

# Прогнозирование временного ряда



*Расскажите нам, что ждет нас в будущем,  
чтобы мы могли знать, что вы – боги.*

*Исайя 41:23*

# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Анализ остатков
- Построение прогноза

# Постановка задачи

- Дан временной ряд  $y_1, \dots, y_T, \dots, y_t \in \mathbb{R}$  (измерения выполнены через равные промежутки)
- Найти функцию прогнозирования  $f_T: y_{T+h} \approx f(y_T, \dots, y_1, h) \equiv \hat{y}_{T+h|T}$   
отсрочка прогноза  $h \in \{1, \dots, H\}$ ,  $H$  – горизонт прогнозирования



# Прогноз vs. другие задачи машинного обучения

Данные	Задачи	
	Поиск шаблонов, классификация, кластеризация, поиск аномалий	Прогноз временных рядов
Прецеденты обучающей выборки	значения независимы	будущие значения зависят от прошлых

# Предсказательный интервал (Prediction interval)

- Оценка интервала, в который будущее значение попадет с вероятностью не меньше заданной
- Наводнение в Гранд-Форкс, Сев. Дакота, США, апрель 1997 г.: 50000 жителей эвакуировано, 75% зданий повреждено
  - Прогноз высоты паводка: 49 футов (15 м)
  - Построенная защитная дамба: 51 фут (15.5 м)
  - Истинная высота паводка: 54 фута (16.5 м)
  - Точность прогнозов NWS (Нац. метеослужба) на исторических данных:  $\pm 9$  футов (2.7 м)
  - Дамба выше на 7 футов (2 м) помогла бы избежать наводнения



