UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Appunti di Algoritmi e Strutture Dati

a.a. 2017/2018

Autore:
Timoty Granziero

Repository:
https://github.com/Vashy/ASD-Notes

11 marzo 2018

Indice

1 Lezione del 28/02/2018

1.1 Problem Solving

1. Formalizzazione del problema;
2. Sviluppo dell'**algoritmo** (focus del corso);
3. Implementazione in un programma (codice).

Algoritmo Sequenza di passi elementari che risolve il problema.

Input → **Algoritmo** → Output

Dato un problema, ci sono tanti algoritmi per risolverlo.

e.g.[1] Ordinamento dei numeri di una `Rubrica`. L'idea è quella di trovare tutte le permutazioni di ogni numero.

$$30 \text{ numeri: } \textit{complessità } 30! \cong 2 \times 10^{32}\text{ns} \Rightarrow$$
$$3^{19} \text{ anni (con } ns = \text{nanosecondi)}$$

std::vector È un esempio nel `C++` delle ragioni per cui si studia questa materia. Nella documentazione della `STL`, sono riportati i seguenti:

- `Random access`: complessità O(1);
- `Insert`: complessità O(1) ammortizzato.

Il `random access` è l'accesso a un elemento casuale del `vector`. O(1) implica che l'accesso avviene in tempo costante (pari a 1).

Per `insert` si intende l'inserimento di un nuovo elemento in coda. Avviene in tempo O(1) ammortizzato: questo perchè ogni N inserimenti, è necessario un resize del vector e una copia di tutti gli elementi nel nuovo vettore (questa procedura è nascosta al programmatore).

1.2 Cosa analizzeremo nel corso

- Tempo di esecuzione;
- Spazio (memoria);

- Correttezza;
- Manutenibilità.

[1] for the sake of example

1.2.1 Approfondimento sul tempo di esecuzione T(n)

- *P Problems*: complessità polinomiale. L'algoritmo è trattabile
- *NP Complete*: problemi NP completi. **e.g**: Applicazione sugli algoritmi di sicurezzza. Si basano sull'assunzione che per essere risolti debbano essere considerate tutte le soluzioni possibili.
- *NP Problems*: problemi con complessità (ad esempio) esponenziale/fattoriale. Assolutamente non trattabili.

Figura 1: Complessità T(n).

1.3 Problema dell'ordinamento (sorting)

`Input`: sequenza di numeri

$$a_0 a_1 \ldots a_n;$$

`Output`: permutazione

$$a'_0 a'_1 \ldots a'_n$$

tale che

$$a'_0 \leq a'_1 \leq \cdots \leq a'_n$$

Vedremo due algoritmi:

- `Insertion Sort`;
- `Merge Sort`.

1.4 Insertion Sort

È un algoritmo di *sorting incrementale*. Viene applicato naturalmente ad esempio quando si vogliono ordinare le carte nella propria mano in una partita a scala 40: si prende ogni carta a partire da sinistra, e la si posiziona in ordine crescente.

Astrazione Prendiamo ad esempio il seguente array:

5	2	8	4	7

Partiamo dal primo elemento: 5. È già ordinato con se stesso, quindi procediamo con il secondo elemento.
Confronto il numero 2 con l'elemento alla sua sinistra:
$2 \geq 5$? No, quindi lo inverto con l'elemento alla sua sinistra, come segue

2	5	8	4	7

Key: $\boxed{8}$

La key analizzata è 8.
$8 \geq 5$? Sì, quindi è ordinato in modo corretto.

2	5	8	4	7

Key: $\boxed{4}$

La key analizzata è 4.
$4 \geq 8$? No, quindi lo sposto a sinistra invertendolo con 8.
$4 \geq 5$? No, lo sposto a sinistra invertendolo con 5.
$4 \geq 2$? Sì, quindi è nella posizione corretta.

2	4	5	8	7

Key: $\boxed{7}$

Key analizzata 7.
$7 \geq 8$? No, lo sposto a sinistra invertendolo con 8.
$7 \geq 5$? Sì, è nella posizione corretta.
Ottengo l'array ordinato:

2	4	5	7	8

Algorimo Passiamo ora all'implementazione dell'algoritmo, con uno pseudocodice similare a `Python`[1]

`Input`: $A[1, .., n]$, $A.length$.

$$\text{È noto che: } A[i] \leq key < A[i+1]$$

Pseudocodice Segue lo pseudocodice dell'`Insertion Sort`.

```
INSERTION-SORT(A)
n = A.length
for j = 2 to n // il primo elemento è già ordinato
    key = A[j] // A[1 .. j − 1] ordinato
    i = j − 1
    while i > 0 and A[i] > key
        A[i + 1] = A[i]
        i = i − 1
    A[i + 1] = key
```

Quando il `while` termina, ci sono due casi:

- `i = 0`: tutti gli elementi prima di `j` sono maggiori di `key`; `key` va al primo posto (1);
- `(i > 0) and (A[i]` $\leq$ `key)`: `A[i+1] = key`.

