Automi e Linguaggi Formali

a.a. 2017/2018

LT in Informatica
27 Febbraio – 1 Marzo 2018

Università degli Studi di Padova

Nella lezione di ieri abbiamo visto:

- Che cos'è un alfabeto (di simboli/messaggi/azioni)
- Che cos'è un linguaggio formale
- Che cos'è un Automa a stati finiti deterministico
- Cosa vuol dire che un automa accetta un linguaggio

Automi a Stati Finiti Deterministici

Università degli Studi di Padova

Un Automa a Stati Finiti Deterministico (DFA) è una quintupla

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Q è un insieme finito di stati
- Σ è un alfabeto finito (= simboli in input)
- δ è una funzione di transizione $(q, a) \mapsto q'$
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ è un insieme di stati finali

Possiamo rappresentare gli automi sia come diagramma di transizione che come tabella di transizione.

Linguaggio accettato da un DFA

- La funzione di transizione δ può essere estesa a $\hat{\delta}$ che opera su stati e parole (invece che su stati e simboli):

  Base: $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$

  Induzione: $\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$
  con $w = xa$ (parola x seguita dal simbolo a)

- Formalmente, il linguaggio accettato da A è

$$L(A) = \{w : \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

- I linguaggi accettati da automi a stati finiti sono detti linguaggi regolari

Esercizi

DFA per i seguenti linguaggi sull'alfabeto $\{0, 1\}$:

- Insieme delle stringhe con 01 come sottostringa (fatto)
- Insieme di tutte e sole le stringhe con un numero pari di zeri e un numero pari di uni (fatto)
- Insieme di tutte le stringhe che contengono tre zeri (anche non consecutivi)
- Insieme delle stringhe che cominciano o finiscono (o entrambe le cose) con 01
- Insieme di tutte le stringhe che finiscono con 01

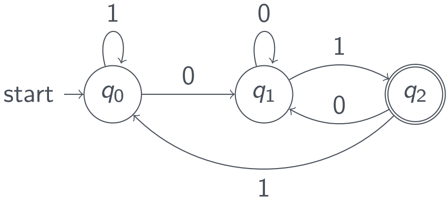
Modello del distributore automatico di bibite.

Esempio

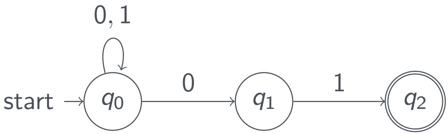
- DFA che riconosce tutte le parole che terminano con 01

Esempio

- DFA che riconosce tutte le parole che terminano con 01

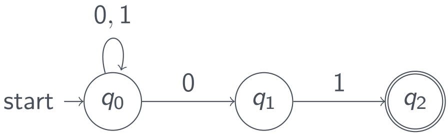


- Cosa fa questo automa?



Automi a stati finiti non deterministici (NFA)

- Cosa fa questo automa?



  Riconosce le parole che terminano con 01 "scommettendo" se sta leggendo gli ultimi due simboli oppure no

- È un esempio di automa a stati finiti non deterministico:
  - può trovarsi contemporaneamente in più stati diversi
  - le transizioni non sono necessariamente complete:
    - da q_1 si esce solo leggendo 1
    - q_2 non ha transizioni uscenti

    in questi casi il percorso si blocca, ma può proseguire lungo gli altri percorsi

Definizione formale di NFA

Un Automa a Stati Finiti Non Deterministico (NFA) è una quintupla

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Q è un insieme finito di stati
- Σ è un alfabeto finito (= simboli in input)
- δ è una funzione di transizione che prende in input (q, a) e restituisce un sottoinsieme di Q
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ è un insieme di stati finali

Tabella delle transizioni per l'esempio

L'NFA che riconosce le parole che terminano con 01 è

$$A = (Q, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

dove δ è la funzione di transizione

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Linguaggio riconosciuto da un NFA

- La funzione di transizione estesa $\hat{\delta}$ per gli NFA:

  Base:
  $$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$$

  Induzione:
  $$\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, x)} \delta(p, a)$$

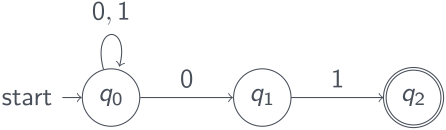
  con $w = xa$ (parola x seguita dal simbolo a)

- **Esempio:** calcoliamo $\hat{\delta}(q_0, 00101)$ alla lavagna
- Formalmente, il linguaggio accettato da A è

$$L(A) = \{w : \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Dimostriamo che l'esempio è corretto

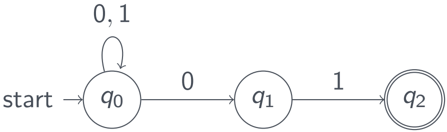
- Dimostriamo che l'automa d'esempio



accetta il linguaggio $L = \{x01 : x \in \Sigma^*\}$.

