高等数学 A 习题课讲义

原生生物

* 高等数学 A [刘培东老师班] 习题课讲义。

* 由于高等数学是一个需要大量练习的学科，习题课的主要组织结构将会是通过**题目**进行。我会给每道题一个编号，这样大家就可以看到一学期的知识究竟需要多少个练习来掌握。

* 讲义中提到的 n 默认为正整数，n 趋于无穷时的极限均指**数列极限**。

目录

一　难易

本次习题课主要介绍了大学数学 (主要针对高等数学 A 与线性代数 A) 相关的学习建议，不存在需要掌握的知识性内容，但仍然建议大家阅读。

§1.1　有关大学数学

说到关于大学数学的建议，自然需要先从大学数学课与中学阶段数学的本质不同讲起。我们主要分为四件事讨论：文本的重要性、抽象层级的提升、证明逻辑的强化与学习方法的差异。

1.1.1　文本

个人一直的观点是，比起课堂，**对文本的阅读** (尤其是教材) 往往是更加重要的。原因有二：一方面，大学数学的内容量大，导致上课需要快速过掉较多内容，这就导致老师的**节奏**注定只能适合一小部分人，对剩下的同学来说跟上思路是很难的 (更大的问题是 “老师以为大家会” 的东西可能是自己尚未学过的，这种默认知识背景不同的情况会导致更多问题)；另一方面，即使能够跟上，上课来不及理解更多细节也会导致**以为自己懂了**，也就是虽然听着感觉理解了，但还是无法做出对应的题目。

——当然，上面说的这两方面问题读文本也会有，但以读为主的的最大好处是，**按自己节奏阅读的成本很低**。上课时无法随时暂停、快进或重放内容，即使有了录课，如此看一段视频所花的时间也远比读一段教材要高。

接下来，我们该聊聊阅读教材的注意事项了。很显然 (这是本讲义第一次出现显然这个词，也将是最后一次)，**朗读**一遍教材是无法对学习有任何帮助的。为了让**阅读**有超出朗读的效果，有两件事必须注意。首先，一定要注意教材的**逻辑细节**，简单来说，必须知道每个证明里上一句话到下一句话是用了何种**结论**。教材上的证明往往不会太过困难，这一部分往往是可以通过自己思考解决的。其次，需要掌握教材的**思路**。小到证明的一步为什么能想到、一个定义为何要出现，大到教材为何如此编排，某章的核心内容是什么，都是**必须**有自己答案的——稍后我们会解释如此要求的理由。不过，思路相关的问题就很难通过个人思考得到了，甚至每个人的答案都可能不同。因此，遇到这些问题时最好通过**交流**进行解决，也就是积极去问同学/助教 “这个东西是如何想到的”，并在得到的答案中找到自己可以接受的解释，以此进行更深入的理解。

理论上来说，大学的所有课程都可以只通过文本资料学习，无需上课。不过，如果能跟上老师的思路，上课也确实可以收获一些阅读无法收获的东西，我们将在下面继续讨论。

1.1.2　抽象

大家学习数学的过程中实际上经历了两次抽象：小学时从两个苹果和三个苹果放在一起是五个苹果到 $2+3=5$，是**具体事物到数字**的抽象；中学时从 $(3+2)^2=2^2+2\times2\times3+3^2$ 到 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，是**从数字到符号** (也就是**代数**) 的抽象。

在大学，我们将经历第三次抽象 (也往往是非数学专业会触及的最后一次抽象)：**从符号到结构**。例如，对于**加法** (不妨考虑对任何实数的加法)，我们可以提取出它的四个核心特征 (这里的 $\exists!$ 表示**存在唯一**)：

$$a+b=b+a$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad 0+a=a$$

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad \exists! b\in\mathbb{R},\quad a+b=0$$

前两个行称为**交换律**与**结合律**，第三行代表**零的存在性**，第四个行则代表**相反数的存在性**。

反过来说，**只要满足这四个特征的运算就可以称为“加法”**。例如，考虑 $\mathbb{R}^*$，即所有非零实数，它们的乘法满足 (第四行即为**倒数**，任何非零实数都有非零的倒数)

$$ab = ba$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad 1a = a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \exists! b \in \mathbb{R}^*, \quad ab = 1$$

由此，非零实数的乘法也可以看作某种意义上的“加法”。

当然，此时的“加法”就不再是一种特定的**运算**了，而是代表了一种**结构**。简单来说，对于一个集合 A，定义 A 上的一种运算 $\oplus$ (也就是给定 A 中两个元素，生成一个新的 A 中元素)，若它满足 (第四行中的 e 即为第三行中的 e)

$$\forall a, b \in A, \quad a \oplus b = b \oplus a$$

$$\forall a, b, c \in A, \quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

$$\exists! e \in A, \quad \forall a \in A, \quad e \oplus a = a$$

$$\forall a \in A, \quad \exists! b \in A, \quad a \oplus b = e$$

则称这个集合 A 对运算 $\oplus$ 构成一个**阿贝尔群**，第三行中的 e 称为**零元**，第四行中的 b 可以记为 $-a$，也即某种“相反数”。用这套语言来说，$\mathbb{R}$ 对加法运算构成一个阿贝尔群，$\mathbb{R}^*$ 对乘法运算构成一个阿贝尔群。

——阿贝尔群这个名字并不重要，重要的是，我们把一种具体的加法运算抽象为了一个“类似加法的结构”。这样做的好处就像我们之前的每一次抽象一样，只要证明了这种结构的性质，就可以**应用在所有具有这种结构的情况里**。

例如，只要集合 A 对运算 $\oplus$ 构成一个阿贝尔群，即有

$$-(a \oplus b) = (-a) \oplus (-b)$$

解答:

由定义第四个式子可知，只要验证了

$$(a \oplus b) \oplus ((-a) \oplus (-b)) = 0$$

利用“相反数”的唯一性即可得到原式成立。利用结合律，上式左侧等于

$$((a \oplus b) \oplus (-a)) \oplus (-b)$$

再次利用结合律可将其化为

$$(a \oplus (b \oplus (-a))) \oplus (-b)$$

利用交换律可知要证

$$(a \oplus ((-a) \oplus b)) \oplus (-b)$$

再次利用结合律得到

$$((a \oplus (-a)) \oplus b) \oplus (-b)$$

利用“相反数”的定义可知这等于

$$(e \oplus b) \oplus (-b)$$

利用零元的定义可知这等于

$$b \oplus (-b)$$

最后再利用“相反数”的定义将其化为 0，即得证。

将上述定理应用在加法上，可以得到对实数 a, b 有

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

而应用在非零实数乘法上，即得到了对非零实数 a, b 有

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

由此，我们观察了一个非常简单的**将符号抽象为结构**的例子，且看到了一些好处。不过，就像之前的每一种抽象是困难的，这一层抽象也存在自己的困难，也就是需要**暂时丢弃已经学会的内容，只保留最基础的性质并通过全新的方式认知**。

* 事实上，大家以后或许还会接触到第四层，也是目前我们能研究的最高一层抽象，**将结构抽象为范畴**。例如，阿贝尔群和集合都是一个**范畴**，这样，我们就可以对比不同范畴之间的共性与不同了。

为了理解抽象，一个必须的办法是**从具体例子入手**。如果没有 $\mathbb{R}$ 对加法与 $\mathbb{R}^*$ 对乘法作为例子，下面的阿贝尔群定义将是**悬空**的。反之，若是只学具体例子，不去了解阿贝尔群的定义，就无法提取出具体例子的**共性**——而孤立地去学具体例子在大学是不可行的，因为大学数学的内容量真的很**大**。

笼统来说，所有具体例子、做题技巧整理都可以称为**低观点**，而所有结构性的内容、抽象层面的讨论都可以称为**高观点**。当然，应对考试必须掌握足够的低观点，而高观点很多则来自课程与自己的思考。高观点是必要的，就像上面所说的抽象层级，它可以做到提取低观点中的共性以**更好理解、记忆**。

* 高等数学课程中的结构想法远不如线性代数中多，但类似的寻找共性的思路仍然可以帮助大家理解很多**定义、定理的由来**。

1.1.3 证明

在大学之前，我们所谓的“证明”其实更多时候是“说明”：只要我们知道一个部分是对的，就可以直接跳过对于这部分的具体细节。

然而，在大学，这件事并不成立。这是由于大学中遇到的**逻辑**将更加复杂，甚至在有的地方反直觉，导致“知道是对的”并不成立，只有一步步**推导**出来的内容才能确信是对的。

在之后的习题课中，我们将以更严格的方式叙述逻辑，也将进一步解释为何有些“看起来对”的证明是不合理的，而有些“一时看不出理由”的推导其实是正确的。目前阶段，至少希望大家做到的是，在证明中绝大部分的**三段论**推导中看出其中用到的**结论**，通俗来说也就是**能说出每一步的理由**。

当然，这件事的做到只能算是“读懂”了一个证明，还远称不上是**学会**一个证明。与证明逻辑同等重要的是证明的**思路**，也即**能说出证明是如何想到的**——这事实上与本章开头讨论文本时的要求完全一致。

一个常见的误区是，数学家的“注意力”是凭空产生的，常人无法想到。事实上，绝大部分证明之所以读着让人感觉无法想到，是因为**写出的过程与真实思路有很大差异**。例如，虽然结构的呈现都是顺序，写证明时可能是一会儿从条件出发一会儿从结论出发研究的，可能是找了很多具体例子后研究共性，也可能是看别的证明时突然有了思路...... 知道了这些，我们就可以在遇到思路不明确的证明时多进行不同的尝试，或许就能发现想到这些其实是“自然”的——当然，这个过程里还是要再次强调与人的交流，毕竟一个人确实也不可能想清楚全部的思路。

