Automi e Linguaggi Formali

a.a. 2017/2018

LT in Informatica
19 Marzo 2018

Università degli Studi di Padova

Theorem (Pumping Lemma per Linguaggi Regolari)

Sia L un linguaggio regolare. Allora

- *esiste una lunghezza $h > 0$ tale che*
- *ogni parola $w \in L$ di lunghezza $|w| \geq h$*
- *può essere spezzata in $w = xyz$ tale che:*
  1. $y \neq \varepsilon$ *(il secondo pezzo è non vuoto)*
  2. $|xy| \leq h$ *(i primi due pezzi sono lunghi al max h)*
  3. $\forall k \geq 0$, $xy^kz \in L$ *(possiamo "pompare" y rimanendo in L)*

Il Pumping Lemma come Gioco

- L'avversario sceglie la lunghezza h
- Noi scegliamo una parola w
- L'avversario spezza w in xyz
- Noi scegliamo i tale che $xy^kz \notin L$
- allora abbiamo vinto

1. Sia L_{ab} il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ dove il numero di a è uguale al numero di b. L_{ab} è regolare?

1. Sia L_{ab} il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ dove il numero di a è uguale al numero di b. L_{ab} è regolare?

No, L_{ab} non è regolare:

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo la parola $w = a^h b^h$
- prendiamo uno split $w = xyz$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$:
  $$w = \underbrace{aaa \dots a}_{x}\underbrace{a \dots a}_{y}\underbrace{a \dots ab \dots bb}_{z}$$
- poiché $|xy| \leq h$, le stringhe x e y sono fatte solo di a
- per il Pumping lemma, anche $xy^2z \in L_{ab}$, ma contiene più a che b $\Rightarrow$ assurdo

2. Il linguaggio $L_{rev} = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$ è regolare?

2 Il linguaggio $L_{rev} = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$ è regolare?

No, L_{rev} non è regolare:

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo la parola $w = a^h bba^h$
- prendiamo uno split $w = xyz$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$:
  $$w = \underbrace{aaa\ldots}_{x}\underbrace{\ldots a}_{y}\underbrace{abbaaa\ldots aaa}_{z}$$
- poiché $|xy| \leq h$, le stringhe x e y sono fatte solo di a
- per il Pumping lemma, anche $xy^0z = xz \in L_{rev}$, ma non la posso spezzare in $ww^R \Rightarrow$ assurdo

Università degli Studi di Padova

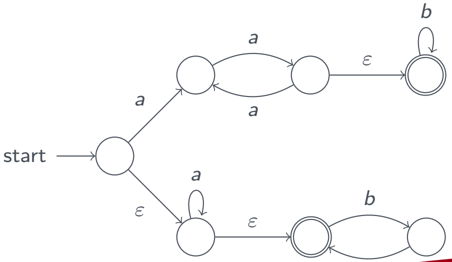
3. Il linguaggio $L_{nk} = \{a^n b^k : n \text{ è dispari oppure } k \text{ è pari}\}$ è regolare?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

3 Il linguaggio $L_{nk} = \{a^n b^k : n \text{ è dispari oppure } k \text{ è pari}\}$ è regolare?

Si, L_{nk} è regolare:

- è rappresentato dall'espressione regolare $\mathbf{a(aa)^*b^* + a^*(bb)^*}$
- e riconosciuto dall'automa



4. Il linguaggio $L_p = \{1^p : p \text{ è primo}\}$ è regolare?

4 Il linguaggio $L_p = \{1^p : p \text{ è primo}\}$ è regolare?

No, L_p non è regolare:

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo una parola $w = 1^p$ con p primo e $p > h + 2$
- prendiamo un qualsiasi split $w = xyz$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$:

$$w = \underbrace{11\ldots11}_{x}\underbrace{11\ldots1}_{y}\underbrace{111\ldots11}_{z}$$

- ...

- ...
- sia $|y| = m$: allora $|xz| = p - m$
- per il Pumping lemma, anche $v = xy^{p-m}z \in L_p$
- allora $|v| = m(p - m) + p - m = (p - m)(m + 1)$ si può scomporre in due fattori
- poiché $y \neq \varepsilon$, allora $|y| = m > 0$ e $m + 1 > 1$
- anche $p - m > 1$ perché abbiamo scelto $p > h + 2$ e $m \leq h$ perché $|xy| \leq h$
- i due fattori sono entrambi maggiori di 1 e quindi $|v|$ non è un numero primo
- $v \notin L_{rev}$, assurdo

5. Il linguaggio $L_{3n} = \{1^{3n+2} : n \geq 0\}$ è regolare?
6. Il linguaggio $L_{mn} = \{0^n 1^m 0^n : m + n > 0\}$ è regolare?
7. Il linguaggio

   $$L_{2a} = \left\{w \in \{a, b\}^* : \text{ numero di } a \text{ è due volte il numero di } b\right\}$$

   è regolare?