

# Прогнозирование временного ряда



*Расскажите нам, что ждет нас в будущем,  
чтобы мы могли знать, что вы – боги.*

*Исайя 41:23*

# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Построение прогноза
- Анализ остатков

# Постановка задачи

- Дан временной ряд  $y_1, \dots, y_T, \dots, y_t \in \mathbb{R}$  (измерения выполнены через равные промежутки)
- Найти функцию прогнозирования  $f_T: y_{T+h} \approx f(y_T, \dots, y_1, h) \equiv \hat{y}_{T+h|T}$   
отсрочка прогноза  $h \in \{1, \dots, H\}$ ,  $H$  – горизонт прогнозирования



# Прогноз vs. другие задачи машинного обучения

Данные	Задачи	
	Поиск шаблонов, классификация, кластеризация, поиск аномалий	Прогноз временных рядов
Прецеденты обучающей выборки	значения независимы	будущие значения зависят от прошлых

# Предсказательный интервал (Prediction interval)

- Оценка интервала, в который будущее значение попадет с вероятностью не меньше заданной
- Наводнение в Гранд-Форкс, Сев. Дакота, США, апрель 1997 г.: 50000 жителей эвакуировано, 75% зданий повреждено
  - Прогноз высоты паводка: 49 футов (15 м)
  - Построенная защитная дамба: 51 фут (15.5 м)
  - Истинная высота паводка: 54 фута (16.5 м)
  - Точность прогнозов NWS (Нац. метеослужба) на исторических данных:  $\pm 9$  футов (2.7 м)
  - Дамба выше на 7 футов (2 м) помогла бы избежать наводнения



# Содержание

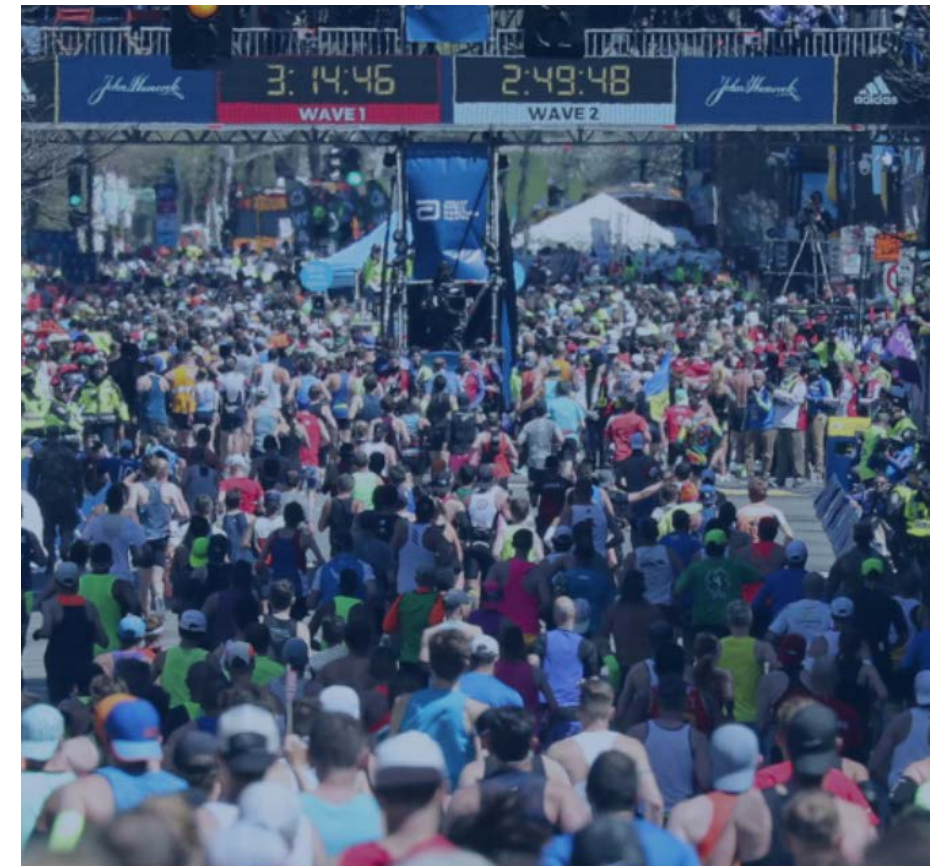
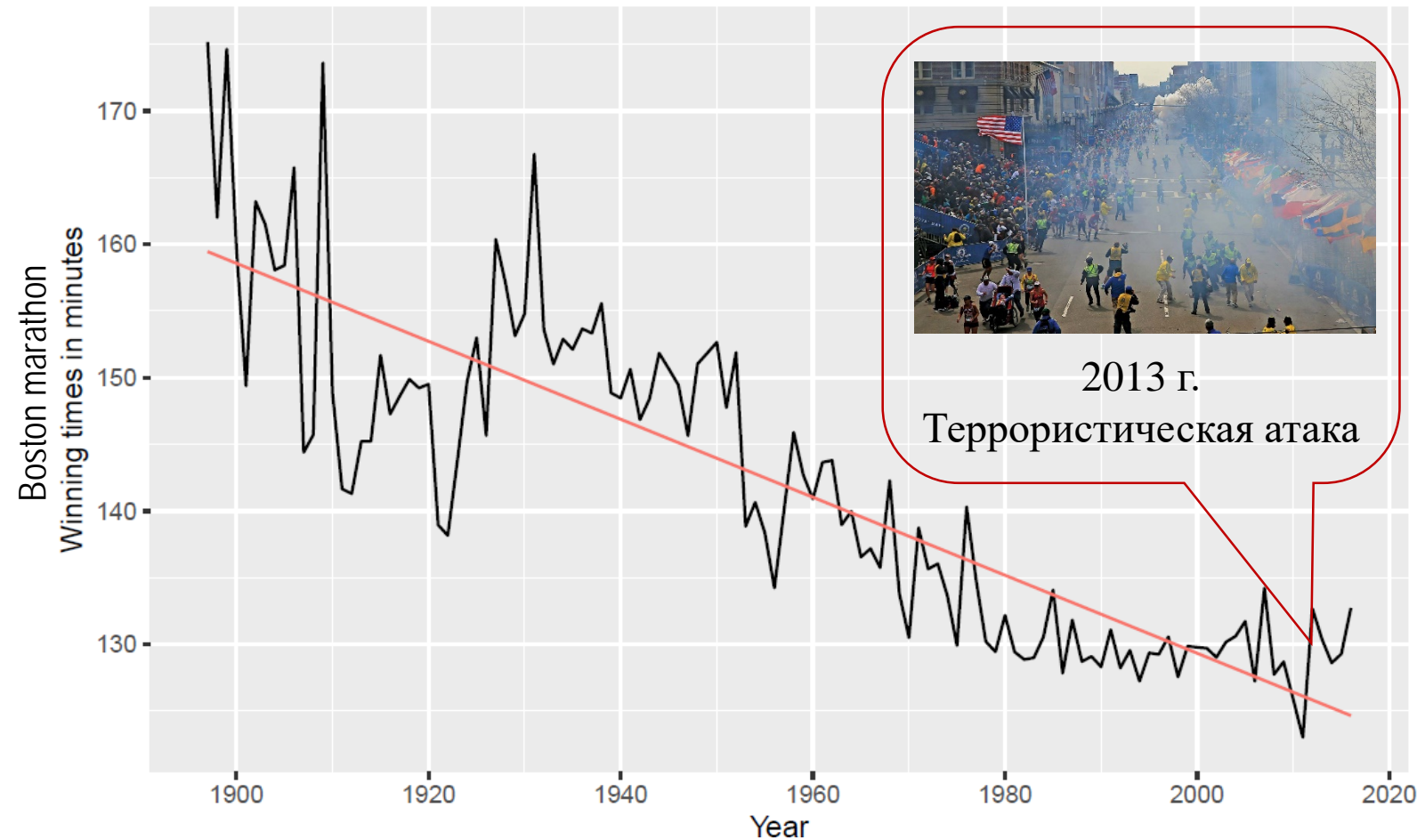
- Постановка задачи прогнозирования
- **Компоненты временного ряда**
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Построение прогноза
- Анализ остатков

# Компоненты временного ряда

Компонент	Определение	Пример ряда
Тренд	плавное долгосрочное изменение уровня ряда	цена на недвижимость в регионе (повышение)
Сезонность	циклические изменения уровня ряда с постоянным периодом	средняя месячная зарплата на предприятии (годовая сезонность)
Цикл	изменения уровня ряда с переменным периодом	количество солнечных пятен (период солнечной активности – от 5 до 7 лет)
Ошибка	непрогнозируемая случайная компонента ряда	выбросы, аномалии



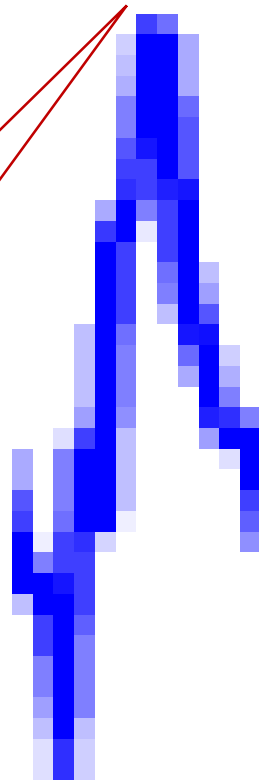
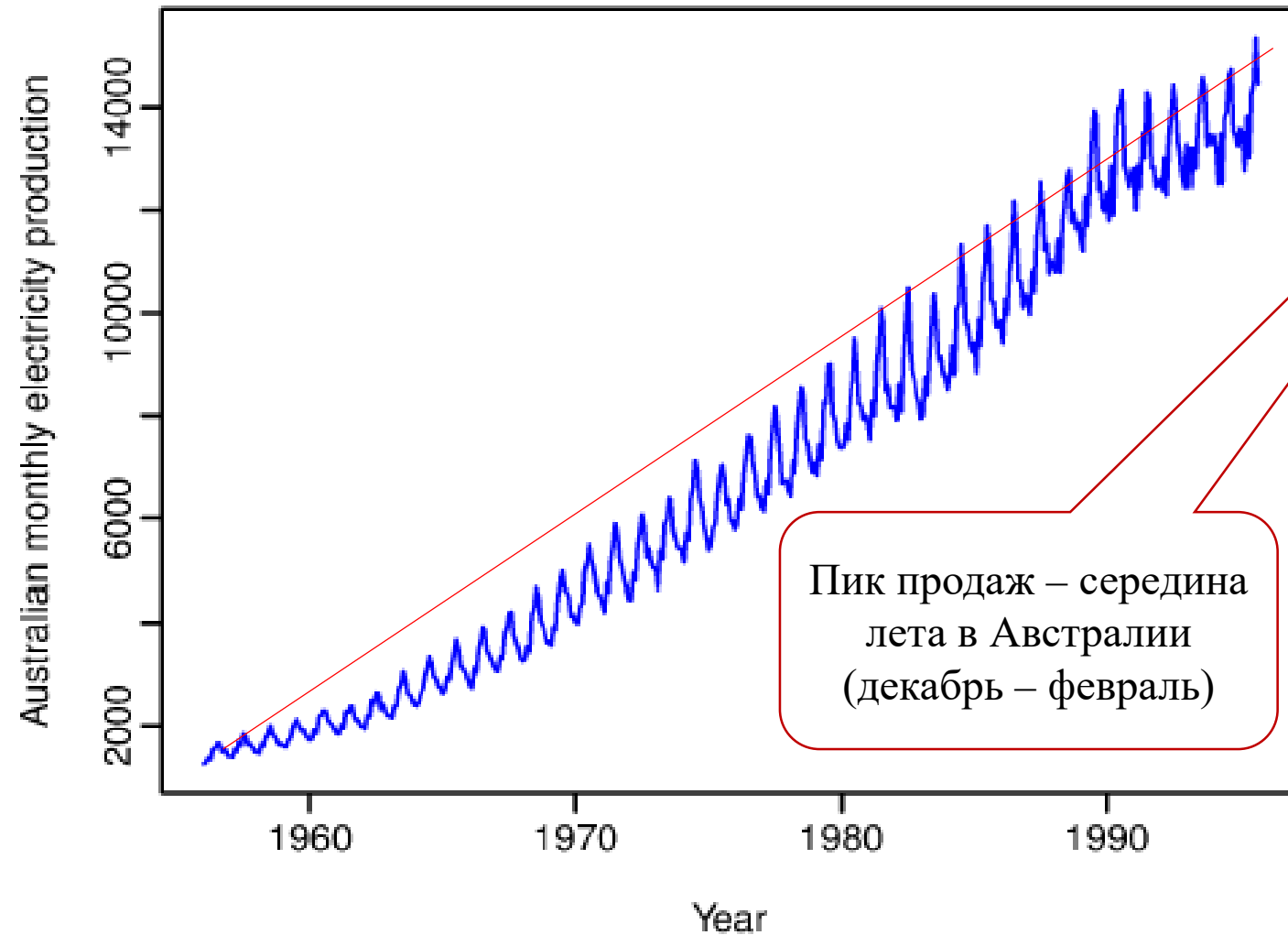
# Пример: тренд без сезонности и цикла



\* The Boston Marathon Results. URL: <https://www.baa.org/sites/default/files/2019-07/BostonMarathonHistoricalResults.pdf>

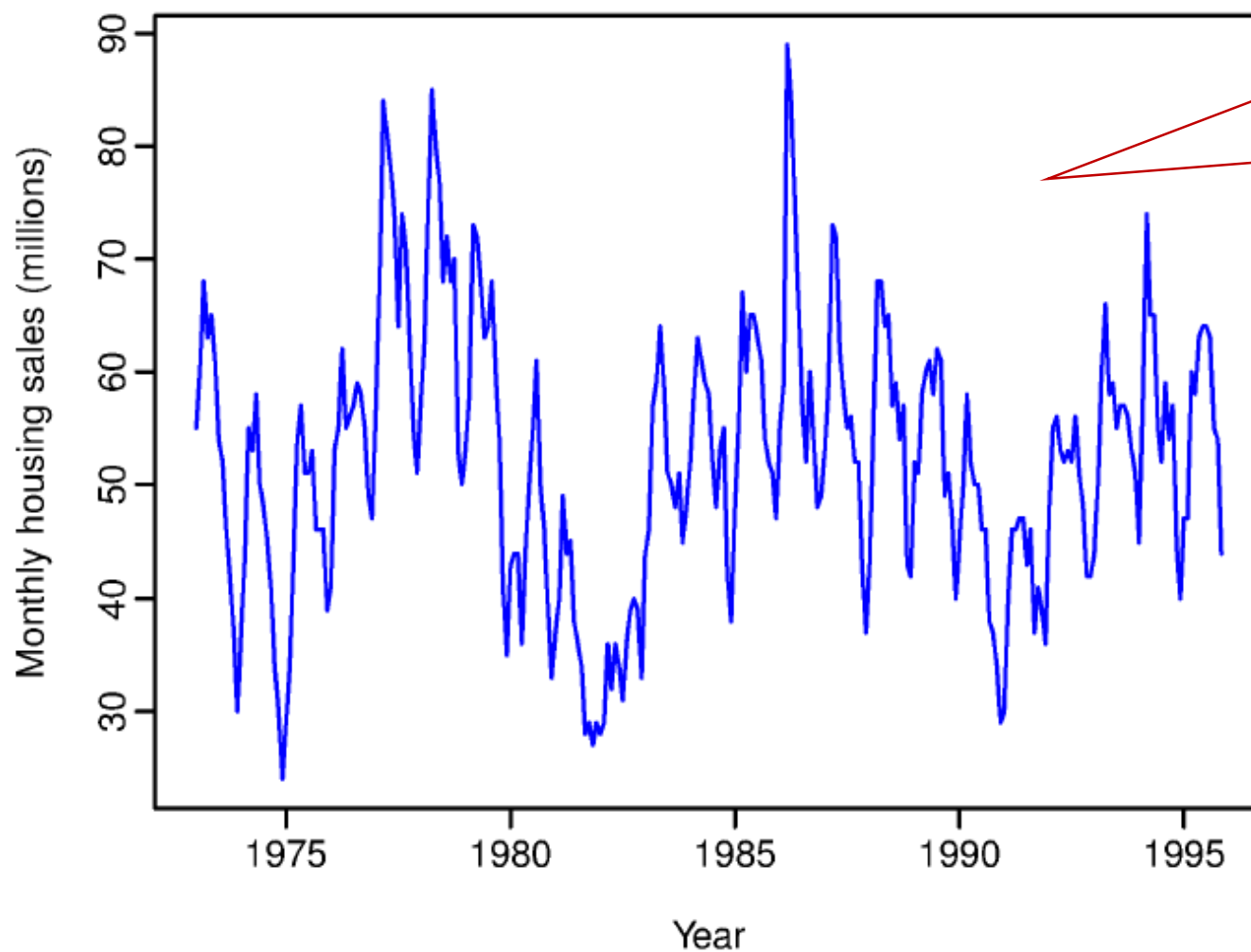


# Пример: тренд и сезонность



12 месяцев

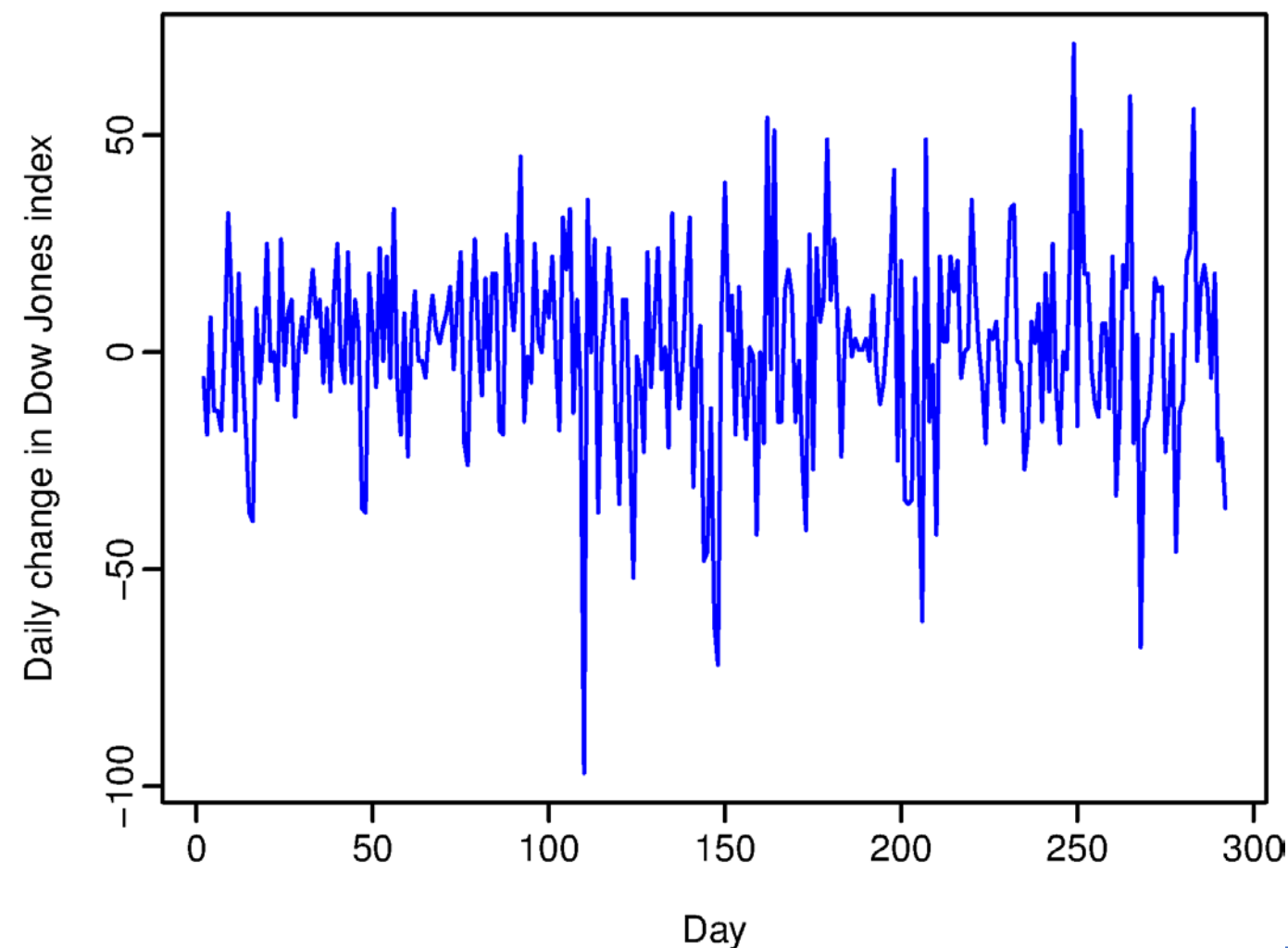
# Пример: сезонность, циклы



Годовая сезонность  
(ежегодные пики),  
недетерминированные  
экономические спады



