个非零向量 \vec{n} 是一个平面的法向量, 则 \vec{n} 乘以任意非零常数后所得的非零向量依然是该平面的一个法向量。于是我们再次看到为什么系数可以相差一个常数。

上述事实有几个非常简单而有用的推论。首先, 两个平面平行当且仅当它们有相同的法向量, 故

推论 3.1.4. (平面平行的判据)

两个平面

$$N_1x + N_2y + N_3z + D = 0 \quad \text{和} \quad N'_1x + N'_2y + N'_3z + D' = 0$$

平行当且仅当

$$N_1 : N_2 : N_3 = N'_1 : N'_2 : N'_3 \quad \text{且} \quad N_1 : N_2 : N_3 : D \neq N'_1 : N'_2 : N'_3 : D'$$
♡

其次, 两个平面的夹角等于它们的法向量所在直线的夹角, 故

推论 3.1.5. (两个平面的夹角)

两个平面

$$N_1x + N_2y + N_3z + D = 0 \quad \text{和} \quad N'_1x + N'_2y + N'_3z + D' = 0$$

之间的夹角 θ 为 (记 $n = (N_1, N_2, N_3)$ 以及 $n' = (N'_1, N'_2, N'_3)$)

$$\theta = \arccos \frac{|n \cdot n'|}{|n||n'|} = \arccos \frac{|N_1N'_1 + N_2N'_2 + N_3N'_3|}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2} \sqrt{(N'_1)^2 + (N'_2)^2 + (N'_3)^2}}$$
♡

平面法向还可以被用于计算坐标原点 O 到平面的距离: 设平面里距离 O 最近的点是 P , 则显然 \overrightarrow{OP} 垂直于平面, 从而存在常数 k 使得 $\overrightarrow{OP} = k\vec{n}$ 。因为 P 位于平面里, 代入平面方程可得

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} + D = \vec{n} \cdot (k\vec{n}) + D = 0.$$

由此解得 $k = -D/|\vec{n}|^2$, 从而

$$\overrightarrow{OP} = k\vec{n} = -\frac{D}{|\vec{n}|^2}\vec{n}.$$

于是, 坐标原点 O 到平面的距离为 (注意, 当把平面一般方程的系数同乘以一个常数后, 这个式子的值是不变的。)

$$|\overrightarrow{OP}| = \left| -\frac{D}{|\vec{n}|^2}\vec{n} \right| = \frac{|D|}{|\vec{n}|}.$$

所以我们证明了

命题 3.1.6. (原点到平面的距离)

原点到平面

$$N_1x + N_2y + N_3z + D = 0$$

的距离为 $\frac{|D|}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2}}$ 。

♠

这也说明了常数项 D 的几何意义: 它刻画了点 O 到平面的距离。特别地, 对于两

个平行的平面，通过乘以常数可以假设它们的一般方程具有相同的 x, y, z 系数，即相同的 \vec{n} 向量，此时原点和 $P = -\frac{D}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$ 以及 $P' = -\frac{D'}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$ 共线，从而此时这两个平面之间的距离就是 P, P' 之间的距离。稍微计算一下就得

推论 3.1.7. (平行平面间的距离)

两个平行平面

$$N_1x + N_2y + N_3z + D_1 = 0 \quad \text{和} \quad N_1x + N_2y + N_3z + D_2 = 0$$

之间的距离为 $\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2}}$ 。



最后，我们简要提一下消去方程系数中非本质的“常数”的方法。因为 $\vec{n} = (N_1, N_2, N_3)$ 是非零向量， N_1, N_2, N_3 中至少有一个是非零的。不妨设 N_1 非零（即该平面跟 x 轴不平行），则此时我们可以把方程约化为

$$x + N_2y + N_3z + D = 0.$$

类似的，若 N_2 非零（即该平面跟 y 轴不平行）或 N_3 非零（即该平面跟 z 轴不平行），则可以把方程约化为

$$N_1x + y + N_3z + D = 0 \quad \text{或} \quad N_1x + N_2y + z + D = 0.$$

这三个方程被称作平面一般方程的**既约形式**。于是，同一个平面最少有一种、最多有三种既约形式的一般方程，且每种形式形式的一般方程都是唯一的。

3.1.2 \mathbb{E}^3 中的直线

¶ 直线参数方程

下面考虑直线方程。首先，从

$$l = \{A + t(B - A) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

出发，得到直线的**参数方程**

$$\begin{cases} x = a_1 + tu_1, \\ y = a_2 + tu_2, \\ z = a_3 + tu_3, \end{cases}$$

其中 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq 0$ 。当然，也可以把它写成向量形式

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + tu.$$

参数方程有着明确的几何含义：直线是“从一个点出发，沿着某个给定的方向（双向）平直延伸”所得的几何对象。

因为方向已经蕴含在参数方程里，所以不难用参数方程给出（留作习题）

命题 3.1.8. (直线的计算)

- (1) 两条直线平行或相同的条件: 若直线 l_1 的方向由向量 \vec{u} 给出, l_2 的方向由向量 \vec{v} 给出, 则 l_1, l_2 平行或相同当且仅当 \vec{u} 平行于 \vec{v} , 亦即 $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ 。
- (2) 点到直线的距离公式: 设 l 是一条方向为 \vec{u} 的直线。在直线上任取一个点 P 。则空间中任意点 A 到直线 l 的距离为 $\frac{|\vec{u} \times \vec{AP}|}{|\vec{u}|}$ 。
- (3) 异面直线的距离公式: 设 l_1, l_2 为两条异面直线, 方向分别为 \vec{u}, \vec{v} 。任取 $A \in l_1, B \in l_2$ 。则 l_1, l_2 之间的距离为 $\frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ 。
- (4) 两条直线的夹角: 设 l_1, l_2 是方向分别为 \vec{u}, \vec{v} 的两条直线, 则它们的夹角为 $\arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$ 。
- (5) 直线与平面的夹角: 设 l 是一条方向为 \vec{u} 的直线, α 是法向为 \vec{n} 的平面, 则它们的夹角为 $\arcsin \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$ 。

**¶ 直线一般方程**

跟平面情形类似, 自然也可以通过消元法, 消去直线参数方程中“并不本质”的变量 t 。因为直线参数方程里有三个方程, 但只要消去一个变量, 所以消元后会剩下两个方程。当然, 无论是消元的过程还是消元的结果都不是唯一的。例如, 如果 $u_1 \neq 0$, 则可以从第一个方程出发, 解出 t 并代入第二、第三两个方程, 得到

$$\begin{cases} \frac{u_2}{u_1}x - y + \frac{u_1a_2 - u_2a_1}{u_1} = 0, \\ \frac{u_3}{u_1}x - z + \frac{u_1a_3 - u_3a_1}{u_1} = 0. \end{cases}$$

类似地, 如果 $u_2 \neq 0$ 或者 $u_3 \neq 0$, 也可以得到这样形式的两个方程。因此, 对于直线, 总是可以得到如下形式的不含参数的方程组

$$\begin{cases} N_1x + N_2y + N_3z + D = 0, \\ N'_1x + N'_2y + N'_3z + D' = 0. \end{cases}$$

用于表示直线的这样形式的方程组被称做**直线的一般方程**(但它其实是一个方程组)。

我们还是可以从几何上理解直线的一般方程。该方程组中每一个方程均表示一个平面, 因此该方程组表示两个平面的交集。于是, 很显然的是, 并非所有这样形式的方程组都能表示直线: 仅当对应的两个平面交于一条线时, 它才表示直线。什么时候两个平面不交于一条直线呢? 平行或恒等, 即法向量平行。如上, 若跟前文一样记 $\vec{n} = (N_1, N_2, N_3)$, $\vec{n}' = (N'_1, N'_2, N'_3)$, 则上述方程组表示直线的充分必要条件是

$$\vec{n} \times \vec{n}' \neq 0.$$

当然, 细心的读者可能已经想到了: 因为 \vec{n} 与 \vec{n}' 都跟该直线垂直, 所以 $\vec{n} \times \vec{n}'$ 给出的就是该直线的方向。特别地, 它必须是非零向量。

例 3.1.9. 设 $u_1 \neq 0$ 。取 $\vec{n} = (\frac{u_2}{u_1}, -1, 0)$, $\vec{n}' = (\frac{u_3}{u_1}, 0, -1)$, 则易算出

$$\vec{n} \times \vec{n}' = (1, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}).$$

因此条件 $\vec{n} \times \vec{n}' \neq 0$ 等价于 $(u_1, u_2, u_3) \neq 0$ 。

当然, 无论直线的参数方程, 还是直线的一般方程都是不唯一的。相对而言, 参数

方程更加简洁，而且参数方程中的向量 \vec{u} 在差一个常数的意义下唯一（因为它代表的是该直线对应的方向）。而一般方程的选法则非常多，因为同一条直线可以被包含在无穷多个平面中（读者可以试着写出所有这些平面），且任意两个的交集都是该直线。那么，如何找到特定形式的直线表达式，使得每条直线（最多）有一个该形式的方程呢？

答案就隐藏在上面应用消元法的过程中：若 $u_1 \neq 0$ （即该直线跟 yz -平面不平行），则可以得到形如

$$\begin{cases} N_1x + y + D = 0, \\ N'_1x + z + D' = 0 \end{cases}$$

的方程组。不难验证这样形式的表达式是唯一的。

类似地，若 $u_2 \neq 0$ （即该直线跟 xz -平面不平行）或者 $u_3 \neq 0$ （即该直线跟 xy -平面不平行），则可以得到形如

$$\begin{cases} x + N_2y + D = 0, \\ N'_2y + z + D' = 0 \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} x + N_3z + D = 0, \\ y + N'_3z + D' = 0 \end{cases}$$

的方程组。这样形式的方程组叫做直线一般方程的既约形式。

3.1.3 E^3 中的方程与图形

我们可以总结一下平面与直线这类空间中简单几何对象的数学表示形式。它们都分别有两种表示方式，即参数方程和一般方程。因为平面和直线都是平直的，所以我们可以仅用一次方程就表示它们（注意：无论是直线还是平面，我们都可以用更复杂的方程去表示它们，但一般而言没有必要）。对于参数方程中，每个方程描述一个坐标的变化规则，故方程的个数跟空间维数一致，而参数个数则等于该图形的维数。对于一般方程，方程是约束条件，因此有效方程的个数是图形的余维数（即空间的维数与图形的维数之差）。此处需要强调有效方程是因为如果两个平面平行或恒等，则它们组成的方程组并不表示直线：前者没有有效方程，而后者只有一个有效方程（线性代数课程中将会学到“对于给定的任意多个变元的线性方程组，如何找到其中有效方程的个数”，由此可以判定向量空间中相应的平直对象（仿射子空间）的维数）。

几何的基本研究对象是图形，即 E^3 中某些具有看上去比较规则的点集。在生活中看到的图形远不止直线与平面，很多重要的几何对象是弯曲的。 E^3 这个模型为我们提供了表达曲线和曲面，进而利用更高级的数学工具（例如代数和分析）研究这些图形的机会。

¶ 空间里的曲线

曲线是直线的自然推广：它们是“线”，但不必是直的。曲线是非常常见的几何对象，例如空间中任意一个移动中的质点所经过的轨迹就是一条曲线。它是一维的几何对象，因而可以跟直线一样，仅使用一个参数就可以表示它。例如对于移动中的质点，一

般就取时间变量为参数。换而言之，空间中的曲线具有如下形式的参数方程：

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases}$$

其中 f_1, f_2, f_3 是三个具有较好性质的函数¹，而 t 一般取某个区间内的全体实数。

当然，如果可以消去参数（这并不总是可行，因为要解的方程可能过于复杂以至于不可解），那么也可以给出由两个方程组成的方程组来表示曲线。但正如直线一样，一般而言用参数方程表示曲线更好用。

这里仅举几个简单的例子：

例 3.1.10. \mathbb{E}^3 中 xy -平面里的单位圆可以被表示为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 0. \end{cases}$$

当然也可以用以下方程组表示它，其几何意义是明显的：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

例 3.1.11. 下述方程给出了 \mathbb{E}^3 中螺旋曲线

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t. \end{cases}$$

当然也可以用以下方程组表示它：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x = \cos z. \end{cases}$$

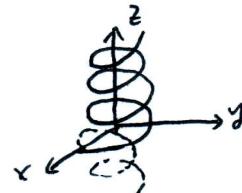


图 3.1: 螺旋曲线

微分几何课程中将会深入学习曲线的度量性质（长度、弯曲程度等）。

¶ 空间里的曲面

下面简单地考察空间里的曲面。顾名思义，曲面是平面的自然推广，它们是“面”，但不必是平的。曲面是二维的几何对象，因此在曲面上移动的质点具有两个自由度。换言之， \mathbb{R}^3 中的曲面，（在局部）可以用如下形式的参数方程表示：

$$\begin{cases} x = f_1(t, s), \\ y = f_2(t, s), \\ z = f_3(t, s), \end{cases}$$

其中参数 t, s 一般是取遍某个规则的平面区域中的所有点。

¹ 在不同的框架里考察曲线时，对函数 f_1, f_2, f_3 的要求有所不同。例如在微分几何中要求这些函数具有一定光滑性，而在拓扑学中则只要求它们是连续函数。因为连续性的假设非常弱，以至于在拓扑学中会出现“可以填满整个正方形（从而无法画出其图像）”之类的诡异曲线。

在一些特殊情况下，可以把参数都消去，从而得到一个仅包含 x, y, z 三个坐标的方程，

$$F(x, y, z) = 0,$$

该方程就被称为曲面的一般方程。

所以跟直线与平面类似，

- 曲线是一维的，所以曲线的参数方程只有一个参变量；
- 空间里的曲线余维数是二，所以曲线的一般方程由两个方程组成；
- 曲面是二维的，所以曲线的参数方程有两个参变量；
- 空间里的曲面余维数是一，所以曲面的一般方程由一个方程组成。

特别地，人们希望研究：给定函数 F ，由方程 $F(x, y, z) = 0$ 给出的曲面是什么？下面这个例子表明，在一般情况下，即使对于非常非常“好”的函数 F ，由 $F(x, y, z) = 0$ 给出的点集也未必能构成一个曲面。

例 3.1.12. 下面四个方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$(x + y + z + 1)^2 + (x + y - z)^2 = 0$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z + 1) = 0$$

分别给出了空集、单点集、直线、以及“平面与单点集的并集”。

例 3.1.13. 给定一个具有较好性质的二元函数 $f(x, y)$ ，它的图像

$$\Gamma_f := \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

是一个曲面。我们既可以把它当做参数曲面，

$$\begin{cases} x = t, \\ y = s, \\ z = f(t, s), \end{cases} \quad (t, s) \in D$$

也可以写出它的一般方程，

$$F(x, y, z) := z - f(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

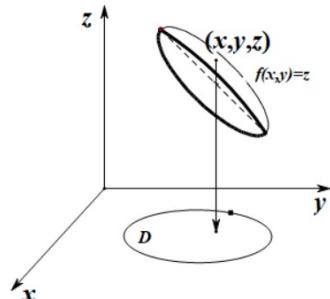


图 3.2: 曲面

¶ 二次曲面举例

方程和图形紧密相关。最简单的方程是一次方程，

$$ax + by + cz + d = 0,$$

其中 a, b, c 不全为零，这样的方程给出的是平面。比一次方程稍微复杂一点的是二次方程，即由三个变量的二次多项式给出的方程。最一般的三元二次多项式形如

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c,$$

其中 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ 不全为零。当 $F(x, y, z)$ 是一个三元二次多项式时，称由方程

$$F(x, y, z) = 0$$

给出的曲面为一个**二次曲面**。下面给出最简单的几个二次曲面的例子。

例 3.1.14. 显然方程

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

表示的是单位球面。更一般地，

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$



图 3.3: 椭球面

给出的曲面被称为是**椭球面**，是椭圆在三维空间里的类比。不难发现，椭球面跟每个坐标平面的交都是椭圆。

例 3.1.15. 对于每个 $t \in \mathbb{R}$ ，分别考虑曲面

$$F_t(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - t = 0,$$

其中 a, b, c 均为非零实数。注意对不同的 t 值，该曲面跟 xy -平面（即由方程 $z = 0$ 给出的平面）、 yz -平面（即由方程 $x = 0$ 给出的平面）的交可能具有很不同的形状（但它跟 xz 平面的交与它跟 yz 平面的交类似）：

- 当 $t > 0$ 时，该曲面跟 xy -平面的交为椭圆，跟 yz 平面的交是双曲线，所得的曲面叫做**单叶双曲面**，
- 当 $t = 0$ 时，该曲面跟 xy -平面的交为原点，跟 yz 平面的交是两条相交直线，所得的曲面叫做**椭圆锥面**，
- 当 $t < 0$ 时，该曲面跟 xy -平面的交为空集，跟 yz 平面的交是双曲线，所得的曲面叫做**双叶双曲面**。

它们的形状大致如下图所示：

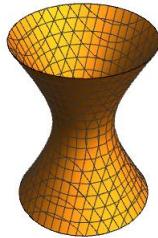


图 3.4: 单叶双曲面

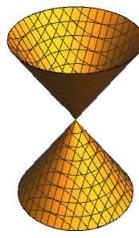


图 3.5: 椭圆锥面

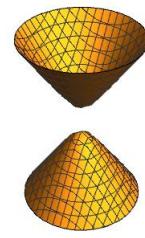


图 3.6: 双叶双曲面

例 3.1.16. 还可以考虑一些更简单的二次曲面，其函数 F 不包含 z 变量，例如

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad ax^2 - y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

其中 $a, b \neq 0$ 。根据平面解析几何可知，作为平面几何对象，它们给出的分别是 \mathbb{E}^2 中的椭圆，抛物线，双曲线。现在把这些方程中的函数视作 x, y, z 三个变量的函数，则所得

到的 \mathbb{E}^3 中的曲面恰好是把对应的 \mathbb{E}^2 中的曲线沿着 z 轴方向“平行拖动”后所得到的曲面。这三个曲面分别称为**椭圆柱面**，**抛物柱面**，**双曲柱面**。



图 3.7: 椭圆柱面

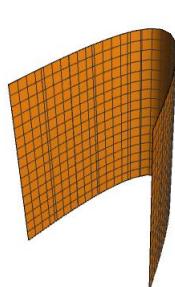


图 3.8: 抛物柱面

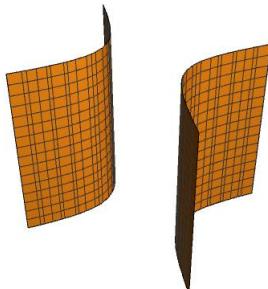


图 3.9: 双曲柱面

例 3.1.17. 最后考察

$$F_t(x, y, z) = z - \frac{x^2}{a^2} - t \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

当 $t = 0$ 时它是(沿着 y 轴方向的)抛物柱面，其形状跟图3.8类似，只是翻倒了(从“竖立”变成“躺着”)。当 $t > 0$ 时，所得的曲面叫做**椭圆抛物面**，因为

- 用每个跟 xy -平面平行的平面 $z = h > 0$ 截该曲面，会得到一族椭圆；
- 用每个包含 z 轴的平面截该曲面，将得到一族抛物线。

类似地，当 $t < 0$ 时，所得的曲面叫做**双曲抛物面**(也因其形似马鞍而被称为**马鞍面**)，因为

- 用每个跟 xy -平面平行的平面 $z = h \neq 0$ 截该曲面，可以得到一族双曲线；($h = 0$ 时我们得到“退化的双曲线”，即两条相交的直线。注意退化情形将不同开口方向的双曲线分开了。)
- 用每个包含 z 轴的平面截该曲面，将得到一族抛物线。(用平面 $y = \pm x$ 截时我们得到“退化的抛物线”即直线。注意退化情形将不同开口方向的抛物线分开了。)

它们的形状如下图所示：

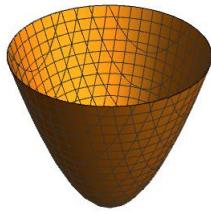


图 3.10: 椭圆抛物面

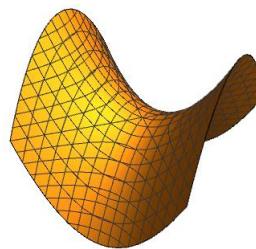


图 3.11: 双曲抛物面 (马鞍面)

¶ 曲面的局部与整体性质

可以预见，当 $F(x, y, z)$ 的次数变大或者根本不是多项式的时候，方程

$$F(z, y, z) = 0$$

对应的图形会越来越复杂。此时，研究这些图形的几何可以从**局部几何性质**和**整体几何性质**来分别研究。那么，哪些几何性质是局部性质，哪些又是整体性质呢？

由曲面在一点附近的曲面片就能决定的性质就是局部性质。例如，在上面的例子中，椭圆锥面上的“锥点”是一个很特别的点，在该点处曲面并不“光滑”，而别的二次曲面上没有这样的点。研究由多项式定义的曲面上的不光滑（“奇点”）是“**代数几何**”课程的重要内容。在上面的例子中，平面（即一次曲面）与所有二次曲面有明显差别。因为平面在任意一点附近都是“平直”的，而上述二次曲面任一点附近都是“弯曲”的。更进一步，虽然二次曲面都是弯曲的，但互相间也有区别，比如椭球面处处是凸的，而双曲抛物面处处有凸有凹。【要想精确描述曲面在局部的弯曲，需要到“**微分几何**”课程中第二基本形式。】

平面和二次曲面不仅是最基本的曲面，而且是研究一般曲面的局部几何时最重要的工具之一。比如，在曲面上任一点附近取充分小的邻域，则该“曲面片”非常接近于一个平面片，即曲面在该点的切平面。曲面在一点处的切平面是曲面在该点的一阶近似：

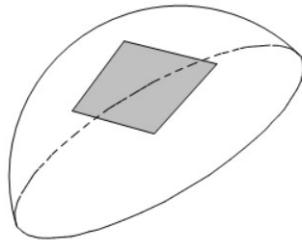


图 3.12: 切平面

更进一步，也可考虑曲面在该点的二阶近似，这是比一阶近似更好、更贴合的近似（当然，如果曲面本身是平面，一阶近似就已经给出了精确值，此时就不需要二阶近似了）。不妨设曲面由

$$F(x, y, z) = 0$$

给出，其中 F 是一个很好的函数，例如为多项式，此时一阶与二阶近似可以如下得到：

设 $P = (x_0, y_0, z_0)$ 属于该曲面，即 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ 。设 F 是 n 次多项式（当 F 不是多项式时改用泰勒展开即可），则可以把 F 写成

$$F(x, y, z) = \sum_{i+j+k \leq n} a_{ijk}(x - x_0)^i(y - y_0)^j(z - z_0)^k,$$

其中“常数项” a_{000} 为零。此时，该曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 附近的一阶近似就是

$$F_1(x, y, z) = \sum_{i+j+k \leq 1} a_{ijk}(x - x_0)^i(y - y_0)^j(z - z_0)^k = 0,$$

而相应的二阶近似则是

$$F_2(x, y, z) = \sum_{i+j+k \leq 2} a_{ijk}(x - x_0)^i(y - y_0)^j(z - z_0)^k = 0.$$

二阶近似是研究曲面弯曲程度的主要工具。

曲面的整体几何性质则是那些仅靠观察一点附近的曲面片时得不到的几何性质。比如，虽然椭球面与椭圆抛物面都是“处处为凸”的曲面，但二者具有不同的整体性质：椭球面是可以放进某个足够大半径的球里（即有界，更精确的描述需要用到“**拓扑学**”课程中的紧致性的概念），而椭圆抛物面却做不到这一点。又如单叶双曲面与双叶双曲面都是无界的，但是单

叶双曲面上的任何两点可以通过某条曲线段连接，而双叶双曲面做不到这一点（显然这就是单叶与双叶这个名字的来源。这里牵涉到的是“拓扑学”中的连通（或道路连通）的概念，见第 6 章。）

在后续的几何与拓扑各门课程中，将会学到更多局部与整体性质。而几何中局部性质与整体性质之间的联系，是现代数学中最引人入胜的风景之一。

3.2 刚体变换与图形分类

3.2.1 刚体变换

¶ 图形与变换

任何几何图形都承载了两个基本信息：它的形状与它的位置。例如，我们可以认为 E^3 中的任意两个平面的形状都一样，因为总可以将一个平面通过移动和转动，使它跟另一个平面完成重合。在这个意义下， E^3 中任何两个平面的差别仅在于它们在空间中占据的位置不同。同理， E^3 中任何两个半径为 1 的球面也具有完全一样的形状，不同的仅仅是所处的位置。但是，椭球和椭圆柱面的形状就很不一样了。

当然，如果除了移动和转动之外，还允许“放大和缩小”，那么我们也可以认为不同半径的球面也具有相同的形状。所以当提到“形状”这个词的时候，其实还需要事先指定允许使用的**变换**是哪些：

- 如果仅仅允许使用平移变换，而连旋转变换都不允许用，那么两个不同的平面也可以具有不同的形状；
- 如果允许平移、旋转、伸缩，甚至在伸缩时允许不同方向可以有不同的伸缩比，那么任意椭球具有和球相同的形状。

总而言之，形状这个概念和允许使用的几何变换是相关的：如果一个图形可以通过“允许使用的几何变换”变成另一个图形，则可称这两个图形在该类变换下具有相同形状。

¶ 几何变换

那么，什么是空间中的几何变换呢？前面已经学过反射变换、平移变换与旋转变换。为了便于理解，下面给出一个不算定义的“定义”（仿造欧几里得）：

【“定义”】 设 X 是具有某种几何结构的空间（例如 E^3 ）。若映射

$$\phi : X \rightarrow X$$

是双射，且保持特定的几何结构不变，则称 ϕ 为 X 上的一个**几何变换**。

当然，这个“定义”是非常“模糊”的。我们给出几个注记：

注 3.2.1.

- (a) 我们并没有说清楚什么叫做几何结构。事实上，在下一章将要解释：几何结构和几何变换本质上是同一件事情的两个不同方面。无论如何，这个“定义”透露了一个信息，即几何变换依赖于所希望保持的几何结构。

- (b) 由定义, 几何变换 ϕ 既可逆又保持特定的几何结构不变, 于是 $\phi^{-1}: X \rightarrow X$ 也是保持该几何结构不变的双射。换而言之, ϕ^{-1} 也是(同类的)几何变换。
- (c) 在考察空间 $X = \mathbb{E}^3$ 时, 有两种不同的“视角”: 首先, \mathbb{E}^3 可以被视为是“点的空间”, 其中每个元素是一个三元数组, 是常义下的“点”; 其次, \mathbb{E}^3 可以被视为是“向量的空间”, 其中每个元素是一个向量。当然这两种视角是相互关联的: 每个向量都可以被视为是由两个点依照给定顺序组成的“点组”(不过不同的点组有可能表示同一个向量); 反之, 任意 P 也唯一确定了一个向量 \overrightarrow{OP} .

定义 3.2.2. (平移不变性)

若 \mathbb{E}^3 的几何变换 ϕ 满足

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} = \overrightarrow{\phi(C)\phi(D)},$$

则称 ϕ 是一个具有平移不变性的几何变换。



对于具有平移不变性的几何变换 ϕ , 可以自然诱导出一个在向量的映射

$$\tilde{\phi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

为了区分这两种视角, 我们将总是以 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 表示“把点映为点”的变换, 而将以 $\tilde{\phi}: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 表示由 ϕ 诱导的“把向量映为向量”的变换。根据定义, 总有

$$\tilde{\phi}(\vec{0}) = \tilde{\phi}(\overrightarrow{AA}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(A)} = \vec{0}.$$

反过来, 由 $\tilde{\phi}$ 和 $\phi(O)$ 也可以确定 ϕ :

$\phi(A) = \text{把 } \tilde{\phi}(\overrightarrow{OA}) \text{ 的起点放在点 } \phi(O) \text{ 时, 其终点的位置.}$

下面给出一些例子:

例 3.2.3. \mathbb{E}^3 中一些几何变换及其所保持的几何性质:

- (1) 根据定义, \mathbb{E}^3 中的平移变换 $\tau: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 满足

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\tau(P)\tau(Q)}, \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}^3.$$

平移变换保持的几何性质是两点之间的距离和方向。特别地, 它保持定向: 右手系在变换之后依然是右手系。

- (2) 对于 \mathbb{E}^3 中的任意平面 α , 以 α 为反射平面的反射变换 R_α 保持(且仅保持) α 中的点不变, 同时它也是一个保持任意两点间距离的几何变换, 但它并不保持方向, 或者更准确地说, 它翻转定向: 右手系在变换之后会变成左手系。

- (3) 任取 \mathbb{E}^3 中的一条(给定“方向”的)直线 l_+ 以及一个角度 θ , 考虑以 l 为轴、从给定方向看过去逆时针方向旋转 θ 角的旋转变换 $R_{l_+, \theta}$. 在该变换下, 轴 l 上的点(且仅有这些点)都保持不变. 该变换也是保持任意两点间的距离不变的变换, 而且虽然它不保持两点所形成的向量的方向, 但它保持定向: 右手系在变换后依然是右手系。

- (4) 后文中还将学到一些更一般的几何变换, 这里先列出它们所保持不变的几何性质:

- 相似变换保持两条线段之间的夹角不变, 也保持两条线段的长度之比不变.
- 仿射变换保持“平行”性质: 两条平行的直线在变换之后依然平行.
- 射影变换保持“共线”性质: 共线的点在变换后依然共线.

¶ 等距变换与刚体变换

下面研究 \mathbb{E}^3 上的一类非常特殊的几何变换。考虑欧氏距离函数

$$d_E(P, Q) := \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} = |PQ|.$$

定义 3.2.4. (等距变换与刚体变换)

- (1) 称保持距离不变的几何变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 为**等距变换**或者**保距变换**。换而言之，等距变换就是满足下述性质的几何变换：

$$d_E(\phi(P), \phi(Q)) = d_E(P, Q), \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}^3.$$

- (2) 若 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个等距变换，且 ϕ 还保持定向（即它总把右手系映为右手系）^a，则称 ϕ 为一个**刚体变换**或**刚体运动**。

^a此处用到如下事实：由引理3.2.7，等距变换具有平移不变性，从而诱导了向量变换。



注 3.2.5.

- (a) 在很多教科书中，人们把本书这里定义的等距变换叫做刚体变换（即不要求刚体变换保持定向）。本书在此处定义刚体变换是保持定向的等距变换，旨在强调刚体变换/刚体运动是能在 \mathbb{E}^3 中实现的运动。
- (b) 类似地，可以定义 \mathbb{E}^2 中的等距变换以及刚体变换。注意，根据本书的定义，反射变换是等距变换但不是刚体变换。在物理上，这表征着我们无法在平面内将一个物体运动到跟它的镜面反射像重合（不过，如果允许 \mathbb{E}^2 中的对象在 \mathbb{E}^3 中运动，则以 \mathbb{E}^2 中的反射轴为旋转轴在 \mathbb{E}^3 旋转 180 度，就可以把 \mathbb{E}^2 中的对象运动到跟“它在 \mathbb{E}^2 中关于该轴的反射像”重合）。

下述命题是显然的，其证明留作练习：

命题 3.2.6. (等距/刚体变换的复合)

设 ϕ_1, ϕ_2 都是 \mathbb{E}^3 到自身的几何变换。

- (1) 若 ϕ_1, ϕ_2 都是等距变换，则 $\phi_2 \circ \phi_1$ 也是等距变换。
(2) 若 ϕ_1, ϕ_2 都是刚体变换，则 $\phi_2 \circ \phi_1$ 也是刚体变换。



因为几何变换的逆变换也是同类的几何变换，所以 \mathbb{E}^3 的全部等距变换构成一个群，称为 \mathbb{E}^3 的**等距变换群**；类似地， \mathbb{E}^3 的全部刚体变换也构成一个群，称为 \mathbb{E}^3 的**刚体变换群**。根据定义，刚体变换群比等距变换群要小，是等距变换群的一个子群。

¶ 等距变换的保角性与平移不变性

下面说明等距变换具有平移不变性，从而可以从“点的变换”诱导出“向量的变换”。

引理 3.2.7. (等距变换的平移不变性)

设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是等距变换，则

- (1) 它具有保角性：对于任意三点 A, B, C ，均有 $\angle ABC = \angle \phi(A)\phi(B)\phi(C)$ 。
(2) 它具有平移不变性： $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} = \overrightarrow{\phi(C)\phi(D)}$ 。



证明 (1) 根据定义, 等距变换保持距离不变, 即

$$|AB| = |\phi(A)\phi(B)|, \quad |BC| = |\phi(B)\phi(C)|, \quad |CA| = |\phi(C)\phi(A)|.$$

于是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle\phi(A)\phi(B)\phi(C)$ 全等, 从而 $\angle ABC = \angle\phi(A)\phi(B)\phi(C)$ 。

(2) 假设 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. 由定义, $|\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}| = |\overrightarrow{\phi(C)\phi(D)}|$, 即向量 $\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}$ 与 $\overrightarrow{\phi(C)\phi(D)}$ 具有相同的长度。接下来证明它们具有相同的方向。不妨设 $C \neq A$ 。因为 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{CD} 具有相同的方向, 根据定义2.1.4, B, D 在直线 AC 的同侧, 且若在 AC 的延长线上取一点 E , 则 $\angle EAB = \angle ECD$ 。因为等距变换是单射, 所以“保持不相交性, 即 $\phi(C), \phi(E)$ 在直线 $\phi(A)\phi(C)$ 的同侧。在 AC 的延长线上取一点 E 。根据保距性, $\phi(E)$ 在 $\phi(A)\phi(C)$ 的延长线上。最后由保角性,

$$\angle\phi(E)\phi(A)\phi(B) = \angle EAB = \angle ECD = \angle\phi(E)\phi(C)\phi(D).$$

故由定义知向量 $\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}$ 与 $\overrightarrow{\phi(C)\phi(D)}$ 具有相同的方向, 从而结论得证。 \square

特别地, 任意等距变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 就诱导了一个向量变换

$$\tilde{\phi}: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3, \quad \tilde{\phi}(\overrightarrow{AB}) := \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

由定义, $\tilde{\phi}$ 必须把零向量映成零向量。下面证明该保向量的范数以及向量间的内积(特别地, 它也保持向量间的夹角不变)。

命题 3.2.8. (等距变换保长度、角度)

设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 为等距变换, 则对任意向量 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}^3$, 有

- (1) $|\tilde{\phi}(\vec{u})| = |\vec{u}|$,
- (2) $\tilde{\phi}(\vec{u}) \cdot \tilde{\phi}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.



证明 (1) 由定义, 这是显然的。

(2) 由平移不变性, 不妨将 \vec{u}, \vec{v} 的起点都移到同一点 A 。设 $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, 则 $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle BAC$ 。于是由 $\tilde{\phi}$ 的定义以及 ϕ 的保距性、保角性即得结论。 \square

刚体变换的例子: 平移

下面说明 \mathbb{E}^3 中的平移变换都是刚体变换。

设 $T: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个平移变换。则

- (i) T 保持两点间距离不变, 因为

$$d_E(T(P), T(Q)) = |\overrightarrow{T(P)T(Q)}| = |\overrightarrow{PQ}| = d_E(P, Q), \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}^3.$$

- (ii) T 保持右手系, 因为由“向量在平移下的不变性”可知右手系 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ 平移后依然是同一个向量组 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, 从而还是右手系。

由定义, 平移变换 $T: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 所诱导的“向量变换” $\tilde{T}: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 跟“平移量”无关, 是一个恒等映射:

$$\tilde{T}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{T(A)T(B)} = \overrightarrow{AB}.$$

注 3.2.9. 反射变换是等距变换但不是刚体变换: 设 R_α 是以平面 α 为反射平面的反射变换。由命题2.1.3可知 R_α 保持两点间距离不变, 从而它是等距变换。另一方面, 设

\vec{e}_x, \vec{e}_y 是 α 内的两个单位正交向量. 取 e_z 使得 $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ 形成右手系. 则

$$(R_\alpha(\vec{e}_x), R_\alpha(\vec{e}_y), R_\alpha(\vec{e}_z)) = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, -\vec{e}_z)$$

是左手系, 故 R_α 翻转定向, 从而不是刚体变换.

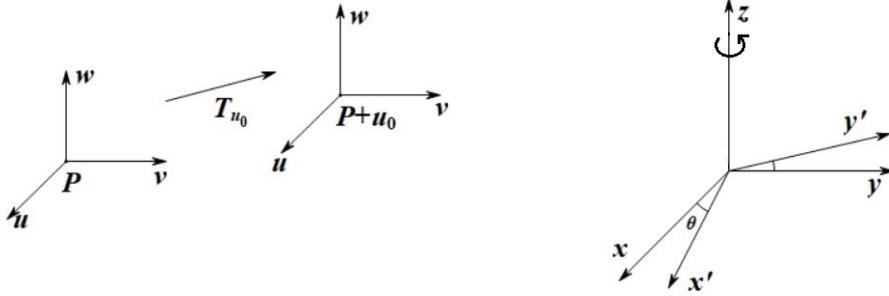


图 3.13: 平移与旋转

¶ 刚体变换的例子：旋转

接下来考察 \mathbb{E}^3 中的旋转变换. 以转动轴为 z 轴建立坐标系, 可以不妨设所考虑的旋转变换是“围绕 z 轴, 从 z 轴正方向看向原点时是逆时针方向转动 θ_0 角度”的旋转变换 R_{z+, θ_0} (如上图所示). 此时,

$$R_{z+, \theta_0}(x, y, z) = (x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0, x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0, z)$$

于是,

(i) R_{z+, θ_0} 保持两点间距离不变: 对任意 $P, Q \in \mathbb{E}^3$,

$$\begin{aligned} & (d_E(R_{z+, \theta_0}(P), R_{z+, \theta_0}(Q)))^2 \\ &= \langle R_{z+, \theta_0}(Q) - R_{z+, \theta_0}(P), R_{z+, \theta_0}(Q) - R_{z+, \theta_0}(P) \rangle \\ &= |((x_2 - x_1) \cos \theta_0 - (y_2 - y_1) \sin \theta_0, (x_2 - x_1) \sin \theta_0 + (y_2 - y_1) \cos \theta_0, z_2 - z_1)|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 \cos^2 \theta_0 - 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \theta_0 \sin \theta_0 + (y_2 - y_1)^2 \sin^2 \theta_0 \\ &\quad + (x_2 - x_1)^2 \sin^2 \theta_0 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \theta_0 \sin \theta_0 + (y_2 - y_1)^2 \cos^2 \theta_0 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= (d_E(P, Q))^2, \end{aligned}$$

从而由距离的非负性可知 $d_E(R_{z+, \theta_0}(P), R_{z+, \theta_0}(Q)) = d_E(P, Q)$.

(ii) R_{z+, θ_0} 保持定向: 因为

$$(R_{z+, \theta_0}(\mathbf{e}_1) \times R_{z+, \theta_0}(\mathbf{e}_2)) \cdot R_{z+, \theta_0}(\mathbf{e}_3) = \begin{vmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 & 0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

所以右手系 $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ 在旋转变换后依然给出正的定向。

从而 \mathbb{E}^3 中的旋转变换都是刚体变换。

¶ 刚体变换的代数表达

下面观察直角坐标系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 在刚体变换下的变化，并导出刚体变换的代数表达式。设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是刚体变换， $\tilde{\phi}$ 是它诱导的向量变换。令

$$\vec{f}_i = \tilde{\phi}(\vec{e}_i), \quad i = 1, 2, 3$$

由于 $\tilde{\phi}$ 保长且保角，所以 $\{\vec{f}_i\}$ 仍然是单位长度，且两两垂直。更进一步，由于 $\tilde{\phi}$ 保定向，所以 $\{O; \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ 仍然是满足右手螺旋系的一个直角坐标系。下面证明

引理 3.2.10. (向量变换的线性性)

刚体变换 ϕ 诱导的向量变换 $\tilde{\phi}$ 是一个线性变换，即满足

$$\tilde{\phi}(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \tilde{\phi}(\vec{u}) + \mu \tilde{\phi}(\vec{v}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}^3, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$



证明 因为 $\{O; \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ 是直角坐标系，所以

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\vec{u}) &= (\tilde{\phi}(\vec{u}) \cdot \vec{f}_1) \vec{f}_1 + (\tilde{\phi}(\vec{u}) \cdot \vec{f}_2) \vec{f}_2 + (\tilde{\phi}(\vec{u}) \cdot \vec{f}_3) \vec{f}_3 \\ &= (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \vec{f}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2) \vec{f}_2 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) \vec{f}_3. \end{aligned}$$

于是对任意 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}^3$ 以及任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ，都有

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) &= ((\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{e}_1) \vec{f}_1 + ((\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{e}_2) \vec{f}_2 + ((\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{e}_3) \vec{f}_3 \\ &= \lambda \tilde{\phi}(\vec{u}) + \mu \tilde{\phi}(\vec{v}). \end{aligned}$$

□

特别地，若记

$$\vec{f}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

则有

- ① $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1, i = 1, 2, 3;$
- ② $x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j = 0, 1 \leq i \neq j \leq 3;$
- ③ $\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 1;$

其中 ① 是因为 ϕ 保长度，② 是因为 ϕ 保角度，③ 是因为 ϕ 保长度、角度、定向，从而保定向体积。结合 $\tilde{\phi}$ 与 ϕ 的关系，我们就得到了

命题 3.2.11. (刚体变换的代数表达)

对于任意刚体变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ ，则存在点 $O'(a, b, c)$ 以及满足条件 ①、②、③ 的向量

$$\vec{f}_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{f}_2 = (x_2, y_2, z_2), \quad \vec{f}_3 = (x_3, y_3, z_3),$$

使得

$$\phi(x, y, z) = x \cdot \vec{f}_1 + y \cdot \vec{f}_2 + z \cdot \vec{f}_3 + O'.$$



在后文中我们将经常采用“列”的方式表示点的坐标，例如记

$$\vec{f}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix},$$

则刚体变换 ϕ 可被写成

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

或者被简记为

$$\phi(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{a}.$$

¶ 刚体变换的分解

因为平移变换和旋转变换都是刚体变换，所以平移和旋转的复合依然是刚体变换。下面利用刚体变换的坐标表达证明所有刚体变换都是平移和旋转的复合：

定理 3.2.12. (刚体变换 = 旋转 + 平移)

任意刚体变换都可写成一个平移和一个旋转的复合。



证明 设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 为一刚体变换，且 $\phi(O) = O'$ 。则复合映射

$$T_{-O'} \circ \phi: E^3 \xrightarrow{\phi} E^3 \xrightarrow{T_{-O'}} E^3$$

仍为刚体变换，将 O 点映为 O 点。因此只需证明：

断言：若 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个刚体变换，且 $\phi(O) = O$ ，则 ϕ 是旋转变换。

我们分两步证明这个断言。

第一步：若 ϕ 保持某条过 O 的直线 l 上的所有点(逐点)不动，则 ϕ 是一个以 l 为旋转轴的旋转变换。

原因：取右手系 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ，使得 \vec{e}_3 是 l 的一个方向向量。由假设条件， $\tilde{\phi}(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$ 。因为 $\tilde{\phi}$ 保内积， $\tilde{\phi}(\vec{e}_1)$ 和 $\tilde{\phi}(\vec{e}_2)$ 必然落在垂直于 l 的平面 α 里，即位于由 \vec{e}_1 和 \vec{e}_2 张成的平面 α 里。此外， $(\tilde{\phi}(\vec{e}_1), \tilde{\phi}(\vec{e}_2), \tilde{\phi}(\vec{e}_3))$ 依然是一个右手系，所以若 $\tilde{\phi}(\vec{e}_1)$ 是 \vec{e}_1 在平面 α 里绕 \vec{e}_3 轴按照某方向旋转 θ 角度所得的向量，则 $\tilde{\phi}(\vec{e}_2)$ 是 \vec{e}_2 在平面 α 里绕 e_3 轴按照该方向旋转 θ 角度所得的向量。换而言之， $\tilde{\phi}$ 在 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 上的效果跟“在 \mathbb{E}^3 中绕 \vec{e}_3 轴按照该方向旋转 θ 角度的旋转变换”的效果是一样的。最后，由命题3.2.11，刚体变换是由它的诱导变换在 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 上的结果以及 $\phi(O)$ 决定的，所以 ϕ 是就是旋转变换。

第二步： ϕ 一定保持某条过 O 的直线 l 上的所有点(逐点)不动。

记 $\tilde{\phi}(\vec{e}_i) = \vec{f}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 。首先我们断言

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 - 1 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

事实上，

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 - 1 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} + x_1 + y_2 + z_3 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_3z_1 - x_1z_3 + y_3z_2 - y_2z_3 - 1 \\ &= (x_1 + y_2 + z_3) - (x_1y_2 - x_2y_1 + x_1z_3 - x_3z_1 + y_2z_3 - y_3z_2). \end{aligned}$$

因为 $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ 是右手系，所以

$$\vec{f}_1 = \vec{f}_2 \times \vec{f}_3, \quad \vec{f}_2 = \vec{f}_3 \times \vec{f}_1, \quad \vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2.$$

由 $\vec{f}_1 = \vec{f}_2 \times \vec{f}_3$ 可知 $x_1 = y_2z_3 - y_3z_2$. 类似地，可得 $y_2 = x_1x_3 - x_3z_1$, $z_3 = x_1y_2 - x_2y_1$. 于是断言得证.

