**数学分析A1**

作者：原生生物 QQ：3257527639

使用资料：任广斌老师讲义（下称讲义）、数学分析教程（上册）（下称教材）、谢惠民习题课讲义（上册）（下称谢惠民）

注意：

1、文档顺序按照讲义编排，定义均依照教材

2、无缩进的结论是个人认为可以直接使用的定义/定理，不太确定的均已缩进

3、结论能否使用最终解释权在老师与助教

1. **数列极限**

**定义1** 实数完备性：全体无尽小数 实数（教材P3）

\*可定义为此推出下方6条等价定义（定理）

\*无穷递降法的应用

**结论1** （教材P5）

证明思路 反证，考虑整数部分

**定义2** 极限的 定义（教材P9）

**补充** 可替换为 或（M为正常数）或

\*此为唯一定义方式

\*去掉有限项后近似常值

\*适当放大法

**结论2** （谢惠民P16）

**证明思路** 算术-几何均值放大为

\*分类思想（讨论：有无最大，极限是否为无穷，极限是否为0等等）

**结论3** （教材P12）

**证明思路** 分有无最大值，有易证，无则先考虑max增大时子列，再放缩其余

**定义3** 数列有界性（教材P9）

**定义4** 数列单调性（教材P26）

**补充** 收敛数列性质（谢惠民P17起，均由定义证明）：

\*极限唯一

\*有界性

\*保序性（蕴含保号性、夹逼定理）

（注意保序将严格大于小于变为不严格的大于等于小于等于）

（保序性经典用法：取某个数和极限的中点，都在此微小区域内）

**结论 4** （谢惠民P28）

**证明思路** 考虑

**结论5** 收敛数列必含最大项或最小项（谢惠民P18）

**证明思路** 任取两不等项考察

\*保四则运算（注意除法条件）

**定义5** 子列定义（教材P14）

**补充** 数列收敛 一切子列收敛

**证明思路** 左推右由定义，右推左任取一极限说明（讲义2）

**结论6** 若数列可被分划为有限个子列（即子列互相不交，并集为原数列），则数列存在极限 这些子列存在相同极限

**证明思路** 右推左利用定义（教材P14类似证明）

**定义6** 极限推广，无穷大与无穷小（教材P24）

**补充** 无穷小相关定理（教材P17）

\*（谢惠民P53，实质是阶的概念）

**\***分段证明无穷小（以下三结论均可以使用此证明方式）

**结论7**  （Cesàro平均或柯西命题，教材P18）

\*此平均可改写为乘法形式

**结论8** （特普利茨定理，教材P23）

**结论9**  （谢惠民P58）

\*特普利茨和Stolz定理应用范围有不少重合，但仍有其独特作用

\*这类方法对涉及两个数列极限生成的无穷和式时尤其有用

**结论10** Stolz定理（教材P51，讲义3）

型

型

**证明思路** 合分比不等式或特普利茨定理

\*证明技巧：用定义取出一列数累加（与函数极限联系）

\*一定要注意是否可以直接使用

\*几乎是求极限题中最常用的技巧

\*使用技巧：取对数

**结论11**

\*使用技巧：用来去除n（感觉不满足条件时可取倒数）（谢惠民P274第3题）

**结论 12** （教材P54）

**证明思路** 令 后进行处理

\*不要忘记基本的代数变形处理！

**定义7** （教材P31）

**证明思路** 利用单调有界定理

\*常利用此式与放缩e（如下方结论33）

**结论13** （教材P31）

**证明思路** 直接展开定义式

**结论14** （教材P33）

**证明思路** 反证法

\*注意此两极限的精准程度差异巨大，第一个约为，第二个约为，证明可通过归纳等

**定义8** （教材P35）

**证明思路** 仍然利用单调有界

**结论15**

**证明思路** 平方后利用Stolz将ln n转化为n，再利用代数消去n

**实数完备性的六个等价定理**

**结论16** 单调有界数列存极限（教材P26）

**证明思路** （由完备性）写出实数的小数表示后上升

\*证明有界性时可由估算或是猜测极限得到合理的界，如

**结论17** 闭区间套定理（教材P28）

**证明思路** （由单调有界定理）考虑区间两端点极限

**定义9** 确界定义（教材P41）

**结论18** 有界实数集存在确界（教材P41）

**证明思路** （由闭区间套定理）二分法构造区间套

**结论19** 有限开覆盖定理（教材P43）

**证明思路** （由确界原理）勒贝格方法，考虑上确界

**补充** 可改进为存在勒贝格数（谢惠民P82）

**结论20** 有界数列必有收敛子列（教材P38）

**证明思路** （由有限覆盖定理）反证，若否，任意数存邻域只有有限项，矛盾

**补充** 可改进为单调收敛

**结论21** 柯西收敛准则（教材P38）

**证明思路** （由列紧定理）取出有界数列

\*结论15可由柯西收敛准则推出，故此六定理等价

\*事实上，此六定理之间均可互相推导

\*连续函数的一些性质证明与实数完备直接相关

**结论22** 或（戴德金分割，谢惠民P96）

**证明思路** 由确界可推得成立

\*此定理亦与以上等价

**迭代生成数列的性质（联系导数）**

**结论23** 压缩数列（柯西型压缩/收敛型压缩）必收敛（讲义6）

**证明思路** 分别由柯西收敛准则与定义易得

**结论24** 迭代生成数列只能收敛于不动点（第一律，谢惠民P49）

**证明思路** 令递推公式两边趋于无穷

**结论25** 迭代函数与数列单调性联系（第二律，谢惠民P49）

**证明思路** 讨论一次/二次迭代下的函数

**结论26** 迭代生成数列的蛛网工作法收敛规律（谢惠民P51）

**证明思路** 由前两结论可推得

\*若迭代函数连续，则只需相邻项之差极限为0便能收敛（谢惠民P156）

**结论27** 牛顿切线法求根（讲义5，实际为导数部分内容）

**证明思路** 利用上述分析证明

**结论28** （谢惠民P53）

**证明思路** 注意到 由压缩数列可得结论，或由迭代规律证明

**定义10** 极限点、数列上下极限（教材P45）

**补充** 上下极限具有对偶关系、亦有保号性（讲义6、教材P47、P50）

**结论29** 上、下极限为数列极限点（教材P46）

**证明思路** 任意小邻域内可取数列中的点

**结论30** （教材P48）

**证明思路** 分别说明大于等于、小于等于成立（注意取子列的方法，证明有界等结论时可应用）

**结论31** 与上下极限相关的不等式（教材P49、P50）

**证明思路** 由上个结论可以推得

\*以极值思想看待上下极限

