

# 研究生资格考试考试大纲

(2024 版)

## 一、代数类

### 1. 抽象代数 II (新版)

#### a) 群

- (i) 群, 子群, 正规子群, 商群; 同态与同构, 同态定理与同构定理
- (ii) 群例: 循环群, 二面体群, 四元数群, 置换群, 线性群,  $A_n$ ,  $S_n$
- (iii) 自由群, 生成元与定义关系
- (iv) 群在集合上的作用; Sylow 定理和 Sylow 子群
- (v) Jordan-Holder 定理, 直积分解定理
- (vi) 可解群
- (vii) 特殊线性群和射影线性群的单性 (不要求证明)
- (viii) 空间上的型与典型群
- (ix) 辛群

#### b) 域

- (i) 有限扩张, 扩张次数乘积公式
- (ii) 多项式的分裂域, 正规扩张
- (iii) 可分扩张
- (iv) 单扩张定理
- (v) Galois 基本定理, 简单的 Galois 扩张
- (vi) 用根式解方程的判别准则
- (vii) 有限域

#### c) 环与代数

- (i) 环, 子环, 理想, 商环; 同态与同构, 同态定理与同构定理
- (ii) 环的直和
- (iii) 素理想和极大理想
- (iv) 环的整除性理论, 唯一分解环, 主理想整环, 欧几里得环
- (v) 整环的分式域
- (vi) 交换环上的多项式环, Gauss 引理
- (vii) 形式幂级数环

(viii) 四元数体

## d) 模

- (i) 模, 子模, 商模; 模同态与同构, 模同态定理与同构定理
- (ii) 模的自同态环
- (iii) 模的直和与直积
- (iv) 自由模
- (v) 模的不可分分解唯一定理
- (vi) 不可分解模的自同态环的结构
- (vii) 模的张量积
- (viii) 主理想整环上的有限生成模的结构定理

## 参考书目:

- 【1】 聂灵沼, 丁石孙, 代数学引论, 高等教育出版社, 2007.
- 【2】 王杰, 典型群引论, 北京大学出版社, 2015.
- 【3】 章璞, 三角范畴与导出范畴, 科学出版社, 2015.
- 【4】 N. Jacobson, Basic Algebra I, II. San Francisco: W. H. Freeman and Company 1974.
- 【5】 T. Hungerford, Algebra. Springer-Verlag, New York, 1980.
- 【6】 S. Mac Lane, Categories for the working mathematician. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1998.
- 【7】 I. M. Isaacs, Finite group theory. Graduate Studies in Mathematics, 92. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

## 2. 有限域

### a) 有限域的结构与性质

- (i) 环与域, 域的构造
- (ii) 有限域的群结构 (加法、乘法)
- (iii) 极小多项式, 本原多项式
- (iv) 有限域的存在唯一性, 有限域的子域
- (v) 迹与范数, 二次方程的解
- (vi) 基, 对偶基, 正规基

### b) 有限域上的多项式

- (i) 分圆多项式
- (ii) 多项式分解的 Berlekamp 算法

- (iii) 多项式的阶
- (iv) 线性化多项式
- (v) 多项式方程, Chevalley 定理, 根寻找算法

### c) 不可约多项式

- (i) 有限域上不可约多项式的个数与判定
- (ii) 二项式的不可约判定准则
- (iii) 一些三项不可约多项式
- (iv) 多项式的合成
- (v) 递归构造
- (vi) 多项式的复合积与复合和

### d) 指数和

- (i) 交换群的特征
- (ii) Gauss 和, Jacobi 和
- (iii) Gauss 周期
- (iv) 分圆类与分圆数
- (v) 有限域上的多元二次方程解的个数

### e) 置换多项式

- (vi) 置换多项式的判别法
- (vii) 特殊类型的置换多项式, Dickson 多项式
- (viii) 线性化的置换多项式
- (ix) AGW 准则

### 参考书目:

- 【1】 R. Lidl and H. Niederreiter, Finite Fields, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 20, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- 【2】 Z. Wan, Finite Fields and Galois Rings, World Scientific, Singapore, 2012.
- 【3】 冯克勤、廖群英, 有限域及其应用, 大连理工大学出版社, 2011.

