Сетка Соболя

Подготовлено: Малоенко Софией,

Ивановым Николаем,

Васильевым Ильей,

Малыниным Алексеем,

Карташовым Антоном

Москва 2017г.

Сетка Соболя

Оглавление

Введение

Последовательности Соболя, также называемые LPτ или (t,s) в основании 2, являются примером квазислучайных последовательностей с низким расхождением. Впервые были введены российским математиком Ильей Мееровичем Соболем в 1967 году.

ЛПτ-последовательности - асимптотически наилучшие среди всех известных равномерно распределенных последовательностей. Доказано, что среди ЛПτ-последовательностей можно выделить последовательности, обладающие дополнительными свойствами равномерности.

Среди всех изученных последовательностей точек в многомерном кубе наилучшими оценками характеристик равномерности обладают ЛПτ-последовательности. Они неоднократно использовались при расчешете практических задач, связанных с приближенным вычислением многомерных интервалов или с многопараметрической оптимизацией.

В дальнейшем величины c, e, f, g, h, u, v с любыми индексами принадлежат полю Z_2, т.е. равны либо 0, либо 1.

Основные понятия

Определение 1. Обозначим через K^n единичный n-мерный куб, в котором $0 \leq x_k \leq 1$, k = 1, 2, … , n. Разобьем K^n плоскостями $x_k = \frac{1}{2}$ на 2^n многомерных октантов-кубиков, которые представляют собой двоичные параллелепипеды.

Рассмотрим произвольную бесконечную последовательность точек $P_0, \ldots, P_i$, …, принадлежащих K^n. Если в любом двоичном участке этой последовательности, длина которого равна 2^n, все точки принадлежат различным кубикам, то мы скажем, что последовательность обладает *свойством равномерности*.

Определение 2. Двоичным участком длины 2^n называется множество точек P_i, индексы которых удовлетворяют неравенству $l*2^n \leq i \leq (l+1)*2^n$, где l=0, 1, … .

Определение 3. Пусть L_1, …, L_n - различные моноциклические операторы в поле Z_2, порядки которых равны $m_1, \ldots, m_n$. Пусть $p^{(k)}(i)$ есть ДР-последовательность, принадлежащая оператору L_k и $(v_{s_j}^{(k)})$ - порождающая ее направляющая матрица. Точки $Q_0, \ldots, Q_i, \ldots$ с декартовыми координатами

(1) $Q_i = (p^{(1)}(i), \ldots, p^{(n)}(i))$

образуют ЛПτ-последовательность в K^n, причем

$$\tau = \sum_{k=1}^{n} \left(m_k - 1 \right).$$

Алгоритм построения сетки Соболя.

Пусть $p1, \ldots, ps \in F2(x)$ – примитивные многочлены, упорядоченные в порядке неубывания степеней. Так, для $1 \leq i \leq s$ пусть

$$p_i\left(x\right) = x^{e_i} + a_{1,i}x^{e_i-1} + \ldots + a_{e_i-1,i}x + 1\,.\ (1)$$

Возьмём произвольные нечётные натуральные числа $m_{1,i}, \ldots, m_{e_i,i}$, такие что $m_{k,i} < 2^k$ для $1 \leq k \leq e_i$. Для всех $k > e_i$ числа $m_{k,i}$ определяются рекурсивно при помощи побитового оператора XOR (исключающего или), обозначаемого $\oplus$:

$$m_{k,i} = 2a_{1,i}m_{k-1,i} \oplus 2^2a_{2,i}m_{k-2,i} \oplus \ . \ . \ . \oplus 2^{e_i-1}a_{e_i-1,i}m_{k-e_i+1,i} \oplus 2^{ei}m_{k-e_i,i} \oplus m_{k-e_i,i}\,.$$
(2)

Далее, определим направляющие числа $v_{k,i}$ как

$$v_{k,i} = \frac{m_{k,i}}{2^k}\ (3)$$

Наконец, для произвольного $n \in N_0$, имеющего двоичное разложение $n = n_0 + 2n_1 + \ . \ . \ . + 2^{r-1}n_{r-1}$, i-тая соболевская координата n-ной точки последовательности имеет вид

$$x_{n,i} = n_0v_{1,i} \oplus n_1v_{2,i} \oplus \ . \ . \ . \oplus n_{r-1}v_{r,i}\,.\ (4)$$

Таким образом, последовательность Соболя определяется как совокупность $(x_0, x_1, \ldots)$, где $x_n = \left(x_{n,1}, \ldots x_{n,s}\right)$.

Широко известен эффективный приём, предложенный Антоновым И.А. и Салеевым В.М. А именно, для последовательной генерации точек Соболя можно воспользоваться кодами Грея $G(n) = n \oplus \lfloor n/2 \rfloor$. Учитывая тот факт, что коды Грея для чисел n и $n + 1$ всегда отличаются только одним битом (пусть он имеет номер k), достаточно положить

$x_{n+1,i} = x_{n,i} \oplus v_{k,i}\,.$ (1.40)

Как видно из алгоритма построения последовательности Соболя, ключевое значение имеют направляющие числа $\{v_{k,i}\}$. Поиск оптимальных (с точки зрения качества конечной последовательности) наборов направляющих чисел представляет собой отдельную задачу.

