Сетка Соболя

Подготовлено: Малоенко Софией,

Ивановым Николаем,

Васильевым Ильей,

Малыниным Алексеем,

Карташовым Антоном

Москва 2017г.

Сетка Соболя

Оглавление

Введение

Последовательности Соболя, также называемые LPτ или (t,s) в основании 2, являются примером квазислучайных последовательностей с низким расхождением. Впервые были введены российским математиком Ильей Мееровичем Соболем в 1967 году.

ЛПτ-последовательности - асимптотически наилучшие среди всех известных равномерно распределенных последовательностей. Доказано, что среди ЛПτ-последовательностей можно выделить последовательности, обладающие дополнительными свойствами равномерности.

Среди всех изученных последовательностей точек в многомерном кубе наилучшими оценками характеристик равномерности обладают ЛПτ-последовательности. Они неоднократно использовались при расчешете практических задач, связанных с приближенным вычислением многомерных интервалов или с многопараметрической оптимизацией.

В дальнейшем величины c, e, f, g, h, u, v с любыми индексами принадлежат полю Z_2 , т.е. равны либо 0, либо 1.

Основные понятия

Определение 1. Обозначим через K^n единичный n-мерный куб, в котором $0 \le x_k \le 1$, k = 1, 2, … , n. Разобьем K^n плоскостями $x_k = \frac{1}{2}$ на 2^n многомерных октантов-кубиков, которые представляют собой двоичные параллелепипеды.

Рассмотрим произвольную бесконечную последовательность точек $P_0,\ldots,P_i$, …, принадлежащих K^n. Если в любом двоичном участке этой последовательности, длина которого равна 2^n, все точки принадлежат различным кубикам, то мы скажем, что последовательность обладает *свойством равномерности*.

Определение 2. Двоичным участком длины 2^n называется множество точек P_i, индексы которых удовлетворяют неравенству $l*2^n \le i \le (l+1)*2^n$, где l=0, 1, … .

Определение 3. Пусть L_1, …, L_n - различные моноциклические операторы в поле Z_2, порядки которых равны $m_1,\ldots,m_n$. Пусть $p^{(k)}\left(i\right)$ есть ДР-последовательность, принадлежащая оператору L_k и $(v_{s_j}^{(k)})$ - порождающая ее направляющая матрица. Точки $Q_0,\ldots,Q_i,\ldots$ с декартовыми координатами

(1) $Q_i=(p^{(1)}\left(i\right), \ldots, p^{(n)}\left(i\right))$

образуют ЛПτ-последовательность в K^n, причем

$$\tau = \sum_{k=1}^{n}\left(m_k - 1\right).$$

Алгоритм построения сетки Соболя.

Пусть $p1, \ldots, ps \in$ F2(x) – примитивные многочлены, упорядоченные в порядке неубывания степеней. Так, для $1 \le i \le s$ пусть

$$p_i\left(x\right) = x^{e_i} + a_{1,i}x^{e_i-1} + \ldots + a_{e_i-1,i}x + 1 \;. \;(1)$$

Возьмём произвольные нечётные натуральные числа $m_{1,i}, \ldots, m_{e_i,i}$, такие что $m_{k,i} < 2^k$ для $1 \le k \le e_i$. Для всех $k > e_i$ числа $m_{k,i}$ определяются рекурсивно при помощи побитового оператора XOR (исключающего или), обозначаемого $\oplus$:

$$m_{k,i} = 2a_{1,i}m_{k-1,i} \oplus 2^2a_{2,i}m_{k-2,i} \oplus \ . \ . \ . \oplus 2^{e_i-1}a_{e_i-1,i}m_{k-e_i+1,i} \oplus 2^{ei}m_{k-e_i,i} \oplus m_{k-e_i,i} \,.$$
(2)

Далее, определим направляющие числа $v_{k,i}$ как

$$v_{k,i} = \frac{m_{k,i}}{2^k} \;(3)$$

Наконец, для произвольного $n \in$ N0, имеющего двоичное разложение $n = n_0 + 2n_1 + \ . \ . \ . + 2^{r-1}n_{r-1}$, i-тая соболевская координата n-ной точки последовательности имеет вид

$$x_{n,i} = n_0v_{1,i} \oplus n_1v_{2,i} \oplus \ . \ . \ . \oplus n_{r-1}v_{r,i} \,. \;(4)$$

Таким образом, последовательность Соболя определяется как совокупность (x0,x1,...), где $x_n = \left(x_{n,1}, \ldots x_{n,s}\right)$.

Широко известен эффективный приём, предложенный Антоновым И.А. и Салеевым В.М. А именно, для последовательной генерации точек Соболя можно воспользоваться кодами Грея $G(n) = n \oplus \lfloor n/2 \rfloor$. Учитывая тот факт, что коды Грея для чисел n и $n + 1$ всегда отличаются только одним битом (пусть он имеет номер k), достаточно положить

$$x_{n+1,i} = x_{n,i} \oplus v_{k,i} \,. \;(1.40)$$

Как видно из алгоритма построения последовательности Соболя, ключевое значение имеют направляющие числа $\{v_{k,i}\}$. Поиск оптимальных (с точки зрения качества конечной последовательности) наборов направляющих чисел представляет собой отдельную задачу.

Источники

1. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. - https://en.wikipedia.org/wiki/Sobol_sequence
2. И. М. Соболь, Равномерно распределенные последова- тельности с дополнительным свойством равномерности, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, том 16, номер 5, 1332–1337
3. [Электронный ресурс] - http://michaelcarteronline.com/MCM/LDSequences/SobolExample.pdf
4. Диссертация «Расслоение и метод квази-Монте-Карло» Антонов Антон Александрович, САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕНННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
5. Joe and Frances Y. Kuo «Notes on generating Sobol′ sequences Stephen»