1.1.4 方法

最后，我们来聊一聊学习方法的差别。中学数学的常见 (至少我亲身经历中常见) 的学习模式是：以记忆做题方法为主线，训练一套“什么题用什么方法”的模式，不太注重**分析与尝试**本身。

上述的做法在内容量不多时，确实可以成为有效的思路，因为通过大量题目的训练能够快速建立起“看到题目就知道该用什么”的**直觉**。大学数学里，**建立直觉**也仍然是很重要的部分——事实上前面所说的数学家的“注意力”就是一种直觉——但绝不可能只靠大量做题达成，这是因为大学的内容量已经**不可能对每个知识点都做充分多的题目**，或用我常说的话，“背是一定**背不完**的”。

那么，用什么方法能在做题不那么多的时候就达成训练直觉的目的呢？如果用最简单的方法概括，答案就是**多想、多问**。前者意味着该亲自参与的时候一定要亲自参与，例如习题课一般不会直接讲题目解答，尤其是作业题，因为这是必须自己做了才能有用的部分，没有自己的尝试就不可能知道怎洋的直觉是**有效**的，怎样是无效的；后者则意味着出现问题时需要及时沟通，因为自己想到的书上/答案写得有差别并不意味着就是错误的，说不定只是某一步需要补全，而自己做不出来时，知道这些只能依靠了解**其他人能否通过此思路走通**。

§1.2 联系

1.2.1 结构与动机

虽然刚才讲了大学数学与之前数学学习不同的四个方面，大家可以发现它们其实存在很鲜明的共性。具体来说，就是对**高观点**的更加注重。现在，我们可以详细解释何为大学数学中的高观点了。主要包含两部分：**结构**与**动机**。

无论是教材还是上课，资料一定是**顺序**呈现的，一行后接着另一行。但是，这样的顺序往往不是真正的**思路结构**。就像本次习题课的真实结构是在黑板上画了一张有着诸多连线的图一样，真正的结构往往至少是**树状**的——以教材为例，很可能每一章是为了解决某个 “主要问题”，此问题可以拆分为若干 “次要问题”，并可以进行进一步的拆分，直到得到个人可以解决的一个个小点。更多时候，这样的联系并非单向、逐级向下的，就以高数为例，**微分**之下的各种结论 (如微分中值定理) 与**积分**之下的各种结论 (如积分中值定理) 很多时候会存在一定程度的**对应**，而这样的对应关系会带来更复杂的连接。所有的这些对结构的分析都是掌握知识的重要一环，也可以切实提升**理解**，也即之前说的，不用记忆就培养直觉的方式。

另一个很重要但必须思考的内容就是**动机**，也即不断反问 “为何能够想到”。因为数学世界的一切都是由人类创造的 (暂且忽略发明与发现的哲学讨论)，**每一个概念的创造必有其原因**。即使很多时候站在初学角度并不能感知到最准确的理由，对动机有自己的理解仍然是重要的。例如，初学导数时，的确可以将导数理解为 “为了刻画**速度**出现的概念”，即使学到之后对这个概念有了更深的体会，也并不意味着用速度看待导数后对更多知识产生的理解是无效的。

当然，无论是结构还是动机都**不存在唯一的答案**。哪怕是教材的编写者所说出的结构，也并不一定就是教材是真正结构，因为其中还蕴含着编写者的整个知识体系所带来的理解。某种意义上，听课的最大意义就是**获取老师对高观点的理解**，并以此和直接阅读教材、自己思考结合，得到自己的答案。

——至于为何要强调高观点？正是因为这些部分可以超越简单的背诵，达到**在有限的时间与做题量下训练出直觉**的效果，所以，千万**不要觉得以应试为目的的学习就无需掌握高观点**，除非你能在刷题的同时记下做过的每一道题目是如何处理的。

1.2.2 问与想

在之前介绍方法时，我们已经说了 “多想” 与 “多问” 是本质性的解决方法，事实上它们就是**掌握高观点的必要方式**，也是大学数学与中学数学学习不同的本质所在。本章的最后，我们就来聊一聊具体如何多想、多问，概括起来其实只有两点：

- **简单的问题不要怕问**。

  总会有人因为担心自己的问题过于简单而害怕来交流，但其实简单的问题恰恰是最需要交流的，一方面大家会存在共性 (~~其实你不会的大家都不会，不要被群聊里活跃的人吓到~~)，另一方面解答这些问题的时间很短，而自己思考得到答案的时间则过于长了。

  同样，也不要担心自己 “连这都问是不是问题太多了”。事实上，在学习的前期，出现大量问题是正常的，只有找不同人交流、解决了前期的问题后，才能搭起初步的框架，之后遇到的问题更少。

此外，一个常见的误区是，既然有了答案就不用和人交流不会做的题了。但事实上，**答案是无法代替得到答案的过程的**，和人交流是为了知道别人从何种角度得到答案，而非机械记忆某套固定的操作方法。所以，尤其是学习前期，比起看答案，更应该将不会做的题拿给大家交流。

* 至于问 AI，个人并不推荐，因为它有着和看答案一样的问题：学习前期无法区分结果正误，即使是正确的，也无法得知想到证明所需的知识背景。

- **困难的问题不要怕想**。

  既然大家都来到了这里，不需要觉得有什么知识是"自己不配学"的。如果要建立完整的体系，一般都需要掌握全部的知识——除了一些**过于困难的技巧**可以适当放弃 (真有这样的情况会在讲义里提及)，其他内容都是理应掌握的。

  如果一时觉得怎么学都无法学会，那往往实际上是**切入思路**的问题。只要能适当调整思路，多去思考**如何用自己能理解的方式构建体系**，并和人交流，一定可以达成**不用堆时间也能学会**的效果。

  对于真正困难的内容，充分思考一定是有必要的。事实上，数学上的困难往往就意味着大量不符合直觉、无法通过直觉建构的内容，那么也就必须利用思考构建起**新的直觉**来进行理解——越是困难的东西，越不能指望通过强行记忆去学，因为困难将导致更容易忘却。

希望大家能带着这两句话，完成整个本科的数学学习，并至少**学有所得**。

二　数列极限

本次习题课主要介绍了数列极限的部分技巧和一些重要的估算，知识基础为极限定义、一些基本的极限结果与单调有界数列存在极限。

§2.1　作业解答

1. (1.3 节例 7) 设 a_n 是非负数列，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$$

解答:

分两种情况:

– 若 $a > 0$，由于根号难以处理，尝试利用分子有理化直接计算可知

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a} = \frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}$$

由于 a 为正，分母必然非零。

直接缩小分母估算可知

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}$$

由此，对任何 $\varepsilon > 0$，利用 a_n 极限为 a，由 $\sqrt{a}\varepsilon > 0$ 可以取 N 使得 $n > N$ 时

$$|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$$

此时即得到

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$

从而得证。

– 若 $a=0$，此时也即求证 $\sqrt{a_n}$ 极限为 0。对任何 $\varepsilon>0$，利用 a_n 极限为 0，由 $\varepsilon^2>0$ 可以取 N 使得 $n>N$ 时
$$|a_n-0|<\varepsilon^2$$
此时再利用 $a_n\geq 0$ 即得到
$$|\sqrt{a_n}-0|=\sqrt{a_n}<\varepsilon$$
从而得证。

* 虽然解答中直接进行了分类讨论，直接做时往往会先只考虑到 $a>0$ 的情况，在**检查过程发现严谨性问题时** (即 $a=0$ 时分母可能为 0，且 $\sqrt{a}\varepsilon=0$，不是符合要求的正数) 再补充另一种情况的证明。因此，一定要注意做完以后检查每步是否能实现。

* 当然，$\sqrt{a}\varepsilon$ 与 ε^2 的构造也是先有下面的估算再回头进行的，这也是经典的**解答呈现顺序与真实思路相反**。

2. (1.3 节定理 4(3)) 设
$$\lim_{n\to\infty}a_n=l_1,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=l_2$$
且 $l_2\neq 0$，证明
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{l_1}{l_2}$$

解答：

– 定理 4(2) 已经证明了
$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n$$
由此只要证明
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{l_2}$$
即有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{l_1}{l_2}$$

– 为说明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{l_2}$，我们需要先说明左侧**定义合理**，也即 n 充分大时 b_n **非零**。由于 $l_2\neq 0$，有 $\frac{|l_2|}{2}>0$，于是存在 N 使得 $n>N$ 时
$$|b_n-l_2|<\frac{|l_2|}{2}$$
此时利用三角不等式得
$$|b_n|>\frac{|l_2|}{2}$$
从而可知 $n>N$ 时 $b_n\neq 0$，可以定义。
另一方面，直接计算可知
$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{l_2}\right|=\frac{|b_n-l_2|}{|b_nl_2|}$$
可以发现，在刚才得估算下，$n>N$ 时可以放大得到
$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{l_2}\right|<\frac{|b_n-l_2|}{l_2^2/2}$$
为了进一步控制，对任何 $\varepsilon>0$，利用 b_n 极限为 l_2，由 $\frac{l_2^2}{2}>0$ 存在 N_0 使得 $n>N_0$ 时
$$|b_n-l_2|<\frac{l_2^2}{2}\varepsilon$$

从而可知 $n > N$ 且 $n > N_0$ 时

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{l_2}\right| < \frac{|b_n - l_2|}{l_2^2/2} < \varepsilon$$

也即取 $N_1 = \max(N, N_0)$ 可符合极限定义，得证。

3. (习题 1.3.4(1)) 用定义证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-3} = \frac{3}{2}$$

解答：

直接计算可知

$$\left|\frac{3n+1}{2n-3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{11}{|4n-6|}$$