作为推论，可知 $(x_1 - 1, x_2, x_3), (y_1, y_2 - 1, y_3), (z_1, z_2, z_3 - 1)$ 三个向量共面. 令 (a, b, c) 为该平面的一个法向量，则

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1 - 1, x_2, x_3) \cdot (a, b, c), \\ 0 &= (y_1, y_2 - 1, y_3) \cdot (a, b, c), \\ 0 &= (z_1, z_2, z_3 - 1) \cdot (a, b, c). \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = a, \\ ay_1 + by_2 + cy_3 = b, \\ az_1 + bz_2 + cz_3 = b. \end{cases}$$

于是

$$\phi(a, b, c) = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2) + c(x_3, y_3, z_3) = (a, b, c).$$

这说明 ϕ 保持点 $Q(a, b, c)$ 不动，从而保持向量 \overrightarrow{OQ} 不变. 最后由线性性， ϕ 保持直线 OQ 上的所有点不动. \square

作为该定理的一个简单推论，有

推论 3.2.13

所有保持原点不动（从而“原点在其旋转轴上”）的旋转变换

$$G = \{R_{l_+, \theta} \mid O \in l\}$$

构成刚体变换群的一个子群。（该群被称为三阶特殊正交群。）



证明 若 $f, g \in G$ ，则 f, g 都是刚体变换，且 $f(O) = O, g(O) = O$. 于是， f^{-1} 以及 $f \circ g$ 也都是刚体变换，且 $f^{-1}(O) = O, f \circ g(O) = O$. 故 $f^{-1}, f \circ g \in G$ ，即 G 是刚体变换群的一个子群. \square

注 3.2.14. 第二章第一节提到全体平移变换构成一个阿贝尔群. 与之不同的是，三阶特

殊正交群（以及“更大的”刚体变换群、等距变换群）都不是阿贝尔群，即这些群的乘法运算是非交换的：

令 R_1 为“以 z 轴为旋转轴，将 x 轴转至 y 轴”的旋转变换， R_2 为“以 x 轴为旋转轴，将 y 轴转至 z 轴”的旋转变换，则



图 3.14：两种旋转变换

$$R_1 \circ R_2(1, 0, 0) = R_1(1, 0, 0) = (0, 1, 0),$$

$$R_2 \circ R_1(1, 0, 0) = R_2(0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

于是 $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$ 。类似地，不难证明平移变换与旋转变换不交换。

整体来说，交换性是简单的，而非交换性则让我们的世界更加丰富多彩。例如，魔方游戏很有趣，而其理论背景就是三阶特殊正交群的非交换性。

3.2.2 分类

¶ 等价关系与分类

在研究数学中特定类型的对象时，分类往往是一个核心问题：什么时候两个对象可以被视为是“同类”或者“相同”的？同一类中是否可以找出一个简单的“代表元”？总共有哪些多少不同的类？这样的问题往往是深刻而有趣的，对这些问题的探索与回答则是推动现代数学发展的源动力之一。

分类的前提是定义什么叫做“等价”，这是一种特殊的关系：（见附录 A.1）：

定义 3.2.15. (等价关系)

设 X 为集合。若集合 $X \times X$ 的子集 R 满足如下三条：

- (1) 自反性： $\forall x \in X, (x, x) \in R$ ；
- (2) 对称性： $\forall x, y \in X$ ，若 $(x, y) \in R$ ，则 $(y, x) \in R$ ；
- (3) 传递性： $\forall x, y, z \in X$ ，若 $(x, y) \in R, (y, z) \in R$ ，则 $(x, z) \in R$ ，

则称 R 为 X 上的一个等价关系。

【若 $(x, y) \in R$ ，则记为 $x \stackrel{R}{\sim} y$ （在不引起混淆的情况下，常被记为 $x \sim y$ ）。】



例 3.2.16. 下面是等价关系的一些例子：

- (1) 平凡关系：对于任意集合 X ，考虑 $R = \{(x, x) \mid x \in X\}$ ，即笛卡尔积 $X \times X$ 中的对角线。不难验证 R 是一个等价关系，且 $x \stackrel{R}{\sim} y$ 当且仅当 $x = y$ ，即每个元素仅跟自己等价。这是任意集合上“最小”的等价关系。（注意根据定义，若 R 是 X 上的等价关系，则 $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset R$ 。）
- (2) E^3 中三角形的合同关系：对于集合

$$X = \{\triangle ABC \mid A, B, C \in E^3 \text{ 为不共线的三点}\},$$

考慮

$$R = \{(\triangle ABC, \triangle A'B'C') \mid \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'\}.$$

则 R 是“所有三角形的集合”上的一个等价关系，它所描述的是三角形之间的合同（即全等）关系。

在本书中，我们会碰到的等价关系往往具有下面的形式：设 A 是一个集合，

$$G = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ 满足某些特定的限制}\}$$

是 A 的某个变换群，即它满足

- 恒等变换 $\text{Id} \in G$ ；（这实际上是下面两条的推论。）
- G 中的每个元素 f 均可逆，且 $f^{-1} \in G$ ；
- 若 $f, g \in G$ ，则 $f \circ g \in G$.

考慮由 A 的某些子集所组成的集合 X ，使得若 $B \in X, f \in G$ ，则 $f(B) \in X$. 则

$$R = \{(B, C) \mid \text{存在 } f \in G \text{ 使得 } f(B) = C\}$$

是 X 上的一个等价关系，（例如取 $A = \mathbb{E}^3$, G 为 \mathbb{E}^3 的等距变换群， X 为 \mathbb{E}^3 中所有三角形的集合，则我们得到的就是“‘三角形全等’等价关系”），其验证如下：

- 因为 $\text{Id}(B) = B$ ，所以 $(B, B) \in R$.
- 若 $(B, C) \in R$ ，即存在 $f \in G$ 且 $f(B) = C$ ，则 $f^{-1} \in G$ 且 $f^{-1}(C) = B$ ，即 $(C, B) \in R$.
- 若 $(B, C) \in R, (C, D) \in R$ ，即存在 $f, g \in G$ 使得 $f(B) = C, g(C) = D$ ，则 $g \circ f \in G$ 且 $g \circ f(B) = D$ ，即 $(B, D) \in R$.

读者可以从这个验证过程中，体会出上述“变换群定义的三个条件”跟“等价关系定义中的三条”之间的对应关系。

¶ 等价类

给定集合 X 上的等价关系 R ，就可以将对象按照是否等价进行分类：

- (1) 对于任意 $x \in X$ ，找到所有跟 x 等价的元素，即集合

$$[x] := \{y \in X \mid x \stackrel{R}{\sim} y\}.$$

该集合被称为元素 x 所在的等价类。

- (2) 找出所有可能的等价类。所有等价类的集合

$$X / \stackrel{R}{\sim} := \{[x] \mid x \in X\}.$$

被称为集合 X 关于该等价关系的商集。

换而言之，分类的目的是找到所有等价类，并在每个等价类中找到一个相对比较简单的代表元，使得对于任意元素，都最终能判断它跟哪个代表元是一类的。

例 3.2.17. 考虑在“ \mathbb{E}^3 中由所有三角形组成的集合”上由“三角形全等”给出的等价关系。则每个等价类 $[\triangle ABC]$ 包含所有跟 $\triangle ABC$ 全等的三角形，而等价类的集合 $X / \stackrel{R}{\sim}$

则等同于集合 (想想为什么)

$$\{(a, b, c) \mid a \geq b \geq c > 0, \text{ 且 } b + c > a\}.$$

例 3.2.18. 在集合 $X = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ 上定义等价关系

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ 使得 } (x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_2, y_2, z_2).$$

几何上, $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ 表示点 (x_1, y_1, z_1) 和点 (x_2, y_2, z_2) 位于同一条过原点的直线上. 不难验证, R 是一个等价关系, 而每一个等价类则恰好是一条过原点的直线 (去掉原点). 商集合

$$\mathbb{RP}^2 := \mathbb{E}^3 - \{0\} / \sim$$

被称为**实射影平面**. 本书第五章、第六章将简要讨论该空间的几何、拓扑性质.

注 3.2.19. 假设 G 是一个变换群, 作用在某个集合 X 上, 从而如上文所解释的那样, 给出了 X 上的一个等价关系. 则对于任意 $B \in X$, B 所在的等价类

$$G \cdot B := \{f(B) \mid f \in G\}$$

被称为 B 在群 G 作用下的**轨道**, 而商集 X / \sim 则恰是所有轨道的集合.

¶ 分类的实质: 不变性

就几何而言, 隐藏在分类背后的往往是某种不变性. 比如, 球面所具有的几何性质是“其上的点到某个固定点有固定的距离(即半径)”. 显然这个性质不依赖于直角坐标系的选取. 但是该球面的方程式却随直角坐标系的选取而变化. 几何性质是不依赖于直角坐标系选取的那些性质. 对于球面来说, 其半径为几何性质, 而其中某直角坐标系下对应的二次方程式的系数则不是几何性质. 这时, 我们注意到 \mathbb{E}^3 上的刚体变换 (命题3.2.11) 其本质上就是直角坐标系的坐标变换. 由于直角坐标系的选取是人为的, 所以去考察在所有直角坐标系下都具有的性质是**回归对称**. 可以这么说, 研究几何图形在刚体变换/等

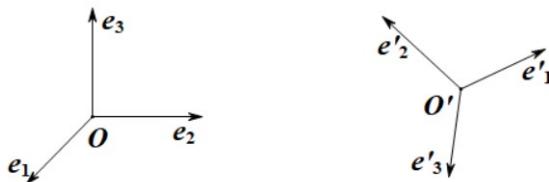


图 3.15: 坐标变换 $\{O; e_1, e_2, e_3\} \xrightarrow{\phi} \{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$

距变换下的分类问题其本质就是研究图形的几何性质。

最后, 我们指出几何学中的分类问题与物理学的“相对性”有着密不可分的联系。用通俗的话讲, 物理学中的“相对性”就是物理学定律不依赖于参照系的选取。为了描述一个物理现象/实验, 我们必须事先选定一个参照系。然而, 参照系的选取完全是人为的。因为参照系选取的不同, 同一个物理实验所展现的实验数据有所不同。但是, 最后的物理定律应该独立于这些差异。所以, 在现代物理学理论中, 不变性处于一个中心的地位。

3.2.3 刚体变换下的分类

¶ \mathbb{E}^n 中多项式零点集与分类

一般地，假设 $F = F(x_1, \dots, x_n)$ 是一个 n 元 d 次多项式（下面只考虑 $d = 2, n = 2$ 或 $n = 3$ 的情形）。记 F 的零点集为

$$Z_F := \{(x_1, \dots, x_n) \mid F(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

为了对这样的几何对象在刚体变换下进行分类，我们令

$$X_{n,d} = \{Z_F \mid F \text{ 是一个 } n \text{ 元 } d \text{ 次多项式}\}.$$

一个自然的问题是：若 ϕ 是刚体变换， $Z_F \in X_{n,d}$ ，是否有 $\phi(Z_F) \in X_{n,d}$ ？

事实上，可以考虑更一般的映射。若 $\phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ 是一个可逆变换，其分量都是一次函数（即存在 $n \times n$ 可逆矩阵 A 使得 $\phi(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{a}$ ），则称 ϕ 为**仿射变换**。由命题3.2.11可知刚体变换都是仿射变换。

我们首先证明

引理 3.2.20. (变换下的零点集)

设 $\phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ 是一个仿射变换，则对于任意 n 元函数 F ，都有

$$\phi(Z_F) = Z_{F \circ \phi^{-1}}.$$



证明 根据定义，

$$Z_F = \{(x_1, \dots, x_n) \mid F(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \phi(Z_F) &= \{\phi(x_1, \dots, x_n) \mid F(x_1, \dots, x_n) = 0\} \\ &= \{(y_1, \dots, y_n) \mid F \circ \phi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = 0\} \\ &= Z_{F \circ \phi^{-1}}. \end{aligned}$$

□

于是需要研究形如 $F \circ \phi$ 的函数：

命题 3.2.21. (多项式与仿射变换)

设 $\phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ 是一个仿射变换，而 $F = F(x_1, \dots, x_n)$ 是一个 n 元 d 次多项式，则 $F \circ \phi$ 仍然是 n 元 d 次多项式。



证明 因为 $\phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ 是一个“分量都是一次函数”的可逆变换，所以 ϕ^{-1} 也是一个“分量都是一次函数”的可逆变换。另一方面，多项式复合一次函数后，其次数是不增加的。所以

$$d = \deg(F) = \deg(F \circ \phi \circ \phi^{-1}) \leq \deg(F \circ \phi) \leq d,$$

于是 $\deg(F \circ \phi) = d$ 。

□

特别地， $X_{n,d}$ 中的元素在刚体变换群（或更一般地仿射变换）下依然在 $X_{n,d}$ 中，从而可以考虑刚体变换群下 $X_{n,d}$ 中元素的分类问题。

¶ \mathbb{E}^2 中二次曲线的刚体分类

根据定义, \mathbb{E}^2 中的一条二次曲线 C 是指由下述二次方程所定义的曲线:

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0). \quad (*)$$

下面考虑 \mathbb{E}^2 中二次曲线的刚体分类问题。根据定义, 若 F_1, F_2 是两个二次函数, 且它们所定义的二次曲线分别为 C_1, C_2 , 则 C_1, C_2 在刚体变换下等价当且仅当存在刚体变换 $\phi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 使得 $F_2 = F_1 \circ \phi$. 所以, 二次曲线的分类, 就化归为二次方程的化简: 通过刚体变换, 把定义二次曲线的二次方程化简到尽可能简单的形式。最终可以看到, 任意二次方程定义的二次曲线都是某一条我们熟悉的曲线。

为此, 令 $\phi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad (**)$$

为平面刚体变换。正如上面所证明的, $F \circ \phi$ 仍然是一个二次方程, 并且由

$$F(x, y) = 0$$

所定义的曲线跟由

$$F \circ \phi(x, y) = 0$$

所定义的曲线在刚体变换下是等价的, 从而可以将它们视为“同一条”曲线。

接下来在刚体变换下分类所有的平面二次曲线。先从 (*) 开始。在刚体变换 (**) 下, 计算可得

$$F \circ \phi(x, y) = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f' \quad (***)$$

其中

$$\begin{aligned} a' &= a \cos^2 \theta + b \sin 2\theta + c \sin^2 \theta \\ b' &= (c - a) \cos \theta \sin \theta + b \cos 2\theta \\ c' &= a \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta - b \sin 2\theta \\ d' &= (ah + bk + d) \cos \theta + (bh + ck + e) \sin \theta \\ e' &= (bh + ck + e) \cos \theta - (ah + bk + d) \sin \theta \\ f' &= ah^2 + 2bhk + ck^2 + 2dh + 2ek + f \end{aligned}$$

观察: 取 $\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{a-c}{2b}$, 则 $b' = 0$ (若 $b = 0$, 则取 $\theta = 0$), 从而新的二次函数没有混合项!

如此经过旋转角 θ 之后, 方程 (***)) 变为

$$F \circ \phi(x, y) = a'x^2 + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f'.$$

接下来只要分类讨论即可:

情形 1 $a'c' \neq 0$.

取平移变换 $\phi'(x, y) = (x - \frac{d'}{a'}, y - \frac{e'}{c'})$, 则施加该平移之后, 可得

$$F \circ \phi \circ \phi'(x, y) = a'x^2 + c'y^2 + f''$$

其中 $f'' = f' - a'(\frac{d'}{a'})^2 - c'(\frac{e'}{c'})^2$.

由于 $F = 0 \iff -F = 0$, 所以不妨假设 $a' > 0$.

情形 1.1 $a'c' > 0$ 且 $f'' > 0$:

此时方程无解, 从而 $C = \text{空集}$.

情形 1.2 $a'c' > 0$ 且 $f'' < 0$:

此时方程可化简为

$$\frac{x^2}{-f''/a'} + \frac{y^2}{-f''/c'} = 1,$$

从而 $C = \text{椭圆}$.

此时还要进一步辨别这些椭圆中, 哪些椭圆在刚体变换下是一样的。为此令 $\alpha = -f''/a' > 0$, $\beta = -f''/c' > 0$. 考虑两个这样的椭圆,

$$\frac{x^2}{\alpha_1} + \frac{y^2}{\beta_1} = 1 \quad \text{和} \quad \frac{x^2}{\alpha_2} + \frac{y^2}{\beta_2} = 1.$$

显然, 若 $(\alpha_1, \beta_1) = (\beta_2, \alpha_2)$, 则这两个方程所代表的椭圆在刚体变换下是一样的 (因为这两个椭圆相差一个 90 度的旋转变换 $(x, y) \mapsto (y, -x)$)。故不妨假设 $\alpha \geq \beta$ 。

此外, 若 $\alpha_1 \geq \beta_1$ 且 $\alpha_2 \geq \beta_2$, 且两个方程代表同样的椭圆, 则由刚体变换保长保角的性质可知两个椭圆具有相同的长、短轴, 从而 $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$.

于是我们证明了: 在这种情况下, C 在刚体变换下等价于且仅等价于下述椭圆族中的一个:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1, \quad \alpha \geq \beta > 0.$$

情形 1.3 $a'c' > 0$ 且 $f'' = 0$:

此时方程唯一的解是 $(0, 0)$, 从而 $C = \text{单点集}$.

情形 1.4 $a'c' < 0$ 且 $f'' \neq 0$:

此时方程可化简为

$$\frac{x^2}{-f''/a'} + \frac{y^2}{-f''/c'} = 1$$

从而 $C = \text{双曲线}$.

用情形 1.2 类似的分析, 可证明: 在这种情况下, C 在刚体变换下等价于且仅等价于下述双曲线族中的一个:

$$\frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta} = 1, \quad \alpha, \beta > 0$$

情形 1.5 $a'c' < 0$ 且 $f'' = 0$:

此时方程可以化为

$$y = \pm \frac{x}{\sqrt{-c'/a'}},$$

从而 $C = \text{一对相交直线}$.

此时, 不难证明: 在这种情况下, C 在刚体变换下等价于且仅等价于下述相交直线族中的一个:

$$y = \pm kx, \quad 0 < k \leq 1.$$

情形 2 $a'c' = 0$.

由于 $F \circ \phi$ 是二次函数, a', c' 必有一个非零。不妨假设 $a' \neq 0$ (如果 $a' = 0, c' \neq 0$, 那么在旋转变换 $(x, y) \mapsto (y, -x)$ 后就有 $a' \neq 0, c' = 0$). 复合上一个平移变换

$$\phi''(x, y) = \left(x - \frac{d'}{a'}, y\right)$$

后, 可得

$$F \circ \underbrace{\phi \circ \phi''}_{\text{仍是一个刚体变换}}(x, y) = a'x^2 + 2e'y + f'',$$

其中 f'' 是常数。

情形 2.1 $e' \neq 0$:

此时方程可化为

$$y = -\frac{a'}{2e'}x^2 + \frac{f''}{2e'},$$

从而 $C = \underline{\text{抛物线}}$ 。

进一步地, 可以证明: 在这种情况下, C 在刚体变换下等价于且仅等价于下述抛物线族中的一个:

$$y = kx^2, \quad k > 0.$$

情形 2.2 $e' = 0$.

此时我们还要按照 a', f'' 的符号进一步分类:

(i). $a'f'' > 0$:

此时方程无解, 我们再次得到 $C = \underline{\text{空集}}$

(ii). $a'f'' < 0$:

此时方程可化为 $x = \pm \sqrt{-\frac{f''}{a'}}$, 从而 $C = \underline{\text{一对平行直线}}$.

进一步分析可知: 在这种情况下, C 在刚体变换下等价于且仅等价于下述平行直线族中的一个:

$$x = \pm k, \quad k > 0.$$

(iii). $f'' = 0$:

此时方程可化为 $x = 0$, 从而 $C = \underline{\text{一条直线}}$.

为了完成分类, 还要证明不同类中的曲线在刚体变换下互不等价 (留作练习)。于是最终得到

定理 3.2.22. (平面二次曲线的刚体分类)

\mathbb{E}^2 中每条二次曲线在刚体变换下都等价于下列 8 类曲线之一:

①空集, ②椭圆 $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1, (\alpha \geq \beta > 0)$ ③单点集

④双曲线 $\frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta} = 1, (\alpha, \beta > 0)$ ⑤一对相交直线 $y = \pm kx, (0 < k \leq 1)$

⑥抛物线 $y = kx^2, (k > 0)$ ⑦一对平行线 $x = \pm k, (k > 0)$ ⑧一条直线

且不同类的二次曲线都不等价, 同一类中不同参数对应于的二次曲线也不等价。



3.3 二次曲面的刚体分类

本节的主要结果如下：

定理 3.3.1. (欧拉, 1748)

令 X 为 E^3 中全体二次曲面的集合，则在刚体变换下 X 可分为 15 大类，

(空集) $M_0 = \{[x^2 + 1 = 0]\}$

(平面) $M_1 = \{[x^2 = 0]\}$

(一对平行的平面) $M_2 = \{[x^2 - a = 0] | a > 0\}$,

(抛物柱面) $M_3 = \{[x^2 - ay = 0] | a > 0\}$,

(直线) $M_4 = \{[x^2 + y^2 = 0]\}$

(椭圆柱面) $M_5 = \left\{ \left[\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0 \right] \middle| a \geq b > 0 \right\},$

(椭圆抛物面) $M_6 = \left\{ \left[\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - z = 0 \right] \middle| a \geq b > 0 \right\},$

(一对相交的平面) $M_7 = \{[x^2 - ay^2 = 0] | 1 \geq a > 0\}$,

(双曲柱面) $M_8 = \left\{ \left[\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + 1 = 0 \right] \middle| a, b > 0 \right\},$

(双曲抛物面) $M_9 = \left\{ \left[\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + z = 0 \right] \middle| a, b > 0 \right\},$

(点) $M_{10} = \{[x^2 + y^2 + z^2 = 0]\}$

(椭球面) $M_{11} = \left\{ \left[\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0 \right] \middle| a \geq b \geq c > 0 \right\},$

(单叶双曲面) $M_{12} = \left\{ \left[\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} - 1 = 0 \right] \middle| a \geq b > 0, c > 0 \right\},$

(椭圆锥面) $M_{13} = \left\{ \left[\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - z^2 = 0 \right] \middle| a \geq b > 0 \right\},$

(双叶双曲面) $M_{14} = \left\{ \left[\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} + 1 = 0 \right] \middle| a \geq b > 0, c > 0 \right\},$

其中不同类的二次曲面在刚体变换下不等价；同一类二次曲面中，不同的参数对应的二次曲面在刚体变换下也不等价。



根据上述定理，二次曲面在刚体变换下共有 15 类。其中大类 M_0, M_1, M_4, M_{10} 只有一个元素，大类 M_2, M_3, M_7 的类由一个参量确定， $M_5, M_6, M_8, M_9, M_{13}$ 中的类由两个参量确定，大类 M_{11}, M_{12}, M_{14} 中的类由三个参量确定。我们把上述定理 M_0, M_1, M_4, M_{10} 之外的二次方程称为**二次曲面方程的标准形式**。标准形式方程中的系数是反映二次曲面几何性质的几何量。在带参量的标准方程中，参量本质上确定了标准方程对应的二次曲面的合同类。所以标准方程，尤其是带参量的标准方程，在判定二次曲面的合同关系时，是非常重要的。

接下来我们证明定理3.3.1。

¶ 第一步，二次项化简

设所考虑的二次曲面 S 由 $\{F = 0\}$ 给出，其中 F 是一个三元二次多项式

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j.$$

为了方便起见，我们记

$$F_2(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

以及

$$F_1(x, y, z) = gx + hy + iz, \quad F_0(x, y, z) = j.$$

跟 \mathbb{E}^2 中二次曲线的分类类似，第一步是用旋转变换消去二次项 $F_2(x, y, z)$ 中的“混合项” xy, xz 和 yz 。当然，可以预想而知的是，如果在 \mathbb{E}^3 中重复 \mathbb{E}^2 中的计算，需要解一个异常复杂的方程组。此处我们借用线性代数这个强大的工具来解救我们脱离计算的苦海（由此可见线性代数的威力）。为此，我们首先写出“二次型” F_2 对应的矩阵。由例A.4.4，有

$$\begin{aligned} F_2(x, y, z) &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz \\ &= (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是，“二次型” F_2 对应的矩阵为

$$C_2 = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

它是一个对称阵。根据命题A.4.13，存在特殊正交矩阵 A 使得

$$A^T C_2 A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

因为 A 是特殊正交阵，变换

$$\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

是一个刚体变换（旋转）。记

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C}_1 = (g \ h \ i), \quad \widetilde{C}_1 A = (\alpha \ \beta \ \gamma),$$

则

$$\begin{aligned}
 F \circ \phi(u) &= F(Au) = F_2(Au) + F_1(Au) + F_0 \\
 &= (Au)^T C_2 Au + \tilde{C}_1(Au) + j \\
 &= u^T (A^T C_2 A) u + (\tilde{C}_1 A) u + j \\
 &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \tilde{C}_1(Au) + C_0 \\
 &= \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + j,
 \end{aligned}$$

其中 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$. 注意因为二次项 F_2 不恒为零, 所以矩阵 C_2 不是零矩阵, 从而 $\lambda_1 \neq 0$.

注 3.3.2. (1) 本课程中我们不假设读者会“从一般的对称阵出发, 计算 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 以及对应的正交阵 A ”。习题中涉及到的分类问题是“可用配方法分类”完成分类的。

(2) 事实上, 对二次曲面进行刚体变换下的分类问题是线性代数中“对于对称阵做正交对角化”这个抽象理论的源头。而且, “对于三阶对称阵做正交对角化”实质上并不需要用到一般的线性代数理论, 而是可以用非常几何的方法完成, 参见习题 2 第 27 题。所以, 与其说本节是“应用抽象的线性代数结果进行二次曲面分类”, 不如说“通过二次曲面分类这个几何问题, 启发研究一般的‘对称矩阵正交对角化’这个代数问题”。

¶ 第二步, 分类讨论

在第一步中, 我们证明了可以应用旋转变换, 使得二次曲面 S 由方程(为简单起见, 我们把应用变换后的二次函数仍记为 F)

$$F(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + j = 0$$

给出, 其中 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$ 且 $\lambda_1 \neq 0$. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 均非零, 则不难通过平移变换消去一次项, 从而得到非常简单的方程, 这给出了“绝大部分”二次曲面的形状。不过为了分类的完备性, 还需要

- 讨论某些系数为零的情形。
- 对于每一类, 需要给出“最简参数”, 即证明不同的参数对应于不同的形状。

整个分类讨论过程较为繁琐, 分三大类九个小类(事实上是 18 小类)分别讨论。

情形 1 $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

因为 $F(x, y, z) = 0$ 当且仅当 $\lambda F(x, y, z) = 0(\lambda \neq 0)$, 不妨假设 $\lambda_1 = 1$, 从而

$$F(x, y, z) = x^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + j.$$

复合上平移变换

$$T_{-\alpha/2, 0, 0} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x - \alpha/2, \beta, \gamma)$$

后, 可以把二次曲面 S 的方程化简为

$$F(x, y, z) = x^2 + by + cz + d = 0.$$

情形 1.1 $b = c = 0$ 。

此时方程最简单，即

$$x^2 + d = 0.$$

继续考察 d 的符号：

- $d > 0$ 。此时 $x^2 + d = 0$, 无解。故 S 为空集 (M_0)。
- $d = 0$ 。此时 $x^2 = 0$, 即 $x = 0$ 。故 S 为平面 (M_1)。
- $d < 0$ 。此时 $x^2 = -d > 0$, 即

$$x = \pm\sqrt{-d}.$$

故 S 为平行的两个平面 (M_2)。

注意到两平行平面间的距离为 $2\sqrt{-d}$ 。因为刚体变换不改变距离, 所以

$$\begin{aligned} \{x^2 = -d\} &\equiv \{x^2 = -d'\} (d, d' < 0) \\ \iff 2\sqrt{-d} &= 2\sqrt{-d'} \\ \iff d &= d'. \end{aligned}$$

情形 1.2 $b = 0, c \neq 0$ 或 $c = 0, b \neq 0$ 。

- 通过旋转变换 (旋转轴是什么?)

$$(x, y, z) \mapsto (x, z, -y)$$

不妨假设 $b \neq 0, c = 0$.

若 $b > 0$, 则可以应用旋转变换 (旋转轴是什么?)

$$(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$$

将之转为为 $b < 0$ 的情形。此时 S 的方程为

$$x^2 - by + d = 0, \quad b > 0.$$

再次复合一个平移变换

$$(x, y, z) \mapsto (x, y + d/b, z)$$

可知, S 总能由刚体变换转化为某个

$$x^2 - ay = 0, \quad a > 0,$$

此时 S 是抛物柱面 (M_3).

- 接下来说明不同的参数 a 给出不同的抛物柱面:

$$\left. \begin{aligned} \{x^2 - ay = 0\} &\equiv \{x^2 - a'y = 0\} \\ a, a' &> 0 \end{aligned} \right\} \implies a = a'.$$

为此, 设

$$\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$$

是一个由矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 和平移量 (a_0, b_0, c_0) 给出的刚体变换, 且使得

$$\phi(\{x^2 - ay = 0\}) = \{x^2 - a'y = 0\}.$$

则

$$x^2 - ay = 0 \iff (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_0)^2 - a'(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_0) = 0.$$

因为方程 $x^2 - ay = 0$ 与 z 无关, 所以必然有

$$a_{13}^2 = 0, \quad a'a_{23} = 0,$$

于是

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad (\text{从而}) a_{33} = \pm 1.$$

若 $a_{33} = -1$, 可以如上面一样, 复合一个旋转变换使得 $a_{33} = 1$. 再由 $AA^T = I_3$ 可知

$$a_{31} = a_{32} = 0.$$

所以上述方程变为

$$x^2 - ay = 0 \iff (a_{11}x + a_{12}y + a_0)^2 - a'(a_{21}x + a_{22}y + b_0) = 0.$$

这说明平面刚体变换 (思考: 这为什么是平面刚体变换?)

$$\phi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

把抛物线 $\{x^2 - ay = 0\}$ 映为 $\{x^2 - ay' = 0\}$, 其中 $a, a' > 0$. 于是由平面二次曲线分类定理知 $a = a'$.

情形 1.3 $b, c \neq 0$.

此时有方程

$$x^2 - by - cz - d = 0.$$

通过类似于情形 1.2 开头的讨论, 不妨假设 $c \geq b > 0$. 复合旋转变换

$$(x, y, z) \mapsto (x, \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}y + \frac{-c}{\sqrt{b^2 + c^2}}z, \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}y + \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}z)$$

后方程变为

$$x^2 - \sqrt{b^2 + c^2}y + d = 0$$

从而转为情形 1.2。

情形 2 $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$.

应用平移变换, 不妨设此时 S 的方程为

$$F(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + cz + d = 0.$$

情形 2.1 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ 且 $c = 0$.

通过应用 “把 F 乘以-1” 以及旋转变换

$$(x, y, z) \mapsto (y, -x, z)$$

可以不妨假设 $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$.

接下来考察 d 的符号:

- $d > 0$. 此时 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0$, 无解。故 S 为空集 (M_0)。

• $d = 0$ 。此时 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$, 即 $x = y = 0$ 。故 S 为直线 (M_4)。

• $d < 0$ 。此时 S 的方程化为

$$\frac{x^2}{-d/\lambda_1} + \frac{y^2}{-d/\lambda_2} = 1,$$

即形如

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \quad a \geq b > 0.$$

故此时 S 为椭圆柱面 (M_5)。

还需说明不同的参数 a, b 给出不同的椭圆柱面:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \right\} &\equiv \left\{ \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} = 1 \right\} \\ a \geq b > 0, a' &\geq b' > 0 \end{aligned} \right\} \implies a = a', b = b'.$$

其证明跟情形 1.2 类似, 故此处从略.

情形 2.2 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ 且 $c \neq 0$.

同上, 依然可以不妨假设 $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$. 通过 z 轴方向的平移, 可以不妨设 $d = 0$. 再应用旋转变换

$$(x, y, z) \mapsto (-x, y, -z),$$

可以不妨假设 $c < 0$. 如果有必要的话, 可以复合旋转变换

$$(x, y, z) \mapsto (y, -x, z),$$

最终可以把 S 的方程化为

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - z = 0, \quad a \geq b > 0.$$

故此时 S 为椭圆抛物面 (M_6)。

类似于情形 1.2 的讨论, 可以证明不同的参数 a, b 给出不同的椭圆抛物面:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - z = 0 \right\} &\equiv \left\{ \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} - z = 0 \right\} \\ a \geq b > 0, a' &\geq b' > 0 \end{aligned} \right\} \implies a = a', b = b'.$$

细节依然从略。

情形 2.3 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ 且 $c = 0$.

不妨假设 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. 按照 d 是否为 0 分类:

• $d = 0$ 。此时方程为 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$, 即

$$x^2 - ay^2 = 0, \quad a > 0,$$

故 S 为一对相交的平面 (M_7)。

不难验证:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ x^2 - ay^2 = 0 \right\} &\equiv \left\{ x^2 - a'y^2 = 0 \right\} \\ a > 0, a' > 0 & \end{aligned} \right\} \implies a = a'.$$

• $d \neq 0$ 。通过应用旋转变换

$$(x, y, z) \mapsto (y, -x, z)$$

可以假设 $d > 0$, 从而此时 S 的方程化为

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + 1 = 0, \quad a, b > 0.$$

故此时 S 为双曲柱面 (M_8)。

我们依然把验证“不同的参数 a, b 给出不同的双曲柱面”留作练习：

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + 1 = 0 \right\} \equiv \left\{ \frac{x^2}{a'} - \frac{y^2}{b'} + 1 = 0 \right\} \\ a, b > 0, a', b' > 0 \end{array} \right\} \implies a = a', b = b'.$$

情形 2.4 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ 且 $c \neq 0$.

依然可以不妨假设 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. 再次应用 z 方向的平移, 可以设 $d = 0$. 如有必要, 再复合旋转变换后, S 的方程可转化为

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + z = 0, \quad a, b > 0.$$

故此时 S 为双曲抛物面 (M_9)。

可验证“不同的参数 a, b 给出不同的双曲抛物面”(留作练习):

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + z = 0 \right\} \equiv \left\{ \frac{x^2}{a'} - \frac{y^2}{b'} + z = 0 \right\} \\ a, b > 0, a', b' > 0 \end{array} \right\} \implies a = a', b = b'.$$

情形 3 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$.

此时, 通过平移变换, 可以把 S 的方程化为

$$F(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0.$$

情形 3.1 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 同号。

通过“乘以-1”以及旋转, 可以不妨假设 $\lambda_3 \geq \lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$. 再次按照 d 的符号分情况讨论:

- $d > 0$. 此时 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0$, 无解。故 S 为空集 (M_0)。
- $d = 0$. 此时 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$, 即 $x = y = z = 0$ 。故 S 为单点 (M_{10})。
- $d < 0$. 此时 S 的方程化为

$$\frac{x^2}{-d/\lambda_1} + \frac{y^2}{-d/\lambda_2} + \frac{z^2}{-d/\lambda_3} = 1,$$

即形如

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1, \quad a \geq b \geq c > 0.$$

故此时 S 为椭球面 (M_{11})。

还需说明不同的参数 a, b, c 给出不同的椭球面:

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \right\} \equiv \left\{ \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} + \frac{z^2}{c'} = 1 \right\} \\ a \geq b \geq c > 0, a' \geq b' \geq c' > 0 \end{array} \right\} \implies a = a', b = b', c = c'.$$

简证如下: 假设 $a > b$. 通过考察曲面上“最远两点间的距离”可知 $a = a'$. 故若刚体变换 ϕ 把第一个椭球面映为第二个椭球面, 则它把长轴映为长

轴, 从而把椭圆

$$\left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \right\} \cap \{x = 0\}$$

映为椭圆

$$\left\{ \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} + \frac{z^2}{c'} = 1 \right\} \cap \{x = 0\}.$$

于是由平面二次曲线的相关结论 (或者考察椭圆的长短轴) 即可知道 $b = b', c = c'$. $a = b$ 的情形类似, 此处不再赘述。

情形 3.2 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 符号不全相同。

不妨假设 $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0 > \lambda_3$.

依然按照 d 的符号分情况讨论:

- $d < 0$. 此时 S 的方程可化为

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} - 1 = 0, a \geq b > 0, c > 0$$

故此时 S 为单叶双曲面 (M_{12})。

还需说明不同的参数 a, b, c 给出不同的单叶双曲面:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} - 1 = 0 \right\} &\equiv \left\{ \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} - \frac{z^2}{c'} - 1 = 0 \right\} \\ a \geq b > 0, c > 0, a' \geq b' > 0, c' > 0 \end{aligned} \right\} \implies a = a', b = b', c = c'.$$

简证如下: 考虑单叶双曲面 $\left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} - 1 = 0 \right\}$ 跟所有平面的交集,

则“交集最小”的情形是

$$\left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} - 1 = 0 \right\} \cap \{z = 0\}.$$

于是, \mathbb{E}^2 中的两个椭圆

$$\left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0 \right\} \text{ 和 } \left\{ \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} - 1 = 0 \right\}$$

是一样的, 从而 $a = a', b = b'$, 且刚体变换把 O 映为 O . 这说明该刚体变换是一个旋转, 从而把

$$\left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} - 1 = 0 \right\} \cap \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

映为

$$\left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c'} - 1 = 0 \right\} \cap \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

由此可得 $c = c'$.