1.4.1 Invarianti e correttezza

for `A[1..j-1]` è ordinato e contiene gli elementi in `(1,j-1)` iniziali.

while `A[1..i]A[i+2..j]` ordinato e `A[i+2..j] > key`.

In uscita abbiamo:

- `j = n+1`;
- `A[1..n]` ordinato, come da invariante: vale `A[1..j-1]` ordinato, e `j` vale `n+1`.

[1] **ATTENZIONE**: verranno usati array con indici che partono da 1.

2 Lezione del 02/03/2018

2.1 Modello dei costi

Assunzione Tutte le istruzioni richiedono un tempo costante.

Rivediamo l'algoritmo:

```
INSERTION-SORT(A)
1  n = A.length
2  for j = 2 to n // il primo elemento è già ordinato
3      key = A[j] // A[1 .. j − 1] ordinato
4      i = j − 1
5      while i > 0 and A[i] > key
6          A[i + 1] = A[i]
7          i = i − 1
8      A[i + 1] = key
```

Diamo il nome c_0 alla chiamata del metodo, `InsertionSort(A)`; A ogni riga numerata, diamo il nome $c_1, c_2, .., c_8$ [1].

Vediamo il *costo* di ogni istruzione:

$$\boldsymbol{c_0} \rightarrow 1$$

$$\boldsymbol{c_1} \rightarrow 1$$

$$\boldsymbol{c_2} \rightarrow n$$

$$\boldsymbol{c_3} \rightarrow (n-1)$$

$$\boldsymbol{c_4} \rightarrow (n-1)$$

$$\boldsymbol{c_5} \rightarrow \sum_{j=2}^{n} t_j + 1$$

$$\boldsymbol{c_6}, \boldsymbol{c_7} \rightarrow \sum_{j=2}^{n} t_j$$

$$\boldsymbol{c_8} \rightarrow (n-1)$$

[1] (c_1 corrisponde alla riga 1, c_2 alla riga 2 e così via)

2.2 Complessità di IS

$$T^{IS}(n) = c_0 + c_1 + c_2 n + (c_3 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n}(t_j + 1) + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} t_j$$

$\boldsymbol{t_j}$ dipende, oltre che da n, dall'istanza dell'array che stiamo considerando. È chiaro che questo calcolo non da indicazioni chiare sull'effettiva complessità dell'algoritmo.

Andiamo ad analizzare i 3 possibili casi:

a) Caso migliore (2.2.1)

b) Caso peggiore (2.2.2)

c) Caso medio (2.2.3)

2.2.1 Caso migliore

$\rightarrow A$ ordinato $\Rightarrow t_j = 0 \ \forall j$

La **complessità** diventa:

$$T^{IS}_{min}(n) = c_0 + c_1 + c_2 n + (c_3 + c_4 + c_5 + c_8)(n-1) = an + b \approx n$$

Ossia, si comporta come n. Il *caso migliore* **non** è interessante, visto che è improbabile si presenti.

2.2.2 Caso peggiore

$\rightarrow A$ ordinato in senso inverso $\Rightarrow \forall j \ t_j = j - 1$

La **complessità** diventa:

$$T^{IS}_{max}(n) = c_0 + c_1 + c_2 n + (c_3 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n}(j-1)$$

Per valutare il costo di $\sum_{j=2}^{n} j$ e di $\sum_{j=2}^{n}(j-1)$, usiamo la **somma di Gauss**:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

Otteniamo:

$$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$\sum_{j=2}^{n} (j-1) = \sum_{i=1}^{n} n = \frac{(n-1)n}{2}$$

Per finire, ricalcoliamo $T^{IS}_{max}(n)$

$$T^{IS}_{max}(n) = a'n^2 + b'n + c' \approx n^2$$

2.2.3 Caso medio

Il caso medio è *difficile da calcolare*, e in una considerevole parte dei casi, coincide con il caso peggiore.