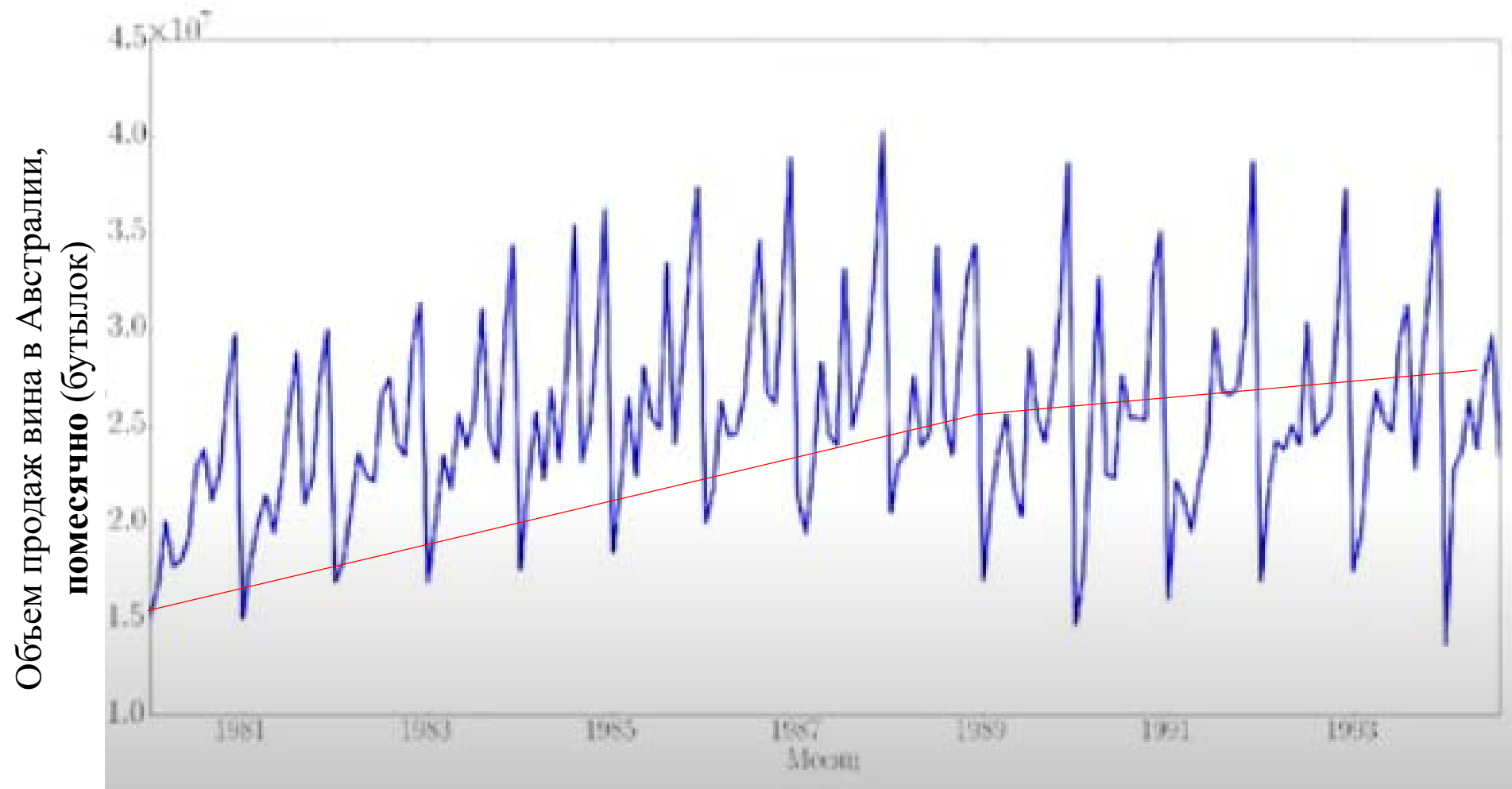
# Пример: отсутствие тренда, сезонности, циклов



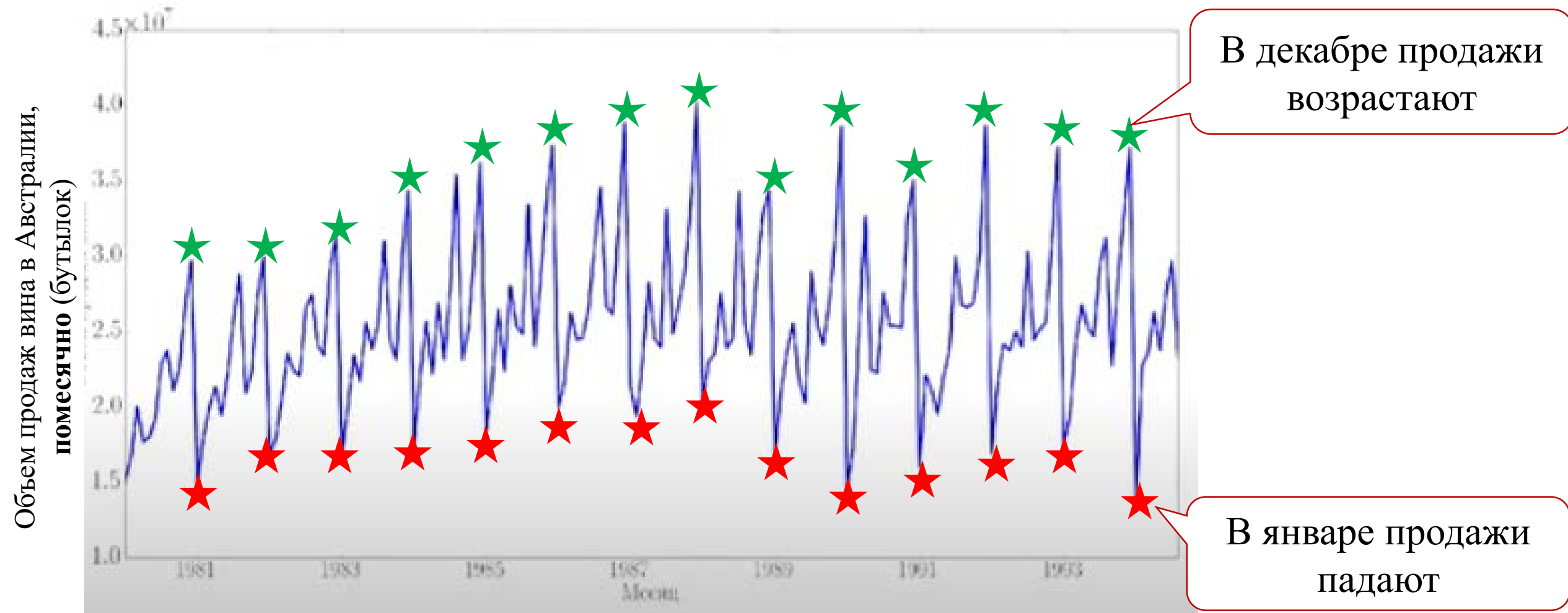
# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- **Автокорреляция временного ряда**
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Построение прогноза
- Анализ остатков

# Автокорреляция временного ряда



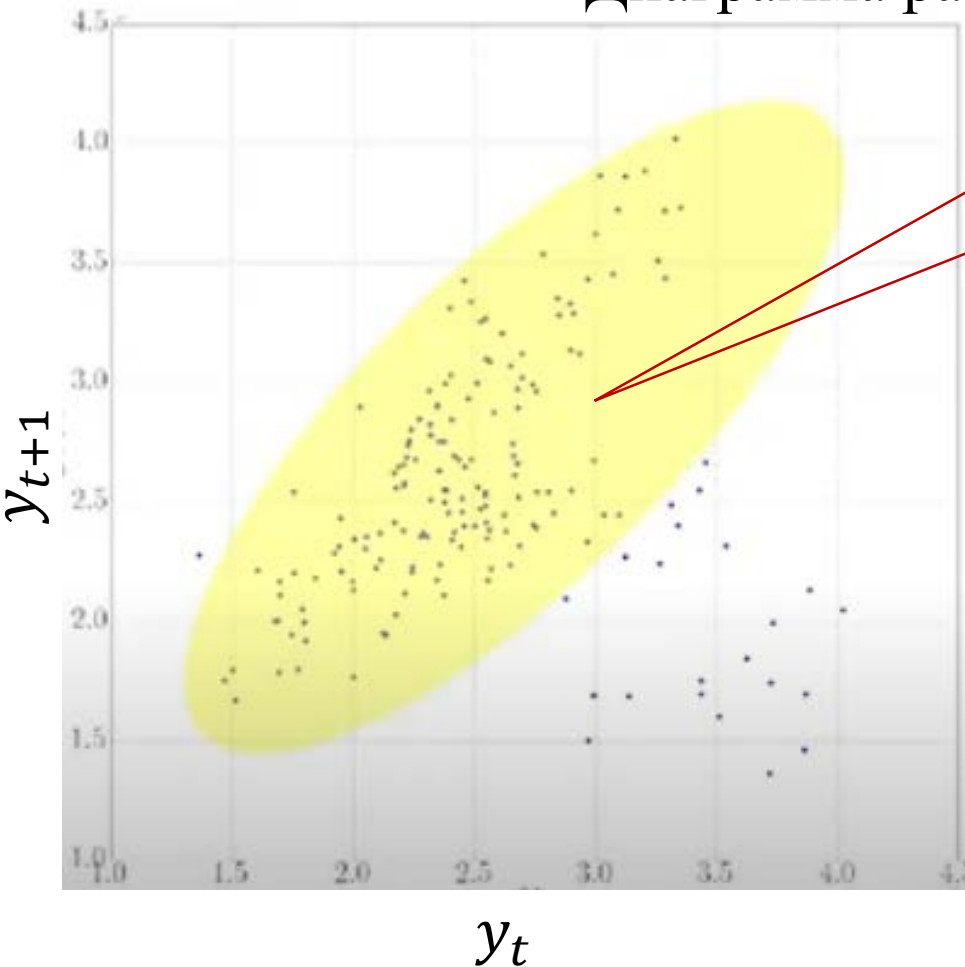
# Автокорреляция временного ряда



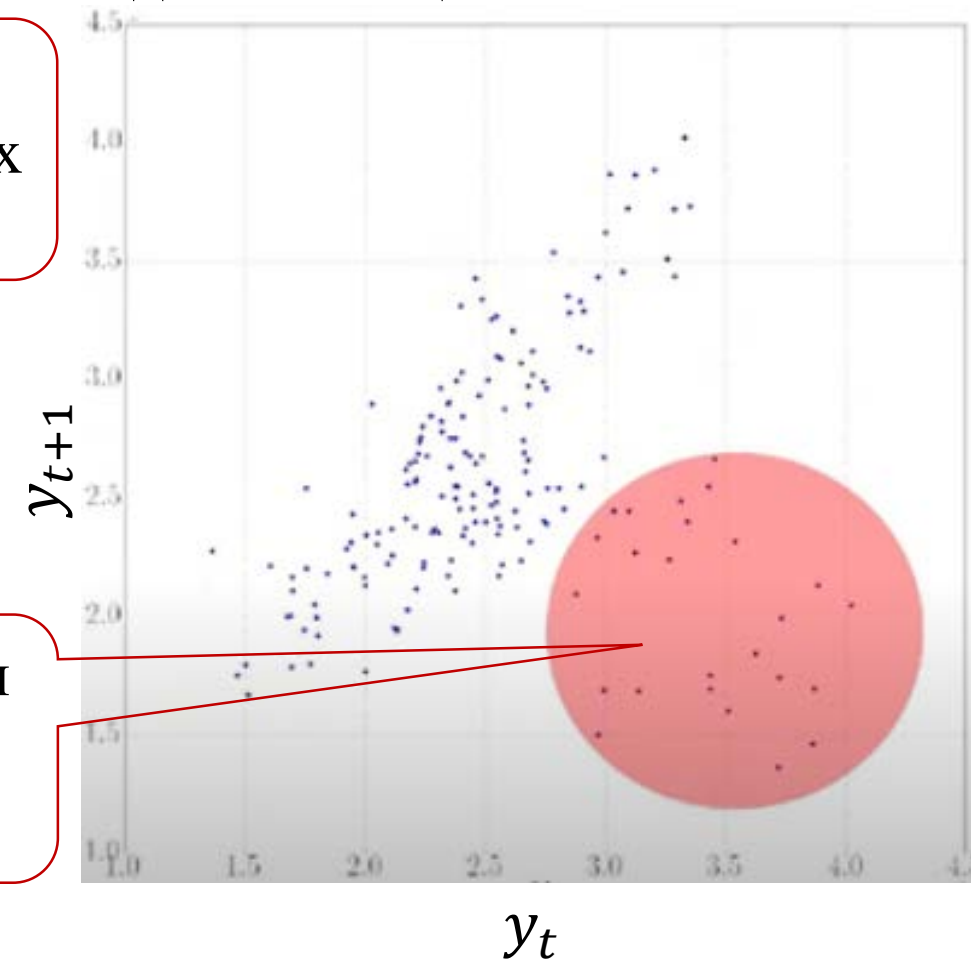


# Автокорреляция временного ряда

Диаграмма рассеяния для продаж в соседних месяцах



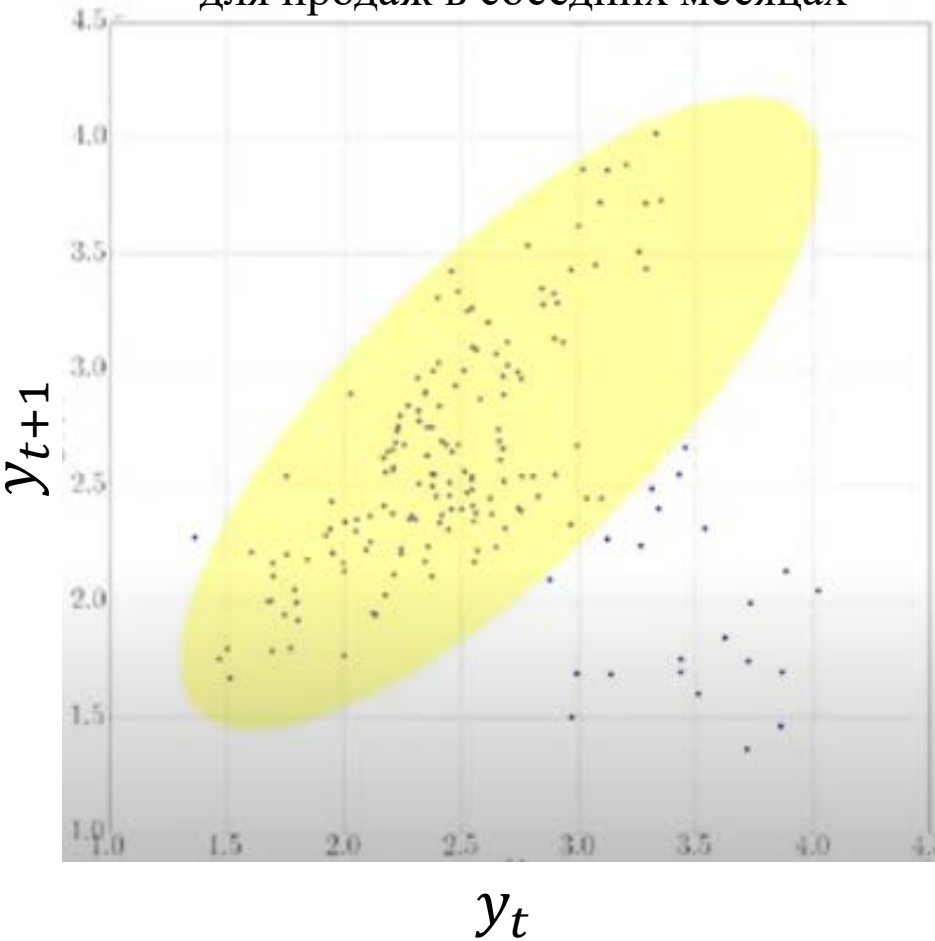
В феврале-ноябре  
продажи в соседних  
месяцах похожи