## 3. 同调代数

### a) 模理论

- (i) 自由模、投射模、内射模
- (ii) 主理想整环上的有限生成模的结构定理
- (iii) 模的正合列

- (iv) 蛇引理、五引理
- (v) 模的张量积
- (vi) Nakayama 引理

## b) Tor 和 Ext

- (i) 模的投射模消解和内射模消解
- (ii) 模的 Tor 和 Ext 的定义与长正合列
- (iii) 模的 Morita 扩张
- (iv) Koszul 解消
- (v) 群上同调

## c) 范畴论

- (i) 范畴、函子、自然变换
- (ii) 范畴等价
- (iii) 张量函子、Hom 函子、导出函子
- (iv) 函子的伴随对及其与等价的关系
- (v) Yoneda 引理
- (vi) 极限、余极限
- (vii) 复形范畴
- (viii) Morita 等价

## d) 导出范畴

- (i) 同伦等价
- (ii) 三角化范畴
- (iii) 导出范畴
- (vii) Leray-Serre 谱序列
- (viii) 滤链谱序列

## 参考书目：

- 【1】 C. Weibel, An Introduction to Homological Algebra.
- 【2】 P. Hilton and U. Stammbach, A Course in Homological Algebra, GTM 4, Springer Verlag.
- 【3】 S. I. Gelfand and Y. I. Manin, Methods of Homological Algebra, Springer Monographs in Mathematics.

## 4. 代数几何

### a) 代数簇

- (i) 仿射代数簇、射影代数簇、拟射影
- (ii) 希尔伯特零点定理
- (iii) Zariski 拓扑
- (iv) 有理映射, 有理函数, 函数域, Blow up 和万有性质, 双有理同构
- (v) 希尔伯特函数与希尔伯特多项式
- (vi) 非奇异代数簇

## b) 概型

- (i) 层和层的基本概念
- (ii) 仿射概型、概型和 fiber product
- (iii) 态射、Chevalley 定理
- (iv) 有限态射, 环的整扩张, going-up 定理, going-down 定理, 诺特正规化定理, 正规概型和正规化, Serre 的正规概型判别法
- (v) 概型的维数, 主理想定理, 超越维数和域扩张的超越度, 纤维维数的上半连续性
- (vi) Separated 和 proper 态射, 赋值判别法, Chow 引理
- (vii) 拟凝聚层和凝聚层, projection formula
- (viii) 除子和线丛, Picard 群
- (ix) 微分层

## c) 上同调

- (i) 层的上同调
- (ii) Čech 上同调
- (iii) 射影空间的上同调
- (iv) 射影空间上的 Serre 对偶定理
- (v) 曲线上的 Riemann-Roch 定理

## 参考书目:

- 【1】 R. Hartshorne, Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.  
Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. xvi+496 pp. ISBN: 0-387-90244-9
- 【2】 Shafarevich, Igor R. Basic algebraic geometry. 1. Varieties in projective space.  
Third edition. Translated from the 2007 third Russian edition. Springer, Heidelberg, 2013.  
xviii+310 pp. ISBN: 978-3-642-37955-0; 978-3-642-37956-7
- 【3】 R. Vakil, The Rising Seas.
- 【4】 Mumford, The Red Book of Algebraic Geometry.

## 5. 现代数论

## a) 代数整数环

- (i) 数域代数整数环定义
- (ii) 代数整数环是戴德金整环（含证明）
- (iii) 素理想唯一分解定理证明及应用
- (iv) 代数数域的 Different, Discriminant 的定义及基本性质
- (v) 代数整数环类数有限性定理及应用
- (vi) Dirichlet 单位定理及应用
- (vii) 数域扩张的分歧理论
- (viii) 数域 Galois 扩张的分歧理论包括 decomposition 子群, 惯性子群等的定义及性质

## b) 局部域理论

- (i)  $p$ -adic 数  $\mathbb{Q}_p$  定义及基本性质
- (ii)  $\mathbb{Q}_p$  的代数扩张基本性质以及分歧理论
- (iii) 局部域扩张的 different, Discriminant 定义及基本性质
- (iv) Hensel 引理及应用

## c) Adeles 及 Ideles

- (i) 数域的 places
- (ii) 关于 Discriminant, different 的局部整体一致性
- (iii) Adele, Ideles 基本定义及性质（包括对局部紧群有一定了解）
- (iv) Ideles 理想类群基本性质

## d) Zeta 函数初步

- (i) Riemann Zeta 函数的基本性质及解析延拓
- (ii) Dirichlet L-函数, Dedekind L-函数基本性质

## 参考书目:

【1】 Jurgen Neukirch, Algebraic Number Theory.

【2】 James Milne's course notes on algebraic number theory.

【3】 Roymar Sharifi, Algebraic Number Theory.