Comunque, l'idea è la seguente:

$$\frac{\sum_{\text{perm. di input}} T^{IS}(p)}{n!} \approx n^2 \qquad \text{posso pensare che } t_j \cong \frac{j-1}{2}$$

2.3 Divide et Impera

Un algoritmo di sorting *divide et impera* si può suddividere in 3 fasi:

divide divide il problema dato in sottoproblemi più piccoli;

impera risolve i sottoproblemi:

- ricorsivamente;
- la soluzione è nota (e.g. array con un elemento);

combina compone le soluzioni dei sottoproblemi in una soluzione del problema originale.

2.4 Merge Sort

Merge Sort[1] è un esempio di algoritmo divide et impera. Andiamo ad analizzarlo.

[1] Si consiglia di dare uno sguardo all'algoritmo anche da altre fonti, poichè presentarlo graficamente in LaTeX, come è stato visto a lezione, non è facile.

Astrazione Consideriamo il seguente array A.

5	2	4	7	1	2	3	6

Lo divido a metà, ottenendo due parti separate.

5	2	4	7

1	2	3	6

Consideriamo il primo, ossia `A[1..4]` (A originale). Divido anche questo a metà.

5	2

4	7

Divido nuovamente a metà, ottenendo:

5

2

5 e 2 sono due blocchi già ordinati. Scelgo il minore tra i due e lo metto in prima posizione, mentre l'altro in seconda posizione, ottenendo un blocco composto da 2 e 5.

Riprendo con il blocco composto da 4 e 7. Lo divido in due blocchi da un elemento. Faccio lo stesso procedimento fatto per 2 e 5: metto in prima posizione 4 e in seconda posizione 7. La situazione è la seguente:

2	5

4	7

So che i blocchi ottenuti contengono elementi ordinati. Data questa assunzione, posso ragionare nel seguente modo: considero il primo elemento dei due blocchi (il 2 in questo caso) e lo metto in prima posizione. Ora considero il successivo elemento di quel blocco e lo stesso elemento del blocco che non è stato selezionato, e inserisco nell'array l'elemento minore. Continuo fino ad ottenere un blocco ordinato.

2	4	5	7

Faccio lo stesso ragionamento con la parte di array originale `A[5..8]`, ottenendo

2	4	5	7

1	2	3	6

A questo punto, i blocchi da 4 contengono elementi tra loro ordinati. Faccio lo stesso procedimento usato per comporli, per ottenere l'array originale ordinato. Considero:

- `L[1..4]` = `A[1..4]`: indice $i = 1$ per scorrerlo;
- `R[1..4]` = `A[5..8]`: indice $j = 1$ per scorrerlo;

Valuto `L[i]` e `R[j]`.

- Se `L[i]` $\leq$ `R[j]`, inserisco `L[i]` e incremento `i`.
- Altrimenti, inserisco `R[j]` e incremento `j`.
- Itero finchè entrambi gli indici non sono out of bounds.

Pseudocodice Segue lo pseudocodice del `Merge Sort`.

```
MERGE-SORT(A, p, r)
if p < r
      q = ⌊(p+r)/2⌋ // arrotondato per difetto
      MERGE-SORT(A, p, q) // ordina A[p..q]
      MERGE-SORT(A, q + 1, r) // ordina A[q+1..r]
      MERGE(A, p, q, r) // "Merge" dei due sotto-array
```

```
MERGE(A, p, q, r)
n1 = q − p + 1 // gli indici partono da 1
n2 = r − q
// L sotto-array sx, R sotto-array dx
for i = 1 to n1
      L[i] = A[p + i − 1]
      for j = 1 to n2
            R[j] = A[q + j]
      L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = ∞
      i = j = 1
      for k = p to r
            if L[i] ≤ R[j]
                  A[k] = L[i]
                  i = i + 1
            else // L[i] > R[j]
                  A[k] = R[j]
                  j = j + 1
```

2.4.1 Invarianti e correttezza

L e **R** contengono rispettivamente `A[p..q]` e `A[q+1..r]`. L'indice `k` scorre `A`. Il sotto-array `A[p..k-1]` è ordinato, e contiene `L[1..i-1]` e `R[1..j-1]`.

$$A[p\,..\,k-1] \leq L[i\,..\,n1], R[j\,..\,n2]$$
$$\Downarrow$$
$$A[p\,..\,k-1] = A[p\,..\,r+1-1] \implies A[p\,..\,r] \text{ ordinato}$$

Dimostrazione per induzione su r-p

⇒ Se $r - p == 0$ (oppure -1) abbiamo al più un elemento $\implies$ array già ordinato.