**结论 32**

**证明思路** 不妨设，对的任意极限点，取出子列，则亦为子列，极限点为，考虑，极限点为，若不收敛，当为最大时，可证，代入知的极限更大，矛盾

\*注意有界性条件的运用（极限点存在最大值）

\*条件可加强为单射

\*若于充分大时在正整数中存在反函数则只需正数a不为1（如）

**结论33** （教材P47、谢惠民P90）

**证明思路** 仍考虑证明大于等于且小于等于

\*以整体思想看待上下极限

**结论34** （谢惠民P95，教材P84）

**证明思路** 若否，某项后均小于e，将e放缩推知矛盾

\*存在无限多项满足的反面为某项之后均不满足

**结论35** （谢惠民P63）

**证明思路** 两边取上下极限，得到两个方程求解

\*以夹逼思想看待上下极限

**结论36** （谢惠民P91）

**证明思路** 考虑一切收敛子列（此结论可通过乘积式得到关于与的结论）

1. **函数极限**

**定义1** 集合的势（等价关系）（教材P59）

**补充** 有限、可数、不可数定义，可数，不可数

\*康托对角线法思路的应用（应用举例：证明上极限为极限点）

**结论1** （教材P89）

**证明思路** 构造每段与一定个数乘积相关的

**结论2** 可数个可数集并集可数（教材P60）

**证明思路** 斜线行进法

**定义2** 函数的运算、反函数、单调性、奇偶性（教材P66）

**补充** 不动点与n周期点定义（教材P67、P115）

**结论3** 严格单调函数存严格单调反函数

**证明思路** 反证法，利用

**定义3** 标准型函数极限定义（教材P68）

**补充** 仍可类似数列极限替换条件

\*与均为多值对应，不为函数

**结论4** 、为周期函数（谢惠民P156、讲义12）

**证明思路** 将极限式拆分为三项之和，用绝对值适当放大得结论

**结论5** 海涅归结原理（数列极限与函数极限关系）（教材P70、讲义8）

**证明思路** 必要性易得，充分性通过逆否证明

\*可方便地用于说明极限不存在

\*条件可加强为单调数列（谢惠民P122）

\*可用数列极限说明函数极限性质：唯一、局部有界、保序（保号/夹逼）、保四则运算

\*函数的柯西收敛原理（仍由归结原理说明）

\*保复合性（注意条件！）

**结论6** 在上单调递增（谢惠民P123）

**证明思路** 利用夹逼定理

**定义4** 迪利克雷函数与黎曼函数（教材P71、P77）

**补充** 迪利克雷函数处处极限不存在，黎曼函数有理点不连续无理点连续，处处极限为0，处处不可导

\*很多反例都可以靠两个函数进行变形构造（如乘）

**定义5** 函数单边极限（教材P76）

**定义6** 函数上下极限（教材P112、讲义9）

**补充** 函数此点有极限左右极限存在且相等上下极限存在且相等

\*函数上下极限存在类似数列上下极限性质（结论28-30）（教材P112-114）

**结论7** （教材P76）

**证明思路** 几何+代数证明

**结论8** （谢惠民P120）

**证明思路** 先考虑n为1时，再分解为两极限之差

**定义7** 极限推广，无穷大与无穷小及阶的概念、记号

**补充** 等价无穷小在乘积中可替换

\*记忆

\*带记号的等式实质并不是等价关系，而是序关系，如

**结论9** （教材P79）

**证明思路** 补充后替换，注意常数与极限数的区别

**结论10** （类似教材P89）

**证明思路** 用定义表述此式，将等比数列累加（注意严谨性，不能直接极限表述）

**定义8** 函数的多种类型极限与统一定义（讲义10）（注意逻辑表述！）

**结论11** 函数极限的Stolz定理（讲义10、谢惠民P123）（同样注意需求条件）

**证明思路** 可取出数列说明

\*需求条件实质上稍弱于连续

\*若想通过任意右端成立推左则需一致连续（见结论19）

\*常直接使用洛必达法则

**定义9** 函数连续性（教材P90）、上下左右连续（讲义11）、开区间上连续（教材P93）

**定义10** 闭区间上连续（利用左右连续）（讲义12）

**补充** 注意讲义11中连续性的多个等价定义（基本等价定义与振幅刻画、开集原象刻画）

**定义11** 上半连续与下半连续（将单点向上提升不影响上半连续）（讲义14）

**补充** 闭区间上的凸函数必然上半连续，连续上半连续+下半连续

**结论12** 若f定义在开区间上，每个开区间的像集仍为开区间，则f在区间上连续

**证明思路** 用类似闭区间套定理的方式构造区间套套住某个点

\*初等函数（教材P94）均为连续函数

\*连续性保四则运算、复合、max、min（可反向考虑复合，即变量代换下的连续性）

\*考虑黎曼函数知连续性为点概念（一致连续为区间概念）

\*连续函数可以替换极限运算和函数的顺序

**结论13** 无理点值有理，有理点值无理，则不连续（教材P110）

**证明思路** 值域为无理数

**定义12** 间断点与间断点类型（教材P94）

**结论14** 单调函数只有至多可数个跳跃间断点（教材P95）

**证明思路** 先利用数列证明单侧极限存在（类似可证明凸函数每点存在左右导数）

\*单调且值域联通必连续，严格单调且值域联通反函数必连续

**结论15** 柯西法解函数方程（以下）（教材P97、谢惠民P129）

或

或

**证明思路** 猜出函数后先归纳得整数满足，推出有理数满足，结合连续证明实数满足

**结论16** 非常值连续周期函数必有最小正周期（讲义12）

**证明思路** 先证明周期下界为0，再推出常值

**结论17** 利用连续性计算 型极限（教材P98）

**证明思路** 等价无穷小替换法

**结论18**

**证明思路** 利用上述方式计算

**定义13** 一致连续性（教材P102）

**补充** 利普西茨连续（教材P106）（此条件若可导则与导函数有界等价）

**证明思路** 可直接通过定义说明

\*善用定义说明一致连续

\*注意一致连续的等价定义（谢惠民P156）

\*利普西茨连续的性质（教材P106）

\*一致连续为区间上概念（由公共体现）

**结论19** 非一致连续

**证明思路** 可直接通过定义说明

**结论20** 在实数一致连续

**证明思路** 若否，则

\*一致连续函数可以被夹在一次函数之间

**结论21** 一致连续，（教材P106）

**证明思路** 利用一致连续性拆分为三段无穷小

\*仅连续不能推出此结论，反例如

\*实质是函数极限Stolz定理的逆定理