对任何 $\varepsilon > 0$，直接解不等式可知使上式小于 ε 只需

$$n > \frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} + 6\right)$$

从而取 ($[x]$ 代表不超过 x 的最大整数)

$$N = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} + 6\right)\right] + 1$$

即符合要求。

4. (习题 1.3.5) 设

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

且数列 b_n 有界，即

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |b_n| < M$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$$

解答：

由条件可知

$$|a_n b_n| = |b_n||a_n| \le M|a_n|$$

对任何 $\varepsilon > 0$，利用 a_n 极限为 0，由 $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ 存在 N 使得 $n > N$ 时

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| \le M|a_n| < \varepsilon$$

从而符合极限定义，得证。

* 仍然注意我们一定是**先进行估算，再利用定义取合适的数**。

5. (习题 1.3.7) 计算极限：

(1)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

解答：

利用单调性与分子有理化技术可知

$$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}}$$

由此对任何 $\varepsilon>0$，直接解不等式可知使上式小于 ε 只需

$$n>\frac{4}{\varepsilon^2}$$

从而取

$$N=\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]+1$$

即符合极限定义，得证原式极限为 0。

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+10)^4}{n^4+n^3}$$

解答:

分子分母同除以 n^4 可得上式等于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2+10/n)^4}{1+1/n}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

利用乘积极限、加法极限结论即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{10}{n}\right)=2$$

进一步利用乘除法极限结论即得原式为

$$\frac{2^4}{1}=16$$

* 请一定注意书写证明时添加**必要的文字说明**以表明**逻辑**，可以注意习题解答中**关联词**的使用。

§2.2 严谨性

2.2.1 替换原理

我们首先需要了解证明过程中最常用的原理之一 (由于我们并不关注数理逻辑的细节，本讲义将所有可以用于证明的逻辑理论称为**原理**)：**替换原理**。

举例来说，假设

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

为什么我们可以将极限定义里的 ε 替换为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 呢？事实上分为两步。首先，上式根据定义是 (默认 n、N 为正整数)

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N,\quad \forall n>N,\quad |a_n-a|<\varepsilon$$

由于 ε 本身只是一个形式的记号，我们可以将它作任意的**替换**，例如替换为 $\frac{\varepsilon}{2}$，可以得到

$$\forall\frac{\varepsilon}{2}>0,\quad \exists N,\quad \forall n>N,\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

而另一方面，我们知道一个数除以 2 是正数与这个数是正数等价，将逻辑上等价的式子进行**替换**就得到了

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N,\quad \forall n>N,\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

也就是说，这个过程里进行了两步，先对形式记号进行了替换，再对逻辑上等价的式子进行替换。每一步替换前后，所得的命题都等价。

但是，至此，我们还需要提问，这两个替换随时都可以进行吗？举例来说，考虑如下的命题

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad y > x$$

我们把 x 替换为 $2x$ 或 x^2 不会影响此命题，但如果替换为 x^2+y，就能得到荒谬的结果：

$$\forall x^2+y \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad y > x^2+y$$

这意味着，对形式变量的替换似乎确实不是任何时候都可以进行的。最关键的事情是，我们需要保证替换前后变量的**自由性**不变。也即，替换前的 x 不会受第二个条件 $\exists y \in \mathbb{R}$ 约束，那么无论替换成 z 或 w 都可以，但一定**不能与 y 有关**。

本节的"替换原理"实际上是指第一种情况，至于第二种情况，对于等价命题的替换，确实是在任何时候都可以进行的，我们可以称为"等价原理"。更复杂的替换**不等价命题**的情况我们将在下一节介绍。

讲到这里，就可以纠正不少同学在证明时容易犯的错误了。

题 1. 下面的两个命题 (称为命题 2、命题 3) 与 a_n 在 n 趋于无穷时极限是 a (称为命题 1) 等价吗？若不等价，它们的推出关系是怎样？

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n > N, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{N}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n > N, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{n}$$

解答：

首先，命题 2 与命题 3 都能推出命题 1，这是由于 N、n 都是正整数，因此 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{N}$ 或 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{n}$ 都意味着 $|a_n - a| < \varepsilon$，命题 1 已经成立 (此处的严格逻辑见下一节)。

此外，命题 3 也可以推出命题 2，这是因为在 $n > N$ 的条件下 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{n}$ 也可以推出 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{N}$。

命题 1 不能推出命题 2，考虑数列

$$a_n = n^{-1/2}$$

其极限为 0，但取 $\varepsilon = 0.5$，无论如何取 N 都无法保证 $n > N$ 时 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2N}$，矛盾。

* 注意三个命题里的 ε、N、n 实际上是不同的，这是**受约束性**带来的任意替换结果。

命题 2 不能推出命题 3，不过反例相对复杂：记 $b_n = na_n$，我们进行如下的构造：

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1$$

$$b_3 = 0, \quad b_4 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \quad b_5 = \frac{4}{6}, \quad \ldots, \quad b_7 = 1$$

$$b_8 = 0, \quad b_9 = \frac{1}{3} = \frac{8}{24}, \quad b_{10} = \frac{9}{24}, \quad \ldots, \quad b_{25} = 1$$

$$\cdots$$

可以发现，由于 $|a_n| \le \frac{1}{n}$，有 $a = 0$，此时命题 3 等价于 $|b_n| \to 0$，结论不成立。对于命题 2，对任何在 $\frac{1}{k-1}$ 与 $\frac{1}{k}$ 之间的 ε (k 为正整数，若 $\varepsilon > 1$ 则取 $k = 1$)，考虑上方构造的第 k 行，令 N 为这行的第一个下标，可以验证此后均成立 (事实上下方第一个不等号就是构造的想法来源)

$$\forall n > N, \quad |b_n| \le \frac{n-1}{kN} < \frac{n}{kN} < \frac{n\varepsilon}{N}$$

这即得到了 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{N}$，结论成立。

* 上方的证明和构造稍有技巧性，需要对概念较为熟悉以后才能想到。我自己构造此数列也尝试了挺久，一个**更简单的构造**是，将上述 b_n 不为 1 的项都改为 0，可用完全相同的方式证明成立性。由此可以类似发现，b_n 只需取 0 或 1，且 1 相距"足够远"就能得到反例，例如只有当 $n = k!$ (k 为正整数) 时 b_n 为 1，其他为 0。
* **学会构造反例是重要的**，因为反例可以帮助大家判断一个"看起来可能对"的逻辑是不是真的正确。稍后我们将看到更复杂的例子。

* 事实上，进行了"不合法的替换"并非得到的结论一定错，但从逻辑上来说确实**无法直接推出**。

总之，在进行形式记号的替换时，必须保证**自由变量替换为自由变量**，而**不能涉及在该命题中受到约束的变量**。当然，不同命题中可能有不同的自由变量，如果在其他地方得到了一个正整数 M，将 ε 替换为 $\frac{\varepsilon}{M}$ 也是可行的。

2.2.2 任意与存在

接下来，我们将介绍大学中常用而高中几乎不会出现的，关于"任意"与"存在"的几条原理。先来看一个经典的问题"找命题的否定"：

题 2. 给出如下命题的否定：对任意 $M > 0$，存在正整数 N 使得对任意 $n > N$ 有 $|a_n| > M$。

解答：

至少大家应该或多或少接触过 (如果没有接触过就请现在**记住**) 一个结论：一个包含任意、存在的命题的否定，只要把**任意改成存在**、**存在改成任意**，然后**将最后一句话改为否定即可**。也就是说，上述命题的否定为：
存在 $M > 0$ 使得对任意正整数 N 都存在 $n > N$ 满足 $|a_n| \le M$。
* 题目中的命题可以写为 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，下一章将讨论相关定义。

* 本部分接下来的内容都**与考试无关**，但如果大家能看完，会更能理解证明中的**逻辑**。

不知道大家是否想过，为何这样的做法是有道理的呢？这些有关证明、命题的东西就涉及到数学的一个重要且基础的分支，**数理逻辑**。正如其他数学分支一样，数理逻辑也需要一些公理与定理作为支撑，如上节所说，我们将它们称为**原理**，关于任意与存在，可以有着以下的原理：

$$(\neg\exists x A(x)) \leftrightarrow (\forall x \neg A(x))$$

我们简单介绍一下上方的记号：这里的 $A(x)$ 不是函数，而是一个关于 x 的**命题**，数理逻辑中研究的对象几乎都是命题；$\leftrightarrow$ 表示左右可以互相**推出**，我们用 $\leftarrow$ 或 $\rightarrow$ 表示单侧的推出；$\neg$ 表示对后方命题的**否定**；$\exists x A(x)$ 表示存在 x 使命题 $A(x)$ 成立，这**仍然是一个命题**，而 $\forall x A(x)$ 则表示对任何 x，命题 $A(x)$ 都成立——自然，$\forall x \neg A(x)$ 表示对任何 x，命题 $A(x)$ 都不成立。
* 注意此原理也是一个命题，而我们将它称为原理说明这个命题**恒真**，无论 $A(x)$ 是何种命题，上方命题都成立。

由此，我们可以将上方这句话解释为：以下两个命题相互等价：不存在 x 使得命题 $A(x)$ 成立、对任意 x 命题 $A(x)$ 不成立。当然，这句话很符合**直觉** (至于究竟什么是逻辑直觉，这是哲学家们研究的领域)，我们下面将用它推导出**题 2** 的更严谨解答。分为以下几步：

1. 对于**推出** ($\rightarrow$) 的更严谨理解

所谓的 $p \to q$ (这里的字母默认代表**命题**)，一个符合直觉的定义即，假设 p 成立，可以**证明** q 成立——篇幅所限，我们不会讨论数理逻辑中究竟何为一个证明。不过，之所以单独讨论这件事，是因为存在一个必须理解的事情：**假命题可以推出任何命题**。