⇒ Se $r-p > 0$, vale #elem($A[p\,..\,q]$), #elem($A[q+1\,..\,r]$) $<$ #elem($A[p\,..\,r]$). Per ipotesi induttiva:

- `Merge-sort(A,p,q)` ordina `A[p..q]`;
- `Merge-sort(A,q+1,r)` ordina `A[q+1..r]`;

  Per correttezza di `Merge()`, dopo la sua chiamata ottengo `A[p..r]` ordinato.

3 Lezione del 07/03/2018

3.1 Approfondimento sull'induzione

3.1.1 Induzione ordinaria

Proprietà $P(n)$, e.g., = "Se n è pari, $n+1$ è dispari" oppure "tutti i grafi con n nodi . . . ".

Per dimostrare che $P(n)$ vale per ogni n

- $P(0)$: **caso base**;
- assumo vera $P(n) \to$ dimostro $P(n+1)$, allora $P(n)$ è vera per ogni n.

3.1.2 Induzione completa

- $\big[P(0)\big]$ (non necessaria, è un'istanza del passo successivo);
- dimostro $P(m)\ \forall m < n \to$ vale $P(n)\ \forall n$.

3.2 Complessità di Merge Sort

n = #elementi da ordinare[1]

Merge(A,p,q,r)

inizializzazione: $a'n + b'$;

ciclo: $a'n + b'$;

Sommandoli, ottengo una complessità all'incirca di:

$$T^{merge}(n) = an + b$$

[1] Il simbolo # verrà usato per indicare la cardinalità di un insieme.

Nel dettaglio:

$$T^{MS}(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T^{MS}(n_1) + T^{MS}(n_2) + T^{merge}(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$T^{MS}(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T^{MS}(n_1) + T^{MS}(n_2) + an + b & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con

$T^{MS}(n_1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$T^{MS}(n_2) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$$T^{MS}(n)$$
$$an + b$$

$$T^{MS}(n_1) \qquad\qquad T^{MS}(n_2)$$
$$an_1 + b \qquad\qquad an_2 + b$$

$$T^{MS}(n_{11}) \qquad T^{MS}(n_{12}) \qquad T^{MS}(n_{21}) \qquad T^{MS}(n_{22})$$
$$an_{11} + b \qquad an_{12} + b \qquad an_{21} + b \qquad an_{22} + b$$

$$\ldots$$

$$c_0 \qquad c_0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad c_0 \qquad c_0$$

Otteniamo c_0 ripetuto n volte all'ultimo livello dell'albero. Vediamo nel dettaglio la complessità nelle varie iterazioni.

$\boldsymbol{i = 0}$ $\quad an + b$

$\boldsymbol{i = 1}$ $\quad a(n_1 + n_2) + 2b \approx an + 2b$

$\boldsymbol{i = 2}$ $\quad a(n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22}) + 4b \approx an + 4b$

...

$\boldsymbol{i = h}$ $\quad c_0 n$

Poniamo $n = 2^h$. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
T^{MS}(n) &= \sum_{i=0}^{h-1}(an + 2^i b) + c_0 n \\
&= anh + b\sum_{i=0}^{h-1} 2^i && (h = \log_2 n) \\
&= an\log_2 n + b2^h - b + c_0 n && (2^h = n) \\
&= an\log_2 n + (b + c_0)n - b
\end{aligned}
$$

$$T^{MS}(n) = an\log_2 n + b''n + c'' \approx n\log_2 n$$

3.3 Confronto tra IS e MS

$$
\begin{gathered}
T^{IS}(n) = a'n^2 + b'n + c' \\
T^{MS}(n) = an\log_2 n + b''n + c''
\end{gathered}
$$

Posso calcolare il limite del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{T^{MS}(n)}{T^{IS}(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{an\log_2 n + b''n + c''}{a'n^2 + b'n + c'} = 0$$

Per definizione

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \frac{T^{MS}(n)}{T^{IS}(n)} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$T^{MS}(n) < \varepsilon T^{IS}(n) = \frac{T^{IS}}{m} \qquad \text{(Ponendo, ad esempio, } \varepsilon = \frac{1}{m}\text{)}$$

Detto a parole, c'è un certo n oltre il quale, ad esempio, `Merge Sort` su un *Commodore 64* esegue più velocemente di un `Insertion Sort` su una macchina moderna, come mostrato nella seguente tabella.

n	$T^{IS}(n) = n^2$	$T^{MS}(n) = n\log n$
10	$0.1ns$	$0.033ns$
1000	$1ms$	$10\mu s$
10^6	17 minuti	$20ms$
10^9	70 anni	$30s$

4 Lezione dell'08/03/2018

4.1 Notazione asintotica

Il **tempo di esecuzione** è difficile da calcolare, come visto nella sezione 2.2. Il modo in cui è stato calcolato è pieno di dettagli "inutili".