Dimostriamo che l'esempio è corretto

- Dimostriamo che l'automa d'esempio

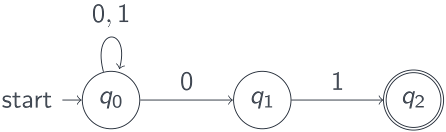


accetta il linguaggio $L = \{x01 : x \in \Sigma^*\}$.

- Lo faremo dimostrando che valgono tre enunciati che danno le proprietà degli stati:
  1. per ogni $w \in \Sigma^*$, $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$
  2. $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ se e solo se $w = x0$
  3. $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ se e solo se $w = x01$

Dimostriamo che l'esempio è corretto

- Dimostriamo che l'automa d'esempio



  accetta il linguaggio $L = \{x01 : x \in \Sigma^*\}$.

- Lo faremo dimostrando che valgono tre enunciati che danno le proprietà degli stati:
  1. per ogni $w \in \Sigma^*$, $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$
  2. $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ se e solo se $w = x0$
  3. $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ se e solo se $w = x01$
- La dimostrazione è per induzione sulla lunghezza $|w|$ della parola in ingresso

Esercizi

Definire degli automi a stati finiti non deterministici che accettino i seguenti linguaggi:

- L'insieme delle parole sull'alfabeto $\{0, 1, \ldots, 9\}$ tali che la cifra finale sia comparsa in precedenza
- L'insieme delle parole sull'alfabeto $\{0, 1, \ldots, 9\}$ tali che la cifra finale *non* sia comparsa in precedenza
- L'insieme delle parole di 0 e 1 tali che esistono due 0 separati da un numero di posizioni multiplo di 4 (0 è un multiplo di 4)

Esercizio

Consideriamo l'alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ e costruiamo un automa non deterministico che riconosce il linguaggio di tutte le parole tali che uno dei simboli dell'alfabeto non compare mai:

- tutte le parole che non contengono a
- $+$ tutte le parole che non contengono b
- $+$ tutte le parole che non contengono c
- $+$ tutte le parole che non contengono d

Let's Feedback!

Possiamo costruire un DFA che riconosce lo stesso linguaggio?

Go to:

http://lfb.io/phlof

or

Scan this QR code:

Click to enlarge

Login code: phlof

Equivalenza di DFA e NFA

- Sorprendentemente, NFA e DFA sono in grado di riconoscere gli stessi linugaggi
- Per ogni NFA N c'è un DFA D tale che $L(D) = L(N)$, e viceversa
- L'equivalenza di dimostra mediante una costruzione a sottoinsiemi:

Equivalenza di DFA e NFA

- Sorprendentemente, NFA e DFA sono in grado di riconoscere gli stessi linugaggi
- Per ogni NFA N c'è un DFA D tale che $L(D) = L(N)$, e viceversa
- L'equivalenza di dimostra mediante una costruzione a sottoinsiemi:
  Dato un NFA
  $$N = (Q_N, \Sigma, q_0, \delta_N, F_N)$$
  costruiremo un DFA
  $$D = (Q_D, \Sigma, \{q_0\}, \delta_D, F_D)$$
  tale che
  $$L(D) = L(N)$$

- $Q_D = \{S : S \subseteq Q_N\}$
  Ogni stato del DFA corrisponde ad un insieme di stati dell'NFA
- $F_D = \{S \subseteq Q_N : S \cap F_N \neq \emptyset\}$
  Uno stato del DFA è finale se c'è almeno uno stato finale corrispondente nell'NFA
- Per ogni $S \subseteq Q_N$ e per ogni $a \in \Sigma$

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$

La funzione di transizione "percorre tutte le possibili strade"

La costruzione a sottoinsiemi

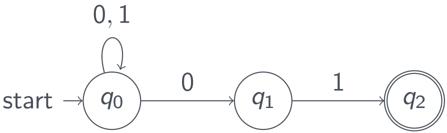
- $Q_D = \{S : S \subseteq Q_N\}$
  Ogni stato del DFA corrisponde ad un insieme di stati dell'NFA
- $F_D = \{S \subseteq Q_N : S \cap F_N \neq \emptyset\}$
  Uno stato del DFA è finale se c'è almeno uno stato finale corrispondente nell'NFA
- Per ogni $S \subseteq Q_N$ e per ogni $a \in \Sigma$

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$

  La funzione di transizione "percorre tutte le possibili strade"

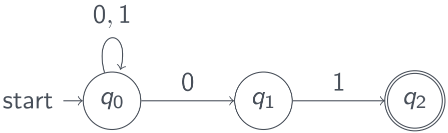
Nota: $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$, anche se spesso la maggior parte degli stati in Q_D sono "inutili", cioè non raggiungibili dallo stato iniziale.