- $d = 0$. 此时 S 的方程可化为

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - z^2 = 0, a \geq b > 0.$$

故此时 S 为椭圆锥面 (M_{13})。

接下来说明不同的参数 a, b 给出不同的椭圆锥面:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - z^2 = 1 \right\} &\equiv \left\{ \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} - z^2 = 1 \right\} \\ a \geq b > 0, a' \geq b' > 0 \end{aligned} \right\} \implies a = a', b = b'.$$

简证如下: 因为刚体变换把直线映为直线, 故不难得到 $\phi(O) = O$, 从而

ϕ 是一个旋转变换。显然， ϕ 必须把 xy 平面映为 xy 平面，故 ϕ 把点 $(0, 0, z)$ 因为 $(0, 0, \pm z)$ 。复合适当的旋转变换后，可设 ϕ 保持 z 轴上的点不动，从而 z 轴是 ϕ 的旋转轴。于是，通过研究椭圆锥面跟 $z = 1$ （该平面在旋转下保持不变）的交线，即可得 $a = a', b = b'$ 。

- $d > 0$ 。此时 S 的方程可化为

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} + 1 = 0, a \geq b > 0, c > 0.$$

故此时 S 为双叶双曲面 (M_{14})。

我们把验证不同的参数 a, b, c 给出不同的双叶双曲面留作练习：

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} + 1 = 0 \right\} \equiv \left\{ \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} - \frac{z^2}{c'} + 1 = 0 \right\} \\ a \geq b > 0, c > 0, a' \geq b' > 0, c' > 0 \end{array} \right\} \implies a = a', b = b', c = c'.$$

¶ 不同类的曲面不一样

至此，通过细致地分类讨论，我们把 E^3 中的二次曲面分为 15 类，并证明了每一类中不同的参数所代表的二次曲面（在刚体变换下）是不一样的。最后，还要说明：对 $i \neq j$ ，类别 M_i 中的二次曲面不会合同于 M_j 中的二次曲面。为了说明这个“貌似显然”的命题，其方法之一是考察平面与二次曲面的截线类型。注意到这些截线其实都是平面中的二次曲线（因为联立一次方程与二次方程后，所得的依然是二次方程）。所以，它们可能出现的类型（在 E^2 上的刚体变换下）有：

N_0 ：空集， N_1 ：点， N_2 ：直线， N_3 ：两条平行的直线

N_4 ：两条相交的直线， N_5 ：椭圆， N_6 ：抛物线， N_7 ：双曲线

现设 $S \subset E^3$ 为一个二次曲面， $H \subset E^3$ 为一个平面， $\phi : E^3 \rightarrow E^3$ 为一个刚体变换，则 $S' = \psi(S)$ 为二次曲面， $H' = \phi(H)$ 为平面，且 $\psi(S \cap H) = S' \cap H'$ 。可以验证（留作习题）：对于任意 $i \neq j$ ， M_i 与 M_j 中的二次曲面与平面相交的截线类型是不同的。所以 M_i 与 M_j 的任意二次曲面不会合同。

这样我们就完成了对所有二次曲面的分类，从而完成了定理的证明。

注 3.3.3. E^3 中的二次曲面在刚体变换下的分类是几何学中众多分类问题的一个缩影。从上面的过程来看，代数（这里特指线性代数）的作用是巨大的。一个一般的几何学分类问题往往牵涉到：定义一类几何对象；规定好一个对象之间的等价关系；分类过程往往会用到代数，甚至分析的工具。

习题 3

1. [平面恒同的判据]

证明引理3.1.2。

2. [直线的计算]

证明命题3.1.8。

3. [过给定线或点的平面族]

(a). 设 l 为一条直线，其一般方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

证明每个包含 l 的平面，其方程均具有形式

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b). 写出包含给定点的所有平面的方程。

4. [几何意义]

(a). 给定平面 $N_1x + N_2y + N_3z = D, N_1 = 0$ 的几何意义是什么？

(b). 给定平面 $N_1x + N_2y + N_3z = D$, 向量 $v = (v_1, v_2, v_3)$ 满足 $v \cdot (N_1, N_2, N_3) = 0$ 的几何意义是什么？

(c). 给定直线 $\begin{cases} x = a_1 + tu_1 \\ y = a_2 + tu_2, u_1 \neq 0 \\ z = a_3 + tu_3. \end{cases}$ 的几何意义是什么？

(d). 对于直线 $\begin{cases} N_1x + N_2y + N_3z + D_1 = 0 \\ N'_1x + N'_2y + N'_3z + D'_1 = 0 \end{cases}$, 向量 $v = (v_1, v_2, v_3)$ 满足 $v \cdot (N_1, N_2, N_3) = v \cdot (N'_1, N'_2, N'_3) = 0$

的几何意义是什么？

5. [约化方程]

(a). 课本 §3.1.1 最后，给出了平面的三种可能的约化方程。求证：每个平面至少有一种约化方程；且每种给定形式的约化方程，如果存在，则是唯一的。

(b). 哪些平面有唯一的约化方程？哪些平面恰有两种不同形式的约化方程？

(c). 课本 §3.1.2 最后，给出了直线的三种可能的约化方程。求证：每条直线至少有一种约化方程；且每种给定形式的约化方程，如果存在，则是唯一的。

(d). 哪些直线有唯一的约化方程？哪些直线恰有两种不同形式的约化方程？

6. [直线标准方程]

另一种常见的直线方程是

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}.$$

(a). 给出该方程的几何解释。

(b). 写出该方程对应的参数方程以及一般方程。

(c). 给定直线 $l : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-3}$, 求:

(i). 过 l 平行于 Z 轴的平面。

(ii). l 在 XY 平面的投影。

7. [相交的条件]

(a). 求证: 三张平面

$$N_1x + N_2y + N_3z = D, \quad N'_1x + N'_2y + N'_3z = D', \quad N''_1x + N''_2y + N''_3z = D''$$

交于一点的充要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ N'_1 & N'_2 & N'_3 \\ N''_1 & N''_2 & N''_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

(b). 设直线 l 与平面 α 均由一般方程给出。写出直线 l 与平面 α 交于一点的充要条件。

(c). 什么时候直线 l 落在平面 α 里? 什么时候直线 l 与平面 α 平行?

8. [一次不等式与几何体]

三元一次不等式 $N_1x + N_2y + N_3z < D$ 表示平面的一侧, 即半空间 (不含该平面)。

问: 两个三元一次不等式组成的不等式组可以用于表达空间的哪些子集? 三个呢? 如何不等式组表示内接于单位球的正八面体的内部?

9. [点到平面的距离]

求证: 点 $A = (a_1, a_2, a_3)$ 到平面 $N_1x + N_2y + N_3z + D = 0$ 的距离为

$$\frac{|N_1a_1 + N_2a_2 + N_3a_3 + D|}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2}}.$$

10. [直线方程]

写出下列直线方程的即约形式和相应的参数方程:

(a). $\begin{cases} x + z + y + 3 = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0. \end{cases}$

(b). $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z + 1 = 0. \end{cases}$

(c). $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ 4y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$

(d). 直线 $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - y - 2z = 9. \end{cases}$ 在平面

$$4x - y + z = 1$$

中的投影。

11. [平面方程]

求下列平面的方程

(a). 过点 $(0, -1, 4)$, 法向量为 $(2, -1, 0)$ 。

- (b). 过点 $(-1, -5, 4)$, 平行于平面 $3x - 2y + 5 = 0$ 。
- (c). 过点 $(1, 3, 5)$, $(-1, -2, 3)$, $(2, 0, -3)$ 。
- (d). 过点 $(0, -1, 3)$ 和 y 轴。
- (e). 过点 $(1, 2, 1)$ 和直线 $\begin{cases} 2x + 3y - 2z - 9 = 0 \\ 3x - 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ 。
- (f). 过原点, 点 $(6, -3, 2)$ 且垂直于平面 $4x - y + 2z = 8$.

12. [距离]

- (a). 求点 $(1, 3, 5)$ 到直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{3}$ 的距离。
- (b). 求点 $(0, 2, 1)$ 到平面 $2x - 3y + 5z - 1 = 0$ 的距离。

13. [异面直线]

考虑空间两条直线 l_1, l_2 , 其方程分别为

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1} \quad \text{和} \quad \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}.$$

- (a). 证明 l_1 与 l_2 异面。
- (b). 求 l_1 与 l_2 的公垂线方程。
- (c). 求连接 l_1 上任意一点与 l_2 上任意一点所成线段中点的轨迹的一般方程。

14. [二次曲面]

- (a). 给定单叶双曲面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, 求平行于平面 $y = 0$ 且与曲面的交线是一对相交直线的平面方程。
- (b). 求过点 $(1, 2, 7), (4, 3, 3), (5, -1, 6), (\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$ 四点的球面方程。
- (c). 求过三条直线 $\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y - z = 0 \end{cases}$ 的圆柱面的方程。
- (d). 将空间曲线 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周, 求所得曲面的方程。
- (e). 将一条直线绕 z 轴旋转一周, 可能出现的曲面有哪些?
- (f). 设 $|a| > 1$. 求以 $(0, 0, a)$ 为锥点且跟单位球相切的圆锥面方程。

15. [划分与等价关系]

令 X 为一非空集合, X 上的一个划分是指 X 上的一个子集族 $\{X_i\}_{i \in I}$, 满足:

- $X = \bigcup_{i \in I} X_i$,
- $X_i \cap X_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.

试证 X 上的等价关系与该集合的划分存在一一对应。

16. [平移与旋转]

找出 E^2 中平移变换与旋转变换可交换的条件。

17. [反射的坐标表达]

- (a). 写出沿平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 反射的坐标表达式。
- (b). 证明: 奇数次反射的复合不是刚体变换, 但偶数次反射的复合是刚体变换。

18. [刚体变换的分解]

设刚体变换 $\phi: E^3 \rightarrow E^3$ 的坐标形式为 $(x, y, z) \mapsto (-y + 1, x + 1, z + 1)$. 试将 ϕ

分别写成旋转复合平移，平移复合旋转的形式。

19. \mathbb{E}^2 的刚体变换

赋予 \mathbb{E}^2 自然的距离函数

$$d : \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

我们称 $\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 是二维欧氏平面上的刚体变换，若 ϕ 满足下面两个条件

(i) ϕ 保持距离，即 $\forall P, Q \in E^2, d(P, Q) = d(\phi(P), \phi(Q))$ ；

(ii) ϕ 保持定向，即 ϕ 保持平行四边形有向面积的符号。

请完成以下问题：

(a). 任取 E^2 中的向量 $u_0 = (x_0, y_0)$ ，定义平移 $T_{u_0} : E^2 \rightarrow E^2, u \mapsto u + u_0$ 。证明：平移是刚体变换。

(b). 对任意的角度 θ ，定义绕坐标原点 O 的（逆时针）旋转为 $R_\theta : E^2 \rightarrow E^2, (x, y) \mapsto (x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta, x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta)$ 。验证：这样的旋转是刚体变换。

(c). 求证： \mathbb{E}^2 中刚体变换是平移和旋转的复合。

20. [二次曲面的标准形式]

将以下二次曲面化为标准形式：

(a). $xy - yz + 2 = 0$.

(b). $xy + yz + zx = 0$.

(c). $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 3x + 3y = 0$.

(d). $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz = 1$.

21. [刚体变换由其在两条线上的值确定]

设 $l_i, i = 1, 2$ 为 \mathbb{E}^3 中两条不同的直线，而 $\phi_i : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3, i = 1, 2$ 是两个刚体变换。

求证：若对于任意 $P \in l_1 \cup l_2$ ，都有 $\phi_1(P) = \phi_2(P)$ ，则 $\phi_1 = \phi_2$ 。

22. [五点确定一条二次曲线]

设 $P_i \in \mathbb{R}^2 (1 \leq i \leq 5)$ 为平面中的 5 个点，其中任意四点不共线。

(a). 求证：存在唯一的二次曲线同时经过这 5 个点。

(b). 在什么情况下，这条二次曲线是非奇异的，即是椭圆、双曲线、抛物线之一？

(c). 求过 $(-1, 0)(0, -1), (0, 1), (2, -1)$ 和 $(2, 1)$ 的二次曲线的方程。它是什么曲线？

23. [直纹面]

(a). 设 S 是 \mathbb{R}^3 中的曲面。若过 S 中每点，都有一条直线落在 S 中，则称 S 为直纹面。证明：单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 是直纹面。

(b). 除了显然的几类 [空集，直线，平面，两个平行或相交平面，各种柱面，锥面] 和单叶双曲面外，还有一类二次曲面是直纹面。找到该类曲面并给出证明。

24. [二次曲面与平面的交线]

按照 §3.3 末尾的记号，记 $C = S \cap H, C' = S' \cap H'$ 。

(a). 说明 C, C' 为二次曲线。

(b). 证明 C 与 C' 类型相同。

(c). 验证下表，完成完成二次曲面分类。

	N_0	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7
M_0	✓							
M_1	✓		✓					
M_2	✓			✓				
M_3	✓		✓	✓			✓	
M_4	✓	✓	✓					
M_5	✓		✓	✓		✓		
M_6	✓	✓			✓		✓	
M_7			✓	✓	✓			
M_8	✓		✓	✓				✓
M_9					✓		✓	✓
M_{10}	✓	✓						
M_{11}	✓	✓				✓		
M_{12}						✓		✓
M_{13}		✓	✓		✓	✓	✓	✓
M_{14}	✓	✓			✓			✓

(d). 对于椭圆抛物面 $x^2 + y^2 - z = 0$, 通过计算分类所有可能出现的二次曲线。

25. [n 维欧氏空间的变换]

设 $n \geq 2$. 赋予 \mathbb{E}^n 标准的距离函数

$$d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(P_1, P_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

其中 $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n), P_2 = (y_1, \dots, y_n)$. 若映射 $\phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ 满足 $d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P, Q), \forall P, Q \in \mathbb{E}^n$, 则称之为一个等距映射。

(a). 求证: 对于任意向量 $u_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$, 平移变换

$$\tau_{u_0} : u \mapsto u + u_0$$

是一个等距映射.

(b). 我们称形如

$$\phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n, \quad \phi(u) = uA$$

的变换为 “简单旋转变换”, 其中

$$A = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

验证 “简单旋转变换” 都是等距变换。

(c). 设 A 是 n 阶正交矩阵, 即满足 $AA^T = I$ 的 n 阶矩阵。考虑变换

$$\phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n, u \mapsto uA.$$

验证 ϕ 是等距变换。

(d). 求证: \mathbb{E}^n 的任意等距变换均形如 $u \mapsto uA + u_0$, 其中 $A \in O(n)$ 是正交阵, 而 $u \in \mathbb{E}^n$.

26. [二次曲面分类: 不同参数对应不同曲面]

(a). 对于二次曲面分类定理情形 2.1-情形 2.4, 验证不同参数给出了不同的曲面。

(b). 对于二次曲面分类定理情形 3.2 的 $d > 0$, 验证不同参数给出了不同的曲面。

27. [3×3 对称阵的特征值与特征向量]

在二次曲面分类定理中, 用到的一个核心结果是

对于任意 3 阶对称阵, 均存在 3 阶特殊正交阵 $A(AA^T = I, |A| > 0)$ 使得

$$ACA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

下面给出一个计算 $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ 和 A 的算法. 令

$$f(\lambda) = |\lambda I_3 - C|.$$

则 f 是一个三次多项式.

(a) 求证: f 至少有一个实根 λ_1 , 且存在单位向量 u_1 使得 $Cu_1 = \lambda_1 u_1$.

将 u_1 扩充为右手系 $\{u_1, u_2, u_3\}$. 令 $P = (u_1, u_2, u_3)^T$.

(b) 证明 $PP^T = I$.

(c) 证明 $PCP^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$, 其中 C' 是一个 2 阶对称阵.

(d) 证明 $g(\lambda) := |\lambda I_2 - C'|$ 有两个实根, 分别记为 λ_2, λ_3 .

(e) 证明存在二阶特殊正交阵 B 使得 $BC'B^T = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

(f) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} P$, 证明 A 就是所需三阶特殊正交阵.

28. [保持原点不动的刚体变换是旋转: 几何证明]

本题中所提到所有变换均为保持原点 $O \in \mathbb{R}^3$ 不动的变换。

(a). 证明: 每个满足 $\varphi(O) = O$ 的刚体变换可被写成两个反射的复合。

(b). 设 $\varphi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个满足 $\varphi(O) = O$ 的刚体变换。下面用几何方法找出 φ 的旋转轴, 从而证明 φ 是一个旋转变换。不妨假设 $\varphi \neq \text{id}$.

(i). 证明: 存在点 $P \in \mathbb{R}^3 \setminus O$ 使得 $P \neq P_1 := \varphi(P)$, 且 $Q := \frac{P + P_1}{2} \neq O$.

(ii). 任取满足 (i) 的点 $P \in \mathbb{R}^3 \setminus O$. 令 $P_2 := \varphi(P_1)$ 为 P_1 的像. 证明: $Q_1 := \frac{P_1 + P_2}{2} \neq O$.

(iii). 任取满足 (ii) 的点 $P \in \mathbb{R}^3 \setminus O$.

a. 若 $P_2 = P$, 证明直线 \overline{OQ} 是 φ 的旋转轴.

b. 若 $P_2 \neq P$, 则 P, P_1, P_2 是三个不同的点。令 π_1 为唯一包含直线 \overline{OQ} 且垂直于直线 $\overline{PP_1}$ 的平面. 类似地, 令 π_2 为唯一包含直线 $\overline{OQ_1}$ 且垂直于直线 $\overline{P_1P_2}$ 的平面. 令 $\ell := \pi_1 \cap \pi_2$ 为 π_1 和 π_2 交线. 证明 ℓ 是 φ 的旋转轴. (提示: 需证明 $\varphi(T) = T, \forall T \in \ell$. 注意 $\varphi(T)$ 只有两个可能的位置, 因为 $\varphi(T)$ 到点 O, P_1, P_2 的距离是确定的.)

第 4 章 几何与变换

4.1 埃尔朗根纲领简介

让我们进行一个总结性和前瞻性的思考：几何学到底是什么？在不同的历史时期，这个问题有不同的回答：从古埃及的“土地测量”，到古希腊人的“用以理解‘永恒存在’的逻辑推导方式”（柏拉图），再到“数学中研究单个物体的形状、物体之间的空间关系以及外围空间的性质的分支”（大英百科全书）。几何学的研究对象包括但不限于距离、形状、大小、相对位置、平坦性/弯曲性、对称性等等。

19 世纪之前的几何学是朴素的几何学，基本上是围绕欧氏几何而展开的：几何可以被看做是对我们所处世界的数学描述。即使是解析几何（以及之后微积分方法在几何学中的广泛应用），也只能被视为是处理古典几何对象的新方法、新视角，而不是新的几何分支。但是，如同本书第一章第一节所提到的，19 世纪是几何学的黄金时代。各种新的几何学不断涌现并快速发展，并改变了几何的主旨以及人们对于几何的认知。在这些新的几何分支中，当时最引入注目当属非欧几何学（包含了球面几何与双曲几何学作为其特例），射影几何学（下一章的主题），高维空间的几何学（例如欧氏空间 \mathbb{E}^n ，哈密尔顿四元数，以及线性代数理论）以及拓扑学（第六章的主题）。

在这样一个背景下，人们开始思考：几何学的实质是什么？为了回答这个问题，1872 年 10 月克莱因（按照他在埃尔朗根大学教授就职仪式的要求，当时他 23 岁）发表了题为“**对新近以来几何学研究的比较考察**”的小册子，即著名的**埃尔朗根纲领**，提出“几何学是研究对称群下不变量”的观点。他在小册子开头写道（引自《Klein 数学讲座》附录，李培廉译）：

可是由于几何学近年来取得了飞速的发展，尽管就其主题而言是一致的，已经被分割成一系列几乎相互隔绝的分支，并且在相当大的程度上互不相关地继续成长这，发表这样一种综观全局性的研究，就显得更加有理由了。

在这个纲领中，克莱因利用由若尔丹（C. Jordan，公元 1838 年-1922 年），李（S. Lie，公元 1842 年-1899 年）等人发展起来的变换群（对称）的思想统一了当时几个不同的几何学分支：欧氏几何，非欧几何（球面与双曲）与射影几何；提出几何学是研究几何对象在给定变换群作用下不变的性质；并前瞻性地预测了新几何，例如：代数几何是研究双有理变换下的不变性质；拓扑学是研究拓扑变换（即同胚）下的不变性质。¹

埃尔朗根纲领全书有 10 节，前两节中提出了其主旨思想，之后各节则对多种不同的几何学具体展开其观点。在第一节克莱因就定义了（变换）群，说明了主群的概念，明确地区分空间与流形，几何的直观图像与抽象形式。他指出

给定一个流形以及其中的一个变换群，要研究这个流形中几何形体的“在这个群的变换下保持不变的”那些性质。

¹ 不过，黎曼几何学并不能完全归结到埃尔朗根纲领的框架里。后来，嘉当（E. Cartan，公元 1869 年-1951 年）把克莱因的齐次空间模型做了推广（特定主丛上的嘉当联络），从而把黎曼几何也纳入了推广后的框架。

以及

给定一个流形以及在其中的一个变换群，要建立相对于这个群的不变量理论。

他进一步在第二节中阐述了同一个空间上不同的变换群所对应的不同的几何之间的联系，并指出各种新几何与初等几何的关系都建立在这样一种联系之上：

如果用一个包括主群在内的群来代替主群，那么只剩下一部分几何性质能保持不变，其余的则不再表现为空间实体本身的性质，而是表现为“由空间添加某些特定的几何实体构成的系统”的性质。这个特选的形体是如此确定的：在所给变换群中，主群的元素所对应的变换使之保持不变。

例如，在下一章将会学到，当把仿射群扩大到射影变换群之后，仿射变换可被视为是“保持无穷远直线不变”的射影变换。

换而言之，不同的几何学在同一个背景空间中可以共存：一种几何对应着该空间一个特定的变换群，而且进一步地，这种“群-几何对应关系”应该能够显式地给出不变量²。所以，群论这个用代数方法研究对称性的数学分支，成为探讨几何学本性的重要手段。

通过“群-几何对应关系”，我们还能根据变换群之间的关系，对同一个背景空间上不同的几何进行比较：变换群越大，对应的几何就“越小”（即该种几何的研究对象（不变量）越少）。例如，如下面将要看到的，欧氏几何对应的变换群比仿射几何对应的变换群小，所以欧氏几何中可以研究的性质比仿射几何更丰富；而射影几何对应的变换群最大，故射影几何中不变量非常少（于是在射影几何中没有长度、角度、面积、平行等概念）。而射影几何是被克莱因用于统一当时所有的几何的一个框架。

当然，现代的几何学研究呈现出多学科交叉融合的特征，故而，很难只用一个观点去看待一些几何学分支。但就大学期间学习的几何课程而言，克莱因的观点还是非常精辟和具有指导性的。

4.2 \mathbb{E}^2 上的各种几何与变换群

回忆一下，我们把空间 X 到自身的双射

$$\phi : X \rightarrow X$$

叫做变换。在几何中，我们仅关心几何变换，即保持底空间的特定几何性质不变的变换。例如，保持向量空间线性结构不变的变换，即满足

$$\phi(\lambda u + \mu v) = \lambda\phi(u) + \mu\phi(v), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

被称为**线性变换**（在线性代数里，“变换”有着更广义的解释，即指代映射，而不要求可逆性，甚至原像空间和像空间也不要要求是同一个空间。故线性代数中的“线性变换”是指所有保持线性结构的映射。）。在第三章第二节证

² “（连续）对称背后都有对应的不变量”这个观点在物理中也起着极其重要的作用：在 1918 年，诺特 (E. Noether, 公元 1844 年-1921 年，数学史上最杰出的女数学家之一) 发表了她的诺特 (第一) 原理：若一个物理系统有某种连续对称，则背后一定有一个对应的守恒定律以及守恒量。从此，对称性成了现代物理学中的一个核心概念。

明过“旋转轴过原点的旋转变换”是线性变换。另一方面，不难发现一般的平移变换不是线性变换。

根据定义，变换群是由变换构成的群（这是我们要求几何变换可逆的原因）。特别地， G 是空间 X 的一个变换群意味着

- $\text{Id} : X \rightarrow X$ 是 G 的一个元素，
- 若 ϕ 是 G 的元素，则 ϕ^{-1} 也是 G 的元素，
- 若 ϕ_1, ϕ_2 是 G 的元素，则 $\phi_1 \circ \phi_2$ 也是 G 的元素。

下面用具体的例子解释克莱因在埃尔朗根纲领中的思想。为简单起见，我们把空间维数降低到 2 维，即以平面几何为模型，通过研究 \mathbb{E}^2 不同的变换群，来解释克莱因关于几何和对称的观点。

¶ 刚体变换的几何

考虑 $X = E^2$ 上的刚体变换群

$$G_{\text{刚体}} = \{\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2 \mid \phi \text{ 是一个刚体变换}\}.$$

上一章学到， \mathbb{E}^2 上的每个刚体变换由以下两条性质刻画：

- (1) 保欧氏距离；
- (2) 保定向。

任何刚体变换可被表示为一个旋转变换和一个平移变换的复合。在标准直角坐标系下，刚体变换可被表示为

$$\phi_{A,u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$$

代表逆时针旋转 θ 角的旋转变换，而 $u = (x_0, y_0)^T$ 为平移变换的平移量。

引理 4.2.1. (刚体变换确定平移与旋转)

若 $\phi_{A,u} = \phi_{B,v}$ ，则 $A = B, u = v$.



证明 设 $\phi_{A,u} = \phi_{B,v}$ ，则

$$u = \phi_{A,u}(O) = \phi_{B,v}(O) = v.$$

于是对任意 (x, y) ，有

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

这说明 $A = B$. □

故 \mathbb{E}^2 的刚体变换一一对应于 $(A, u) \in SO(2) \times E^2$ ，且

$$G_{\text{刚体}} = \{\phi_{A,u} \mid A \in SO(2), u \in \mathbb{E}^2\}.$$

根据定义，两个刚体变换的复合为

$$(\phi_{B,v} \circ \phi_{A,u})(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \phi_{B,v}(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u) = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + Bu + v = \phi_{BA,Bu+v}.$$

为了后文跟别的变换群进行比较，我们还需要引入**特殊欧式群**

$$SE(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \mid A \in SO(2), u \in \mathbb{E}^2 \right\}.$$

不难验证 $SE(2)$ 是一般线性群 $GL(3)$ 的一个子群。下面证明

命题 4.2.2. (刚体变换群的代数描述)

\mathbb{E}^2 的刚体变换群 $G_{\text{刚体}}$ 同构于特殊欧氏群 $SE(2)$.



证明 考虑映射

$$\Phi : G_{\text{刚体}} \mapsto SE(2), \quad \phi_{A,u} \mapsto \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则有

$$\Phi(\phi_{B,v} \circ \phi_{A,u}) = \Phi(\phi_{BA,Bu+v}) = \begin{pmatrix} BA & Bu + v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以及

$$\Phi(\phi_{B,v})\Phi(\phi_{A,u}) = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA & Bu + v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故 Φ 是一个群同态。另一方面，由引理4.2.1知 Φ 是一个双射，所以它是一个群同构。□

我们还可以从不变量的角度来理解平面二次曲线的分类。对于平面二次曲线，有两种不同层次（但密切相关）的“不变量”：

- \mathbb{E}^2 中二次曲线的（几何）不变量。

我们证明了， \mathbb{E}^2 中二次曲线可分为 8 类，即

- ① 空集， ② 椭圆 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, (a \geq b > 0)$ ③ 单点集
- ④ 双曲线 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1, (a, b > 0)$ ⑤ 一对相交直线 $y = \pm kx, (0 < k \leq 1)$
- ⑥ 抛物线 $y = kx^2, (k > 0)$ ⑦ 一对平行线 $x = \pm k, (k > 0)$ ⑧ 一条直线

在该分类中，出现的参数 a 或者 a, b 都是刚体变换下二次曲线的不变量，而且这些参数都有着明确的几何意义。

- 二元二次多项式的数值（代数）不变量。

在刚体变换下，任意二元二次多项式

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

可被转化为

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0.$$

下面说明变换前后的多项式系数满足特定的不变性：

命题 4.2.3. (二元二次多项式的刚体不变量)

由二元二次多项式的系数决定的下述三个量在刚体变换下保持不变：

$$I_1 = a + c, \quad I_2 = ac - b^2, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$



证明 根据刚体变换 $\phi_{A,u}$ 下二次部分的变换规则，有

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$$

由此可知 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ 具有相同的迹与行列式，即 $a + c = a' + c'$ 以及 $ac - b^2 = a'c' - (b')^2$. (也可利用第三章所得的 a', b', c', d', e', f' 的公式可直接验证 $a + c = a' + c'$ 以及 $ac - b^2 = a'c' - (b')^2$.)

为了说明 I_3 的不变性，我们注意到

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

而在刚体变换 $\phi_{A,u}$ 下，若记 $u = (h, k)$ ，则

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f'$$

$$= F \circ \phi(x, y)$$

$$= (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & h \\ \sin \theta & \cos \theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

由此可知

$$\begin{pmatrix} a' & b' & d' \\ b' & c' & e' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ h & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & h \\ \sin \theta & \cos \theta & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而 I_3 也是不变的。 \square

读者可以探讨 I_1, I_2, I_3 的符号与 8 类二次曲线分类之间的关系。

¶ 等距变换的几何

比刚体变换群稍大一点的是等距变换群。令

$$G_{\text{等距}} = \{\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2 \mid \phi \text{是一个等距变换}\}.$$

根据定义，等距变换是保持任意两点间距离不变，但不必保持定向的变换。于是，等距变换跟刚体变换的唯一区别在于是否保定向。特别地，刚体变换都是等距变换，

$$G_{\text{刚体}} \subset G_{\text{等距}}.$$

类似于刚体变换，可以证明 \mathbb{E}^2 的等距变换群 $G_{\text{等距}}$ 同构于 欧氏群

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \mid A \in O(2), u \in \mathbb{E}^2 \right\}.$$

反射变换是等距变换但不是刚体变换，因为反射变换会翻转定向。事实上，若一个等距变换不是刚体变换，则它一定翻转定向，从而在复合任意一个反射变换，例如复合上变换

$$(x, y) \mapsto (x, -y)$$

后，一定会得到一个保定向的等距变换，即得到一个刚体变换。换而言之，刚体变换群是反射变换群的一个阶为 2 的子群。

¶ “旋转” 几何

考虑 \mathbb{E}^2 的刚体变换群的一个子群，即旋转变换群，

$$G_{\text{旋转}} = \{R_\theta \mid R_\theta = \text{逆时针旋转角度 } \theta\}.$$

在第三章我们证明过，一个刚体变换是一个旋转变换当且仅当它保持原点不动。(这与克莱因的观点吻合：当所考虑的群从旋转变换群扩大到刚体变换群时，旋转变换群“保持到原点距离不变”这一性质不再是刚体变换群下不变的性质，而是刚体变换群作用在“空间添加原点”这个系统下的性质)

在标准直角坐标系下，旋转变换可被表示为

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

于是旋转变换群同构于由特殊正交阵组成的特殊正交群

$$SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

也可以把反射轴过原点的反射变换添加进来，得到“旋转反射群”。几何上，这个群由保持原点不动的等距变换构成。这个群同构于正交群

$$O_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

¶ 相似变换的几何

把旋转变换群、刚体变换群、等距变换群放在一起看，可以得到如下图表：

$$\text{旋转变换群 } G_{\text{旋转}} \cong SO(2)$$

\wedge\wedge

$$\text{刚体变换群 } G_{\text{刚体}} \cong SE(2)$$

\wedge\wedge

$$\text{等距变换群 } G_{\text{等距}} \cong E(2)$$

以及如下图表：

几何不变性		变换（对称）
保距，保定向，保到原点距离		旋转变换
少↓	保距，保定向	刚体变换 ↓大
保距		等距变换

等距变换群对应的几何不变性就是中学阶段所学的“全等关系”。我们知道，比全等更一般的是相似关系。于是，可以考虑相似变换群

$$G_{\text{相似}} = \{\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2 \mid \phi \text{ 是一个相似变换}\}.$$

设 $\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 是一个相似变换。跟等距变换类似，在复合上一个平移变换后，可以不妨设 $\phi(O) = O$ 。这样的相似变换跟“保持原点不变的等距变换”仅仅相差一个伸缩（即数乘）。这样的相似变换由

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \lambda A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

给出。换而言之，在标准坐标系下，相似变换由

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \lambda A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u$$

给出，其中 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $A \in O_2$, $u \in \mathbb{E}^2$.

于是，我们自然考虑

$$GO_2 = \{\lambda \cdot A \mid \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, A \in O_2\},$$

而相似变换群则同构于

$$SIM(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \mid A \in GO(2), u \in \mathbb{E}^2 \right\}.$$

当然，相似变换不在保持距离不变。那么，相似变换群下的不变量是什么呢？

命题 4.2.4. (相似变换的不变量)

(1) 对于任意相似变换 $\phi \in G_{\text{相似}}$, 存在 $\lambda > 0$ 使得

$$|\phi(P)\phi(Q)| = \lambda|PQ|, \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}^2.$$

(2) 相似变换 ϕ 保持角度不变, 即

$$\angle PQR \equiv \angle \phi(P)\phi(Q)\phi(R), \quad \forall \angle PQR \subset \mathbb{E}^2.$$



证明 (1) 设 $\phi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 是一个相似变换, 则存在 $\lambda > 0$, $u \in \mathbb{E}^2$ 以及保持原点不动的等距变换 ϕ_1 , 使得

$$\phi(P) = \lambda\phi_1(P) + u.$$

于是, 对于任意 $P, Q \in \mathbb{E}^2$,

$$\begin{aligned} d(\phi(P), \phi(Q)) &= d(\lambda\phi_1(P) + u, \lambda\phi_1(Q) + u) \\ &= d(\lambda A\phi_1(P), \lambda A\phi_1(Q)) \\ &= \lambda d(\phi_1(P), A\phi_1(Q)) \\ &= \lambda d(P, Q) \end{aligned}$$

(2) 因为保持原点不动的等距变换 ϕ_1 是线性变换, 而且由极化恒等式, 等距变换保内积, 所以由余弦定理,

$$\begin{aligned} \cos \angle \phi(P)\phi(Q)\phi(R) &= \frac{(\phi(P) - \phi(Q)) \cdot (\phi(R) - \phi(Q))}{|\phi(P) - \phi(Q)| |\phi(R) - \phi(Q)|} \\ &= \frac{(\lambda\phi_1(P - Q)) \cdot (\lambda\phi_1(R - Q))}{|\lambda\phi_1(P - Q)| |\lambda\phi_1(R - Q)|} \\ &= \frac{\phi_1(P - Q) \cdot \phi_1(R - Q)}{|\phi_1(P - Q)| |\phi_1(R - Q)|} \\ &= \frac{(P - Q) \cdot (R - Q)}{|(P - Q)| |(R - Q)|} \\ &= \cos \angle PQR \end{aligned}$$

□

于是, 相似变换保角, 以及保距离比。(注意 \mathbb{E}^2 的保距变换自然保角(这是极化恒等式的推论)以及保距离比, 但反之不然。)

¶ 仿射变换的几何

从刚体变换到等距变换再到相似变换, 在模去平移变换后, 其核心的变换群分别是

$$SO_2 \subsetneq O_2 \subsetneq GO_2$$

这些群都是 \mathbb{E}^2 的线性变换群, 而 \mathbb{E}^2 的最大的线性变换群则是一般线性群

$$GL(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0. \right\}$$

于是, 还可以考虑对应的变换群

$$AFF(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \mid A \in GL(2), u \in \mathbb{E}^2 \right\}.$$

该群里的每个元素对应的变换依然形如

$$\phi_{A,u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

跟前面唯一的差别是现在 A 可以是任意可逆线性变换。这样的变换被称做**仿射变换**，而对应的变换群

$$G_{\text{仿射}} = \{\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2 \mid \phi \text{ 是一个仿射变换}\}.$$

被称为**仿射变换群**。

不难看出，在仿射变换下，距离、角度、面积（如果把仿射变换中的一般线性群改为特殊线性群，则面积是该变换下的不变量）等都不再是不变的了。那么，仿射变换下的不变量是什么呢？这是仿射几何学的内容，我们稍作介绍：

命题 4.2.5. (仿射变换的不变量)

设 $\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 是一个仿射变换， $P, Q, R, S \in \mathbb{E}^2$ ，则

(1) 若 $PQ \parallel RS$ ，则 $\phi(P)\phi(Q) \parallel \phi(R)\phi(S)$ ，且

$$\frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{|\phi(P)\phi(Q)|}{|\phi(R)\phi(S)|}.$$

(2) 存在常数 C 使得 $S_{\triangle PQR} = CS_{\triangle \phi(P)\phi(Q)\phi(R)}$.



证明 (1) 不妨设 $P \neq Q, R \neq S$ 。则

$$PQ \parallel RS \iff \text{存在 } \lambda \neq 0 \text{ 使得 } \overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{RS}.$$

根据定义，存在线性变换 $\phi_0 : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 以及 $u \in \mathbb{E}^2$ 使得 $\phi(P) = \phi_0(P) + u$ 。于是

$$\overrightarrow{\phi(R)\phi(S)} = (\phi_0(R) + u) - (\phi_0(S) + u) = \phi_0(\overrightarrow{RS})$$

而

$$\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)} = (\phi_0(Q) + u) - (\phi_0(P) + u) = \phi_0(\overrightarrow{PQ}) = \lambda \phi_0(\overrightarrow{RS}).$$

由此可知 $\phi(P)\phi(Q) \parallel \phi(R)\phi(S)$ ，且

$$\frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{|\phi(P)\phi(Q)|}{|\phi(R)\phi(S)|} = \lambda.$$

(2) 设变换 ϕ 对应的线性变换 ϕ_0 的矩阵是 A 。若 $\overrightarrow{PQ} = (a, b)$, $\overrightarrow{PR} = (c, d)$ ，则

$$\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)} = (a, b)A, \quad \overrightarrow{\phi(P)\phi(R)} = (c, d)A.$$

于是由

$$S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$$

以及

$$S_{\triangle \phi(P)\phi(Q)\phi(R)} = \frac{1}{2} \left| \det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| |\det A|$$

即得欲证。 □

把相似变换和仿射变换加到表格里，得到：

几何不变性质	变换（对称）	对称群
保距，保定向，保到原点距离	旋转变换	$SO(2)$
保距，保定向	刚体变换	$SE(2)$
保距 少↓	等距变换	$E(2)$
保角，保长度比	相似变换	$SIM(2)$
保平行性，保平行线段长度比，保面积比	仿射变换	$AFF(2)$
??	??	??

注意这俩个性质都是保长度比、保角的推论，所以我们再次看到，群越大，保持的性质就越少。

克莱因关于几何和对称的思想和当时李发展李群的理论是契合的。事实上，我们已经看到了最基本的李群及其子群的例子。学好李群对于学好几何是非常重要的。最后一个问题（这也是克莱因 1872 年演讲的一个要点）：还有没有比仿射变换群“更大”的变换群，以及相应的仍然“有趣”的几何？答案是肯定的：下一章将要学习的射影几何，研究的是（在某个扩大的空间上的）射影变换，即“保持共线性（它比保平行性更特殊）、保持交比（它比保平行线段长度比更特殊）”的变换。于是，我们将进入射影几何的新世界。

当然，上面所有的变换都是很几何的：至少还依然由直线的概念，并始终只考虑把直线映为直线的变换。如果进一步放松这个限制，我们还可以进入拓扑学的广阔天地：拓扑变换群是一个巨大的群，在这样的变换下，所保持的是只有最基本的“邻近关系”。

习题 4

1. [等距变换与刚体变换]

- (a). 证明: \mathbb{E}^2 的反射变换是等距变换, 但不是刚体变换。
 (b). 证明: 若 ϕ_1, ϕ_2 是 \mathbb{E}^2 的等距变换, 但不是刚体变换, 则 $\phi_1 \circ \phi_2$ 是刚体变换。

2. [刚体变换: 旋转与平移]

设 G 是 \mathbb{E}^3 的刚体变换群, G_1 是 \mathbb{E}^3 中所有平移变换构成的群, 而 G_2 是 \mathbb{E}^3 中所有旋转变换(保持原点不变)构成的群.

- (a). 证明: 若 $\tau \in G_1$ 且 $R \in G_2$, 则 $R \circ \tau \circ R^{-1} \in G_1$.
 (b). 我们在正文中证明了任意 $\phi \in G$ 可被表示为 $\phi = \tau \circ R$, 其中 $\tau \in G_1$ 且 $R \in G_2$. 证明: 存在 $\tau' \in G_1$ 使得 $\phi = R \circ \tau'$.
 (c). 证明 G_1 是 G 的一个 正规子群³.
 (d). 证明 G_2 是 G 的子群. G_2 是 G 正规子群吗? 为什么?
 (e). 取定 $P \in \mathbb{E}^3$. 令 G_P 为所有保持 P 点不动的所有刚体变换构成的集合. 试给出 G_P 与 G_2 的关系.

3. [相似变换]

- (a). 证明: 若在 E^2 中 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似, 则存在相似变换 $\Phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 使得

$$\Phi(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'.$$

- (b). 设 $\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 是一个相似变换, 且它不是等距变换. 求证: 存在唯一的 $P \in \mathbb{E}^2$ 使得 $\phi(P) = P$. (这个点被称为相似中心.)

- (c). 映射 $\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 是相似变换当且仅当 ϕ 保持线段的比例, 即对任意 $P \neq Q \in \mathbb{E}^2$, $\frac{d_E(\Phi(P), \Phi(Q))}{d_E(P, Q)}$ 是非零常值。

4. [仿射变换的应用]

- (a). 设 $n \geq 3$ 是奇数. 证明: 椭圆上存在内接 n 边形, 使得椭圆在该三角形每个顶点处的切线都平行于该顶点相对的边。

- (b). 设 $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ 和 $P', Q', R' \in \mathbb{R}^2$ 为两组不共线的点. 证明: 存在唯一的仿射变换

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

使得

$$\varphi(P) = P', \varphi(Q) = Q', \varphi(R) = R'.$$

进一步证明 φ 将 $\triangle PQR$ 的重心映为 $\triangle P'Q'R'$ 的重心.

- (c). 设 S 是空间中的一个椭球面. 设方向为场向量 v 的一束平行光线照射 S , 其中部分光线跟 S 相切. 记切点在 S 上所形成的曲线为 C . 证明: C 落在一张过椭球中心的平面上.

³群 G 的子群 N 是正规子群的意思是对于任意 $h \in N$ 和 $g \in G$, 均有 $ghg^{-1} \in N$.

5. [一般坐标系]

令 $\phi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 为仿射变换, 记 $\phi(O) = O'$, $\tilde{\phi} = T_{-O'} \circ \phi$, 记 $\tilde{\phi}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}'_i, i = 1, 2$.

试证: 对任意 $\mathbf{u} \in E^2$, 存在唯一系数 x', y' , 使得

$$u = x' \cdot \mathbf{e}'_1 + y' \cdot \mathbf{e}'_2$$

从而 $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ 可以看作 \mathbb{E}^2 的一个新的“坐标系”: \mathbb{E}^2 中的每一点由唯一的一个数对所代表。

6. [保面积变换]

考虑 $GL(2)$ 的子群

$$SL^\pm(2) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = \pm 1\}$$

对任意 $A \in SL^\pm(2)$ 以及 $u \in \mathbb{E}^2$, 考虑变换

$$\phi_{A,u}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(x, y) = (x, y)A + \mathbf{u}.$$

记

$$G_{\text{面积}} = \{\phi_{A,u} \mid A \in SL^\pm(2), u \in \mathbb{E}^2\}.$$

(a). 证明: $G_{\text{面积}}$ 是 $G_{\text{仿射}}$ 的子群。

(b). 举例: $\phi \in G_{\text{面积}}$ 但 ϕ 不保持角度不变。

(c). 证明: 任意 $\phi \in G_{\text{面积}}$ 保持三角形的面积不变 (从而保持更一般的区域面积不变)。

(d). 反之, 证明: 若 $\phi \in G_{\text{仿射}}$ 且 ϕ 保持任意三角形的面积不变, 则 $\phi \in G_{\text{面积}}$.

(e). 举例: $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 保持区域面积不变, 但不是 $G_{\text{仿射}}$ 中的元素.

(f). 描述“保定向面积”

7. [仿射分类]

(a). 证明: 所有平行四边形都是仿射等价的。梯形仿射等价吗?