\*将条件改为则只需连续便能成立结论（谢惠民P156）

**有界闭区间上连续函数的性质**

**结论22** 有界闭区间上的连续函数必一致连续（康托定理，教材P106）

**证明思路** 凝聚定理出发，利用反证法说明

\*有界开区间一致连续连续+端点存在有限极限

\*连续+无限点存在有限极限有界开区间一致连续（另一侧反例：）

\*一致连续区间可以拼接

\*有界的一致连续函数乘积仍一致连续

\*注意以上推论证明过程中的严谨性（谢惠民P141）

\*感觉说不清楚时就用定义表述（此方式可行于大部分证明题）

**结论23** 连续周期函数必一致连续（讲义13）

**证明思路** 利用上方结论拼接连续区域即可

\*此结论可反面使用，即连续非一致连续则无周期

**结论24** 保留的连续/一致连续

**证明思路** 连续由定义，一致连续由拼接可立刻得

\*直观地看，即为从上挖去一个区间后拼接

\*此结论有时可用于归纳，如谢惠民P155第二题

**结论25** 有界闭区间连续函数有最大值、最小值（教材P108）

**补充** 此结论蕴含有界性

**证明思路** 反证有界，考虑趋向上界的点，列紧得成立

\*若此点非边界且可导，则导数为0（即Rolle定理的经典证法）

\*两次使用有界性可推出最值（谢惠民P135）

\*在上一个推论的条件中，若此点有二阶导，则最大值处，最小值处

\*也即，非边界处的最值点必为极值点

**结论26** 连续函数的零值定理、介值定理（教材P108）

**补充** 介值定理的另一个表述：区间上的连续函数值域为区间

**证明思路** 零值由实数完备多个等价定理可推得（谢惠民P129），证明介值需构造辅助函数

\*介值性质并不需要连续，即连续是更强的条件

\*满足介值性的函数若存在趋向无穷的极限，则必为正或负无穷

\*零值可直接说明根的存在性

\*两零点处导函数符号相同可知中间存在零点（可看成零值定理弱化条件）

**结论27** 任两零点之间存在零点

**证明思路** 先用确界定理说明任一子区间上有零点

\*此结论即：连续函数存在不同零点，则某一子区间为0或能取出相邻零点

\*此任一子区间上有零点即为零点稠密，与稠密性相关的另一重要结论：

**结论28** ，记，则对在上稠密

证明思路 无理数不同倍数必然不等，考虑抽屉原理得可任意接近0，作倍数得结论

\*此结论在说明一些周期函数的性质时很有用（如谢惠民P155第13题）

**结论29** （教材P111）

**证明思路** 反证，由恒大于正数（或小于负数）推出无界

**结论30** 或存在不动点（谢惠民P132、P148）

**证明思路** 构造，考虑定义域/值域的端点处

1. **导数**

**定义1** 导数定义、左右导数、区间可导（教材P125）、光滑函数（讲义15）

**补充** 可导必连续，连续未必可导（存在连续处处不可导的连续函数），此结论亦可推出微分中的无穷小增量公式（谢惠民P159、P161）

\*导数是差商的极限（在分段函数表示时有时只能利用定义）

\*导数最常用的几何观点：切线斜率，一阶导数是最准确的线性逼近（谢惠民P160）

\*可导是一点处的概念（仅一点可导：黎曼函数乘）

\*函数的左右导数具有保号性（本质是极限保号性）（谢惠民P186）

**结论1** 奇函数导函数为偶，偶函数导函数为奇（若0点存在则必为0）

**证明思路** 由定义推得成立

\*此结论可通过归纳推论出阶导数的情况，也可说明泰勒公式中只含奇/偶项

**结论2** 求导的链式法则（教材P131）

**证明思路** 利用定义构造函数说明或利用无穷小增量公式

\*链式法则亦可推广到阶情况（讲义16，实际应用很少）

\*求导还有一些基础结论，如四则运算与导数混合、初等函数导数、反函数求导法则

\*注意反函数求导法则使用时自变量的不同

**结论3** 莱布尼茨公式（教材P141）

**证明思路** 利用乘积求导公式归纳

**结论4** ，则在0处任意阶左导数为0

**证明思路** 说明指数收敛速度高于任意阶多项式后归纳得结论

\*此函数为任意阶可导但非实解析函数的典型案例（讲义24），其泰勒多项式恒为0

**结论5** 为奇数时（为偶数是0可由奇偶性推知）

**证明思路** ，可利用使用莱布尼茨公式递推，或分解为直接计算阶导数

\*第二种思路的合理性需要由复变函数论说明，因此暂不适合写过程

\*事实上，第一种解法更为本质也更为常用（谢惠民P168例题、P176前三道练习题）

\*注意拆项法的使用

\*关于这个函数的阶导数有不少可通过归纳得出的结论（教材P143第4、5题）

**结论6** 隐函数与参数方程的求导法则（谢惠民P171、P174）

**证明思路** 利用反函数求导法则与链式法则

**微分学中值定理（范围：有界闭区间连续、有界开区间可导的函数）**

**定义2** 极值点、极大值、极小值（教材P144）

**补充** 连续函数的严格极值点至多可数（谢惠民P156第16到18题）

**证明思路** 对于大小确定的邻域，大于邻域内所有其余点的点至多可数，取邻域大小为，则可数个至多可数的并仍为至多可数

**结论7** 极值点处可导则导数为0（费马定理）（教材P144）

**证明思路** 利用保号性推知成立

\*关于函数极值的基本定理，中值定理的成立基础  
\*由此可知区间无极值单调

**定义3** 驻点（教材P145）

**补充** 驻点涵义：函数值变化为自变量变化的高阶无穷小（微分看法）

**结论8** Rolle中值定理（一些难题往往直接通过此定理构造）（教材P145）

**证明思路** 利用费马定理说明（其实说明了必存在极值驻点）

\*区间上的非端点最值必为极值

\*事实上只需端点值相等

\*定理亦可扩充为无穷区间（通过构造有限映射到无穷的函数即可说明）（讲义17）

\*萨缪尔森证明涵盖了非极值点的驻点（谢惠民P189），例如考虑包含0的含两零点区间

\*此定理的几何意义为：两零点间存在水平切线

\*注意此定理的归纳性使用（原函数的个零点确定阶导函数的一个零点）

\*此定理常用于说明根的个数

**结论9** 在中存在个互不相同根（教材P145）

**证明思路** n次使用Rolle定理，注意每次的边界新增零点

**结论10** 至多有n-1个实根（教材P152）

**证明思路** 注意到乘不改变根，故可将一项变为常数归纳

**结论11** 拉格朗日中值定理（教材P146）

**补充** 此定理可写为有限增量公式（谢惠民P191），引出泰勒展开中的拉格朗日余项

**证明思路** 构造函数通过Rolle中值定理说明

\*几何意义：函数割线斜率等于其中某点切线斜率