Rivediamo le complessità di Insertion Sort e Merge Sort:

$$T^{IS} = an^2 + bn + c$$
$$T^{MS} = an \log_2 n + bn + c$$

A noi interessa calcolare $T(n)$ per n "grande". Non consideriamo le costanti moltiplicative, che sono non fondamentali. Ecco una lista di possibili complessità ordinate in senso decrescente (le prime due categorie appartengono alla classe dei *problemi NP*, ossia non trattabili):

- 3^n
- 2^n

- n^k
- n^2
- $n \log n$
- n
- $\log n$
- 1

Prendiamo in esame due funzioni: $f(n)$, $g(n)$:

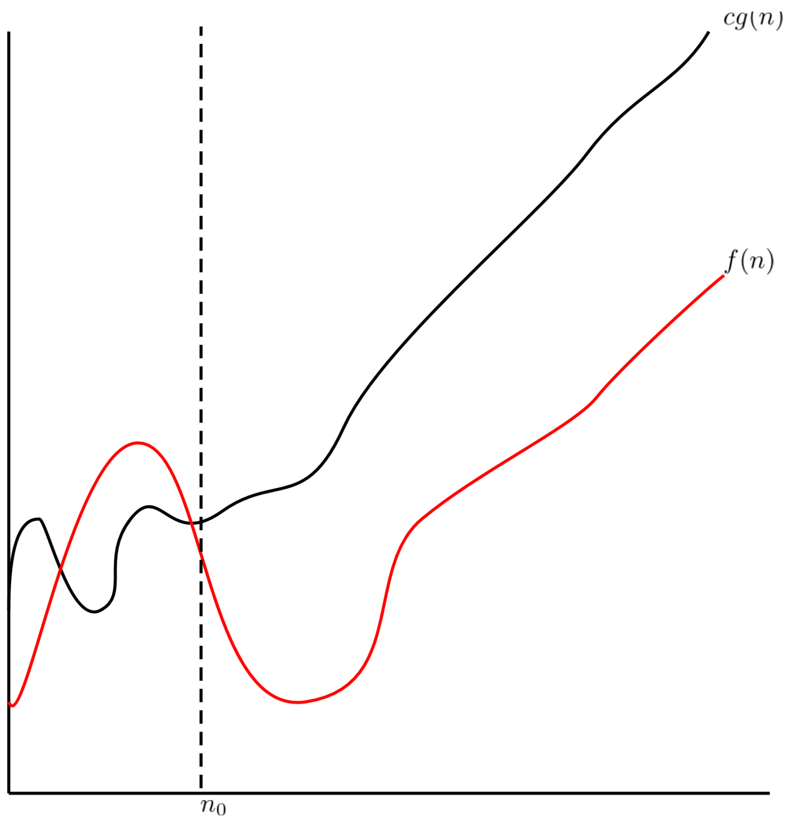
$$f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

- $f(n)$ è la funzione in esame della complessità del nostro problema P;
- $g(n)$ è la funzione che, moltiplicata per un'opportuna costante c_i, dopo un certo n, fa da limite superiore o inferiore per ogni punto di $f(n)$.

4.1.1 Limite asintotico superiore

Data $g(n)$, indichiamo con $O\big(g(n)\big)$ il *limite asintotico superiore*, definito come segue:

$$O\big(g(n)\big) = \{f(n) \mid \exists c > 0 \quad \exists n_0 (\in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_0 \Rightarrow (0 \leq) f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$



Esempi

- $f_1(n) = 2n^2 + 5n + 3 = O\big(g(n^2)\big)$? Sì.
  Deve valere $f_1(n) < cn^2 \qquad \exists c > 0,\ n \geq n_0$
  Ipotizziamo $c = 3$

$$2n^2 + 5n + 3 \leq 3n^2$$
$$n^2 - 5n - 3 \geq 0$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{2 \cdot 5 + 12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \cong 5.54$$ (Non considero la soluzione negativa, poiché siamo in $\mathbb{R}^+$)