# Содержание

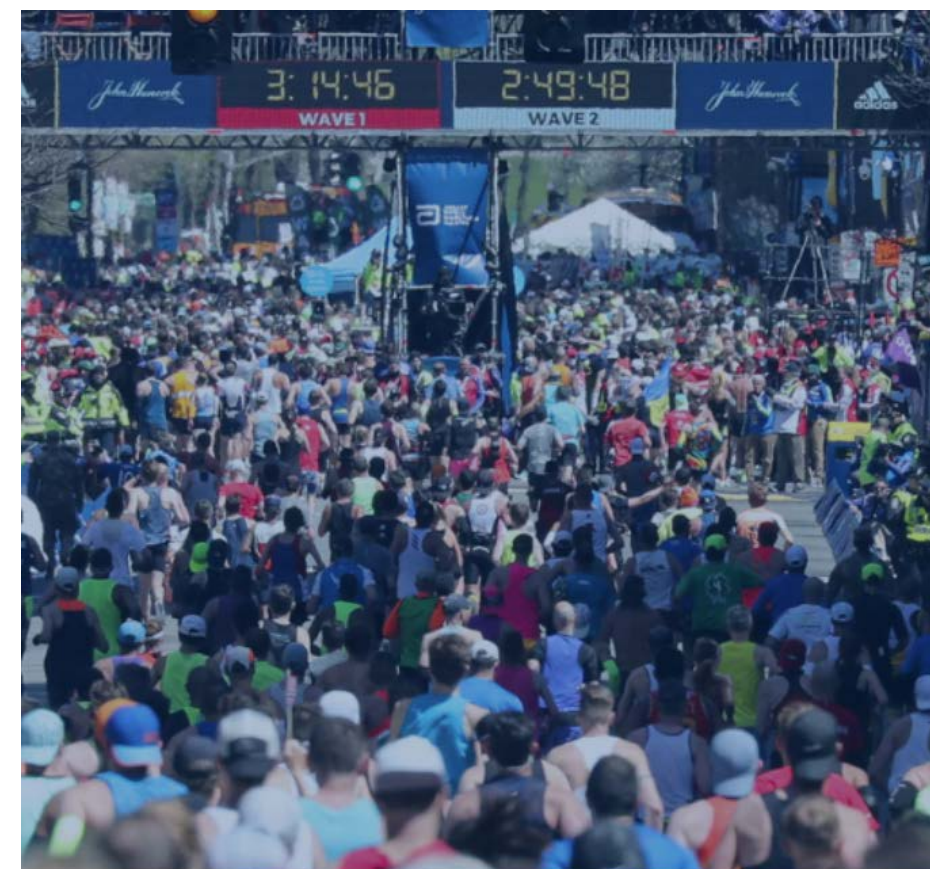
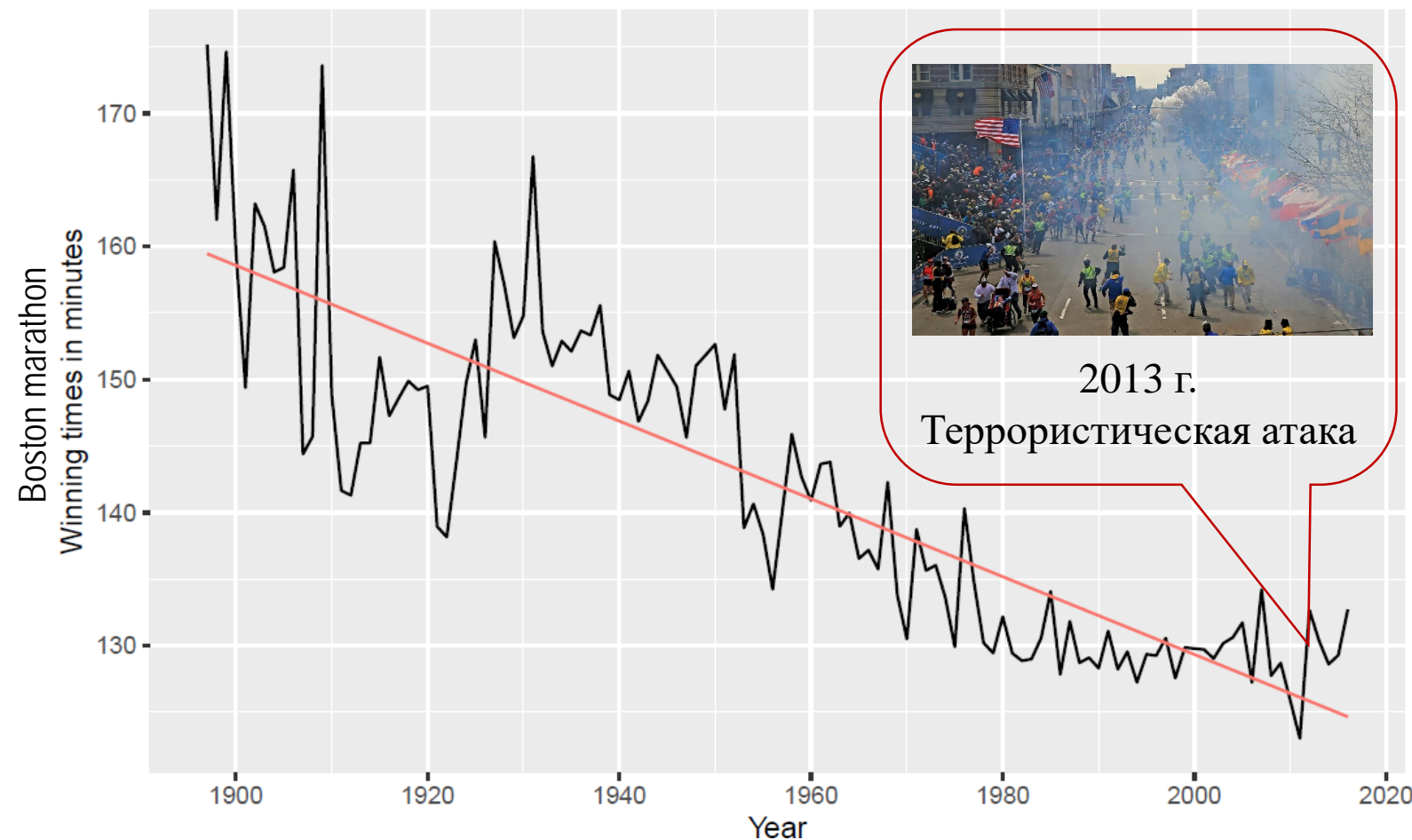
- Постановка задачи прогнозирования
- **Компоненты временного ряда**
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Анализ остатков
- Построение прогноза

# Компоненты временного ряда

Компонент	Определение	Пример ряда
Тренд	плавное долгосрочное изменение уровня ряда	цена на недвижимость в регионе (повышение)
Сезонность	циклические изменения уровня ряда с постоянным периодом	средняя месячная зарплата на предприятии (годовая сезонность)
Цикл	изменения уровня ряда с переменным периодом	количество солнечных пятен (период солнечной активности – от 5 до 7 лет)
Ошибка	непрогнозируемая случайная компонента ряда	выбросы, аномалии