【4】 K. Kato, N. Kurokawa, T. Saito, Number Theory I （有胥鸣伟和印林生翻译的中文版）

## 二、几何类

### 1. 微分几何（50 分）

- a)  $R^3$  中曲面的第一, 二基本型及其性质;
- b) Gauss 映射;  $R^3$  中特殊曲面(常中曲率曲面, 常 Gauss 曲率曲面等)
- c)  $R^3$  中曲面的测地线;
- d) 紧表面上的 Gauss-Bonnet 公式

## 2. Riemann 几何(50 分)

- a) Riemann 流形上的联络和曲率的基本概念;
- b) 曲线长度的一阶, 二阶变分, Jacobi 场, 测地线及应用( Cartan-Hadamard 定理, Synge 定理等);
- c) 比较定理初步(Rauch 比较定理, Bonnet-Myers 定理);
- d) 紧表面上的 Gauss-Bonnet 公式;
- e) 微分形式及 Hodge 理论初步

## 3. 代数拓扑(50 分)

- a) 基本群
- b) 覆盖空间
- c) 同调与上同调, 万有系数定理
- d) 上积、卡积和 Poincare 对偶

## 4. 微分拓扑(50 分)

- a) 微分流形的概念
- b) 切丛与向量丛的概念
- c) 横截性理论、相交理论
- d) 微分形式, Stokes 定理, de Rham 上同调

## 5. 示性类(50 分)

- a) 向量丛与纤维丛的概念
- b) Thom 同构定理, Leray-Hirsch 定理
- c) Stiefel-Whitney 类、欧拉类、陈类、Pontryagin 类的定义与性质, 吴文俊类与吴公式
- e) Grassman 流形, 实向量丛与复向量丛的分类空间的构造及其上同调环
- f) 定向配边群, Thom 空间, Pontryagin-Thom 构造, Thom 配边定理
- g) 陈特征, 示性数, Multiplicative sequence, Hirzebruch 号差定理

## 参考书目：

- 【1】 尤承业，《基础拓扑学讲义》。 北京大学出版社， 1997.
- 【2】 姜伯驹，《同调论》。 北京大学出版社，2006.
- 【3】 陈省身、陈维桓，《微分几何讲义》（第二版）。北京大学出版社，2001 年。（第 1 章到第七章，附录一）
- 【4】 Allen Hatcher, Algebraic Topology. Cambridge Univ. Press, 2002.（前 3 章，并略去 Additional Topics 部分）
- 【5】 Victor Guillemin, Alan Pollack, Differential Topology. Prentice-Hall, 1974.
- 【6】 Theodor Brocker, Klaus Janich, Introduction to Differential Topology. Cambridge Univ. Press, 1982.
- 【7】 陈维桓、李兴校，《黎曼几何引论》（上）（第一到第六章）。
- 【8】 John Milnor, James D.Stasheff, Characteristic Classes. Princeton University Press, 1974
- 【9】 陈维桓，《微分几何》（第二版）。北京大学出版社，2017.

## 三、分析类

### 1. 泛函分析 II（50 分）

- a) Banach 空间和 Hilbert 空间的基本理论及典型例子
- b) Banach 空间和 Hilbert 空间上有界线性泛函和线性算子基本理论
- c) 紧算子
  - (i) Riesz-Fredholm 理论
  - (ii) 紧算子的基本性质，谱理论
  - (iii) 对称紧算子
  - (iv) 有界自伴算子的谱分解
  - (v) 闭算子的理论
  - (vi) 自伴扩张
  - (vii) 无界自伴算子的扰动
- d) 算子半群
  - (i) Hille-Yosida 定理
  - (ii) 单参数算子酉群的 Stone 定理

### 2. 调和分析（50 分）

- a) Fourier 变换
  - (i)  $L^1$ 函数的 Fourier 变换



- (ii) Schwartz 函数与缓增分布
- (iii) Plancherel 公式,  $L^p$  函数的 Fourier 变换
- (iv) 收敛与求和, Poisson 核、Gauss 核
- b) Hardy-Littlewood 极大函数
  - (i) 恒等逼近
  - (ii) Marcinkiewicz 插值定理
  - (iii) Hardy-Littlewood 极大函数
- c) 奇异积分
  - (i) Hilbert 变换
  - (ii) Riesz 变换
  - (iii) 卷积型奇异积分算子
  - (iv) 一般 (非卷积型) Calderon-Zygmund 算子
- d) Hardy 空间与 BMO 空间
  - (i) 原子 Hardy 空间
  - (ii) BMO 空间
- e) Littewood-Paley 理论与乘子
  - (i) Littewood-Paley 理论
  - (ii) Hörmander 乘子定理

### 3. 复分析 (50 分)

- a) Cauchy 积分理论:
 

Cauchy 定理, Morera 定理, Cauchy 公式, Cauchy 不等式, Liouville 定理
- b) Weierstrass 级数理论:
 

零点孤立定理, 解析函数唯一性定理, 最大模原理, 开映射定理
- c) Laurent 级数:
 

解析延拓, 对称原理, 幅角原理和 Rouché 定理, 留数计算
- d) 全纯映射与解析自同构:
 

正规族, Riemann 映射定理, 分式线性变换群和特殊区域的解析自同胚群
- e) 广义 Schwarz 引理与双曲几何:
 

Poincaré 度量, 广义 Schwarz 引理, Ahlfors 超双曲度量, Picard 大定理, Montel 正规定则
- f) Riemann 曲面:

亏格和 Riemann-Roch 定理, 半纯微分与半纯函数的的存在性定理, 单值化定理,  
Riemann 曲面的分类

g) Teichmüller 空间介绍:

环面上的复结构及其模空间, Riemann 模问题, Teichmüller 度量

## 参考书目:

- 【1】 张恭庆, 林源渠等, 泛函分析讲义上, 下册
- 【2】 Yosida: Functional Analysis Springer-Verlag;
- 【3】 J. Duoandikoetxea, Fourier analysis, Amer. Math. Soc.;
- 【4】 程民德, 邓东皋, 龙瑞麟, 实分析, 高等教育出版社.
- 【5】 W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw-Hill Company, 1996, 3th. version.
- 【6】 李忠, 复分析导引, 北京大学, 2005.
- 【7】 谭小江, 伍胜健, 复变函数简明教程, 北京大学, 2006.
- 【8】 伍鸿熙, 吕以桢, 陈志华, 紧黎曼曲面引论, 高等教育出版社, 2016.

## 四、方程类

### 1. 常微分方程定性理论 (50 分)

a) 常微分方程

线性微分方程组, 解的存在和唯一性定理, 比较定理与最小解最大解, 解的延拓, 解对参数及初值的连续依赖性, 解对参数及初值的连续可微性, Gronwall 不等式, 变分方程, Sturm 比较定理、Sturm-Liouville 边值问题。

b) 定性理论

向量场与动力系统, 平面线性系统相图, 双曲奇点的拓扑共轭分类, Poincaré-Bendixson 环域定理, Hopf 分支, 平面向量场的旋转数与奇点指数, 李雅普诺夫稳定性与李雅普诺夫第二方法, 线性系统的 Floquet 理论, 周期轨的 Poincaré 映射, 环面上的常微系统, 旋转数, 极限集与极小集。

### 2. 椭圆方程 (50 分)

a) 数学物理方程

- (i) 位势方程: 基本解和 Green 函数, 极值原理和最大模估计。
- (ii) 热方程: Fourier 变换方法, 分离变量法, 极值原理和最大模估计。

b) 二阶椭圆型方程

- (i) Sobolev 空间,  $L^2$  理论 (解的存在唯一性)。
- (ii) Schauder 估计的结论及应用。

(iii)  $L^p$  估计(Calderon-Zygmund 理论)的结论及应用。

### 3. 双曲方程 (50 分)

- a) 波动方程的物理背景以及解的基本性质
- b) 双曲方程特征线解法, 分离变量法以及能量不等式
- c) 广义函数, 线性波方程的基本解
- d) 线性波的渐进色散 (scattering) 和衰减(decay)性质

#### 参考书目:

- 【1】丁同仁, 李承治:《常微分方程》 第一、二、三、五、六、八、九章;
- 【2】张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜,《微分方程定性理论》 第一、二 § 1-2、三 § 1-2、六 § 1-2、七章;
- 【3】庞特里亚金,《常微分方程》第三章
- 【4】周蜀林,《偏微分方程》, 北京大学出版社.
- 【5】姜礼尚等,《数学物理方程》, 高等教育出版社.
- 【6】陈亚浙, 吴兰成,《二阶椭圆型方程与椭圆型方程组》, 科学出版社.
- 【7】D.Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (Part I Linear equations), Springer.
- 【8】Hormander, The analysis of linear partial differential operators (Vol.1), Springer-Verlag.
- 【9】L. Evans, Partial Differential equations.
- 【10】C. Sogge, Lectures on nonlinear wave equations.
- 【11】T. Tao, Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis.

### 五、计算方法 (100 分) (四门中选二)

#### 数值代数 (50 分)

- 1. 基础知识  
向量范数和矩阵范数, Schur 分解定理, 奇异值分解定理, Hermite 矩阵的极小、极大定理。
- 2. 求解线性方程组的直接解法
- 3. 求解线性方程组的迭代法
- 4. 求解线性方程组的 Krylov 子空间类方法
- 5. 矩阵特征值问题数值方法
- 6. 最小二乘问题的解法

#### 参考书目:

- 【1】.“数值线性代数”, 徐树方, 高立, 张平文编;

【2】. “矩阵计算的理论与方法”，徐树方编著。

## 偏微分方程数值解 （50 分）

### 1. 差分方法

一般形式方程的差分格式的构造方法和数值分析，一阶双曲型方程的几个重要格式及其基本性质，守恒律的守恒型格式及 Lax-Wendroff 定理、单调与 TVD 等重要性质、Godunov 格式与离散熵条件。

### 2. 椭圆边值问题的有限元方法

变分原理，二阶和四阶问题协调与非协调有限元的构造，有限元仿射族，协调与非协调有限元解的收敛性与误差分析，Aubin-Nitsche 技巧， $L^2$ -模误差估计，反估计不等式。