В декабре продажи  
возрастают,  
в январе – падают

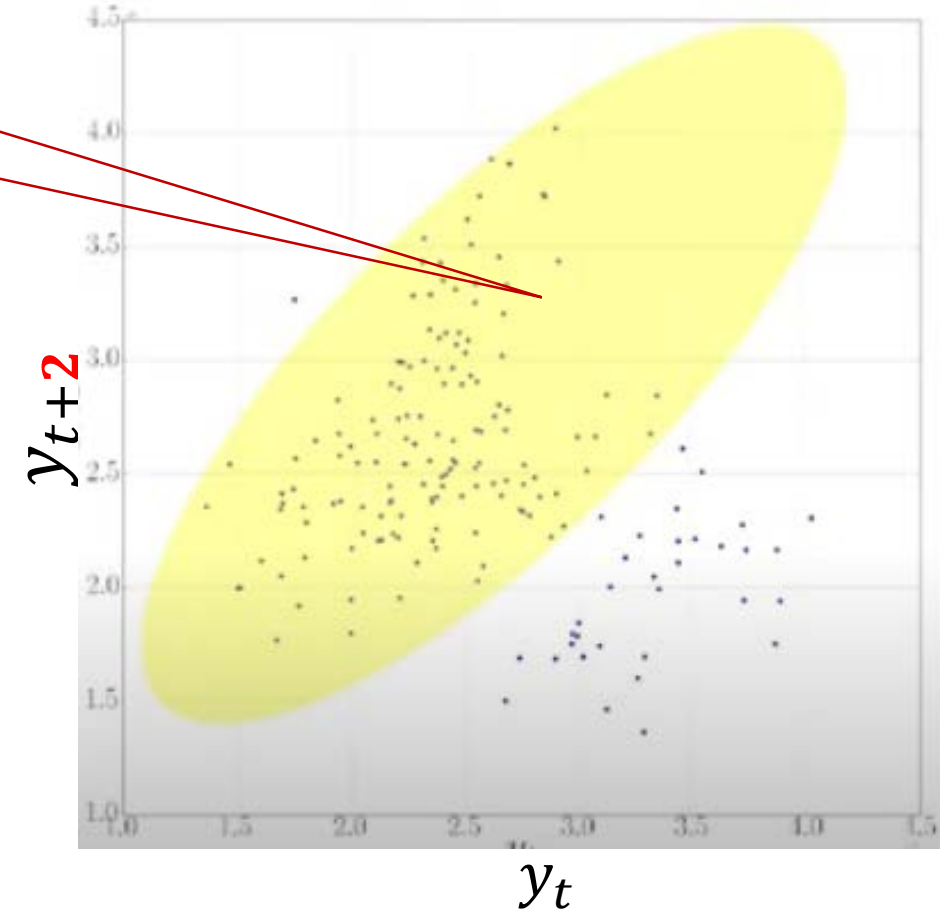
# Автокорреляция временного ряда

Диаграмма рассеяния  
для продаж в соседних месяцах



Кластер  
укрупняется

Диаграмма рассеяния  
для продаж через месяц



# Автокорреляция временного ряда

Диаграмма рассеяния  
для продаж в соседних месяцах

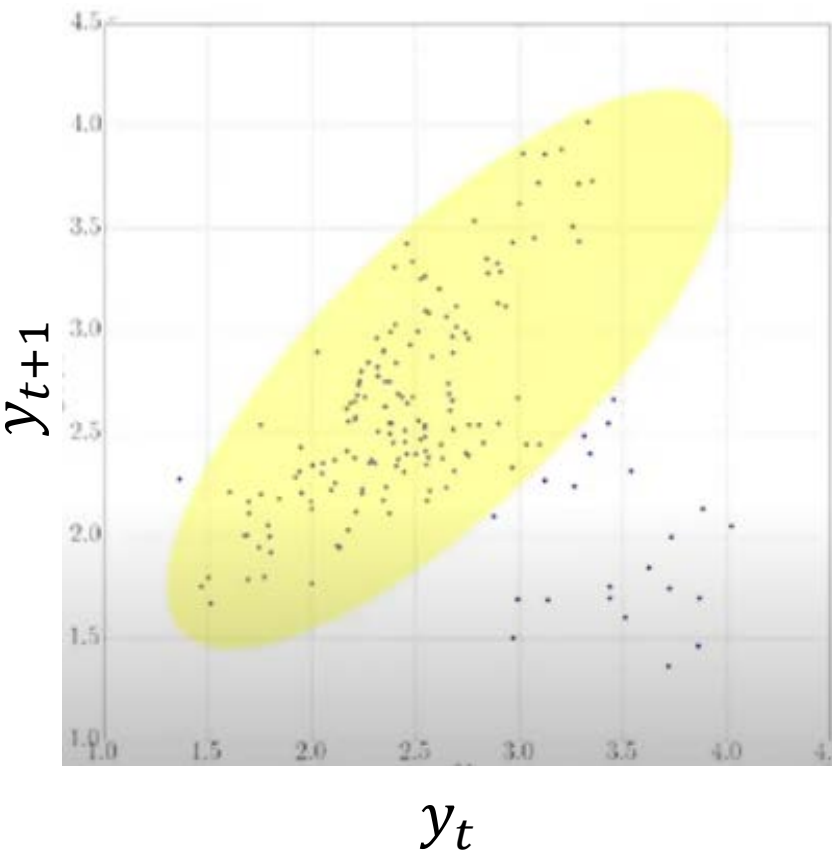


Диаграмма рассеяния  
для продаж через месяц

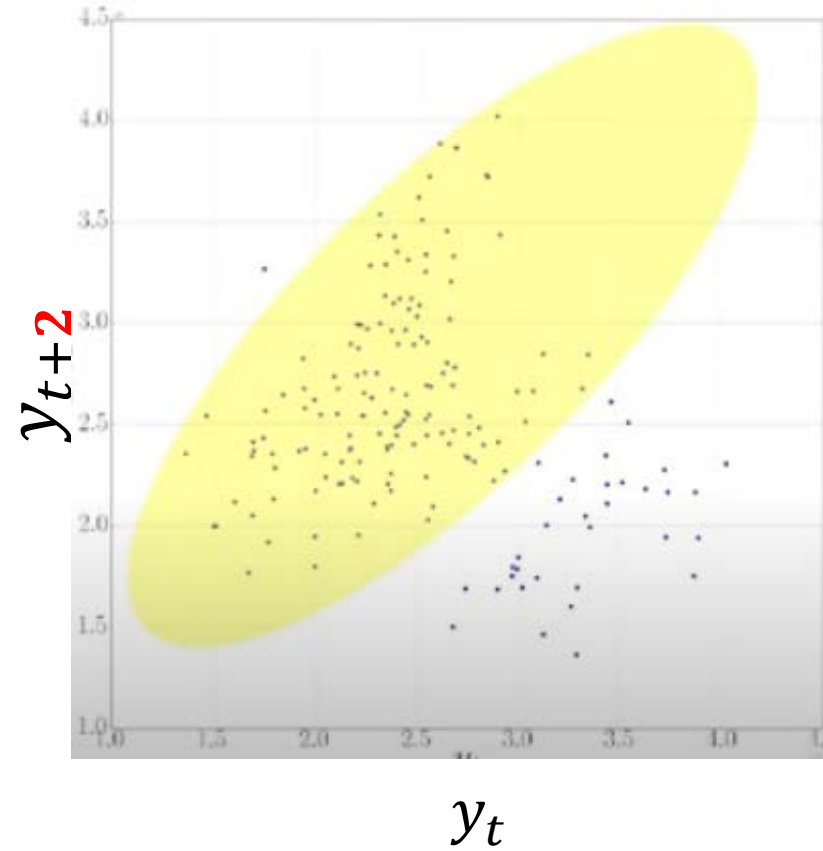
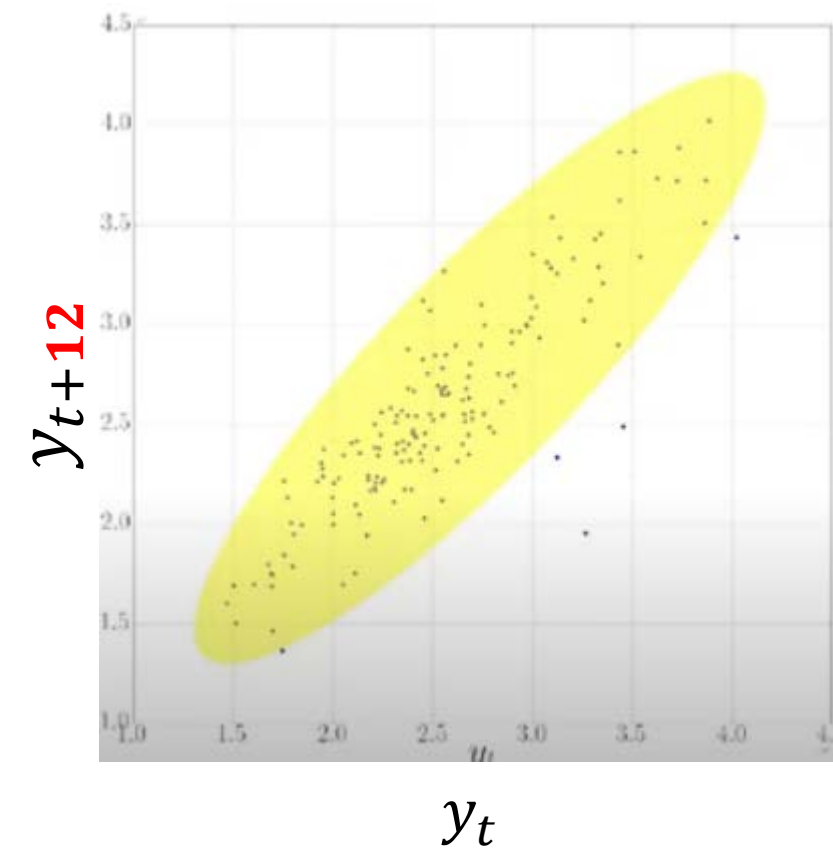
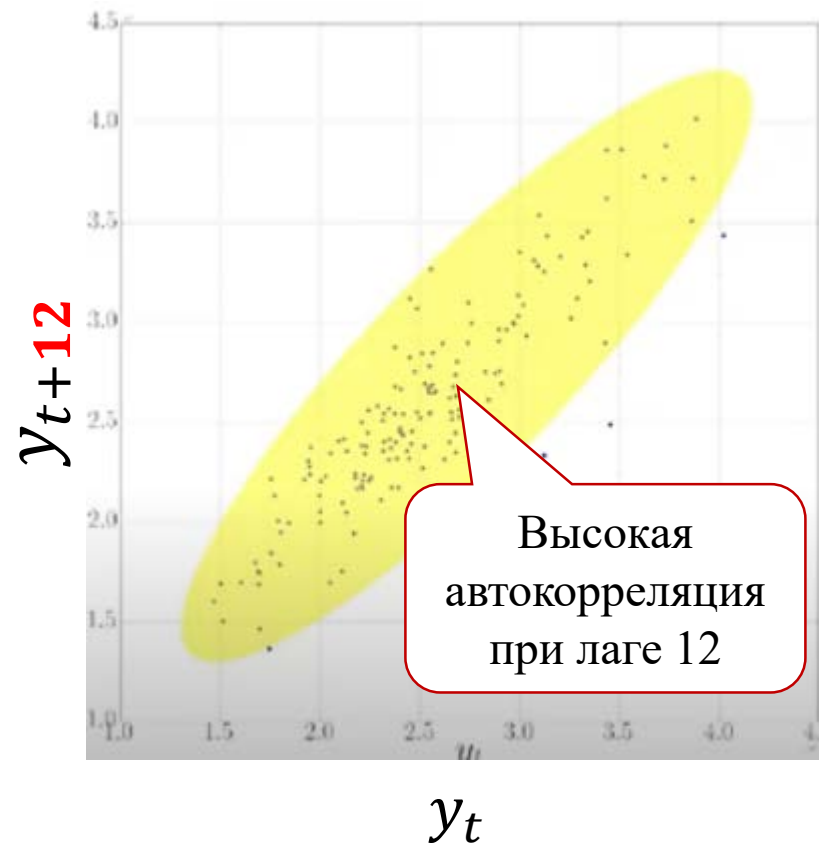


Диаграмма рассеяния  
для продаж через год (12 мес.)



# Автокорреляция временного ряда

Диаграмма рассеяния  
для продаж через год (12 мес.)



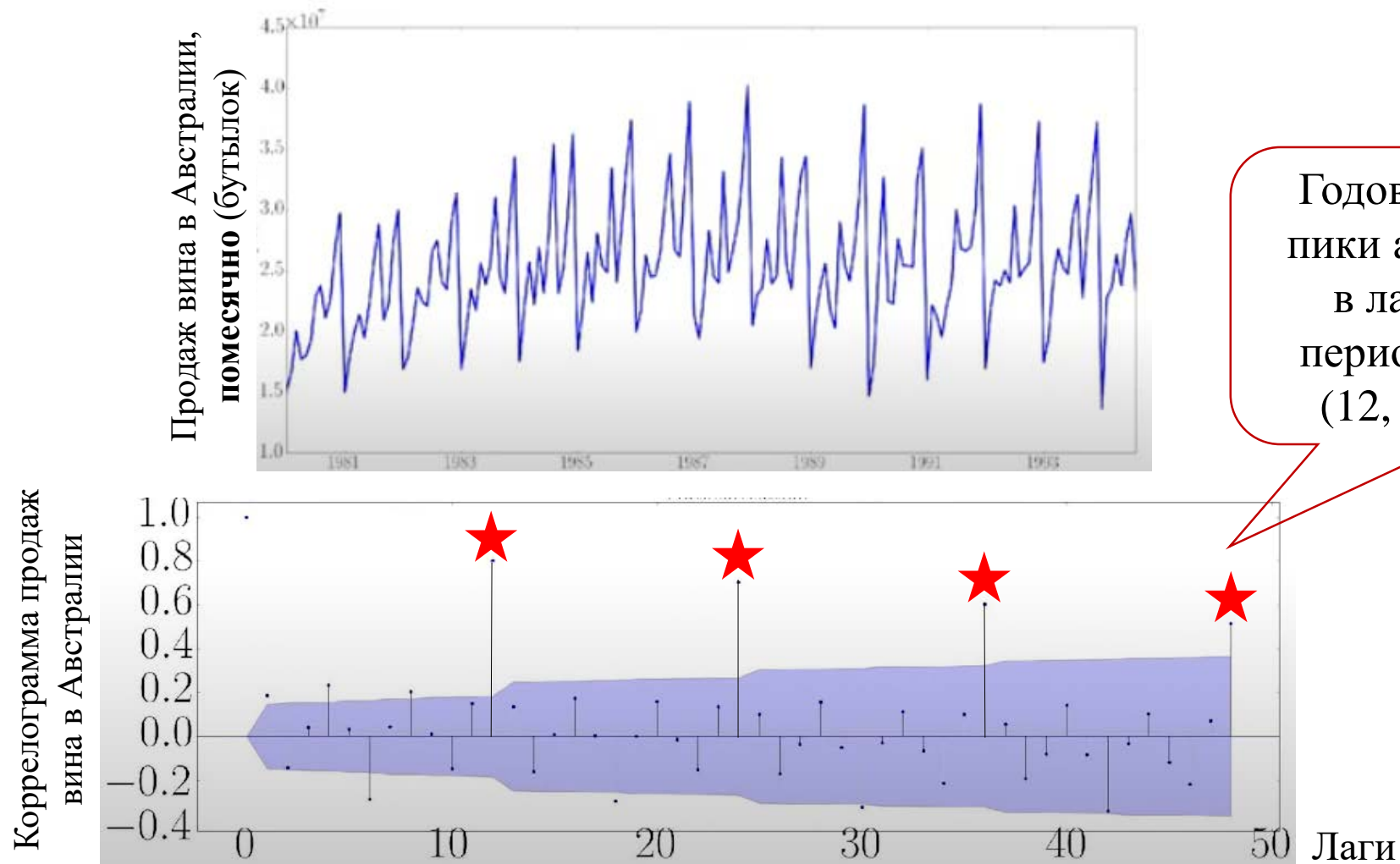
- Функция автокорреляции вычисляет корреляцию Пирсона между рядом и его копией со значениями, отстоящими на заданный лаг:
$$ACF(lag) = corr(y_t, y_{t+lag})$$
- Функция частичной (частной) автокорреляции вычисляет корреляцию Пирсона между рядом и его копией со значениями, отстоящими на заданный лаг, дополнительно удаляя линейную зависимость между сдвинутыми рядами

# Вычисление автокорреляции

•  $Y = [2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]$

$lag$	$Y_t$	$Y_{t+lag}$	$ACF(lag)$
0	[2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]	[2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]	1
1	[2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, <del>10</del> ]	[ <del>2</del> , 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]	0.331354
2	[2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, <del>5</del> , <del>10</del> ]	[ <del>2</del> , <del>7</del> , 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]	0.158205
3	[2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, <del>9</del> , <del>5</del> , <del>10</del> ]	[ <del>2</del> , <del>7</del> , <del>3</del> , 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]	-0.171137

# Коррелограмма (график функции автокорреляции)

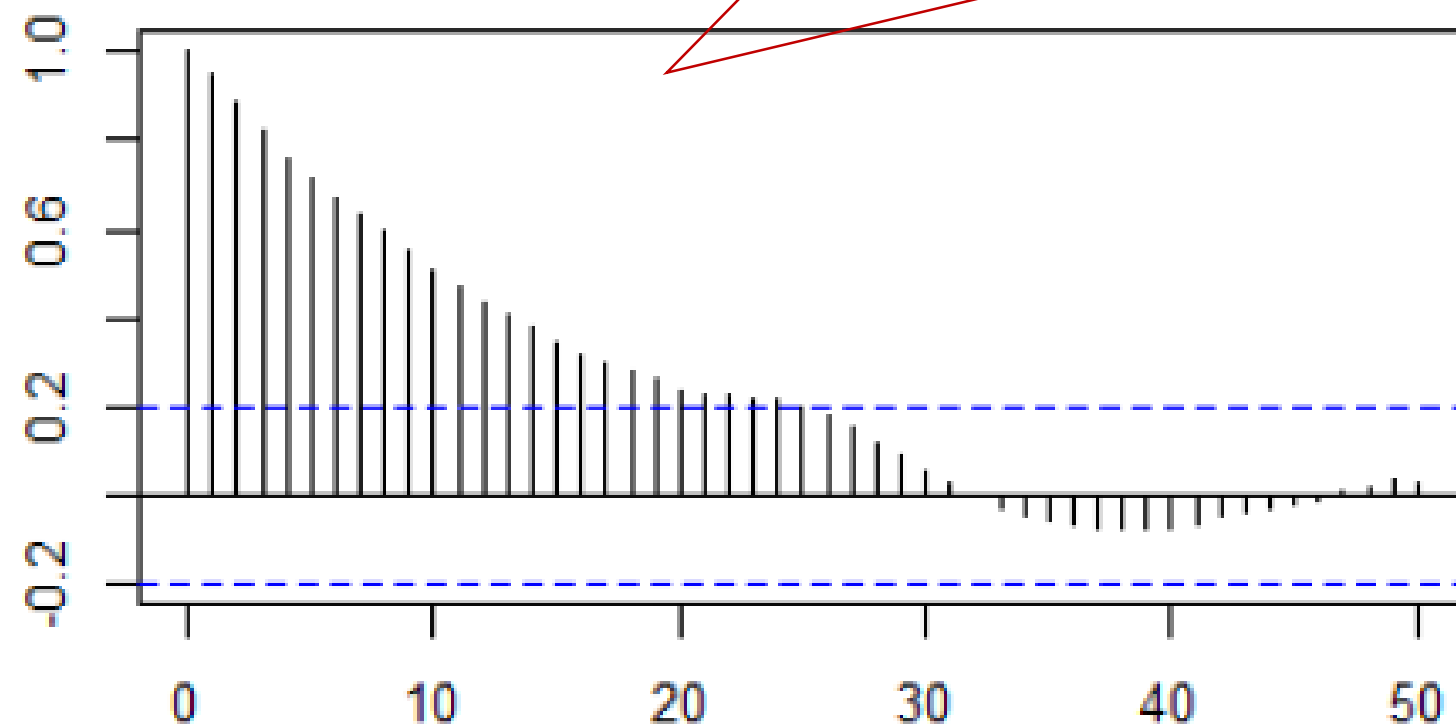
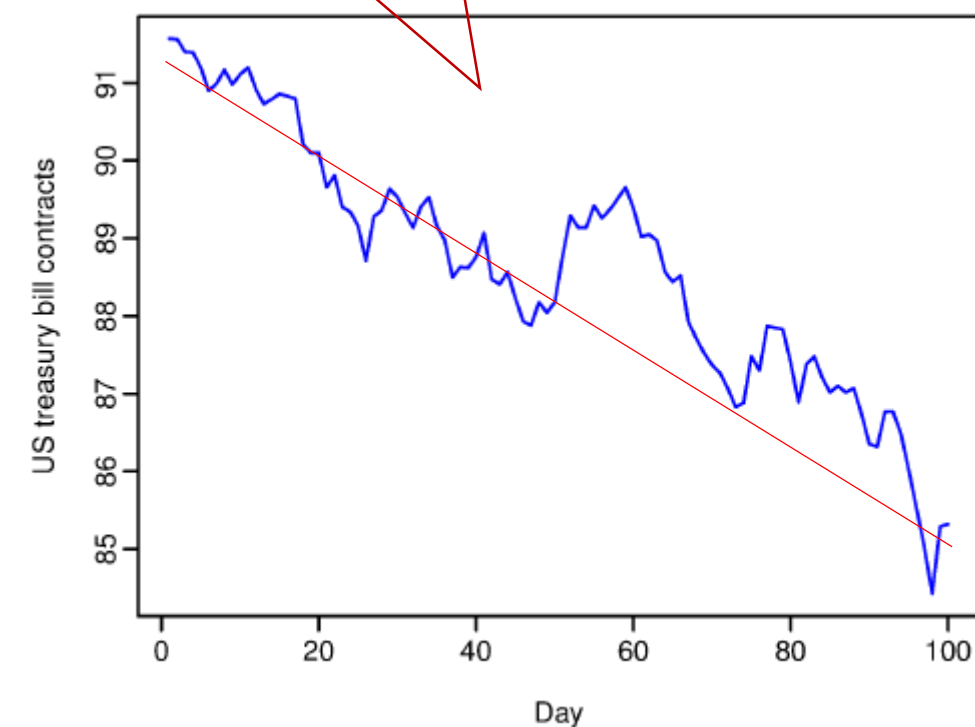