\*此定理为利用导数研究函数时的常用工具

\*割线斜率至少为切线斜率最小值，且若为最小，则切线斜率恒定

**结论12** （谢惠民P224）

**证明思路** 先利用构造无穷数列+单调有界定理说明上恒成立

\*注意说明小区间恒成立后组合区间的技巧

\*亦可通过对数构造函数以说明（更快捷且更本质的方法）（需利用下文结论18）

\*此结论可推广为贝尔曼不等式（讲义21），证法为对数构造函数

\*结合单调性，可由拉格朗日中值定理定理证明不等式，但一定注意是否可使用

**结论13**

**证明思路** 将反三角函数通过变量代换变回三角函数直接变形为平凡结论

\*变量代换仍为基本操作方式

**结论14** 柯西中值定理（教材P149）

**证明思路** 仍通过构造函数证明

\*注意使用条件

\*几何意义：参数方程形式曲线割线斜率等于其中某点切线斜率

\*此定理亦可扩充至无穷形式

\*此定理可通过行列式写出对阶导成立的形式（实质是n次运用Rolle）（讲义17）

\*三个中值定理实质上等价，其逆定理均不一定成立

**结论15** 关于凑微分的一些恒等式

\*以及一些奇奇怪怪的形式（比如）

\*注意待定函数法的运用

\*可考虑直接利用类似积分的方式（拉格朗日定理与柯西定理均可靠此构造）

\*积分方式的运用前提是需要凑微分的部分中不含

\*凑与多项式相关的导数的技巧（谢惠民P196例题7.1.3、P222第9题）

\*如果不知道怎么解决多阶导数叠合的问题，可以考虑试试e

\*仍然注意基本代数变形（教材P152问题3.4第3题）

\*值得强调的变形：将绝对值看成两个不等式，分为两部分证明有时可大幅简化问题（谢惠民P274第一题（2）、教材P169第七题）

\*存在多个变元时可考虑多次利用中值定理后叠加

**结论16** Darboux定理（教材P150）

**补充** 此定理说明了导函数具有介值性

**证明思路** 考虑最值点知满足零值，构造函数得介值成立，利用中值定理证间断点性质

\*此定理中关于间断点的部分证明中即得单侧导数极限定理（谢惠民P194）

\*导数=导数的极限（若极限存在）

\*需要运用此定理时一般都较为明显，但一定注意无法说明连续

**结论17** 二阶连续可导，（谢惠民P224）

**证明思路** 先用初等数学说明，再说明导函数连续从而推出结论

**结论18** 若开区间可导函数在边界附近无界，则其导函数亦无界

**证明思路** 拉格朗日中值定理可证明

\*此结论为函数与导数有界性结论

\*此结论反面并不成立（如在0附近）

\*若函数与其n阶导函数均有界，则小于n的任意阶导数亦有界（泰勒展开可证）

**结论19** 二阶导在实数上恒不为0的函数无界（讲义18）

**证明思路** 由Darboux不妨设为大于0，则会恒在某直线上方

**结论20** 可导函数导函数不变号单调（教材P153）

**证明思路** 定义与中值定理说明

\*此结论可直接得出导函数恒为0必为常函数（由此可知不定积分必含常数）

\*严格单调性不受离散点处导函数为0影响

\*此结论与以上推论在凸性中有完全对等的结论

\*单调性亦可由右上/右下导数进行刻画（讲义20）

\*由单调性可推出函数自身的大小关系，从而证明不等式

**结论21** 正根唯一（谢惠民P237）

**证明思路** 研究函数单调性可知

\*一般来说，一至二元不等式可以由单调性说明，多元往往依靠凸性

**定义4** 严格极大值、严格极小值、最值（教材P156）

**补充** 连续函数上左右导函数变号的点为严格极值点

**证明思路** 由单调性直接说明

\*此结论未要求此点导数存在，只需去心邻域存在即足够

\*严格极值点附近未必单调（谢惠民P236）

\*最大/小值若存在则唯一，而最值点未必唯一

\*可导区间上最值点必在边界或驻点上

**结论22** 在时在正数单调减，否则在x充分大时单调增（讲义18）

**证明思路** 直接求导分析

\*此结论可说明其与e的大小关系，因其极限必为e

**结论23** 极大值点若存在二阶导数，则其不大于0

**证明思路** 利用局部保号性说明

\*此结论说明了极值点二阶导数的性质，其推广见下方结论31

\*由此可说明，非常值的凸函数在内点无最大值（讲义19）

**定义5** 凸性、凸函数、严格凸函数（教材P163）

**补充** 注意其多种等价表达

\*原定义与三点定义法为最基本性质，往往可以通过此证明性质

\*原定义的几何意义为函数两点连线段在函数同一侧

\*三点定义的几何意义为任一点向右移动会导致割线斜率增大

\*四点定义与三点定义本质相同

**结论24** 为恒正凸函数，则为凹函数（谢惠民P249）

**证明思路** 用原定义或三点定义写出定义式分析大小即可

\*凸函数在加法、乘法、最大值组合下保持凸性，但不可复合（如复合自身）

**结论25** 琴生不等式（教材P163）

**证明思路** 归纳可知结果

\*琴生不等式可用于推证多个不等式，如谢惠民P255-257的经典不等式

\*证不等式最常用的凸性为指数、对数与幂函数的凸性

**结论26** 为正且不全相等，为正且和为1关于单调增加（定义0处为0处极限值）（类似教材P167）

**证明思路** 对于，构造函数后利用琴生不等式代入

\*此为完整的幂平均不等式

\*虽然此貌似为单变量问题，但直接求导几乎不可做

\*常数变易法将看作变元从而更好解决问题

**结论27** 开区间连续函数为凸函数只需任两点满足（讲义20）

**证明思路** 类似前文用柯西法进行说明

**结论28** 凸函数存在递增左右导数，且每点左导数不大于右导数（教材P171）

**证明思路** 利用单调有界定理从定义说明

\*此为凸函数对导数的最基本性质，可导出一系列结论

\*支撑线判别法与导数单调判别法均可由此证明

\*由此可推知凸函数在其中任一闭区间均利普西茨连续

**结论29** 开区间凸函数连续，闭区间凸函数有界

**证明思路** 利用左右导数的性质证明

\*若开区间凸函数亦有界，则可扩充定义为闭区间凸函数

\*将闭区间端点处的值增大不影响凸性

**结论30** 可二阶导的函数具有凸性二阶导数恒不小于0（教材P167）

**证明思路** 利用一阶导数的单调性证明

**定义6** 拐点（教材P180）

**结论31** 设，若函数存在阶导数，某点的阶以下导数均为0，阶不为0，则n为偶数时此为极值点，大于0则为极小值，小于0则为极大值；为奇数时此为拐点，大于0则右侧为凸函数，小于0则左侧为凸函数（谢惠民P239、P250）

**证明思路** 直接利用泰勒展开证明，或使用归纳法

\*这个结论说明了极值点和拐点对应的奇偶性质