虽然这件事基本可以当作推出定义的一部分，但由于它并不像我们使用的其他原理一样符合直觉，我们必须作一定的说明。一个相对合理的理解是，这其实是为了让**任意**符合逻辑直觉。

当我们在说**任意一个三角形都有三条边**时，我们其实在说，对任意一个图形 G，G 是三角形可以**推出** G 有三条边。这句话当然是正确的，因此，这句话**对任意图形都正确**——也就是说，在 "G 不是三角形" 时，"G 是三角形可以推出 G 有三条边" 仍然是正确的。

一件明显的事是，无论右边的命题是不是 "G 有三条边"，我们都不希望 "G 不是三角形" 的情况影响整个命题的正确性，出于 "任意" 的语义，我们必须规定 G **不是三角形**时，无论 p 是什么命题，"G **是三角形可以推出** p" 都是真的，这就是所谓的假命题可以推出任何命题。

* 事实上，在数理逻辑中，"假设 p 成立可以证明 q 成立" 并不是 $p \to q$ 的定义，两者的等价性是一个称为**演绎定理**的定理。

2. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ **恒真**

我们将用到以下**双重否定原理**：

$$\neg\neg p \leftrightarrow p$$

也即对命题 p，其双重否定与自身等价。

现在，我们假设 $p \to q$ 已经成立，来证明 $\neg q \to \neg p$。为证明 $\neg q \to \neg p$，我们进一步假设 $\neg q$ 成立，此时若 p 成立，利用 $p \to q$ 可知 q 成立。由于 $\neg q$ 成立，"$\neg q$ 不成立" 不成立，也即 $\neg\neg q$ 不成立，利用双重否定原理可知 q 不成立，这就得到了矛盾。

* 反证法的原理是对命题 r，$\neg r$ 与 r 至少有一个成立，这称为**排中律** (注意这并没有保证两者恰有一个成立，而我们刚才证明了至多有一个，因此的确恰有一个)。

* 将 p、q 替换为 $\neg q$、$\neg p$，结合双重否定原理将等价部分进行替换即可以得到下式恒真：

$$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$$

综合上方即得下式恒真：

$$(\neg q \to \neg p) \leftrightarrow (p \to q)$$

这就是**逆否命题与原命题等价**。

3. $(\neg\forall x A(x)) \leftrightarrow (\exists x \neg A(x))$ **恒真**

我们将已知的原理 $(\neg\exists x A(x)) \leftrightarrow (\forall x \neg A(x))$ 拆成

$$(\neg\exists x A(x)) \to (\forall x \neg A(x))$$

$$(\forall x \neg A(x)) \to (\neg\exists x A(x))$$

两块，利用第二部分推导可知可以颠倒方向后两侧同加否定，也即下方两式恒真：

$$(\neg\forall x \neg A(x)) \to (\neg\neg\exists x A(x))$$

$$(\neg\neg\exists x A(x)) \to (\neg\forall x \neg A(x))$$

利用双重否定原理可以替换得到下方两式恒真：

$$\exists x A(x) \to (\neg\forall x \neg A(x))$$

$$(\neg\forall x\neg A(x))\to\exists xA(x)$$

将命题 $A(x)$ 利用替换原理替换为 $\neg A(x)$，可得下方两式恒真：

$$\exists x\neg A(x)\to(\neg\forall x\neg\neg A(x))$$

$$(\neg\forall x\neg\neg A(x))\to\exists x\neg A(x)$$

再次利用双重否定原理可得下方两式恒真：

$$\exists x\neg A(x)\to(\neg\forall xA(x))$$

$$(\neg\forall xA(x))\to\exists x\neg A(x)$$

将两个命题合并即为结论。

4. 对**任意**与**存在**的进一步讨论

值得注意的是，在**题 2** 中，我们事实上并没有见到 $\forall xA(x)$ 或 $\exists xB(x)$ 这样形式的命题。与之相对，我们见到的是类似

$$\forall p(x),A(x),\quad \exists q(x),B(x)$$

的形式 (注意以上两个命题**并非严谨的数理逻辑写法**)，那么，它们是什么含义呢？

在第一部分推导中，我们已经得到了 $\forall p(x),A(x)$ 的含义事实上是

$$\forall x,p(x)\to A(x)$$

也就是说，当我们在说 $\forall x>0,x^3>0$ 时，我们指的其实是，对任何 x，$x>0$ 能推出 $x^3>0$。

然而，对于存在，$\exists q(x),B(x)$ 并不代表 $\exists x,q(x)\to B(x)$。我们以 $\exists x>0,x^2<0$ 为例，这当然是一个假命题，但是正如第一部分讨论的**假命题可以推出任何命题**，既然有 x 使得 $x>0$ 为假，$\exists x,(x>0)\to(x^2<0)$ 应当是一个真命题。

仔细观察可以发现，存在事实上是在说**且**，也即 $\exists q(x),B(x)$ 的真正解释是

$$\exists x,q(x)\wedge B(x)$$

也就是说，当我们再说 $\exists x>0,x>1$ 时，我们指的其实是，有一个 x 使得 $x>0$ 成立、$x>1$ 也成立。

5. $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(p\to\neg q)$ **恒真**

* 我们默认 $\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 同时出现时先计算 $\neg$。

先证明 $\neg(p\wedge q)\to(p\to\neg q)$ 恒真：只需说明 $\neg(p\wedge q)$ 成立时，若 p 成立则 $\neg q$ 成立。由于 $\neg(p\wedge q)$ 成立，p 与 q 不同时成立，而 p 成立则 q 不成立，利用排中律也即 $\neg q$ 成立。

再证明 $(p\to\neg q)\to\neg(p\wedge q)$ 恒真：若 p 能推出 $\neg q$，若 p 为假则 $p\wedge q$ 不成立，若 p 为真可推出 q 为假，因此 $p\wedge q$ 也不成立，两者结合即说明 $\neg(p\wedge q)$ 必然成立。

综合以上两部分得证。

6. $\neg(p\to q)\leftrightarrow(p\wedge\neg q)$ **恒真**

将第五部分推导的结论拆分为

$$\neg(p\wedge q)\to(p\to\neg q)$$

$$(p\to\neg q)\to\neg(p\wedge q)$$

利用第二部分推导并通过双重否定原理进行替换可得以下两式恒真：

$$\neg(p \to \neg q) \to (p \land q)$$

$$(p \land q) \to \neg(p \to \neg q)$$

将 q 替换为 $\neg q$ 并通过双重否定原理进行替换可得以下两式恒真：

$$\neg(p \to q) \to (p \land \neg q)$$

$$(p \land \neg q) \to \neg(p \to q)$$

将两个命题合并即为结论。

7. 最终推导

我们将**题 2** 形式化地写为

$$\forall p(M), \exists q(N), \forall r(n, N), s(n, M)$$

这里 p、q、r、s 均代表命题。

为了得到其否定，我们先利用第四部分推导将其改写为符合数理逻辑要求的形式

$$\forall M, p(M) \to (\exists N, q(N) \land (\forall n, r(n, N) \to s(n, M)))$$

接下来，我们想知道此命题的否定

$$\neg(\forall M, p(M) \to (\exists N, q(N) \land (\forall n, r(n, N) \to s(n, M))))$$

的等价表述。

利用第三部分推导，将 $p(M) \to (\exists N, q(N) \land (\forall n, r(n, N) \to s(n, M)))$ 视为一个命题，可知上式等价于

$$\exists M, \neg(p(M) \to (\exists N, q(N) \land (\forall n, r(n, N) \to s(n, M))))$$

利用第六部分推导，将 $\exists N, q(N) \land (\forall n, r(n, N) \to s(n, M))$ 视为一个命题，利用等价替换可知上式等价于

$$\exists M, p(M) \land \neg(\exists N, q(N) \land (\forall n, r(n, N) \to s(n, M)))$$

可以发现，此时前面的部分已经符合了第四部分推导中的讨论，从而可以形式化写成

$$\exists p(M), \neg(\exists N, q(N) \land (\forall n, r(n, N) \to s(n, M)))$$

进一步利用关于任意与存在的原理可知上式等价为

$$\exists p(M), \forall N, \neg(q(N) \land (\forall n, r(n, N) \to s(n, M)))$$

利用第五部分推导可知上式等价为

$$\exists p(M), \forall N, q(N) \to \neg(\forall n, r(n, N) \to s(n, M))$$

再次利用第四部分推导可知上式可以形式化写成

$$\exists p(M), \forall q(N), \neg(\forall n, r(n, N) \to s(n, M))$$

再次利用第三部分推导、第六部分推导可知上式等价为

$$\exists p(M), \forall q(N), \exists n, r(n, N) \land \neg s(n, M)$$

最后利用第四部分推导形式化写为

$$\exists p(M), \forall q(N), \exists r(n,N), \neg s(n,M)$$

可以发现，这恰好是题目中存在改成任意、任意改成存在、将最后一句话改为否定的结果，符合我们之前找到的**规律**。

事实上，上方的证明并非数理逻辑上严谨的证明，但对于尚未学过数理逻辑的同学们来说已经足以作为对逻辑的**理解**。所谓大学数学的证明逻辑更加复杂，往往就是这些任意、存在、推出、否定的**相互嵌套**，如果说上述过程能对证明书写有什么启示，大概就是**分析好每一层的逻辑**，并**逐层进行操作**，而不是试图一口气给出全部的逻辑。

* 例如，本次作业里的 1.3 节例 7 中，由于 a_n 极限为 a 是**条件**，相应的极限定义中的 ε 可以**任取**，而 $\sqrt{a_n}$ 极限为 $\sqrt{a}$ 是**目标**，相应的极限定义中的 ε **需要被任意给定**。因此，我们必须以 $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|<\varepsilon$ 为目标，通过在 a_n 极限为 a 的定义中**取出**适当的值 (如 $a>0$ 时为 $\sqrt{a}\varepsilon$) 作为限制。

