

## Метод Пауэлла

С помощью метода Пауэлла определяется местонахождение минимума некоторой целевой квадратичной функции  $f(x)$ , при  $H(f) > 0$ , где  $H(f)$  – матрица Гессе - матрица вторых частных производных.

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$x_1, x_2$  – переменные заданной квадратичной функции.

Путем проведения последовательных одномерных поисков (например, метод Золотого сечения), начиная с точки  $x_0^k$  (произвольное, задаем сами), вдоль системы сопряженных направлений.

$\hat{s}_0$  - направление поиска экстремума.

Направление, сопряженное к  $\hat{s}_0$  (например,  $\hat{s}_1$ ) находится следующим образом:  $[\hat{s}_1]^T * H * \hat{s}_0 = 0$ , или в общем виде:

$$[\hat{s}_i]^T * H * \hat{s}_j = 0; \quad 0 \leq i \neq j \leq n-1$$

Идея алгоритма заключается в том, что если на данном этапе поиска определяется минимум квадратичной функции вдоль каждого из сопряженных направлений и если затем в каждом направлении делается некоторый шаг, то полное перемещение от начала до конечного шага сопряжено ко всем поднаправлениям поиска.

Переход из точки  $\mathbf{x}_0^{(k)}$  в точку  $\mathbf{x}_m^{(k)}$  определяется формулой

$$\mathbf{x}_m^{(k)} = \mathbf{x}_0^{(k)} + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i^{(k)} \mathbf{s}_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad ($$

$\lambda_i^k$  — длина шага, определяется по формуле (возьмем  $k = 0$ ):

$$\lambda^{(0)} = - \frac{\nabla^T f(\mathbf{x}^{(0)}) \hat{\mathbf{s}}^{(0)}}{(\hat{\mathbf{s}}^{(0)})^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^{(0)}) \hat{\mathbf{s}}^{(0)}}. \quad (*)$$

Рассмотрим вычислительную процедура алгоритма для квадратичной функции  $f(\mathbf{x}) = 4(\mathbf{x}_1 - 5)^2 + (\mathbf{x}_2 - 6)^2$ :

1) Задается начальный вектор  $\mathbf{X}^0 = [8; 9]^T$

2) Задается направление поиска, как правило это

$$\mathbf{p}^1 = [1; 0]^T$$

$$\mathbf{p}^2 = [0; 1]^T$$

3) Вычисляется градиент  $\text{grad } f(\mathbf{x})$  (заданной квадратичной

функции) 
$$\nabla f(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 8\mathbf{x}_1 - 40 \\ 2\mathbf{x}_2 - 12 \end{pmatrix}$$

4) Критерий остановки -  $|\nabla f(\mathbf{X}_0)| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  задана

Далее выполняется цикл до тех пор, пока не будет выполнено условие.

**Итерация первая:**

1) Вычисляем значение градиента в  $\mathbf{X}^0$ ,  $\text{grad } f(\mathbf{X}^0)$ , получим

вектор значений. 
$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

## 2) Проверка условия сходимости

$$|\nabla f(X_0)| = \sqrt{24^2 + 6^2} = 24.739 > 0.1$$

3) Вычислим значение функции в  $X^0$ ,  $f(X^0)$ , Получим вектор значений.  $f(X_0) = 45$ .

4) Сделаем шаг вдоль направления поиска  $p^2 = [0; 1]^T$

$$X_1 = X_0 + hp^2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ h+9 \end{pmatrix}, \text{ где } h - \text{длина шага.}$$

$$f(X_1) = 4(8-5)^2 + ((h+9)-6)^2 \rightarrow \min$$

$$f(X_1) = h^2 + 6h + 45 \rightarrow \min$$

5) Найдем такой шаг  $h$ , чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления. Из необходимого условия существования экстремума функции ( $f'(x_1)=0$ ):

$2h+6 = 0$ . Получим шаг:  $h = -3$ . В коде нужно реализовать любой одномерный поиск (Опять же, метод золотого сечения), либо найти длину шага по формуле (\*)

Выполнение этого шага приведет в точку:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

6) Сделаем шаг вдоль другого направления поиска  $p^1 = [1; 0]^T$

$$X_2 = X_1 + hp^1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$f(X_2) = 4((h+8)-5)^2 + ((6)-6)^2 \rightarrow \min$$

$$f(X_2) = 4h^2 + 24h + 36 \rightarrow \min$$

Найдем такой шаг  $h$ , чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления. Из необходимого условия существования экстремума функции ( $f'(x_2)=0$ ):

$$8h+24 = 0. \text{ Получим шаг: } h = -3$$

Выполнение этого шага приведет в точку:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

7) Повторно сделаем шаг вдоль направления поиска  $p^2 = [0; 1]^T$

$$X_3 = X_2 + hp^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ h+6 \end{pmatrix}$$

$$f(X_3) = 4(5-5)^2 + ((h+6)-6)^2 \rightarrow \min$$

$$f(X_3) = h^2 \rightarrow \min$$

Найдем такой шаг  $h$ , чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления. Из необходимого условия существования экстремума функции ( $f'(x_3)=0$ ):

$$2h = 0. \text{ Получим шаг: } h = 0$$

Выполнение этого шага приведет в точку:  $x_3 = (5, 6)$ .

Так как шаг равен нулю, выбираем сопряженное направление.

8) Выбираем сопряженное направление:  $p^2 = x^3 - x^1$

$$p^2 = [5; 6]^T - [8; 6]^T = [-3; 0]^T$$

**Итерация вторая:**

$$1) \nabla f(X_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим критерий остановки:

$$|\nabla f(X_3)| < \varepsilon$$

$$|\nabla f(X_3)| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0 < 0.1$$

2) Вычислим значение функции в начальной точке  $f(X_3) = 0$ .

$X = [5; 6]^T$  – минимум функции.

В общем случае, условие может выполняться далеко не на второй итерации. Если бы

$$\nabla f(X_3)$$

не был нулевым, то вычисления происходили бы точно так же, только с уже другими сопряженными направлениями.