**结论32** 曲率公式（讲义20）

**证明思路** 通过二次泰勒多项式方程证明

\*推广后即阶导数提供了最准确的次曲线逼近（若仅允许多项式则为泰勒多项式）

**结论33** 若均不变号，则与符号相同（谢惠民P277推广）

**证明思路** 不妨设，讨论符号后反证

\*此结论可归纳至多阶情况

**结论34** 洛必达法则（教材P173）

**补充** 一定注意使用条件！

**证明思路** 利用柯西中值定理，结合定义证明

\*洛必达法则右端的极限可为无符号无穷（第二部分结论26下推论）

\*即为连续形式的Stolz定理，但注意条件区别

\*可改进为上下极限夹逼而成的不等式（讲义21）

\*与泰勒展开密切相关

\*一切不定型可利用对数、倒数等化为分式形式

\*反向使用洛必达时务必更加注意条件

**结论35** （讲义21）

**证明思路** 条件满足反向使用洛必达法则的要求，配凑微分即得证

\*此处的可为实数或正负无穷

\*洛必达法则亦可连续多次使用

**结论36**

**证明思路** 归纳或直接使用次洛必达法则

\*此即为阶导存在时仅利用原函数的计算方法

\*注意每次使用过后的条件变化

**定义7** 渐近线与其计算公式（教材P180）

\*注意教材P181作图大致步骤

\*函数图像可由参数方程合成（当前几乎不用）（谢惠民P261）

1. **泰勒展开**

**定义1** 微分定义（教材P185）

**补充** 一阶微分的形式不变性

**证明思路** 直接从定义出发写出式子

\*微分看作独立变量函数（讲义23）

\*微分记号并不需要为小量

\*单变量情况，可微即为可导，计算微分与计算导数相同

\*微分可方便地用于隐函数求导

\*形式不变性在高阶微分不存在

\*高阶微分记号（教材P189）

\*微分用于估计误差做近似计算（初等应用）

**定义2** 泰勒多项式（教材P192）

**补充** 泰勒多项式本身并不要求

\*注意条件仅需一点处阶可导（与拉格朗日余项对比）

**结论1** 函数减去泰勒多项式的余项在时为次数的高阶无穷小（教材P192）

**证明思路** 利用洛必达法则与归纳法

\*事实上，泰勒展开的系数是由此计算的

\*由此亦可看出泰勒展开唯一性

**定义3** 皮亚诺余项、麦克劳林公式（教材P193）

\*泰勒展开本质为近似  
\*可用泰勒展开估计误差

\*多项式泰勒展开在多项式次数后的项恒为0

\*奇偶函数的泰勒展开（第三部分结论1）

**结论2** 泰勒多项式为规定次数下的最佳近似（讲义24、谢惠民P207）

**证明思路** 任给相同次数多项式，产生的余项与皮亚诺余项之比趋向无穷

**结论3** 带拉格朗日余项的泰勒公式（教材P199）

**证明思路** 对余项使用拉格朗日中值定理

\*此余项条件为邻域内阶可导

\*由泰勒展开证明结论时几乎均为用此余项

\*拉格朗日余项亦可写为更强的形式，此时可估计极限（教材P209问题第1题）

\*拉格朗日余项作低阶展开或任意阶展开均可证明问题

\*在涉及有界性时会考虑低阶泰勒展开

\*拉格朗日余项作低阶展开

**结论4** （教材P210）

**证明思路** 作出的带拉格朗日余项的二阶泰勒展开，取适当叠加两式可得结论

\*此结论可用于估计导函数的界（讲义26）

\*写出增量形式的（即）泰勒展开式代入不同的值为常见证明方法

**结论5** 在上有二阶导且最小值为-1，（教材P210）

**证明思路** 在最小值点写出带拉格朗日余项的二阶泰勒展开，代入0、1即得证

\*最值点处因有导函数为0条件，为常见展开方式

\*拉格朗日余项的任意阶展开（视为方程组）

\*结论4在不顾及具体值时可作如下的弱化推广

**结论6** （谢惠民P225）

**证明思路** 写出的阶带拉格朗日余项的泰勒展开，取适当的个可得到关于的1到阶导数的线性方程组，从而其均可以小于等于某的线性组合，从而有界

**结论7** 存在有限

**证明思路** 利用增量形式展开，与上题类似由适当的组合，取极限得结果

\*拉格朗日余项产生不等式

**结论8** （谢惠民P225）

**证明思路** 写出增量形式的、带拉格朗日余项的泰勒展开，只保留0与两项即可

**结论9**

**证明思路** 先考虑一个0处足够小的邻域，其中上界为，写出不等式右侧的带拉格朗日余项的麦克劳林展开，可得，可取足够小的使得右侧系数小于1，故此区间内为0，组合区间即得结论

\*此条件可进一步弱化为小于等于任意系数非负的线性组合（即替换为）

**结论10** 带柯西余项的泰勒公式（教材P199）

**证明思路** 由另一种构造使用中值定理

\*在拉格朗日余项与柯西余项之间存在任意次数的广义柯西余项（讲义24）

\*拉格朗日余项与柯西余项为整体的泰勒展开，需要条件更强，结论也更强

**定义4** 实解析函数（讲义24）

**补充** 实解析函数的每一点均能写为泰勒多项式的极限

**结论11** 任意阶导数存在且非负的函数必实解析（伯恩斯坦定理）（谢惠民P225）

**证明思路** 由恒正可利用结论7估计，由定义证出结论

\*仅任意阶导数存在不能推得实解析，如第三部分结论4所提到的函数

\*由此，实解析函数的要求严格强于任意阶导数存在

**初等函数泰勒展开的计算方式**

\*直接法：

\*通过定义求任意阶导数

\*记忆基础函数的泰勒展开式（三角函数、指数函数、对数函数、幂函数）（这些可直接通过阶导计算得出）

\*利用复合得到目标函数的泰勒展开式

**结论12**

**证明思路** 用复合求出分母式子的四阶麦克劳林展开式，从而计算出结果

\*间接法：

\*待定系数法与方程的思想

\*在求导后展开，通过类似积分的方式还原

**结论13** 麦克劳林展开的递推公式（0点由极限定义）（谢惠民P216）

**证明思路** 利用其倒数可写出完整展开，待定系数法得到系数递推式

\*此思路亦可用于等可组合而成的函数

\*这个递推的结果即为伯努利数

**定义5** 欧拉数、伯努利数（谢惠民P215）

\*此即为由方程得到的一列特殊系数组

\*可用于计算一些泰勒展开

**定义6** 线性插值（教材P201）

**结论14** 为过的直线，（线性插值误差估计）（教材P202）

**证明思路** 利用任一点泰勒展开至二阶拉格朗日余项后代入证明

**结论15** 割线中值定理（教材P202、讲义26）

**证明思路** 由误差估计证明过程中出现的两式不直接求和，而由导函数介值性直接得到中值

**定义7** 插值多项式（讲义36）

**补充** 可以理解为不同点处的泰勒展开

\*插值多项式与原函数在展开点处的值必相等