## 参考书目

- 【1】 “Numerical Methods for Conservation Laws”， R. LeVeque;
- 【2】 “偏微分方程初值问题差分方法”，胡祖炽，雷功炎著
- 【3】 《有限元方法讲义》，应隆安，北京大学出版社，1988;
- 【4】 《The Finite Element Method for Elliptic Problems》， P. G. Ciarlet

## 最优化理论与算法 （50 分）

### （一）基础知识

- 1. 凸集的定义和判定、相关基本性质
- 2. 凸函数的定义和判定、相关基本性质
- 3. 线性规划，二次锥规划和半定规划等典型凸优化问题的定义和判定、相关基本性质
- 4. 凸优化对偶理论和最优性条件，非凸优化最优性条件

### （二）典型算法：算法构造、相关基本性质、收敛性等

- 5. 线搜索和梯度下降算法
- 6. 次梯度和次梯度算法
- 7. 牛顿法、拟牛顿法、信赖域算法
- 8. 非线性最小二乘算法
- 9. 罚函数法和增广拉格朗日函数法
- 10. 近似点算子和近似点梯度法
- 11. Nesterov 加速算法
- 12. 对偶算法

13. 交替方向乘子法

14. 坐标下降法

### 参考书目：

【1】刘浩洋，户将，李勇锋，文再文，《最优化：建模、算法与理论》，高等教育出版社。

【2】“最优化理论与方法”，袁亚湘，孙文瑜，科学出版社

## 随机模拟方法（50 分）

1. 概率论基础

随机变量，期望，条件期望，特征函数，随机变量各收敛性之关系，Borel-Cantelli 引理，基本概率不等式，大数定律，中心极限定理，Cramer 定理。

2. 有限状态马尔科夫链

基本定义，不变分布，Perron-Frobenius 定理，细致平衡条件，本原马氏链，遍历定理条件

3. 蒙特卡罗方法

随机变量生成，方差减小技术，Metropolis 算法，模拟退火法，动理蒙特卡罗法(KMC)。

4. 随机微分方程

布朗运动定义及构造法，布朗运动基本性质，伊藤积分，随机微分方程，伊藤公式，斯特拉诺维奇积分，福克-普朗克方程，边界条件，逃逸问题，费曼-卡茨公式，随机微分方程欧拉离散及其强弱收敛阶估计，路径积分法

### 参考书目：

【1】.“Applied Stochastic Analysis”，鄂维南-李铁军-Vanden-Eijnden；

【2】.“Probability: Theory and Examples”第1, 2, 5章，Durrett；

【3】.“Brownian Motion and Stochastic Calculus”第1到3章，Karatzas-Shreve；

## 六、概率统计方向（100 分）

### 高等概率论（50 分）

该部分考试涵盖研究生课程《高等概率论》以及先修的本科生课程《概率论》

概率空间的概念，随机变量定义及其分布

单调收敛定理，Fatou 引理，控制收敛定理

随机变量的独立性

随机变量四种收敛的定义（包括等价定义）及其相互关系

欧氏空间的概率测度性质，弱收敛

弱大数定律，Chebyshev 不等式

强大数定律，Borel-Cantelli 引理

条件独立, 尾事件, Kolmogorov 0-1 律, 可交换序列  
 随机变量级数的收敛, Kolmogorov 三级数定理  
 特征函数, 逆转公式  
 中心极限定理, Lindeberg-Feller 定理  
 Poisson 过程, Poisson 收敛定理  
 条件期望,  $\sigma$  域流, 离散时间鞅、上（下）鞅, Doob 不等式, Doob 分解, 鞅收敛定理一致可积与  $L^1$  收敛、倒向鞅、停时定理

### 参考书目:

- 【1】 李贤平:《概率论基础》第三版 高等教育出版社, 2010.
- 【2】 Rick Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Third Edition, 世界图书出版社, 2007.
- 【3】 Kai Lai Chung, *A Course in Probability Theory*, 2<sup>nd</sup> Edition, Academic Press, 1974.
- 【4】 程士宏:《测度论与概率论基础》 北京大学出版社, 2004.