# Коррелограмма: сильный тренд

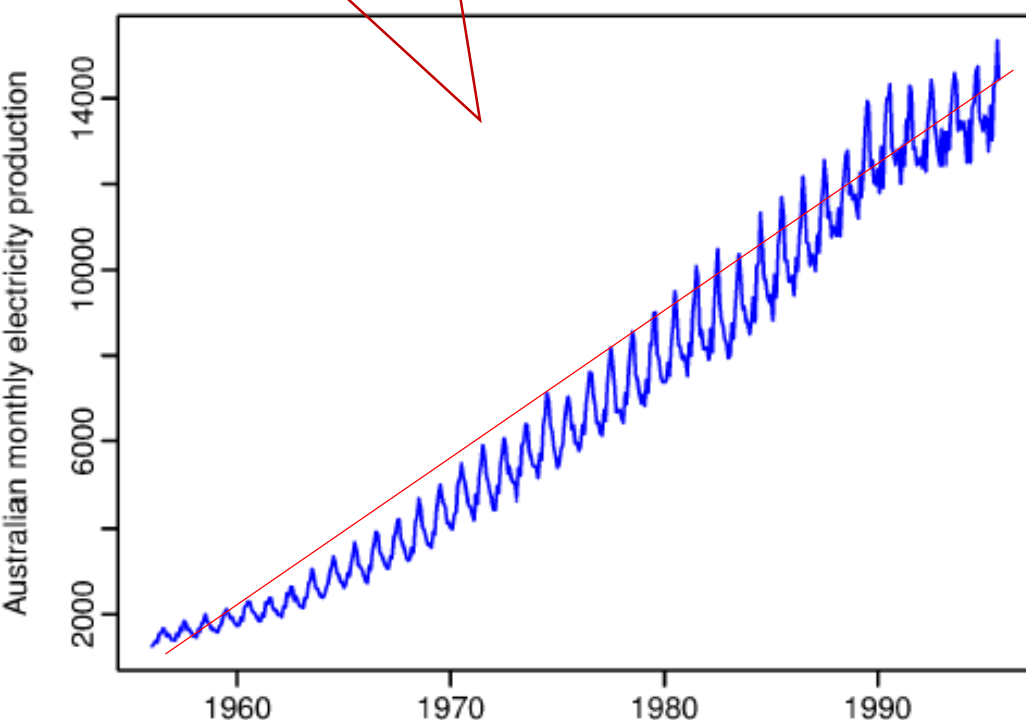
Ряд с сильным трендом

Типичная структура автокорреляции для ряда с сильным трендом: большие значения при малых лагах, убывание, колебания вокруг нуля

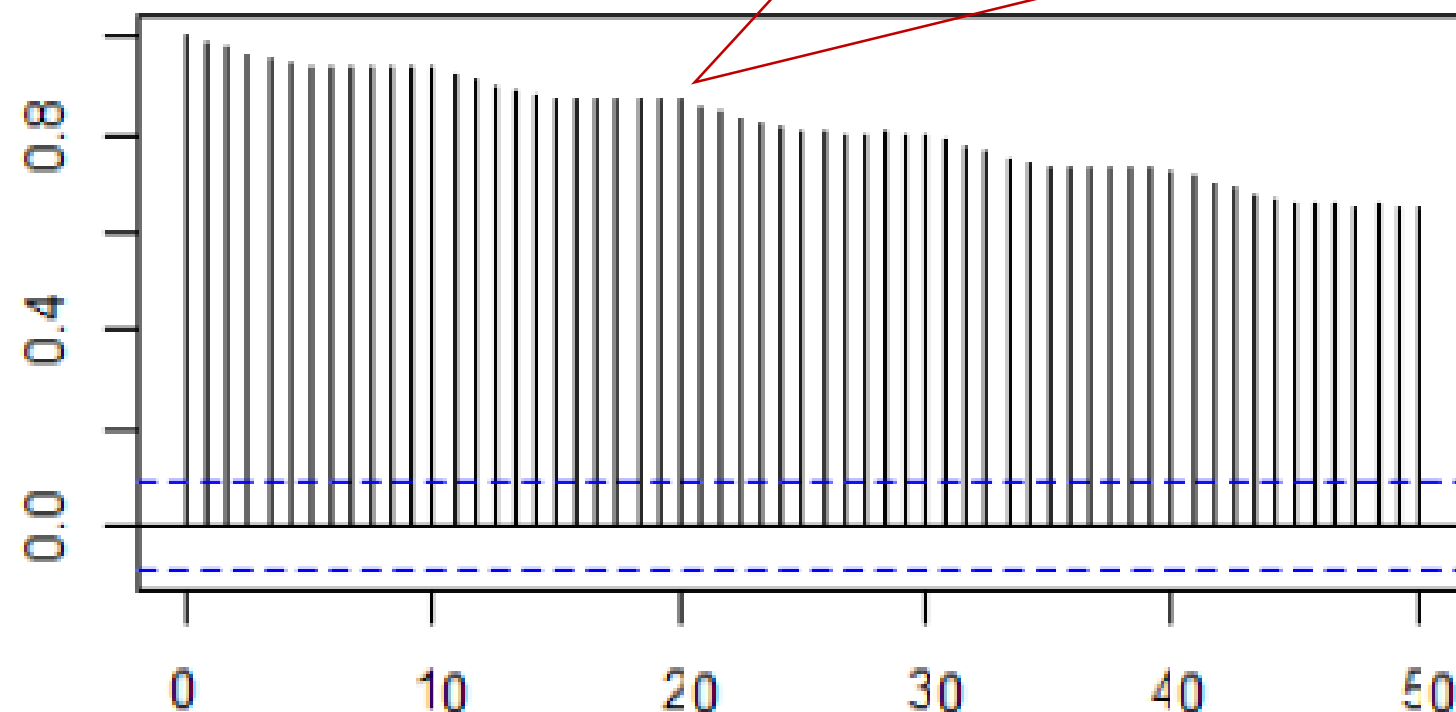


# Коррелограмма: сильный тренд и сезонность

Ряд с сильным трендом  
и сезонностью

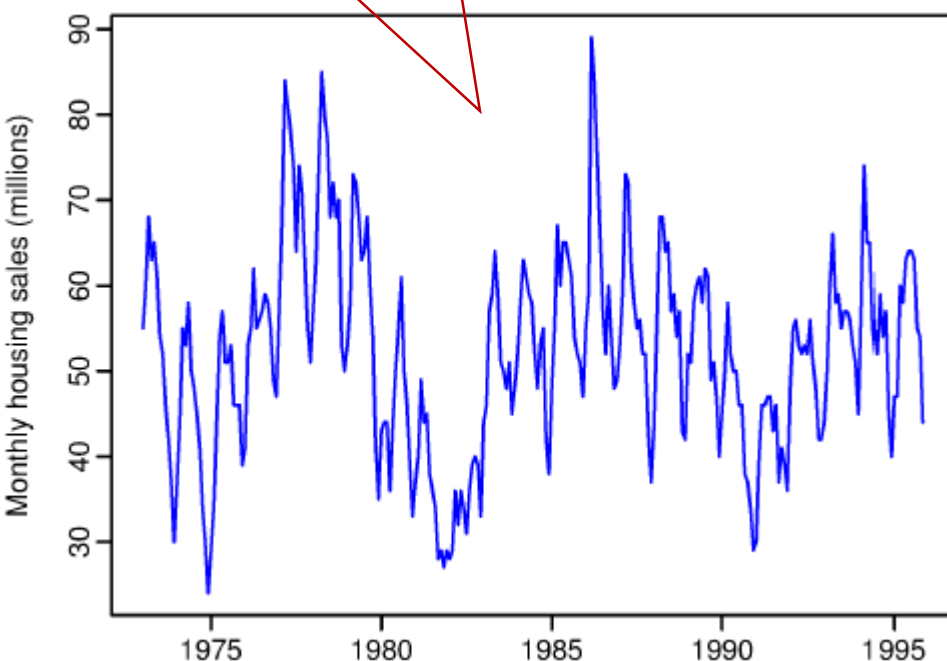


Типичная структура автокорреляции для ряда с сильным трендом  
и сезонностью: слабо различимые пики автокорреляции  
в лагах, кратных периоду сезонности (12, 24, 36, 48, ...)

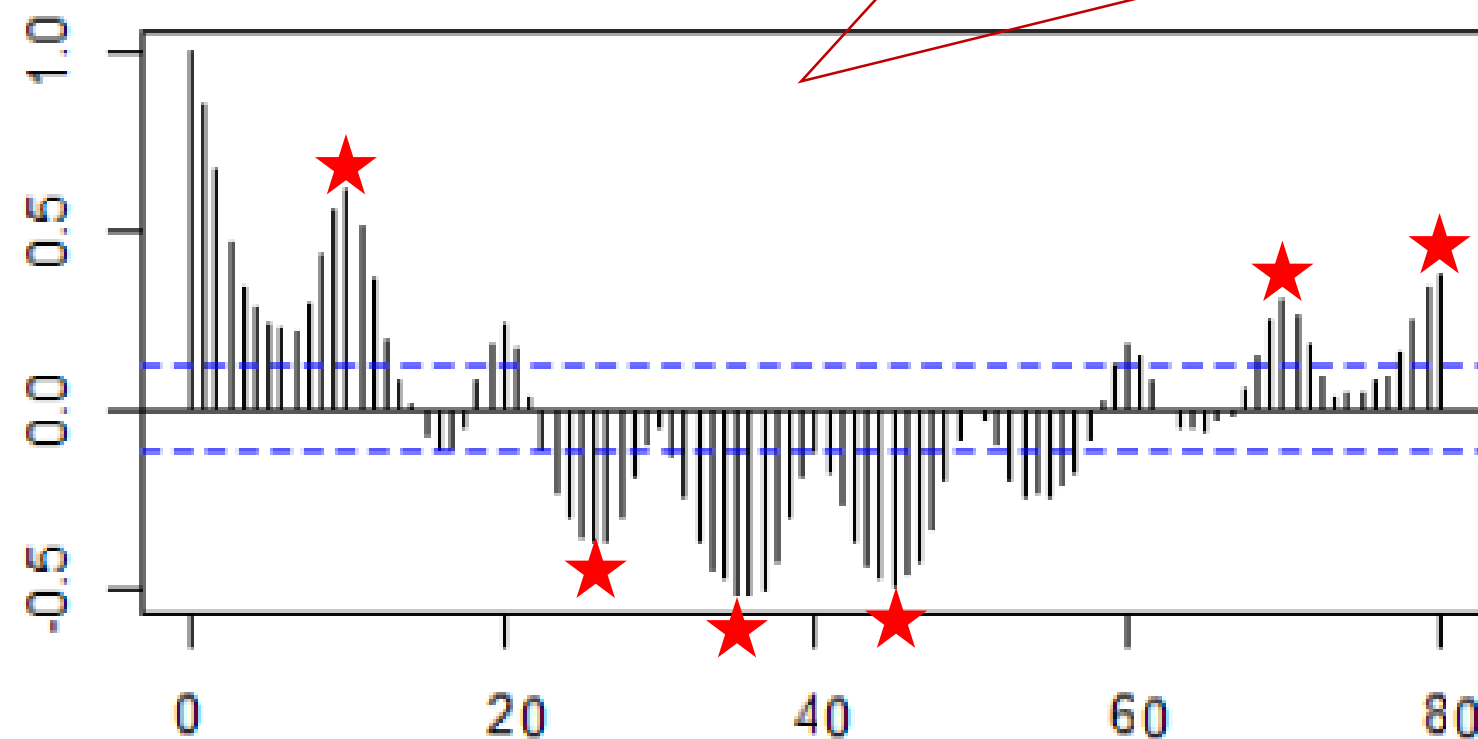


# Коррелограмма: сезонность и циклы

Ряд с сезонностью  
и циклами

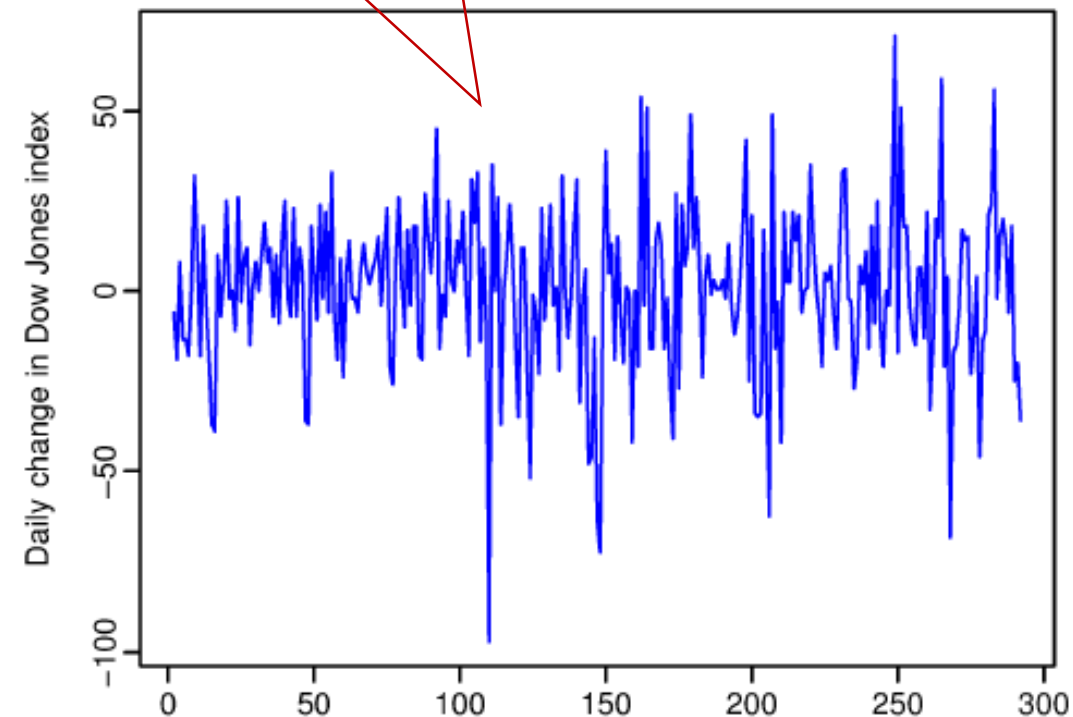


Типичная структура автокорреляции для ряда с сезонностью и циклами: циклы приводят к сдвигу пиков автокорреляции в лагах, кратных периоду сезонности, в иные лаги

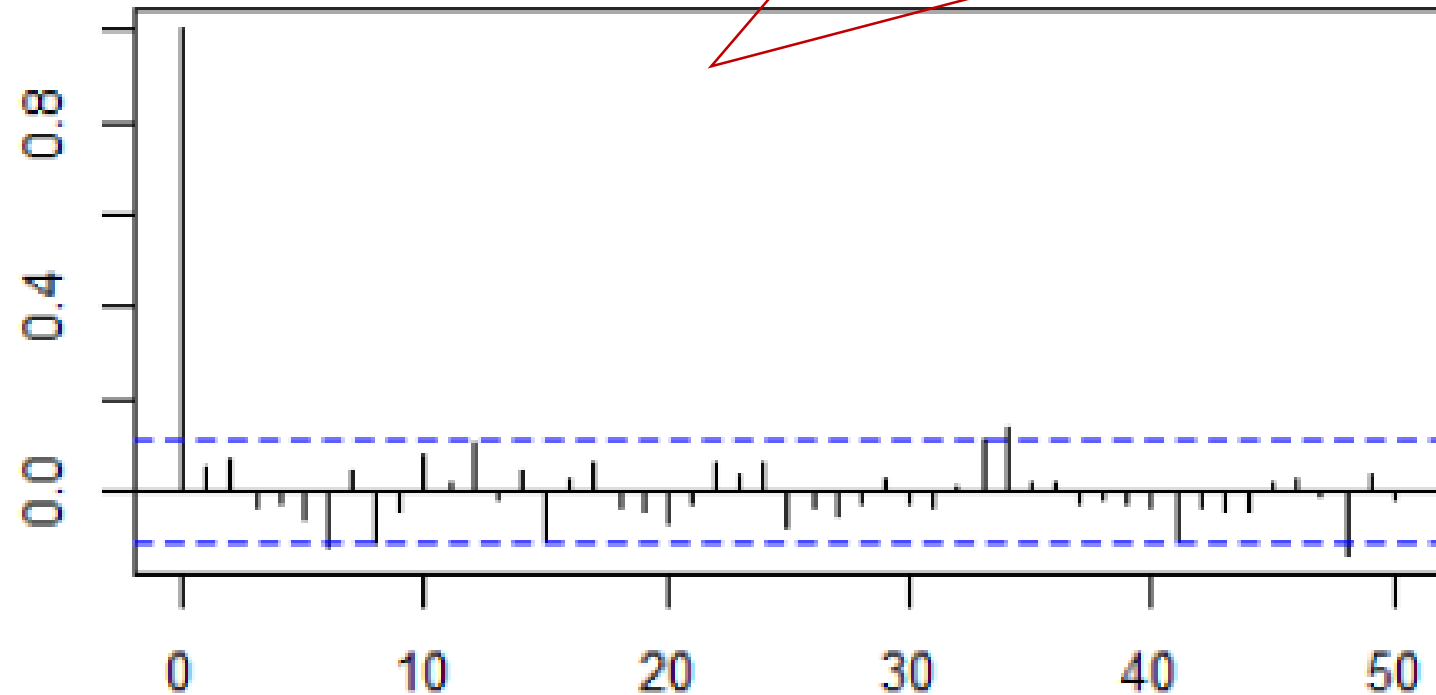


# Коррелограмма: отсутствие тренда, сезонности и циклов

Ряд без тренда,  
сезонности и циклов



Типичная структура автокорреляции для ряда без тренда,  
сезонности и циклов: значения слабо колеблются вокруг нуля



# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- **Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда**
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Построение прогноза
- Анализ остатков

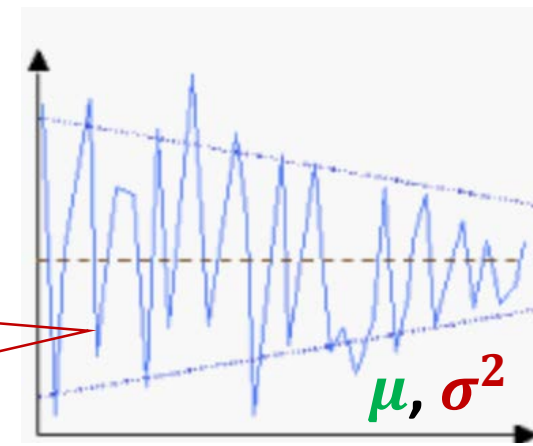
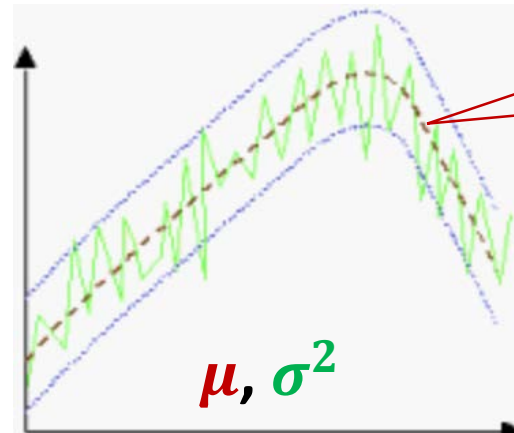
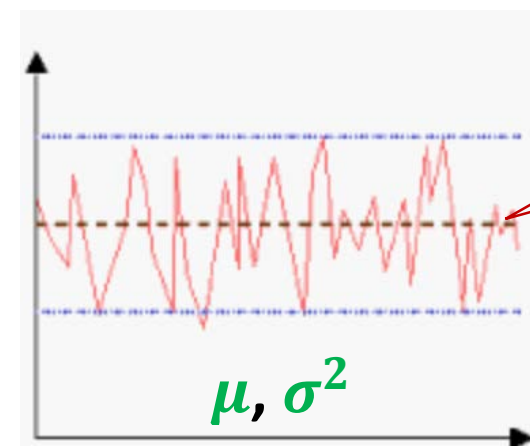
# Стационарный (stationary) ряд: стабильность характеристик

- Среднее арифметическое
$$\mu(T_{i,m}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m t_k$$

- Дисперсия
$$\sigma^2(T_{i,m}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (t_k - \mu)^2$$

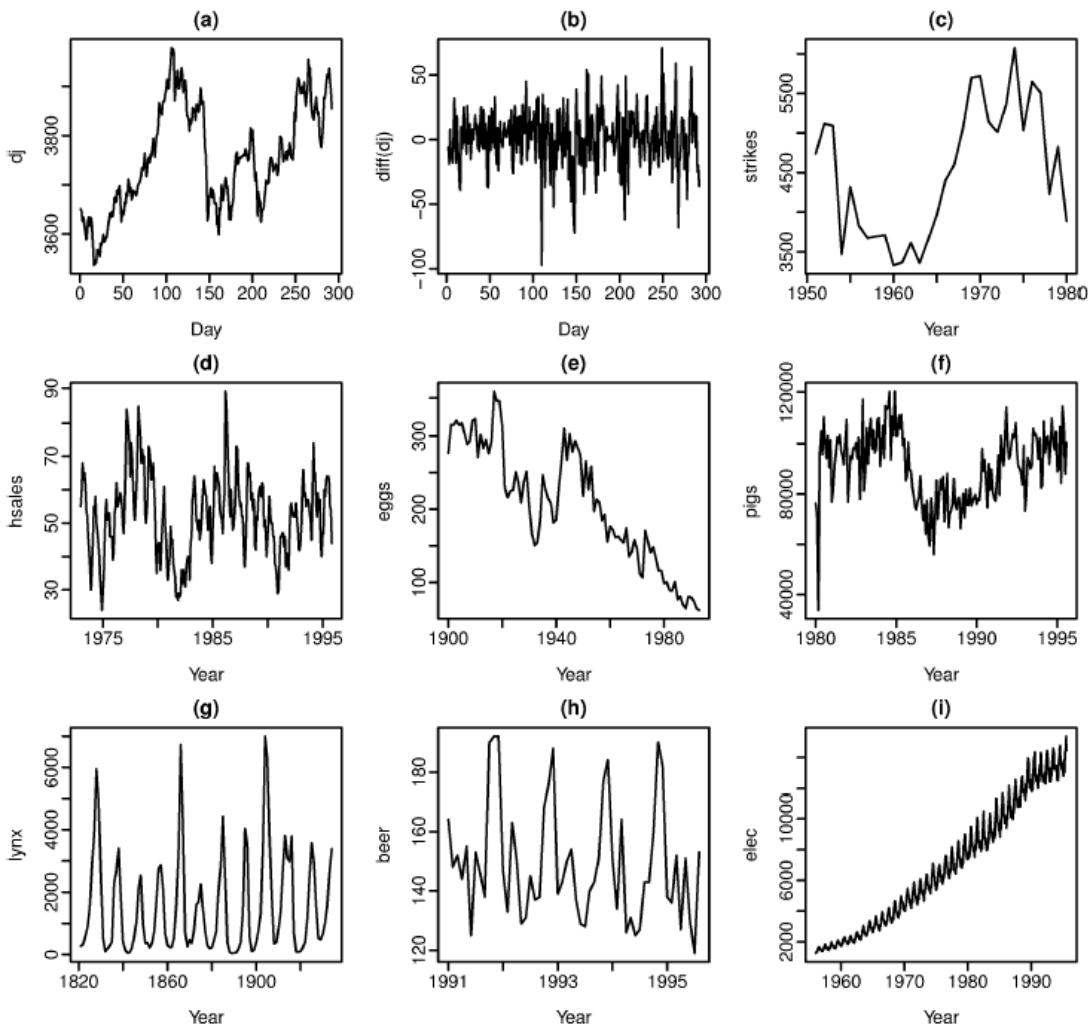
- Ковариация
$$\text{cov}(T_{i,m}, T_{j,m}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m (t_{i+k-1} - \mu(T_{i,m}))(t_{j+k-1} - \mu(T_{j,m}))$$

Ряд  $y_1, \dots, y_T$  стационарен, если  
 $\forall s$  распределение  $y_t, \dots, y_{t+s}$   
не зависит от времени  $t$



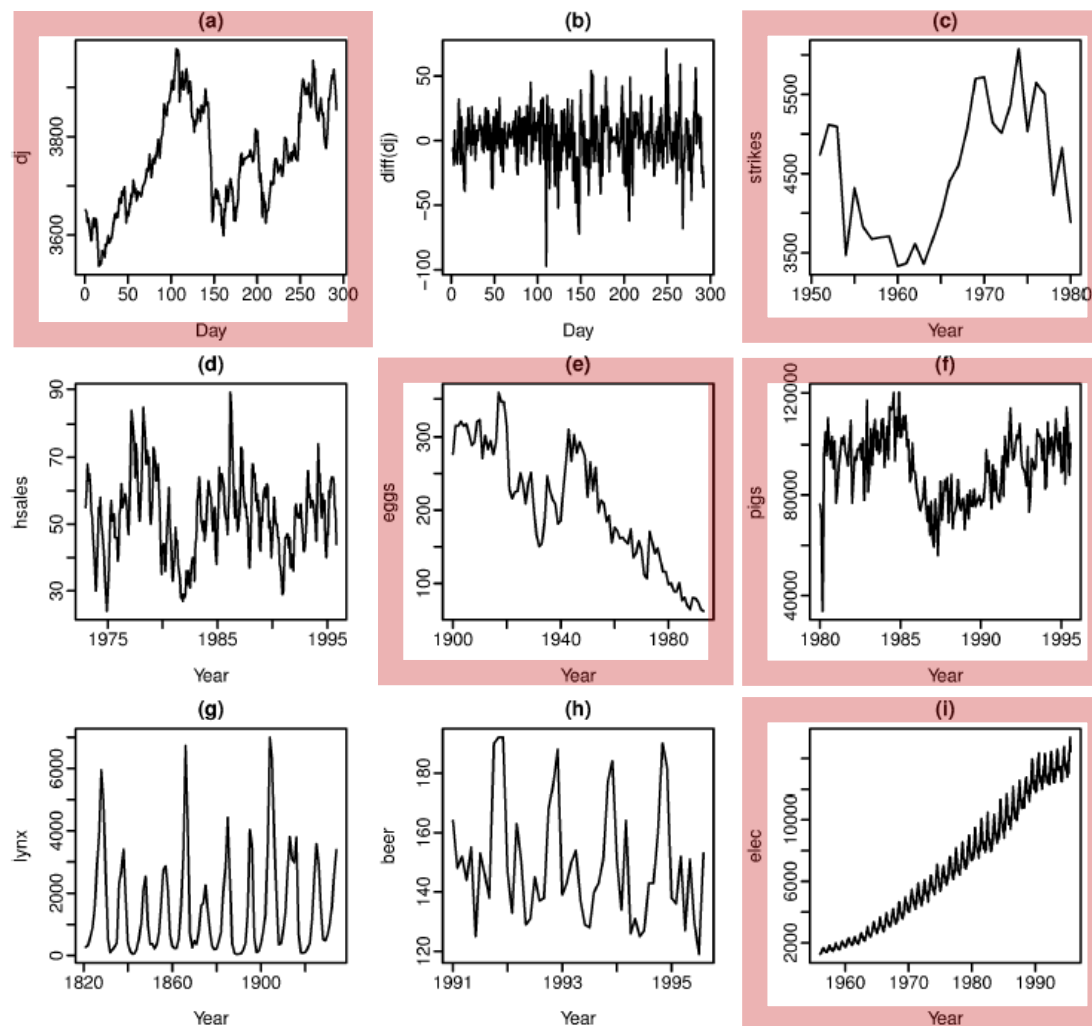


# Влияние компонентов ряда на стационарность

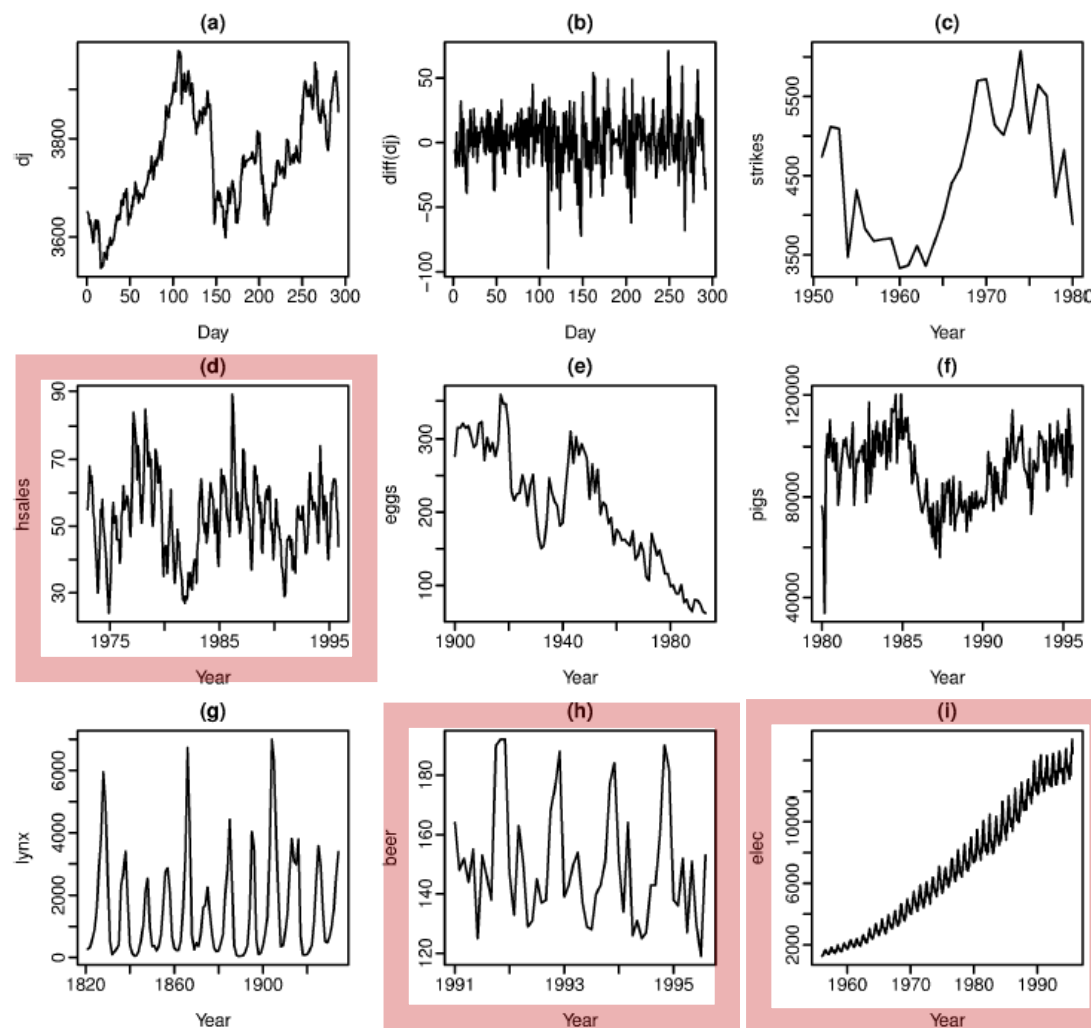


- Ряды с трендом не стационарны
  - распределения в окнах в начале и в конце ряда существенно отличаются
- Ряды с сезонностью не стационарны
  - распределения в окнах длины менее сезона в периоды минимумов и максимумов существенно отличаются
- Ряды с неперiodическими циклами стационарны
  - нельзя предсказать заранее локацию минимумов и максимумов