Esempio di costruzione a sottoinsiemi



Costruiamo δ_D per l'NFA qui sopra:

Esempio di costruzione a sottoinsiemi

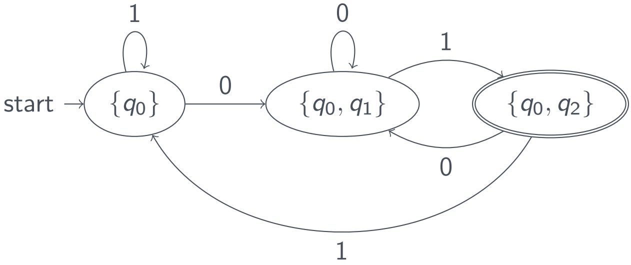


Costruiamo δ_D per l'NFA qui sopra:

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Diagramma degli stati

La tabella di transizione per D ci permette di ottenere il diagramma di transizione



Per semplificare il disegno, ho omesso gli stati non raggiungibili

Correttezza della costruzione a sottoinsiemi

Theorem

Sia D il DFA ottenuto da un NFA N con la costruzione a sottoinsiemi. Allora $L(D) = L(N)$.

Dimostrazione:

Correttezza della costruzione a sottoinsiemi

Theorem

Sia D il DFA ottenuto da un NFA N con la costruzione a sottoinsiemi. Allora $L(D) = L(N)$.

Dimostrazione: Prima mostriamo per induzione su $|w|$ che

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$$

Correttezza della costruzione a sottoinsiemi

Theorem

Sia D il DFA ottenuto da un NFA N con la costruzione a sottoinsiemi. Allora $L(D) = L(N)$.

Dimostrazione: Prima mostriamo per induzione su $|w|$ che

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$$

Base: $w = \varepsilon$. L'enunciato segue dalla definizione.

Induzione:

- Sia $|w| = n+1$ e supponiamo vero l'enunciato per la lunghezza n. Scomponiamo w in $w = xa$ (con $|x| = n$ e a simbolo finale)
- Per ipotesi induttiva $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \hat{\delta}_N(q_0, x) = \{p_1, \dots, p_k\}$
- Per la definizione di $\hat{\delta}$ per gli NFA

$$\hat{\delta}_N(q_0, xa) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$$

- Per la costruzione a sottoinsiemi

$$\delta_D(\{p_1, \dots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$$

Induzione (continua):

- Per la definizione di $\hat{\delta}$ per i DFA

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, xa) = \delta_D(\{p_1, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$$

- Quindi abbiamo mostrato che $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$

Poiché sia D che N accettano se solo se $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w)$ e $\hat{\delta}_N(q_0, w)$ contengono almeno un stato in F_N, allora abbiamo dimostrato che $L(D) = L(N)$

Teorema di equivalenza tra DFA e NFA

Theorem

Un linguaggio L è accettato da un DFA se e solo se è accettato da un NFA.

Dimostrazione:

- La parte "se" è il teorema precedente
- La parte "solo se" si dimostra osservando che ogni DFA può essere trasformato in un NFA modificando δ_D in δ_N con la seguente regola:

  Se $\delta_D(q, a) = p$ allora $\delta_N(q, a) = \{p\}$

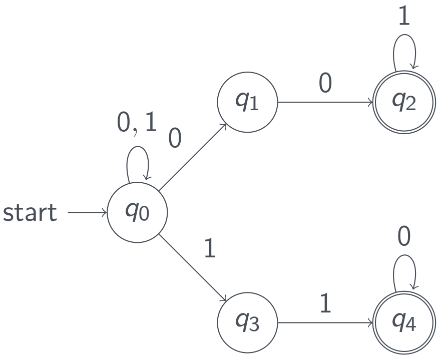
Università degli Studi di Padova

1. Determinare il DFA equivalente all'NFA con la seguente tabella di transizione:

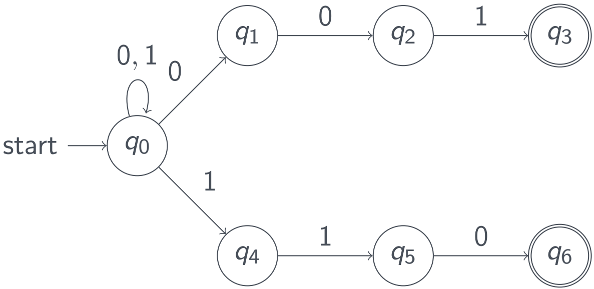
	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*q_2$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

2. Qual è il linguaggio accettato dall'automa?

Trasformare il seguente NFA in DFA



Dato il seguente NFA



1. determinare il linguaggio riconosciuto dall'automa
2. costruire un DFA equivalente