最后介绍两个上方并未涉及的重要性质：

1. 等价具有**自反性**、**对称性**与**传递性**：

$$p \leftrightarrow p$$

$$(p \leftrightarrow q) \to (q \leftrightarrow p)$$

$$((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \to (p \leftrightarrow r)$$

$\wedge$ 这个符号表示**且**，也即左右两个命题都成立。上述三个定理也即：命题 p 与自身等价；对命题 p、q，若 p、q 等价则 q、p 等价；对命题 p、q、r，若 p、q 等价且 q、r 等价，则 p、r 等价。

* 大家有兴趣可以用我们已经说的内容自行证明它们，不含存在与任意时的等价原理事实上可以通过类似思路证明。

2. **不等价命题**也可以替换：

$$(p(x) \to q(x)) \to (\forall x p(x) \to \forall x q(x))$$

$$(p(x) \to q(x)) \to (\exists x p(x) \to \exists x q(x))$$

也就是说，只要 $p(x) \to q(x)$，无论前面如何套存在与任意，推出性仍然成立，这就说明了**题 1** 证明的第一部分是合理的。$p(x) \leftrightarrow q(x)$ 时的情况只是上述替换的特例。

§2.3 证明的思路

2.3.1 存在性问题的非构造证明

本节我们终于将离开上方的纯抽象逻辑层面推导，回到具体的**证明技巧**来。希望大家能在学习各种技巧性内容时也注意自身的逻辑为何是合理的。

首先，我们将考虑一类**存在性**问题：问题的最终形式是说明存在 x 满足某些性质。自然地，最直接的方法是直接找到 x，这称为**构造性证明**。构造性证明的技巧有很多，其中最重要的往往是先试着**感性认知**命题在 “说什么”，再从所述的内容中找到符合要求的对象。

* 例如，通过**反例构造**说明推导不成立即是一种构造性证明。从逻辑的角度来说，反例构造是为了说明命题 p 不能推出命题 q，而只要找到命题 p 为真、命题 q 为假的**例子**，即能说明这点。由于我们之后还将见到各种各样的反例，此处不再对构造性证明做更多展开。

不过，存在性问题事实上并非一定要通过构造证明。我们来看一个经典且有趣的例子：

题 3. 证明存在正无理数 a、b 使得 a^b 是有理数。

解答：

考虑 $c=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，若 c 是**有理数**，取 a、b 均为 $\sqrt{2}$ 可得命题成立，**否则**，由于

$$c^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=2$$

取 $a=c$、$b=\sqrt{2}$ 可得命题成立。

在这个例子中，我们并没有显式构造出结果，但却的确得到了结论，这就是依赖**排中律**：既然 c 要么是有理数要么是无理数，只要两种情况都能得到结论，就能得到原命题结论成立。

除了这样的讨论外，在高等数学中还有一个常用的构造思路，我们姑且称为**猎人兔子原理**：猎人在数轴上设立了一个长为 $x>0$ 的坑，则一只步长小于 x 的兔子从左到右跳时一定会落到坑里。我们先用它解决下面的被称为**有理数稠密性**的问题：

题 4. 证明对任何 $a<b$，存在有理数 $x\in(a,b)$。

解答：

由于 $b-a>0$，我们可以取出正整数 n 使得

$$\frac{1}{n}<b-a$$

此时通过猎人兔子原理已经可以感受到存在整数 m 使得 $\frac{m}{n}\in(a,b)$，下面我们来严谨证明此结论。

为了说明兔子总有一步将跳进坑里，我们其实只需要证明兔子“走过坑的第一步”一定会落在坑里。也即，我们取 m 为**满足 $m>na$ 的最小整数** m。

此时，利用最小性可以发现

$$m-1\le na$$

将定义与上式两侧同除以 n 得到

$$\frac{m}{n}>a,\quad \frac{m}{n}-\frac{1}{n}\le a$$

而第二式即得

$$\frac{m}{n}\le a+\frac{1}{n}<b$$

从而令 $x=\frac{m}{n}$，由于其为整数除以正整数，必然为有理数，而由已证 $x\in(a,b)$，因此符合要求。

无理数稠密性其实也可以类似证明，只是有一处需要注意：

题 5. 证明对任何 $a<b$，存在无理数 $x\in(a,b)$。

解答：

我们先尝试**模仿之前的证明**：由于 $b-a>0$，我们可以取出正整数 n 使得

$$\frac{\sqrt{2}}{n}<b-a$$

此时通过猎人兔子原理已经可以感受到存在整数 m 使得 $\frac{\sqrt{2}m}{n}\in(a,b)$，下面我们来严谨证明此结论。

为了说明兔子总有一步将跳进坑里，我们其实只需要证明兔子“走过坑的第一步”一定会落在坑里。也即，我们取 m 为**满足** $\sqrt{2}m > na$ **的最小整数** m。

此时，利用最小性可以发现

$$\sqrt{2}m - \sqrt{2} \le na$$

将定义与上式两侧同除以 n 得到

$$\frac{\sqrt{2}m}{n} > a, \quad \frac{\sqrt{2}m}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n} \le a$$

而第二式即得

$$\frac{\sqrt{2}m}{n} \le a + \frac{\sqrt{2}}{n} < b$$

但是，在令 $x = \frac{\sqrt{2}m}{n}$ 时，虽然仍然可以得到 $x \in (a,b)$，却会发现一个问题：当 $m=0$ 时，$x=0$ 是**有理数**。

由此，上述取法只能在 $0 \notin (a,b)$ 时保证成立，在 $0 \in (a,b)$ 时需要寻找其他证明方法。事实上这并不困难：由条件 $b > 0$，因此存在正整数 n 使得 $\frac{\sqrt{2}}{n} < b$，又由于其大于 0，令 $x = \frac{\sqrt{2}}{n}$ 即得 $x \in (0,b) \subset (a,b)$，符合要求。综合这部分与之前的证明即得到结论。

* 证明的严谨性**即使步骤看似简单也需要检查**，否则很可能发生意料之外的错误。

在直接利用此原理解决了一些问题后，我们就可以研究下面这个似乎很难找到思路的问题了 (注意这仍然是一个存在性问题，因为极限存在的定义开头是 $\forall \varepsilon > 0$，证明不存在则要说明 $\exists \varepsilon > 0$)：

题 6. 证明 $\sin n$ 在 n 趋于无穷时的极限不存在。

解答:

我们分为三步证明：

– 初步分析

由于 $|\sin n| \le 1$ 恒成立，这是一个**有界**数列，为了证明其极限不存在，我们可以先尝试**找**一个有界但极限不存在的数列，如 $a_n = (-1)^n$ 进行观察。

可以发现，它不存在极限的本质原因是不断在上下振荡。我们试着将它总结为一个**引理**：若对数列 a_n，存在 $t_1 < t_2$ 使得 a_n 中有无穷多项小于 t_1、有无穷多项大于 t_2，则 a_n 不存在极限。

* 事实上，若 a_n 有界且极限不存在，一定能找到上述的 t_1 与 t_2，不过此证明需要的分析技巧较多，不在课程要求内，我们将在证明最后进行补充。

– 引理证明

若引理不成立，假设 a_n 极限为 l，则在极限定义中取 $\varepsilon = \frac{t_2 - t_1}{2}$ 可得

$$\exists N, \quad \forall n > N, \quad |a_n - l| < \frac{t_2 - t_1}{2}$$

* 当然，这个取法也是有了下方的估算后才得到的。

若 $l \ge \frac{t_1 + t_2}{2}$，上方的式子可以说明第 N 项后所有 a_n 都满足

$$a_n > l - \frac{t_2 - t_1}{2} \ge t_1$$

与有无穷多项小于 t_1 矛盾。同理，若 $l < \frac{t_1 + t_2}{2}$ 与有无穷多项大于 t_2 矛盾。

综合两种情况的矛盾即得引理成立。

– 原命题证明

既然我们已经证明了引理，下面就需要找到 $t_1 < t_2$ 使得有无穷多个 n 满足 $\sin n < t_1$、有无穷多个 n 满足 $\sin n > t_2$。

接下来是证明的关键：虽然我们无法知道 $\sin n$ 如何在 $\sin x$ 图像上分布，但既然它的**步长**是 1，根据猎人兔子原理，只要陷阱的长度大于 1，一定会有某个 $\sin n$ 落在陷阱中。

由此，考虑区间

$$I_k = \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{N}^*$$

由于 I_k 长度为 $\frac{\pi}{2} > 1$，且两端点均为正数，必然存在正整数 $n_k \in I_k$，而利用三角函数知识即得

$$\sin n_k > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

由于每个区间 I_k 都在 I_{k-1} 的后方，n_k 必然单调增加，因此考虑所有 $k \in \mathbb{N}^*$ 即得到了数列 $\sin n$ 中有无穷多项大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

同理，考虑区间

$$\left(\frac{\pi}{4} + (2k-1)\pi, \frac{3\pi}{4} + (2k-1)\pi\right), \quad k \in \mathbb{N}^*$$

可以得到数列 $\sin n$ 中有无穷多项小于 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

取 $t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$、$t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$，由引理即得证。

* 此证明虽然看起来较长，但过程的**思路**是非常清晰的：从类比得到引理，再用猎人兔子原理设法构造符合引理的 t_1、t_2。

– (附加) 引理逆命题证明

我们现在来证明，若 a_n **有界**且极限不存在，一定能找到 $t_1 < t_2$ 使得 a_n 中有无穷多项大于 t_1、有无穷多项小于 t_2。

此命题的证明分为两步：

1. a_n 有子列极限存在

   * 子列类似子集，指数列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$，其中 n_i 均为正整数，且对每个 i 有 $n_i < n_{i+1}$，也即代表从数列 a_n 中按顺序选出**无穷多项**构成的新数列。