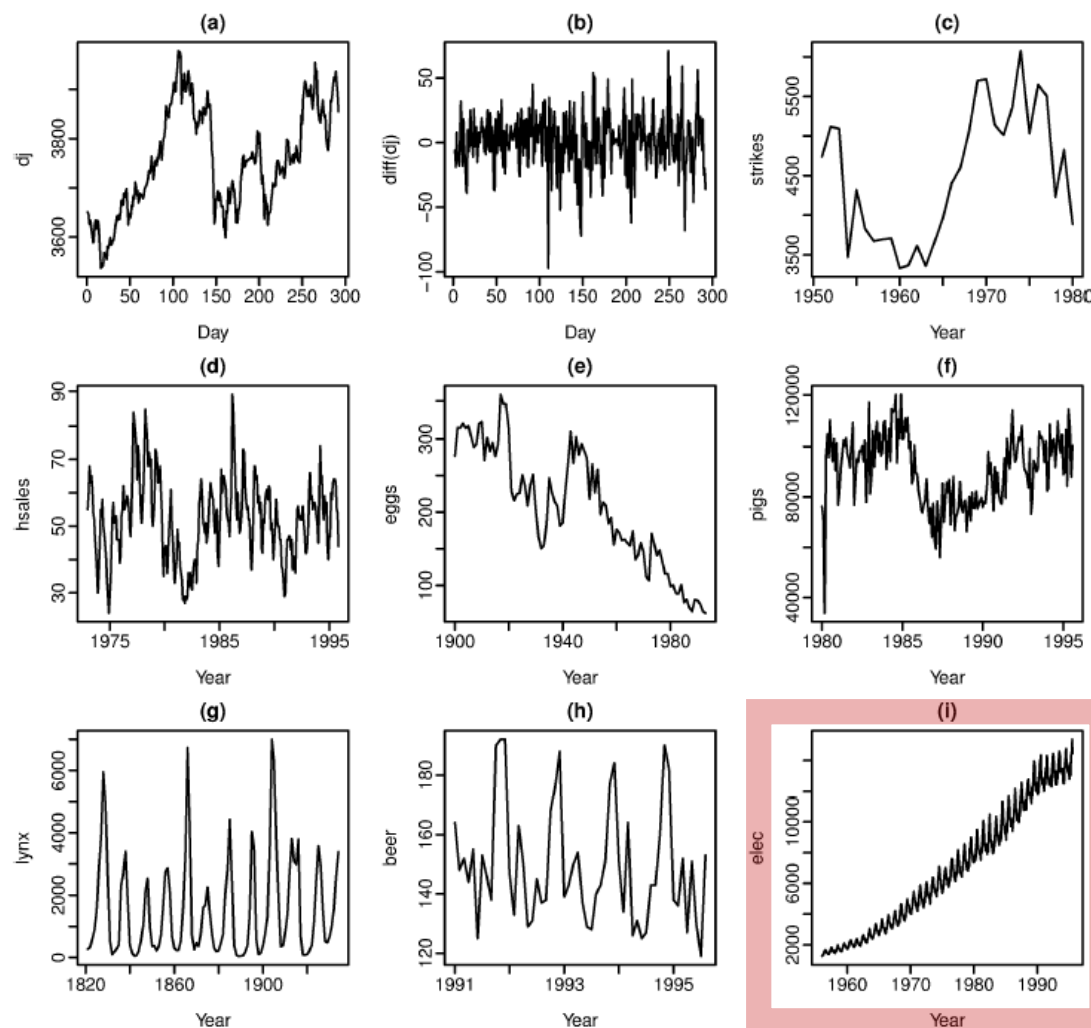
# Ряды с трендом не стационарны



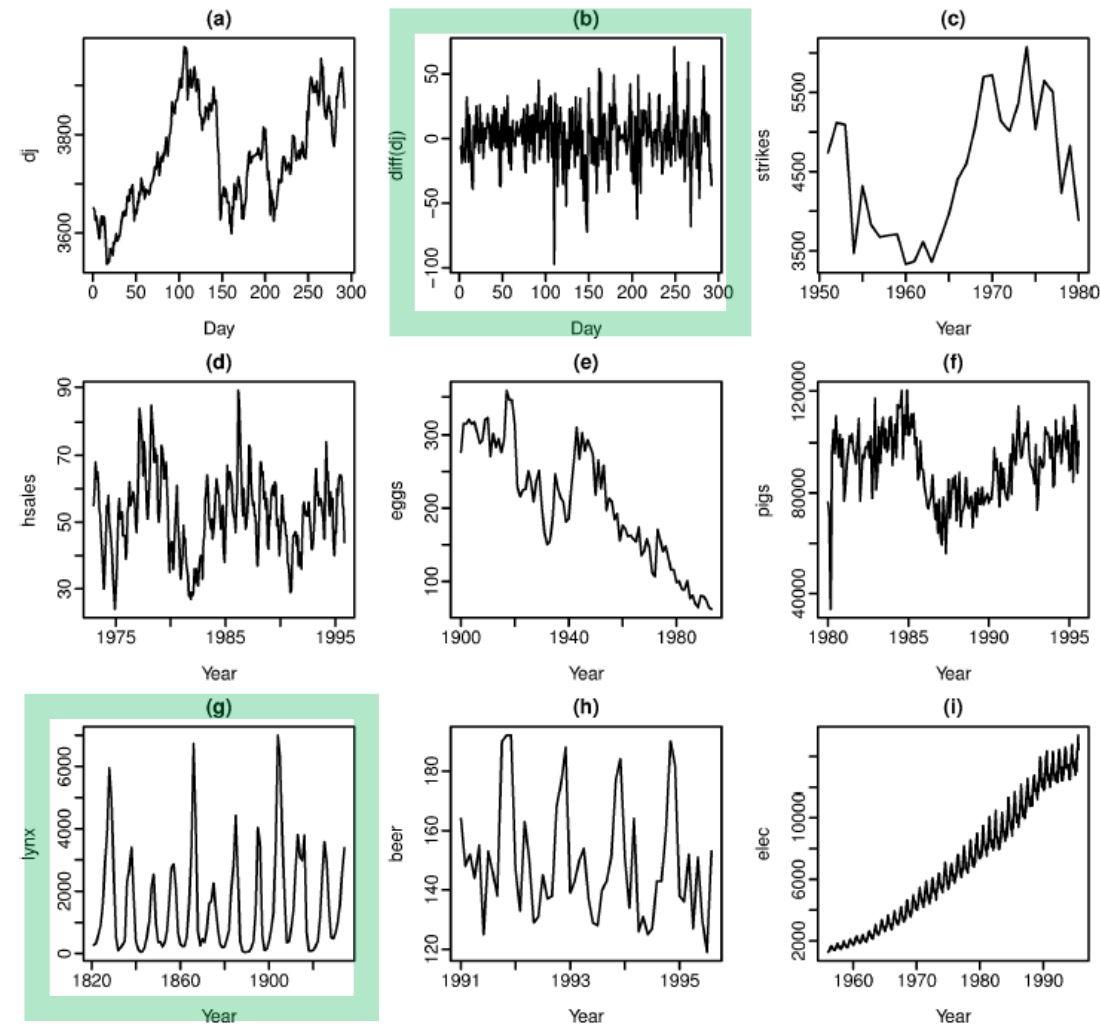
# Ряды с сезонностью не стационарны



# Ряды с меняющейся дисперсией не стационарны



# Стационарные ряды



# Проверка ряда на стационарность

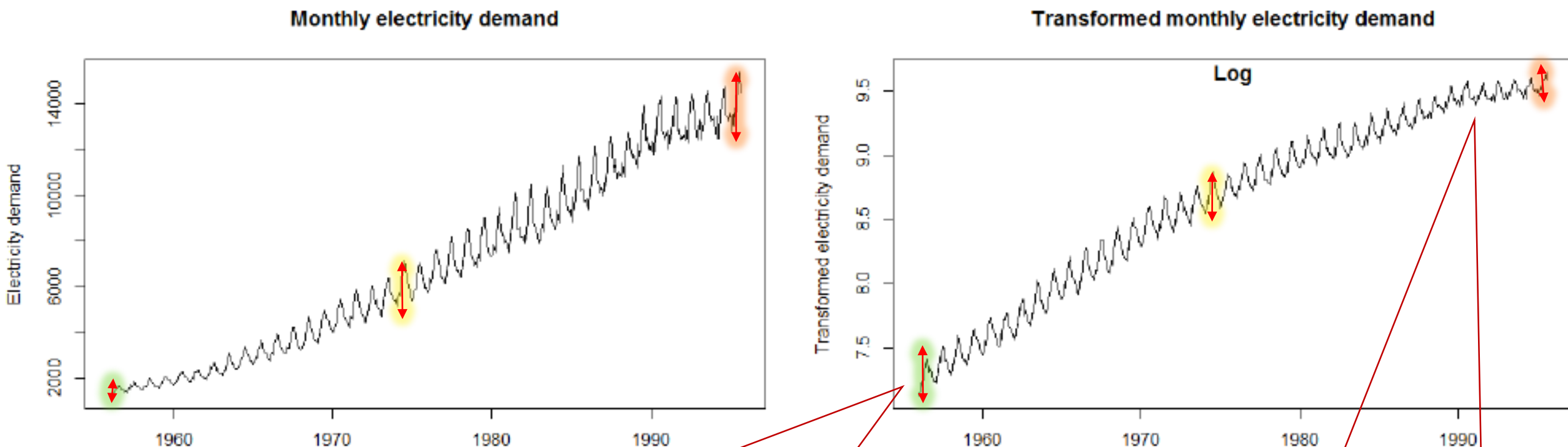
- Визуальный анализ, проверка постоянства среднего и дисперсии
- Статистические тесты
  - Тест Дики–Фуллера (Dickey–Fuller test)
  - Тест KPSS (Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin test)
- Автокорреляционная функция (ACF, Autocorrelation function)



# Стабилизирующие преобразования ряда

- Стабилизация монотонно меняющейся дисперсии ряда
  - Логарифмирование
  - Преобразование Бокса–Кокса
- Стабилизация среднего значения ряда, удаление тренда и сезонности
  - Дифференцирование ряда
  - Сезонное дифференцирование ряда
  - Комбинированное дифференцирование ряда

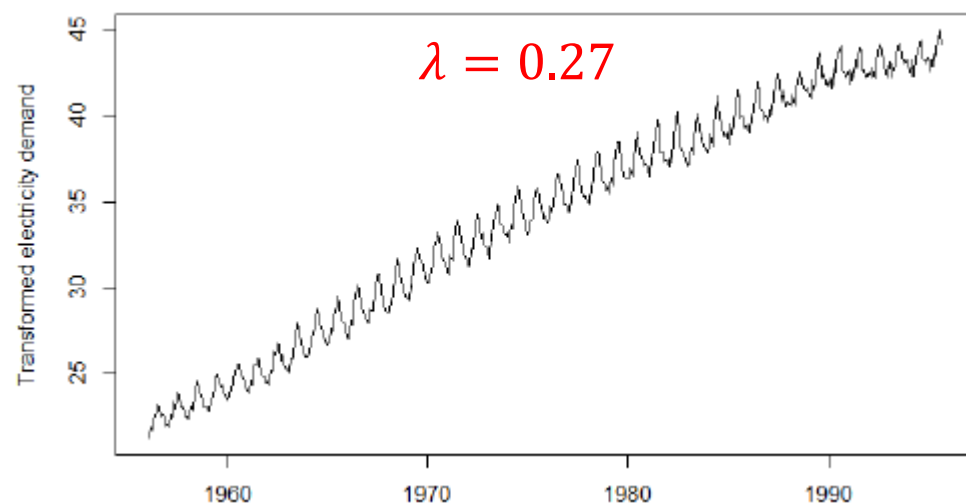
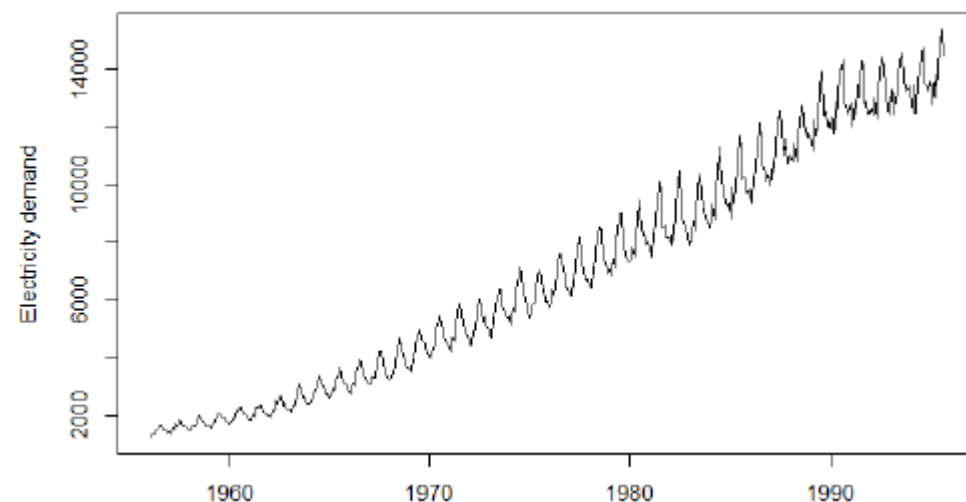
# Логарифмирование ряда



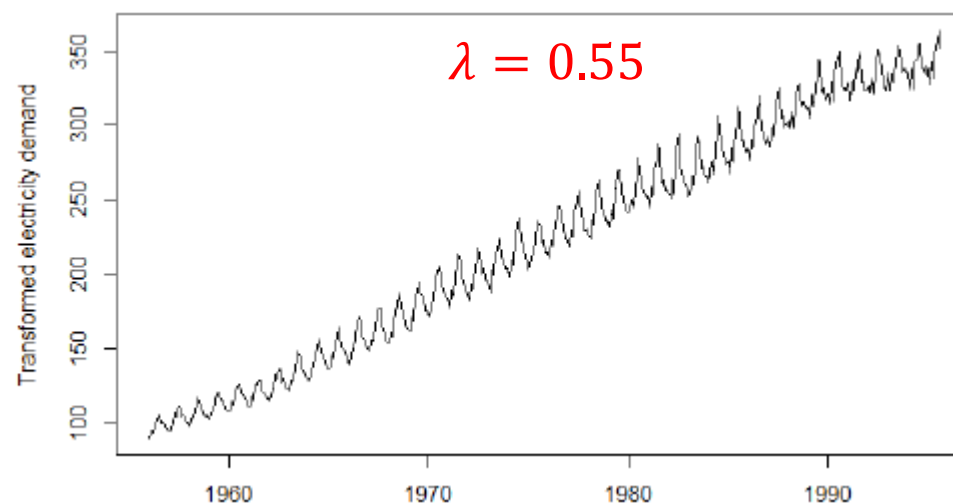
Стабилизация дисперсии  
не обязательно приведет к стационарности ряда

После логарифмирования  
размах колебаний стал примерно одинаков

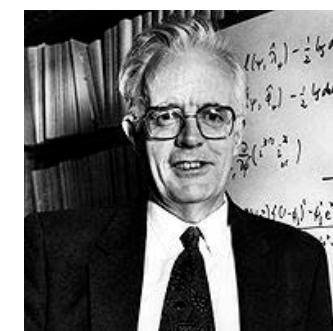
# Преобразование Бокса–Кокса (Box–Cox transformation)



$$y'_t = \begin{cases} \ln y_t, & \lambda = 0 \\ \frac{y_t^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \end{cases}$$



Дж.Э.П. Бокс  
(G.E.P. Box)  
1919-2013



Сэр Д.Р. Кокс  
(Sir D.R. Cox)  
1924-2022

# Преобразование Бокса–Кокса (Box–Cox transformation)

Преобразование  
для выполнения прогноза

$$y'_t = \begin{cases} \ln y_t, & \lambda = 0 \\ (y_t^\lambda - 1)/\lambda, & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

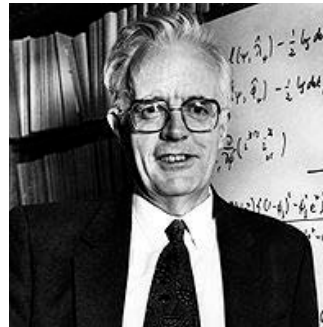
Преобразование прогноза  
трансформированного ряда  
в прогноз исходного ряда

$$\hat{y}_t = \begin{cases} \exp(y'_t), & \lambda = 0 \\ (\lambda \hat{y}'_t + 1)^{1/\lambda}, & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

- Если  $\exists y_t \leq 0$ , то к ряду нужно добавить константу (и вычесть ее для получения прогноза исходного ряда)
- Значение  $\lambda$  слабо влияет на прогноз (можно округлять)
- Значение  $\lambda$  сильно влияет на предсказательный интервал



Дж.Э.П. Бокс  
(G.E.P. Box)  
1919-2013



Сэр Д.Р. Кокс  
(Sir D.R. Cox)  
1924-2022

# Дифференцирование ряда для удаления тренда и сезонности

- Переход к попарным разностям соседних значений (дифференцирование 1-го порядка):

$$y_1, \dots, y_T \rightarrow y'_2, \dots, y'_T$$
$$y'_t = y_t - y_{t-1} = (1 - B)y_t$$

- Дифференцирование 2-го порядка

$$y_1, \dots, y_T \rightarrow y'_2, \dots, y'_T \rightarrow y''_3, \dots, y''_T$$
$$y''_t = y'_t - y'_{t-1} = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} = (1 - B)^2 y_t$$

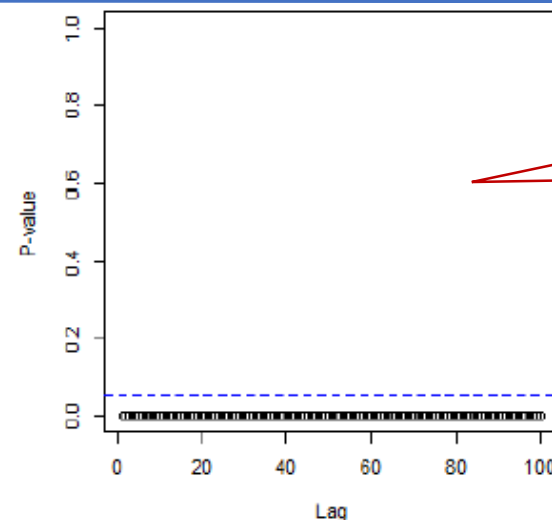
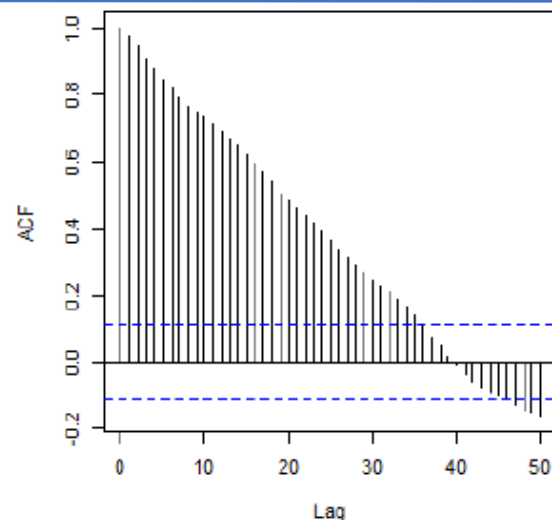
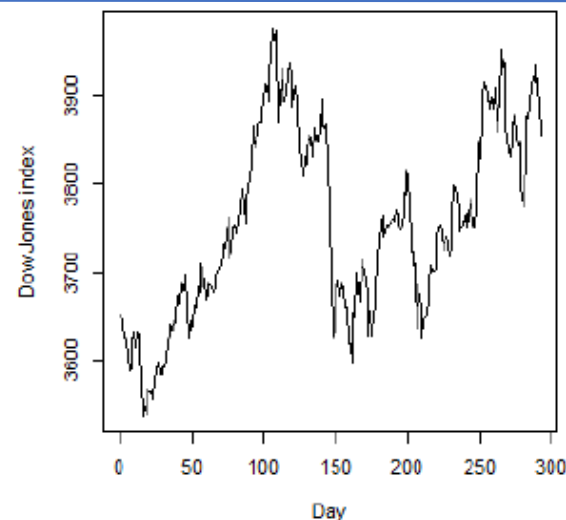
- Дифференцирование 3-го порядка

$$y_1, \dots, y_T \rightarrow y'_2, \dots, y'_T \rightarrow y''_3, \dots, y''_T \rightarrow y'''_4, \dots, y'''_T$$
$$y'''_t = y''_t - y''_{t-1} = y_t - 3y_{t-1} + 3y_{t-2} - y_{t-3} = (1 - B)^3 y_t$$

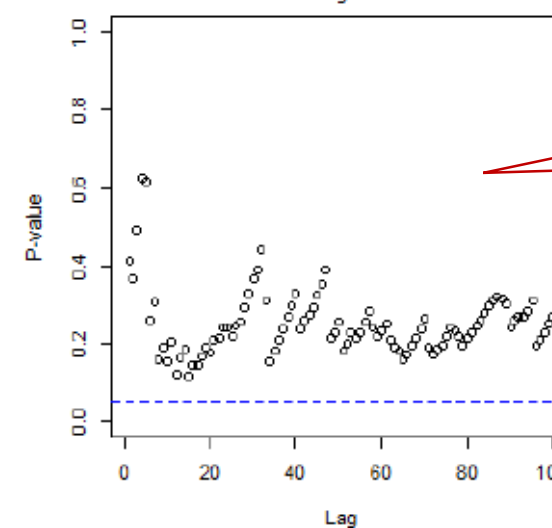
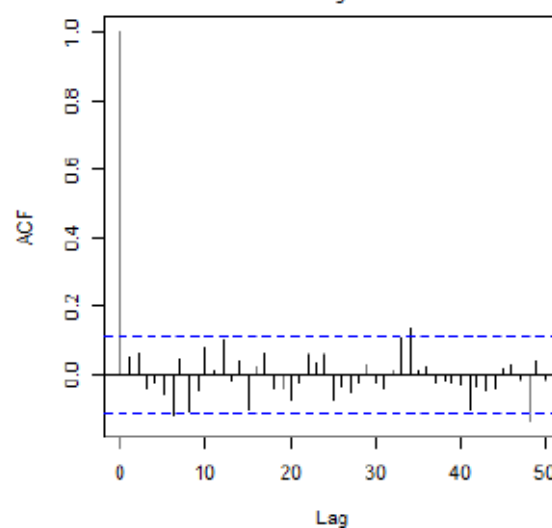
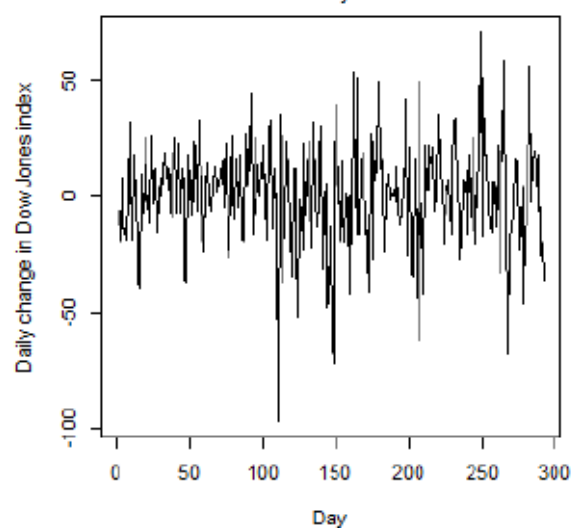
- Дифференцирование  $d$ -го порядка

$$y_1, \dots, y_T \rightarrow y'_2, \dots, y'_T \rightarrow \dots \rightarrow y^{(d-1)}_{d+1}, \dots, y^{(d-1)}_T$$
$$\Delta^d y_t = (1 - B)^d y_t$$

# Дифференцирование ряда



KPSS:  $p < 0.01$



KPSS:  $p > 0.1$

# Сезонное дифференцирование для удаления сезонности

- Переход к попарным разностям значений в соседних сезонах:

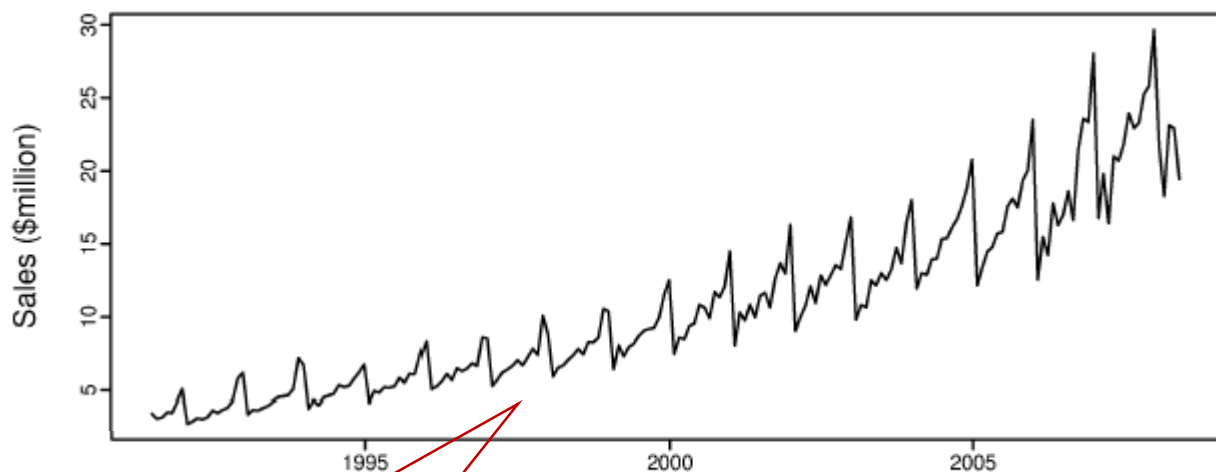
$$y_1, \dots, y_T \rightarrow y'_{s+1}, \dots, y'_T$$
$$y'_t = y_t - y_{t-s} = (1 - B^s)y_t$$

- Может обеспечить стационарность
- Может комбинироваться с обычным дифференцированием:  
 $(1 - B)(1 - B^s)y_t$  или  $(1 - B^s)(1 - B)y_t$ .