Пример

Первые десять точек 12-мерной сетки Соболя

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
4	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
5	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$
6	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
7	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
8	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$
9	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{7}{16}$
10	$\frac{1}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{11}{16}$

12-мерная сетка Соболя была сгенерирована с помощью следующих примитивных полиномов и начальных значений (размерность = количеству полиномов):

$\{1+x,\{1\}\}$
$\{1+x+x^2,\{1,3\}\}$
$\{1+x+x^3,\{1,3,1\}\}$
$\{1+x^2+x^3,\{1,1,1\}\}$
$\{1+x+x^4,\{1,1,3,3\}\}$
$\{1+x^3+x^4,\{1,3,5,13\}\}$
$\{1+x^2+x^5,\{1,1,5,5,17\}\}$
$\{1+x^3+x^5,\{1,1,5,5,5\}\}$
$\{1+x+x^2+x^3+x^5,\{1,1,7,11,19\}\}$
$\{1+x+x^2+x^4+x^5,\{1,1,5,1,1\}\}$
$\{1+x+x^3+x^4+x^5,\{1,1,1,3,11\}\}$
$\{1+x^2+x^3+x^4+x^5,\{1,3,5,5,31\}\}$

Каждый примитивный многочлен определяет единственную рекурсивную функцию, которая используется для генерации набора чисел направлений для этой размерности. Например, 6-я размерность основана на многочлене 4-й степени $1+x^3+x^4$, который определяет рекурсию 4-го порядка:

$$mj = 2a_1m_{j,1} \oplus 2^2a_2m_{j,2} \oplus 2^3a_3m_{j,3} \oplus m_{j,4}$$

который преобразуется в

$$m_j = 2\, m_{j,1} \oplus m_{j,4}$$

т.к. $a_1 = 1,\ при\ a_2 = a_3 = 0$ (a_i - коэффициент x^{k-i}, где k - порядок многочлена).
Засекается k неотрицательными нечетными целыми числами $m_1,\ m_2,\ m_3, \ldots,$ где $m_i < 2^i$, последующие значения, генерируемые рекурсией также являются неотрицательными нечетными целыми числами, где $m_j < 2^j$ для всех j.
Направляющие числа получаются путем деления каждого слагаемого на 2^i, т.е.

$$\left(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_M\right) = \left(\frac{m_1}{2},\ \frac{m_2}{4},\ \ldots,\ \frac{m_M}{2^M}\right)$$

Для получения последовательности Соболя длины n требуется одно направляющее число для каждого бита в двоичном расширении n, всего $k = \left[Log_2 n\right]$ направляющих чисел в каждой размерности.

Используя приведенные выше начальные значения, номера направлений 12-мерной последовательности Соболя начинаются с

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{3}{4096}$
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{5}{128}$	$\frac{5}{256}$	$\frac{7}{512}$	$\frac{5}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{5}{4096}$
4	$\frac{15}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{13}{64}$	$\frac{5}{128}$	$\frac{5}{256}$	$\frac{11}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{3}{2048}$	$\frac{5}{4096}$
5	$\frac{17}{2}$	$\frac{29}{4}$	$\frac{31}{8}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{11}{64}$	$\frac{17}{128}$	$\frac{5}{256}$	$\frac{19}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{11}{2048}$	$\frac{31}{4096}$
6	$\frac{51}{2}$	$\frac{23}{4}$	$\frac{29}{8}$	$\frac{55}{16}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{37}{64}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{53}{256}$	$\frac{37}{512}$	$\frac{27}{1024}$	$\frac{43}{2048}$	$\frac{35}{4096}$
7	$\frac{85}{2}$	$\frac{71}{4}$	$\frac{81}{8}$	$\frac{61}{16}$	$\frac{43}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{53}{256}$	$\frac{69}{512}$	$\frac{79}{1024}$	$\frac{75}{2048}$	$\frac{113}{4096}$
8	$\frac{255}{2}$	$\frac{197}{4}$	$\frac{147}{8}$	$\frac{157}{16}$	$\frac{251}{32}$	$\frac{227}{64}$	$\frac{45}{128}$	$\frac{113}{256}$	$\frac{91}{512}$	$\frac{35}{1024}$	$\frac{43}{2048}$	$\frac{51}{4096}$
9	$\frac{257}{2}$	$\frac{209}{4}$	$\frac{433}{8}$	$\frac{181}{16}$	$\frac{449}{32}$	$\frac{381}{64}$	$\frac{237}{128}$	$\frac{113}{256}$	$\frac{103}{512}$	$\frac{175}{1024}$	$\frac{425}{2048}$	$\frac{31}{4096}$
10	$\frac{771}{2}$	$\frac{627}{4}$	$\frac{149}{8}$	$\frac{191}{16}$	$\frac{449}{32}$	$\frac{143}{64}$	$\frac{633}{128}$	$\frac{353}{256}$	$\frac{871}{512}$	$\frac{695}{1024}$	$\frac{37}{2048}$	$\frac{133}{4096}$

Этот набор достаточен для создания 1024 случайных точек из 12-мерного гиперкуба. Последовательные векторы в последовательности Соболя создаются посредством XOR (исключающего или) предыдущего вектора с одной из строк в приведенной выше таблице, где строки выбираются в порядке одометра, начиная с первой строки.

Источники

1. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. - https://en.wikipedia.org/wiki/Sobol_sequence
2. И. М. Соболь, Равномерно распределенные последова- тельности с дополнительным свойством равномерности, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, том 16, номер 5, 1332–1337
3. [Электронный ресурс] - http://michaelcarteronline.com/MCM/LDSequences/SobolExample.pdf
4. Диссертация «Расслоение и метод квази-Монте-Карло» Антонов Антон Александрович, САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕНННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
5. Joe and Frances Y. Kuo «Notes on generating Sobol′ sequences Stephen»