   由于我们的实数完备性假设**单调有界数列极限存在**，只要证明 a_n 有**单调子列**，即可得到其有极限存在的子列。

   若 a_n 有单调递增子列，已经得证，下面假设 a_n 无单调递增子列，我们证明它有单调递减子列。

   若对所有 n 都存在 $n_0 > n$ 使得 $a_{n_0} \geq a_n$，则任取一个 m_0，重复此过程可找到

   $$a_{m_1} \geq a_{m_0}, \quad a_{m_2} \geq a_{m_1}, \quad \ldots$$

   且下标满足

   $$m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$$

   这就得到了一个单调**递增**的子列，矛盾，从而必然存在一个 n_1 使得对任何 $n_0 > n_1$ 都有 $a_{n_0} < a_{n_1}$。

   进一步地，若对所有 $n > n_1$ 都存在 $n_0 > n$ 使得 $a_{n_0} \geq a_n$，只要取 $m_0 > n_1$，与上方相同仍然可以得到单调递增的子列，矛盾，从而必然存在一个 $n_2 > n_1$ 使得对任何 $n_0 > n_2$ 都有 $a_{n_0} < a_{n_2}$。

利用此过程，我们可以得到下标逐渐增大的 $n_1, n_2, \dots$ 使得

$$\forall n > n_k, \quad a_n < a_{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

而再根据这些下标逐渐增大即得

$$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \dots$$

这就得到了一个单调**递减**子列，得证。

2. t_1 与 t_2 存在

由已证，我们可以假设 a_n 的子列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ 极限为 l。

由于 a_n 极限不存在，其极限不为 l，利用极限定义的**否定**可知

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall N, \quad \exists n > N, \quad |a_n - l| \geq \varepsilon$$

取出上述 ε。若 a_n 中只有有限多项满足 $|a_n - l| \geq \varepsilon$，则取 N 为最后一项的下标即可使得对任何 $n > N$ 都有 $|a_n - l| < \varepsilon$，矛盾，于是 a_n 中必然有无穷多项满足 $|a_n - l| \geq \varepsilon$。

进一步观察此式，可发现由于 $|a_n - l| \geq \varepsilon$ 等价于 $a_n \leq l - \varepsilon$ 或 $a_n \geq l + \varepsilon$，必然有无穷多个 a_n 满足 $a_n \leq l - \varepsilon$ 或有无穷多个 a_n 满足 $a_n \geq l + \varepsilon$ (否则，由于满足任何一个的 a_n 都有限，满足 $|a_n - l| \geq \varepsilon$ 的 a_n 也将有限)。

我们先考虑第一种情况，即有无穷多个 a_n 满足

$$a_n \leq l - \varepsilon < l - \frac{2}{3}\varepsilon$$

此时，由于

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = l$$

可知

$$\exists K, \quad \forall k > K, \quad |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

也即当 $k > K$ 时均有

$$a_{n_k} > l - \frac{\varepsilon}{3}$$

从而我们得到了 a_n 中有无穷多项大于 $l - \frac{\varepsilon}{3}$。

综合上方证明，取 $t_1 = l - \frac{2\varepsilon}{3}$、$t_2 = l - \frac{\varepsilon}{3}$ 即得成立。

同理，对第二种情况，取 $t_1 = l + \frac{\varepsilon}{3}$、$t_2 = l + \frac{2\varepsilon}{3}$ 可类似证得成立。

* 这说明凡是**证明有界数列极限不存在**都可以考虑这样的 t_1、t_2 构造。

除了猎人兔子原理外，另一个常用的非构造性证明方法是**抽屉原理** (也称为**鸽笼原理**)：对正整数 m、n，将超过 mn 个苹果放入 n 个抽屉，则必有一个抽屉的苹果超过 m 个。

* 抽屉原理还有**无穷**版本：将无穷个苹果放入有限个抽屉，必有一个抽屉中有无穷多个苹果。在**题 6** 附加部分的证明中，我们从有无穷多个 a_n 满足 $|a_n - l| \geq \varepsilon$ 推出了有无穷多个 a_n 满足 $a_n \leq l - \varepsilon$ 或有无穷多个 a_n 满足 $a_n \geq l + \varepsilon$ 即是利用了此原理。

我们以抽屉原理证明一个较困难的命题结束本节，大家可以注意**从无穷项中取出充分多项**的技巧：

题 7 (附加). 证明数列

$$a_n = \frac{1}{\sin(cn\pi)}$$

无界，其中 c 为无理数。

解答：

此证明事实上依赖一个很重要的引理：任何**无理数** c 满足

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \{nc\} \in (0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1)$$

这里 $\{x\} = x - [x]$ 表示 x 的小数部分，根据定义可知 $\{x\} \in [0, 1)$。

– 引理证明

取正整数 m 使得 $\frac{1}{m} < \varepsilon$。我们将区间 $[0, 1]$ 等分为 m 份，记为 $I_1, \dots, I_m$，即

$$I_j = \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]$$

考虑 $\{c\}, \{2c\}, \dots, \{(m+1)c\}$，这 $m+1$ 个数都落在 $[0, 1]$ 中，利用**抽屉原理**，必有两个落在同一个 I_j 中。

我们取出 I_j，并假设 $\{n_1c\} \in I_j$、$\{n_2c\} \in I_j$，且 $n_1 > n_2$，下面说明取 $n = n_1 - n_2$ 即符合要求。

利用小数部分定义可知 k 为整数时 $\{x + k\} = \{x\}$，从而有

$$\{nc\} = \{n_1c - n_2c\} = \{n_1c - n_2c - ([n_1c] - [n_2c])\} = \{\{n_1c\} - \{n_2c\}\}$$

而由条件 $|\{n_1c\} - \{n_2c\}| < \frac{1}{m}$，分正负讨论即得

$$\{nc\} \in \left[0, \frac{1}{m}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{m}, 1\right)$$

更进一步地，若 $\{nc\} = 0$，即说明其为整数，从而由 n 为正整数可知 $c = \frac{[nc]}{n}$ 为有理数，矛盾，因此 0 无法取到，这就说明了

$$\{nc\} \in \left(0, \frac{1}{m}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{m}, 1\right) \subset (0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1)$$

从而得证。

* 事实上，对 $\{nc\} \in (1-\varepsilon, 1)$ 的情况，利用猎人兔子原理可以发现存在正整数 n_0 使得 $\{n_0nc\} \in (0, \varepsilon)$，从而可以将引理中的 $(0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1)$ 改进为 $(0, \varepsilon)$，具体证明留给大家思考。

– 原命题证明

由于 c 为无理数，上方已经证明 nc 不可能为整数，因此分母不会为 0，数列 a_n 每项都存在。

利用引理，对任何 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$，存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\{nc\} \in (0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1)$，此时利用 k 为整数时 $|\sin(x + k\pi)| = |\sin x|$ 有

$$|a_n| = \frac{1}{|\sin(cn\pi)|} = \frac{1}{|\sin(\{nc\}\pi)|}$$

进一步利用 sin 的单调性 (注意我们限制了 ε 的上限) 可知 $|\sin(\{nc\}\pi)| < \sin(\varepsilon\pi)$，从而

$$|a_n| > \frac{1}{\sin(\varepsilon\pi)}$$

利用 $x > 0$ 时 $\sin x < x$ (函数极限部分将学到此结论) 即得

$$|a_n| > \frac{1}{\varepsilon\pi}$$

由于对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ 都可取到 n 使得上式成立，对任何 $M > 0$，取

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{\pi M}, \frac{1}{2}\right\}$$

即得存在 n 使得 $|a_n| > \frac{1}{\pi\varepsilon} > M$，这就证明了无界性。

2.3.2 从直觉出发

毫无疑问，我们实际碰到的证明题中，非存在性的问题将远多于存在性问题，而这部分的技巧也将更加复杂。不过，正如第一章中所说，数学最终是需要建立直觉，遇到非存在性问题时，也不妨先从**直觉**出发考虑——直到实在做不出来的时候再尝试调整直觉。事实上，**判断正误**类型的题目最适合用来培养直觉，因此，当遇到结论时，不妨尝试想想**去掉/更改某些条件后其是否还正确**，并在尝试证明或举反例的过程中加深理解。

我们先来看一个很简单的问题：

题 8. 判断正误：n 趋于无穷时，若 a_n 的奇数项构成的数列与偶数项构成的数列极限均为 a，则 a_n 极限为 a。

解答：

结论正确，证明如下：要证 a_n 极限为 a，也即对任何 ε 有

$$\exists N, \quad \forall n > N, \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

而从条件可以得到

$$\exists K_1, \quad \forall k > K_1, \quad |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$$

$$\exists K_2, \quad \forall k > K_2, \quad |a_{2k} - a| < \varepsilon$$

由此，取 $N = 2\max(K_1, K_2)$，则 $n > N$ 时，n 为奇数可推出 $n > 2K_1 - 1$，从而根据第一式可知 $|a_n - a| < \varepsilon$；n 为偶数可推出 $n > 2K_2$，从而根据第二式可知 $|a_n - a| < \varepsilon$。综合以上两式得成立。

事实上，我们可以从这个问题衍生出更多个判断题，此处给出正确的命题，大家可以自己证明作为练习：

1. n 趋于无穷时，若 a_n 的奇数项构成的数列与偶数项构成的数列极限均存在，则 a_n 极限未必存在。
2. n 趋于无穷时，若 a_n 极限为 a，则 a_n 的奇数项构成的数列与偶数项构成的数列极限均为 a。
3. n 趋于无穷时，若 a_n 除以 k 余 $0, 1, \ldots, k-1$ 的项构成的数列极限均为 a，则 a_n 极限为 a。
4. 若 a_n 奇数项单调增、偶数项单调减，且 n 趋于无穷时 $|a_n - a_{n+1}|$ 趋于 0，则 a_n 极限存在。