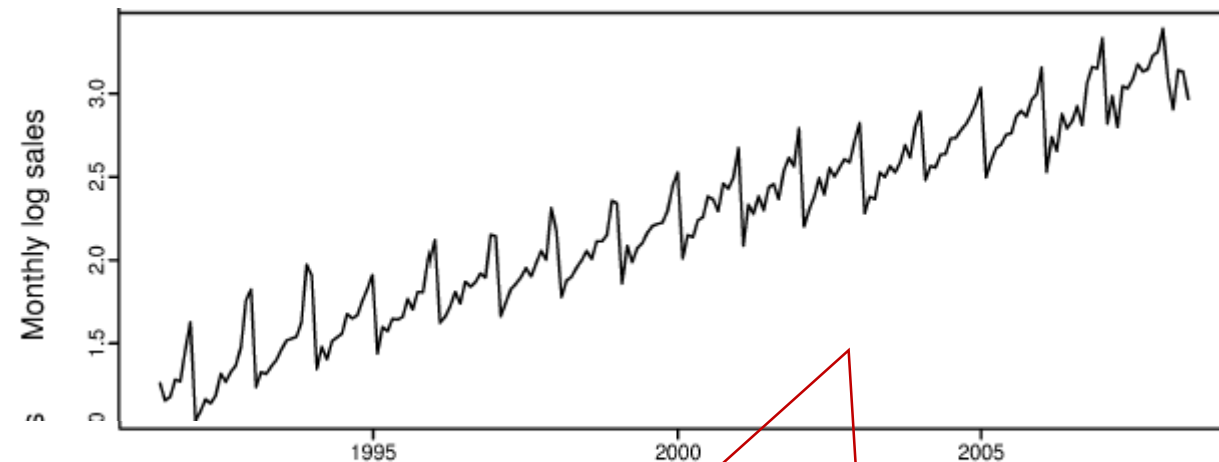
При ярко выраженной сезонности лучше начинать с сезонного дифференцирования



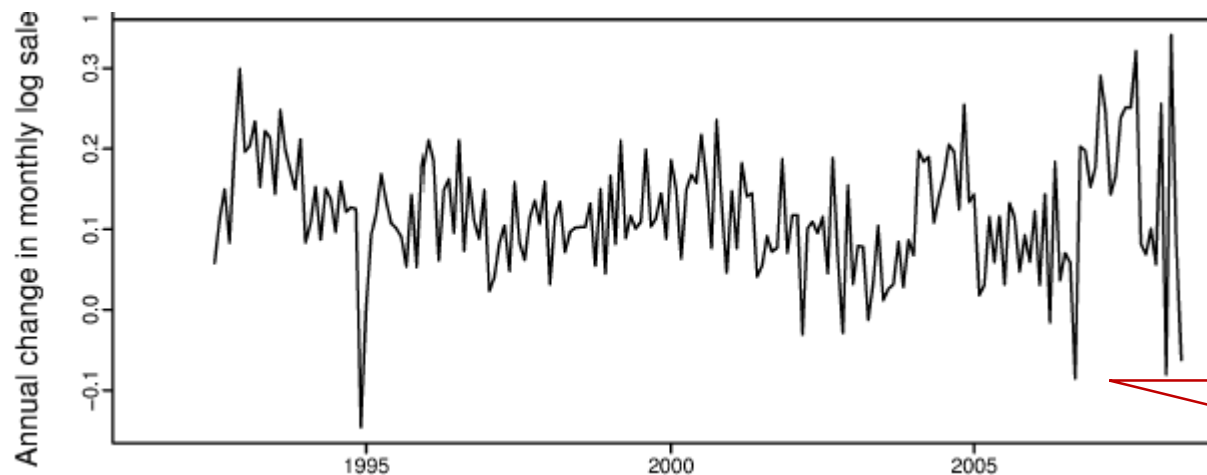
# Сезонное дифференцирование



Исходный ряд  
KPSS:  $p < 0.01$



Логарифмированный ряд  
KPSS:  $p < 0.01$



Ряд после сезонного  
дифференцирования  
KPSS:  $p > 0.1$

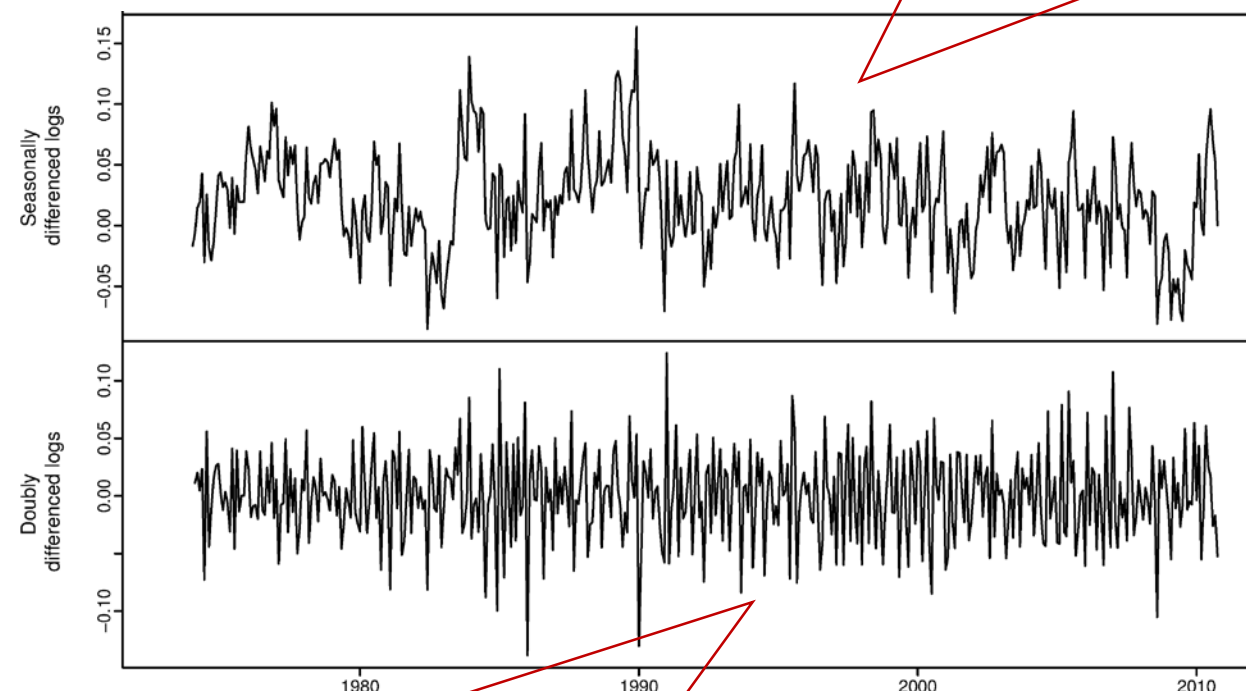
# Комбинированное дифференцирование

Исходный ряд,  
KPSS:  $p < 0.01$



Логарифмированный ряд,  
KPSS:  $p < 0.01$

Сез. дифф-й логарифмированный  
ряд, KPSS:  $p = 0.0355$



Дважды диф-й логарифмированный ряд,  
KPSS:  $p > 0.1$

# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- **Модель AR (авторегрессия ряда)**
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Построение прогноза
- Анализ остатков

# Авторегрессия $AR(p)$

- $AR(p)$ -процесс, авторегрессионный процесс порядка  $p$ :

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

- $y_t$  – стационарный ряд с нулевым средним
- $\phi_1, \dots, \phi_p$  – коэффициенты, параметры модели ( $\phi_p \neq 0$ )
- $\varepsilon_t$  – гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$

# Авторегрессия $AR(p)$

- $AR(p)$ -процесс, авторегрессионный процесс порядка  $p$ :
$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$
  - $y_t$  – стационарный ряд со средним  $\mu$
  - $\phi_1, \dots, \phi_p$  – коэффициенты, параметры модели ( $\phi_p \neq 0$ )
  - $\varepsilon_t$  – гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$
  - $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$
- Запись посредством оператора обратного сдвига:
$$\phi(B)y_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)y_t = \varepsilon_t, \text{ где } By_t = y_{t-1}$$
- Линейная комбинация  $p$  подряд идущих элементов ряда дает белый шум

## Авторегрессия AR(1) и AR(2)

- Ряд  $AR(p)$  стационарный, если выполняются ограничения на коэффициенты:
  - $AR(1): -1 < \phi_1 < 1$
  - $AR(2): -1 < \phi_2 < 1, \phi_1 + \phi_2 < 1, \phi_2 - \phi_1 < 1$
  - $AR(\dots)$ : более сложные ограничения

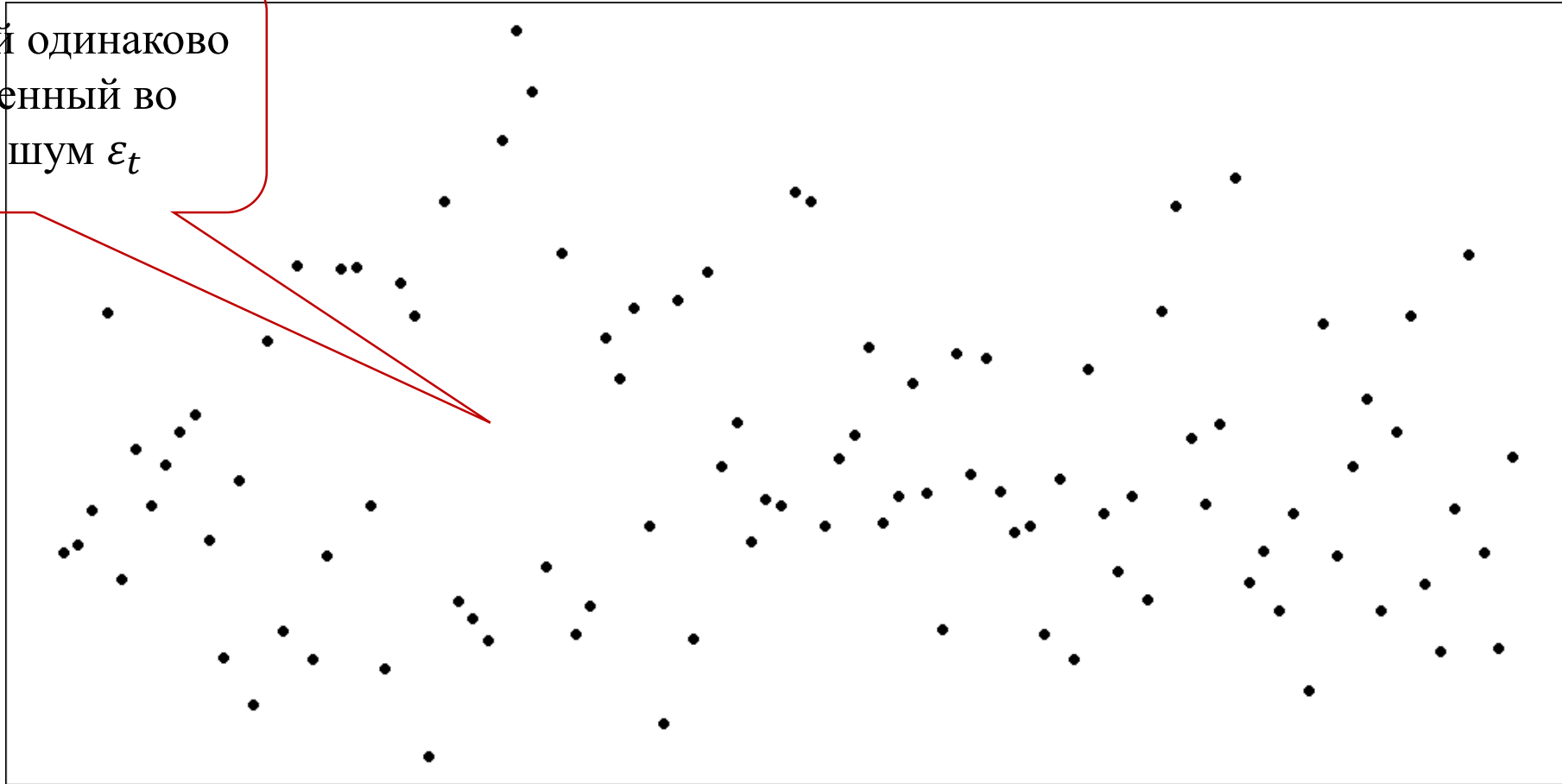
# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- **Модель MA (скользящее среднее ряда)**
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Построение прогноза
- Анализ остатков