\*由此，两函数差存在个零点，故阶导数存在零点

\*再构造函数使得增添零点，即出现阶导处中值结论

\*插值多项式余项与泰勒展开余项非常接近

\*亦可看成过个指定点的次多项式（讲义45）

\*构造方式：先考虑某一点处为0，其他为1的构造，再线性组合个式子（类似中国剩余定理）

1. **不定积分**

**\*此段几乎全为计算题，因此此处不放置例题性的结论**

**定义1** 原函数、不定积分（教材P211）

**补充** 利用此定义可由直接法求出函数积分

\*注意中何时要加上绝对值

\*可利用加减拆项简化运算

\*记忆常用公式（包括基本公式与和平方有关的一些公式）

\*积分导致次数增加

\*用求导验证结果正确性

**结论1** 分部积分公式（教材P214）

**证明思路** 利用乘积求导法则逆运算

\*分部积分常用于含指数函数、对数函数、幂函数、三角函数或是反三角函数时，特点为求导不会使式子更复杂

\*利用分部积分有时可构造出方程组以得到希望结果（配对积分法，谢惠民P285）

\*利用分部积分有时可以构造出递推式

\*因为不容易想起所以可率先尝试

**结论2** 换元公式（教材P217）

**证明思路** 利用复合函数求导法则逆运算

\*依然记忆凑微分的常用公式

\*三角换元与双曲换元的应用（根式情况）

\*注意换元后补充导数一项进入乘积

\*初等函数积分不一定为初等函数的原因之一即为积分无法复合

\*十分依赖观察能力

**结论3** 反函数积分公式（第二换元法）（讲义28、谢惠民P280）

**证明思路** 利用反函数性质分部积分

\*如同反函数求导一样注意代换变量后区别

**定义2** 有理函数、部分分式（教材P223）

**结论4** 有理函数可分解为规定形式（教材P223）

**证明思路** 利用复分析知识（不要求掌握）

**结论5** 任意有理函数存在初等原函数（教材P227）

**证明思路** 两类分式一类直接积分，一类由分部积分得出递推，累加即得

\*实际操作时注意运用换元技巧简化运算（教材P235第二题（10））

\*由于高次方程不可解性，未必能找出分解，因此为理论可做

\*寻找系数时可利用待定系数或极限技巧（刘维尔定理，讲义29、谢惠民P290）

**结论6** 三角函数有理式化为有理函数（教材P229）

**证明思路** 利用万能代换

\*注意如果函数含奇偶性，会存在更方便的代换（讲义30、谢惠民P281）

\*先进行降次是较常用的处理

**结论7** 线性分式的根式化为有理函数（教材P231）

**证明思路** 直接代换证明

\*此代换有时会较为复杂，但基本可以通用，至少作为尝试

**结论8** 根式函数的切比雪夫判别法（教材P232）

**证明思路** 三类分别代换观察结果

\*涵盖情况多，但容易复杂

\*一般结论7足够使用

**结论9** 欧拉变换（讲义30、谢惠民P293）

**证明思路** 同样代换后观察

\*对二次根式型较通用的处理，较为方便简化

\*仍注意观察和换元作为最本质的处理方法，通用往往意味着繁琐

1. **定积分**

**\*此段采用谢惠民的编排顺序，先讨论可积性**

**\*重要的积分不等式（讲义34、39、41部分内容）放入积分应用中**

**定义1** 黎曼可积、黎曼积分、黎曼和（教材P238）

**补充** 积分的极限定义与古典极限并不相同，可自由选取分割与介点集

\*定积分可自然地看作曲边梯形的（有向）面积

\*由介点集任意性，任意子区间都满足的性质可推出积分性质（即稠密的性质）

\*同样由任意性，可积函数问题可通过等距分划转化为数列问题（尤其不等式上）

\*同样，数列问题可看为积分

\*积分时可去间断点可补充定义为连续点

\*定积分的积分变量是哑标（结果与其无关，不定积分则不同）

**结论1** 可积函数必然有界（教材P244）

**证明思路** 由分划后存在极限可推证

\*可积与原函数存在无关（注意为反例）（有界且原函数存在时可积）

**定义2** 振幅、振幅面积（教材P264）

**补充** 振幅亦与函数连续有关（讲义11）

**定义3** Darboux上下和、上下积分（教材P265）

**补充** 利用上和下和证明本质是阶梯函数的夹逼

\*添加分点后上和不增，下和不减，故存在某种单调性

\*由此单调性结合有界知上下积分必然存在

**结论2** （教材P267）

**证明思路** 利用振幅估算上下和，夹逼可证

\*此极限中的分划任意性可改进为存在性（谢惠民P301，第二充分必要条件）

\*可进一步改进为振幅与区间长度二元控制（谢惠民P301，第三充分必要条件）

\*分两部分进行二元控制的方法有很多应用（见下方结论27）

\*两步改进后实质已非常接近勒贝格定理

**结论3** 闭区间上的连续函数、单调函数均可积（教材P268）

**证明思路** 直接利用振幅可判别（注意有界闭区间连续必然一致连续）

\*此可推知闭区间凸函数单侧导函数可积

**结论4** （教材P269，谢惠民P333）

（其中可为阶梯函数、连续函数、连续可微函数）

**证明思路** 用上下和可构造阶梯函数，从阶梯出发用连续与可微逼近

\*利用熟悉的函数逼近可积函数是常用的处理方式

**结论5** （谢惠民P333）

**证明思路** 利用上个结论中构造的连续函数，将极限写为定义后拆分绝对值

**定义4** 零测度集、几乎处处（教材P264、P277）

\*至多可数个零测集并集零测

\*零测集子集零测

**结论6** Lebesgue定理（教材P271）

**证明思路** 采用第三部分定义2处的证明思路，通过划分从振幅出发证明

\*此定理两方向证明都较复杂，需仔细阅读

\*使用此定理可简化很多结论的证明，如可积区间可叠加、乘法保持可积性等

\*由此定理亦可知，改变有限个点不影响积分

**结论7**

**证明思路** 的连续点必然为的连续点

\*若可积则无法判定是否可积（（R为黎曼函数）为反例）

\*若不可积亦无法判定不可积（（D为迪利克雷函数）为反例）

**结论8** （可加性，教材P245）

**证明思路** 写为积分和形式

\*由此可定义时的

\*积分还具有唯一性、线性性等基本性质

**结论9** ；某连续点处非0 （教材P245）

**证明思路** 左半边由定义，右半边写出非0点一个邻域即可

\*此即为积分的保序性

\*此式可产生一些自然的基本放缩，如

**结论10** 在上至少零点（教材P248）

**证明思路** 若否，则可组合出n-1次多项式与乘积不变号

\*说明零点个数的思路：中值定理、组合积分等