(b). 证明图形的凸性在仿射变换下不变的, 并给出凸四边形的仿射分类。

(c). 给出平面二次曲线的仿射分类。

8. [仿射变换]

(a). 对于任意 $\lambda, \mu > 0$, 我们称形如

$$\phi_{\lambda,\mu}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2, (x, y) \rightarrow (\lambda x, \mu y)$$

的变换为伸缩变换。证明: 所有伸缩变换构成仿射变换群的一个子群。

(b). 证明: \mathbb{E}^2 的每个仿射变换可被写成一个平移变换, 一个伸缩变换和不超过两个等距变换的复合。

(c). 设 $\phi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 是一个变换, 保平行性且保平行线段的比。求证: ϕ 是一个仿射变换。

第 5 章 射影平面与射影变换

我们在小时候就已经观察到一条笔直的马路其路两边会相交地平线上于一点。我们该如何从数学上解释什么是“地平线”？另一方面，我们对物体在阳光下的影子有很多直观的理解。这里头是否有什么数学？

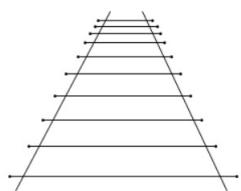


图 5.1：铁轨两边相交于地平线上一点

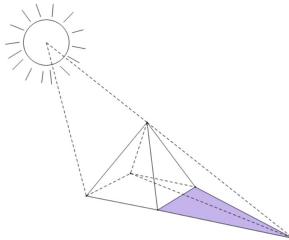


图 5.2：阳光下的影子

诸如此类问题（尤其是建筑绘图和绘画艺术中的透视法）导致了射影几何的产生。在这一章里，我们将对平面射影几何作简要介绍。我们将会看到，在射影几何中，长度、角度、平行性都不再被保持，从而它们不是射影几何的研究对象。射影几何中重要的几何信息是共线性（粗略来说，欧氏几何是尺规作图的几何，而射影几何则是只用直尺的几何）。当然，这并不是说射影几何里面就没有比如圆这样的曲线了，只不过跟欧氏几何不同之处在于：在射影几何中，所有的二次曲线都是等价的。

5.1 射影平面

在上一章中我们提到，克莱因将射影几何作为统一当时其它所有几何的一个框架，它具有最大的几何变换群（从而只有最少的不变量）。另一方面，我们已经看到，平面的仿射变换群已经是一个非常“大”的群了，怎么还能构造更大的（且保持直线的）群呢？这里的要点在于：射影几何是建立在一个“比欧氏空间更大”（但仍然密切相关）的空间之上的。

为简单起见我们仅考虑二维即平面射影几何的理论，它是古典射影几何的主要舞台。下面我们将介绍射影平面的构造。粗略来说，射影平面是由欧氏平面上加上一些“无穷远点”（即地平线上的点）组成的。在考虑欧氏变换或者仿射变换时，这些“无穷远点”依然别映为“无穷远点”，不会出现在我们的视野中。于是在研究欧氏几何或者仿射几何时，我们只需把目光限制在标准欧氏平面里，意识不到这些“无穷远点”的存在。但是在一般的射影变换下，这些“无穷远点”不再是特殊的点，而是跟欧氏平面里的点具有相同的地位。通过这种方式，我们可以将上一章提到的那些几何变换都视作“特殊的射影变换”，从而那些几何就都可以被统一到射影几何的框架里。

¶ 射影直线

在定义射影平面之前，我们先定义和理解射影直线。射影直线有许多等价的定义方式，从几何上看，它是“平面里所有过原点的直线”这个集合的一个“参数化”：射影直

线里的每个“点”代表平面里一条过原点的直线(而且,射影直线并不仅仅是一个集合,它具有几何结构,例如射影直线中的“线段”对应于平面里特定的“线束”)。

我们知道,平面里任何一条过原点的直线可表示成

$$l_{a,b} = \{(ta, tb) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

其中 a, b 不同时为 0,而且

$$l_{a,b} = l_{a',b'} \iff \exists \lambda \neq 0, \text{使得 } a' = \lambda a, b' = \lambda b.$$

所以我们自然考虑集合

$$\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} = \{(a, b) \mid (a, b) \neq (0, 0)\}$$

以及该集合上的等价关系

$$(a, b) \sim (a', b') \iff \text{存在 } \lambda \neq 0, \text{使得 } a' = \lambda a, b' = \lambda b.$$

因为每一个等价类 $[(a, b)]$ 恰好代表了 \mathbb{R}^2 中一条经过原点的直线,所以商空间

$$\mathbb{RP}^1 := \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} / \sim$$

就代表了“平面里所有过原点的直线”这个集合。我们称 \mathbb{RP}^1 为**射影直线**。

显然, \mathbb{R}^2 上的坐标 (a, b) 并非 \mathbb{RP}^1 上好的坐标。为简单起见,我们将引入记号

$$(a : b) := [(a, b)],$$

并把 $(a : b)$ (其中 a, b 不全为零)叫做 \mathbb{RP}^1 中的点 $[(a, b)]$ 的**齐次坐标**。这种用“比值”表示方法是恰当的,因为 $(a : b) = (a' : b')$ 当且仅当 $\exists \lambda \neq 0$,使得 $a' = \lambda a, b' = \lambda b$,即 $a : b = a' : b'$ (在广义的意义下,即 $b = b' = 0$ 时也成立)。

为了从几何上理解 \mathbb{RP}^1 ,我们考虑自然的“包含”映射

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{RP}^1, \quad t \mapsto [(t, 1)].$$

显然 φ 是单射,但它并非满射,因为 x 轴所对应的点 $[(1, 0)]$ 在 \mathbb{RP}^1 中,却并不在 φ 的像集里。

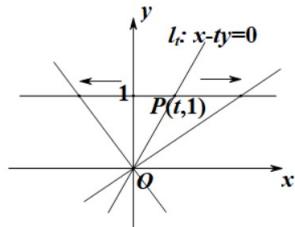


图 5.3: 射影直线中的 \mathbb{R}

注意到 $[(1, 0)]$ 是 \mathbb{RP}^1 中唯一一个不在 φ 的像集中的点,而且当 $t \rightarrow \infty$ 或 $t \rightarrow -\infty$ 时, $\varphi(t)$ 所对应的直线斜率越来越接近于零,从而我们可以认为 $\varphi(t)$ 越来越接近于 x 轴即 $[(1, 0)]$ 。换而言之, $[(1, 0)]$ 是 $\varphi(t)$ 的“极限”。于是,我们记 $\infty = (1 : 0) = \mathbb{R}^0$,则得到如下“分解”:

$$\mathbb{RP}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\} = \mathbb{R}^1 \sqcup \mathbb{R}^0$$

通过这种方式,可以把射影直线 \mathbb{RP}^1 理解为“添加了无穷远点的直线”。

注意,看起来无穷远点“ ∞ ”是 \mathbb{RP}^1 中非常特殊的一个点,但从它的来源看,它并不特殊,因为直线 $y = 0$ (即 x 轴)与别的通过 0 的直线具有完全同等的地位,并不是一条特殊的直线。事实上,如果把上面的 φ 改成别的映射,例如 $\varphi_1(t) = (t : 1 - t)$,则 \mathbb{RP}^1 中除了 $(1 : -1)$ 外别的点(包括 $(1 : 0)$)都在 φ_1 的像里,此时 $(1 : -1)$ 成了这个映射所对应的分解

下的“无穷远点”。

下面是另一种方式来理解 \mathbb{RP}^1 : 因为每条过原点的直线恰好交单位圆 S^1 于对径的两个点，我们也可以将 \mathbb{RP}^1 视作商空间

$$\mathbb{RP}^1 = S^1 / \{\pm 1\},$$

即 S^1 相对于等价关系

$$(x, y) \sim (-x, -y)$$

而形成的等价类的集合。形象地看， \mathbb{RP}^1 的这个模型是通过把“圆的每组对径点粘合”所形成的空间。于是，在描述这个空间时，我们可以去掉半个圆（因为这半个圆里的点都被另外半个圆里的点代表了），而且将剩下的半个圆的两个端点粘合起来（因为它们是同一个等价类中的点）。（从拓扑上看，所得的空间依然是一个圆）

在习题中我们还显式给出了一个从 S^1 到 \mathbb{RP}^1 的自然的双射，其中无穷远点“ ∞ ”对应于点 $(1, 0) \in S^1$ 。这些模型都表明，在射影几何中，无穷远点“ $\infty = (1 : 0)$ ”一点都不特殊。

¶ 射影平面的定义

接下来我们提高一个维度，定义射影平面 \mathbb{RP}^2 为

$$\mathbb{RP}^2 := \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} / \sim,$$

其中等价关系 \sim 定义为

$$(a, b, c) \sim (a', b', c') \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ 使得 } (a, b, c) = \lambda(a', b', c')$$

显然，每个等价类代表了一条经过原点的直线，从而射影平面 \mathbb{RP}^2 可以被视作 \mathbb{R}^3 中所有经过原点的直线所组成的集合。

跟射影直线情形类似，我们将再次使用齐次坐标表示射影平面里的点，即把 \mathbb{RP}^2 中的元素 $[(a, b, c)]$ 记为

$$(a : b : c) := [(a, b, c)],$$

其中 (a, b, c) 不全为零。

不过，跟 \mathbb{RP}^1 不同的是， \mathbb{RP}^2 不再是“向 \mathbb{R}^2 里添加一个点”，而是向 \mathbb{R}^2 添加一条射影直线

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\text{“∞-直线”}\}$$

其中“ ∞ -直线”可以被理解为“地平线”。为了说明这一点，考虑“包含”映射

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad (x, y) \mapsto (x : y : 1).$$

则它是单射，并且“绝大多数直线”（即那些经过原点并穿过平面 $z = 1$ 的直线）都在 ϕ 的像中。仅有的例

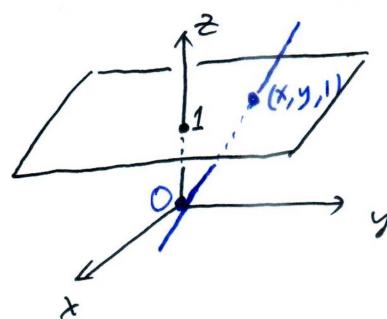


图 5.4: 射影平面中的 \mathbb{R}^2

外是那些经过原点且平行于 $z = 1$ 平面的直线，即那些经过原点并包含在 xy - 平面上

的直线。这些直线恰好组成了射影直线 \mathbb{RP}^1 (由齐次坐标 $(x : y : 0)$, $(x, y) \neq (0, 0)$, 给出)。

作为推论, 我们得到如下的分解

$$\begin{aligned}\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{RP}^1 &= \mathbb{R}^2 \quad \sqcup \quad \mathbb{R}^1 \quad \sqcup \quad \mathbb{R}^0. \\ &\quad \sqcup \quad \quad \quad \quad \quad \sqcup \\ &\quad (x : y : 1) \quad (x : 1 : 0) \quad (1 : 0 : 0)\end{aligned}$$

于是, 射影平面具有两重面目: 首先, \mathbb{RP}^2 是 \mathbb{R}^3 中所有穿过原点直线的集合; 其次 \mathbb{RP}^2 是二维平面 \mathbb{R}^2 的一个扩充, 即由 \mathbb{R}^2 添加无穷远射影直线所构成。

跟射影直线类似, 射影平面 \mathbb{RP}^2 中所有点都有相同的地位, 没有哪个点是特殊的。

注 5.1.1.

- (1) 类似于射影直线的情形, 可以从二维球面 S^2 出发构建射影平面 \mathbb{RP}^2 , 即

$$\mathbb{RP}^2 := S^2 / \{\pm 1\}.$$

但是, 与一维情形不同的是, 商空间 (可视为是将球面 S^2 切成两半之后, 从半球面出发, 把赤道上对径的点“粘合”起来所得的空间) 不再是二维球面 S^2 , 而是一个不能在 \mathbb{R}^3 中被实现单侧曲面。我们将在下一章对它的拓扑做简单介绍。

- (2) 类似地, 可以对所有 $n \geq 1$ 定义 n 维射影空间 \mathbb{RP}^n 。它可以被视为是 \mathbb{R}^{n+1} 中所有穿过原点直线的集合, 并且有类似的分解和“球面商”模型:

$$\begin{aligned}\mathbb{RP}^n &:= \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim \\ &= \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \mathbb{R}^{n-2} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{R}^0 = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{RP}^{n-1} \\ &= S^n / \{\pm 1\}\end{aligned}$$

¶ 射影平面里的直线

跟欧氏几何一样, 我们称 \mathbb{RP}^2 中的任何元素为点。为了行文方便, 把标准模型中满足 $z \neq 0$ 的点 $(x : y : z)$ 称为普通点, 而把形如 $(x : y : 0)$ 的点称为无穷远点, 于是 \mathbb{RP}^2 上的点集都是普通点集合与无穷远点集合的无交并。当然, 普通点与无穷远点并无实质性的区别。

于是, 正如希尔伯特体系所揭示的那样, “点”所代表的不必一定是空间里的一个确定的位置, 而可以是任意东西 (此处是过原点的直线, 或者球面上的一组对径点)。重要的不是点是什么, 而是点与点之间的关系是什么。特别地, 射影几何里的直线是什么?

定义 5.1.2. (射影平面里的直线)

称 \mathbb{RP}^2 中任何一个三元一次齐次多项式的零点集

$$l := \{(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 \mid Ax + By + Cz = 0, (A, B, C) \text{ 不全为 } 0\}$$

为 \mathbb{RP}^2 中的一条直线。



注意, 当我们在等价类的集合上用代表元定义任何对象时, 都需要验证良定性, 即该定义不依赖于代表元的选取:

引理 5.1.3. (直线是良定的)

上述定义是良定的 (即直线的定义不依赖于代表元的选取)。 

证明 如果 $Ax + By + Cz = 0$, 并且 $(x_1, y_1, z_1) \in (x : y : z)$, 即存在 $\lambda \neq 0$ 使得

$$(x_1, y_1, z_1) = \lambda(x, y, z),$$

那么 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = \lambda(Ax + By + Cz) = 0$ 。换句话说, 若等式 $Ax + By + Cz = 0$ 对 (x, y, z) 成立, 则它对任意的 $(x_1, y_1, z_1) \in (x : y : z)$ 都成立。故直线的定义是不依赖于代表元的选取的。 

从上面这个证明可以看出, 为什么定义中需要“齐次性”: 如果考虑非齐次方程 $Ax + By + Cz + D = 0$, 其中 $D \neq 0$, 则满足方程的 (x, y, z) 并不是由 \mathbb{RP}^2 中的对象组成的。

在 \mathbb{RP}^2 的所有直线中, 有一条比较特殊 (当然, 它只是在标准模型下看起来特殊, 实际上并不特殊) 的直线, 即由所有“无穷远点”构成直线

$$l_\infty := \{(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 \mid z = 0\} = \{(x : y : 0) \in \mathbb{RP}^2\},$$

被称为**无穷远直线**。

接下来一个自然的问题是考虑 \mathbb{RP}^2 中点与线的“关联”关系。射影平面内点与线的关联关系非常简单。一方面, 跟欧氏几何类似, 可以证明

命题 5.1.4. (两点关联唯一一条直线)

\mathbb{RP}^2 中任意两点都位于 \mathbb{RP}^2 中唯一一条直线上。 

证明 设 $P_i = (x_i : y_i : z_i)$ ($i = 1, 2$) 为 \mathbb{RP}^2 中不同的两点。

因为 $P_1 \neq P_2$,

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) := (A, B, C) \neq 0.$$

考虑 \mathbb{RP}^2 中的直线

$$l = \{(x : y : z) \mid Ax + By + Cz = 0\},$$

则显然有 $P_1, P_2 \in l$.

另一方面, 如果存在另一条直线

$$l_1 = \{(x : y : z) \mid A_1x + B_1y + C_1z = 0\}$$

也满足 $P_1, P_2 \in l_1$, 那么

$$(A_1, B_1, C_1) \cdot (x_i, y_i, z_i) = 0, \quad i = 1, 2$$

于是 (A_1, B_1, C_1) 平行于 $(A, B, C) = (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2)$, 从而 $l_1 = l$ 。 

另一方面, 跟欧氏平面几何 (以及球面几何、双曲上半平面几何) 不同的是,

命题 5.1.5. (两线关联唯一一个点)

\mathbb{RP}^2 中的任意两条不同的直线必然相交于唯一的一个点。 

证明 考虑 \mathbb{RP}^2 中两条相异直线

$$l_i = \{(x : y : z) | A_i x + B_i y + C_i z = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

因为 $l_1 \neq l_2$, 所以

$$(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) \neq 0.$$

故方程组

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0 \end{cases} \quad (*)$$

定义了 \mathbb{R}^3 中过原点的一条直线, 即 \mathbb{RP}^2 中的一点。这个点是 l_1 与 l_2 的交点。

唯一性也呼之欲出: 如果 $(x_0 : y_0 : z_0) \in l_1 \cap l_2$, 那么 (x_0, y_0, z_0) 满足 (*), 从而必然是上面给出的那个“点”。 \square

上面这两个命题(以及它们的证明)是互相对偶的。事实上, 在射影平面中, 点与直线有很优美的对偶关系:

- 射影平面 \mathbb{RP}^2 中的任意点 $P = (a : b : c)$ 对应于 \mathbb{RP}^2 中的直线

$$l_P = \{(x : y : z) | ax + by + cz = 0\},$$

- 反之射影平面 \mathbb{RP}^2 中的任意直线 $l = \{(x : y : z) | ax + by + cz = 0\}$ 对应于 \mathbb{RP}^2 中的点

$$P_l = (a : b : c)$$

不难验证上述“点与直线间的对应”是良定的。进一步地, 还可以证明

命题 5.1.6. (\mathbb{RP}^2 里点与直线的对偶)

对于 \mathbb{RP}^2 中的点 P 与直线 l , 总有

$$P \in l \iff l_P \ni P_l.$$

证明 令 $P = (a : b : c), l = \{a'x + b'y + c'z = 0\}$, 则

$$\begin{aligned} P \in l &\iff a'a + b'b + c'c = 0 \\ &\iff aa' + bb' + cc' = 0 \\ &\iff l_P \ni P_l. \end{aligned}$$

\square

注 5.1.7. 在仿射几何中, 已经没有角度的概念, 因为角度不再是仿射变换下的不变量。在比仿射几何更大的射影几何中, 更没有角度的概念, 也就没有垂直的概念。另一方面, 在仿射几何中, 依然可以定义平行性(平行线即不相交直线), 但在射影几何中, 不存在平行线的概念, 因为不存在不相交的直线(注意, 如果 $l_i = \{(x : y : z) | A_i x + B_i y + C_i z = 0\}$, 并且 $(A_1, B_1, C_1) // (A_2, B_2, C_2)$, 则 $l_1 = l_2$)。

¶ 齐次化方法

下面介绍一种自然的办法，将 \mathbb{R}^2 (注意不是 \mathbb{R}^3) 上的任意一条 (未必经过原点) 直线扩充成 \mathbb{RP}^2 上的直线。这种方法叫做**坐标齐次化**：

设 $l^0 : Ax + By + C = 0$ 是 \mathbb{R}^2 中的一条直线，其中 A, B 不全为零。令

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z},$$

将其代入 l^0 的方程，可得

$$A\frac{X}{Z} + B\frac{Y}{Z} + C = 0,$$

即

$$AX + BY + CZ = 0.$$

这是一个齐次方程，它给出了 \mathbb{RP}^2 上的一条直线

$$l = \{(X : Y : Z) \mid AX + BY + CZ = 0\}.$$

射影平面的直线 l 被称为欧氏平面直线 l^0 的**射影化**。

直线 l^0 与其射影化 l 之间的关系如下：在标准模型中， \mathbb{R}^2 为 $z = 1$ 平面，即 $\mathbb{R}^2 = \{(x : y : 1)\}$ 。于是

$$l \cap \mathbb{R}^2 = \{(x : y : 1) \mid Ax + By + C = 0\}$$

即 l 与 \mathbb{R}^2 的交集恰为 l^0 。此外， l 与无穷远直线 $l_\infty = \{(x : y : 0) \mid x, y \text{ 不全为 } 0\}$ 的交集为

$$l \cap l_\infty = \{(x : y : 0) \mid Ax + By = 0\} = \{(-B : A : 0)\},$$

而该点恰好是把 l^0 放在 $z = 0$ 平面上时，它所对应的“无穷远点”。所以，

$$l = l^0 \sqcup l^0 \text{ 对应的无穷远点.}$$

¶ \mathbb{RP}^2 上的二次曲线

坐标齐次化是联系 \mathbb{R}^2 上的几何与 \mathbb{RP}^2 上的几何的有效办法。下面用它来讨论一下 \mathbb{RP}^2 上的二次曲线。

定义 5.1.8. (\mathbb{RP}^2 上的二次曲线)

称 \mathbb{RP}^2 中任何一个三元二次齐次多项式的零点集

$$C := \{(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 \mid Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0, \text{ 系数不全为 } 0\}$$

为 \mathbb{RP}^2 中的一条**二次曲线**。



注意这里跟前面射影平面中直线的定义类似，需要齐次性，否则所得的集合在 \mathbb{RP}^2 不是良定的。

当然，我们也可以把三元二次多项式

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

用矩阵乘法写成

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$$

是一个非零的对称 3×3 矩阵。

一个自然的问题是： \mathbb{RP}^2 中的二次曲线看上去是什么样子的？

例 5.1.9. 平面中最典型的二次曲线分别为椭圆、抛物线、双曲线：



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0 \quad x^2 - ay = 0, a > 0 \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$$

抛物线和双曲线是无限延展的，因此在射影平面中它们应该与无穷远直线相交。为了理解它们在射影平面中的几何形状，我们将它们的方程齐次化，即令 $x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}$ ，代入并两边同时乘以 Z^2 ，得到它们的“射影化”方程，如下表所示：

	\mathbb{R}^2	\mathbb{RP}^2	l_∞
椭圆	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - Z^2 = 0$	\emptyset
抛物线	$x^2 - ay = 0, a > 0$	$X^2 - aYZ = 0$	切于一点
双曲线	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - Z^2 = 0$	交于两点

我们分别考察这些二次曲线在 \mathbb{RP}^2 中的射影化与 l_∞ 的相交情况。为此，我们将 $Z = 0$ 代入二次齐次方程，得：

(1) 对椭圆，可得

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0 \implies X = Y = 0.$$

但是 $l_\infty = \{(X : Y : 0) \mid X, Y \text{ 不全为 } 0\}$ 。故

$$\left\{(X : Y : Z) \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - Z^2 = 0\right\} \cap l_\infty = \emptyset.$$

(2) 对抛物线，可得

$$X^2 = 0 \implies X = 0.$$

所以

$$\{(X : Y : Z) \mid X^2 - aYZ = 0\} \cap l_\infty = \{(0 : 1 : 0)\}.$$

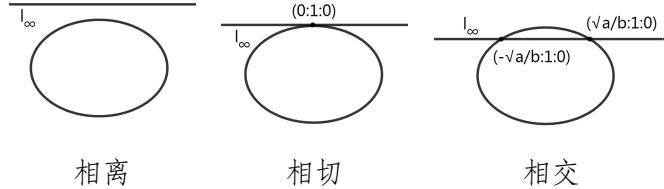
(3) 对双曲线，可得

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 \implies X = \pm \frac{a}{b}Y.$$

所以

$$\left\{ (X : Y : Z) \mid \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - Z^2 = 0 \right\} \cap l_\infty = \left\{ \left(\pm \frac{a}{b} : 1 : 0 \right) \right\}.$$

所以，如果在 l_∞ 上来看它们对应的图形，应该是这样的：



换而言之，在射影平面里，平面上的三种不同几何形状的二次曲线得到了统一。在射影的意义下它们都是同一种二次曲线，只是它们相对于无穷远直线位置不同，所以我们在“有限”的欧氏平面上才看见了不同的形状。在下一节中，我们会引入射影变换，并对 \mathbb{RP}^2 上的二次曲线进行射影变换下的分类，从而可以严格说明“三类二次曲线在射影几何中是同一种”的含义。

注 5.1.10. 当然也可以考察高次的射影曲线，例如费马曲线

$$x^n + y^n = z^n, \quad n \geq 3.$$

在代数几何课程中，可以学到复射影空间中一般的射影曲线理论。事实上，由于复数的引入，很多复杂的事情可以得到简化。比如，

Bezout 定理：一条 n 次复射影曲线跟一条 m 次复射影曲线（在计重数的意义下）一定相交于 $n \cdot m$ 个（复）点。

这个定理是任意两条直线必相交于一点的高次推广。

5.2 射影变换

¶ 延拓至 \mathbb{RP}^2 的仿射变换

从第四章我们知道在 \mathbb{E}^2 中存在各种各样的几何，而这些几何都是由相应的变换群决定的。常见的变换群有

$$G_{\text{刚体}} \subset G_{\text{等距}} \subset G_{\text{相似}} \subset G_{\text{仿射}},$$

而它们都可以被视作 $GL(3, \mathbb{R})$ 的子群，比如最大的 $G_{\text{仿射}}$ 同构于

$$AFF(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in GL(2, \mathbb{R}), u \in \mathbb{E}^2 \right\}$$

之所以在 $GL(3, \mathbb{R})$ 中寻找跟 $G_{\text{仿射}}$ 同构的群，是因为这样一来， $AFF(2)$ 中的任意元素 $\begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 都给出了 \mathbb{R}^3 上的一个线性变换：

$$\Phi_{A,u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_{2 \times 2} & u_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

由于 $A \in GL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) | A \text{ 是可逆的}\}$, 不难验证

- (1) $\Phi_{A,u}^{-1}(0) = 0$,
- (2) $\Phi_{A,u}(\lambda(x, y, z)) = \lambda\Phi_{A,u}(x, y, z)$.

因此 $\Phi_{A,u}$ 是 $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ 到自身的映射, 且将过原点的直线映为过原点的直线。

由此, 可得

命题 5.2.1. (平面仿射变换延拓至 \mathbb{RP}^2)

对于仿射变换群的任意元素 $\begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

- (1) $\Phi_{A,u}$ 诱导了一个 \mathbb{RP}^2 上的可逆映射

$$\bar{\Phi}_{A,u} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad (x : y : z) \mapsto [\Phi_{A,u}(x, y, z)]$$

且它满足 $\bar{\Phi}_{B,v} \circ \bar{\Phi}_{A,u} = \bar{\Phi}_{BA,Bu+v}$ 。

- (2) $\bar{\Phi}_{A,u}$ 将 l_∞ 映到 l_∞ , 且当限制在 \mathbb{R}^2 时, 它恰好是 (第四章所定义的) \mathbb{R}^2 上的仿射变换 $\phi_{A,u} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.



证明

- (1) 首先由 $\Phi_{A,u}(\lambda(x, y, z)) = \lambda\Phi_{A,u}(x, y, z)$ 可知

$$(x : y : z) = (x_1 : y_1 : z_1) \implies [\Phi_{A,u}(x, y, z)] = [\Phi_{A,u}(x_1, y_1, z_1)],$$

从而 $\Phi_{A,u}$ 是良定的

对任意的 $(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2$, 直接计算可知

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{B,v} \circ \bar{\Phi}_{A,u}((x : y : z)) &= \bar{\Phi}_{B,v}([\Phi_{A,u}(x, y, z)]) = [\Phi_{B,v} \circ \Phi_{A,u}(x, y, z)] \\ &= [\Phi_{BA,Bu+v}(x, y, z)] = \bar{\Phi}_{BA,Bu+v}((x : y : z)) \end{aligned}$$

这也意味着 $\bar{\Phi}_{A,u}$ 是可逆的, 因为 $\bar{\Phi}_{I,0}$ 是恒等映射,

$$\bar{\Phi}_{I,0}((x : y : z)) = [\Phi_{I,0}(x, y, z)] = [(x, y, z)] = (x : y : z)$$

从而由

$$\bar{\Phi}_{A,u} \circ \bar{\Phi}_{A^{-1}, -A^{-1}u} = \bar{\Phi}_{AA^{-1}, -AA^{-1}u+u} = \bar{\Phi}_{I,0}$$

以及

$$\bar{\Phi}_{A^{-1}, -A^{-1}u} \circ \bar{\Phi}_{A,u} = \bar{\Phi}_{A^{-1}A, A^{-1}u - A^{-1}u} = \bar{\Phi}_{I,0}$$

可知 $\bar{\Phi}_{A,u}$ 可逆且其逆为 $\bar{\Phi}_{A^{-1}, -A^{-1}u}$ 。

- (2) 矩阵计算可得

$$\begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^* \\ \tilde{y}^* \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}^* \\ \tilde{y}^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u.$$

于是

- 对于 $(x : y : 0) \in l_\infty$, 由 x, y 不全为 0 知 x^*, y^* 不全为 0, 所以 $\bar{\Phi}_{A,u}((x : y : 0)) \in l_\infty$, 即

$$\bar{\Phi}_{A,u}(l_\infty) \subset l_\infty$$

- 对于 $(x : y : 1) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{RP}^2 - l_\infty$, 有 $\bar{\Phi}_{A,u}((x : y : 1)) = (\tilde{x}^* : \tilde{y}^* : 1) \in \mathbb{R}^2$ 。
所以

$$\bar{\Phi}_{A,u}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2.$$

于是由 $\bar{\Phi}_{A,u}$ 可逆知 $\bar{\Phi}_{A,u}(l_\infty) \subset l_\infty$.

此外, 由于 $(x, y) \mapsto (\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ 恰好是第四章所给出的 \mathbb{R}^2 上的仿射变换 $\phi_{A,u}$, 所以在 \mathbb{R}^2 上 $\bar{\Phi}_{A,u} = \phi_{A,u}$, 即 $\bar{\Phi}_{A,u}$ 是仿射变换 $\phi_{A,u}$ 的延拓。

□

注意: $\bar{\Phi}_{A,u}$ 把无穷远直线映为无穷远直线, 但是它可以把一个无穷远点映称另外一个无穷远点 (从几何上看, 这是因为仿射变换可以把沿一个方向的平行线映射成另一个方向的平行线)。

¶ 射影变换

从上述的证明、可以看出, 映射 $\Phi_{A,u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 能诱导出一个变换 $\bar{\Phi}_{A,u} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 的主要原因是 $\bar{\Phi}_{A,u}$ 是可逆线性映射 (因此能将 0 映为 0, 并将直线映为直线)。

在 \mathbb{R}^3 上还存在其它许多 (可逆) 线性映射。事实上, 任意

$$A \in GL(3, \mathbb{R}) = \{A \in M(3, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

均诱导了可逆线性映射

$$\Phi_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi_A(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

类似于命题5.2.1, 可以证明 Φ_A 诱导了 \mathbb{RP}^2 上的一个变换:

命题 5.2.2. (\mathbb{RP}^2 上的变换)

对任意的 $A \in GL(3, \mathbb{R})$, Φ_A 诱导了 \mathbb{RP}^2 上的一个可逆映射

$$\bar{\Phi}_A : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad (x : y : z) \mapsto [\Phi_A(x, y, z)],$$

且该映射满足 $\bar{\Phi}_B \circ \bar{\Phi}_A = \bar{\Phi}_{BA}$ 。



证明 证明方法跟命题5.2.1非常类似:

- $\bar{\Phi}_A$ 是良定的, 因为 $(x, y, z) \neq 0 \implies \Phi_A(x, y, z) \neq 0$, 且 $\Phi_A(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda \Phi_A(x, y, z)$ 。
- 对 $(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2$, 有

$$\bar{\Phi}_B \circ \bar{\Phi}_A((x : y : z)) = \bar{\Phi}_B([A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}]) = [BA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}] = \bar{\Phi}_{BA}((x : y : z)).$$

- 由于 $\bar{\Phi}_{I_3}$ 是 \mathbb{RP}^2 上的恒等映射，并且

$$\bar{\Phi}_A \circ \bar{\Phi}_{A^{-1}} = \bar{\Phi}_{A^{-1}} \circ \bar{\Phi}_A = \bar{\Phi}_{I_3},$$

所以 $\bar{\Phi}_A$ 是在 \mathbb{RP}^2 上可逆的。

□

构造 $\bar{\Phi}_A$ 的过程可图示如下：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\Phi_A} & \mathbb{R}^3 \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{R}^3 - \{0\} & \xrightarrow{\Phi_A} & \mathbb{R}^3 - \{0\} \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ \mathbb{RP}^2 & \xrightarrow{\overline{\Phi_A}} & \mathbb{RP}^2 \end{array}$$

我们定义

定义 5.2.3. (射影变换)

对任意的 $A \in GL(3, \mathbb{R})$, 称 $\bar{\Phi}_A : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 为射影变换。



于是 \mathbb{R}^3 的每个可逆线性变换都诱导了 \mathbb{RP}^2 的一个射影变换，而 \mathbb{R}^2 上的每个仿射变换则诱导了一个特殊的射影变换，该射影变换把无穷远直线映射为无穷远直线。另一方面，不难找到例子说明一般的射影变换 $\bar{\Phi}_A$ 并不一定把无穷远点映为无穷远点。

¶ 射影变换群

记 $G_{\text{射影}} = \{\bar{\Phi}_A | A \in GL(3, \mathbb{R})\}$ 为全体 \mathbb{RP}^2 上全体射影变换的集合。

命题 5.2.4. (射影变换群)

- (1) $G_{\text{射影}}$ 是一个变换群。
- (2) 仿射变换群 $G_{\text{仿射}}$ 同构于 $G_{\text{射影}}$ 的子群

$$G_\infty := \{\bar{\Phi}_A \in G_{\text{射影}} | \bar{\Phi}_A(l_\infty) = l_\infty\}.$$



证明

- (1) 由 $\bar{\Phi}_B \circ \bar{\Phi}_A = \bar{\Phi}_{BA}$ 以及 $\bar{\Phi}_{Id} = \text{Id} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 可知 $(\bar{\Phi}_A)^{-1} = \bar{\Phi}_{A^{-1}}$, 从而 $G_{\text{射影}}$ (在“映射复合”运算下) 是一个变换群。
- (2) 显然 G_∞ 是 $G_{\text{射影}}$ 的子群。下面考虑映射

$$\alpha : G_{\text{仿射}} \rightarrow G_{\text{射影}}, \quad \phi_{(A,u)} \mapsto \bar{\Phi}_{A,u}.$$

则

- ① α 是一个群同态，这是因为

$$\alpha(\phi_{(B,v)} \circ \phi_{(A,u)}) = \alpha(\phi_{(BA,Bu+v)}) = \bar{\Phi}_{BA,Bu+v}$$

$$\alpha(\phi_{(B,v)}) \circ \alpha(\phi_{(A,u)}) = \bar{\Phi}_{B,v} \circ \bar{\Phi}_{A,u} = \bar{\Phi}_{BA,Bv+u}.$$

- ② α 是单射：如果 $\alpha(\phi_{(A,u)}) = Id$, 即 $\bar{\Phi}_{A,u} = Id$, 则对于任意 $[x:y:z]$, 计算

可得 $\bar{\Phi}_{A,u}(x:y:z) = (\tilde{x}^*: \tilde{y}^*: z)$, 从而对任意 x, y, z 均有

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^* \\ \tilde{y}^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + zu = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

这说明 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 并且 $u = 0$, 从而 $\phi_{(A,u)} = \phi_{(Id,0)}$ 是群 $G_{\text{仿射}}$ 的单位元。

③ α 是满射: 对于 $\phi_{(A,u)} \in G_{\text{仿射}}$, 因为 $\bar{\Phi}_{A,u}(l_\infty) = l_\infty$, 所以 $Im(\alpha) \subset G_\infty$ 。

反之, 假设 $A \in GL(3, \mathbb{R})$ 且 $\bar{\Phi}_A(l_\infty) = l_\infty$ 。记 $A = \begin{pmatrix} B_{2 \times 2} & v_{2 \times 1} \\ u_{1 \times 2} & t \end{pmatrix}$, 则由 $\bar{\Phi}_A(x:y:0) = (x^*: y^*: 0)$ 以及

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \left(B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, u \cdot (x, y) \right)$$

可知

- 对任意 x, y 均有 $u \cdot (x, y) = 0$, 从而 $u = 0$;
- 由 $\det A \neq 0$ 可知 $t \neq 0$ 且 $\det B \neq 0$.

于是 $\bar{\Phi}_A = \bar{\Phi}_{A/t} = \bar{\Phi}_{B/t, u/t} \in Im(\alpha)$.

□

我们称 $G_{\text{射影}}$ 为 \mathbb{RP}^2 的射影变换群。

注 5.2.5. 一般地, 设 X 为一集合, 对于 X 上任意一个变换群 G 以及 X 的一个子集族 $\mathcal{Y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}, Y_\alpha \subset X$, 不难验证

$$G_{\mathcal{Y}}(X) = \{f \in G \mid f(Y_\alpha) = Y_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda\}$$

构成 G 的一个子群。这个观察在克莱因的埃尔朗根纲领中起到重要作用。

¶ \mathbb{RP}^2 上的射影变换的刻画

下述定理表明, \mathbb{RP}^2 的射影变换由它在四个点处的值确定:

定理 5.2.6. (一般位置定理)

设 P_1, P_2, P_3, P_4 是 \mathbb{RP}^2 中处于一般位置的四个点 (即其中任意三点不共线), 则存在唯一的射影变换 $\phi = \bar{\Phi}_A : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, 使得

$$\phi(P_1) = (1:0:0), \quad \phi(P_2) = (0:1:0), \quad \phi(P_3) = (0:0:1), \quad \phi(P_4) = (1:1:1). \quad \heartsuit$$

证明 先证明存在性。记 $P_i = (a_i : b_i : c_i), 1 \leq i \leq 4$, 并令

$$P := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

因为点 P_1, P_2, P_3 在 \mathbb{RP}^2 中不共线，所以矩阵 P 可逆。令

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_4 \\ \tilde{b}_4 \\ \tilde{c}_4 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

断言： $\tilde{a}_4, \tilde{b}_4, \tilde{c}_4 \neq 0$.

【断言的证明：用反证法。若 $\tilde{a}_4 = 0$ ，则

$$\begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{b}_4 \\ \tilde{c}_4 \end{pmatrix} = \tilde{b}_4 P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{c}_4 P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{b}_4 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \tilde{c}_4 \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

这跟 P_2, P_3, P_4 在 \mathbb{RP}^2 中不共线矛盾。故 $\tilde{a}_4 \neq 0$ 。同理可知 $\tilde{b}_4 \neq 0, \tilde{c}_4 \neq 0$.】

最后，令

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_4^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_4^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_4^{-1} \end{pmatrix} P^{-1},$$

则 A 是可逆矩阵，且它满足

$$A \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_4^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_4^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_4^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \tilde{a}_4 \\ 0 & 1 & 0 & \tilde{b}_4 \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{c}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_4^{-1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{b}_4^{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_4^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\bar{\Phi}_A$ 就是所需的射影变换。

下面证明唯一性。设 $\bar{\Phi}_B$ 是另一个射影变换，且满足所需的性质。则

$$\bar{\Phi}_{AB^{-1}} = \bar{\Phi}_A \bar{\Phi}_B^{-1}$$

是一个射影变换，且保持 $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ 以及 $(1 : 1 : 1)$ 四个点不变。

令

$$C = AB^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

则存在 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \neq 0$ 使得

$$C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

把左边用矩阵乘法计算一下，就有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$ ，且 $C = \lambda I$ 。于是 $\bar{\Phi}_A \bar{\Phi}_B^{-1} = \bar{\Phi}_C = \text{Id}$ 是恒等映射，从而 $\bar{\Phi}_A = \bar{\Phi}_B$ 。于是满足条件的射影变换是唯一的。□

因为射影变换构成一个群，所以

推论 5.2.7

对于 \mathbb{RP}^2 中任意两组处于一般位置的点 $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 和 $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, 存在唯一一个射影变换 $\phi: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 使得 $\phi(P_i) = Q_i$, $1 \leq i \leq 4$.