Prendo $c = 3$ e $n_0 = 6$. Vale dunque:

$$f_1(n) \leq cn^2 \quad \forall n \geq n_0$$

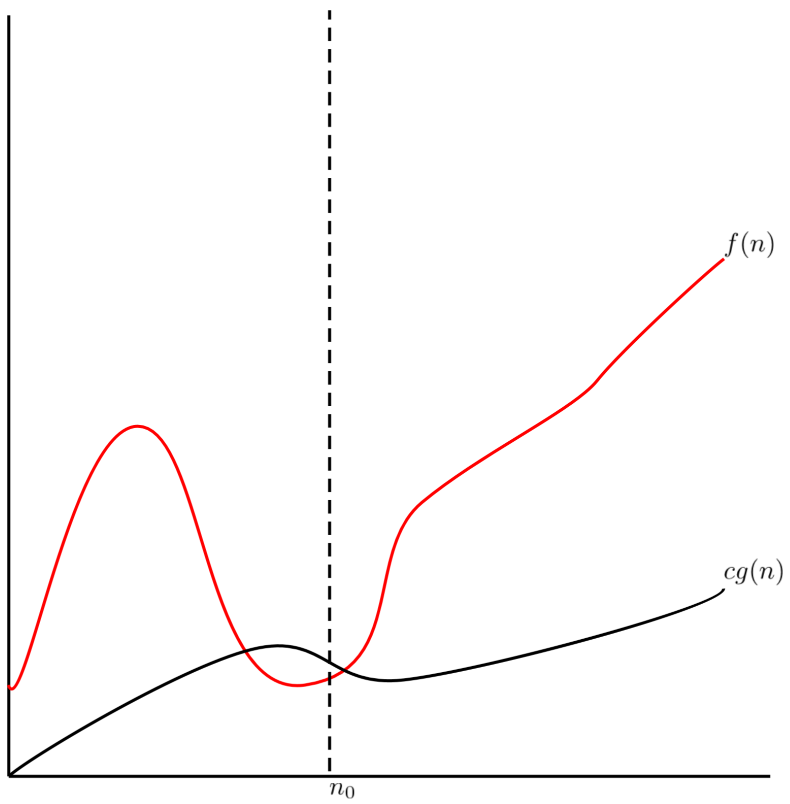
- $f_1(n) = O\big(g(n^3)\big)$? Sì.
  $c = 3$
  $n_0 = 6 \quad \forall n \geq n_0$
  $f_1(n) \leq cn^2 \leq cn^3$
- $f_2(n) = 2 + \sin(n) = O(1)$? Sì.
  $-1 \leq \sin(n) \leq 1$
  $1 \leq f_2(n) \leq 3$
  Vale la seguente

$$\exists c > 0 \quad \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow f_2(n) \leq c \cdot 1$$
$$\text{ok per } c = 3,\ n_0 = 0$$

4.1.2 Limite asintotico inferiore

Data $g(n)$, indichiamo con $\Omega\big(g(n)\big)$ il *limite asintotico inferiore*, definito come segue:

$$\Omega\big(g(n)\big) = \{f(n) \mid \exists c > 0 \quad \exists n_0(\in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_0 \Rightarrow c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$



Esempi

- $f_1(n) = 2n^2 + 5n + 3 = \Omega\big(g(n^2)\big)$? Sì.

  Deve valere:

  $$\exists c > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow cn^2 \leq 2n + 5n + 3$$

  Basta porre $c = 1$, $n_0 = 0$.

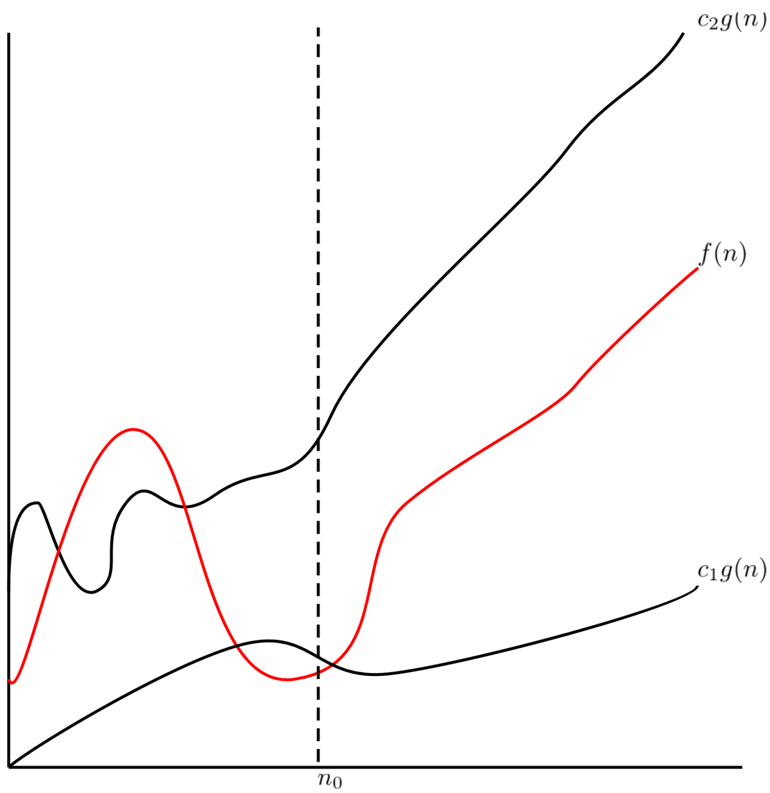
- $f_2(n) = 2 + \sin(n) = \Omega(1)$? Sì.