### 随机过程论 (50 分)

该部分考试涵盖《随机过程论》以及先修的本科生课程《应用随机过程》和《应用随机分析》

停时, Wald 引理

马氏链 (离散状态, 离散时间或连续时间), 一些特例 (如随机游动)  
 常返与非常返, 平稳分布, 渐近行为与收敛速度, 可逆性与可逆分布  
 鞅的应用, 包括测度变换、马氏链中的鞅问题、Doob 分解、 $h$ -变换等  
 平稳过程, Birkhoff 遍历定理、Kingman 次可加遍历定理及其应用  
 布朗运动的构造及轨道性质、转移概率, 热核, OU 过程, 马氏性与 Blumenthal  
 0-1 律, 强马氏性  
 生成元与马氏半群初步, 与偏微分方程的联系, Feynman-Kac 公式, 随机微分  
 方程初步

### 参考书目:

1. Richard Durrett, *Probability: Theory and Examples*, 5<sup>th</sup> Edition, Cambridge University Press, 2019.
2. 钱敏平, 龚光鲁, *随机过程论*, 第三版, 北京大学出版社, 2021 年。
3. David Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, 1991.
4. S. R. S. Varadhan, *Probability Theory*, Courant Lecture Notes in Mathematics (7), American Mathematical Society, 2001.
5. S. R. S. Varadhan, *Stochastic Processes*, Courant Lecture Notes in Mathematics (16), American Mathematical Society, 2007.

## 高等统计学（50 分）

### 一、基本概念

1. 充分统计量
2. 完全性
3. 指数分布族
4. 统计决策理论
5. Delta 方法

### 二、点估计

1. 无偏估计、U 统计量
2. 信息不等式
3. 矩估计与最大似然估计
4. 极大极小估计、可容许性
5. 相合性、渐近正态性与渐近有效性

### 三、假设检验

1. Neyman-Pearson 引理
2. 一致最优检验
3. 一致最优无偏检验
4. 似然比检验
5. 大样本检验

### 四、区间估计

1. 置信区间的构造
2. 置信区间的最优性

### 参考书目：

- 【1】 Shao, J. (2003). Mathematical Statistics (2nd ed.). Springer.
- 【2】 Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). Theory of Point Estimation (2nd ed.). Springer.
- 【3】 Lehmann, E. L. and Romano, J. P. (2005). Testing Statistical Hypotheses (3rd ed.). Springer.
- 【4】 郑忠国, 童行伟, 赵慧 (2012). 高等统计学. 北京大学出版社.

## 现代统计模型（50 分）

### 一、线性模型

1. 最小二乘估计及性质
2. 假设检验与置信区间
3. ANOVA
4. 模型选择

## 二、广义线性模型

1. 经典指数分布族
2. 循环加权最小二乘算法
3. Quasi-likelihood
4. Logistic、Poisson、Gamma 等常见模型

## 三、非参数回归与可加模型

1. 核回归与局部多项式回归
2. 样条回归
3. 调节参数选取
4. 广义可加模型

## 四、相依数据及纵向数据

1. 随机效应模型
- 2 重复测量数据与纵向数据
3. 广义估计方程
4. 广义线性混合模型

## 参考书目：

- 【1】 Rao, C.R., Toutenburg, H., Shalabh, Heumann, C. (2008) Linear Models and Generalizations: Least Squares and Alternatives. Springer, 3<sup>rd</sup> edition.
- 【2】 McCullagh, P., and Nelder, J.A. (1989) Generalized Linear Models. Springer, 2<sup>nd</sup> edition.
- 【3】 Fan, J., and Gijbels, I. (1996). Local Polynomial Modelling and Its Applications. Chapman & Hall.
- 【4】 Hastie, T.J., and Tibshirani, R.J. (1990). Generalized Additive Models. Chapman & Hall.
- 【5】 Diggle, P., Heagerty, P., Liang, K.Y. and Zeger, S. L. (2013). Analysis of Longitudinal Data. Oxford University Press, 2<sup>nd</sup> edition.

## 《高级计量经济专题》（非参数统计方法）（50 分）

《高级计量经济专题》（非参数统计方法）讲授非线性统计模型，非参数和半参数回归模型和统计推断。

考察内容包括（但不限于）：

- 非线性参数模型：极值估计量的定义及其分布性质，假设检验和估计量的数值实现，变换模型及其统计推断等
- 非参数核密度估计：核密度估计量的定义，核函数和窗宽的选择方法，密度函数在边界点处的估计，密度函数倒数的估计及窗宽和核函数的选取，条件密度及条件分布函数的估计和统计推断等



- 非参数核回归方法：核回归估计量的定义、核函数和窗宽的选择方法，局部多项式核估计
- 半参数核估计方法：单因子半参数模型，部分线性半参数模型，可加模型等
- 基于核方法的模型设定检验：检验分布函数的设定以及回归函数的设定等
- 基于 Sieve (spline, series 等) 的非参数和半参数估计方法
- 统计学习算法 (boosting, random forest 等) 及其性质

## 七、算法设计与分析 (50 分)

考试中如要求用某种编程语言定义数据结构和写出算法实现，考生可以从 C、C++、Java、Python 语言中选择一种。需注明所用语言，回答中超出语言规定的内容必须给出清晰的说明。