由此可得

命题 5.2.8. (一般位置定理: 射影直线版)

假设 l_1, l_2, l_3, l_4 是 \mathbb{RP}^2 中处于一般位置的四条射影直线 (即其中任意三条线不共点), 则存在唯一的射影变换 $\phi: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 使得

$$\begin{aligned}\phi(l_1) &= \{(x : y : z) \mid x = 0\}, \quad \phi(l_2) = \{(x : y : z) \mid y = 0\}, \\ \phi(l_3) &= \{(x : y : z) \mid z = 0\}, \quad \phi(l_4) = \{(x : y : z) \mid x + y + z = 0\}.\end{aligned}$$

证明 令 $P_1 = l_1 \cap l_3, P_2 = l_1 \cap l_4, P_3 = l_2 \cap l_3, P_4 = l_2 \cap l_4$. 则 P_1, P_2, P_3, P_4 处于一般位置。于是存在唯一的射影变换 ϕ 使得

$$\phi(P_1) = (0 : 1 : 0), \quad \phi(P_2) = (0 : 1 : -1), \quad \phi(P_3) = (1 : 0 : 0), \quad \phi(P_4) = (1 : 0 : -1).$$

因为任意两点确定唯一一条直线, 所以 $\phi(l_1)$ 就是过 $\phi(P_1), \phi(P_2)$ 的直线, 即

$$\phi(l_1) = \{(x : y : z) \mid x = 0\}.$$

同理可验证 ϕ 满足其他条件。

满足条件的射影变换 ϕ 的唯一性是定理5.2.6中唯一性的推论: 若 ϕ' 是满足条件的另一个射影变换, 则 $\phi \circ (\phi')^{-1}$ 保持一般位置的四点不动, 从而只能是恒等变换。□

¶ 射影平面中二次曲线在射影变换下的分类

根据定义, \mathbb{RP}^2 中的二次曲线指的是齐次三元二次多项式的零点集, 即

$$S_C = \left\{ (x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 \mid \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

其中 $C \neq 0$ 是某个非零的 3×3 对称矩阵。现在考虑射影变换 $\bar{\Phi}_A$ 。简单计算可知

$$\bar{\Phi}_A(S_C) = \left\{ (x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 \mid \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} (A^{-1}C(A^{-1})^T) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

即 $\bar{\Phi}_A(S_C) = S_{A^{-1}C(A^{-1})^T}$. 因为 $A^{-1}C(A^{-1})^T$ 也是一个非零的 3×3 对称矩阵, 所以 $\bar{\Phi}_A(S_C)$ 仍然是二次曲线。由此我们得到

- 若记 $X = \{S \subset \mathbb{RP}^2 \mid X \text{ 为二次曲线}\}$ 并在 X 上定义关系

$$X \sim X' \iff \text{存在射影变换 } \bar{\Phi}_A \text{ 使得 } X' = \bar{\Phi}_A(X).$$

则 \sim 是 S 上的等价关系 (因为射影变换构成一个几何变换群, 且将二次曲线映为二次曲线)。

- 二次曲线在射影变换下的分类问题, 本质上是如下 (线性) 代数问题: 对于任意非零的 3×3 对称矩阵, 寻找可逆矩阵 A 使得 ACA^T “尽可能简单”。

根据附录中的命题A.4.13, 存在正交矩阵(自然可逆) A , 使得

$$ACA^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

于是可以按照 λ_i 的取值进行分类讨论:

情形一 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中两个为 0。

通过把 A 乘以一个对应于坐标轴轮换的正交阵, 不妨假设 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_1 \neq 0$ 。

若 $\lambda_1 < 0$, 则用 $-C$ 代替 C , 故不妨设 $\lambda_1 > 0$ 。由于

$$\begin{pmatrix} (\sqrt{\lambda_1})^{-1} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sqrt{\lambda_1})^{-1} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

所以在该情形, 总找到可逆矩阵 A , 使得

$$ACA^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

故该二次曲线在射影变换下等价于 $\{(x : y : z) \mid x^2 = 0\} = \{(x : y : z) \mid x = 0\}$, 即直线。

情形二 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中仅一个为 0。

同理不妨设 $\lambda_3 = 0$ 。我们还要进一步讨论:

- (I) 若 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, 即 λ_1, λ_2 同号, 不妨假设 λ_1, λ_2 都是正数。类似于情形一, 可以找到可逆矩阵 A , 使得

$$ACA^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

故该二次曲线在射影变换下等价于 $\{(x : y : z) \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{(0 : 0 : 1)\}$, 即单点集。

- (II) 若 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, 即 λ_1, λ_2 异号, 不妨假设 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ 。同理总能找到可逆矩阵 A , 使得

$$ACA^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

故该二次曲线在射影变换下等价于 $\{(x : y : z) \mid x^2 - y^2 = 0\} = \{(x : y : z) \mid x + y = 0 \text{ 或 } x - y = 0\}$, 即两条相交直线。

情形三 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 全不等于 0。

同样分两种情形进一步讨论:

(I) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 同号, 不妨假设都是正数。则存在可逆矩阵 A , 使得

$$ACA^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

故该二次曲线在射影变换下等价于 $\{(x : y : z) | x^2 + y^2 + z^2 = 0\} = \emptyset$, 即空集。

(II) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 异号, 不妨假设 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ 而 $\lambda_3 < 0$. 则存在可逆矩阵 A , 使得

$$A \cdot C \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \text{ 或 } A \cdot (-C) \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

故该二次曲线在射影变换下等价于 $\{(x : y : z) | x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, 即非退化二次曲线。

综上可得

命题 5.2.9. (二次曲线的射影分类)

令 X 为 \mathbb{RP}^2 上所有二次曲线的集合, \sim 为由射影变换诱导的等价关系, 则等价类集合为 $X/\sim = \sqcup M_i$, 其中

- (空集) $M_0 = \{[x^2 + y^2 + z^2 = 0]\}$
- (点) $M_1 = \{[x^2 + y^2 = 0]\}$
- (直线) $M_2 = \{[x^2 = 0]\}$
- (两条相交直线) $M_3 = \{[x^2 - y^2 = 0]\}$
- (二次非退化曲线) $M_4 = \{[x^2 + y^2 - z^2 = 0]\}$



证明 上面的分析已经证明了 \mathbb{RP}^2 上每条二次曲线都等价于定理中五种情形之一。另一方面, 由于射影变换是保持直线的双射, 所以这五类中, 不同类的元素一定不等价。□

特别地, 我们发现, 欧氏空间的椭圆、抛物线、双曲线, 如果在射影空间看, 它们都等价于同一条二次曲线, 即非退化二次曲线。

5.3 射影变换的不变量

¶ 分式线性变换

在考察 \mathbb{RP}^2 上射影变换的几何性质之前, 我们先来研究 \mathbb{RP}^1 上射影变换的几何性质。和 \mathbb{RP}^2 的情形相同, 可以定义 \mathbb{RP}^1 上射影变换为

$$\bar{\Phi}_A : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1, \quad (x : y) \mapsto [\Phi_A(x, y)] = \bar{\Phi}_A((x : y))$$

其中 $A \in GL(2, \mathbb{R})$, 且

$$\Phi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \Phi_A(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

所以如果记 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 其中 $\det A = ad - bc \neq 0$, 那么

$$\Phi_A(x, y) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix},$$

因此

$$\bar{\Phi}_A((x : y)) = (ax + by : cx + dy).$$

为了理解 $\bar{\Phi}_A$, 可以先将 $\bar{\Phi}_A$ 限制在 $\mathbb{R} = \{(t : 1) | t \in \mathbb{R}\}$ 上:

$$\bar{\Phi}_A((t : 1)) = (at + b : ct + d).$$

所以如果 $c \neq 0$ 并且 $t \neq -\frac{d}{c}$, 那么

$$\bar{\Phi}_A((t : 1)) = \left(\frac{at + b}{ct + d} : 1 \right).$$

于是限制在 \mathbb{R} 后, 它事实上把 t 映射为 $\frac{at+b}{ct+d}$ 。这样的映射在研究射影变换 (以及在复分析里) 起到重要的作用, 所以给它一个专门的名称:

定义 5.3.1. (分式线性变换)

对于 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$, 称映射

$$\phi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_A(t) = \frac{at + b}{ct + d}$$

为 \mathbb{R} 上的一个分式线性变换。



可以验证 (习题):

引理 5.3.2. (射影变换诱导分式线性变换)

如果 $\bar{\Phi}_A = \bar{\Phi}_{A'}$, 其中 $A, A' \in GL(2, \mathbb{R})$, 那么 $\phi_A = \phi_{A'}$ 。



于是对于任意射影变换 $\bar{\Phi}_A : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$, 当它被限制在 \mathbb{R}^1 上时, 就给出一个确定的分式线性变换。

反过来, 给定任意分式线性变换 ϕ_A , 其中 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$, 我们也可以把它延拓到“无穷远点”, 并得到一个射影变换。延拓方法如下:

(1) 如果 $b = 0$, 那么 ϕ_A 是在 \mathbb{R} 上有定义的, 还需要定义它在“无穷远点” ∞ 的值。

因为 $\frac{a\infty + b}{d} = \infty$, 所以自然定义 $\phi_A(\infty) = \infty$, 写成射影坐标下的射影变换即

$$\rightsquigarrow \bar{\Phi}_A((t : 1)) = (\phi_A(t) : 1), \quad \bar{\Phi}_A((1 : 0)) = (1 : 0).$$

(2) 如果 $b \neq 0$, 那么 ϕ_A 是在 $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{b}\}$ 上有定义的, 因为 $\frac{a(-d/b) + c}{b(-d/b) + d} = \infty$, $\frac{a\infty + c}{b\infty + d} = \frac{a}{b}$,

所以自然定义 $\phi_A(-\frac{d}{b}) = \infty$, $\phi_A(\infty) = \frac{a}{b}$, 写成射影坐标下的射影变换即

$$\rightsquigarrow \bar{\Phi}_A((t : 1)) = (\phi_A(t) : 1), \quad t \neq -\frac{d}{b}$$

$$\bar{\Phi}_A\left(\left(-\frac{d}{b} : 1\right)\right) = (1 : 0)$$

$$\bar{\Phi}_A((1 : 0)) = \left(\frac{a}{b} : 1\right).$$

不难验证 (习题)

引理 5.3.3. (分式线性变换决定射影变换)

对情形 (1) 与 (2) 都有

- ① $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_A$ 是一个射影变换。
- ② 如果 $\phi_A = \phi_{A'}$, 那么 $\bar{\Phi}_A = \bar{\Phi}_{A'}$.



¶ 交比

下面我们探索一个自然的问题:

分式线性变换 $\phi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 下, 什么几何量会被保持?

我们从最简单的量开始找感觉。对于任意的 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, 可以计算

$$\phi_A(t_2) - \phi_A(t_1) = \frac{at_2 + c}{bt_2 + d} - \frac{at_1 + c}{bt_1 + d} = \frac{ad - bc}{(bt_1 + d)(bt_2 + d)}(t_2 - t_1) \quad (*)$$

于是除了极其特殊的 A (即满足 $b = 0, d = \pm a$) 之外, 一般而言两点之间的距离是不被保持的。

接下来我们退而求其次, 考虑距离的比值。使用上面的公式 (*) 可得

$$\frac{\phi_A(t_3) - \phi_A(t_1)}{\phi_A(t_3) - \phi_A(t_2)} = \frac{bt_2 + d t_3 - t_1}{bt_1 + d t_3 - t_2} \quad (**)$$

所以, 除了少量的 A (即满足 $b = 0$) 之外, 距离之比仍然不能被一般的分式线性变换保持。

虽然考虑距离之比并未奏效, 但稍微观察一下会发现, 上面使得距离之比不被保持的“坏项” $\frac{bt_2+d}{bt_1+d}$ 是与 t_3 无关的! 所以, 只需要向前走一步, 就可以把它消掉:

$$\frac{\phi_A(t_3) - \phi_A(t_1)}{\phi_A(t_3) - \phi_A(t_2)} \frac{\phi_A(t_4) - \phi_A(t_2)}{\phi_A(t_4) - \phi_A(t_1)} = \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \frac{t_4 - t_2}{t_4 - t_1}$$

这是一个被 ϕ_A 保持的量!

定义 5.3.4. (交比)

对任意不同的四个数 $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$, 称

$$R(t_1, t_2, t_3, t_4) := \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \frac{t_4 - t_2}{t_4 - t_1}$$

为它们的交比。



在上面的探索过程中, 我们已经证明了

命题 5.3.5. (分式线性变换保交比)

任意分式线性变换保持交比, 即对任意不同的四个数 t_1, t_2, t_3, t_4 , 均有

$$R(\phi_A(t_1), \phi_A(t_2), \phi_A(t_3), \phi_A(t_4)) = R(t_1, t_2, t_3, t_4).$$



注 5.3.6. 可以将交比的定义推广到有一个 t_i 为 ∞ 的情形。例如，因为

$$\frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \frac{\infty - t_2}{\infty - t_1} = \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \frac{1 - \frac{t_2}{\infty}}{1 - \frac{t_1}{\infty}},$$

所以可以自然定义

$$R(t_1, t_2, t_3, \infty) = \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2}.$$

类似地，可以定义

$$R(\infty, t_2, t_3, t_4) = \frac{t_4 - t_2}{t_3 - t_2}, \quad R(t_1, \infty, t_3, t_4) = \frac{t_3 - t_1}{t_4 - t_1}, \quad R(t_1, t_2, \infty, t_4) = \frac{t_4 - t_2}{t_4 - t_1}.$$

¶ 射影变换与交比

由于 $\mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ 就是 \mathbb{RP}^1 ，我们可以将交比“移植”到 \mathbb{RP}^1 上。因为

$$\frac{x_3/y_3 - x_1/y_1}{x_3/y_3 - x_2/y_2} \frac{x_4/y_4 - x_2/y_2}{x_4/y_4 - x_1/y_1} = \frac{x_3y_1 - x_1y_3}{x_3y_2 - x_2y_3} \frac{x_4y_2 - x_2y_4}{x_4y_1 - x_1y_4},$$

所以在齐次坐标下，如果 $P_i = (x_i : y_i)$ ，则定义它们的交比为

$$R(P_1, P_2, P_3, P_4) := \frac{x_3y_1 - x_1y_3}{x_3y_2 - x_2y_3} \frac{x_4y_2 - x_2y_4}{x_4y_1 - x_1y_4}.$$

于是下面的命题就是自然的（且不难由定义验证）：

命题 5.3.7. (射影变换保交比)

任意射影变换 $\Phi_A : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ 保持交比，即对任意不同的四点 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{RP}^1$ ，均有

$$R(\Phi_A(P_1), \Phi_A(P_2), \Phi_A(P_3), \Phi_A(P_4)) = R(P_1, P_2, P_3, P_4).$$



反过来，并不显然的事情是

定理 5.3.8. (射影变换 \Leftrightarrow 保交比)

一个变换（即双射） $\Phi : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ 是射影变换当且仅当它保持交比。



证明 令 $\Phi : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ 为一个保持 \mathbb{RP}^1 上交比的变换。记

$$\Phi((1 : 1)) = a_1, \quad \Phi((0 : 1)) = a_2, \quad \Phi((1 : 0)) = a_3$$

因为 Φ 是双射，所以 a_1, a_2, a_3 是 \mathbb{RP}^2 中互异的点。

断言：存在唯一的射影变换 $\bar{\Phi}_A$ 使得

$$\bar{\Phi}_A(a_1) = (1 : 1) = 1, \quad \bar{\Phi}_A(a_2) = (0 : 1) = 0, \quad \bar{\Phi}_A(a_3) = (1 : 0) = \infty$$

先承认这个断言。则复合映射 $\Psi = \bar{\Phi}_A \circ \Phi$

$$\Psi : \mathbb{RP}^1 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{RP}^1 \xrightarrow{\bar{\Phi}_A} \mathbb{RP}^1$$

保持 \mathbb{RP}^1 上的交比，并且

$$\Psi(1) = 1, \quad \Psi(0) = 0, \quad \Psi(\infty) = \infty$$

于是对任意的 $t \notin \{0, 1, \infty\}$ ，一方面

$$R(\Psi(t), \Psi(1), \Psi(0), \Psi(\infty)) = R(t, 1, 0, \infty) = \frac{0 - t}{0 - 1} = t,$$

另一方面

$$R(\Psi(t), \Psi(1), \Psi(0), \Psi(\infty)) = R(\Psi(t), 1, 0, \infty) = \frac{0 - \Psi(t)}{0 - 1} = \Psi(t),$$

因此 $\Psi = Id$, 从而 $\Psi = \bar{\Phi}_A^{-1} = \bar{\Phi}_{A^{-1}}$ 是一个射影变换。 \square

证明 断言的证明: 分情况讨论。

(1) 若 $\infty \notin \{a_1, a_2, a_3\}$, 则需要寻找一个分式线性变换 $t \mapsto \frac{at+c}{bt+d}$ 使得

$$\frac{aa_1 + c}{da_1 + d} = 1, \quad \frac{aa_2 + c}{da_2 + d} = 0, \quad \frac{aa_3 + c}{da_3 + d} = \infty.$$

解方程, 可知只要取

$$a = \lambda(a_1 - a_3), \quad b = \lambda(a_1 - a_2), \quad c = \lambda a_2(a_3 - a_1), \quad d = \lambda a_3(a_2 - a_1)$$

即可, 其中 λ 可以任取。

(2) 若 $a_1 = \infty$, 类似地写出方程并求解, 可知只要取

$$a = \lambda, b = \lambda, c = -\lambda a_2, d = -\lambda a_3$$

即可。

(3) 若 $a_2 = \infty$ 或 $a_3 = \infty$, 做法类似, 留作习题。 \square

¶ 透视投影

本节后面将会证明, 射影平面上的射影变换具有“保(射影)直线”性质, 即会把射影平面上的射影直线映为射影直线。作为准备工作, 在研究射影平面上的射影变换之前, 我们先研究 \mathbb{RP}^2 上两条不同的(射影)直线之间的射影对应。

先定义一种非常简单且非常几何的射影对应, 即透视投影。包括达·芬奇在内, 很多艺术家都曾研究过透视问题: 画作可以被视作是从原景到画布的投影, 透视中心则是画家的眼镜。从这个角度看, 透视投影是射影几何的源头之一, 在生活中也很常见:

定义 5.3.9. (透视投影)

设 $l_1 \neq l_2$ 为 \mathbb{RP}^2 中的两条直线, 且 $O \notin l_1 \cup l_2$ 。称映射

$$l_1 \xrightarrow{O} l_2 : l_1 \rightarrow l_2, \quad P \mapsto P' = \text{直线 } OP \text{ 与直线 } l_2 \text{ 的交点}$$

为从 l_1 到 l_2 的透视投影, 并称点 O 为该透视投影的透视中心。

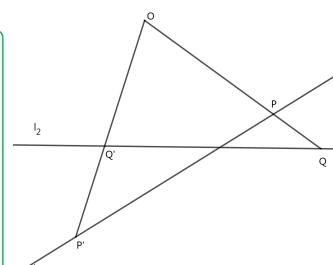


图 5.5: 透视投影

注意在定义中已经使用了如下事实:

- 任意两个相异的点位于唯一一条直线上。
- 任意两条相异直线相交于唯一一点。

下面看一个具体的例子:

例 5.3.10. 假设 l_1 由方程 $y = kx + b$ 给出, 其中 k, b 不全为 0, 而 l_2 由 $y = 0$ 给出, 且 $O(x_0, y_0) \notin l_1 \cup l_2$ 。则 l_1 或 l_2 上的每一点都唯一由它的 x -坐标决定。

对于任意 $P(x, y)$, 通过简单的计算可知点 $P' = l_1 \stackrel{o}{\wedge} l_2(P)$ 的 x -坐标为

$$x' = \frac{(kx_0 - y_0)x + bx_0}{kx + (b - y_0)}.$$

由于 $O \notin l_1 \cup l_2$,

$$\begin{vmatrix} kx_0 - y_0 & bx_0 \\ k & b - y_0 \end{vmatrix} = y_0(y_0 - kx_0 - b) \neq 0$$

因此, 在透视投影下, l_1 与 l_2 上的 x 坐标的变换规律恰好是由分式线性变换给出的, 亦即它是“对应的射影直线间的射影变换”(其精确描述见下面的命题5.3.15)。

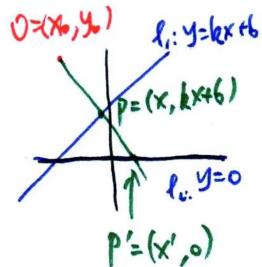


图 5.6: 能用 x -坐标同时参数化

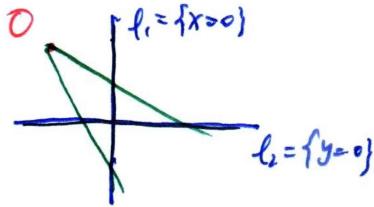


图 5.7: 不能用 x -坐标同时参数化

¶ 射影坐标

上面这个例子的计算过程中, 我们用到了“可以用 x -坐标同时参数化 l_1 和 l_2 ”这个事实, 从而把“点之间的映射”转化为“ x -坐标之间的映射”来理解。当然, 并不能用 x -坐标来同时参数化 l_1 和 l_2 , 比如上面的右图。不过, 这也并不会造成太大的问题, 因为存在其它的自然的参数化方法, 没有必要偏爱“用 x -坐标参数化”这种特定的参数化方法。事实上, 可以有无穷多种方法用 \mathbb{RP}^1 来参数化 \mathbb{RP}^2 中的一条直线:

定义 5.3.11. (射影坐标)

设 $l = \{(x : y : z) | ax + by + cz = 0\}$ 是 \mathbb{RP}^2 中的任意直线, 若

$$\varphi : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^2, (u : v) \mapsto (x(u, v) : y(u, v) : z(u, v))$$

是一个单射, 其中 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 都是 u, v 变量的一次齐次多项式(即形如 $\lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 且满足

$$ax(u, v) + by(u, v) + cz(u, v) = 0, \quad \forall (u : v) \in \mathbb{RP}^1$$

则称 φ 是 l 的一个射影坐标映射(或一个射影参数化)。



注 5.3.12. 事实上满足条件的 φ 是一个从 \mathbb{RP}^1 到 l 的双射, 原因如下:

在 $Im(\varphi)$ 中选取相异的两点 $(x_1 : y_1 : z_1), (x_2 : y_2 : z_2)$, 那么对任意点 $(x_3 : y_3 : z_3) \in l$, 存在 λ, μ 使得

$$(x_3, y_3, z_3) = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)$$

于是由齐次性, $(x_3 : y_3 : z_3)$ 在 φ 的像中。

所以 $Im(\phi) = l$, 也就是说, l 上每一点都恰好被 \mathbb{RP}^1 中的某一点所参数化。

例 5.3.13. 同一条射影直线的射影坐标非常多, 例如

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(u, v) = v \\ y(u, v) = u \\ z(u, v) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(u, v) = au + bv \\ y(u, v) = cu + dv \\ z(u, v) = 0 \end{cases} \quad (ad - bc \neq 0)$$

都是 $l_\infty = \{z = 0\}$ 的射影坐标。

对于一般的射影坐标, 记

$$\begin{cases} x(u, v) = \lambda_1 u + \mu_1 v, \\ y(u, v) = \lambda_2 u + \mu_2 v, \\ z(u, v) = \lambda_3 u + \mu_3 v, \end{cases}$$

写成矩阵乘法即

$$(x, y, z) = (u, v) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

注意对任意的 u, v 都有 $(x, y, z) \neq 0$, 故 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 不平行于 (μ_1, μ_2, μ_3) 。于是

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in l &\iff (u, v) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \quad \forall u, v \\ &\iff (u, v) \begin{pmatrix} \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c \\ \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c \end{pmatrix} = 0, \quad \forall u, v \\ &\iff \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0, \quad \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c = 0 \\ &\iff w_1 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), w_2 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \text{ 都位于 } \mathbb{E}^3 \text{ 中的平面} \end{aligned}$$

$$ax + by + cz = 0$$

内, 并且 $w_1 \times w_2 = \lambda(a, b, c) \neq 0$

换而言之, 一个射影坐标不过就是在平面 $ax + by + cz = 0$ 中选择两个向量 w_1, w_2 , 使得 $w_1 \times w_2 \neq 0$ 。从几何上看, 这件事不过是表明了如下事实: 平面 $ax + by + cz = 0$ 中的任意向量可由其中的任意两个不共线向量唯一表示。

例 5.3.14. 根据平面方程的即约形式, 任何平面 $ax + by + cz = 0$ 都具有 (一个或两个或三个) 如下自然的射影参数化: 以 $a \neq 0$ 为例, 此时该平面方程可写成

$$x = \left(-\frac{b}{a}\right)y + \left(-\frac{c}{a}\right)z.$$

于是,

$$\varphi(u : v) = \left(-\frac{b}{a}u - \frac{c}{a}v : u : v\right)$$

是射影直线 $l = \{(x : y : z) \mid ax + by + cz = 0\}$ 的射影坐标。

¶ 透视投影 vs 射影变换

接下来我们把例5.3.10观察到的现象一般化，说明如果将射影直线都用 \mathbb{RP}^1 进行射影参数化，则透视投影就是参数空间 \mathbb{RP}^1 上的射影变换：

命题 5.3.15. (“透视投影是射影变换”)

设 l_1, l_2 为射影直线，而

$$\phi_i : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad (u_i : v_i) \mapsto (x(u_i : v_i) : y(u_i : v_i) : z(u_i : v_i))$$

为 l_i 的一个射影坐标， $i = 1, 2$ 。则对任意的 $O \notin l_1 \cup l_2$ ，透视投影 $l_1 \overset{\phi}{\wedge} l_2$ 诱导的 \mathbb{RP}^1 上的映射

$$\alpha : \mathbb{RP}^1 \xrightarrow{\phi_1} l_1 \xrightarrow{l_1 \overset{\phi}{\wedge} l_2} l_2 \xrightarrow{\phi_2^{-1}} \mathbb{RP}^1$$

是一个射影变换。



证明 证明分为三步：

第一步：一种特殊情况 (l_1, l_2 不同，且赋予由平面既约形式方程所对应的自然参数化) 命题成立。

先设 l_1, l_2 是不同的射影直线。则它们对应的 \mathbb{R}^3 中过原点的平面具有不同的法向，从而具有不同形式的约化方程。故不失一般性，可设

$$l_1 = \{(x : y : z) \mid x + \lambda_1 y + \lambda_2 z = 0\}, \quad l_2 = \{(x : y : z) \mid \lambda_3 x + y + \lambda_4 z = 0\},$$

则由例5.3.14， $(y : z)$ 是 l_1 的一个射影坐标，而 $(x : z)$ 是 l_2 的一个射影坐标。

设透视中心为点 $O = (x_0 : y_0 : z_0)$ 。对于任意

$$P = (x_1 : y_1 : z_1) = (-\lambda_1 y_1 - \lambda_2 z_1 : y_1 : z_1) \in l_1,$$

由命题5.1.4的证明，连接 O 与 P 的直线为

$$l = \{(x : y : z) \mid Ax + By + Cz = 0\},$$

其中

$$(A, B, C) = (x_0, y_0, z_0) \times (-\lambda_1 y_1 - \lambda_2 z_1, y_1, z_1).$$

于是由命题5.1.5的证明， l 与 l_2 的交点是

$$Q = (x_2 : y_2 : z_2)$$

其中 (计算过程用到 BAC-CAB 恒等式)

$$\begin{aligned} (x_2, y_2, z_2) &= (\lambda_3, 1, \lambda_4) \times (A, B, C) \\ &= (\lambda_3, 1, \lambda_4) \times ((x_0, y_0, z_0) \times (-\lambda_1 y_1 - \lambda_2 z_1, y_1, z_1)) \\ &= (-\lambda_1 \lambda_3 y_1 - \lambda_2 \lambda_3 z_1 + y_1 + \lambda_4 z_1)(x_0, y_0, z_0) \\ &\quad - (\lambda_3 x_0 + y_0 + \lambda_4 z_0)(-\lambda_1 y_1 - \lambda_2 z_1, y_1, z_1). \end{aligned}$$

因为 $(x_2 : z_2)$ 是 l_2 中点 Q 的射影坐标，而 $(y_1 : z_1)$ 是 l_1 中点 P 的射影坐标，所以需

要计算它们之间的变换关系：

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 x_0 + \lambda_4 z_1 x_0 + \lambda_1 y_0 y_1 + \lambda_2 y_0 z_1 + \lambda_4 \lambda_1 y_1 z_0 + \lambda_4 \lambda_2 z_0 z_1 \\ -\lambda_1 \lambda_3 z_0 y_1 - \lambda_2 \lambda_3 z_0 z_1 + y_1 z_0 - \lambda_3 x_0 z_1 - y_0 z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 + \lambda_1 y_0 + \lambda_1 \lambda_4 z_0 & \lambda_4 x_0 + \lambda_2 y_0 + \lambda_2 \lambda_4 z_0 \\ (1 - \lambda_1 \lambda_3) z_0 & -\lambda_3 x_0 - y_0 - \lambda_2 \lambda_3 z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

记上面的矩阵为 A , 计算它的行列式, 化简, 并结合 $O \notin l_1 \cup l_2$ 可知

$$\det A = -(x_0 + \lambda_1 y_0 + \lambda_2 z_0)(\lambda_3 x_0 + y_0 + \lambda_4 z_0) \neq 0,$$

故此时 (即 l_1, l_2 不同, 且赋予给定的由平面既约形式方程所对应的自然参数化时) 映射 α 是一个射影变换。

第二步: 另一种特殊情况 (即 $l_2 = l_1$, 此时透视投影为恒等映射, 且赋予两个不同的射影参数化, 其一是由平面既约形式方程所对应的自然参数化时) 命题成立。

不妨设 $l_1 = \{(x : y : z) \mid x + \lambda_1 y + \lambda_2 z = 0\}$, 第一种参数化为 $(y : z)$, 而

$$\begin{cases} x(u, v) = c_{11}u + c_{12}v \\ y(u, v) = c_{21}u + c_{22}v \\ z(u, v) = c_{31}u + c_{32}v \end{cases}$$

是它的的另一个射影参数化。则存在 $\lambda \neq 0$ 使得

$$(c_{11}, c_{21}, c_{31}) \times (c_{12}, c_{22}, c_{32}) = \lambda(1, \lambda_1, \lambda_2)$$

成立, 因此同一个点的两种参数化之间的关系为

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

由于行列式 $c_{21}c_{32} - c_{31}c_{22} = \lambda \neq 0$, 所以 $\alpha((u : v)) = (y : z)$ 是 \mathbb{RP}^1 的一个射影变换。

第三步: 命题对于一般情况成立。

对于一般的两条射影直线 l_1, l_2 , 我们分别记 ϕ_1^0, ϕ_2^0 为它们的自然射影参数化, 即由平面既约形式方程所对应的参数化。则对于 l_1 的任意射影参数化 ϕ_1 以及 l_1 的任意射影参数化 ϕ_2 , 可以把 α 写成以下三个映射的复合,

$$\alpha_1 : \mathbb{RP}^1 \xrightarrow{\phi_1} l_1 \xrightarrow{\text{Id}} l_2 \xrightarrow{(\phi_1^0)^{-1}} \mathbb{RP}^1$$

$$\alpha_2 : \mathbb{RP}^1 \xrightarrow{\phi_1^0} l_1 \xrightarrow{l_1 \wedge l_2} l_2 \xrightarrow{(\phi_2^0)^{-1}} \mathbb{RP}^1$$

$$\alpha_3 : \mathbb{RP}^1 \xrightarrow{\phi_2^0} l_1 \xrightarrow{\text{Id}} l_2 \xrightarrow{\phi_2^{-1}} \mathbb{RP}^1,$$

从而由第一步和第二步知命题成立。 \square

作为推论, 由 \mathbb{RP}^1 上交比的射影不变性可知

推论 5.3.16. (射影直线上的交比)

对于射影直线 $l \subset \mathbb{RP}^2$ 上相异的四点 P_1, P_2, P_3, P_4 , 以及 l 的任意射影坐标 ϕ ,

$$R(P_1, P_2, P_3, P_4) := R(\phi^{-1}(P_1), \phi^{-1}(P_2), \phi^{-1}(P_3), \phi^{-1}(P_4))$$

的值不依赖于 ϕ 的选取。



于是可定义

定义 5.3.17. (\mathbb{RP}^2 中任意射影直线上的交比)

设 P_1, P_2, P_3, P_4 是 \mathbb{RP}^2 中射影直线 l 上相异的四点。称上述推论中的 $R(P_1, P_2, P_3, P_4)$ 为 P_1, P_2, P_3, P_4 的交比。



显然 \mathbb{RP}^2 上不同射影直线上的交比在透视投影下也是不变的。

¶ \mathbb{RP}^2 上的射影变换的刻画

下面证明本节的主定理：

定理 5.3.18. 射影变换的刻画

一个变换 $\phi: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 是射影变换当且仅当

- (1) ϕ 保持直线 (即 ϕ 把射影直线映为射影直线);
- (2) ϕ 保持交比：若 P_1, P_2, P_3, P_4 是共 (射影) 线的四点，则

$$R(P_1, P_2, P_3, P_4) = R(\phi(P_1), \phi(P_2), \phi(P_3), \phi(P_4)).$$



证明

(\Rightarrow) 设 $\phi: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 是一个射影变换，则显然 ϕ 将直线映为直线。

进一步，设 $l_1 \subset \mathbb{RP}^2$ 为一条直线并且记 $l_2 = \phi(l_1)$ 。固定一个 l_1 的射影坐标

$$\varphi: \mathbb{RP}^1 \xrightarrow{\sim} l_1 \subset \mathbb{RP}^2,$$

则

$$\phi \circ \varphi: \mathbb{RP}^1 \xrightarrow{\sim} l_2 \subset \mathbb{RP}^2$$

是 l_2 的一个射影坐标。则对任意的 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in l_1$ ，有

$$\begin{aligned} R(P_1, P_2, P_3, P_4) &= R(\varphi^{-1}(P_1), \varphi^{-1}(P_2), \varphi^{-1}(P_3), \varphi^{-1}(P_4)) \\ &= R((\phi \circ \varphi)^{-1}\phi(P_1), (\phi \circ \varphi)^{-1}\phi(P_2), (\phi \circ \varphi)^{-1}\phi(P_3), (\phi \circ \varphi)^{-1}\phi(P_4)) \\ &= R(\phi(P_1), \phi(P_2), \phi(P_3), \phi(P_4)), \end{aligned}$$

所以 ϕ 保持交比。

(\Leftarrow) 假设 $\phi: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 是一个保持直线与交比的变换 (双射)。记

$$l_1 = \phi(\{(x : y : z) \mid x = 0\}), \quad l_2 = \phi(\{(x : y : z) \mid y = 0\}),$$

$$l_3 = \phi(\{(x : y : z) \mid z = 0\}), \quad l_4 = \phi(\{(x : y : z) \mid x + y + z = 0\}).$$

由命题 5.2.8，存在唯一的射影变换 $\phi_1: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 使得

$$\phi_1(l_1) = \{(x : y : z) \mid x = 0\}, \quad \phi_1(l_2) = \{(x : y : z) \mid y = 0\},$$

$$\phi_1(l_3) = \{(x : y : z) \mid z = 0\}, \quad \phi_1(l_4) = \{(x : y : z) \mid x + y + z = 0\}.$$

考虑映射

$$\psi = \phi_1^{-1} \circ \phi: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$$

那么 ψ 是一个保持直线与交比的双射。

断言： ψ 保持四条直线 $\{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\} \cup \{x + y + z = 0\}$ 上每个点都不动。

【断言的证明：因为直线 $l = \{x = 0\}$ 跟另外三条直线交于三个不同的点，即 $A = (0 : 0 : 1), B = (0 : 1 : 0), C = (0 : 1 : -1)$ ，所以由 ψ 的构造可知 ψ 保持这三个点不动。对于 l 上任意点 $P = (0 : y : z)$ ，设 $\psi(P) = (0 : y' : z')$ 。由 ψ 保持交比可知

$$R(A, B, C, (0 : y : z)) = R(A, B, C, (0 : y' : z'))$$

取 $(y : z)$ 为 l 的射影坐标进行计算，我们得到

$$\frac{1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)}{1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)} \frac{y \cdot 0 - 1 \cdot z}{y \cdot 1 - 0 \cdot z} = \frac{1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)}{1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)} \frac{y' \cdot 0 - 1 \cdot z'}{y' \cdot 1 - 0 \cdot z'},$$

于是 $\frac{y}{z} = \frac{y'}{z'}$ ，即 $\psi(P) = P$ 。同理 ψ 保持另外三条直线上的每一点。】

接下来用类似的方法证明对任意不在这几条线上的 P ，也有 $\psi(P) = P$ 。为此，我们取过 P 的直线 l ，使得它跟 $\{x = 0\}, \{y = 0\}, \{z = 0\}$ 交于不同的三点 Q, R, S 。则 $\psi(l) = l'$ 是一条包含了 Q, R, S 的直线，因此 $\psi(l) = l$ 。再由

$$R(\psi(P), Q, R, S) = R(\psi(P), \psi(Q), \psi(R), \psi(S)) = R(P, Q, R, S)$$

可得 (见习题) $\psi(P) = P$ 。所以 ψ 是恒等映射，从而 $\phi = \phi_1$ 是射影变换。

□

于是，共线性和交比是射影几何的基本不变量。

5.4 射影几何中的一些美妙定理

本节中我们学习一些平面欧氏几何中的优美定理。这些定理并不涉及长度、角度、平行等欧氏几何或者仿射几何中的量，而只涉及交点、连线等射影几何量。所以，虽然它们一开始是在欧氏平面几何的框架里被发现和证明的，但它们事实上是从属于更广阔的射影几何的。这些定理的证明方法也都有很多种，各有其妙。我们将采用纯射影几何的方法证明它们，并初步讨论射影几何的公理基础及其应用。

¶ 帕普斯定理

我们从射影几何中的第一个定理出发，它是由古希腊亚历山大晚期数学家（古希腊最后的几何学家之一）帕普斯（Pappus，约公元 290 年-350 年）发现的。

定理 5.4.1. (帕普斯定理)

设三点 A, B, C 共线，三点 a, b, c 也共线，那么下面三个交点

$$P = Ab \cap aB, \quad Q = Ac \cap aC, \quad R = Bc \cap bC$$

也是共线的。（即：若六边形 $AbCaBc$ 的六个顶点交替出现在两条直线上，则三组对边的交点共线。）

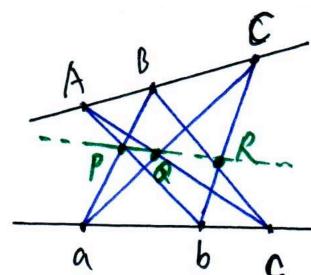


图 5.8: 帕普斯定理

证明 由于点 C, c, P, A “处于一般位置” (即其中任意三点是不共线的), 我们可以选择射影坐标使得

$$C = (1 : 0 : 0), c = (0 : 1 : 0), P = (0 : 0 : 1), A = (1 : 1 : 1).$$

于是可以得到

- 直线 AC 的方程为 $y = z$, 从而存在 p 使得 $B = (p : 1 : 1)$ 。
- 直线 Ac 的方程为 $x = z$, 从而存在 q 使得 $B = (1 : q : 1)$ 。
- 直线 AP 的方程为 $x = y$, 从而存在 r 使得 $B = (1 : 1 : r)$ 。

这又意味着下面的直线 PB , CQ 和 cb 的方程分别为的方程为

$$PB : x = py, \quad CQ : y = qz, \quad cb : z = rx$$

由于 PB, CQ, cb 共线, 由习题可得

$$\begin{vmatrix} 1 & -p & 0 \\ 0 & 1 & -q \\ -r & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies pqr = 1.$$

此外, 直线 Cb, cB, PQ 的方程分别为

$$Cb : z = ry, \quad cB : x = pz, \quad PQ : y = qx$$

由于

$$\begin{vmatrix} 0 & -r & 1 \\ 1 & 0 & -p \\ -q & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - pqr = 0,$$

所以 Cb, cB, PQ 是共线的, 从而 P, Q, R 是共线的。 \square

¶ 帕斯卡定理

接下来我们证明帕普斯定理的一个推广, 它是由法国数学家/物理学家/哲学家帕斯卡 (Pascal, 1623-1662) 在 16 岁时发现的:

定理 5.4.2. (帕斯卡定理)

假设六边形 $ABCDEF$ 内接于二次曲线 \mathcal{C} , 则该六边形“三组对边的交点”

$$P = AB \cap DE, \quad Q = AF \cap CD, \quad R = BC \cap EF$$

是共线的。

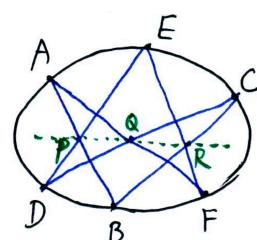


图 5.9: 帕斯卡定理

证明 若 \mathcal{C} 是退化二次曲线, 则该命题就是帕普斯定理。下面假设 \mathcal{C} 是非退化二次曲线。由定理 5.2.6, 我们可以选择射影坐标使得

$$A = (1 : 0 : 0), \quad C = (0 : 1 : 0), \quad E = (0 : 0 : 1).$$

假设圆锥曲线是

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0.$$

将 A, B, E 坐标代入方程中，可知 $a = b = c = 0$ ，从而方程化简为

$$F(x, y, z) = dxy + exz + fyz = 0.$$

于是对于 \mathcal{C} 上坐标非零的点，有

$$\frac{d}{z} + \frac{e}{y} + \frac{f}{x} = 0$$

记 $D = (x_1 : y_1 : z_1), F = (x_2 : y_2 : z_2), B = (x_3 : y_3 : z_3)$. 因为 \mathcal{C} 是非退化二次曲线， D, F, B 都不在 AC 或 AE 或 CE 上，即它们的坐标均非零。于是，

$$\frac{f}{x_i} + \frac{e}{y_i} + \frac{d}{z_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

这说明

$$f\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right) + e\left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}\right) + d\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}\right) = 0,$$

从而向量

$$\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right), \quad \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}\right), \quad \left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}\right)$$

共面，故

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} \\ \frac{1}{y_1} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{y_3} \\ \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_3} \end{vmatrix} = 0.$$

另一方面，

- 直线 EF 方程为 $x = \frac{x_2}{y_2}y$ ，直线 BC 方程为 $x = \frac{x_3}{y_3}z$ ，从而点 $R = (1 : \frac{y_2}{x_2} : \frac{z_3}{x_3})$ ；
- 直线 AB 方程为 $y = \frac{y_3}{z_3}z$ ，直线 DE 方程为 $x = \frac{x_1}{y_1}y$ ，从而点 $P = (\frac{x_1}{y_1} : 1 : \frac{z_3}{y_3})$ ；
- 直线 AF 方程为 $y = \frac{y_2}{z_2}z$ ，直线 CD 方程为 $x = \frac{x_1}{z_1}z$ ，从而点 $Q = (\frac{x_1}{z_1} : \frac{y_2}{z_2} : 1)$.

由此可计算出

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{y_2}{x_2} & \frac{z_3}{x_3} \\ \frac{x_1}{y_1} & 1 & \frac{z_3}{y_3} \\ \frac{x_1}{z_1} & \frac{y_2}{z_2} & 1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} \\ \frac{1}{y_1} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{y_3} \\ \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_3} \end{vmatrix} = 0.$$

于是 P, Q, R 是共线的。 □

¶ 德萨格定理

下一个要证明的定理是德萨格定理，它是由射影几何的创始人之一、法国数学家/工程师德萨格 (Desargues, 1591-1661) 发现的。

定理 5.4.3. (德萨格定理)

设 $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ 为两个三角形。如果 AA', BB', CC' 是共点的，那么交点

$$P = AB \cap A'B', \quad Q = BC \cap B'C', \quad R = AC \cap A'C'$$

是共线的。

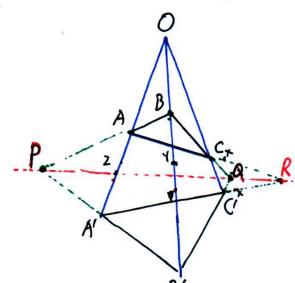


图 5.10: 德萨格定理

我们将给出两个证明，第一个证明用到了标准二维平面可嵌入三维空间这个性质 (该

证明还用到了欧氏空间平行性这个“非射影”的概念，要改写成纯射影几何的证明，还需要引入三维射影空间，此处从简)，而第二个证明则只用到帕普斯定理，并适用于所有使得帕普斯定理成立的(抽象)射影平面(在抽象射影几何中，存在德萨格定理不成立的“抽象射影平面”)。

证明 [第一个证明] 若 $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ 处于不同的平面 α, α' 内。那么 P, Q, R 都在 $\alpha \cap \alpha'$ 之中，因此是共线的。

若 $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ 处在同一个平面内，取不在此平面内的一个点 O' 。分别过 A, B, C 作 OO' 的平行线，交 OA', OB', OC' 于 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ 。于是 $\Delta \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ 与 $\Delta A'B'C'$ 是不在同一平面内的三角形，且满足定理的条件，从而可以应用刚刚证明的结论。最后将所有点沿着 OO' 方向投影到原先的平面上，就证明了本定理。 \square

证明 [第二个证明] 连续三次使用帕普斯定理：

- 令 $X = AC \cap OQ$ (于是 Q 在 OX 上)， $Y = OB \cap PX$ (于是 P 在 XY 上)， $Z = OA \cap CY$.