  $$1 \leq f_2(n) \leq 3 \quad c = 1,\ n_0 = 0$$

4.1.3 Limite asintotico stretto

Data $g(n)$, indichiamo con $\Theta\big(g(n)\big)$ il *limite asintotico stretto*, definito come segue:

$$\Theta\big(g(n)\big) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0 \quad \exists n_0 (\in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_0 \Rightarrow c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\}$$



Esempi

$$
\begin{aligned}
f_1(n) =& 2n^2 + 5n + 3 = \Theta(n^2) \\
& c_1 = 1 \quad c_2 = 3 \quad n_0 = 6 \\
f_2(n) =& 2 + \sin(n) = \Theta(1) \\
& c_1 = 1 \quad c_2 = 3 \quad n_0 = 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{gathered}
f_1(n) \neq \Theta(n^3) \\
f_1(n) = O(n^3) \\
f_1(n) \neq \Omega(n^3) \\
\Downarrow \\
\frac{f_1(n)}{n_3} \to 0
\end{gathered}
$$

4.2 Metodo del limite

$f(n), g(n) > 0 \quad \forall n$

Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ esiste, allora:

1. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k > 0$ allora $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$.

$$
\begin{aligned}
\text{Infatti } \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow & \left| \frac{f(n)}{g(n)} - k \right| \leq \varepsilon \\
\Rightarrow & -\varepsilon \leq \frac{f(n)}{g(n)} - k \leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
k - \varepsilon \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq k + \varepsilon \\
(k-\varepsilon)g(n) \leq f(n) \leq (k+\varepsilon)g(n) \qquad \text{per } 0 < \varepsilon < k
\end{gathered}
$$

2. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ allora $f(n) = O\big(g(n)\big)$ e $f(n) \neq \Omega\big(g(n)\big)$.

3. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ allora $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$ e $f(n) \neq O\big(g(n)\big)$.

4.3 Alcune proprietà generali

- $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 = \Theta(n^k)$
- $h \neq k \quad \Theta(n^h) \neq \Theta(n^k)$
- $a \neq b \quad \Theta(a^k) \neq \Theta(b^n)$
- $h \neq k \quad \Theta(a^{n+h}) = \Theta(a^{n+k})$

- $a \neq b \quad \Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$

In generale

$$O(1) \subseteq O(\log n) \subseteq O(n) \subseteq O(n \log n) \subseteq O(n^2) \subseteq \dots$$

Rivediamo `Insertion Sort` con le notazioni asintotiche:

$$T^{IS}(n) = O(n^2) \qquad T^{IS}_{max}(n) = \Theta(n^2)$$

Vale anche la proprietà seguente:

$$\begin{aligned} 2n^3 + \Theta(n^2) = O(n^3)&(\subseteq \Theta(n^3)) \\ &= \Theta(n^3) \end{aligned}$$

5 Lezione del 09/03/2018

5.1 Complessità di un problema

Dato un problema[1] P ci sono (possono esserci) algoritmi che risolvono P. La **complessità** di P è la complessità dell'algoritmo di complessità più bassa che lo risolve.

Limite superiore per complessità di P Se A è un algoritmo per P con complessità $f(n)$, allora P è $O\big(f(n)\big)$.

Vediamo un paio di esempi:

- `Insertion Sort` algoritmo di ordinamento $O(n^2)$;
- `Merge Sort` algoritmo di ordinamento $O(n \log n)$;

Limite inferiore per complessità di P Se <u>ogni</u> algoritmo che risolve P ha complessità $\Omega\big(f(n)\big)$ allora P è $\Omega\big(f(n)\big)$

$\Longrightarrow$ se P è $O\big(f(n)\big)$ e $\Omega\big(f(n)\big) \Rightarrow$ P è $\Theta\big(f(n)\big)$

[1] Relazione/funzione INPUT $\rightarrow$ OUTPUT

5.2 Esempio: limite inferiore per l'ordinamento basato su scambi

Def (inversione) Dato `A[1..n]`, una *inversione* è una coppia (i, j) con $i, j \in [1, n]$ con $i < j$ e `A[i]` $>$ `A[j]`.