   * 证明思路：先证明有界性，从而奇数项、偶数项极限均存在，再说明极限相同。
5. 若 n 趋于无穷时 $|a_n - a_{n+1}|$ 趋于 0，a_n 极限未必存在。

   * 证明思路：考虑 $a_1 = 1$、$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}$，这样得到的数列称为**调和级数**，有多种方法证明其极限不存在，我们之后将学到。

前三个命题算是直接的衍生，而第四个命题则是将原结论扩展为了一种**极限判断方法**，第五个命题是考虑其在减小条件时为何不成立。当然，这些命题并不是凭空想到的，而是在遇到相关问题时**通过对原题的理解自然产生的**，也可以作为某种**引理**存在。

即使是更复杂的题目，我们也可以通过练习培养出的直觉判断正误：

题 9. 判断正误 (两式分别判断)：若满足 $p_1 > 0$ 的**非负**数列 p_n 与数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=a$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_1+\cdots+a_np_n}{p_1+\cdots+p_n}=a$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_n+\cdots+a_np_1}{p_1+\cdots+p_n}=a$$

解答：

从表面上看，两式似乎都是 a_1 到 a_n **加权平均**的形式。但是，这里的权重分配并不能保证均匀，而是某种“n 足够大时对应的权重将很小”。由此，我们可以想到两个符合条件的极端例子：

$$p_1=1,\quad \forall n>1,\quad p_n=0$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad p_n=1$$

前者代表“最不均匀”的情况，后者代表“最均匀”的情况。想要验证命题是否成立，可以先考虑这两个极端例子，若此时都能成立则有很大概率时正确的。

* 某种意义上，想到这两种极端情况就是想做出本题对应的必要**直觉**。

– 第一式

取数列 p_n 满足

$$p_1=1,\quad \forall n>1,\quad p_n=0$$

此时计算得第一式左侧即为

$$\lim_{n\to\infty}a_1=a_1$$

而右侧为 a，因此任取一个第一项不等于极限的数列 a_n 就是反例，如

$$a_1=1,\quad \forall n>1,\quad a_n=0$$

– 第二式

对第二式，“最不均匀”的情况可直接由定义验证成立，“最均匀”的情况在上课已经证明成立，由此第二式大概率是正确的，我们先**设法进行证明**。

* 当然，若证明过程中卡住，根据无法证出的地方又可以**回到找反例**的步骤，并进一步判断是的确不成立还是证明方式问题，以此循环。

根据极限定义，对任何 ε，我们需要寻找 N 使得 $n>N$ 时

$$\left|\frac{a_1p_n+\cdots+a_np_1}{p_1+\cdots+p_n}-a\right|<\varepsilon$$

将上式通分后可化为

$$\left|\frac{(a_1-a)p_n+\cdots+(a_n-a)p_1}{p_1+\cdots+p_n}\right|<\varepsilon$$

由此，记 $b_n = a_n - a$，则 b_n 极限为 0，这样问题就化为了寻找 N 使得 $n > N$ 时

$$\left|\frac{b_1 p_n + \cdots + b_n p_1}{p_1 + \cdots + p_n}\right| < \varepsilon$$

由于无法保证所有 b_i 的正负，当它们全为正 (这当然是可能的) 时上方能够尽量大，因此我们可以先利用三角不等式进行一步放缩

$$\left|\frac{b_1 p_n + \cdots + b_n p_1}{p_1 + \cdots + p_n}\right| \le \frac{|b_1| p_n + \cdots + |b_n| p_1}{p_1 + \cdots + p_n}$$

只要让右侧小于 ε，就能保证左侧小于 ε

至此，我们就必须用上 $\frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n}$ 趋于 0 或 b_n 趋于 0 的性质了。经过**尝试**，先用 b_n 趋于 0 的条件是较容易做出来的，大家可以自行研究先用另一个条件能否得到结论。

由于 b_n 趋于 0，对任何 δ 可以取出 N_1 使得 $n > N_1$ 时

$$|b_n| < \delta$$

利用上式，原式即可放缩为

$$\frac{|b_1| p_n + \cdots + |b_n| p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \le \frac{1}{p_1 + \cdots + p_n}\left(\sum_{i=1}^{N_1} |b_i| p_{n+1-i} + \delta \sum_{i=N_1+1}^{n} p_{n+1-i}\right)$$

可以想象，当 n 很大时，δ 后面的乘积可能很接近 $p_1 + \cdots + p_n$，无法保证它较小，因此直接将它放大为 $p_1 + \cdots + p_n$，得到

$$\frac{|b_1| p_n + \cdots + |b_n| p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \le \frac{1}{p_1 + \cdots + p_n} \sum_{i=1}^{N_1} |b_i| p_{n+1-i} + \delta$$

由于 δ 可以任取，此时第二项已经可以很小，为了保证总体小于 ε，还需要控制第一项。

由于 b_n 极限存在，其必然有界，也即存在 $M > 0$ 使得 $|b_n| < M$ 对任何 n 成立 (取 $M = \max\{|b_1|, \ldots, |b_{N_1}|, \delta\} + 1$ 即可)。由于对第一项无法进行更好的处理，我们将所有 b_n 放大为 M 最终得到

$$\frac{|b_1| p_n + \cdots + |b_n| p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \le M \sum_{i=1}^{N_1} \frac{p_{n+1-i}}{p_1 + \cdots + p_n} + \delta$$

可以发现，当 n 很大时，我们可以使得所有 $n+1-i$ 都很大 (因为它至少是 $n+1-N_1$)，由此可以想到将分母**截断**，只保留 $p_1 + \cdots + p_{n+1-i}$ 以符合极限定义，这样即能写成

$$\frac{|b_1| p_n + \cdots + |b_n| p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \le M \sum_{i=1}^{N_1} \frac{p_{n+1-i}}{p_1 + \cdots + p_{n+1-i}} + \delta$$

利用 p_n 的极限结论，对任何 $\gamma > 0$，存在 N_2 使得 $n > N_2$ 时

$$\frac{p_n}{p_1 + \cdots + p_n} < \gamma$$

那么，只要在原式中让 $n > N_1 + N_2$，即能使得求和中每一项都小于 γ，此时即有

$$\frac{|b_1| p_n + \cdots + |b_n| p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \le M \sum_{i=1}^{N_1} \frac{p_{n+1-i}}{p_1 + \cdots + p_{n+1-i}} + \delta < M N_1 \gamma + \delta$$

为了让 $M N_1 \gamma + \delta \le \varepsilon$，只需取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$、$\gamma = \frac{\varepsilon}{2MN_1}$ 即可。

最后，我们**综合**上述过程 (事实上答案呈现的过程往往只有下方的部分)：对**任何** $\varepsilon > 0$，取出 N_1 使得

$$\forall n > N_1, \quad |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

记 $M = \max\{|b_1|, \ldots, |b_{N_1}|, \delta\} + 1$，可发现对任何 $n \in \mathbb{N}^*$ 有 $|b_n| < M$。

进一步取出 N_2 使得

$$\forall n > N_2, \quad \frac{q_n}{q_1 + \cdots + q_n} < \frac{\varepsilon}{2MN_1}$$

* 注意此式中 M、N_1 是**自由**的，因此如此替换的逻辑是正确的，详见之前的讨论。

令 $N = N_1 + N_2$，则对任何 $n > N$，由于 $n > N_1$，拆分出 N_1 项并直接放缩有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{b_1 p_n + \cdots + b_n p_1}{p_1 + \cdots + p_n}\right| \\
&\leq \frac{|b_1| p_n + \cdots + |b_n| p_1}{p_1 + \cdots + p_n} \\
&\leq \frac{1}{p_1 + \cdots + p_n}\left(M \sum_{i=1}^{N_1} p_{n+1-i} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=N_1+1}^{n} p_{n+1-i}\right) \\
&\leq M \sum_{i=1}^{N_1} \frac{p_{n+1-i}}{p_1 + \cdots + p_{n+1-i}} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

由于 $n + 1 - i \geq n + 1 - N_1 \geq N_2 + 1 > N_2$，对左侧求和每一项利用条件进一步放缩有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{b_1 p_n + \cdots + b_n p_1}{p_1 + \cdots + p_n}\right| \\
&\leq M \sum_{i=1}^{N_1} \frac{p_{n+1-i}}{p_1 + \cdots + p_{n+1-i}} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< M \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\varepsilon}{2MN_1} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

这就得到了证明。

虽然这道题相对复杂，它的确在我们考试要求的范围内：所涉及的都是**基本的放缩估算技巧**，虽然复杂但并没有本质性的无法做出的内容 (事实上考试往往会有这样的基本功证明题，这就是为何需要学会**分析**思路)。

§2.4 阶估算 I

2.4.1 什么是阶

如果说上面讲的部分是关于一般的证明技巧，本次习题课的最后一节，我们就将看到贯穿整个的高等数学**最重要**技巧，对**阶**的估算。当然，在只学到序列极限时，我们只能对此给出一个初步的定义，之后我们将看到它的更多作用。

简单来说，阶就是一个数列**趋于无穷的速度** (这里无穷可能指无穷大或无穷小)。我们以**无穷小** (也即极限为 0 的数列) 为例，假设两个**不含 0 的**数列 a_n、b_n 满足

