# Automi e Linguaggi Formali

a.a. 2017/2018

LT in Informatica
15 Marzo 2018

Università degli Studi di Padova

# Esercizio

- Questo linguaggio è regolare?

$$L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$$

**Go to:**

**http://lfb.io/phlof**

*or*

**Scan this QR code:**

Click to enlarge

**Login code: phlof**

# Dimostriamo che $L_{01}$ non è regolare



- Supponiamo che $L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ sia regolare
- Allora deve essere accettato da un DFA $A$ con un certo numero $k$ di stati
- Cosa succede quando $A$ legge $0^k$?
- Seguirà una qualche sequenza di transizioni:

$$\text{start} \longrightarrow \underbrace{p_0 \xrightarrow{0} p_1 \xrightarrow{0} p_2 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} p_k}_{k+1 \text{ stati}}$$

- Siccome ci sono $k+1$ stati nella sequenza, esiste uno stato che si ripete: esistono $i < j$ tali che $p_i = p_j$
- Chiamiamo $q$ questo stato

# Dimostriamo che $L_{01}$ non è regolare



- Cosa succede quando l'automa $A$ legge $1^i$ partendo da $q$?
- Se l'automa finisce la lettura in uno stato finale:
  - allora accetta, sbagliando, la parola $0^j1^i$
- Se l'automa finisce la lettura in uno stato non finale:
  - allora rifiuta, sbagliando, la parola $0^i1^i$
- In entrambi i casi abbiamo ingannato l'automa, quindi $L_{01}$ non può essere regolare

**Theorem (Pumping Lemma per Linguaggi Regolari)**

*Sia $L$ un linguaggio regolare. Allora*

- *esiste una lunghezza $h \geq 0$ tale che*
- *ogni parola $w \in L$ di lunghezza $|w| \geq h$*
- *può essere spezzata in $w = xyz$ tale che:*
  1. $y \neq \varepsilon$ *(il secondo pezzo è non vuoto)*
  2. $|xy| \leq h$ *(i primi due pezzi sono lunghi al max $h$)*
  3. $\forall k \geq 0,\ xy^k z \in L$ *(possiamo "pompare" $y$ rimanendo in $L$)*

**Dimostrazione:**

- Supponiamo che $L$ sia un linguaggio regolare
- Allora è riconosciuto da un DFA con, supponiamo, $h$ stati
- Consideriamo una parola $w = a_1 a_2 \dots a_m \in L$ di lunghezza $m \geq h$
- Consideriamo gli stati percorsi da $A$ mentre legge $w$:

$$p_i = \hat{\delta}(p_0, a_1 a_2 \dots a_i)$$

- Siccome in $p_0, p_1, \dots, p_h$ ci sono $h + 1$ stati, ne esiste uno che si ripete:

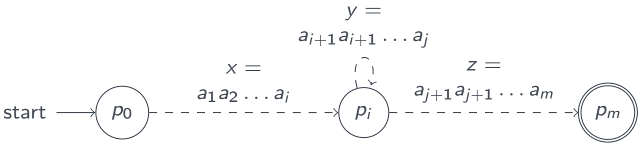
$$\text{esistono } i < j \text{ tali che } p_i = p_j \text{ e } j \leq h$$

- Possiamo spezzare $w$ in tre parti $w = xyz$:
  1. $x = a_1 a_2 \dots a_i$
  2. $y = a_{i+1} a_{i+1} \dots a_j$
  3. $z = a_{j+1} a_{j+1} \dots a_m$
- che rispettano le condizioni del Lemma:
  - $y \neq \varepsilon$ perché $i < j$
  - $|xy| \leq h$ perché $j \leq h$

# Pumping Lemma: dimostrazione

Università degli Studi di Padova

- Quindi, nel grafo delle transizioni di $A$:




- E di conseguenza anche $xy^k z$ viene riconosciuta dall'automa per ogni $k \geq 0$ $\square$

# Uso del Pumping Lemma



- Ogni linguaggio regolare soddisfa il Pumping Lemma.

- Un linguaggio che falsifica il Pumping Lemma non può essere regolare:
  - per ogni lunghezza $h \geq 0$
  - esiste una parola $w \in L$ di lunghezza $|w| \geq h$ tale che
  - per ogni suddivisione $w = xyz$ tale che:
    1. $y \neq \varepsilon$ (il secondo pezzo è non vuoto)
    2. $|xy| \leq h$ (i primi due pezzi sono lunghi al max $h$)
  - esiste un $k \geq 0$ tale che $xy^kz \in L$ (possiamo "pompare" $y$ ed uscire da $L$)

- Attenzione: esistono linguaggi non regolari che rispettano il Pumping Lemma!

Università degli Studi di Padova


- L'avversario sceglie la lunghezza $h$
- Noi scegliamo una parola $w$
- L'avversario spezza $w$ in $xyz$
- Noi scegliamo $k$ tale che $xy^kz \notin L$
- allora abbiamo vinto

1. Sia $L_{ab}$ il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ con un numero di $b$ maggiore del numero di $a$. $L_{ab}$ è regolare?

**No, $L_{ab}$ non è regolare:**

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia $n$ la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo la parola $w = a^n b^{n+1}$
- prendiamo un qualsiasi split $w = xyz$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq n$:

$$w = \underbrace{aaa\ldots}_{x}\underbrace{\ldots a}_{y}\underbrace{abbb\ldots bb}_{z}$$

- per il Pumping lemma, anche $xy^2z \in L_{ab}$, ma contiene più $a$ che $b$ $\Rightarrow$ assurdo

# Pumping Lemma: esercizi

2. Il linguaggio $L_{rev} = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$ è regolare?

**No, $L_{rev}$ non è regolare:**

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia $n$ la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo la parola $w = a^n bba^n$
- prendiamo un qualsiasi split $w = xyz$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq n$:

$$w = \underbrace{aaa\ldots}_{x}\underbrace{\ldots a}_{y}\underbrace{abbaaa\ldots aaa}_{z}$$

- per il Pumping lemma, anche $xy^0z = xz \in L_{rev}$, ma non la posso spezzare in $ww^R$ $\Rightarrow$ assurdo

3. Il linguaggio $L_{nk} = \{a^n b^k : n \text{ è dispari oppure } k \text{ è pari}\}$ è regolare?

**Si, $L_{nk}$ è regolare:**

- è rappresentato dall'espressione regolare $\mathbf{a(aa)^*b^* + a^*(bb)^*}$
- e riconosciuto dall'automa