### (一)、算法分析

1.  $O(1)$ ,  $O(\log n)$ ,  $O(n)$ ,  $O(n \log n)$ ,  $O(n^2)$ ,  $O(n^3)$ ,  $O(2^n)$  等算法的复杂性类
2. 复杂性的基本分析技术
3. 复杂性的基本概念：渐进复杂性，平均复杂性，最坏情况复杂性，复杂性上界和下界，分期偿还型 (amortized) 复杂性

### (二)、算法设计技术：

1. 经典算法
  - 1) 排序 (sort) 和检索 (search) 算法及其数据结构支持
  - 2) 线性规划 (linear programming)
  - 3) 串匹配算法
  - 4) 贪心算法 (greedy algorithms)
  - 5) 分治法 (divide and conquer)
  - 6) 动态规划 (dynamic programming)
  - 7) 周游和回溯法 (traversal and backtrack)
  - 8) 分支限界法 (branch and bound)
  - 9) 图遍历，拓扑排序，最小生成树，最短路径，强连通子图，关键路径，网络最大流等重要图算法实现
2. 其他算法：并行算法、概率算法、随机算法、近似算法

### 参考书目：

【1】《计算机算法基础》(第 3 版)，余祥宣，崔国华，邹海明，华中科技大学出版社，2006.

【2】《Introduction to Algorithm》(2nd Edition), Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest and Clifford Stein, MIT Press, 影印版，高等教育出版社，2002.

【3】《算法设计》，Jon Kleinberg, Eva Tardos 著，张立昂，屈婉玲译，清华大学出版社，2007.

【4】《算法与数据结构 — C 语言描述 (第 3 版)》，张乃孝，陈光，孙猛，高等教育出版社，2011.

【5】《数据结构与算法：Python 语言描述》，裘宗燕，机械工业出版社，2016.

## 八、数理逻辑（50 分）

1. 非形式命题演算、命题演算形式系统  $L$ 、 $L$  的完全性定理
2. 一阶谓词演算、一阶语言、形式系统  $KL$ 、等价和替换、前束范式、 $KL$  的完全性
3. 数学系统、一致性和模型
4. 哥德尔不完全性定理

### 参考书目：

【1】《Logic for Mathematicians》(Revised Edition), A. G. Hamilton, Cambridge University Press. 影印版，清华大学出版社，2003.

【2】《Discrete Mathematical Structures》(3rd Edition), Bernard Kolman, Robert Busby and Sharon Ross, Prentice Hall, 1996. 影印版，清华大学出版社，1997.

【3】《离散数学教程》，耿素云，屈婉玲，王捍贫，北京大学出版社，2009.

## 九、理论计算机科学基础（50 分）

1. 计算模型（图灵机、递归函数、文法、S 语言）
2. 判定问题
3. 形式语言与自动机（正则语言与有穷自动机、上下文无关语言与下推自动机）
4. 复杂性类（时间复杂性、空间复杂性）： $L$ ,  $NL$ ,  $P$ ,  $NP$ ,  $PSPACE$
5. 多项式时间归约、 $NP$  完全问题
6. 概率图灵机与随机复杂性类

### 参考书目：

【1】《Introduction to the Theory of Computation》(2nd Edition), Michael Sipser, Thomson Learning. 影印版，机械工业出版社，2006.

【2】《Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation》(3rd Edition), John E. Hopcroft, Rajeev Motwani and Jeffrey D. Ullman, Pearson Education. 影印版，机械工业出版社，2007.

【3】《可计算性与计算复杂性导引》（第三版），张立昂，北京大学出版社，2011.