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

我们考察它们的**比例**构成的数列无穷处的情况

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

若极限为 0，说明 a_n 趋于 0 的速度比 b_n 更快 (可以考虑 $\frac{1}{n^2}$ 与 $\frac{1}{n}$ 的例子)，称为 a_n 是比 b_n 更**高阶**的无穷小。若上述极限存在且非零，则称为 a_n 与 b_n 是**同阶**的无穷小；若上述极限为 1，进一步称 a_n 与 b_n 是**等价**的无穷小。

* 事实上，上述的同阶定义还可以进一步扩充。只要存在 $0<m<M$ 使得 $\frac{a_n}{b_n}\in(m,M)$ 恒成立，即可称两个无穷小**同阶**。不过，绝大部分情况上方定义已经够用。

反之，若 $\frac{1}{a_n}$ 极限为 0，称 a_n 为一个**无穷大**。若 a_n、b_n 都是无穷大，我们也可以类似比较：若 $\frac{1}{a_n}$ 是比 $\frac{1}{b_n}$ 高阶的无穷小，则称 a_n 是比 b_n 更**高阶**的无穷大 (也即趋于无穷的速度**更快**)；若 $\frac{1}{a_n}$ 与 $\frac{1}{b_n}$ 同阶则称 a_n 是与 b_n **同阶**的无穷大；若 $\frac{1}{a_n}$ 与 $\frac{1}{b_n}$ 等价则称 a_n 是与 b_n **等价**的无穷大。

我们先了解一些常见的阶比较，首先是多项式相关的比较：

题 10. 对关于 n 的两个多项式 $p(n)$ 与 $q(n)$，判断

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}$$

何时存在 (不考虑经过分母零点引起某项不存在的情况)，并在存在时计算极限。

解答:

我们设

$$p(n)=\sum_{k=0}^{s}p_kn^k,\quad q(n)=\sum_{k=0}^{t}q_kn^k$$

且首项系数 $p_s\neq 0$、$q_t\neq 0$。

分三类讨论：

– 若 $s>t$

对 $k>0$，我们将 n^k (和与其同阶的无穷大) 称为 k **阶无穷大**，上方的结论说明了两件事：

1. 对自然数 s，n 的 s 次多项式 $p(n)$ 是 s 阶无穷大；
2. 对自然数 s、t，n 的 s 次多项式是比 n 的 t 次多项式高阶的无穷大当且仅当 $s>t$。

这两个结论都很符合我们的直觉。还有一些与多项式无关的比较：

题 11. 证明对任何 $a>1$、$b>0$、$c>0$ 有 (这里 $\ln^c n$ 表示 $\ln n$ 的 c 次方)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^c n}{n^b}=0$$

解答:

我们分别证明这四个式子极限为 0:

– 展开可以发现

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\dots\cdot\frac{n}{n}\leq\frac{1}{n}$$

从而对任何 ε 取 $N=[1/\varepsilon]+1$ 即可使得

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

故原式得证。

* 对于阶乘我们目前并没有学到其他处理手段，只能**展开为乘法**。

- 展开可以发现

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a}{n}$$

可以发现乘积中，$k > a$ 时 $\frac{a}{k}$ 都小于 1，因此在 $n > a$ 时，删除最后一项外小于 1 的项

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a}{[a]} \cdot \frac{a}{n}$$

记

$$M = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a}{[a]} \cdot a$$

则上式即 $\frac{M}{n}$。于是我们得到 $n > a$ 时

$$0 < \frac{a^n}{n!} < \frac{M}{n}$$

通过**夹逼定理**得证。

* 夹逼定理常见的应用即为放大缩小后控制得到极限，其与**极限保序性**有本质的不同，因为其保证了极限的存在性，我们之后将更详细说明。

- 通过指数放缩出多项式的一个常见方法是**二项式定理**，也即利用

$$a^n = (1 + (a-1))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (a-1)^k$$

找正整数 m 使得 $m > b$，在 $n > m$ 时，只保留展开式中次数为 m 的项即有 (展开系数 C_n^m)

$$0 < \frac{n^b}{a^n} < \frac{n^b}{C_n^m (a-1)^m} = \frac{m! n^b}{n(n-1)\dots(n-m+1)(a-1)^m}$$

由于 m 已经取定，下方为 n 的 m 次多项式，上方为 n^b，且 $b < m$，由此想到上下同除以 n^m，与**题 10** 相同可证明右侧极限为 0，进一步通过夹逼定理得证。

- 我们记 $t = \ln n$，则此式可以改写为

$$\frac{t^c}{(\mathrm{e}^b)^t}$$

进一步记 $s = 1 - \mathrm{e}^b$ 可将其写为

$$\frac{t^c}{(1+s)^t}$$

可以发现，此时与上一式已经很像，但 t **未必为整数**，因此**无法直接展开**。

为了解决此问题，我们需要将其**放缩为整数**。对任何 n，假设 n_0 是不超过 $\ln n$ 的最大整数 (也即 $[\ln n]$)，$n_0 + 1$ 应为大于 $\ln n$ 的最小整数，根据定义放大分子缩小分母有

$$\frac{t^c}{(1+s)^t} \le \frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}}$$

找正整数 m 使得 $m > c$，与第三式相同可知 $n_0 > m$ 时

$$0 < \frac{t^c}{(1+s)^t} \le \frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}} < \frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-1+1)s^m}$$

我们最后进行放缩：与第三式相同可知

$$\lim_{n_0 \to \infty} \frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}} < \frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-m+1)s^m} = 0$$

从而对任何 $\varepsilon>0$，存在 N_0 使得 $n_0>N_0$ 时

$$\frac{(1+n_0)^c}{(1+s)^{n_0}}<\frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-m+1)s^m}<\varepsilon$$

而当 $n>\mathrm{e}^{N_0+1}$ 时即可保证 $[\ln n]>N_0$，从而取 $N=[\mathrm{e}^{N_0+1}]+1$ 即可得到 $n>N$ 时

$$\left|\frac{t^c}{(1+s)^t}\right|=\frac{t^c}{(1+s)^t}<\frac{m!(1+n_0)^c}{n_0(n_0-1)\dots(n_0-1+1)s^m}<\varepsilon$$

这已经符合极限为 0 的定义。

* 虽然这个过程看似有些复杂，我们实际上是**通过放缩将非整数情况转化为了整数情况**。这其实也是一种阶估算：我们有自信在加 1 或减 1 时不会影响极限。此技巧在证明函数极限时将大量使用。

我们可以用 $\gg$(读作 “**远大于**”) 表示无穷大的阶数更高，利用定义可知上述讨论即代表

$$n^n\gg n!\gg a^n\gg n^b\gg\ln^c n$$

* 若 $a_n\gg b_n$、$b_n\gg c_n$，利用极限乘法可直接由定义得到 $a_n\gg c_n$，由此写出连续的远大于号是合理的。

必须注意的是，**不是任何两个无穷大都有高低阶关系** (对无穷小自然也同理)。考虑 a_n 奇数项为 n，偶数项为 $\sqrt{n}$，$b_n=n$，由于极限 $\frac{a_n}{b_n}$、$\frac{b_n}{a_n}$ 均不存在，这两个无穷大不存在高低阶关系。

2.4.2　多项式的用处

题 12. 若关于 n 的两个函数 $f(n)$、$g(n)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=1$$

计算其他极限时何时可以将 $f(n)$ 替换为 $g(n)$?

题 13. 证明以下极限存在 (此即定义为 e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

题 14. 证明 (定义 $0!=1$)

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

题 15 (附加)**.** 证明 e 是无理数。

三　函数极限

本次习题课主要介绍了函数极限与连续函数的概念和相关技巧，知识基础为函数极限定义与一些基本的极限结果。

§3.1　作业解答

1. (习题 1.3.7) 计算极限：

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}$$

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

(6)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

2. (习题 1.3.8) 通过单调有界性证明下列极限存在：

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

其中 0! 定义为 1。

3. (习题 1.3.9) 证明

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

4. (习题 1.3.10) 设序列 x_n 满足条件

$$|x_{n+1}|\leq k|x_n|,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

其中 $k\in(0,1)$，证明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

5. (1.4 节定理 3) 设 $f(x)$、$g(x)$ 是定义在点 a 的某空心邻域内的函数，且

$$\lim_{x\to a}f(x)=l_1,\quad \lim_{x\to a}g(x)=l_2$$

若 $l_1>l_2$，则存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-a|<\delta$ 即有

$$f(x)>g(x)$$

6. (1.4 节定理 4) 设 $f(x)$、$g(x)$ 是定义在点 a 的某空心邻域内的函数，且空心邻域内满足 $f(x)\geq g(x)$，若当 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的极限均存在，则

$$\lim_{x\to a}f(x)\geq\lim_{x\to a}g(x)$$

7. (1.4 节例 10) 设 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数，讨论

$$\lim_{x\to a}xD(x)$$

的存在性。

8. (习题 1.4.1(2)) 用定义证明函数极限

$$\lim_{x\to a}x^2=a^2$$

9. (习题 1.4.3) 计算极限：

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

(7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

10. (习题 1.4.4) 利用

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

计算极限：

(5)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

(7)

$$\lim_{y\to 0}(1-5y)^{1/y}$$

11. 求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{a^x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x^\beta}$$

其中 $a>1$、$\beta>0$。

§3.2 连续函数

3.2.1 连续与函数极限

3.2.2 介值定理

3.2.3 最值定理

3.2.4 归结原理

§3.3 初等函数连续性

3.3.1 指数函数

3.3.2 幂函数

3.3.3 三角函数

3.3.4 函数的组合

四 有限与无穷

§4.1 无穷大

4.1.1 无穷大处的极限

4.1.2 作为极限的无穷大

§4.2 阶估算 II

4.2.1 无穷大的阶

4.2.2 无穷小的阶

§4.3 换元法

4.3.1 归结原理的推广

4.3.2 如何换元