

应用数学导论大作业

敖睿成

1 摘要

考虑方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ \text{边值条件} \end{cases}$$

本次实验中, 依次针对一维情形, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, L-型区域上的泊松问题, 分别使用有限元方法, 和中心差分方法求解方程, 并给出相关理论分析和实验结果。

2 一维自适应有限元方法

对一维问题

$$\begin{cases} -u'' = f & \Omega = (0, L) \\ u'(0) = \kappa_0(u(0) - g_0) \\ u'(L) = \kappa_L(u(L) - g_L) \end{cases}$$

对于 $N + 1$ 个结点 $x_0 = 0, x_1 = \frac{L}{N}, \dots, x_N = L$, 在子区间 $[x_{i-1}, x_{i+1}] (i = 1, 2, \dots, N - 1)$ 上取分段线性函数:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

其中 $h_i = x_i - x_{i-1}$, 对于边界两个结点, 考虑 $x_0, x_1; x_{N-1}, x_N$ 对应的两个两点线性插值函数, 这样得到 $N + 1$ 个基函数 $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N$, 现求解 $v(x) = \sum_{j=0}^N u_j \phi_j(x)$, 使得

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

成立, 通过变分方法得到:

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1}}{h_i} + (\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}})u_i - \frac{u_{i+1}}{h_{i+1}} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\phi'(x)dx & i = 1, 2, \dots, N - 1 \\ (\frac{1}{h_1} + \kappa_0)u_0 - \frac{u_1}{h_1} = f_0 \\ (\frac{1}{h_N} + \kappa_L)u_N - \frac{u_{N-1}}{h_N} = f_N \end{cases}$$

令 $a_i = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}, i = 1, 2, \dots, N-1$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} + \kappa_0 & -\frac{1}{h_1} & & & \\ -\frac{1}{h_1} & a_1 & -\frac{1}{h_2} & & \\ & -\frac{1}{h_2} & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_N} \\ & & & -\frac{1}{h_N} & \frac{1}{h_N} + \kappa_L \end{pmatrix}$$

得到方程

$$Au = F$$

分别应用均匀剖分和自适应方法，在总点数 $N = 10, 20, 80$ 时得到如下结果:

$\kappa_0 = 10^6, k_1 = 0, g_0 = 0, f(x) = e^{-100(x-0.5)^2}$ 时,

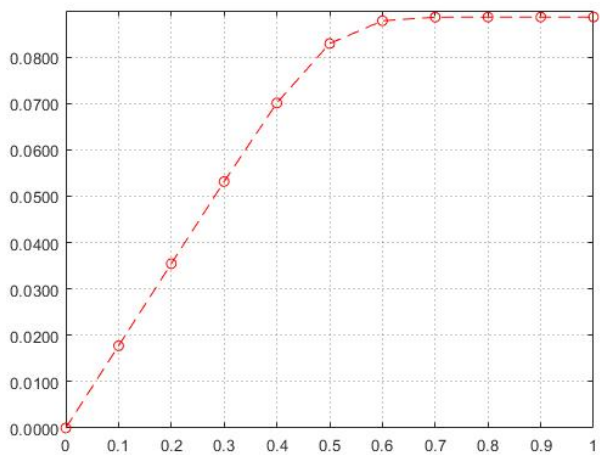


图 1: 均匀剖分 10

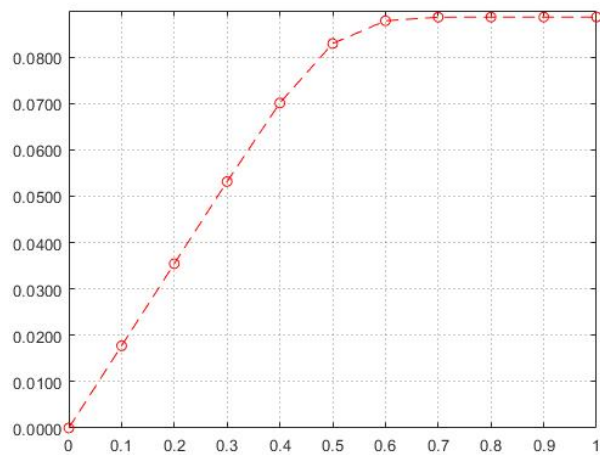


图 2: 自适应 10

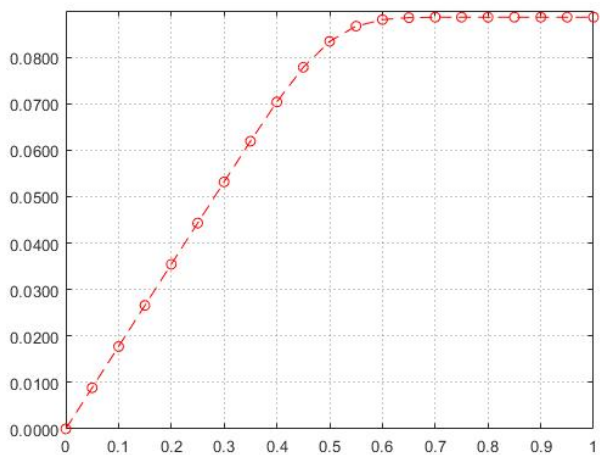


图 3: 均匀剖分 20

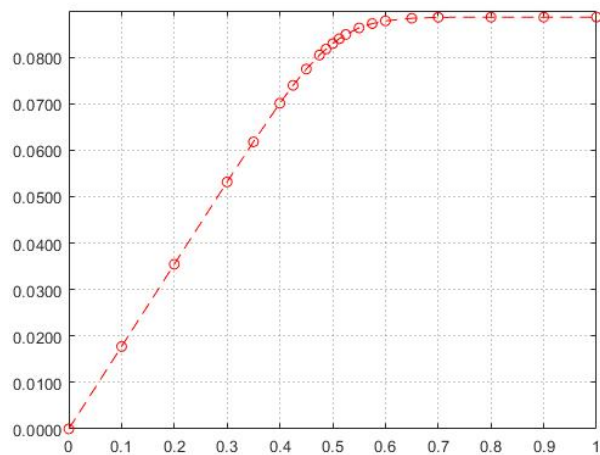


图 4: 自适应 20

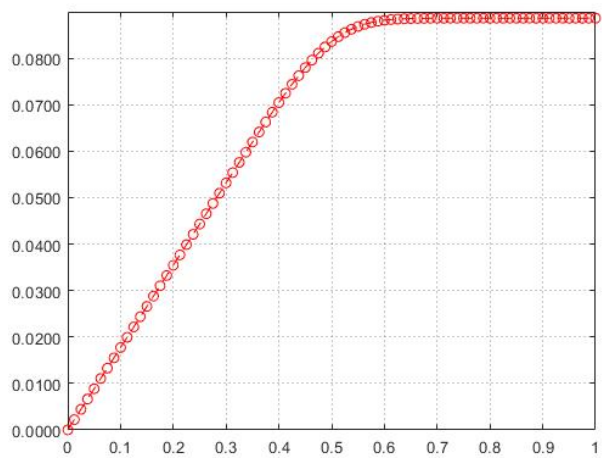


图 5: 均匀剖分 80

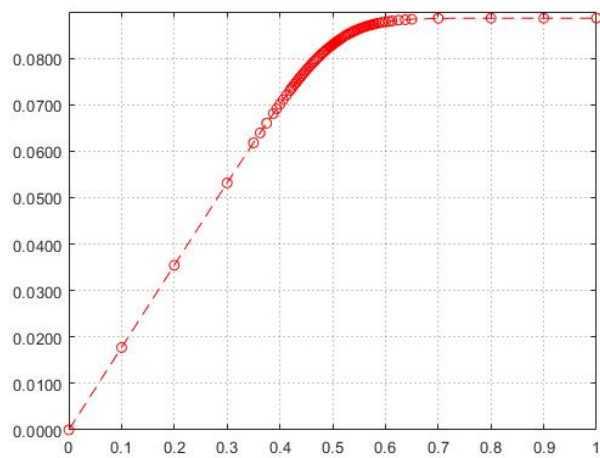


图 6: 自适应 80

$\kappa_0 = 10^6, k_1 = 10^5, g_0 = 0, g_L = 0, f(x) = e^{-100(x-0.5)^2}$ 时,

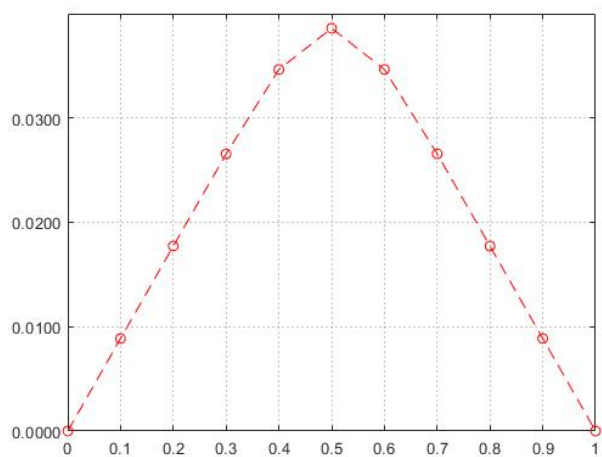


图 7: 均匀剖分 10

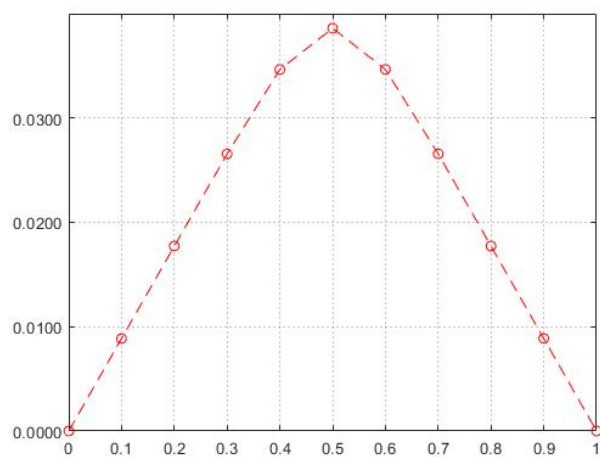


图 8: 自适应 10

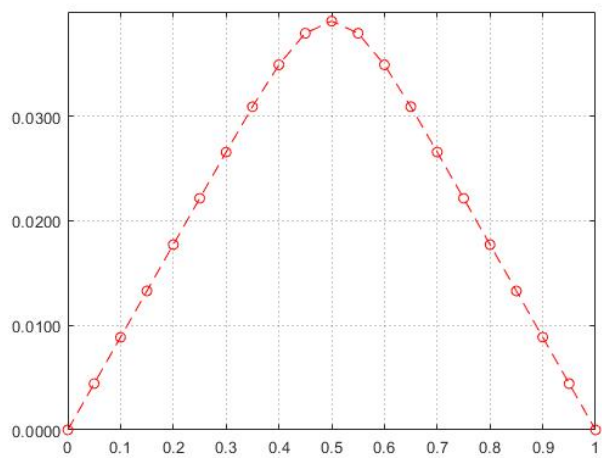


图 9: 均匀剖分 20

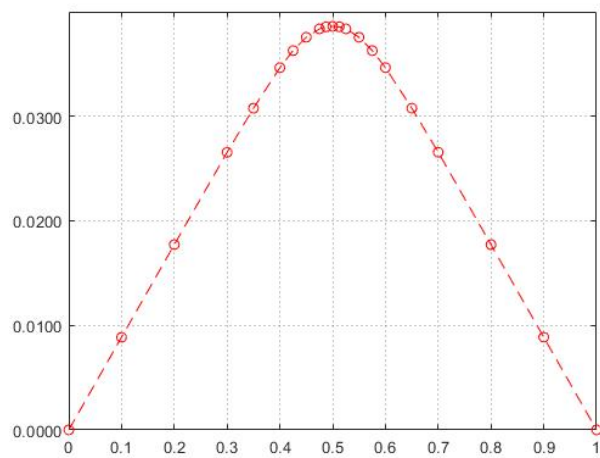


图 10: 自适应 20

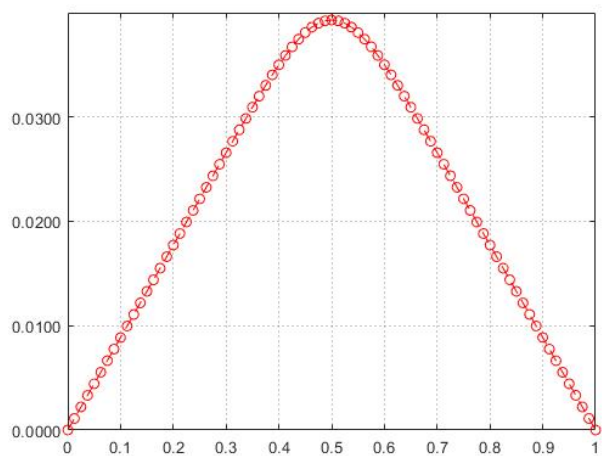


图 11: 均匀剖分 80

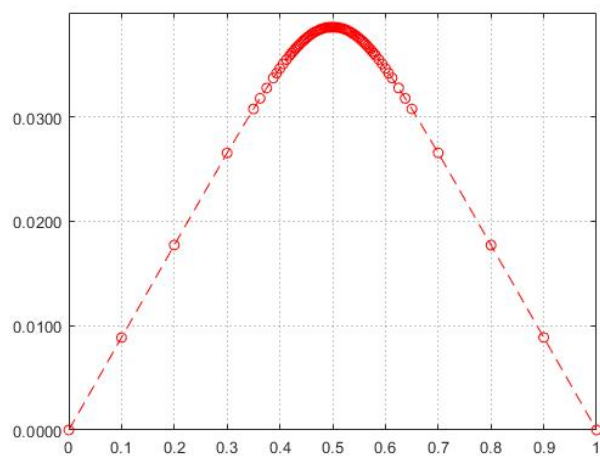


图 12: 自适应 80

$\kappa_0 = 10^6, k_1 = 0, g_0 = -1, f(x) = e^{-100(x-0.5)^2}$ 时,

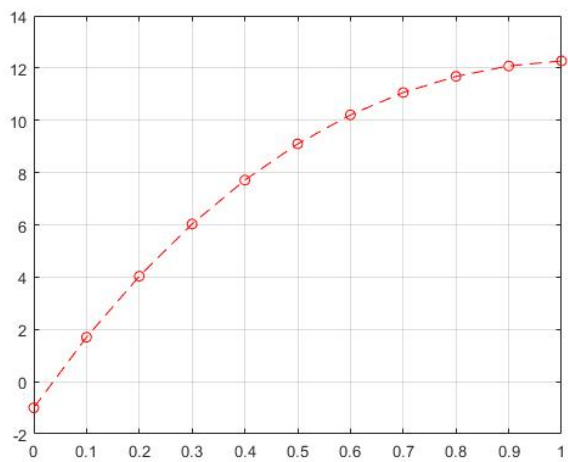


图 13: 均匀剖分 10

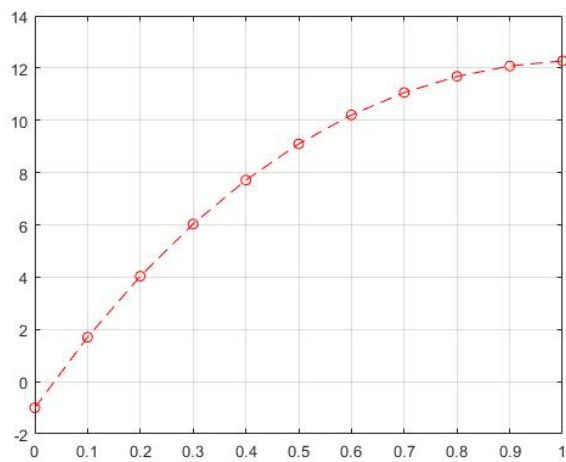


图 14: 自适应 10

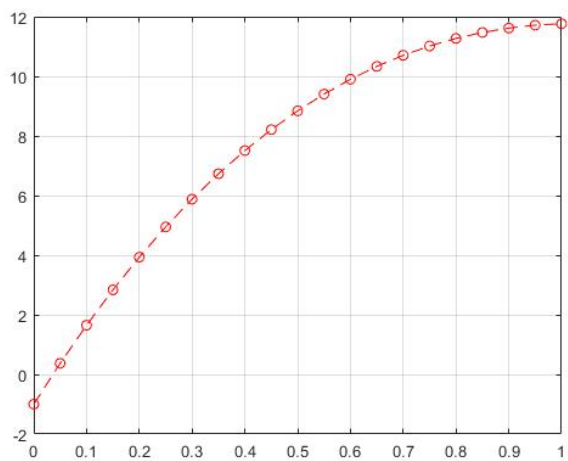


图 15: 均匀剖分 20

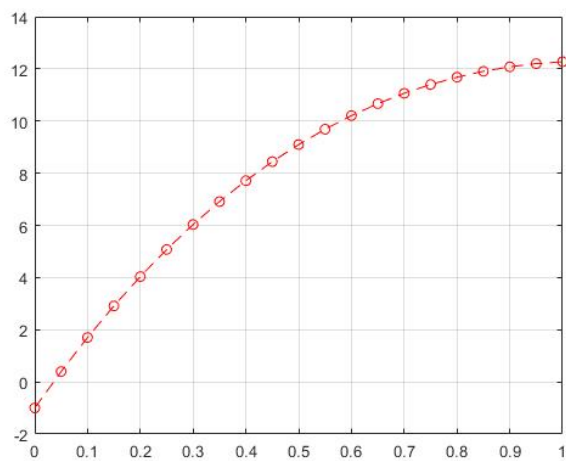


图 16: 自适应 20

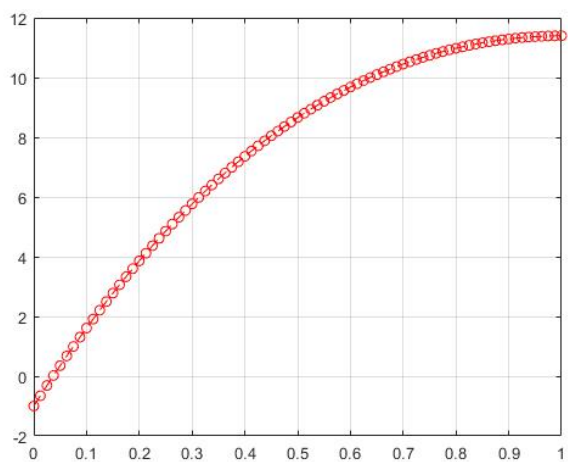


图 17: 均匀剖分 80

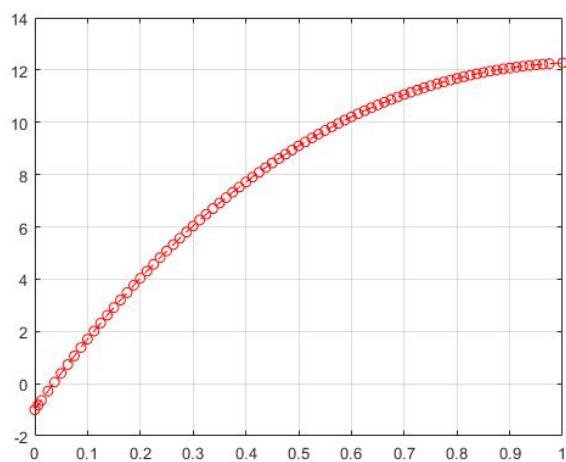


图 18: 自适应 80

可以看到，相比较均匀剖分，自适应方法在曲率大的点附近加密得较细，所得函数也更为平滑。

3 正方形区域泊松方程

3.1 问题

考虑热传导方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ u|_{\partial\Omega \times [0,1]} = 0, \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ u|_{t=0} = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{cases}$$

它有解析解 $u = e^{-2\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ ，下面我们使用不同数值方法计算方程近似解，并给出相关分析。

3.2 稳定性分析

考察 Laplace 算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

我们使用中心差分方法

$$L_{h_x, h_y} U_{i,j}^m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_{i-1,j}^m - 2U_{i,j}^m + U_{i+1,j}^m}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1}^m - 2U_{i,j}^m + U_{i,j+1}^m}{h_y^2}$$

这里 h_x, h_y 为对应分量的区间步长，对于 $\frac{\partial u}{\partial t}$ ，我们使用一阶向前差分方法:

$$D_k U_{i,j}^m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_{i,j}^{m+1} - U_{i,j}^m}{k}$$

这里 k 为时间步长。现在考虑等式:

$$(1 - \theta) L_{h_x, h_y} U_{i,j}^m + \theta L_{h_x, h_y} U_{i,j}^{m+1} = D_k U_{i,j}^m$$

当 $\theta = 1$ 时，为隐式格式， $\theta = 0.5$ 时，为 Crank-Nicolson 格式， $\theta = 0$ 时，为显式格式。令

$$\tilde{U} = u \left(i h_x, j h_y, \left(m + \frac{1}{2} \right) k \right)$$

应用 Taylor 公式，可以得到

$$\begin{aligned} L_{h_x, h_y} U_{i,j}^m &= \tilde{U}_{xx} + \tilde{U}_{yy} + \frac{2}{3!} \left(3\tilde{U}_{txx} \left(-\frac{1}{2}k \right) + 3\tilde{U}_{tyy} \left(-\frac{1}{2}k \right) \right) \\ &\quad + \frac{2}{4!} \left(\tilde{U}_{xxxx} h_x^2 + \tilde{U}_{yyyy} h_y^2 \right) + O(k^2 + h_x^4 + h_y^4) \\ L_{h_x, h_y} U_{i,j}^{m+1} &= \tilde{U}_{xx} + \tilde{U}_{yy} + \frac{2}{3!} \left(3\tilde{U}_{txx} \frac{1}{2}k + 3\tilde{U}_{tyy} \frac{1}{2}k \right) \\ &\quad + \frac{2}{4!} \left(\tilde{U}_{xxxx} h_x^2 + \tilde{U}_{yyyy} h_y^2 \right) + O(k^2 + h_x^4 + h_y^4) \end{aligned}$$

从而有：