## 十、数字信息处理(50 分)

### （一）、连续信号的频谱和傅氏变换

1. 连续信号的频谱（定义、相位谱、振幅谱）
2. 频谱的基本性质（共轭、对称、时移、频移、展缩、翻转、微分等定理）

### （二）、离散信号和抽样定理

1. 离散信号频谱的定义
  2. 带限信号、奈奎斯特频率、实截频信号的抽样定理
  3. 非带限信号的抽样定理、重抽样定理、假频现象
- (三)、滤波与褶积,  $Z$  变换
1. 离散信号滤波的概念与褶积 (卷积) 的定义, 连续/离散卷积公式的计算
  2. 离散信号的  $Z$  变换 (定义、 $Z$  变换与频谱的对应关系)
- (四)、线性时不变滤波器与系统
1. 线性时不变系统及其时间 (脉冲) 响应函数的定义
  2. 串联、并联及反馈系统 (概念、图解)
  3. 有理系统的定义及其时间响应函数 ( $H(Z)$  和  $h(n)$  的互求)
- (五)、冲激函数—— $\delta$  函数
1.  $\delta$  函数的定义、微商与频谱
  2. 用  $\delta$  函数求函数的频谱
  3. 熟练掌握常见的傅氏变换对 (连续和离散情形):  
方波、三角波、高斯、单双边指数、 $\delta$ 、正余弦、梳状、符号、阶跃等
- (六)、希尔伯特变换与实信号的复数表示
1. 连续和离散希尔伯特变换的定义
  2. 希尔伯特变换的应用 (信号的包络、瞬时相位、瞬时频率)
- (七)、有限离散傅氏变换
1. 有限离散傅氏变换的定义
  2. 快速傅氏变换思想、公式 (时域分解算法、频域分解算法, 计算复杂度)
  3. 利用 FFT 计算卷积 (使用循环卷积计算普通卷积的序列长度分析)
- (八)、相关分析
1. 相关的概念 (相关系数、相关系数分布、去均值归一化相关系数分布)
  2. 相关与卷积的关系
  3. 利用 FFT 计算相关函数 (使用循环相关计算普通相关的序列长度分析)
- (九)、有限长脉冲响应滤波器和窗函数
1. 理想滤波器 (低通、高通、带通、带阻)
  2. 吉布斯现象及产生原因
  3. 使用时窗函数构造近似理想滤波器的方法
- (十)、递归滤波器的设计
1. 递归滤波 (数学形式、稳定性、正向递归滤波、反向递归滤波)
  2. 使用递归滤波构造近似理想滤波器的方法
  3. 模拟滤波器和数字滤波器的设计

#### 参考书目:

- 1、程乾生: 数字信号处理 (第二版), 北京大学出版社, 2010.
- 2、S. D. Stearns and D. R. Hush, Digital Signal Analysis, Prentice Hall, 1990.

## 十一、模式识别（50 分）

### 1、统计决策方法：

贝叶斯决策理论及典型决策方法（最小错误率贝叶斯决策，最小风险贝叶斯决策，聂曼-皮尔逊决策）；贝叶斯分类器错误率，正态分布下的贝叶斯决策

### 2、概率密度函数的估计：

概率密度函数的基本参数估计方法和非参数估计方法，包括最大似然估计和贝叶斯估计，Parzen 窗法和  $k_n$  近邻法；正态分布下均值向量和协方差矩阵的最大似然估计和贝叶斯估计

### 3、线性判别方法：

线性判别函数的基本概念，Fisher 线性判别，感知器准则函数，最小平方误差准则函数，线性支持向量机，多类线性分类器。

### 4、非线性判别方法：

分段线性判别函数，二次判别函数，前馈多层神经网络，基于核函数的支持向量机

### 5、其他分类方法：

近邻法，决策树与随机森林，罗杰斯特回归，AdaBoost 方法

### 6、特征选择：

类别可分离性判据，包括基于类内类间距离可分性判据、基于概率分布可分性判据、基于熵函数可分性判据以及利用统计检验作为可分性判据；特征选择的最优算法、次优算法和遗传算法；以分类性能为准则的特征选择方法

### 7、特征提取：

基于类别可分性判据的特征提取，主成分分析，K-L 变换方法，以及 MDS、Kernel PCA、ISOMap 等非线性变换方法

### 8、非监督模式识别方法：

基于概率密度估计的聚类方法和 EM 算法，K 均值、ISODATA 及基于相似性度量的动态聚类算法，模糊 K 均值算法、分级聚类算法以及自组织映射神经网络聚类方法

### 参考书目：

- 1、张学工，模式识别（第三版），清华大学出版社，2010
- 2、Richard O. Duda 等，模式分类（第二版），机械工业出版社，2003
- 3、Andrew R. Webb and Keith D. Copsey，统计模式识别（第三版），电子工业出版社，2015
- 4、S. Theodoridis and K. Koutroumbas，模式识别（第四版），电子工业出版社，2010

## 十二、机器学习（50 分）

### 1. 计算学习理论：

PAC 可学习性、不可知 PAC 可学习性、一致收敛性质、非一致可学习性、VC 维、Sauer 引理、统计学习基本定理、偏差-复杂性权衡、无免费午餐定理、经验风险最小化、结构风险最小化

### 2. 基本模型和算法：

支持向量机与核方法、决策树、**k**-近邻法与最近邻法、朴素贝叶斯法、**Logistic** 回归模型、线性回归模型、岭回归、**Lasso**、**AdaBoost** 算法、提升树、**Bagging** 与随机森林、隐马尔可夫模型、**k** 均值聚类、高斯混合模型、奇异值分解、主成分分析、前馈神经网络、卷积神经网络、循环神经网络、小批量梯度下降法

参考书目：

- [1] Shai Shalev-Schwartz, Shai Ben-David. Understanding Machine Learning: From Theory to Algorithms, Cambridge University Press, 2014, 第一至七章.
- [2] 李航, 机器学习方法, 清华大学出版社, 2022.
- [3] 周志华, 机器学习, 清华大学出版社, 2016.
- [4] 邱锡鹏, 神经网络与深度学习, 机械工业出版社, 2020, 第 7 章.