Operazione disponibile: `A[k]` $\leftrightarrow$ `A[k+1]` (scambio tra gli elementi in posizione k e $k+1$).

$$\begin{aligned}\#inv(A) &= \text{numero di inversioni di } A \\ &= |\{(i,j) \mid 1 \le i \le j \le n \wedge A[i] > A[j]\}|\end{aligned}$$

1. A è ordinato sse $\#inv(A) = 0$;
2. A è ordinato in senso inverso sse

$$\sum_{j=2}^{n} j - 1 = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ossia, $\#inv(A)$ è massimizzato.

Vediamo cosa succede alle coppie (i, j) e a $\#inv(A)$ nel caso avvenga uno scambo `A[k]` $\leftrightarrow$ `A[k+1]`.

- $i, j \neq k$ e $i, j \neq k+1 \implies (i, j)$ è inversione prima sse è inversione dopo;
- $i = k,\ j = k+1$

$$\implies \begin{cases} A[k] < A[k+1] & +1 \text{ inversione} \\ A[k] = A[k+1] & \#inv(A) \text{ non cambia} \\ A[k] > A[k+1] & -1 \text{ inversione} \end{cases}$$

- $i = k$ oppure $i = k+1$, $j > k+1 \implies (k, j)$ è inversione prima sse $(k+1, j)$ è inversione dopo;
- $j = k$ oppure $j = k+1$, $i < k$, analogo al caso precedente.

Per concludere, possiamo dire che l'operazione `A[k]` $\leftrightarrow$ `A[k+1]` riduce $\#inv(A)$ al massimo di 1.

$$\implies \text{qualunque algoritmo di ordinamento è } \Omega\Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big) = \Omega(n^2)$$

`Insertion Sort` è "quasi" basato su scambi $\Rightarrow$ è $O(n^2) \Rightarrow$ è $\Theta(n^2)$

5.3 Soluzione di ricorrenze

Abbiamo visto per `Merge Sort` la complessità nel modo seguente:

```
MERGE-SORT(A, p, r)
if p < r
    q = ⌊(p+r)/2⌋
    MERGE-SORT(A, p, q)
    MERGE-SORT(A, q + 1, r)
    MERGE(A, p, q, r) // complessità an + b
```

$$T^{MS}(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T^{MS}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T^{MS}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + an + b & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

È stato tuttavia un approccio non molto preciso. Ci sono due metodi per risolvere precisamente i problemi di ricorrenza:

- *Metodo di sostituzione* (5.3.1);
- *Master Theorem*.

5.3.1 Metodo di sostituzione

Dato una ricorrenza, si può provare a "indovinare" la soluzione, oppure si può sviluppare l'*albero delle ricorrenze*:

- *radice*: chiamata di cui vogliamo la complessità;
- per ogni nodo:
  - → costo della parte non ricorsiva;
  - → un figlio per ogni chiamata.

Esempio

$$T(n) = \begin{cases} 4 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + 6n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Proviamo ad "indovinare" la soluzione[1]. Assomiglia a `Merge Sort`, quindi ipotizziamo abbia una complessità con un andamento simile a

$$T(n) = an \log n + bn + c$$

[1] In classe, è stato visto anche un esempio con un albero. Ho scelto di ometterlo per la poca praticità nel rappresentarlo in LaTeX.

Facciamo la prova induttiva.

$$
\begin{aligned}
(n = 1) \quad T(1) &= 4 \\
&= a \cdot 1 \cdot \log 1 + b \cdot +c \\
&= b + c \qquad\qquad \text{ok se } b + c = 4 \\
(n > 1) \quad T(n) &= 2T\Big(\frac{n}{2}\Big) + 6n
\end{aligned}
$$

Per ipotesi induttiva

$$T\Big(\frac{n}{2}\Big) = a\frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2} + b\frac{n}{2} + c$$

Calcolo ora $T(n)$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= an \log_2 \frac{n}{2} + bn + 2c + 6n = \\
&= an \log_2 n - an \log_2 2 + bn + 6n + 2c = \\
&= an \log_2 n + n(b + 6 - a) + 2c \\
&= an \log_2 n + bn + c \\
&\Downarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b + 6 - a = b &\Rightarrow a = 6 \\
2c = c &\Rightarrow c = 0 \\
b + c = 4 &\Rightarrow b = 4 \\
T(n) &= an \log n + bn + c \\
&= 6n \log n + 4n
\end{aligned}
$$