$$(1 - \theta)L_{h_x, h_y} U_{i,j}^m + \theta L_{h_x, h_y} U_{i,j}^{m+1} - \Delta \tilde{U} = \left(\left(\theta - \frac{1}{2} \right) k + \frac{h_x^2}{12} \right) \tilde{U}_{xxx} + \left(\left(\theta - \frac{1}{2} \right) k + \frac{h_y^2}{12} \right) \tilde{U}_{yyy} \\ + (2\theta - 1) k \tilde{U}_{xxyy} + O(k^2 + h_x^4 + h_y^4)$$

这样截断误差 \mathcal{E} 满足

$$\mathcal{E} = \begin{cases} O(k^2 + h_x^2 + h_y^2) & \theta = 0.5 \\ O(k + h_x^2 + h_y^2) & \theta \neq 0.5 \\ O(k + h_x^4 + h_y^4) & h_x = h_y, \theta = 0.5 - 1/12\lambda_x \end{cases}$$

可以看出，C-N 方法具有较高的截断误差阶数，现在考虑 Fourier 函数

$$U_{j,k}^m = \lambda_\alpha^m e^{i(\alpha_x x_j + \alpha_y y_k)}, \quad \alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$$

解得

$$\lambda_k = \frac{1 - 4(1 - \theta) (\lambda_x \sin^2(\alpha_x h_x/2) + \lambda_y \sin^2(\alpha_y h_y/2))}{1 + 4\theta (\lambda_x \sin^2(\alpha_x h_x/2) + \lambda_y \sin^2(\alpha_y h_y/2))}$$

因此，我们有稳定性条件

$$\begin{cases} 2(\lambda_x + \lambda_y)(1 - 2\theta) \leq 1 & 0 \leq \theta < 1/2 \\ \text{无条件收敛} & 1/2 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

这表明当 $h_x = h_y = h$ 时，对于显式格式，我们需要选取 $\lambda \leq \frac{1}{4}$ ，即 $h^2 \geq 4k$ ，才能得到收敛结果。

3.3 数值实验

考虑由中间 $(N - 1) \times (N - 1)$ 个点，其中 $N = \frac{1}{h}$ 为单元网格长，则对应的差分矩阵

$$L_h = \begin{pmatrix} A_h & I_{N-1}/h & & & \\ I_{N-1}/h^2 & A_h & I_{N-1}/h^2 & & \\ & I_{N-1}/h^2 & A_h & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & I_{N-1}/h^2 \\ & & & I_{N-1}/h^2 & A_h \end{pmatrix}$$

$$A_h = \begin{pmatrix} -2/h^2 - 2/h^2 & 1/h^2 & & & \\ 1/h^2 & -2/h^2 - 2/h^2 & 1/h^2 & & \\ & 1/h^2 & -2/h^2 - 2/h^2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1/h^2 \\ & & & 1/h^2 & -2/h^2 - 2/h^2 \end{pmatrix}$$

这样，得到如下方程

$$(I - k\theta L_h)U^{m+1} = (I + k(1 - \theta)L_h)U^m$$

其中 U 为对应的网格向量化。下面考虑几种求解对应方程的方法。

Cholesky 分解

考察方程 $Ax = b$, 其中 A 为对称正定矩阵, 则我们有如下 Cholesky 分解用以求解方程:

Algorithm 1: 利用向量外积的 cholesky 分解

Input: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Output: $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $LL^T = A$

```

1 for  $j = 1 : n$  do
2   if  $j > 1$  then
3      $A(j:n, j) = A(j:n, j) - A(j:n, 1:j-1)A(j, 1:j-1)^T$ 
4      $A(j:n, j) = A(j:n, j) / \sqrt{A(j, j)}$ 
5 return  $\text{tril}(A)$ ;
```

计算量约为 $O(n^3/3)$, 是直接进行 Gauss 消元法的一半, 在矩阵阶数较小时具有很快速度, 但当矩阵阶数较大时, 可以使用分块的方法加快速度。

Gauss-Seidel 迭代法

令 $A = D - L - U$, 其中 D, L, U 分别为对角矩阵、下三角矩阵和上三角矩阵, 则我们有如下算法:

Algorithm 2: G-S 迭代法

Input: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$, **TOLERANCE** tol , **INITIALVALUE** x_0 **MAXITERATION** ite
Output: $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax \approx b$

```

1 Divide  $A$  into  $D, L$  and  $U$ 
2  $res = res_0 = b - Ax$ 
3 while  $\text{norm}(res) / \text{norm}(res_0) > tol$  or  $ite_{number} \leq ite$  do
4   Update  $y \leftarrow Ux$ 
5   Get  $x$  by solving  $(D - L)x = y + b$ 
6   Update  $res = -y$ 
7   Update  $Ux \leftarrow res + y$ 
8   if  $\text{norm}(res) \leq tol * res_0$  then
9     return  $x$ 
10 return  $x$ ;
```