**结论11** 上题条件下，（教材P264）

**证明思路** 组合出与乘积放缩

**结论12** （教材P269）

**证明思路** 构造函数，利用均值不等式

\*积分问题时常要考虑构造适当的函数以控制（经常需要保证其正负性）

**结论13** 单调增（讲义39）

**证明思路** 构造函数

**结论14** 不变号（积分第一中值定理，教材P246）

**证明思路** 控制大小后利用介值定理，或利用柯西中值定理

\*可改进为

\*可改进为（谢惠民P308）

\*不可改进为

\*不变号条件不可省略

\*取为1可得常用结论

\*注意保留的为不变号的

**结论15** 积分第二中值定理（讲义33、谢惠民P246）单调

非负单调增

非负单调减

**证明思路** 利用阿贝尔变换得到阿贝尔引理后证明（不要求掌握）（讲义33）

\*注意闭区间单调函数必可积

\*注意提取出的为单调的

\*可利用第一中值定理证明弱化的第二中值定理（谢惠民P327）

\*两个积分中值定理的应用见结论37

**定义5** 变限积分（教材P249）

**补充** 可积函数的变限积分必连续

**证明思路** 由可积函数有界，直接由定义推知

\*事实上可积为区间性质，因此变现积分在区间连续

\*若函数有一点处连续，则此点变限积分必可导

\*当使用条件未必满足时，应回到定义或利用性质好的函数逼近

**结论16** 在处连续（微积分基本定理，教材P251）

**证明思路** 由导数定义计算极限

\*当在区间连续时，变限积分区间可导，即为一个原函数

\*不连续点处未必不可导（在0处，结论31）

**结论17** ，为原函数（牛顿-莱布尼茨公式，教材P251）

**证明思路** 由结论14直接得到

**结论18** 可导，

**证明思路** 利用复合函数求导法则拆分

\*将积分中的替换为有更好的结论（讲义34，利用全微分，不要求掌握）

**结论19** （为振幅，即最大值最小值差）

**证明思路** 设出最值点后放缩直接得到

\*此结论常用于含绝对值时的放缩

\*注意极值思想的应用

\*利用极值与中值定理可提出指定项放缩

**结论20** 保持的单调性

**证明思路** 利用换元统一积分限说明（讲义39）

\*此函数（称积分平均）保持极限，可从极限定义出发说明

\*事实上亦保持凸性，证明见第七部分结论26

**结论21** 分部积分公式（教材P255）

**证明思路** 对乘积微分公式作积分

\*可以将积分与导数建立更好的联系

\*遇到多重积分时可以降低重数（见结论33）

\*利用分部积分保留某些性质（证明是无理数，教材P263问题6.4第4题）

**结论22** （讲义39）

**证明思路** 考虑直接计算与三角代换后分部积分计算

\*可以从积分的角度考虑组合恒等式

\*注意，故在不同点分部有不同结果（相当于泰勒展开）

**结论23** 换元公式（教材P260）

**证明思路** 利用复合函数求导法则

\*一定注意使用条件中的连续可导、端点一致等要求

\*换元可用于调整积分限优化结构

\*亦可用于统一积分内容（常遇到平移换元，即）

\*事实上条件可改变，不过实际运用不多（讲义35）

\*利用对称性可大量简化运算（当直接算无从下手时可尝试配对）

\*基本公式（来自换元）

**结论24** （教材P284）

**证明思路** 对称性配对后变量代换得到方程

\*事实上此积分并非常义积分，但计算技巧值得关注

\*利用换元和分部可以处理不少复杂的问题，结合放缩得到更多结果

**积分与极限**

\*积分与极限同时出现时须注意运算顺序

\*常用积分定义/极限定义直接处理

\*极限计算积分与积分计算极限

**结论25** （泊松积分，谢惠民P372）

**证明思路** 利用化简后，发现只需要证明，（为次本原单位根）,根式中即为）

\*极限计算积分较少出现，但有基础性作用

**结论26**

**证明思路** 转化为积分，利用上一题结论可算得成立

\*此类数列极限有自然的积分表示，但仍注意数列极限技巧的基础应用

**结论27** （教材P263）

**证明思路** 利用Stolz转化后三角变形得结论

\*利用拆分处理极限

**结论28** （谢惠民P335）

**证明思路** 分为与分别估计，调整取值使两段分别任意小

\*亦可利用最值点为可数集合而构造区间估算

**结论29** 可积且有周期（谢惠民P335）

**证明思路** 可平移使一个周期内积分为0，以g每个周期作拆分，用阶梯函数逼近

\*舍弃无关部分的思想

**结论30** （教材P249）

**证明思路** 只关注最值点附近，其余利用极限舍去

**结论31** （教材P263）

**证明思路** 换元后只关注0附近部分的值，其余利用极限舍去

**积分与导数**

\*核心部分，将微分积分联系起来

\*积分余项的泰勒展开揭示了一元微分学的统一性

\*有较多的方法与技巧

\*注意先判定是否可导

\*利用导数得到等式

**结论32**

**证明思路** 写为导数定义，利用分部移出部分后再使用洛必达法则

**结论33** 泰勒公式积分余项（教材P257）

**证明思路** 多次使用分部积分说明相等

\*积分余项不含中值，为精确值

\*可直接推出拉格朗日余项与柯西余项

\*一阶时积分余项即为牛顿莱布尼茨公式

**结论34** （教材P263）

**证明思路** 对求导或在左侧内部使用分部积分（两方法本质相同）

\*此式可递推得到多重积分的形式

\*利用泰勒展开积分余项与此式可写出泰勒展开多重积分余项（讲义34）

\*将常数看作变量求导可以证明一些等式/不等式（讲义39）

\*积分等式的另一个常用证明思路是配凑对称

\*利用导数控制不等式

**结论35** 可导

**证明思路** 一定位于围成的平行四边形之中

**结论36**

**证明思路** 反证，若否，不妨设此点导数为负，估计向后减少量直到函数值为0

\*导数的范围可使函数位于某些曲线上方或下方，从而估算积分

**结论37** 可导（谢惠民P371）

单调增

**证明思路**

首先利用，接着由单调性用第二积分中值定理提取放缩

利用上述类似方法，讨论是否存在零点，若存在必为唯一零点，故拆分后利用积分第一中值定理放缩

\*注意中值定理使用条件！

\*放缩为最大/最小后利用中值定理提出为常用处理（教材P253例3）

\*利用导数得到中值结果

**结论38** 可导（谢惠民P359）

**证明思路** 泰勒展开后提取中值

\*实际与第四部分结论14完全相同