将帕普斯定理应用到 OYB 与 CAX 上，可得

$$Z = OA \cap CY, \quad Q = OX \cap BC, \quad P = XY \cap AB$$

是共线的。

- 令 $W = QB' \cap ZY$ ，将帕普斯定理应用到 OYB' 与 PQZ 上，可得

$$X = OQ \cap PY, \quad A' = OZ \cap B'P, \quad W = B'Q \cap YZ$$

是共线的。

- 将帕普斯定理应用到 $WA'X$ 与 OCC' 上，可得(此处用到了：由 ZWY 共线以及 ZYC 共线知 Z 在 WC 上，由 QWB' 共线以及 $QB'C'$ 共线知 Q 在 WC' 上)

$$Z = WC \cap A'O, \quad R = A'C' \cap XC, \quad Q = WC' \cap XO$$

是共线的。

于是 Z, Q, P, R 是共线的，定理得证。 \square

¶ 射影几何公理

不同于欧氏几何的希尔伯特公理，在射影平面里我们有两个本源概念，点和直线，但只有一个本源关系，即关联。跟欧氏情形类似，如果点 P 和直线 l 关联，则我们称点 P 在直线 l 上，或者直线 l 过点 P 。类似地，可定义两条直线相交、多条直线共点、多个点共线等概念。对于射影平面，当然不再考虑角这样的概念，但有一个特殊的构型却非常有用：

定义 5.4.4. (完全四点形)

若 P, Q, R, S 四个点中，任意三点不共线，则称由“这四个点以及它们两两连接所成的六条直线”所组成图形为一个完全四点形，称这四个点为该完全四点形的顶点，称这六条直线为它的边，并称没有公共顶点的三组边为三组对边，对边的交点称为对边点。

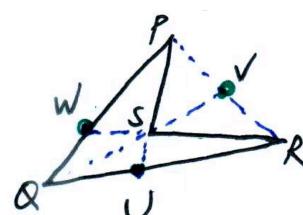


图 5.11: 完全四点形

例如，上图是一个完全四点形，其中 PS 与 QR ， PQ 与 RS ， PR 与 QS 为三组对

边，而 U, V, W 三点为三个对边点。

从不同的着眼点出发，人们提出过许多不同的关于射影平面的公理。为简单起见，我们考虑下面这组由五条公理组成的射影几何公理体系（取自 Coxeter, Introduction to Geometry）：

公理. [射影平面公理]

公理 1 任意不同的两点跟唯一一条直线关联。

公理 2 任意不同的两条直线跟至少一个点关联。

公理 3 存在四个点，其中任意三个不共线（即存在完全四点形）。

公理 4（法诺公理）完全四点形的三个对边点不共线。

公理 5（帕普斯公理）帕普斯定理成立，即：若六边形的六个顶点交替出现在两条直线上，则三组对边的交点共线。



当然，这五条公理中，前三条是最基本的，后两条是为了排除掉一些古怪的“射影平面”，从而所得的射影平面由更好的性质。注意跟希尔伯特公理体系类似，由公理 1 与公理 2，立刻可以证明

命题 5.4.5. （两条线交于一点）

任意不同的两条直线恰好跟唯一一个点关联



证明 由公理 2，两条线至少跟一个点关联。另一方面，若两条线跟两个点都关联，则跟公理 1 矛盾。故命题成立。 \square

¶ 对偶性原理的证明

射影平面最优美的性质之一就是对偶原理。在本章中，我们已经看到了命题5.1.4与命题5.1.4之间的对偶性，已经定理5.2.6与命题5.2.8之间的对偶性。粗略来说，对偶原理意味着

在射影平面中，“点”和“直线”是对偶的：对于射影平面的定理，如果把“点”换成“直线”，把“直线”换成“点”；把“包含”换成“属于”，把“属于”换成“包含”；把“连接”换成“相交”，把“相交”换成“连接”；把“共点”换成“共线”，把“共线”换成“共点”；……；则所得的结论依然是正确的。

那么，为什么对偶原理成立呢？下面这个定理是“对偶原理”的一种严格陈述，这里体现出了公理化方法的威力。

定理 5.4.6. （射影平面的对偶原理）

若一个定理可由上述射影平面公理（公理 1 至公理 5）推出，则它的对偶定理也成立。



证明 下面我们将证明：“公理 1-公理 5”可以推出它们自身的对偶。因此，若一个定理可由这五个公理推出，则只要把推导过程中所用到的公理改为它的对偶，就可以证明该定理的对偶定理。 \square

下面我们来具体分析论证这五个公理的对偶：

- 公理 1 的对偶是命题5.4.5，它是公理 1 和公理 2 的推论。
- 公理 2 的对偶是“任意不同的两点跟至少一条线关联”，它是公理 1 的推论。
- 公理 3 的对偶为

命题 5.4.7. (存在完全四边形)

存在四条直线，其中任三条不共点。 ♠

证明 由公理 3，存在一个完全四点形 $PQRS$ ，如图5.11所示。考虑四条直线

$$p = PQ, q = PS, r = RS, s = QR,$$

则这四条直线两两之间的交点

$$p \cap q = P, \quad p \cap s = Q, \quad p \cap r = W, \quad q \cap r = S, \quad q \cap s = U, \quad r \cap s = R$$

是互不相同的。 □

当然，这样得到的构型是完全四点形的对偶，于是可以定义

定义 5.4.8. (完全四边形)

若四条直线中，任意三线不共点，则称由“这四条直线以及它们两两相交所成的六个点”所组成图形为一个**完全四边形**，称这四条直线为该完全四边形的**边**，称这六个交点为它的**顶点**，并称没有公共边的三组点为**对顶点**，对顶点的连线称为**对角线**。 ♣

- 公理 4 的对偶为

命题 5.4.9. (对偶法诺公理)

完全四边形的三条对角线不共点。 ♠

我们把证明留作习题。

- 最后，我们考察公理 5 的对偶，它可以被陈述为：

命题 5.4.10. (帕普斯定理的对偶)

设三条直线 l_1, l_2, l_3 共点，三条直线 l'_1, l'_2, l'_3 也共点。记 $B_1 = l'_2 \cap l_3$, $B_2 = l'_3 \cap l_1$, $B_3 = l'_1 \cap l_2$, $C_1 = l_2 \cap l'_3$, $C_2 = l_3 \cap l'_1$, $C_3 = l_1 \cap l'_2$ 。则三条直线 B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 也是共点的。 ♣

证明 令 $A_1 = l_1 \cap l_2 \cap l_3$, $A_2 = l'_1 \cap l'_2 \cap l'_3$, $A_3 = B_1C_1 \cap B_2C_2$ ，则欲证之命题等价转化为

已知六边形 $A_1C_1B_1A_2C_2B_2$ 的六个顶点交替出现在两条直线上（即 A_1, B_1, C_2 在 l_3 上，而 C_1, A_2, B_2 在 l'_3 上），证明对边的交点 A_3, B_3, C_3 共线。

而这恰好就是帕普斯定理。（故帕普斯定理的对偶等价于帕普斯定理本身。） □

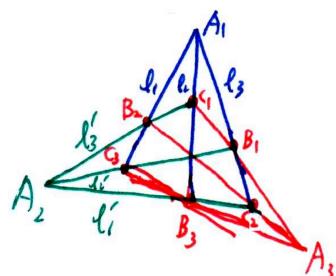


图 5.12: 对偶帕普斯定理

这就完成了“上述射影平面 5 个公理蕴含了它们自身的对偶命题”的证明。

¶ 德萨格定理以及帕斯卡定理的对偶定理

根据对偶性原理以及德萨格定理，可知德萨格定理的对偶定理是成立的。有趣的是，德萨格定理的对偶定理恰好是德萨格定理的逆定理：

定理 5.4.11. (德萨格定理的逆对偶 (德萨格定理之对偶))

如果 $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ 是两个三角形，且

$$P = AB \cap A'B', \quad Q = BC \cap B'C', \quad R = AC \cap A'C'$$

是共线的，则直线 AA', BB', CC' 是共点的。

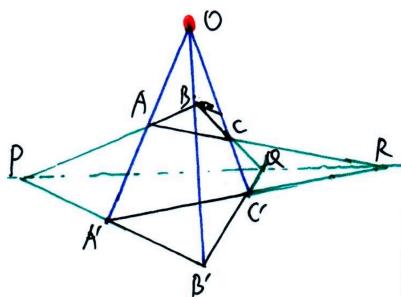


图 5.13: 对偶戴莎阁定理

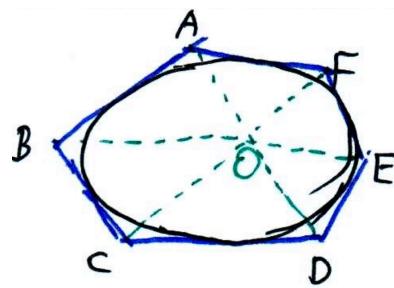


图 5.14: 对偶帕斯卡定理

最后，我们探讨一下帕斯卡定理的对偶定理。它比前几个定理的对偶要复杂，因为涉及到了非退化二次曲线。二次曲线是由很多点组成的集合，它的对偶是什么？很多线组成的集合。事实上，如果进一步深入研究二次曲线的射影理论，可以说明，“作为点集的二次曲线”的对偶“由该二次曲线的切线组成的直线集”。于是，“点-线”对偶可以被扩展至二次曲线：

“点在二次曲线上”的对偶是“直线是二次曲线的切线”；“二次曲线的内接多边形”的对偶是“二次曲线的外接多边形”，等等。

由此，立刻可以得到

定理 5.4.12. (布里昂雄定理 (帕斯卡定理的对偶))

如果一个六边形 $ABCDEF$ 外切于一个二次曲线，那么它的三条主对角线（即连接相对顶点的对角线） AD, BE, CF 是共点的。



习题 5

1. [\mathbb{RP}^1 的圆模型]

(a). 证明下述映射是良定的双射:

$$S^1 \xrightarrow{\psi} \mathbb{RP}^1, \quad (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto (\cos \frac{\theta}{2} : \sin \frac{\theta}{2}).$$

(b). 设 $\varphi : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ 是标准的嵌入 (即将 x 映为 $(x : 1)$)。验证: $\psi^{-1} \circ \varphi(\mathbb{R}^1) = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ 。

2. [\mathbb{RP}^2 的球面商模型]

考虑射影平面 \mathbb{RP}^2 的球面商模型, 即

$$\mathbb{RP}^2 := S^2 / \{\pm 1\}.$$

在这个模型下, 射影平面的每个点恰好对应于球面的一组对径点。

(a). 射影平面里的每条直线对应于球面的什么几何对象? 特别地, 无穷远直线对应于球面的哪个子集?

(b). 把“射影平面中任意两点对应一条直线, 任意两条线交于一点”翻译成对应的熟知的球面几何事实。

3. [三点共线与三线共点]

(a). 证明: \mathbb{RP}^2 中三点 $(x_i : y_i : z_i)$ ($i = 1, 2, 3$) 共线当且仅当行列式

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0.$$

(b). 证明: \mathbb{RP}^2 中三点 $A(\lambda : 0 : 1), B(1 : \mu : 0), C(0 : 1 : \nu)$ 三点共线当且仅当 $\lambda\mu\nu + 1 = 0$ 。

(c). 对于 \mathbb{RP}^2 中任意三线, 写出它们共点的与 (1) 类似的判别准则并证明.

4. [\mathbb{R}^3 中的平面]

射影平面 \mathbb{RP}^2 是 \mathbb{R}^3 中所有过原点的直线的一个参数化。请用类似的方法, 给出下列几何对象的参数化 (即在合适的空间上定义合适的等价关系, 使得商空间的元素与所需参数化的对象有一一对应):

(a). \mathbb{R}^3 中所有过原点的平面.

(b). \mathbb{R}^3 中的所有平面.

5. [直线在 \mathbb{R}^2 的交点 v.s. 在 \mathbb{RP}^2 中的交点]

设 $l_i^0 \subset \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$ 是 \mathbb{R}^2 中两条相异的直线。证明

(a). 若 $l_1^0 \nparallel l_2^0$, 则 $l_1 \cap l_2 = l_1^0 \cap l_2^0 \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$;

(b). 若 $l_1^0 \parallel l_2^0$, 则 $l_1 \cap l_2 = l_1 \cap l_\infty = l_2 \cap l_\infty \in l_\infty \subset \mathbb{RP}^2$ 。

(c). 求 \mathbb{R}^2 直线 $5x + 6y + 7 = 0$ 的射影化与无穷远直线 l_∞ 交点的射影坐标。

(d). 解释“两条平行线相交于无穷远直线 (地平线)”。

6. [射影变换的例子]

考察 \mathbb{RP}^2 到 \mathbb{RP}^2 的一族映射 ($t \in \mathbb{R}$)

$$\phi_t : (x : y : z) \rightarrow (tx - y : 6x + (t - 5)y : x - y + tz)$$

- (a). 求 t 的取值范围使得 ϕ_t 为射影变换。
- (b). 设 ϕ_{t_0} 不是一个射影变换, 试证 ϕ_{t_0} 的像为一直线。

7. [\mathbb{RP}^2 射影变换与矩阵的关系]

- (a). 任取 $GL_3(\mathbb{R})$ 中的方阵 A, B , 证明它们诱导的射影变换相等 (即 $\Phi_A = \Phi_B$) 当且仅当存在实数 $\lambda \neq 0$, 使得 $A = \lambda B$ 成立。
- (b). 证明: $\mathbb{R}^* := \{\lambda I_3 | \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ 是 $GL(3, \mathbb{R})$ 正规子群, 且射影变换群同构于 $GL(3, \mathbb{R})$ 的商群 $PGL_3 \simeq GL(3, \mathbb{R})/\mathbb{R}^*$.

8. [射影变换群的另一个子群]

- (a). 证明注5.2.5所提到的结论。
- (b). 考虑 \mathbb{RP}^2 的子集族 $\mathcal{Y} = \{l_\infty, l_1, l_2\}$, 其中 l_∞ 为无穷远直线 (即 $z = 0$), l_1 为 x 轴对应的射影直线 (即 $y = 0$), l_2 为 y 轴对应的射影直线 (即 $x = 0$)。求使得它们分别不变的射影变换全体所构成的子群。

9. [保持无穷远点逐点不动的子群]

- (a). 考虑保持 l_∞ 中每个点都逐点不变的射影变换,

$$H = \{\varphi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2 \mid \varphi \text{ 是射影变换, 且 } \varphi(P) = P, \forall P \in l_\infty\}.$$

证明 H 是 \mathbb{RP}^2 的射影变换群的子群.

- (b). 令 \tilde{H} 为 \mathbb{R}^2 上由如下形式的仿射变换

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (\lambda x + a, \lambda y + b), \quad \lambda \neq 0.$$

所构成的子集。证明 \tilde{H} 是 \mathbb{R}^2 的仿射变换群的子群.

- (c). 证明存在自然的群同构 $\tilde{H} \cong H$.

10. [\mathbb{RP}^1 的射影变换保交比]

证明命题5.3.7.

11. [\mathbb{RP}^1 射影变换与分式线性变换的关系]

- (a). 证明射影变换诱导分式线性变换, 即引理5.3.2.
- (b). 证明分数线性变换决定射影变换, 即引理5.3.3.

12. [高次曲线的射影化]

先给出几个定义:

- 对于任意非零二元 d 次多项式 $f(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$, 称

$$C^0 = \mathcal{Z}(f) := \{(x, y) | f(x, y) = 0\}$$

为 \mathbb{R}^2 中的 d 次曲线。

- 对于任意非零的三元 d 次齐次多项式 $F(X, Y, Z) = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} X^i Y^j Z^k$, 称

$$\mathcal{Z}(F) := \{(X : Y : Z) | F(X, Y, Z) = 0\}.$$

为 \mathbb{RP}^2 中的 d 次射影曲线。

- 对于任意非零二元 d 次多项式 $f(X, Y)$, 令 $F(X, Y, Z) := Z^d f(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$, 并称

$C = \mathcal{Z}(F)$ 为 $C^0 = \mathcal{Z}(f)$ 的射影化。

证明：

- (a). 对于任意非零的三元 d 次齐次多项式 F , 集合 $\mathcal{Z}(F)$ 是良定的。
- (b). 对于任意非零二元 d 次多项式 $f(X, Y)$, $F(X, Y, Z) := Z^d f(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$ 是一个非零的三元 d 次齐次多项式。
- (c). 考虑 $f(X, Y) = Y^2 - X^3 - 5X + 3$.
 - (i). 求 $\mathcal{Z}(f)$ 在 \mathbb{RP}^2 中的射影化 E 。
 - (ii). 求 $E \cap l_\infty$ 。
 - (iii). 试证: E 与 \mathbb{RP}^2 中任意射影直线最多相交于三个点。

13. $[\mathbb{RP}^1]$ 射影变换的基本定理]

设 $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{RP}^1$ 是三个相异点。证明：存在唯一射影变换 $\varphi : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ 使得

$$\varphi(P_1) = 0, \varphi(P_2) = 1, \varphi(P_3) = \infty.$$

14. [一般位置]

- (a). 试求 \mathbb{RP}^2 上的一射影变换, 使点 $(1 : 0 : 1), (0 : 1 : 1), (1 : 1 : 1), (0 : 0 : 1)$ 顺次映射到点 $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 1 : 1)$ 。
- (b). 设 A, B, C, D 是 \mathbb{RP}^2 中不共线的四个点。证明: A, B, C, D 处于一般位置当且仅当存在射影变换 $\varphi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 使得

$$\varphi(A) = C, \quad \varphi(B) = D \quad \text{且} \quad \varphi^2 = \text{id}.$$

15. [二次曲线的射影分类]

判断 \mathbb{RP}^2 中由下述方程所给出的二次曲线的射影类型:

- (a).
- (b). $x^2 - y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz = 0$.

16. [五点决定一条二次曲线]

- (a). 在 \mathbb{RP}^2 上任给处于一般位置的五个点(即其中任意三点不共线), 证明存在唯一非退化二次射影曲线通过它们。
- (b). 若这五个点中有三点共线但无四点共线, 证明存在唯一退化二次射影曲线通过它们。

17. [射影直线的射影坐标]

- (a). 考虑 \mathbb{RP}^2 上的四个点 $A(2 : 1 : -1), B(1 : -1 : 1), C(1 : 0 : 0), D(1 : 5 : -5)$.
 - (i). 求证: 这四个点共线, 并求该直线 l 的方程。
 - (ii). 给出直线 l 的一个射影参数化。
 - (iii). 计算交比 $R(A, B, C, D)$ 。
- (b). 考虑 \mathbb{RP}^2 上的三个点 $A(1 : 4 : 1), B(0 : 1 : 1), C(2 : 3 : -3)$.
 - (i). 证明 A, B, C 三点共线, 并求该直线 l 的方程。
 - (ii). 在此直线上求出点 D , 使得 $R(A, B, C, D) = -4$ 。

18. [透视投影]

考虑 \mathbb{RP}^2 中的两条直线

$$l_1 = \{(x : y : z) \mid y = z\}, \quad l_2 = \{(x : y : z) \parallel y = x + z\}.$$

- (a). 证明点 $O(0 : 2 : 1)$ 不在 l_1 和 l_2 上。
- (b). 求直线 l_i 的自然射影参数化 $\phi_i : \mathbb{RP}^1 \rightarrow l_i \subset \mathbb{RP}^2 (i = 1, 2)$ 。
- (c). 求透视投影 $l_1 \overset{o}{\wedge} l_2$ 在上述射影参数化下的坐标表达式。

19. [再探梅涅劳斯定理和塞瓦定理]

在习题 2 第 11 题 (c)(d) 两问中, 我们给出了梅涅劳斯定理和塞瓦定理。

- (a). 试将它们解释成射影几何定理 (需要将涉及到的量转化成交比的乘积),
- (b). 解释这两个定理之间的对偶关系。
- (c). 试用射影几何方法给出证明。

20. [法诺公理与对偶法诺公理]

- (a). 证明标准的 \mathbb{RP}^2 满足法诺公理。
- (b). 证明命题 5.4.9, 即射影几何公理 1-5 蕴含了对偶法诺公理。

21. [有限射影几何]

我们先给出几个定义:

- 称满足射影平面公理中的公理 1、公理 2、公理 3 的系统 (该系统包含点、线以及点与线之间的关联关系) 叫做**(广义) 射影平面**。
- 只有有限个点的广义射影平面叫做**有限射影平面**。
- 若有限射影平面 α 中有直线恰好跟 $n+1$ 个点关联, 则称它 n 阶射影平面。

回答下述问题:

- (a). 设一个系统 α 含有七个点 $\{O, A, B, C, E, F, G\}$ 以及七条线 $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7\}$, 其中点与线的关联关系为

$$L_1 = \{A, F, B\}, \quad L_2 = \{B, G, C\}, \quad L_3 = \{C, E, A\}$$

$$L_4 = \{A, O, G\}, \quad L_5 = \{B, O, E\}, \quad L_6 = \{C, O, F\}, \quad L_7 = \{E, F, G\}$$

证明 α 是一个 2 阶射影平面 (被称为法诺平面)。

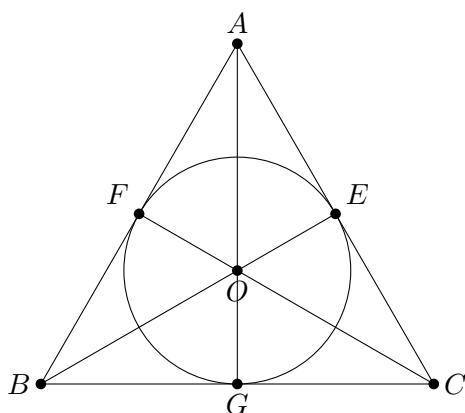


图 5.15

- (b). 上述法诺平面是否满足法诺公理?

- (c). 证明: 若有限射影平面 π 的某条线上恰有 $n+1$ 个点, 则它的每条线上都恰

有 $n+1$ 个点。(故“阶”的概念是良定的).

(d). 设 α 是 n 阶射影平面, $p \in \alpha$ 是一个点。求证: 恰有 $n+1$ 条线通过点 p .

(e). 证明: n 阶射影平面 α 恰有 n^2+n+1 个点以及 n^2+n+1 条线.

(f). 证明: 任意二阶射影平面一定同构于(给出同构的定义)上面所给出的法诺平面。

22. [保直线是射影变换]

本题中可以使用如下结果而不必证明:

若 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 保乘法、加法(即满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 和 $f(xy) = f(x)f(y)$),
则 f 是恒等映射。

设 a, b, c, d 是射影直线 \mathbb{RP}^1 上的四个点。若交比 $R(a, b, c, d) = -1$, 则称 (a, b, c, d) 为 **调和四点组**。

(a). 证明下述几个四点组都是调和四点组:

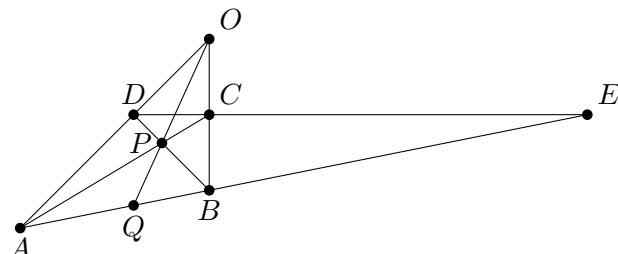
$$(-x, x, 0, \infty); (0, 2x, x, \infty); (x, y, \frac{x+y}{2}, \infty); (-1, 1, x, \frac{1}{x}); (-x, x, 1, x^2).$$

(b). 证明: 若变换 $\varphi : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ 把调和四点组映为调和四点组, 则它是射影变换。
[提示: 先考虑保持 $0, 1$ 和 ∞ 三点不动的变换 φ]

(c). 设 $ABCD$ 是 \mathbb{RP}^2 中的完全四点形, 并记它的对边点为

$$O := \overline{AD} \cap \overline{BC}, P := \overline{AC} \cap \overline{BD}, E := \overline{AB} \cap \overline{CD}.$$

令 $Q := \overline{AB} \cap \overline{OP}$. 证明 (A, B, Q, E) 是调和四点组.



(d). 设 $\varphi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ 是一个保直线(即把共线点映射为共线点)的变换。

(i). 证明 φ 把调和四点组映为调和四点组。

(ii). 证明 φ 是射影变换.

第 6 章 拓扑空间与拓扑变换

英国数学家西尔维斯特 (J.J.Sylvester, 1814-1897) 曾经说过这么一段话，其大意是：“如果有人要我说出数学中的一个概念，其重要性堪比北极星之于星空，我一定会说，那就是空间的连续性。是的，就是它！”

空间是由点构成的集合，每个点代表一个位置。但它绝不仅仅是一堆点的集合，更重要的是，每个点有“邻域”，邻域中的点与该点是“相近”的点。确切的数学语言表达“邻域”就是“开集”的概念。空间的连续性是从定义好“开集”开始的。从这里出发，我们就会到达空间“拓扑结构”的概念，以及两个拓扑空间“连续映射”的概念。拓扑学研究拓扑空间与它们之间的连续映射。

拓扑学发源于 18 世纪欧拉关于哥尼斯堡七桥问题以及关于多面体的工作，但真正开始发展成为一门学科则是 19 世纪的事情。如今，拓扑学已经成为现代数学的主要分支之一。拓扑学是一门非常基础的科学。它在几何与代数、分析之间架起一座新的桥梁。它的理念在几乎所有现代数学中扮演着关键角色：比如微分方程、力学、复分析、代数几何、泛函分析、量子物理、表示论，甚至数论、组合学与计算复杂性理论。

在本章中，我们以一种直观的角度来介绍拓扑学，为后续的学习做一些铺垫。

6.1 拓扑的一般概念

¶ 拓扑变换的直观解释

欧氏几何研究图形在等距变换群（即欧氏群）下不变的性质，即图形的度量性质（包括长度、角度、面积等）。我们可以认为，等距变换是完全“保真”的变换。在仿射几何中，我们不再要求距离不变，而只要求平行性以及平行线段之间的距离比在变换后保持不变。于是，跟等距变换下等价的图形（即全等图形）相比，仿射变换下等价的图形是允许有一定的失真的。下图展示了两个仿射等价但不全等的图形：



图 6.1：仿射等价的图形

从图上可见，虽然长度、角度、面积都不再保持不变，但图形失真性并不严重，还是能轻易辨析处“大致的形状”。上一章我们还学到了更一般的射影变换。在射影变换下保持不变的是共线性与共线四点之间的交比。这种变换可以由一连串的中心投影得到，于是射影变换下等价的图形之间允许更大的失真：射影平面里的椭圆、抛物线、双曲线都是等价的！

从等距变换到射影变换，虽然我们对于变换的要求已经“一退再退”，但这些变换还是有一个共同的特点：把直线映射为直线。这是它们都是古典几何研究对象的原因之一。古典几何还研究一些别的变换，例如把圆变成圆的反演变换，限于篇幅我们不做进一步介绍。本章所考虑的变换则是一种非常一般的变换，即**拓扑变换**：我们不再要求规则几何对象如直线、圆在变换后依然规则，而只要求“邻近的”点在变换后依然是“邻近的”（即该映射是“连续的”）。注意，跟本书前文所研究过的其它变换一样，当谈到拓扑变换时，我们要求该映射是一个可逆映射，且它的逆映射也满足同样的性质，即“邻近的”点在逆映射变换后依然是“邻近的”（不过跟刚体变换或者仿射变换不同的是，拓扑变换不再具有平移不变性，因此拓扑变换只是“点变换”，并不诱导出“向量变换”）。我们可以把拓扑变换下的几何体想象成是由橡皮构成的物体，它能够被形变，例如被拉伸、压缩或弯曲，但不允许被撕裂（因为“断口处”原本邻近的点会变得不再邻近），也不允许被粘合（因为粘合的逆映射就是撕裂¹）。显然，在拓扑变换下，无论度量性质还是射影性质一般都不再被保持，变换前后的图形将会有更显著的失真。例如，下面五个图形在拓扑变换下是等价的：

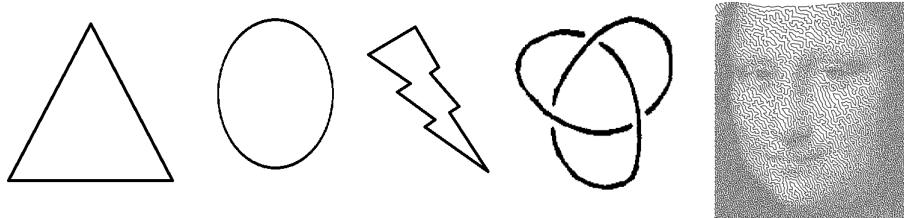


图 6.2：拓扑等价的图形

但是，依然会有一些性质在这样的变换下是被保持的，这样的性质被称为拓扑性质。例如，对上面这几个图而言，它们都是“连通的”，都是“曲线”（每个点附近都有充分小的“小段”跟线段拓扑等价），都“没有端点”，且都“有界且封闭”（注意有界性本身不是一个拓扑性质）等。粗略来说，拓扑学就是研究图形在拓扑变换下依然保持不变的那些性质的学科。

¶ 连续映射与同胚

拓扑学中最基本的概念就是连续性。为简单起见我们仅考虑平面或三维欧氏空间的子集，从而可以借用欧氏距离的概念来刻画“邻近性”。在将来拓扑学课程中，可以学到如何用“开集公理”在抽象集合上展开拓扑学的。

在拓扑学中，一般把“拓扑等价”称作同胚。同胚这个概念是建立在连续映射的基础上的：

¹但是在考虑拓扑变换时，我们确实允许“先切开，然后在做特定变换后再沿着切点粘合回去”，因为把这个过程作为一个整体看的话，“邻近的”点在变换后依然是“邻近的”。不过，如果要考虑的不是一个拓扑变换，而是一族“连续的”拓扑变换（即连续形变）时，这种先切开后粘合的方式就不被允许了。

定义 6.1.1. (连续映射与同胚)

设 A, B 都是欧氏空间的子集。一个映射。

(1) 如果一个映射 $f : A \rightarrow B$ 按照以下意义把“邻近的点”映为“邻近的点”，

对于任意 $x_0 \in A$ 以及任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得只要 $x \in A$ 且

$d(x, x_0) < \delta$, 就有 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$,

则称 f 是**连续映射**。

(2) 如果映射 $f : A \rightarrow B$ 是可逆的连续映射, 且 f^{-1} 也是连续映射^a, 则称 f 是**同胚**。

(3) 如果 A 与 B 之间存在同胚, 则称集合 A 与 B 是**同胚的**。

^a注意此处跟线性映射或者群同态的差别: 可逆的线性映射, 其逆映射自动是线性映射; 可逆的群同态, 其逆映射自动是群同态; 但可逆的连续映射, 其逆映射未必是连续的, 故此处要特别加上“逆映射也连续”这个条件。



下面给出几个简单的连续映射以及同胚的例子:

例 6.1.2.

(1) 【 $(0,1)$ 与 \mathbb{R} 同胚】考虑映射

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi,$$

则 f 是可逆的连续映射,

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1), \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

也是连续映射。

(2) 【星星与圆周同胚】下面左图展示了星星与圆周之间的一个同胚映射:

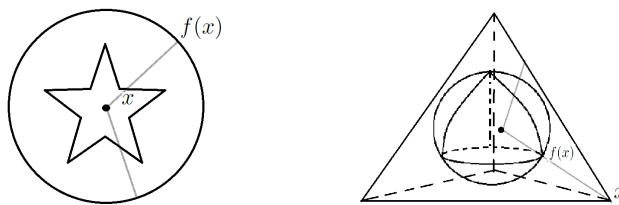


图 6.3: 中心投影映射

可以想象我们在圆心处放了一个点光源, 则该同胚映射把星星上的任意一点“通过光照”投射到圆周上。其显式表达如下:

$$f : \text{星星} \rightarrow S^1, \quad f(x) = x/|x|.$$

这种映射叫做中心投影映射。类似地, 上面右图展示了三维空间里, 如何通过中心投影映射把四面体同胚地“收缩”为球面, 其显式表达跟上式一致。

(3) 【连续可逆但不同胚】考虑映射

$$f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1, \quad f(x) = (\cos x, \sin x).$$

则 (验证) f 是可逆的连续映射, 但它的逆映射不是连续的。(从几何上看, f 是把半开半闭区间的两端粘合在一起形成一个圆周, 而 f^{-1} 则是把圆周撕裂变成半开半闭区间。)

不难证明

命题 6.1.3. (连续映射的遗传性)

设 $f : A \rightarrow B$ 是一个连续映射, $A_1 \subset A$ 是一个子集, 则 $f_1 := f|_{A_1} : A_1 \rightarrow f(A_1)$ 也是一个连续映射。



证明 设 $x_0 \in A_1$, 则由连续性的定义, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得只要 $x \in A$ 且 $d(x, x_0) < \delta$, 就有 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ 。特别地, 对于 $x \in A_1 \subset A$ 且 $d(x, x_0) < \delta$, 也有 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ 。于是 f_1 是连续映射。□

作为推论, 立刻得到

命题 6.1.4. (同胚的遗传性)

设 $f : A \rightarrow B$ 是一个同胚, $A_1 \subset A$ 是一个子集, 则 $f_1 := f|_{A_1} : A_1 \rightarrow f(A_1)$ 也是一个同胚。



如果 $A = B$, 则根据定义,

- 若 $f : A \rightarrow A$ 是一个同胚, 则 $f^{-1} : A \rightarrow A$ 也是一个同胚;
- 若 $f, g : A \rightarrow A$ 都是同胚, 则 $f \circ g : A \rightarrow A$ 也是同胚;

故所有同胚映射 $f : A \rightarrow A$ 关于“映射复合运算”构成一个群, 我们称之为 A 的自同胚群。

为简单起见, 我们考虑 $A = B = \mathbb{R}^2$ 。因为仿射变换都是可逆的线性变换, 而线性变换都是连续的, 故

命题 6.1.5. (\mathbb{R}^2 的自同胚群大于仿射变换群)

\mathbb{R}^2 的仿射变换群是它的自同胚群的子群。



于是, 由同胚的遗传性可知, 平面里仿射等价的图形都是同胚的, 但反之显然不成立。事实上, 跟仿射变换群相比, \mathbb{R}^2 的自同胚群是一个巨大的群: \mathbb{R}^2 的仿射变换群的元素可以由 6 个变量确定, 是一个“6 维的群”; 而 \mathbb{R}^2 的自同胚群则是一个“无穷维”的群!

¶ 拓扑性质与拓扑不变量

给定两个图形, 如果我们能找到它们之间的一个同胚映射, 那这两个图形就是同胚的。例如, 如果我们把考虑字符的图形(即字符的曲线图), 则不难看出数字1 和数字2 是同胚的, 而它们的英文 ONE 和 TWO 也是同胚的。



图 6.4: 同胚的“数字”

但是, 如果我们找不到它们之间的同胚, 是否就能断定它们不同胚呢? 也许别人能找到

某个巧妙的映射呢？

可以类比等距变换的情形。两个全等的多边形一定具有相同的对应边、对应角，也具有相同的边数、面积。所以可以通过比较边的长度、角的大小判定不全等；或者只要数一下边数，就知道三角形和四边形一定不全等（它们甚至不仿射等价）。当然，“看边长、数边数”这样的招数，在拓扑学里是没有用武之地的：所有凸多边形都是同胚的。于是，我们需要寻找的就是：在拓扑变换下，有哪些性质或者“量”（在拓扑学中，这个在拓扑变换下不变的“量”未必是数，也可能是别的代数对象例如群、环等。）会保持不变呢？我们把在拓扑变换下保持不变的性质称为**拓扑性质**，把在拓扑变换下保持不变的量称为**拓扑不变量**。只要找到特定的拓扑性质或者拓扑不变量，并且能够证明两个图形对应的拓扑性质或者拓扑不变量不同，则它们就是不同胚的。

下面列举几个简单、直观而常用的拓扑性质或者拓扑不变量。拓扑变换保持这些性质或量的严格证明将在拓扑学课程里系统学习，故此处从略。

- (1) 紧致性：在欧氏空间，如果一个区域是有界（即存在常数 C 使得该集合中任意点到原点的距离不超过 C ）闭集（即该集合中点列的极限依然在该集合中），则称它是紧致集合，简称紧集。紧性是最重要的拓扑性质之一，在数学尤其是分析中起到了关键性的作用，例如它是“有界闭区间上的连续函数必取到最值”的本质原因。根据紧性，有界闭区间跟开区间或半开半闭区间在拓扑上是不一样的。紧性也告诉我们，椭圆跟其它二次曲线在拓扑上是不一样的，椭球跟其它二次曲面在拓扑上也是不一样的。

(2) 连通性与连通分支：如果图形是由几个不相连的部分（此处我们不对“不相连”作精确的定义）组成，则我们说它是不连通的，否则我们称它是连通的。对于简单的图形，我们可以辨识出该图形由多少个互不相连的部分组成，这个“互不相连部分”的个数被称为该图形的连通分支数。因为拓扑变换不允许撕裂和粘合，不难想象，连通性是拓扑性质，而连通分支数都是拓扑不变量。于是，连通分支个数不同的图形，必然不同胚。特别地，我们马上就知道英文 THREE 和 FOUR 是不同胚的：



图 6.5: 不同胚的“数字”

那么，该怎么从拓扑上区分上图右边的数字3 和数字4 呢？它们看起来确实不一样，但他们都是紧致的和连通的。这里有一个小技巧：根据推论6.1.4，如果两个图形 A 和 B 是同胚的，且设 $f : A \rightarrow B$ 是一个同胚映射，那么对于 A 中任意一个点 p ，映射 $f : A - \{p\} \rightarrow B - \{f(p)\}$ 依然是一个同胚映射。特别地，对于 A 中任意一个点 p ，一定可以找到 B 中的一个点 q 使得 $A - \{p\}$ 与 $B - \{f(p)\}$ 同胚。对于数字3 和数字4，这是做不到的：数字4 中存在无穷多个点，例如左上角斜线上的点，满足条件“数字4 去掉那个点后它的图形依然是连通的”，而数字3 除了两个端点外，去掉任意其它的点都会让它断成两截；数字4 中还存在一点特殊的点，去掉它之后整个图形断开成了三个连通分支，而数字3 中则不存在这样的点。

- (3) 单连通性与多连通性：我们还可以用另外一种方法在从拓扑上区分上图右边的数字3和数字4。从图上可知，数字4的图像里面有一个“洞”，而数字3的图像里面没有。

有“洞”。在这里，是否有“洞”是一个拓扑性质，而“洞的个数”则是一个拓扑不变量。没有洞的图形被称为是单连通的，它们由如下性质所刻画：该图形里面的任何“圈”均可在该图形内部被连续收缩成一个点。对于有洞的图形，沿着洞画一个圈，则该圈无法在该图形内部被连续收缩成一个点。于是，由“数字3是单连通的”和“数字4不是单连通的”可知它们是不同胚的。类似地，不难发现，球面和轮胎面是不同胚的，因为球面上面的任何一个圈都可以在球面上被连续收缩到一个点，而轮胎面上则不难找到（但严格证明不容易）无法被连续收缩到一个点的圈。

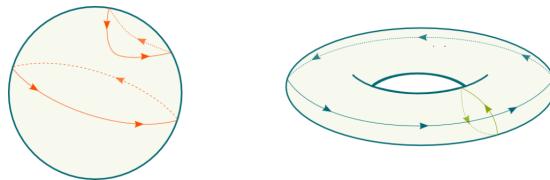


图 6.6：球面与轮胎面

一般而言，数学家是如何研究“图形内部的圈是否可收缩”这个问题呢？著名的法国数学家、代数拓扑的创始人庞加莱 (Poincaré, 1854-1912) 创造了一种方法：对从同一点出发的圈进行代数运算！如果一个圈可以被连续形变到另一个圈，则称这两个圈等价。他证明了，圈的代数运算可以被定义到这些圈的等价类上，而“圈的等价类的集合”在这个运算下称为一个群。这个群被称为该图形的基本群，在研究图形的拓扑的时候起到了重要作用。

当然，还有很多别的拓扑性质、拓扑不变量，此处我们不再进一步介绍。拓扑是一门非常优美同时也非常“艰难”的学科。我们列举平面拓扑的几个看似显然的定理，它们的证明都非常不简单，可参见《拓扑学讲义》。正如库朗和鲁滨逊在《数学是什么》一书中所说的那样：在拓扑学里，直观是真理的源泉，而不是检验真理的最终标准。

定理 6.1.6. (若尔当曲线定理)

平面里任意一条简单闭曲线（即自己跟自己不相交的封闭曲线，例如图??中的第 1、2、3、5 四条曲线）把平面分成不同的两个区域，且这两个区域以该曲线为公共边界。

定理 6.1.7. (布劳威尔不动点定理)

任何一个从平面圆盘 D 到它自身的连续映射一定有不动点（即满足 $f(p) = p$ 的点）^a。

^a如果你对这个陈述没有感觉的话，可以考虑这个等价形式：不存在从圆盘映到圆周且保持圆周上每个点都不动的连续映射，因为这样的映射一定会在某处“撕裂”圆盘。

定理 6.1.8. (布劳威尔维数定理)

欧氏空间的维数是拓扑不变量：若 \mathbb{R}^n 中的开集与 \mathbb{R}^m 中的开集同胚，则 $m = n$ 。

6.2 欧拉多面体公式

虽然拓扑学的兴起主要是 19 世纪末以及 20 世纪的事情，但早在 18 世纪欧拉就已经发现了拓扑学的几块珍宝。其中最重要的就是 1750 年欧拉发现的关于凸多面体的顶

点数、棱数和面数之间的公式，后来大家才逐步认识到，该公式所刻画的是曲面的一个重要拓扑性质：到 19 世纪末，庞加莱把欧拉公式推广到高维空间，该定理最终成为拓扑学的中心定理之一。

¶ 多面体

我们知道，平面里由若干条线段“仅在公共顶点处首尾相接、其它地方不相交”而围起来（即能够闭合）的图形叫做多边形。不难发现，任意 n 边形的顶点数跟边数是相同的。

类似地，三维空间里由若干个平面多边形“仅在公共边处相交（换而言之，这里不允许某个多边形的一条边是另一个多边形一条边的一部分）、其它地方不相交”而围起来（即能够闭合）的图形叫做多面体。下面是多面体的一些例子：

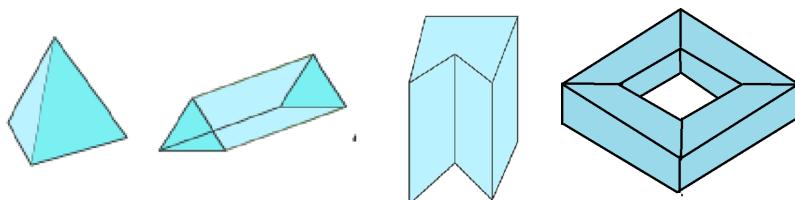


图 6.7: 多面体的例子

如果一个多面体是凸的，则称它是**凸多面体**。例如，图6.7中的四个多面体，前两个是凸多面体，后两个则不是凸多面体。

人们对多面体的研究有着悠久的历史。我们在第 1.1 节就提过，早在古希腊时代，人们就已经发现了五种**正多面体**（即由各个面都是全等的多边形所围成的凸多面体），分别为正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体，它们在柏拉图哲学中扮演了重要角色：

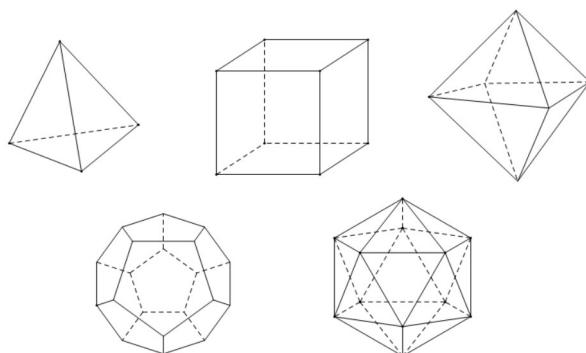


图 6.8: 五种正多面体

¶ 欧拉凸多面体公式的证明

对于任意一个多面体，我们一般用 V 表示它的顶点数，用 E 表示它的边（棱）数，而用 F 表示围成它的多边形“面”的个数。一个自然的问题是： V, E, F 之间有什么关系？

定理 6.2.1. (欧拉凸多面体公式)

对于任意凸多面体，都有

$$V - E + F = 2.$$



例如，对于正四面体，我们有 $V = 4, E = 6, F = 4$ ，从而

$$V - E + F = 2.$$

因为欧拉最早对多面体研究 $V - E + F$ 这个量，所以一般把

$$\chi(P) := V - E + F$$

称作多面体的**欧拉示性数**。

欧拉多面体公式有多种证明方法，下面这个证明最早是由勒让德 (Legendre, 1752-1833) 所给出的，其证明的关键一步是球面多边形的面积公式，即命题2.3.23。

证明 任取一个凸多面体 P ，我们不妨把它成比例扩大，使得单位球面完全落在该多边形所围成的内部。如同例6.1.2(2)一样，我们用中心投影将该多面体同胚地投影到单位球面上（注意此处用到了多面体的凸性）。则根据定义，多面体 P 的每个面都被投射成了球面上的一个球面多边形，如下图所示：

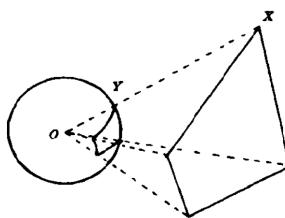


图 6.9: 多面体往球面的中心投影

记多面体 P 的面分别为 P_1, P_2, \dots, P_F 。记 P_k 在中心投影下所得的球面多边形为 P'_k , $1 \leq k \leq F$. 假设 P'_k 为球面 n_k 边形，且它的内角分别为 $\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, \dots, \alpha_{k,n_k}$ 。则由命题2.3.23，球面多边形 P'_k 的面积为

$$S_{P'_k} = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{k,j} - (n_k - 2)\pi.$$

对 $k = 1, 2, \dots, F$ ，并注意到所有这些球面多边形恰好覆盖了单位球面，我们得到

$$4\pi = \sum_{k=1}^F S_{P'_k} = \sum_{k=1}^F \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{k,j} - \sum_{k=1}^F (n_k - 2)\pi + 2F\pi.$$

最后，由于该“球面多面体”总共有 V 个顶点，所有球面多边形在每个顶点处的内角和为 2π ，故

$$\sum_{k=1}^F \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{k,j} = 2V\pi.$$

另一方面，每条边恰好是两个球面多边形的公共边，从而在算所有球面多边形的边时，每条边都被算了两遍，故

$$\sum_{k=1}^F n_k = 2E.$$

把这两个式子代入前式，得

$$4\pi = 2V\pi - 2E\pi + 2F\pi,$$

整理即得欧拉公式。 \square

更一般的，对于任意跟球面同胚的多面体，都可以证明同样的公式成立。人们把跟球面同胚的多面体叫做**简单多面体**。显然简单多面体都是凸的，但也不难找到非凸的简单多面体。例如，图6.7中第三个多面体是非凸的简单多面体。而第四个则不是简单多面体，因为它跟轮胎面同胚，而轮胎面跟球面是不同胚的。事实上，只要数一数点、线、面的个数，不难欧拉多面体公式对于这个与球面不同胚的多面体并不成立：它有 16 个顶点，32 条边，16 个面，从而

$$V - E + F = 16 - 32 + 16 = 0.$$

进一步地，不难看出，欧拉多面体公式并不仅仅对“多面体”这种由点、直线、平面所构成的“平直”几何对象成立：如果我们把球面任意划分成由曲线（弧）围成的区域，而把球面视为由“点、曲线、曲面”围成的区域，则同样的公式也成立。我们还可以把球面扭曲成椭球形或者封闭葫芦形，只要所得的曲面跟球面同胚，则同样的公式依然成立。所以，欧拉多面体公式事实上表明了球面（直边或曲边）多边形的“欧拉示性数”事实上是球面本身的拓扑量。于是，我们可以把这个量叫做球面的欧拉示性数，并记成

$$\chi(S^2) = 2.$$

从这个意义上说，欧拉多面体公式是当之无愧的拓扑学定理。

¶ 应用：仅存在五种正多面体

作为欧拉多面体公式的一个应用，我们证明泰特拖斯的定理：

推论 6.2.2. (五个正多面体)

正多面体仅有五个，即正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体。 

证明 设正多面体 P 的每个面都是正 n 边形，且每个顶点是 m 个面的交点（从而也恰好是 m 条边的交点），则显然有

$$n \geq 3, \quad m \geq 3.$$

因为每条边都正好是两个面的公共边，且每条边恰好连接了两个顶点，所以

$$nF = 2E, \quad mV = 2E.$$

于是，由欧拉公式可得

$$\frac{2}{m}E - E + \frac{2}{n}E = 2,$$

即

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}.$$

因为右端大于 $\frac{1}{2}$ ，故 m 和 n 不可能都大于等于 4，即 m 或 n 至少有一个为 3.