这里利用到了 $res = b - Ax^{m+1} = b - (D - L)x^{m+1} + Ux^{m+1} = Ux^{m+1} - Ux^m$ 。可以证明, 当 A 为对称正定矩阵时, G-S 迭代法是收敛的。

多重网格法

对于单元格长为 $h = 1/N$ 的细网格, 我们希望找到一个较好的初始值, 从而加快迭代法收敛的速度, 故考虑在细网格上先进行若干次迭代, 将误差限制在粗网格上, 在粗网格解关于误差的方程, 再把近似解提升回细网格, 这样两者相加, 可以认为得到了更近的初值, 再重复这样的操作, 直到误差满足要求, 这里可以重复迭代, 算法如下:

Algorithm 3: 多重网格法

Input: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$, **EDGE** h , **MAXITERATION** ite_1 , **INITIALVALUE** x_0

Output: $x \in \mathbb{R}^n, Ax \approx b$

1 **if** $size(x) < threshold$ **then**

2 Solve $Ax = b$ by **G-S** with **INITIALVALUE** x_0

3 **else**

4 Solve $Au = b$ by **G-S** with **INITIALVALUE** x_0 and **MAXITERATION** ite_1

5 Get residue: $res \leftarrow b - Au$

6 Get coarse residue: $\widehat{res} \leftarrow I_h^{2h} res$

7 $\widehat{A} \leftarrow I_h^{2h} A I_{2h}^h$

8 Solve $\widehat{A}\widehat{e} = \widehat{res}$ with **EDGE** $2 * h$, **INITIALVALUE** **0** and **MAXITERATION** ite by **G-S**

9 $e \leftarrow I_{2h}^h \widehat{e}$

10 Update $u \leftarrow u + e$

11 Solve $Ax = b$ by **G-S** with **INITIALVALUE** u and **MAXITERATION** ite_2

12 **return** x ;

这里 I_h^{2h}, I_{2h}^h 分别为限制和提升矩阵。当初始值较差时，多重网格的速度一般比直接 G-S 迭代快。

数值结果

对于近似解 \tilde{U}_h ，在每个单元上使用双线性函数来逼近原区域。对于单元 K ，定义映射：

$$\tilde{F} : \xi = \frac{2(x - x_c)}{h_x}, \eta = \frac{2(y - y_c)}{h_y}, \quad (x, y) \in K, (\xi, \eta) \in \tilde{K}$$

定义如下的基函数：

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4}, \Phi_2 = \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4} \\ \Phi_3 &= \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}, \Phi_4 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4} \end{aligned}$$

令 $u_h(x, y)|_K = \hat{u}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 u_i \Phi_i(\xi, \eta)$ ，我们计算误差

$$\|u(x, y, 1) - u_h(x, y, 1)\|_0 = \left(\int_{\Omega} (u(x, y, 1) - u_h(x, y, 1))^2 dx dy \right)^{1/2}$$

和相对误差

$$\|u(x, y, 1) - u_h(x, y, 1)\|_0 / \left| \int_{\Omega} u dx dy \right|$$

数值结果如下：

空间步长 h	时间步长 k	μ	相对误差		
			显式格式	隐式格式	Crank-Nicolson 格式
1/64	1/256	16	$+\infty$	2.6179	4.5217e-2
	1/512	8	$+\infty$	0.9135	7.5452e-3
	1/2048	2	$+\infty$	0.2629	5.3124e-3
	1/4096	1	$+\infty$	7.6829e-2	5.2517e-3
	1/16384	1/4	3.1562e-2	3.2415e-2	5.4135e-3
1/128	1/1024	16	$+\infty$	5.3681	5.3267e-3
	1/4096	4	$+\infty$	0.4581	3.6782e-3
	1/16384	1	$+\infty$	7.6582e-2	2.5791e-3
	1/65536	1/4	8.3725e-3	8.2373e-3	4.7592e-3

表 1: 不同离散格式在最终时间层 $t = 1$ 的稳定性比较

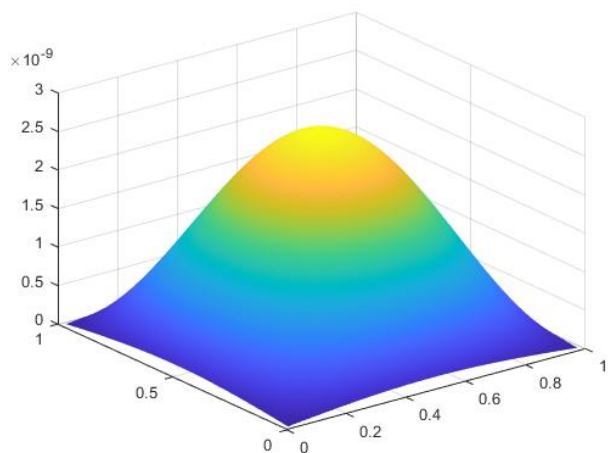


图 19: $t = 1$ 时图像

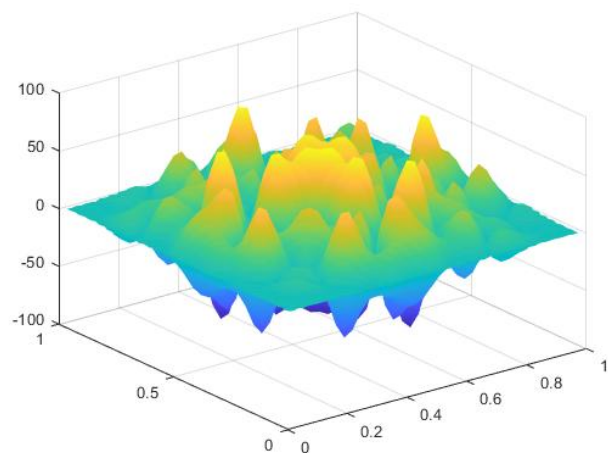


图 20: $\mu > 1/4$ 时显式格式

可以看到，与理论分析相同，当网格比 $\mu > \frac{1}{4}$ 时，显式格式是不稳定的，而 C-N 方法在网格比较大时就有很好的稳定性，但随着网格比和步长的减小，三者的表现最终接近，但步长很小时存在误差反而增大的情况，推测可能是由于方程的解析解较小，由于迭代造成的舍入损失更明显。

现在取 $h = 1/32, 1/128, 1/512, k = 1/512$ ，分别应用 Cholesky 分解，G-S 迭代法和 V-cycle 多重网格法求解 $t = 1$ 的解，对于迭代法，每次以上一个时间层的解为初始值，所得时间分别如下：

时间步长 k	空间步长 h	总时间 (s)		
		多重网格 V	Cholesky	Gauss-Seidel
1/512	1/32	1.3298e+1	7.2836	7.0681
	1/128	3.6337e+2	1.0274e+2	2.3415e+3
	1/512	6.3446e+3	7.5289e+3	\

表 2: 时间步长 $k=1/512$ 时, 三种方法求方程在 $t = 1$ 解的总时间

可以看出多重网格的时间大致为 $O(N^2)$ 。

对每个固定的 h , 分别用三种格式求近似解, 对每一种格式, 令 k 从大到小依次取 2 的幂, 比较取不同 k 时求解的误差, 取出其中最小的, 并且计算误差

$$\|u(x, y, 1) - u_h(x, y, 1)\|_0$$

所得结果如下:

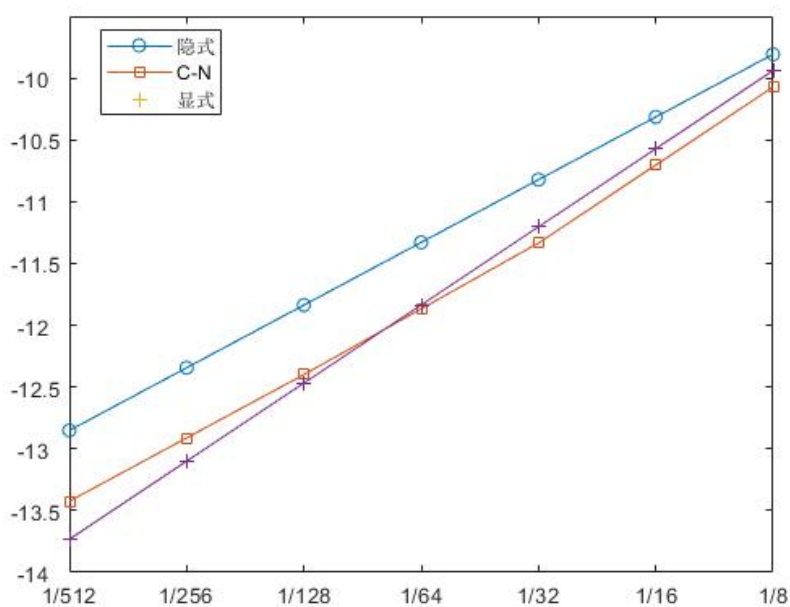


图 21: 对不同的 h , 选取最佳步长所得误差

可以发现, 虽然显式格式在 $\lambda > 1/4$ 时是发散的, 但在适当的网格比下, 反而可以得到很好的结果。

4 L 型区域上的泊松方程

4.1 问题

考虑如下泊松问题:

$$\begin{cases} -\Delta = f & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