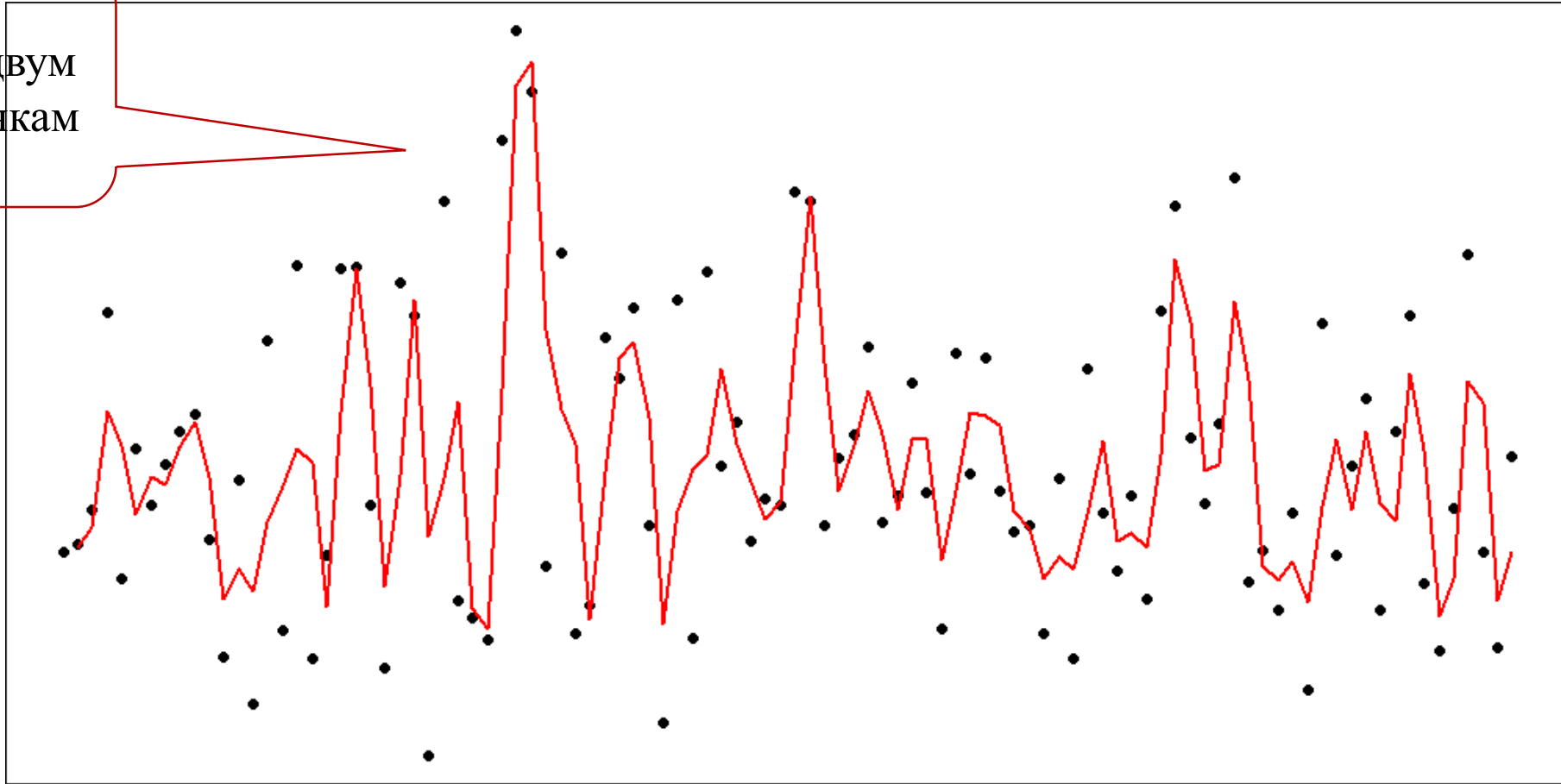
# Скользящее среднее

Независимый одинаково  
распределенный во  
времени шум  $\varepsilon_t$



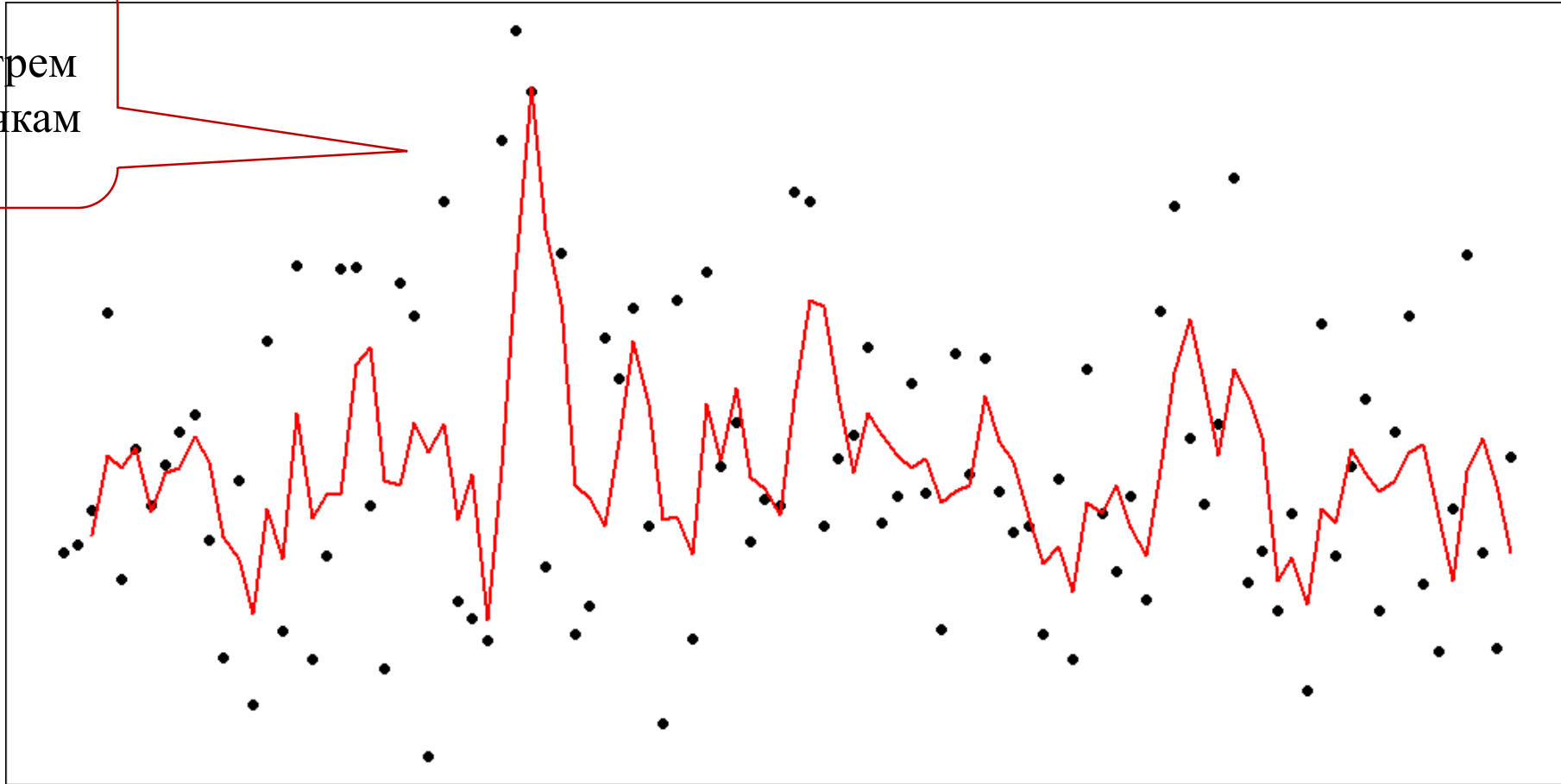
# Скользящее среднее

Среднее по двум  
соседним точкам



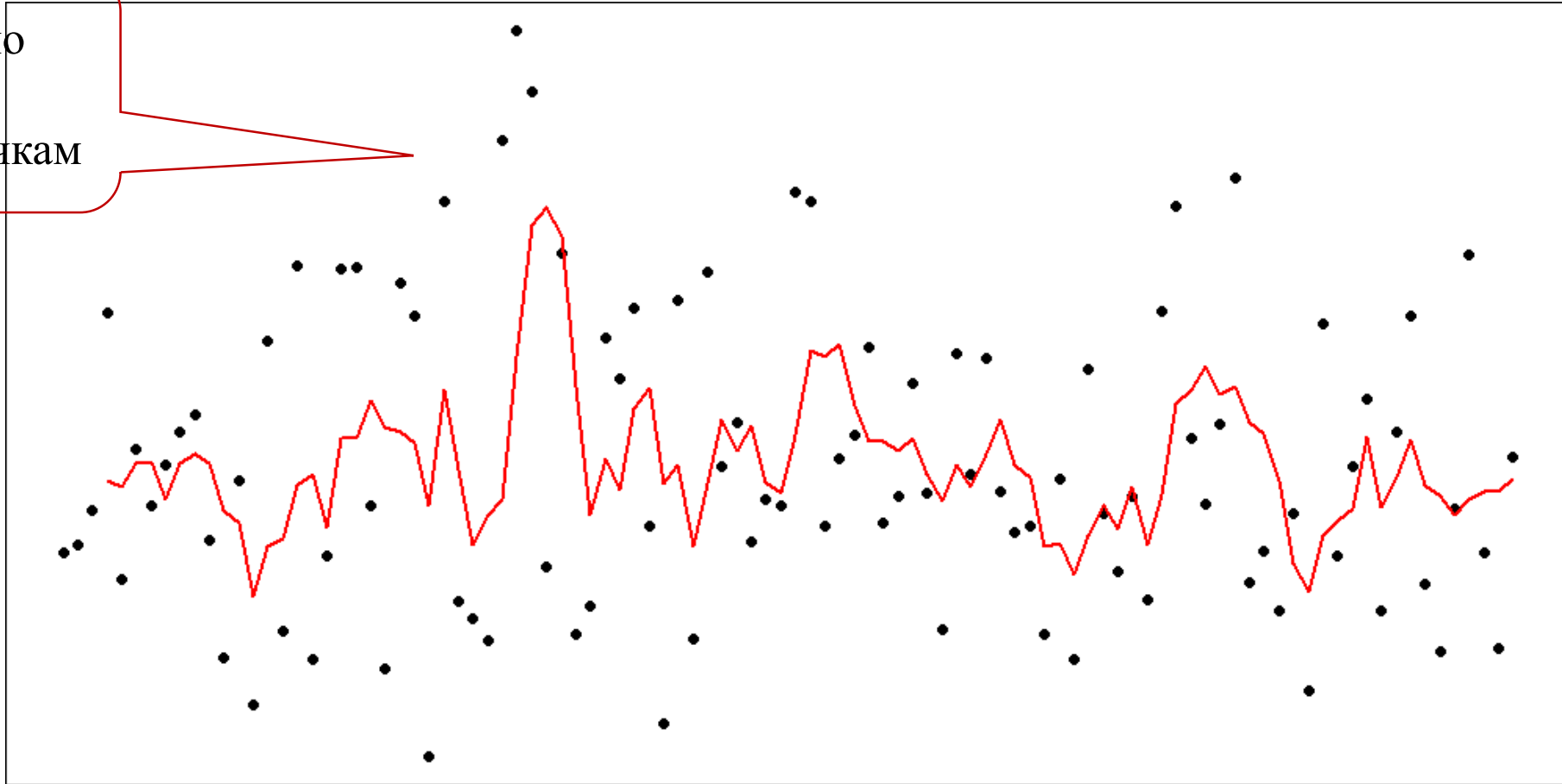
# Скользящее среднее

Среднее по трем соседним точкам



# Скользящее среднее

Среднее по  
четырем  
соседним точкам



# Скользящее среднее $MA(q)$

- $MA(\textcolor{red}{q})$ :

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_{\textcolor{red}{q}} \varepsilon_{t-\textcolor{red}{q}}$$

- $y_t$  – стационарный ряд с нулевым средним
- $\theta_1, \dots, \theta_{\textcolor{red}{q}}$  – коэффициенты, параметры модели ( $\theta_{\textcolor{red}{q}} \neq 0$ )
- $\varepsilon_t$  – гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$
- Запись посредством оператора обратного сдвига:  
 $y_t = \theta(B)\varepsilon_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_{\textcolor{red}{q}} B^{\textcolor{red}{q}})\varepsilon_t$ , где  $B y_t = y_{t-1}$
- Линейная комбинация  $q$  подряд идущих компонент белого шума дает элемент ряда

## Скользящее среднее $MA(1)$ и $MA(2)$

- Модель  $MA(p)$  обратима (допускать настройку под данные), если выполняются ограничения на коэффициенты:
  - $MA(1): -1 < \theta_1 < 1$
  - $MA(2): -1 < \theta_2 < 1, \theta_1 + \theta_2 > -1, \phi_2 - \phi_1 < 1$
  - $MA(\dots)$ : более сложные ограничения

# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- **Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA**
- Подбор параметров моделей
- Построение прогноза
- Анализ остатков



# Модель $ARMA(p, q) = AR(p) + MA(q)$ (AutoRegressive Moving Average)

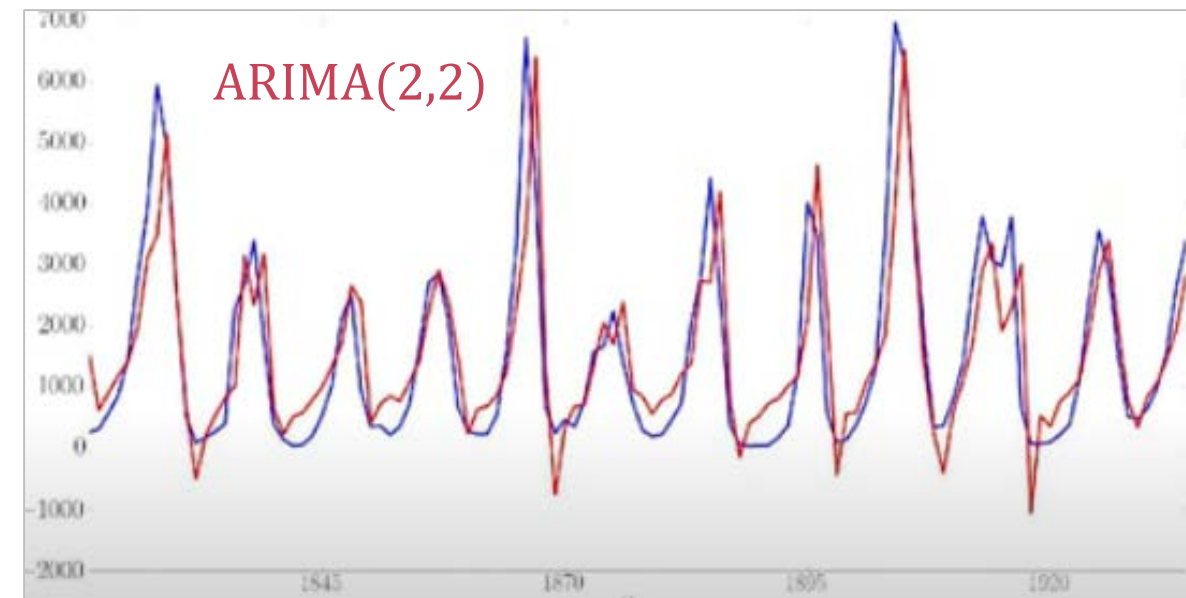
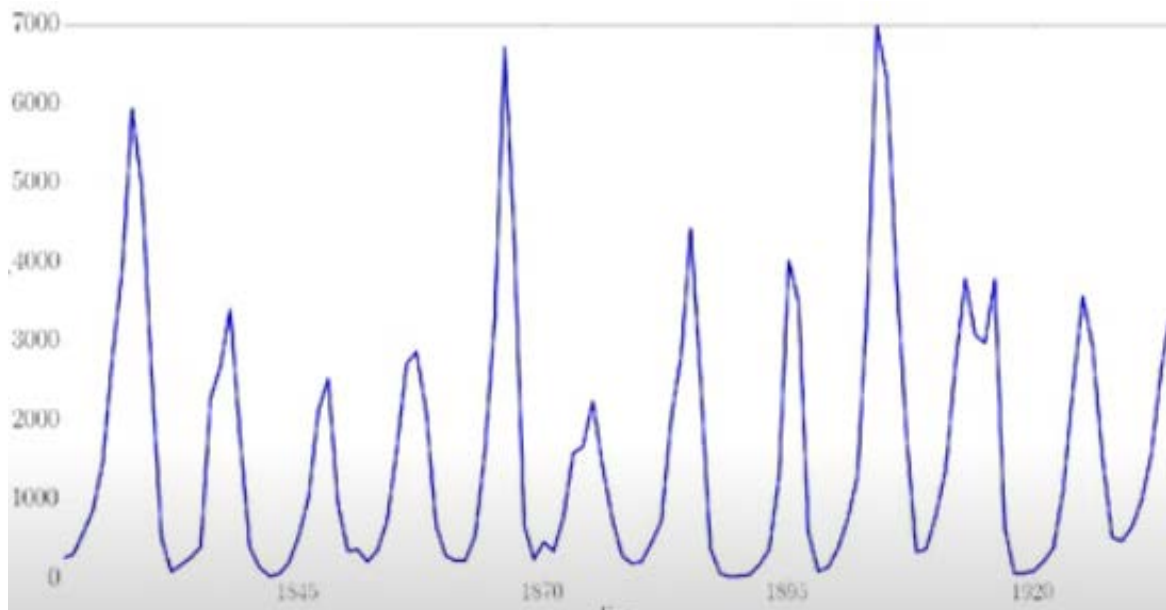
- $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$ 
  - $y_t$  – стационарный ряд с нулевым средним
  - $\phi_1, \dots, \phi_p$  и  $\theta_1, \dots, \theta_q$  – параметры модели ( $\theta_q \neq 0, \phi_p \neq 0$ )
  - $\varepsilon_t$  – гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$
- Вид модели, если среднее равно  $\mu$ :
$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$
$$\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$$
- Запись посредством оператора обратного сдвига:  $\phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t$
- Теорема Волда: любой стационарный ряд может быть аппроксимирован моделью  $ARMA(p, q)$  с любой точностью



Х.О.А. Волд  
(H.O.A. Wold)  
1908-1992

# Модель $ARMA(p, q)$ : пример

Поголовье рыси в Канаде,  
ежегодно



# Модель ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average)

- Ряд описывается моделью  $ARIMA(p, d, q)$ , если его дифференцирование  $d$ -го порядка

$$\Delta^d y_t = (1 - B)^d y_t$$

описывается моделью  $ARMA(p, q)$

$$\phi(B)\Delta^d y_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

## Модель Seasonal ARMA: $\text{SARMA}(p, q) \times (P, Q)_S = \text{ARMA}(p, q) \times (P, Q)_S$

- В ряд, имеющий сезонный период длины  $S$ , описываемый моделью  $\text{ARMA}(p, q)$ 

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$
 добавлены  $P$  компонент авторегрессии
 
$$+ \phi_S y_{t-S} + \phi_{2S} y_{t-2S} + \dots + \phi_{PS} y_{t-PS}$$
 и  $Q$  компонент скользящего среднего
 
$$+ \theta_S y_{t-S} + \theta_{2S} y_{t-2S} + \dots + \theta_{QS} y_{t-QS}$$
- $\text{ARMA}(p, q) \times (P, Q)_S$ :  $\Phi_P(B^S)\phi(B)y_t = \alpha + \Theta_Q(B^S)\theta(B)y_t$ , где
 
$$\Phi_P(B^S) = 1 - \phi_1 B^S - \phi_2 B^{2S} - \dots - \phi_P B^{PS}$$

$$\Theta_Q(B^S) = 1 + \theta_1(B^S) + \theta_2(B^{2S}) + \dots + \theta_Q(B^{QS})$$

## Модель Seasonal Integrated ARMA: SARIMA( $p, d, q$ ) $\times$ ( $P, D, Q$ )

- SARIMA( $p, d, q$ )  $\times$  ( $P, D, Q$ ) – это модель SARMA( $p, q$ )  $\times$  ( $P, Q$ ) <sub>$S$</sub>  для ряда, к которому применили дифференцирование  $d$ -го порядка и сезонное дифференцирование  $D$ -го порядка
- $\Phi_P(B^S)\phi(B)\Delta_S^D\Delta^d y_t = \alpha + \Theta_Q(B^S)\theta(B)y_t$ , где
$$\Phi_P(B^S) = 1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2S} - \dots - \Phi_P B^{PS}$$
$$\Theta_Q(B^S) = 1 + \Theta_1(B^S) + \Theta_2(B^{2S}) + \dots + \Theta_Q(B^{QS})$$

# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- **Подбор параметров моделей**
- Построение прогноза
- Анализ остатков





# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- **Построение прогноза**
- Анализ остатков

# Прогнозирование

- Модель

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$$

- Замена  $t$  на  $T + 1$

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \varepsilon_{T+1} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$

# Прогнозирование

- Модель

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$$

- Замена  $t$  на  $T + 1$

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_{T+1} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$

- Замена будущих ошибок на нули

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \mathbf{0} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$



# Прогнозирование

- Модель

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$$

- Замена  $t$  на  $T + 1$

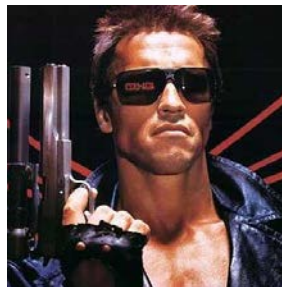
$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \varepsilon_{T+1} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$

- Замена будущих ошибок на нули

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \hat{\theta}_1 \mathbf{\varepsilon}_T + \dots + \hat{\theta}_q \mathbf{\varepsilon}_{T+1-q}$$

- Замена прошлых ошибок на остатки

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_T + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T+1-q}$$



# Прогнозирование

- Модель

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$$

- Замена  $t$  на  $T + 1$

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \varepsilon_{T+1} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$

- Замена будущих ошибок на нули

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$

- Замена прошлых ошибок на остатки

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_T + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T+1-q}$$

- Применение прогнозного значения в будущих прогнозах

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+2|T} &= \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 \mathbf{y}_{T+1} + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+2-p} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_{T+1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T+2-q} \\ \hat{y}_{T+2|T} &= \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 \hat{y}_{T+1|T} + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+2-p} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_{T+1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T+2-q} \end{aligned}$$

# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Построение прогноза
- **Анализ остатков**



# Литература

1. Hyndman R.J., Athanasopoulos G. Forecasting: principles and practice (2nd edition). OTexts: Melbourne, Australia, 2018.  
<https://otexts.com/fpp2/>
2. Hyndman R.J., Athanasopoulos G. Forecasting: principles and practice (3rd edition). OTexts: Melbourne, Australia, 2021.  
<https://otexts.com/fpp3/>