【情形一】 $m = 3$. 此时上式变为

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{E}.$$

于是，必有 $3 \leq n \leq 5$. 分别讨论，得

- $m = 3, n = 3 \Rightarrow E = 6, V = 4, F = 4 \Rightarrow$ 正四面体；
- $m = 3, n = 4 \Rightarrow E = 12, V = 8, F = 6 \Rightarrow$ 正六面体；
- $m = 3, n = 5 \Rightarrow E = 30, V = 20, F = 12 \Rightarrow$ 正十二面体。

【情形二】 $n = 3$. 此时上式变为

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{E}.$$

于是，必有 $3 \leq m \leq 5$. 分别讨论，得

- $m = 3, n = 3 \Rightarrow E = 6, V = 4, F = 4 \Rightarrow$ 正四面体；
- $m = 4, n = 3 \Rightarrow E = 12, V = 6, F = 8 \Rightarrow$ 正八面体；
- $m = 5, n = 3 \Rightarrow E = 30, V = 12, F = 20 \Rightarrow$ 正二十面体。

于是，仅有这五种正多面体。 \square

注 6.2.3. 严格说来，对于上面的每种情况，还需要论证：具有给定的 m, n, E, V, F 的多面体是唯一的。例如，对于第一种情况，上面的论证只说明了该多面体是一个每个面都是正三角形、每个顶点处恰有三条边交汇、共有 4 个顶点 6 条棱 4 个面的凸多面体，它为什么就是我们熟悉的正四面体呢？有没有可能有别的构造，满足这些条件，但跟我们熟悉的正四面体不全等？在 1811 年，年仅 22 岁的柯西 (Cauchy, 1789-1857) 证明了

柯西刚性定理：如果两个凸多面体是组合等价的（即存在双射，使得一个多面体的面一一对应于另一个多面体的面，且保持点、线、面的包含关系不变），且各个对应的面也是全等的，则对应的相邻面的夹角也是相等的，从而这两个凸多面体全等。

于是正多面体确实只有上面这五个。

注 6.2.4. 从定理的证明，我们可以看到类似于射影几何中的对偶原理，在正多面体的顶点和面之间也有一个对偶性：从一个正多面体开始，把顶点换成面，把面换成顶点，则得到另一个正多面体，称为原多面体的**对偶多面体**（最简单的做法就是作正多面体的外接球面，接着通过每个顶点作外接球面的切平面，这些切平面围成的多面体就是这个对偶多面体）：

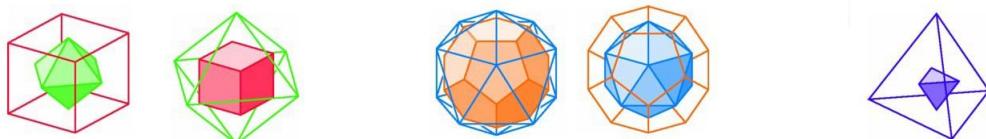


图 6.10：正多面体间的对偶

特别地，从图上可知，正八面体跟正六面体对偶，正十二面体跟正二十面体对偶，而正四面体则跟它自身对偶。

注 6.2.5. 我们简要介绍一下简单多面体的欧拉公式在高维空间的推广。

(1) 如果考虑 $n+1$ 维空间里的 n 维“简单超多面体”，并记它的 0 维面（即顶点）的个数为 N_0 , 1 维面（即棱）的个数为 N_1 , 2 维面的个数为 N_2 , …, n 维面（即棱）的个数

为 N_n , 则庞加莱证明了

$$N_0 - N_1 + N_2 - \cdots + (-1)^n N_n = 1 - (-1)^n.$$

注意 $n = 1$ 时这个定理是显然的, $n = 2$ 时即欧拉公式。

- (2) 人们还可以进一步研究高维空间里的“正超多面体”。事实上, 可以证明, 四维空间里的三维“正超多面体”共有 6 个, 而对于五维以及更高维空间, 每个维数里的“正超多面体”都只有 3 个(你能猜到是哪 3 个吗?)。

6.3 曲面及其分类简介

二十世纪之前, 拓扑学的主要成就是关于曲面的研究。为简单起见, 本节只考虑连通的曲面, 因为对于不连通的曲面, 可以分别考虑它的每个连通的部分; 此外本节也只考虑紧致的曲面, 因为不紧致的曲面可以有非常复杂的结构。

什么是曲面呢? 简单来说, **曲面**就是这样一个图形, 它的每个点都有一个同胚于开圆盘的邻域(此处我们不考虑“抽象曲面”, 否则还需加上其他拓扑限制)。于是, **紧致曲面**就是“每个点都有一个同胚于开圆盘的邻域”的封闭图形。注意, 根据这个定义, 紧致曲面是没有边缘的, 因为边缘的点不存在同胚于开圆盘的邻域。不过, 边缘点的性质也不算太差: 它们都有同胚于半圆的邻域。我们把带有这类边缘点的“曲面”叫做**带边曲面**。它们虽然不是严格意义上的曲面, 但对于简化曲面的研究有重要作用。

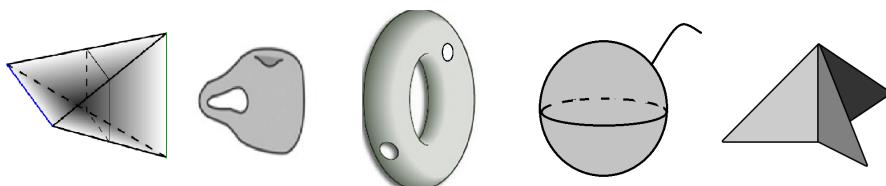


图 6.11: 曲面与非曲面

例如, 上面五个图形, 前两个是紧致曲面, 第三个是带边曲面, 而后面两个则不是曲面。

¶ 带柄球面及其欧拉公式

上一节提到, 欧拉公式所刻画的事实是球面的拓扑性质: 所有跟球面同胚的多面体, 它的欧拉示性数都是 2, 于是我们也说球面的欧拉示性数为 2. 对于同胚于环面(即轮胎面)的多面体, 上文算出了图6.7中最后一个球面的欧拉示性数是 0. 事实上, 对于任意同胚于环面的多面体, 其欧拉示性数都是 0. 当然还有更复杂的多面体, 它们同胚于更复杂的曲面, 算出来的欧拉示性数也不一样。

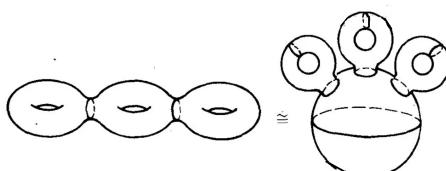


图 6.12: 亏格为 3 的曲面

为了算出更一般的多面体的欧拉示性数，而是考虑下面这类一般的曲面：在拓扑上，它们是通过“在球面上安装一定数量的环柄”所形成的。上图展示的则是带有“球面上安装了三个环柄”的曲面。类似地，可以在球面上安装任意（有限）多个环柄。我们可以把环面当做带有一个环柄的球面。

注意，在“安装环柄”时，我们是在球面上打洞的（否则安装完成后就不是曲面了）。我们把安装的环柄数叫做该曲面的**亏格**。于是，球面是亏格为0的曲面，轮胎面是亏格为1的曲面，而图6.12给出的则是亏格为3的曲面²。

我们把这样的亏格为 g 的曲面记为 Σ_g 。1812年吕利耶（L'Huilier, 1750-1840）把欧拉公式推广到了 Σ_g 上：

定理 6.3.1.（广义欧拉公式）

若多面体 P 同胚于亏格为 g 的曲面 Σ_g ，则它的欧拉示性数为

$$V - E + F = 2 - 2g.$$



证明 因为 P 同胚于 Σ_g ，所以在同胚映射下， P 对应于一个恰好覆盖 Σ_g 的曲边多边形 P' ，于是我们只要对 P' 的点、曲线、曲面计数即可。

设 Σ_g 上覆盖有一个曲边多边形 P' 。在该曲边多边形 P' 的基础之上，在 Σ_g 的每个环柄上增加2个“曲边圆”，总共增加 $2g$ 个曲边圆，使得

- 该“曲边圆”不经过原有曲边多边形的顶点，且跟原有曲边多边形的边只相交而没有重合的段；
- 这两个“曲边圆”能把环柄上切割下一个同胚于圆柱面的部分。

我们把所得的新的曲边多边形称为 P'' 。注意在每次添加一个曲边圆的时候，假设该曲边圆跟圆曲边多边形交于 k 个点，则 P'' 跟 P' 相比，多了 k 个顶点，多了 $2k$ 条“曲线”（其中 k 条是该曲边圆被这 k 个点所分割而成的，另外 k 条则是这 k 个点把原来 P' 的边分割而多出来的），多了 k 个曲面（曲边圆的 k 段，每一段都把所在的曲面分成两个曲面）。于是，添加这样的曲边圆并不改变曲边多面体的欧拉示性数，即 P'' 的欧拉示性数跟 P' 的欧拉示性数相同。

用这 $2g$ 个曲边圆，我们把 P'' 分成两部分，一部分是 g 个同胚于圆柱的部分，另一部分则同胚于球面挖掉 $2g$ 个圆盘。我们分别处理：

- (1) 对于每个“曲边多边形圆柱”，如果添加两个“圆盖”（即添加2个面，但不添加点或线），则得到一个拓扑球面。于是每个“曲边多边形圆柱”的欧拉示性数比球面的欧拉示性数少2。从而由欧拉定理，无论其内部曲边多边形是什么构型，“曲边多边形圆柱”的欧拉示性数总是0。
- (2) 对于同胚于球面挖掉 $2g$ 个圆盘的部分，如果添加 $2g$ 个“圆盖”（即添加 $2g$ 个面，但不添加点或线），则得到一个拓扑球面。于是这部分的欧拉示性数是 $2 - 2g$ 。
- (3) 最后，在算这两部分的欧拉示性数时，重复计算了这 $2g$ 个曲边圆的部分。但每个曲边圆上的点数与曲线数相同，正好抵消了。

²直观地说，亏格就是封闭曲面的“洞”的个数。它的较为严格的定义如下：如果在曲面上最多可以画 k 个圆圈，使得把这些圆圈去掉后，该曲面还是连通的，则该曲面的亏格为 k 。例如，对于图6.12中所示的曲面，去掉图中所标示的三个圆圈，该曲面依然是连通的，而再去掉任意一个圆圈它都不再连通，故它的亏格是3。

综上，可知 P'' 的欧拉示性数为 $2 - 2g$ 。于是定理成立。□

于是，多面体的欧拉示性数是一个拓扑量，它仅依赖于该多面体的“拓扑性态”。跟球面情形一样，我们称

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

为 Σ_g 的欧拉示性数。

¶ 作为曲面的射影平面

一个自然的问题是：除了上面所给出的这些带 g 个“洞”的曲面之外，从拓扑上看（这意味着我们把拓扑上等价的曲面都看做同一个曲面，例如把所有的简单多面体都看做球面），还有别的紧致（无边界）曲面吗？

答案是“是的，还有”。事实上，有一个我们已经非常熟悉的“曲面”，它并不在上面的列表中，那就是射影平面。为此，我们采用射影平面的“球面粘合对径点”定义，即

$$\mathbb{RP}^2 = S^2 / \{\pm 1\},$$

即由球面模去等价关系 $x \sim \pm x$ 后所得到的等价类集合。在 \mathbb{RP}^2 的这个“球面商”模型里，射影平面里的直线恰好一一对应于球面上的大圆（见习题 5 第 (2) 题）。

跟“空间商”模型（即视空间 \mathbb{R}^3 中的直线为射影平面的点）相比，“球面商”模型的好处在于“点还是点（点对）”，于是可以从这个模型出发，可视化地“构建”射影曲面的形状。具体如下：因为球面上每组对径点都是射影平面中同一个点的代表元，所以我们可以“切掉”下半球面，而只保留上半球面和赤道，并记所得的图形为 $\overline{S_+^2}$ 。则 \mathbb{RP}^2 相当于从 $\overline{S_+^2}$ 出发，粘合赤道上的对径点所得的图形。

当然，如果你直接从半球出发，粘合赤道上所有可能的对径点，你会发现你怎么也粘不好。这一点也不奇怪，因为这个“粘合过程”实际上是无法真正在 \mathbb{R}^3 中实现的。下图大致展示了如何从半球面模型出发，通过粘合所有对径点得到射影平面“图像”的过程，从中我们可以看到难点在哪儿，以及如何通过“想象”来解决这个问题：先任选一组对径点并粘合，得到第二个图。此时可以发现，原来的一个赤道圆变成了两个小圆，而且原本跟第一个小圆中的点对径的点恰好落在了第二个小圆中。于是，我们把两个小圆分成四个半圆，分别如图做标记（即标上图示的字母和箭头），通过字母和箭头方向来表明粘合方式：标记 a 的半圆要跟另一个标记 a 的半圆沿着图示的方向粘合，标记 b 的两个半圆也类似。为了能够进行粘合，我们把这两个小圆拉高一些（在拓扑里，这样操作是没有问题的），如第三个图所示。最后，我们在头脑中想象把标有同样字母的半圆粘合，得到最后一个图所示的样子。

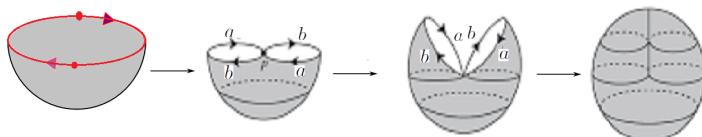


图 6.13：射影平面的“图像”

但是，切记，标有 a 的半圆上的点跟标有 b 的半圆上的点是没有粘合的。所以，在最后的图中，中间的那条竖线其实是不存在的，即曲面自己跟自己是没有交叉的。这就是为什么上面说这样的粘合过程（以及曲面 \mathbb{RP}^2 本身）是无法真正在 \mathbb{R}^3 中实现的（等价地说，作为曲面， \mathbb{RP}^2 并不能被嵌入 \mathbb{R}^3 。不过，它能别嵌入更高维的 \mathbb{R}^4 ）。

注意，这个图展示了 \mathbb{RP}^2 为什么是一个紧致曲面：首先，对于图上的任意一点，可以找到它的一个“邻域”，该区域跟二维圆盘同胚（对于原先处于赤道外的点，这是显然的；对于原先处于赤道上的点，可以更改一下模型，即改用不经过该点的“经度圆”切割球面，然后重复上述过程即可）。注意，无论采用那个模型，用哪种切割方式，所得的都是同一个射影平面；其次；这个图形是有界（严格说起来，因为放不到 \mathbb{R}^3 中，所以要放在 \mathbb{R}^4 中才能看到有界性）且封闭（没有边界）的。

射影曲面有没有欧拉示性数呢？答案是：有的。下面是一种形象的计算方法：考虑“张在球面上且具有“对径点对称性”的多面体，例如正八面体。如果把这个正八面体“对径点”粘起来，就得到一个“张在射影平面上的多面体（当然，此时其实它已经不是我们熟悉的多面体了，而只是一种“抽象多面体”：由多边形面沿着边粘接而成的封闭图形）”。这个抽象多面体有 4 个面（原本八面体有 8 个面，粘接后变成 4 个面），6 条棱（原本八面体有 12 条边，粘接后变成 6 条边）和 3 个顶点（原本八面体有 6 个顶点，粘接后变成 3 个顶点）。于是，射影平面的欧拉示性数是（严格说来我们并没有证明对任意曲面，欧拉示性数都是拓扑量，即不依赖于这类抽象多面体的选择。其证明需要更多的拓扑知识，此处姑且承认它）

$$\chi(\mathbb{RP}^2) = 4 - 6 + 3 = 1.$$

当然，在计算过程中，我们完全可以改用张在球面上的其它具有“对径点对称性”的多面体开始计算。因为球面上的多面体的欧拉示性数是 2，而所得的“抽象多面体”点、线、面数都恰好减半，所以这样算出来的射影平面的欧拉示性数总是 1。

¶ 单侧曲面：射影平面与克莱因瓶

那么，跟前面提到的“有 g 个洞的曲面” Σ_g 相比，射影平面有哪些不同之处呢？当然，一个很大的不同在于不能作为子集出现在 \mathbb{R}^3 中。另外一个更加本质性的差别在于：它是单侧曲面。

为了理解单侧曲面的概念，我们可以先研究更常见也更熟悉的双侧曲面。例如，对于球面，我们可以给它的内表面和外表面各涂上一种颜色，则这两种颜色不会相遇。等价地，如果有两只蚂蚁，一只蚂蚁在球面的外表面爬行而另外一只在球面的内表面爬行（球面上没有洞），那它们就不可能相遇。这样的曲面我们称作双侧曲面。我们熟悉的曲面，例如球面，圆环面，或者亏格为 g 的曲面 Σ_g ，都是双侧曲面。

而单侧曲面则不然：这样的曲面不存在相互不通的正反两侧，而是只有一侧：蚂蚁在曲面一点处爬行，可以爬到该点处的“背面”去。射影平面就是这样一种曲面：如果从曲面最底端的外表面出发，先沿着最右侧曲线向上，到达某个图中所示的“8”字形是，改为向左爬，越过中间那条事实上并不存在的交叉线，就进入了曲面的内表面，到达最左端后在内表面沿着左侧曲线向下，就会到达起点处的背面（即该曲面最底端的内表面）！所以，射影平面是单侧曲面。

那么，除了射影平面之外，还有别的单侧曲面吗？还有大量的单侧曲面，其构造方

法也很简单：左手拿一个亏格为 g 的曲面 Σ_g ，右手拿一个射影平面 \mathbb{RP}^2 ，用小刀在两者的底部各挖一个圆洞，然后将这两个曲面沿着洞口边缘的圆粘接起来，就会得到另一个单侧曲面。这种把两个图形“各挖一个小圆洞并沿着洞口边缘粘接起来”的操作方法，在拓扑上被称作连通和：

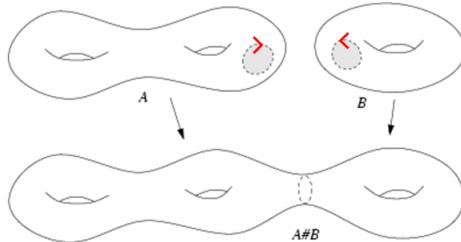


图 6.14: 连通和

连通和是构造曲面的重要方法。例如， Σ_g 可以被视为是 g 个环面依次做连通和所得的曲面。

事实上，不仅可以拿着射影平面跟曲面 Σ_g 做连通和，而且可以拿两个射影平面做连通和。会得到什么呢？很神奇的是，会得到如右图所示的克莱因瓶。克莱因瓶最早是由埃尔朗根纲领的提出者克莱因发现的。跟射影平面的“图像”类似，这也不是一个真实的图像，因为它不能被实现为 \mathbb{R}^3 中的曲面；另一方面，也不难“看出”它是单侧曲面。不过，如何理解“两个射影平面的连通和是克莱因瓶”呢？



图 6.15: 克莱因瓶的“图像”

¶ 单侧性的根源：莫比乌斯带

无论是射影平面还是克莱因瓶，或者用 Σ_g 跟它们做连通和所得的单侧曲面，都是不可被嵌入 \mathbb{R}^3 的。因而，理解它们时也往往有种“雾里看花”的感觉。不过，也并非不能清晰地展示曲面的单侧性，只是要付出一点点代价，那就是从封闭曲面转向带边曲面。

最早的，同时也是最重要的单侧带边曲面，叫做莫比乌斯带，是 1858 年由 68 岁高龄的莫比乌斯 (Mobius, 1790-1868) 和高斯的学生利斯廷 (Listing, 1808-1882)³ 分别独立地发现的。其构造方法非常简单，也很容易在三维空间实现：取一片长方形纸条，如下图所示，将它扭转 180 度后粘合对边，所得的曲面就是莫比乌斯带。图 6.17 是著名画家埃舍尔所创作的用意展示莫比乌斯带单侧性的画作。



图 6.16: 制作莫比乌斯带

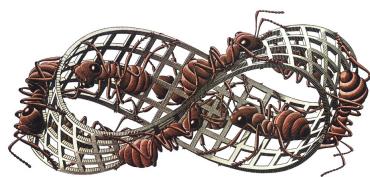


图 6.17: 莫比乌斯带单侧性 (埃舍尔)

³利斯廷是为拓扑学命名的人：他最早创立了 Topologie 这个词，1847 年出版了《拓扑学的初步研究》一书。在此之前（包括之后 50 年）这门学科一般被称为“位置分析学”。

跟前面所提到的那些封闭的单侧曲面相比，莫比乌斯带最大的优点在于它的单侧性是在三维空间里真正可以看见的。我们不妨把莫比乌斯带跟常见的圆柱面作个比较。圆柱面的构作方式跟莫比乌斯带类似，而且更简单：取一片长方形纸条，不扭转，直接粘合对边即可。圆柱面的中轴是一个圆，它的边界是不连通的，是两个圆。显然，圆柱面是双侧曲面：除非翻越边界线，否则蚂蚁无法从它的一侧爬到另一侧。另一方面，莫比乌斯带的中轴跟圆柱面一样，也是一个圆；但是，莫比乌斯带的边界是连通的，该边界在拓扑上是一个圆！如果蚂蚁沿着莫比乌斯带的中轴圆爬一圈（所以没有翻越边界线），你会发现蚂蚁爬到起点处的背面去了。

根据定义，如果能够蚂蚁在曲面上（不翻越边界线）能够从一点爬到该点的背面，则这个曲面是单侧曲面。于是下面这个命题是显然的：

命题 6.3.2. （莫比乌斯带与单侧性）

如果一个曲面里面包含一个莫比乌斯带（即该曲面有一个子集跟莫比乌斯带同胚），则该曲面是不可定向的。



下面说明：无论是射影平面，还是克莱因瓶，里面都“藏着”莫比乌斯带（事实上，任意单侧曲面都包含着莫比乌斯带。所以可以认为莫比乌斯带是曲面单侧性的根源）！首先看射影平面。如果从射影平面挖去一个洞，剩余部分是什么呢？直接看射影平面看不清楚，我们回到射影平面的“球面商”模型。因为对径的关系，从射影平面上挖去一个洞，等价于从球面北极和南极附近各挖一个同样的洞，再把剩余的部分按对径点粘合。因为在拓扑中可以连续形变，不妨设挖去了球面的 $|z| > 1/2$ 的部分。于是“射影平面挖去一个洞”在拓扑上就等同于“球面上 $|z| \leq 1/2$ 的部分，按照对径点粘合”。我们再一次拿起剪刀，咔嚓咔嚓，把球面上 $|z| \leq 1/2$ 的这部分部分剪去一半，例如剪去 $x < 0$ 的部分，因为这部分的点都跟 $x > 0$ 的部分的点是重合的。剩下的部分，只剩下两侧即“ $x = 0, |z| < 1/2, y > 0$ 部分”和“ $x = 0, |z| < 1/2, y < 0$ 部分”需要按照对径的方式粘合。显然，剩下的这一部分，在拓扑上是一个长方形，而“按照对径的方式粘合”恰好相对于是“把该长方形扭曲 180° 再粘合”！所以我们证明了

命题 6.3.3. （射影平面挖洞 = 莫比乌斯带）

如果从射影平面中挖去一个小洞，那么剩余部分同胚于莫比乌斯带。



由这个性质，可以计算莫比乌斯带的欧拉示性数：从“张在射影平面的任意抽象多面体”开始，不改变它的顶点和线，而只是任意去掉它的一个多边形面（拓扑上就是掉了一个圆盘），则剩下的抽象（带边）多面体就跟莫比乌斯带同胚。于是，莫比乌斯带的欧拉示性数恰好比射影平面的欧拉示性数少 1，即

$$\chi(\text{莫比乌斯带}) = \chi(\mathbb{RP}^2) - 1 = 0.$$

现在我们可以回答上面的问题：如何理解两个射影平面的连通和是克莱因瓶呢？根据定义，用两个射影平面做连通和，是从每个射影平面挖去一个小圆洞，然后沿着边界圆粘合。因为从射影平面中挖去一个小洞后剩余的部分同胚于莫比乌斯带，所以“用两个射影平面做连通和”就相当于“把两个莫比乌斯带沿着边界圆粘合起来”。下图展示了

如何把两个莫比乌斯带沿着边界圆粘合起来得到克莱因瓶：



图 6.18：粘合两个莫比乌斯带

所以我们得到了

命题 6.3.4. (射影平面挖洞 = 莫比乌斯带)

两个射影平面 \mathbb{RP}^2 的连通和是克莱因瓶 K .



最后，这个命题也给出了克莱因瓶 K 的欧拉示性数：用同样的任意抽象多面体张在两个射影平面上，各挖去一个对应的多边形面，并沿着边界粘合，就给出了“张在克莱因瓶上的抽象多面体”。跟原来的两个抽象多面体相比，这个多面体少了两个面，此外，还少了一些边和点，即原来抽象多面体中沿着“粘合边界”（即挖去的那个多边形的边界）的点和边：显然，如果挖去的是 n 边形，则这个边界上恰有 n 个点和 n 条边，从而在就算欧拉示性数 $V - E + F$ 时，二者抵消了。于是，克莱因瓶的欧拉示性数比两个射影平面的欧拉示性数之和少 2，即

$$\chi(K) = \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{RP}^2) - 2 = 0.$$

如果记两个曲面 S_1 与 S_2 的连通和为 $S_1 \# S_2$ ，则本质上同样的论证告诉我们

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

由此以及 Σ_g 可表示成球面跟 g 个 \mathbb{T}^2 的连通和，其中 $g \geq 0$ ($g=0$ 时对应的曲面是球面)，并结合 $\chi(S^2) = 2, \chi(\mathbb{T}^2) = 0$ ，我们再次得到

$$\chi(\Sigma_g) = \chi(S^2) + g \cdot \chi(\mathbb{T}^2) - 2g = 2 - 2g.$$

另一方面，若记 $\tilde{\Sigma}_l$ 为球面和 l 个 \mathbb{RP}^2 的连通和，其中 $l \geq 1$ ，则

$$\chi(\tilde{\Sigma}_l) = \chi(S^2) + l \cdot \chi(\mathbb{RP}^2) - 2l = 2 - l.$$

¶ 紧致连通曲面分类定理

综上所述，我们得到了两族紧致连通曲面，第一族是

$$S^2, \mathbb{T}^2, \Sigma_2 = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \Sigma_3 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \dots, \Sigma_g, \dots$$

它们都是双侧曲面，而且欧拉示性数两两不同且都是不超过 2 的偶数；第二族是

$$\mathbb{RP}^2, \tilde{\Sigma}_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \tilde{\Sigma}_3 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \dots, \tilde{\Sigma}_l, \dots$$

它们都是单侧曲面，欧拉示性数两两不同且都是不超过 1 的整数。因为单侧性以及欧拉示性数都是拓扑量，所以这两族曲面中任意两个在拓扑上都是不同的曲面。

事实上，它们就是(拓扑上)所有的紧致连通曲面了：

定理 6.3.5. (紧致连通曲面分类定理)

任意紧连通曲面同胚且仅同胚于下述曲面中的一个：

- $S^2, \mathbb{T}^2, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_g, \dots$
- $\mathbb{RP}^2, \tilde{\Sigma}_2, \tilde{\Sigma}_3, \dots, \tilde{\Sigma}_l, \dots$

特别地，紧连通曲面在拓扑变换下的等价类由“该曲面是否是单侧曲面”以及“该曲面的欧拉示性数”完全确定下来。



其证明可参见拓扑学教材。

习题 6

1. [哥尼斯堡七桥问题]

拓扑学上最早的命题之一是哥尼斯堡七桥问题：传说在欧拉的年代，小城哥尼斯堡被分叉的河流分成四块陆地区域（两块陆地以及两个岛屿），河上总共修建了七座桥以连通各个区域，如图所示。人们喜欢在饭后在小桥上散步。一个自然的问题是：在散步时，能否设计一种走法，使得可以一次性不重复地走遍七座桥？

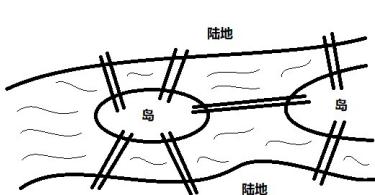


图 6.19: 哥尼斯堡七桥

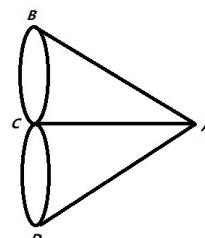


图 6.20: 欧拉转化后的问题

在试了很多次之后也没人成功。于是 1735 年有人向大数学家欧拉请教这个问题。欧拉发现，这个问题看似是一个几何问题，但跟长度、面积、直曲等传统的几何要素都没有关系，而只跟“位置关系”即是否相连有关。通过把把陆地和岛屿抽象为 4 个点，把桥抽象为 7 条边，欧拉把这个问题转化为一个一笔画问题并成功地解决了问题。欧拉把这类问题命名为“位置的几何学”，从而宣告了拓扑的诞生。

- (a). 证明：哥尼斯堡七桥问题的答案是“否”。
- (b). 如果再建一座桥，有哪些建桥方式，可以使得市民们能够不重复地走遍八座桥？有没有办法，使得在修建了第八座桥后，市民们在不重复地走遍八座桥后还能回到起点？
- (c). 我们称“由一些点（称为顶点）以及点之间的连线（称为边）”所组成的数学对象为图。若一个图里的任意两个顶点都能通过一系列边相连，则称该图为连通图。
证明：一个连通图可以一笔画（即可以从某个顶点开始，可以不间断且不重复地“一笔”画出整个图）当且仅当该图中，恰有奇数条边相连的顶点的个数是 0 或 2。

2. [汉字的拓扑分类]

给出下列汉字（视作曲线图）的拓扑分类：

一 二 三 七 八 九 十 乙 丁 厂 人 入 儿
匕 几 刂 了 刀 力 乃 又 干 于 工 亏 才
下 大 兮 万 上 口 小 干 川 亿 巾 久 及

图 6.21: 汉字的拓扑分类



图 6.22: 假球

3. [足球]

- (a). 证明右上图中这个足球是假的。
- (b). 真正的足球是由六边形和五边形组成，每个顶点恰好是三个面的交点，且每个六边形恰好跟三个五边形相邻。计算足球中六边形和五边形的个数。

4. [Σ_2 的欧拉示性数]

作一个“张在亏格为 2 的曲面 Σ_2 ”上的多面体，并计算它的顶点数、边数、面数，验证广义欧拉公式成立。

5. [带边曲面的欧拉示性数]

- (a). 从球面上挖去 k 个小洞，所得带边曲面的欧拉示性数是多少？
- (b). 从 Σ_g 上挖去 k 个小洞，所得带边曲面的欧拉示性数是多少？
- (c). 从 $\tilde{\Sigma}_l$ 上挖去 k 个小洞，所得带边曲面的欧拉示性数是多少？

6. [欧拉多面体公式的柯西证明]

正文中采用了勒让德的方法证明欧拉多面体公式，其中用到了球面几何量（如球面多边形的面积）。下面是柯西给出的另一种证明的概要：设 P 是同胚于球面上的一个多面体（如下面第一图所示）。先把问题转化为：

对于（如下面第二图所示的）连通有限平面图，记 V 为顶点数， E 为边数，而 F 该图把平面所分成的区域数（含整个大多边形之外的无界区域），则 $V - E + F = 2$ 。

其证明方法是将该图剖分成三角形，然后逐步减少三角形的个数（如下面第三、第四图所示），证明 $V - E + F$ 始终不变。请给出该证明的细节。

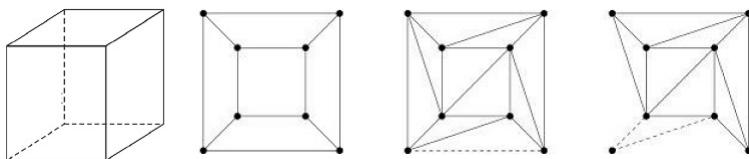


图 6.23: 欧拉多面体公式的证明

7. [无边单侧曲面挖洞后可嵌入三维欧氏空间]

下图展示了带有 l 个莫比乌斯带的曲面的制作方法：从左边的带有 l 对长方形末端的纸带开始，对每一对长方形末端，都将其中之一扭转 180 度后粘接起来。

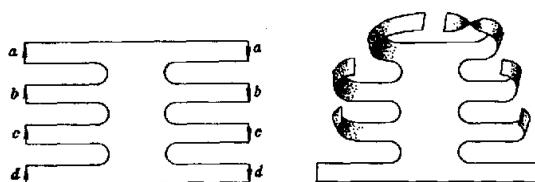


图 6.24: 含多个莫比乌斯带的曲面

- (a). 最终所得的曲面，其边界是由几个圆组成的？
- (b). 计算所得曲面的欧拉示性数。
- (c). 假设你知道如下结论：

带边曲面的拓扑类型是由其“是否可定向、边界连通分支个数、欧拉示性数”唯一决定的。

证明：该曲面同胚于“挖去一个洞的 $\tilde{\Sigma}_l$ ”。（于是，虽然单侧曲面 $\tilde{\Sigma}_l$ 都不能被嵌入欧氏空间 \mathbb{R}^3 中，但只要在曲面上挖一个小洞，剩下的部分就能被拓扑地嵌入 \mathbb{R}^3 ！）

附录 A 附录

我们把本书中需要用到的一些代数方面(尤其是抽象代数和线性代数)的定义与结果列举在本附录中。这些结果的证明可以在大部分通用的抽象代数和线性代数教科书中找到。

A.1 集合论初步

¶ 集合、映射与运算

集合是数学中最基础的概念，当前几乎所有的数学都是建立在集合的语言之上。我们一般用大写字母 S, A, B, X, Y 等表示集合，而用小写字母 s, a, b, x, y 等表示集合的元素。对于高中阶段已经熟悉的术语例如子集、交集、并集、补集、包含等(以及相关性质)，此处不再赘述，仅仅提一下多个集合的笛卡尔积的概念：

定义 A.1.1. (笛卡尔积)

给定两个集合 A 与 B ，它们的笛卡尔积 $A \times B$ 指的是所有有序元素对 (a, b) (其中 $a \in A, b \in B$) 所组成的集合，即

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

类似的，一族(有限族或无限族)集合 $\{A_i\}_{i \in I}$ (其中 I 是一个指标集合)的笛卡尔积为

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i) \mid a_i \in A_i\}.$$

若指标集为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 且所有 $A_i = A$ 为同一个集合，则把该笛卡尔积简记为 A^n 。



映射是研究集合间关系的桥梁。我们也不赘述映射、像集、原像、单射、满射、双射(又称一一映射)等概念。下述映射在本书中常被用到：

- 对于任意集合 A ，均可定义恒等映射 $\text{Id}_A : A \rightarrow A$ ，该映射把集合 A 中任意元素均映为它自身。在不引起混淆的情况下，我们简记 Id_A 为 Id 。
- 若 $f : A \rightarrow B$ 是双射，则可定义其逆映射 $f^{-1} : B \rightarrow A$ 为把 B 中的元素 y 映为 A 中唯一一个满足 $f(x) = y$ 的元素 x 。
- 若 $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ 是两个映射，则可定义它们的复合映射 $g \circ f : A \rightarrow C$ 为把 A 中的元素 x 映为 $g(f(x))$ 的映射。

我们记所有从 A 到 B 的映射所构成的集合为 $\mathcal{M}(A, B)$ 或 B^A 。

“运算”是一类非常常见的映射：

定义 A.1.2. (运算)

对于集合 A, B, C ，称映射 $f : A \times B \rightarrow C$ 为从 A 和 B 到 C 的一个二元运算。特别地，若 $A = B = C$ ，则称之为 A 上的一个二元运算。



对于二元运算 f ，往往不用 $f(x, y)$ 表示 f 在 (x, y) 处的值，而是改用 $+, \times, \cdot, \circ, \star, \langle \cdot, \cdot \rangle$

等运算符来表示，例如写成 $x + y$ 或 $x \cdot y$ 或 $\langle x, y \rangle$ 等，甚至（例如对于向量的数乘运算）不写运算符而直接写 xy . 注意根据定义，二元运算具有封闭性，即“运算的结果是该集合中一个确定的元素”。

我们熟悉的运算有实数/复数的加法、乘法等。对于一般的运算，重要的是它是否满足特定的运算律：

定义 A.1.3. (运算律)

设 \star 是集合 A 上的一个运算。

- **【单位元律】**：存在 $e \in A$ 使得对任意 $x \in A$ ，均有 $e \star x = x = x \star e$ 。此时我们称 e 为该运算的 **单位元**。

• 设运算 \star 满足单位元律。若 $x, y \in A$ 满足 $x \star y = e = y \star x$ ，则称 y 为 x 的**逆元**。（对于一般的运算，逆元未必存在。）

- **【零元律】**：存在 $o \in A$ 使得对任意 $x \in A$ ，均有 $o \star x = o = x \star o$ 。此时我们称 o 为该运算的 **零元**。

- **【结合律】**：对于任意 $x, y, z \in A$ ，均有 $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.

• 设运算 \star 满足结合律，则可定义多个元素间的运算例如 $x \star y \star z$ ，而不必担心运算的次序问题。

- **【交换律】**：对于任意 $x, y \in A$ ，均有 $x \star y = y \star x$.

设 \star 和 \diamond 是集合 A 上的两个运算。

- **【左分配律】**：对于任意 $x, y, z \in A$ ，均有 $x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z)$ 。此时称 \star 对 \diamond 满足左分配律。

- **【右分配律】**：对于任意 $x, y, z \in A$ ，均有 $(x \diamond y) \star z = (x \star z) \diamond (y \star z)$ 。此时称 \star 对 \diamond 满足右分配律。

- **【分配律】**： \star 对 \diamond 满足左分配律和右分配律，则称 \star 对 \diamond 满足分配律。



除交换律外，上述定义在做适当修改后，可延拓至更一般的“不同集合之间的运算”情形。

例 A.1.4. （复合映射的性质）“复合映射”可被视为映射之间的一种运算（准确地说，是从集合 $\mathcal{M}(A, B)$ 和集合 $\mathcal{M}(B, C)$ 到集合 $\mathcal{M}(A, C)$ 的一个运算）。此时有

- (1) 映射复合运算满足结合律：若 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ ，则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- (2) “恒等映射”是复合运算下的“单位元”：对于任意 $f : A \rightarrow B$ ，有

$$f \circ \text{Id}_A = f = \text{Id}_B \circ f.$$

- (3) “逆映射”是复合运算下的“逆元”：若 $f : A \rightarrow B$ 是双射，则

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_A, f \circ f^{-1} = \text{Id}_B.$$

一般而言，即使上述 A, B, C 都取成同一个集合，其复合运算也不满足交换律。

¶ 关系

关系是比映射更广泛的概念(从更加抽象的“范畴论”的角度来看,“关系”就是一般集合这个范畴里的“态射”):

定义 A.1.5. (关系)

对于任意集合 A 和 B , 称笛卡尔积 $A \times B$ 的每个子集 R 为集合 A 和 B 上的一个关系。

- 若 $A = B$, 则称 R 为集合 A 上的一个关系。
- 若 $(x, y) \in R$, 则称 x 和 y 有关系 R , 并记为 xRy .