其中 Ω 为如下 L 型区域, $u(x, y) = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\theta)(1 - x^2)(1 - y^2)$ 。

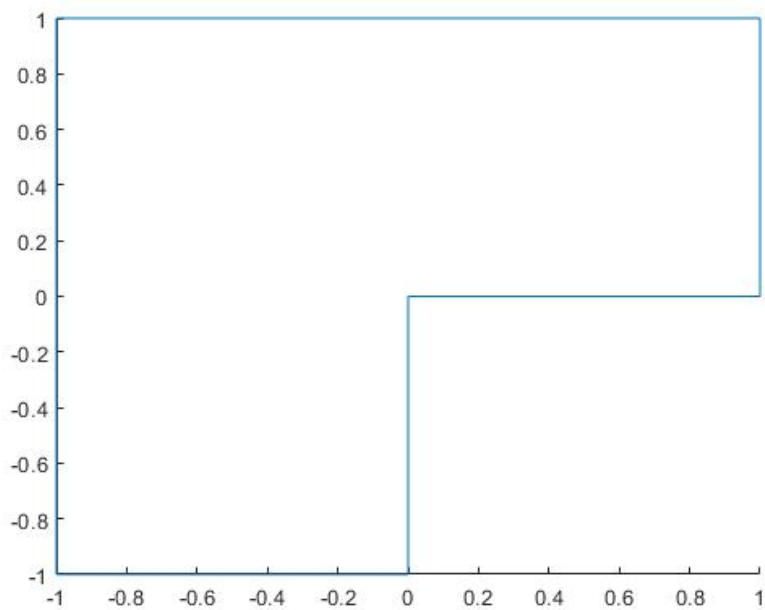


图 22: L 型区域

它的函数值和 Δ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 区间上的图像如下:

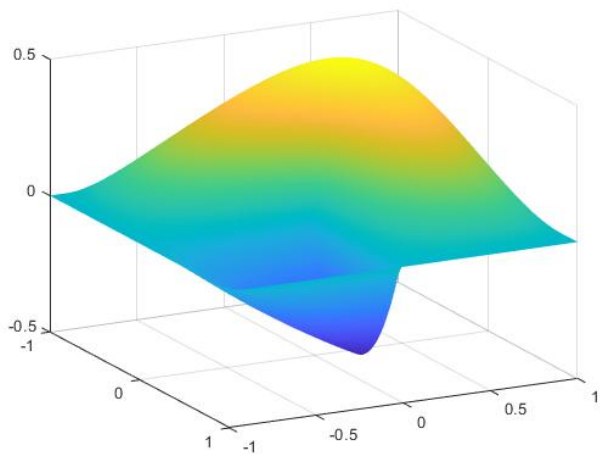


图 23: 函数值

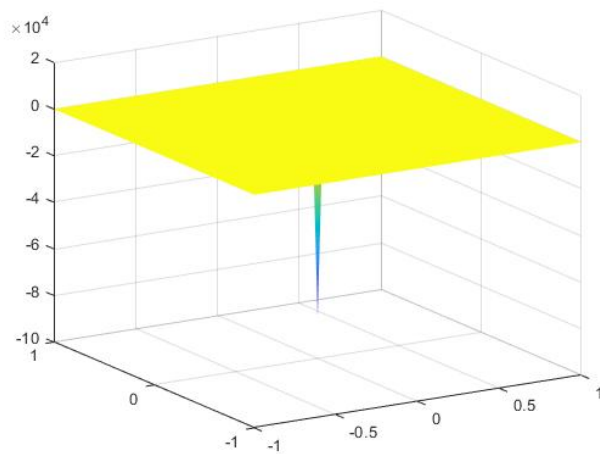


图 24: Δ

可以看到，在 $(0,0)$ 的邻域内 $\Delta \rightarrow +\infty$ 。下面我们分别使用均匀剖分和自适应剖分，利用差分方法求方程的近似解。

4.2 数值实验

LDL 分解

考察方程 $Ax = b$ ，对于对称非正定矩阵 A ，Cholesky 分解不再可行，此时可以考虑同样利用了对称性的 LDL 分解，得到 $A = LDL^T$ ，依次求解 $Lz = b, Dy = z, L^T x = y$ 得到方程的解，这三个方程分别为下三角、对角、上三角的，可以在 $O(n^2)$ 时间内求解，故 LDL 分解所需要的运算时间约为 $O(n^3/3)$ 的，下面给出算法：

Algorithm 4: 利用向量外积的 LDL 分解

Input: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Output: $L, D \in \mathbb{R}^{n \times n}, LDL^T = A$

1 **for** $j = 1 : n - 1$ **do**

2 $A(j+1:n, j) = A(j+1:n, j) / A(j, j)$

3 $A(j+1:n, j+1:n) = A(j+1:n, j+1:n) - A(j+1:n, j) * A(j, j+1:n)$

4 $L = \text{tril}(A, -1); D = \text{diag}(A)$

5 **return** L, D ;

当矩阵较大时，可以采用分块 LDL 分解，算法如下：

Algorithm 5: 分块 LDL 分解

Input: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, **MINISIZE**, **NUM**

Output: $L, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $LDL^T = A$

```
1 if  $n \leq \mathbf{MINISIZE}$  then
2   Solve  $A = LDL^T$  with LDL
3 subsize = ceil( $n/\mathbf{NUM}$ )
4 for  $j = 1 : \text{subsize} : n$  do
5   if  $j + \text{subsize} > n$  then
6     Solve  $A(j : n, j : n) = LDL^T$  with LDL, update  $\text{tril}(A(j : n, j : n))$  with  $L, D$ 
7   else
8     Solve  $A(j : j + \text{subsize} - 1, j : j + \text{subsize} - 1) = LDL^T$  with algorithm 5
9     Update  $\text{tril}(A(j : j + \text{subsize} - 1, j : j + \text{subsize} - 1))$  with  $L, D$ 
10    Solve  $LV = A(j : j + \text{subsize} - 1, j + \text{subsize} : n)$ 
11    Solve  $DU^T = V$ 
12    Update  $A(j + \text{subsize} : n, j : j + \text{subsize} - 1) \leftarrow U$ 
13    Update  $A(j + \text{subsize} : n, j + \text{subsize} : n) \leftarrow A(j + \text{subsize} : n, j + \text{subsize} : n) - UV$ 
14  $L = \text{tril}(A, -1)$ ,  $D = \text{diag}(A)$ 
15 return  $L, D$ ;
```

数值结果

将 L 型区域分别以步长 $h = h_x = h_y = 2/N$, $N = 32, 64, 128, 256, 512$ 进行均匀剖分, 使用 LDL 分解, G-S 迭代, 松弛因子为 1.5 的超松弛迭代法, V-cycle 多重网格法求解差分离散方程 $A_h U_h = F_h$ 的解 U_h 或近似解 \tilde{U}_h , 其中系数矩阵为稀疏的对称正定矩阵, 形如下图:

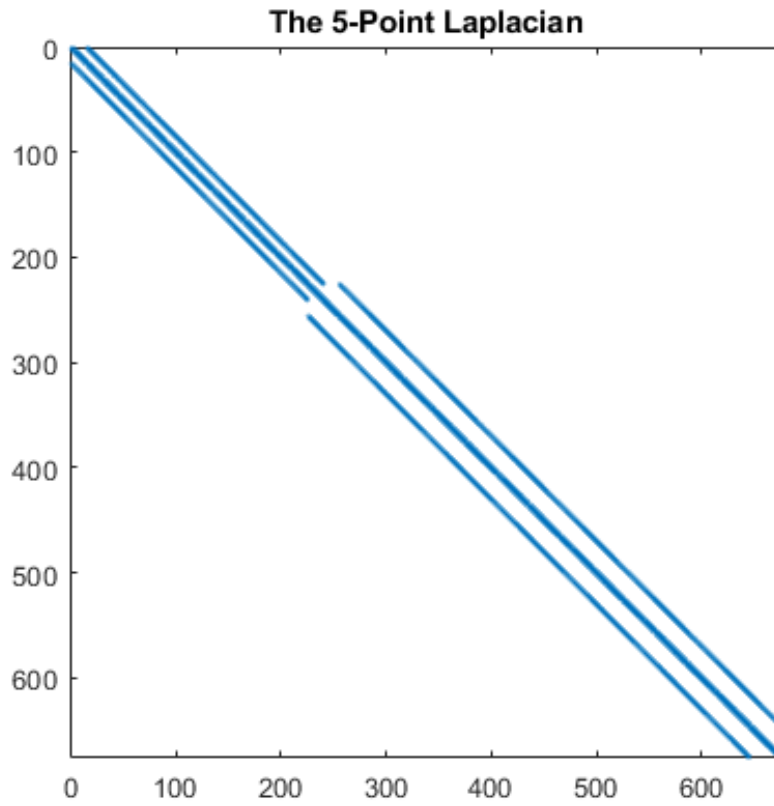


图 25: L 型差分系数矩阵

编号的顺序是从右上角 $(1-h, 1-h)$ 开始，从上到下，从右往左编号。迭代法的初始值为全零网格，近似解 \tilde{U}_h 满足误差关系

$$\|A_h \tilde{U}_h - F_h\|_2 / \|F_h\|_2 \leq 10^{-8}$$

所花的时间如下:

$N = 2/h$	总时间 (s)			
	LDL 分解	G-S 迭代 V	超松弛迭代	多重网格
32	5.1174e-2	1.3309e-2	8.5721e-3	3.4924e-3
64	2.9712e-1	2.9704	7.6794e-2	1.5284e-2
128	1.3829	6.1109	2.2015	6.6295e-2
256	1.7325e+1	1.0036e+2	3.6239e+1	2.6981e-1
512	1.9108e+2	2.1589e+3	7.5086e+2	1.0992

表 3: 时间步长 $k=1/512$ 时，三种方法求方程在 $t=1$ 解的总时间

接下来使用自适应剖分差分方法求解方程。格式如下:

Algorithm 6: L 型区域自适应方法

Input: INITIALGRID U_0 , **ERROR** Γ_0, θ , **TOLERANCE** $\epsilon, k = 0$

Output: U, N

```
1 Update  $\eta(\Gamma_{k-1}) \leftarrow \eta(\Gamma_k)$ 
2 while TRUE do
3   if  $\eta(\Gamma_k) \leq \epsilon$  then
4      $N = k, U = U_k$  Return
5   Find minimal subset unit set  $\mathcal{M}_k$  such that  $\eta(\mathcal{M}_k)^2 \geq \theta \eta(\Gamma_k)^2$ 
6   Update  $\Gamma_k \leftarrow \Gamma_{k+1}$ 
7   Update  $k \leftarrow k + 1$ 
8 return  $N, U$ ;
```

这里 $\eta(\Gamma)$ 为后验误差估计因子:

$$\eta_K^2 = h_K^2 \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e} \right] \right\|_{L^2(e)'}^2$$

其中 h_K 是单元 K 最长边的长度, \mathcal{E} 是 K 所有不在边界的边的集合, h_e 是边 e 的长度, n_e 是 e 上的外法向方向, $[\frac{\partial u_h}{\partial n_e}]$ 是法向导数跨过 e 的跳跃, 即

$$\frac{\partial u_h}{\partial n_e}|_{K^+} - \frac{\partial u_h}{\partial n_e}|_{K^-}$$

$\eta(G)$ 表示单元集合 G 中所有单元的后验误差之和。每次剖分把所选集合中的单元加细, 并将边界上有两个悬点的单元也加细, 使得任意一个单元的边界上只有至多一个悬点。需要注意的是, 在计算中悬点取边两端点函数值的均值。分别以 $\theta = 0.8, 0.6, 0.3, 0.2, 0.1, \epsilon = 10^{-6}$, 一般来说, θ 越大, 每次加密得网格越多, 单步时间越长, 收敛到精确解所需的步数越少。得出网格剖分图如下:

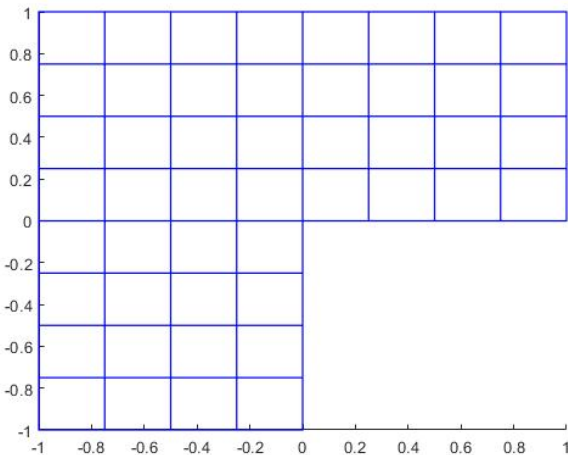


图 26: $\theta = 1, 1$ 次剖分

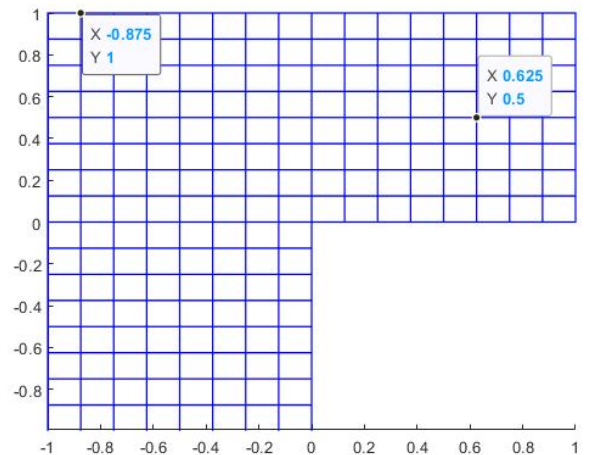


图 27: $\theta = 1, 2$ 次剖分

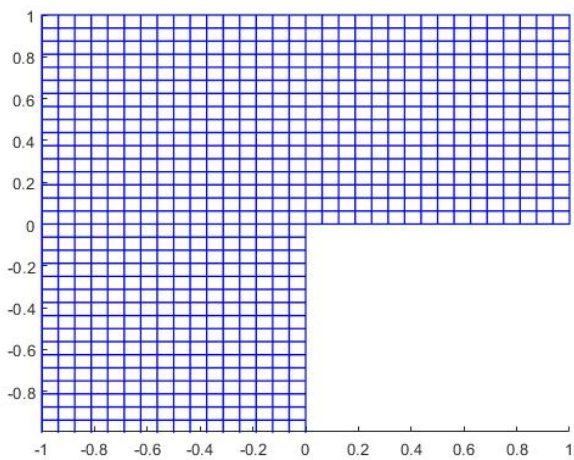


图 28: $\theta = 1,3$ 次剖分

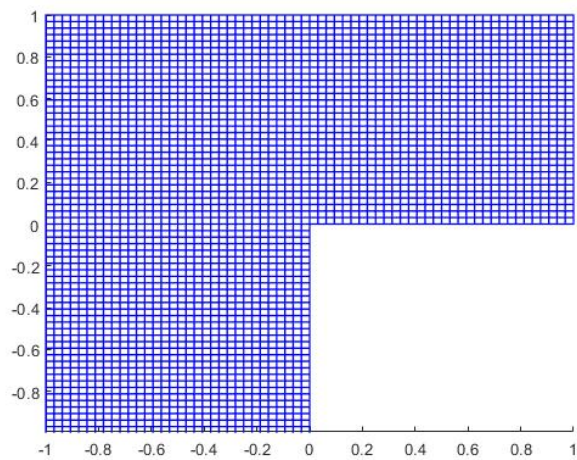


图 29: $\theta = 1,4$ 次剖分

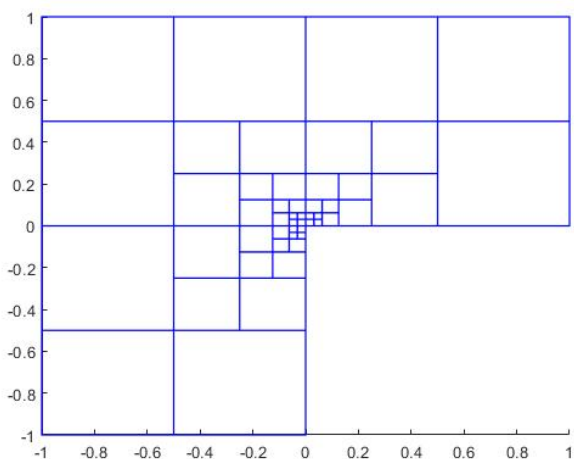


图 30: $\theta = 0.8,4$ 次剖分

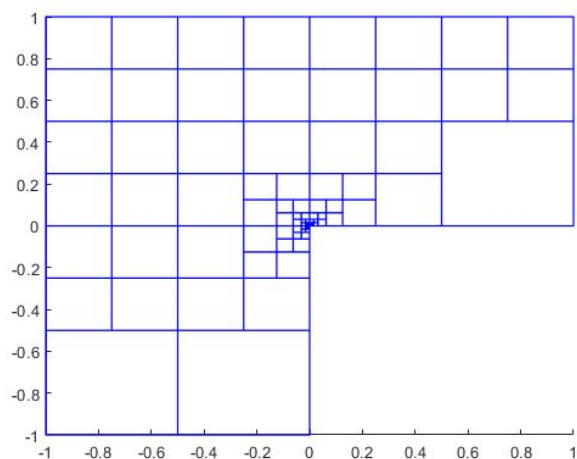


图 31: $\theta = 0.8,7$ 次剖分

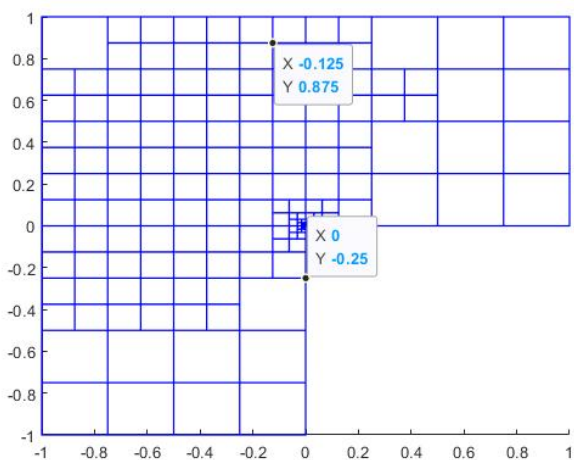


图 32: $\theta = 0.8,8$ 次剖分

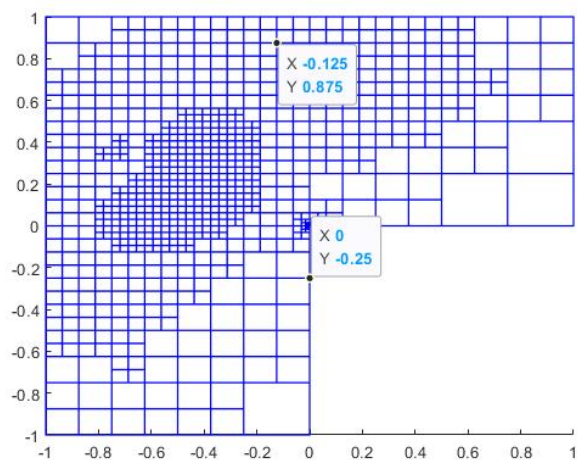


图 33: $\theta = 0.8,10$ 次剖分

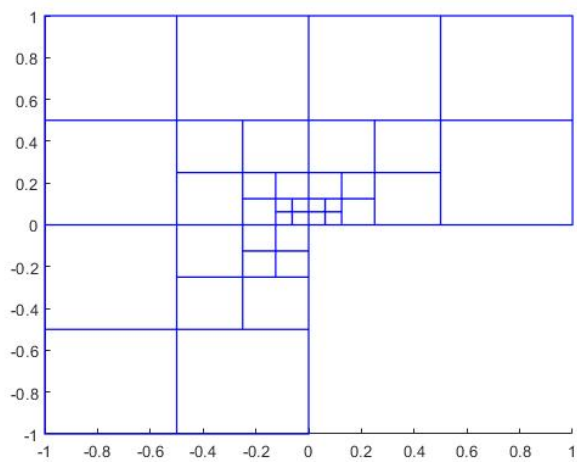


图 34: $\theta = 0.6$, 8 次剖分

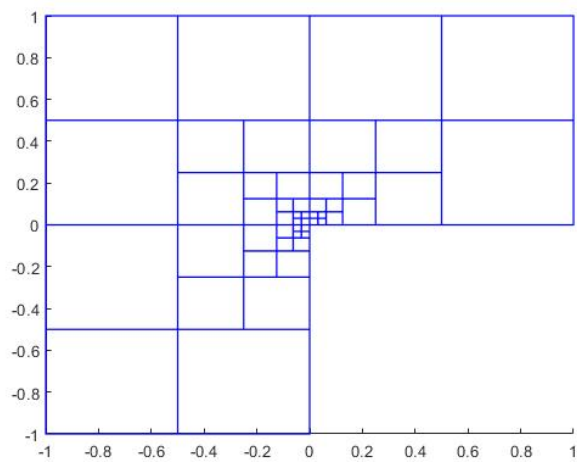


图 35: $\theta = 0.6$, 10 次剖分

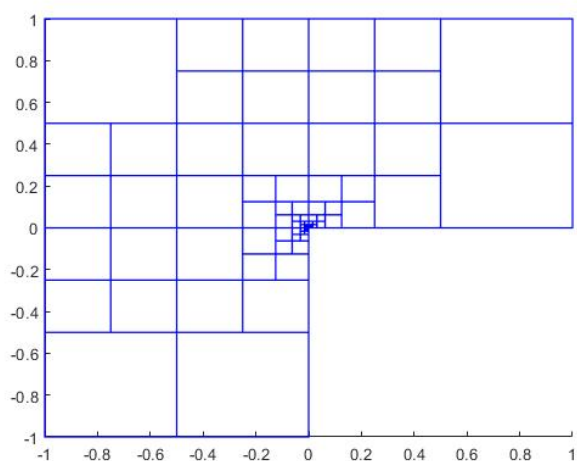


图 36: $\theta = 0.6$, 12 次剖分

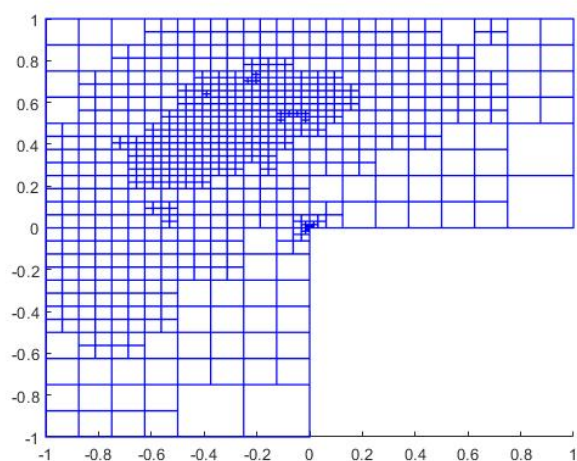


图 37: $\theta = 0.6$, 18 次剖分

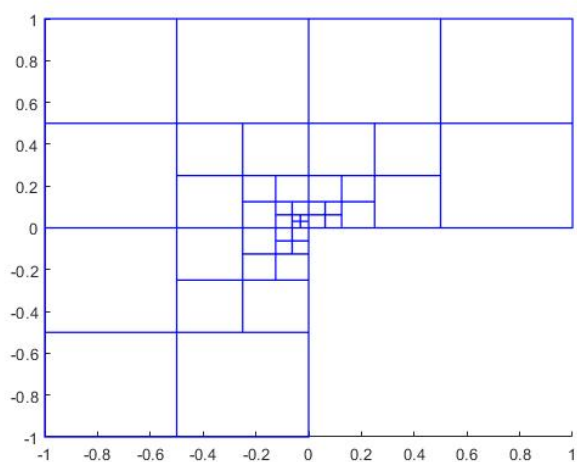


图 38: $\theta = 0.3$, 10 次剖分

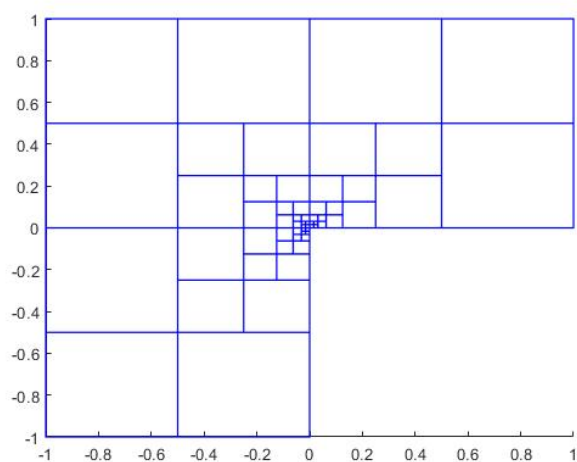


图 39: $\theta = 0.3$, 15 次剖分

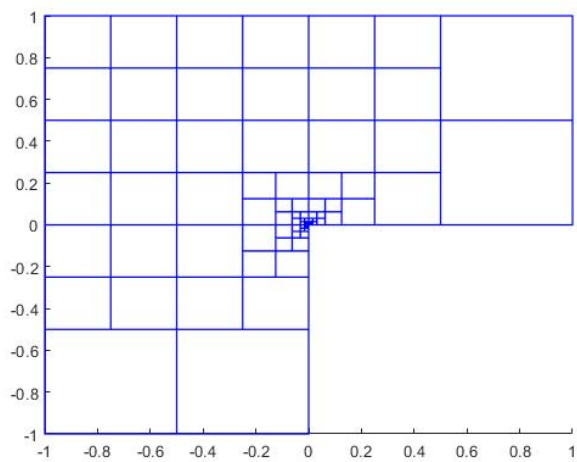


图 40: $\theta = 0.3, 20$ 次剖分

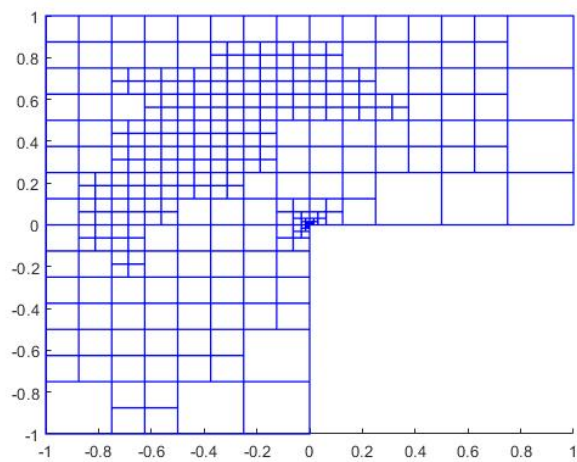