**结论39**

**证明思路** 在处泰勒展开后写出处表达式得结论

\*还原为微分学中值问题为常用操作思路，且由于等价性一定可以得出结果

**结论40** （谢惠民P359）

**证明思路** 利用分部积分（先中点后处分部）估算（讲义41）

\*直接利用积分特有的方式（如分部积分）亦有机会解决问题

\*事实上上方题目均可用两种方式做出

\*实质仍然一致（在某点处分部与泰勒展开一致）

\*数值积分（与上方中值结果联系紧密）

**结论41** （矩形估计）

**证明思路** 对小区间估计，利用

**结论42** （优化的矩形估计）

**证明思路** 对小区间估计，利用

**结论43** （梯形估计）

**证明思路** 对小区间估计，利用

\*利用分部积分凑出想要的形状

\*积分天生容纳中值，故含中值结果积分下可得确定结果（如结论39积分可直接推知结论41）

**定义6** 广义可积（教材P279）**、**无穷积分、瑕积分（教材P281）

\*此处不讨论可积条件，仅含计算内容，故仍由之前定积分技巧计算（见结论24）

\*注意反常积分可以和常义积分互相转化（如利用换元等）

1. **积分应用**

**\*面积部分定理可运用分割求和取极限证明（但注意事实上我们并没有严格定义空间中的弧长与面积）**

**\*物理部分并不重要，考试亦未考过，故略过**

**结论1** 平面图形面积 （教材P288，谢惠民P337）

**补充** 后半部分的式子为参数方程形式，均为函数，对积分

\*后半部分的式子可直接推导出极坐标形式扇形公式（）

**结论2** 所构成封闭曲线面积是（谢惠民P337）

**证明思路** 代入写为参数方程形式，注意取值范围为0到2

**结论3** 空间曲线弧长（教材P293）

**补充** 此式令可得出函数的弧长公式（）

**结论4** 半轴长的椭圆周长与一个周期长度相同

**证明思路** 分别写出，换元后调整形式得到方程

**结论5** 空间区域体积（为截面积）（教材P295）

**结论6** 质心坐标公式（为截线段长，类似公式）（谢惠民P341）

**结论7** 旋转体体积公式（绕x轴旋转，可为任意角度）（谢惠民P342）

**证明思路** 利用，代入证明

\*旋转体侧面积有类似公式（谢惠民P342）

**结论8** 旋转体侧面积公式（教材P296）

**结论9** 长轴短轴椭圆绕长轴旋转所得椭圆面面积为

证明思路 利用参数方程代入公式

\*绕短轴则结果形式并不同

\*椭圆绕长短轴形成椭球性质存在差异（如均匀带电线段等势面必为绕长轴旋转椭圆）

**结论10** 递增与递减级数的积分估计（教材P301-302）

**证明思路** 利用每个区间放缩为端点进行估计

\*此结论可以说明存有限极限的单调函数级数与积分的差存在极限

\*因此，此时无穷级数与无界积分敛散性一致

\*此结论并不复杂，但可以判断不少情况

**结论11** （柯西-施瓦茨不等式）（教材P248）

**证明思路** 利用柯西不等式极限形式或利用构造关于的二次函数

\*注意取等条件为几乎处处线性相关

\*柯西不等式在不等式题中应用极多

\*从取等条件得到等式

**结论12** （谢惠民P334）

**证明思路** 直接利用柯西，故为倍数，再由第一个式子算出结果

\*拆分技巧

**结论13** （谢惠民P353）

**证明思路** 将拆为，组合后以柯西放缩

\*当需要分离时可将函数拆分（为了运用非负条件）

**结论14** （谢惠民P374）

**证明思路** 分部可知利用柯西有，直接求出最小值，取即达到

\*注意待定系数法的运用

\*常用的放缩方式

\*利用牛顿-莱布尼茨公式与绝对值放缩调整

**结论15** （谢惠民P373）

**证明思路** 利用，令柯西放缩

**结论16**

**证明思路** 牛顿-莱布尼茨公式调整左侧后柯西拆分

\*平方式还可选择求导处理

**结论17** 可导，（教材P254）

**证明思路** 将1变为参数求导，整理后再求导

\*当结论实质上与上限无关时可将上限看作变量处理

**结论18** Young不等式（教材P305）

**证明思路** 先说明取等时的情况，再分类证明

\*函数连续的条件可以去掉（严格单调自然可积），此时需利用定义证明

\*取等时产生的等式实际上即为反函数的积分公式

\*注意拼接为矩形方法的应用

**结论19** （离散形式，教材P306）

**证明思路** 利用与互为反函数，积分证明

**结论20** （赫尔德不等式，教材P308）

**证明思路** 在结论19中代入，积分即得证

\*此不等式可看作柯西不等式推广

**结论21** （闵可夫斯基不等式，教材P308）

**证明思路** ，两边积分后利用赫尔德不等式

\*这些不等式都可以范数化表达（讲义44），可在泛函分析中推广

\*不等式可来自离散形式极限

**结论22** 单调增（切比雪夫总和不等式）

**证明思路** 由排序不等式（或构造乘积）说明离散形式的总和不等式后取极限

**结论23** （均值不等式）

**证明思路** 由算术-几何平均不等式取极限而来

**结论24** Gronwall不等式（讲义39，谢惠民P373有弱化形式）

**证明思路** 求导证明单调减后直接比较得结果（注意已为常数）

\*注意此不等式条件

**结论25** 连续凸（谢惠民P344）

**证明思路** 写出每对对称点均满足的不等式后积分

\*这个不等式亦有鲜明的几何意义（谢惠民P345）

\*这个不等式左右两不等号均为连续函数凸的充分必要条件（谢惠民P373）

**结论26** 保持的凸性（谢惠民P353）

**证明思路** 由g连续只需证明满足琴生条件，利用凸性放缩

**结论27** 凸（琴生不等式，谢惠民P346，讲义41）

**证明思路** ，同乘后积分可消去

\*琴生不等式很强，可证明包括均值在内的一系列不等式

\*直接使用不多，一般运用特例

**结论28** Wallis公式（教材P309）

**证明思路** 利用三角函数次方的定积分结果使用夹逼原理

\*注意证明中积分与夹逼的综合运用

**结论29** （斯特林公式，教材P311）

**证明思路** 利用不等式估计极限

\*教材P311上实际给出了一个余项估计（）

\*事实上用更好的不等式能得到更精确的估计（，讲义41）

\*此式可估算组合数的阶

\*有时需要与组合恒等式综合运用（教材P312问题7.4第2题）

**结论30** （教材P312）

**证明思路** 利用范围内由作出估计，并使趋向无穷，夹逼得结论

\*此即为用极限计算积分的例子

**感谢阅读！**