例如,

- 任何一个映射 $f : A \rightarrow A$ 都等同于一个关系 $R_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ 。
- 对于 $A = \mathbb{R}$, 关系 $R_< = \{(x, y) \mid x < y\}$ 被称为 \mathbb{R} 的序关系。

练习 1. 设 R_1 是集合 A 和 B 上的一个关系, R_2 是集合 B 和 C 上的一个关系。定义它们的复合 $R_2 \circ R_1$ 为 A 和 C 上的如下关系

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, c) \mid \text{存在 } b \in B \text{ 使得 } aR_1b \text{ 且 } bR_2c\}.$$

求证: 关系的复合满足结合律, 即 $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$.

在后续课程中最常见的关系是序关系和等价关系。(本书中主要用到等价关系的概念)。因为它们非常特殊, 类似于运算, 我们通常用 \prec 表示序关系, 而用 \sim 表示等价关系:

定义 A.1.6. (序关系)

(1) 若集合 A 上的关系 \prec 满足

- (i) **非自反性**: $\forall x \in A$, 关系 $x \prec x$ 均不成立;
- (ii) **传递性**: $\forall x, y, z \in A$, 若 $x \prec y, y \prec z$, 则 $x \prec z$,
则称 \prec 为 X 上的一个偏序关系.

(2) 若偏序关系 \prec 还满足

- (iii) **可比性**: $\forall x \neq y \in A$, 要么 $x \prec y$, 要么 $y \prec x$.
则称 \prec 为 A 上的一个全序关系.



例如, 集合子集间的包含关系就是一个偏序关系。

下面给出“等价关系”的定义。

定义 A.1.7. (等价关系)

若集合 A 上的关系 \sim 满足如下三条:

- (i) **自反性**: $\forall x \in A$, 均有 $x \sim x$;
- (ii) **对称性**: $\forall x, y \in A$, 若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- (iii) **传递性**: $\forall x, y, z \in A$, 若 $x \sim y, y \sim z$, 则 $x \sim z$,
则称 R 为 X 上的一个等价关系. 此时, 把 xRy 记为 $x \stackrel{R}{\sim} y$, 或者(在不至于引起混淆的情况下)简记为 $x \sim y$.



等价关系的例子非常多，例如数论中的同余，几何中的全等、相似，分析中的“等价 Cauchy 列”等，线性代数中的相似、相抵、相合等。

给定集合上的一个等价关系，就可以将元素按照“是否等价”进行分类：

定义 A.1.8. (等价类、商集与商映射)

设 R 是集合 A 上的一个等价关系。

- (1) 对于任意 $x \in A$ ，称

$$[x] := \{y \in A \mid x \sim^R y\}$$

为元素 x 所在的等价类。等价类 $[x]$ 中的任意元素均被称为 $[x]$ 的代表元。

- (2) 称所有等价类的集合

$$A/R = A/\sim^R := \{[x] \mid x \in A\}.$$

为集合 A 关于该等价关系的商集。

- (3) 称映射 (它是满射)

$$\pi : X \rightarrow X/\sim^R, \quad x \mapsto [x]$$

为自然映射或商映射。



注意元素的等价类并不是元素，而是子集。不同的等价类不相交。

跟等价关系密切相关的是“集合的划分”这个概念：

定义 A.1.9. (划分)

设 A 为集合， $\{A_i\}_{i \in I}$ 为 A 中的一族子集 (即 $\forall i \in I, A_i \subset A$)，满足

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \quad \text{且} \quad A = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

则称 $\{A_i\}_{i \in I}$ 为 A 的一个划分或分拆，并记为 $X = \coprod_{i \in I} X_i$ 。



定理 A.1.10. (等价关系基本定理)

集合 A 上的等价关系一一对应于集合 A 的划分。具体而言：

- (1) 若 R 是 A 上的一个等价关系，则商集 $\{[x]\}$ 是 A 的一个划分；
- (2) 若 $\{A_i\}_{i \in I}$ 为 A 的一个划分，则 $x \sim y \iff \exists i$ 使得 $x, y \in A_i$ 是 A 上的一个等价关系；
- (3) 上述过程互逆：记由 (1) 给出的“等价关系 R 对应的划分”为 $\mathcal{P}(R)$ ，记由 (2) 给出的“划分 P 对应的等价关系”为 $\mathcal{R}(P)$ ，则 $\mathcal{R}(\mathcal{P}(R)) = R, \mathcal{P}(\mathcal{R}(P)) = P$ 。



在具体运用中，我们往往需要利用 A 上的映射 $f : A \rightarrow B$ 定义商空间 A/\sim^R 上的映射 $\bar{f} : A/\sim^R \rightarrow B$ 。此时非常重要的事情是验证映射 \bar{f} 的良定性，即“其取值跟代表元选取无关”：

当且仅当对于任意 $x \sim y$ ，均有 $f(x) = f(y)$ ，才可自然定义 $\bar{f}([x]) := f(x)$ 。

A.2 群的概念

¶ 群

群是最基本的代数对象之一，并已经被数学的各个分支作为（描述特定类型“对称性”的）基本语言使用。

定义 A.2.1. (群)

(1) 设非空集合 G 上有一个二元运算 $\cdot : G \times G \rightarrow G$, 满足

- (结合律) 对于任意 $a, b, c \in G$, 都有

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

- (单位元) 存在元素 $e \in G$, 使得对任意 $a \in G$, 均有

$$e \cdot a = a \cdot e = a.$$

- (逆元) 对于任意元素 $a \in G$, 均存在元素 $b \in G$ 使得

$$ab = ba = e.$$

则称 (G, \cdot) 为一个群, 称 e 为该群的单位元。在不引起混淆的情况下, 我们往往省略 \cdot , 记 $a \cdot b$ 为 ab , 并记 (G, \cdot) 为 G .

(2) 若 G 是一个群, 且群运算满足交换律, 即对任意 $a, b \in G$ 均有 $ab = ba$, 则称 G 为一个阿贝尔群或交换群。



注 A.2.2. 很容易证明,

- 单位元一定唯一 (这个性质是定义“逆元”时的前提)。
- 每个元素的逆元一定唯一。一般把 a 的逆元记为 a^{-1} 。注意总有

- $e^{-1} = e$.
- $(a^{-1})^{-1} = a$.
- $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

- 群运算具有消去律: 若 $ab = ac$, 则 $b = c$; 若 $ba = ca$, 则 $b = c$.

练习 1.

- (1) 写出所有仅仅包含两个元素或三个元素的群, 并说明它们都是交换群。
- (2) 写出一个包含四个元素的非交换群。

例 A.2.3. (变换群)

对于任意非空集合 A , 设由某些映射 $f : A \rightarrow A$ 所组成的集合 $G \subset \mathcal{M}(A, A)$ 满足

- (1) G 关于映射的复合是封闭的: 若 $f, g \in G$, 则 $f \circ g \in G$;
- (2) G 包含恒等映射 Id ;
- (3) G 中的映射都可逆: 若 $f : A \rightarrow A$ 是 G 中的元素, 则 f 是可逆映射, 且 $f^{-1} \in G$, 则可证明 (G, \circ) (即在“映射复合”运算下) 构成群。我们把这样的群叫做 A 上的变换群。

显然, 仅含恒等映射的群是最小的 (变换) 群, 被称为平凡群。另一方面, 从 A 到自身的所有可逆变换组成的集合也是 A 的一个变换群, 而且它是 A 上最大的变换群, 被

称为**对称群**。当然，在几何中，这样由所有可逆映射所组成的群往往因为太大而不具有太大的研究意义。在本课程中，我们主要考虑由“保持特定性质的可逆变换”组成的变换群。

例 A.2.4. (对称群 S_n)

当 A 是仅含 n 个元素的有限集合时，它的对称群被称为 n 元对称群，并被记作 S_n 。该群在群论中扮演了非常重要的角色。对称群 S_n 中有一些特殊的元素，即仅“对换 A 中某两个元素”的变换，这些变换被称为**对换**。可以证明：

- S_n 中任意元素均可写成若干个对换的复合。
- S_n 中元素“写成若干个对换的复合”时，虽然方式不唯一，但其对换个数的奇偶性是不变的。

因此，对于 $\sigma \in S_n$ ，若 σ 可写成奇数个对换的复合，则称 σ 为一个**奇置换**；若 σ 可写成偶数个对换的复合，则称 σ 为一个**偶置换**。

对于群 G 的任意两个子集 S 和 T ，记它们的“乘积”为

$$ST = \{st \mid s \in S, t \in T\}.$$

对于任意正整数 n ，记 g^n 为 n 个 g 的乘积，记 S^n 为 n 个 S 的乘积。（注意 S^n 并不是由全部形如 $s^n (s \in S)$ 的元素组成的集合。）

注意，上述“乘积”的概念不同于下面两个群的直积的概念：

定义 A.2.5. (群的直积)

设 G_1, G_2 是群，在笛卡尔积 $G_1 \times G_2$ 上定义运算

$$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1g'_1, g_2g'_2),$$

则 $(G_1 \times G_2, \cdot)$ 是一个群，称为 G_1 与 G_2 的**直积**。



另外，对于阿贝尔群，有时候我们会把群运算写作 $+$ 并称之为加法群，并把加法群下一个元素 a 的逆元称为它的**负元**，记作 $-a$ 。

¶ 子群与商群

定义 A.2.6. (子群)

设 (G, \cdot) 是一个群。若 G 的非空子集 H 在运算 \cdot 下也构成一个群，则称 H 为 G 的一个**子群**。



注意

- (1) 在定义群的时候，隐含地要求运算是封闭的。在验证一个子集是子群时，需要验证运算的封闭性。
- (2) 因为子群的运算是继承自原有的群，故不再需要验证结合律。
- (3) 子群 H 的单位元一定是群 G 的单位元。子群 H 中元素的逆元也一定它在群 G 的逆元。

显然，平凡群是任意群的子群。

练习 2. 设 H 是 G 的子群。在 G 中定义

$$g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in H.$$

- (1) 证明: $g_1 \sim g_2 \iff g_1H = g_2H$.
- (2) 证明: \sim 是 G 上的一个等价关系。
- (3) 即该等价关系诱导的商空间为 G/H . 在 G/H 上定义运算 $[g_1][g_2] := [g_1g_2]$ (即 $(g_1H) \cdot (g_2H) := g_1g_2H$). 这个运算是良定的吗?
- (4) 证明: 若对于任意 $g \in G$, 子群 H 满足条件 $gH = Hg$, 则 (3) 中定义的运算不仅是良定的, 而且满足群运算的定义。

定义 A.2.7. (正规子群与商群)

- (1) 若 G 的子群 H 满足

$$gH = Hg, \forall g \in G,$$

则称 H 为 G 的一个正规子群。

- (2) 若 H 是 G 的正规子群, 则称 G/H (赋予上述习题中所描述的运算) 为 G 关于 H 的商群。



¶ 群同态与群同构

群是具有特定运算的集合。在考虑群之间的映射时, 首先要考虑的自然是保持该运算的映射。

定义 A.2.8. (群同态与群同构)

设 G_1, G_2 是群, $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ 是映射。

- (1) 若 φ 保持群运算, 即

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h), \quad \forall g, h \in G_1,$$

则称 φ 是一个群同态。

- (2) 若群同态 φ 是单射, 则称 φ 为单同态; 若群同态 φ 是满射, 则称 φ 为满同态。

- (3) 若 φ 是可逆的群同态, 则称 φ 为群同构。此时我们称 G_1 与 G_2 是同构的群。



最简单的群同态是平凡同态, 即将 G_1 中任意元素均映为 G_2 中单位元的映射。

注意根据定义,

- (1) 若 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ 是群同构, 则 $\varphi^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$ 也是群同构。
- (2) 若 $\varphi_1: G_1 \rightarrow G_2, \varphi_2: G_2 \rightarrow G_3$ 是群同构, 则 $\varphi_2 \circ \varphi_1: G_1 \rightarrow G_3$ 也是群同构。

特别地, 对于任意一个群 G , 所有从群 G 到自身的群同构

$$\text{Aut}(G) = \{\varphi: G \rightarrow G \mid \varphi \text{ 是一个群同构}\}$$

是一个群, 被称为群 G 的自同构群。

设 $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ 是群同态。我们称

$$\text{Im}(\phi) = \phi(G_1) := \{\phi(g) \mid g \in G_1\} \subset G_2$$

为同态 ϕ 的像，称

$$\text{Ker}(\phi) = \phi^{-1}(e) := \{g \mid \phi(g) = e\} \subset G_1$$

为同态 ϕ 的核。

像与核是研究群同态(以及进一步研究群结构)的利器。

命题 A.2.9. (像与核的性质)

若 $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ 是群同态，则

- (1) $\text{Im}(\phi)$ 是 G_2 的子群。
- (2) ϕ 是单同态当且仅当 $\text{Ker}(\phi) = \{e\}$ 。
- (3) $\text{Ker}(\phi)$ 是 G_1 的正规子群。
- (4) (群同构基本定理) 商群 $G_1/\text{Ker}(\phi)$ 同构于 G_2 的子群 $\text{Im}(\phi)$ 。



注 A.2.10. 若将群同态/群同构定义中的条件 $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ 改为

$$\phi(gh) = \phi(h)\phi(g), \quad \forall g, h \in G_1,$$

则称 ϕ 为反同态/反同构。例如，任何群 G 到自身的“取逆映射”

$$\text{inv} : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

就是群 G 到自身的一个反同构。

练习 3. (半直积)

设 G 是一个群， H 是 G 的自同构群 $\text{Aut}(G)$ 的一个子群。在集合 $H \times G$ 上定义运算

$$(h_1, g_1) \star (h_2, g_2) = (h_1 h_2, h_1(g_2)g_1).$$

- (1) 证明运算 \star 是群运算。群 $(H \times G, \star)$ 被称为 H 与 G 的半直积，记为 $H \ltimes G$ 。
- (2) 证明正文中的刚体变换群同构于 $SO(2) \ltimes \mathbb{E}^2$ ，即 $SO(2)$ 与 \mathbb{E}^2 (视为加法群) 的半直积。
- (3) 类似地，将正文中的欧氏群、相似群、仿射群都写成半直积的形式。

A.3 向量空间

¶ 向量空间

为了简单起见，我们仅考虑 \mathbb{R} 上的向量空间。(类似地，可考虑复数域 \mathbb{C} 或者一般的数域 \mathbb{F} 上的向量空间)

定义 A.3.1. (向量空间)

设 V 是一个非空集合，且被赋予了两个运算，即“加法”

$$+: V \times V \rightarrow V, (u, v) \mapsto u + v$$

与“数乘”

$$m: \mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, u) \mapsto \lambda u,$$

使得

(1) $(V, +)$ 是一个阿贝尔群，即

- ① (结合律) 对任意 u, v, w , 均有 $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- ② (零元) 存在元素 $0 \in V$ 使得对于任意 $u \in V$, $0 + u = u = u + 0$;
- ③ (逆元) 对于任意 $u \in V$, 存在 $v \in V$ 使得 $u + v = 0$;
- ④ (交换律) 对任意 $u, v \in V$, 均有 $u + v = v + u$;

(2) 数乘满足

- ⑤ (相容性) 对任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 以及 $u \in V$, 有 $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$;
- ⑥ (单位元) 对任意 $u \in V$, 有 $1u = u$;
- ⑦ (数乘对实数加法分配律) 对任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 以及 $u \in V$,

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u,$$

- ⑧ (数乘对向量加法分配律) 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及 $u, v \in V$, 有

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v,$$

则称 V 是一个**向量空间或线性空间**，并称 V 中的元素为**向量**。



向量空间是现代数学中最基本的研究对象。例如，平面向量或空间向量的集合构成一个向量空间，所有 $m \times n$ 矩阵的集合也构成向量空间。除此之外，还有很多各种各样的向量空间。

下述定义是自然的：

定义 A.3.2. (子空间)

设 V 是向量空间。若 V 的非空子集 W 在 V 的加法、数乘运算下是向量空间，则称 W 是 V 的**向量(或线性)子空间**。



不难验证， W 是 V 的子空间当且仅当 W 对加法和数乘封闭，即满足

- (1) 对任意 $w_1, w_2 \in W$, 总有 $w_1 + w_2 \in W$;
- (2) 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}, w \in W$, 总有 $\lambda w \in W$.

定义 A.3.3. (线性组合, 基)

设 V 是向量空间。

- (1) 若 $v, v_1, \dots, v_k \in V$, 且存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k,$$

则称 v 为 v_1, \dots, v_k 的**线性组合**。

- (2) 若 $v_1, \dots, v_k \in V$, 且存在不全为零的 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0,$$

则称 v_1, v_2, \dots, v_k 是**线性相关的**。

- (3) 若 V 中的一组向量 $\{v_i\}_{i \in I}$ (可能有限, 也可能无限) 的任意有限子集都不是线性相关的, 则称它是**线性无关的**。
 (4) 若 V 中的一组向量 $\{v_i\}_{i \in I}$ 是线性无关的, 且 V 中任意向量可写成 $\{v_i\}_{i \in I}$ 中有限个向量的线性组合, 则称 $\{v_i\}_{i \in I}$ 为向量空间 V 的一组**基**, 基中元素个数称为 V 的**维数**.

**注 A.3.4.**

- 利用佐恩引理 (选择公理的等价形式), 可以证明任意向量空间都存在基。
- 任意向量空间的任何两组基, 其元素个数 (或者“势”) 是相同的。
- 在线性代数里, 主要学习有限维线性空间的理论; 而在泛函分析中, 则主要学习无限维线性空间的理论。

¶ 线性映射

在向量空间之间, 最重要的映射是线性映射, 即“保持线性结构”的映射:

定义 A.3.5. (线性映射)

设 V_1, V_2 是两个线性空间, 若映射 $L : V_1 \rightarrow V_2$ 满足

1. (保加法) 对任意 $u, v \in V_1$, 有 $L(u + v) = L(u) + L(v)$;
2. (保数乘) 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}, u \in V_1$, 有 $L(\lambda u) = \lambda L(u)$;

则称 L 为一个**线性映射**.



线性空间到自身的线性映射被称为**线性变换**。(注意: 线性变换未必是可逆的, 因而它并不一定是本书前文中提到的“变换”。)

如果把线性空间视作加法群, 则线性映射的“保加法性”说明它是群同态。于是跟群同态的情形类似, 我们称

$$\text{Ker}(L) = \{v \in V_1 \mid L(v) = 0\}$$

为线性映射 $L : V_1 \rightarrow V_2$ 的核。

不难验证,

- (1) 任何两个线性映射的复合依然是线性映射.
- (2) 任何线性映射 $L : V_1 \rightarrow V_2$ 的核是 V_1 的线性子空间。

(3) 任何线性映射 $L : V_1 \rightarrow V_2$ 的像集是 V_2 的线性子空间。

定义 A.3.6. (线性同构)

设 V_1, V_2 是两个向量空间, $L : V_1 \rightarrow V_2$ 是线性映射。若 L 是可逆的, 则称 L 为**线性同构**。此时称 V_1 和 V_2 为**同构的向量空间**。

不难证明, 同构的向量空间具有相同的维数。事实上, 反过来也成立: 任何两个具有相同维数的向量空间都是同构的。

此外,

- 线性同构的逆映射也是线性同构;
- 线性同构的复合也是线性同构;

由此可知向量空间 V 到自身的所有线性同构

$$\text{Aut}(V) := \{L : V \rightarrow V \mid L \text{是线性同构}\}$$

是一个群。对于 n 维线性空间, 这个群跟由所有 $n \times n$ 可逆矩阵组成的一般线性群 $GL(n)$ 是同构的。

¶ 内积与范数

对于向量空间, 除了线性结构外, 还可以考虑一些自然附加的别的结构。

定义 A.3.7. (范数)

设 V 是向量空间。若 V 上的一个函数

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

满足

- (1) (正定性) 对于任意 $v \in V$, 有 $\|v\| \geq 0$; 且 $\|v\| = 0 \iff v = 0$;
- (2) (正齐次性) 对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及 $v \in V$, 均有 $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \|v\|$;
- (3) (三角不等式) 对于任意 $u, v \in V$, 均有 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,

则称 $\|\cdot\|$ 为 V 上的一个范数, 而称 $(V, \|\cdot\|)$ 为一个**赋范空间**。

范数结构给出了“向量长度”的抽象化。它跟数学中另一个结构即度量结构密切相关, 后者是“两点之间的距离”的抽象化:

定义 A.3.8. (度量)

设 S 是一个集合。若 S 上的二元函数

$$d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$$

满足

- (1) (正定性) 对于任意 $u, v \in V$, 有 $d(u, v) \geq 0$; 且 $d(u, v) = 0 \iff u = v$;
- (2) (对称性) 对于任意 $u, v \in V$, 有 $d(u, v) = d(v, u)$;
- (3) (三角不等式) 对于任意 $u, v, w \in V$, 均有 $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ 。

则称 d 是 V 上的一个**距离函数**或者**度量函数**, 并称 (S, d) 为一个**度量空间**.

注意，

- 对于任何赋范空间 $(V, \|\cdot\|)$ ，定义为 $d(u, v) := \|u - v\|$ ，则 d 是 V 上的一个度量。
(因此赋范空间自然是度量空间。)
- 赋范空间仅仅是定义在向量空间上的，而度量结构则可以定义在一般的集合上。度量空间不必是向量空间。

除了向量的长度外，还可以在抽象的向量空间里考虑“向量间的夹角”。为此我们需要

定义 A.3.9. (内积)

设 V 是向量空间。若 V 上的一个函数

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

满足

- (正定性) 对任意 $u \in V$ ，均有 $f(u, u) \geq 0$ ；且 $f(u, u) = 0 \iff u = 0$ ；
- (对称性) 对任意 $u, v \in V$ ，均有 $f(u, v) = f(v, u)$ ；
- (双线性性) 对任意 $u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ ，均有
 - $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w), f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w)$ ；
 - $f(\lambda u, v) = f(u, \lambda v) = \lambda f(u, v)$ ；

则称 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 V 上的一个内积，而称 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为一个内积空间.



练习 1. 对于内积空间 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ，定义

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle},$$

证明：

- (柯西-施瓦茨不等式) 对于任意 $u, v \in V$ ，有 $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ 。
- $\|\cdot\|$ 是 V 上的一个范数。(因此内积空间一定是赋范空间)

对于内积空间 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ，两个非零向量 u, v 之间的夹角被定义为

$$\arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

注意由柯西-施瓦茨不等式，上述定义是有意义的，且 u, v 夹角为直角当且仅当 $\langle u, v \rangle = 0$ 。

最后，我们定义

定义 A.3.10. (欧氏空间)

称赋有内积结构的有限维^a向量空间为欧氏空间。

^a此处我们不对“有限维”一词做进一步的解释，读者将会在线性代数课程深入学习相关的理论。



A.4 矩阵与行列式

¶ 矩阵

向量是数的自然推广，而矩阵则是向量的自然推广。

定义 A.4.1. (矩阵)

对于任意正整数 n, m ，称由 nm 个数依序排列而成的 n 行 m 列的数表

$$A = (a_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

为一个 $n \times m$ 矩阵。

- n 称为矩阵 A 的行数， m 称为矩阵 A 的列数，而第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 则称为 A 的 (i, j) -分量。
- 若 A 中所有分量都是实数，则称 A 为实矩阵。类似地可定义复矩阵或者“域 F 上的矩阵”等。
- 若 $m = n$ ，则称 A 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵，并称所有 a_{kk} 为其对角元。



所以 1×1 矩阵就是我们熟悉的数，而 1×2 或 1×3 矩阵即为 \mathbb{E}^2 或 \mathbb{E}^3 中的向量。我们将把 $1 \times n$ 矩阵称为行向量，而把 $n \times 1$ 矩阵称为列向量。我们将用 $M_{n \times m}$ 表示所有 $n \times m$ 矩阵的集合，并用 M_n 表示所有 n 阶方阵的集合。

我们称所有元素为 0 的矩阵为零矩阵，并简单地用 $0_{n \times m}$ 或 0 表示（于是 0 这个符号可以表示数字 0、零向量、零矩阵，需要依照具体情境具体分析）。此外，我们称对角元为 1、所有非对角元为 0 的方阵为单位阵，并用 I_n 表示 n 阶单位阵：

$$I_n = (\delta_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

显然，任意一个矩阵“翻转”一下依然是一个矩阵，不过行数和列数会对换：

定义 A.4.2. (矩阵转置)

对 $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}$ ，我们定义 A 的转置为

$$A^T = (a_{ji})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}.$$

若 $A \in M_n$ 是方阵且 $A = A^T$ ，则称 A 为对称阵。



¶ 矩阵运算

矩阵不仅是个记号。它事实上有着明确的几何意义，即在给定基的前提下，可用于表示线性空间之间的线性映射。进一步的，矩阵也可以进行加法和乘法运算，而它们表示的分别是线性映射的加法与线性映射的复合。

定义 A.4.3. (矩阵运算)

我们分别定义矩阵的两个运算如下：

- (1) (加法) 对于任意正整数 n, m ，两个 $n \times m$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times m}, B = (b_{ij})_{n \times m}$ 可以相加，其和是一个 $n \times m$ 矩阵，定义为

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m}$$

- (2) (乘法) 对于任意正整数 n, m, l ，一个 $n \times m$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times m}$ 与一个 $m \times l$ 矩阵 $B = (b_{jk})_{m \times l}$ 的积是一个 $n \times l$ 矩阵，定义为

$$AB = (c_{ik})_{n \times l}$$

其中

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq l$$



例 A.4.4.

- 1×1 矩阵与 $1 \times n$ 矩阵的乘法就是 \mathbb{R}^n 上数与向量的数乘运算。
- $1 \times n$ 与 $n \times 1$ 的矩阵乘法就是 \mathbb{E}^n 的标准内积：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = (x_1, x_2, x_3) \cdot (x'_1, x'_2, x'_3).$$

- 更一般地，对于任意 3×3 矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ ，

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_i x'_j.$$

注 A.4.5.

- (1) 矩阵加法是对两个相同规格的矩阵作运算，零矩阵是矩阵加法运算的零元，而任意矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times m}$ 的 加法逆元 为

$$-A = (-a_{ij})_{n \times m}.$$

矩阵加法是 \mathbb{R}^n 上向量加法的自然推广。

- (2) 矩阵还可以自然定义数乘运算，即对于 $A = (a_{ij})$ ，令 $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ 。从而所有 $n \times m$ 矩阵的集合 $M_{n \times m}$ 是一个向量空间。
- (3) 矩阵乘法中参与运算的左边矩阵的列数必须等于右边矩阵的行数。
- (4) n 阶方阵之间的乘法最有意思：任意两个 n 阶方阵均可相乘，而 n 阶单位阵 I_n 是 n 方阵乘法的单位元。

下述性质是非常常用的，且不难从定义直接验证：

命题 A.4.6. (转置矩阵的性质)

(1) 若 A 是 $n \times m$ 矩阵, B 是 $m \times l$ 矩阵, 则

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

(2) 若 A 是 n 阶方阵, 则对于任意列向量 $u, v \in \mathbb{E}^n$,

$$(Au) \cdot v = u \cdot (A^T v).$$



定义 A.4.7. (可逆矩阵)

若方阵 $A \in M_n$ 关于乘法可逆, 即存在 $B \in M_n$ 使得

$$AB = BA = I_n,$$

则称 A 为可逆矩阵, 称 B 为 A 的逆矩阵, 并记为 $B = A^{-1}$.



我们记

$$GL(n) = \{A \in M_n | A \text{ 为可逆矩阵}\}$$

不难验证 $GL(n)$ 关于矩阵乘法构成 (非交换) 群, 被称为一般线性群。其单位元是 I_n 。

¶ 行列式

在第二章中, 我们引入了有向面积、有向体积的概念, 行列式可以看成是他们在一般的欧氏空间中的推广。在多元微积分中还会学到, 行列式描述了线性变换对“体积”的影响, 因而也是多元积分理论的基石。行列式有多种定义, 下面是其“坐标代数定义”:

定义 A.4.8. (行列式)

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个 $n \times n$ 方阵, 则 A 的行列式定义为

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

其中当 σ 为奇置换时令 $(-1)^\sigma = -1$, 而当 σ 为偶置换时令 $(-1)^\sigma = 1$ (见例 A.2.4)。



方阵 A 的行列式往往用竖线表示:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

例如, 对于 2 阶方阵, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

对于 3 阶方阵，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

一般地，对于 n 阶方阵 A ，可以按照任意一行或者一列做如下展开，递归地计算：

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^n (-1)^i a_{ij} \det A_{ij} && \text{按照第 } j \text{ 列展开} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^j a_{ij} \det A_{ij} && \text{按照第 } i \text{ 行展开} \end{aligned}$$

其中 A_{ij} 表示从 A 中删去第 i 行以及第 j 列所得的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵。

下述性质是行列式的一个刻画（或者说是等价的“几何定义”）：

定理 A.4.9. (行列式的刻画)

视行列式函数为 n 个列向量的函数，

$$\det : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \times \cdots \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto \det(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

则它满足如下性质：

(1) (归一化) 记第 i 个坐标为 1、其余坐标为 0 的列向量为 e_i ，则

$$\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1.$$

(2) (反交换性) 对换任意两列则改变符号，即对任意 $1 \leq i \neq j \leq n$ ，有

$$\det(\dots, e_i, \dots, e_j, \dots) = -\det(\dots, e_j, \dots, e_i, \dots).$$

(3) (多重线性性) 对任意 i ，以及任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ，均有

$$\det(\dots, \lambda u_i + \mu v_i, \dots) = \lambda \det(\dots, u_i, \dots) + \mu \det(\dots, v_i, \dots).$$

反之，若一个函数 $F : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \times \cdots \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以上三条，则它就是上述“行列式函数”。 ♡

从定义不难验证

$$(1) \det A = \det A^T.$$

$$(2) \det(AB) = \det A \det B.$$

$$(3) \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

由 (2)(3) 以及归一性可知，函数

$$\det : \mathrm{GL}(n) \rightarrow \mathbb{R}^*$$

是从“一般线性群 $\mathrm{GL}(n)$ ”到“非零实数乘法群 \mathbb{R}^* ”的一个群同态。特别地，它的核

$$\mathrm{SL}(n) = \{A \in M_n \mid \det A = 1\}$$

是一般线性群的一个子群，称为**特殊线性群**。

行列式起源于解方程¹:

命题 A.4.10. (行列式与方程组解的存在唯一性)

线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array} \right.$$

具有唯一解当且仅当其系数矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的行列式非零。



作为推论, 行列式可以用于判定矩阵的可逆性:

命题 A.4.11. (行列式与可逆性)

n 阶矩阵 $A \in M(n)$ 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$.



¶ 正交阵与对称矩阵的正交对角化

定义 A.4.12. (正交阵)

- (1) 若 n 阶实方阵 A 满足 $AA^T = I_n$, 则称 A 为 n 阶正交阵。
- (2) 若 A 是 n 阶正交阵且 $\det A = 1$, 则称 A 为 n 阶特殊正交阵.



注意由行列式的性质可知,

- n 阶正交阵的行列式 $\det A = \pm 1$ 。
- n 阶正交阵的任意行向量长度为 1, 任意列向量长度也为 1。
- n 阶正交阵的任意两行行向量正交, 任意两列列向量也为正交。

不难验证, n 阶正交阵构成 $GL(n)$ 的一个子群, 称为 n 阶正交群, 记为 $O(n)$, 而 n 阶特殊正交阵则构成更小的子群, 称为 n 阶特殊正交群, 记为 $SO(n)$.

命题 A.4.13. (对称矩阵的正交对角化)

令 $C \in M_n(\mathbb{R})$ 为对称阵, 则必存在特殊正交方阵 $O \in SO_n(\mathbb{R})$ (即 $OO^T = I$ 且 $\det O = 1$), 使得

$$OCO^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \in \mathbb{R}$, 且这些 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是由 C 唯一确定的 (即跟 A 的选取无关).



¹ 虽然从逻辑上看, 矩阵的概念应该先于行列式, 但在实际的历史上则恰好相反。事实上早在《九章算术》中就已经有了用行列式方法解线性方程组的雏形。后来到 1683 年, 日本数学家关孝和 (1642-1708) 在中国古代数学的基础上, 首次引入了“行列式”的概念。1693 年德国数学家莱布尼兹在研究线性方程组求解方法时也独立引入了行列式。行列式的英文 “determinant” 的本义就是它 “决定” 了方程是否有唯一解。

注意若记 $A^T = (v_1, \dots, v_n)$, 其中 v_1, \dots, v_n 是列向量, 则上述命题中的结论等价于

$$C(v_1, \dots, v_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n).$$

一般地,

定义 A.4.14. (特征值)

设 A 是 n 阶方阵, 若存在非零向量 v 使得

$$Av = \lambda v,$$

则称 λ 是 A 的一个**特征值**, v 是矩阵 A 的对应于特征值 λ 的一个**特征向量**。 

于是命题A.4.13中的 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 都是矩阵 C 的特征值, 而特殊正交阵矩阵 O 的列向量则是对应的特征向量。

练习 1. 对于任意 n 阶方阵 A , 利用命题A.4.10(线性方程组解的存在唯一性判别准则) 证明: λ 是 A 的特征值当且仅当 $\det(A - \lambda I) = 0$.

注意到方程

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

是关于 λ 的 n 次方程, 从而根据代数基本定理, 该方程在复数域上恰好有 n 个解 (含重根), 从而任意 n 阶方阵 A 在复数域上恰好有 n 个特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。再由韦达定理, 可以得到

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr}(A),$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det(A),$$

其中 $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ 被称作矩阵 A 的**迹**.

一般而言, 这些特征值未必是实数, 特征向量也未必是实向量, 而且即使特征向量是实向量, 也未必相互正交。由此可见, 实对称阵不仅仅形式上特殊, 而且对应的线性变换也具有非常特殊的几何性质。

注 A.4.15. 按照本书正文中的逻辑思路, 考虑向量空间 $M(n)$ 。对于任意 $A \in \text{GL}(n)$, 考虑 $M(n)$ 上的变换

$$f_A : M(n) \rightarrow M(n), \quad X \mapsto AXA^{-1}.$$

通过这种方式, 可以视一般线性群 $\text{GL}(n)$ 为 $M(n)$ 的一个变换群, 此时特征值 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 都是这个变换群的不变量。

索 引

- (i, j)-分量, 192
 S -点, 51
 S -直线, 51
 S -线段, 51
 S 介于, 51
 d 次射影曲线, 156
 d 次曲线, 156
 n 阶射影平面, 158
 n 阶方阵, 192
 n 阶正交阵, 196
 n 阶特殊正交阵, 196
 n 阶矩阵, 192
 $n \times m$ 矩阵, 192
(, 70
(广义) 射影平面, 158
BAC-CAB 恒等式, 43
【交换律】 , 181
【分配律】 , 181
【单位元律】 , 181
【右分配律】 , 181
【左分配律】 , 181
【结合律】 , 181
【零元律】 , 181
一般位置, 134
一般方程, 69
一般线性群, 117, 194
三维欧氏空间, 40
三阶特殊正交群, 87
不连通, 164
中点, 19
二元运算, 180
二次曲线, 128
二次曲面, 77
二次曲面方程的标准形式, 95
二阶行列式, 44
亏格, 171
交换群, 184
交比, 140, 147
介于, 53
代表元, 183
仿射变换, 91, 118
仿射变换群, 118
传递性, 182
余维数, 74
偏序关系, 182
偶置换, 185
像, 187
克莱因瓶, 174
全序关系, 182
全等, 18
关系, 182
关联公理, 14
内心, 62
内积, 36, 191
内积空间, 191
几何变换, 80
凸多面体, 166
分式线性变换, 139
分拆, 183
划分, 183
列向量, 192
列数, 192
刚体变换, 82
刚体变换群, 82
加法, 31
加法逆元, 193
半平面, 17
半直积, 187
半空间, 17
单位元, 181, 184
单位正交基, 38

- 单位阵, 192
 单侧曲面, 173
 单叶双曲面, 77
 单同态, 186
 单连通, 165
 参数方程, 68, 72
 参数方程的向量形式, 68
 叉积, 42
 双侧曲面, 173
 双叶双曲面, 77
 双曲抛物面, 78
 双曲柱面, 78
 反同态, 187
 反同构, 187
 反射变换, 26
 反射轴, 26
 反演变换, 161
 变换, 80
 变换群, 184
 可公度, 21
 可比性, 182
 可逆矩阵, 194
 右手系, 42
 右手螺旋法则, 41
 合同, 54
 同侧, 16
 同构的, 186, 190
 同胚, 162
 同胚的, 162
 向量, 27, 188
 向量积, 42
 向量空间, 188
 和, 193
 商映射, 183
 商群, 186
 商集, 89, 183
 图, 178
 坐标齐次化, 128
 垂心, 62
 基, 189
 基本群, 165
 处于一般位置, 136
 复合, 182
 复合映射, 180
 复射影空间, 130
 复矩阵, 192
 外积, 42
 多面体, 166
 夹角, 47, 191
 奇置换, 185
 子空间, 188
 子群, 185
 完全四点形, 151
 完全四边形, 153
 实射影平面, 90
 实矩阵, 192
 对偶三角形, 50
 对偶多面体, 169
 对换, 185
 对称性, 182
 对称群, 185
 对称阵, 192
 对角元, 192
 对角线, 153
 对边, 151
 对边点, 151
 对顶点, 153
 封闭性, 181
 射影化, 128, 157
 射影参数化, 143
 射影变换, 133
 射影变换群, 134
 射影坐标映射, 143
 射影平面, 124
 射影直线, 123
 射线, 17

- 帕施公理, 15
 带边曲面, 170
 平凡同态, 186
 平凡群, 184
 平移不变性, 81
 平移变换, 28
 平移向量, 28
 平行公理, 18
 平行线, 18
 序关系, 182
 度量空间, 190
 异侧, 16
 恒等映射, 180
 抛物柱面, 78
 拉格朗日恒等式, 43
 拓扑不变量, 164
 拓扑变换, 161
 拓扑性质, 164
 数乘, 32, 193
 数量积, 36
 方向, 27
 方向向量, 37
 旋转中心, 60
 旋转变换, 60
 无穷远直线, 126
 既约形式, 72
 曲面, 170
 有向体积, 45
 有向面积, 44
 有效方程, 74
 有限射影平面, 158
 极化, 35
 极化恒等式, 37
 柯西刚性定理, 169
 核, 187, 189
 椭圆抛物面, 78
 椭圆柱面, 78
 椭圆锥面, 77
 椭球面, 77
 欧几里得公理, 12
 欧几里得公设, 12
 欧拉示性数, 167, 172
 欧氏空间, 191
 欧氏群, 115
 正多面体, 166
 正定向, 42
 正规子群, 120, 186
 法向量, 70
 法诺平面, 158
 测地线, 47
 消去律, 184
 混合积, 45
 满同态, 186
 点积, 36
 特征值, 197
 特征向量, 197
 特殊欧式群, 113
 特殊线性群, 195
 球面三角形余弦定理, 50
 球面三角形正弦定理, 50
 球面二角形, 48
 球面多边形, 48
 直积, 185
 直纹面, 107
 直线, 125
 直线一般方程的既约形式, 74
 直线完备公理, 18
 直线的一般方程, 73
 直角, 20
 积, 193
 笛卡尔积, 180
 等价关系, 88, 182
 等价类, 89, 183
 等距变换, 82
 等距变换群, 82
 简单多面体, 168

- 紧致曲面, 170
 紧致集合, 164
 紧集, 164
 线性变换, 189
 线性同构, 190
 线性无关, 189
 线性映射, 189
 线性相关, 189
 线性空间, 188
 线性组合, 189
 线段, 15
 维数, 189
 群, 11, 184
 群同态, 186
 群同构, 186
 自反性, 182
 自同构群, 186
 自然映射, 183
 范数, 190
 莫比乌斯带, 174
 行列式, 194
 行向量, 192
 行数, 192
 角, 17
 调和四点组, 159
 负元, 185
 赋范空间, 190
 距离函数, 190
 轨道, 90
 转置, 192
 边, 151, 153, 178
 迁移, 17
 连续公理, 18
 连续映射, 162
 连通, 164
 连通分支数, 164
 连通和, 174
 连通图, 178
 迹, 197
 逆元, 181
 逆映射, 180
 逆矩阵, 194
 透视中心, 142
 透视投影, 142
 重心, 62
 阿基米德公理, 18
 阿贝尔群, 184
 雅可比恒等式, 43
 零元, 181
 零向量, 27
 零矩阵, 192
 非自反性, 182
 顶点, 151, 153, 178
 顺序公理, 15
 马鞍面, 78
 黄金分割点, 21
 齐次坐标, 123, 124

参考文献

- [1] 大卫 • 希尔伯特 (著), 江泽涵、朱鼎勋 (译) . 希尔伯特几何基础 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2010.
- [2] 项武义, 王申怀, 潘养廉. 古典几何学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [3] 卡尔 • 博耶 (著), 尤塔 • 梅兹巴赫 (修订), 秦传安 (译) . 数学史 (上、下) [M]. 北京: 中央编译出版社, 2012.
- [4] 莫里斯 • 克莱因 (著), 张理京, 张锦炎, 江泽涵等 (译) . 古今数学思想 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2020.
- [5] F• 克莱因 (著), 陈光还, 徐佩 (译) . 克莱因数学讲座 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [6] 欧几里得 (著), 兰纪正, 朱恩宽 (译) . 几何原本 [M]. 南京: 译林出版社, 2014.
- [7] 吴光磊, 田畴. 解析几何简明教程 (第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [8] 梅向明, 刘增贤, 王汇淳, 王智秋. 高等几何 (第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [9] 项武义. 基础几何学 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2004.
- [10] 郑崇友, 王汇淳, 侯忠义, 王智秋. 几何学引论 (第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [11] 黄宣国. 空间解析几何 (第二版) [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2019.
- [12] 廖华奎王宝富. 解析几何教程 (第三版) [M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [13] 王敬庚. 直观拓扑 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2008.
- [14] R• 柯朗, H• 罗宾 (著), I• 斯图尔特 (修订), 左平, 张饴慈 (译) . 什么是数学 (增订版) [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2005.