图 41: $\theta = 0.3, 30$ 次剖分

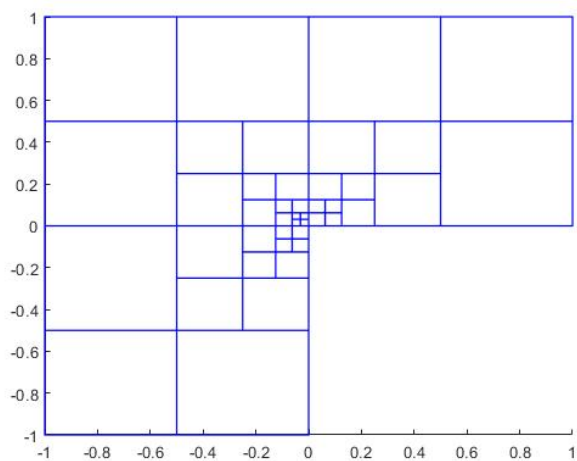


图 42: $\theta = 0.2, 10$ 次剖分

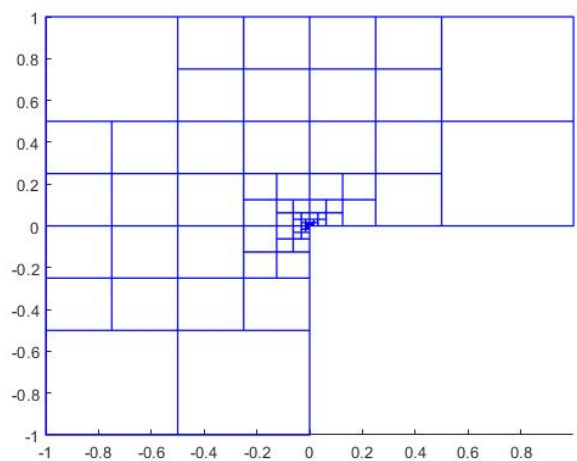


图 43: $\theta = 0.2, 20$ 次剖分

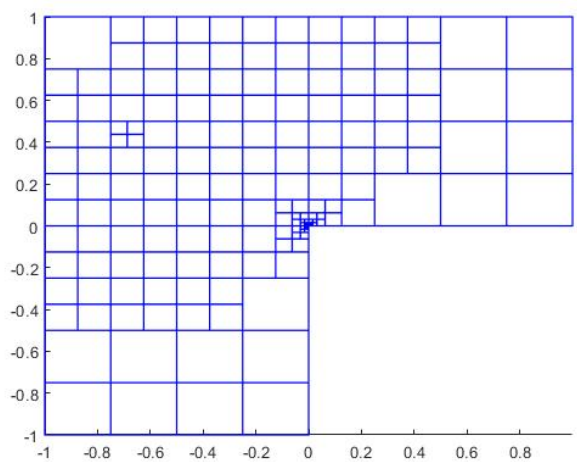


图 44: $\theta = 0.2, 30$ 次剖分

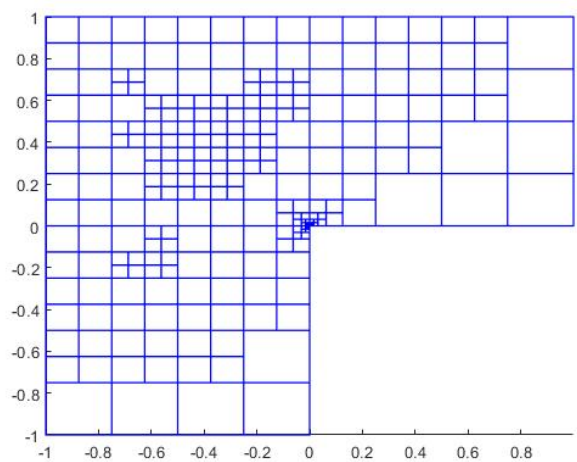


图 45: $\theta = 0.2, 50$ 次剖分

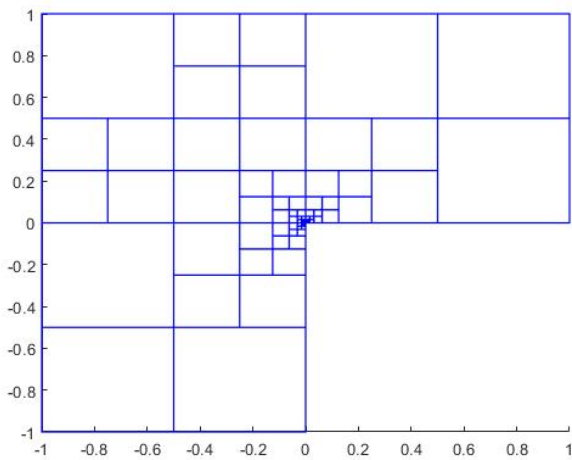


图 46: $\theta = 0.1, 20$ 次剖分

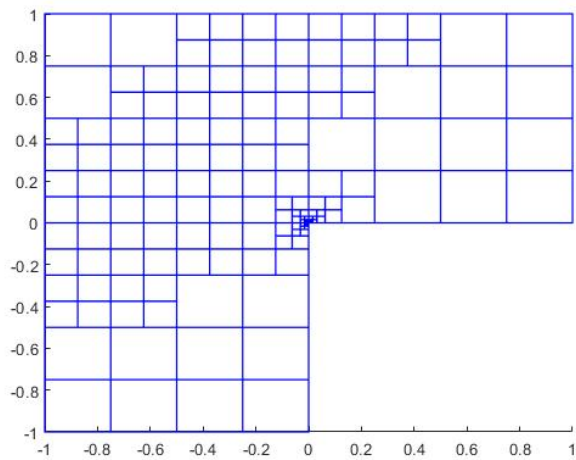


图 47: $\theta = 0.1, 40$ 次剖分

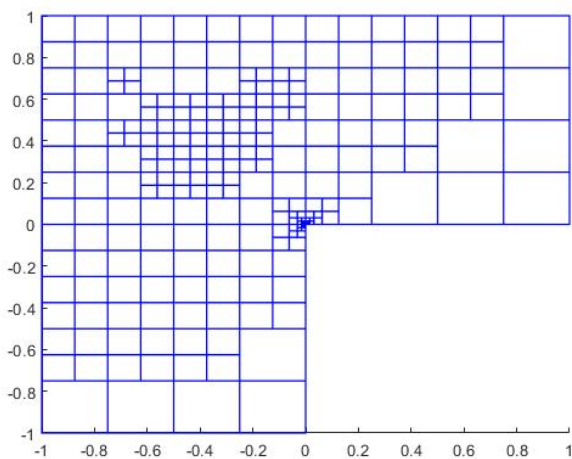


图 48: $\theta = 0.1, 60$ 次剖分

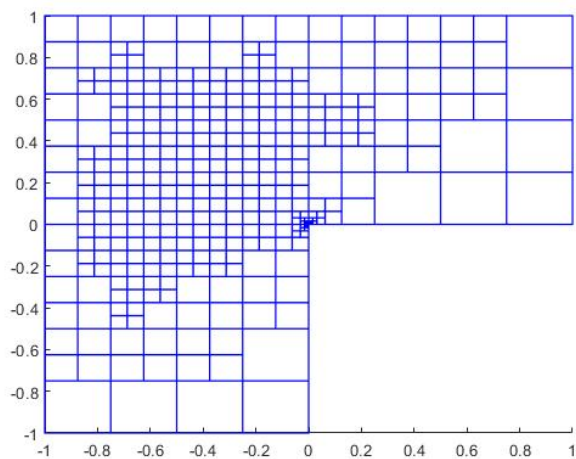


图 49: $\theta = 0.1, 80$ 次剖分

误差比较

用结点插值的分片线性函数 u_h 逼近原函数，得到误差

$$e_{h,0} = \left(\int_{\Omega} (u(x,y) - u_h(x,y))^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

和

$$e_{h,1} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x,y) - \nabla u_h(x,y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

对于均匀剖分，计算 $h = 2/N$ 取不同值时的 $\ln e_{h,0}/\ln h$ 和 $\ln e_{h,1}/\ln h$ ，对于自适应方法，计算 $\ln e_{h,0}/\ln h_l$ 和 $\ln e_{h,1}/\ln h_l$ ，其中 $h_l = 1/|\Gamma_l|^{\frac{1}{2}}$, $|\Gamma_l|$ 是网格 Γ_l 中的正方形个数。