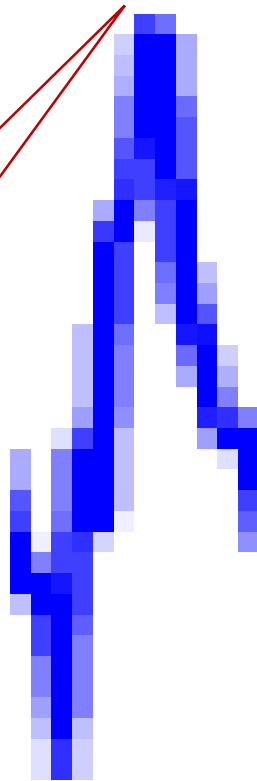
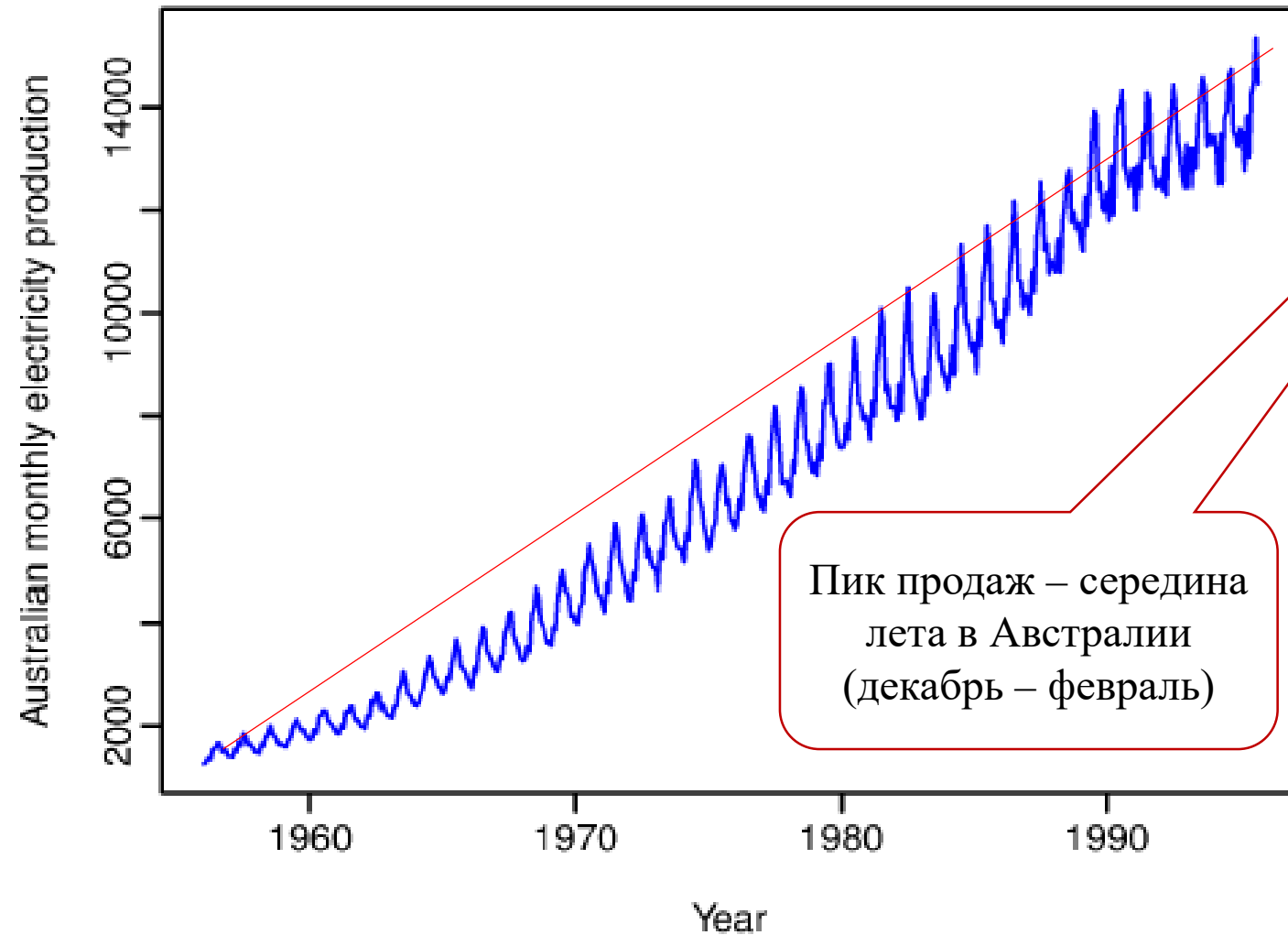
# Пример: тренд без сезонности и цикла



\* The Boston Marathon Results. URL: <https://www.baa.org/sites/default/files/2019-07/BostonMarathonHistoricalResults.pdf>

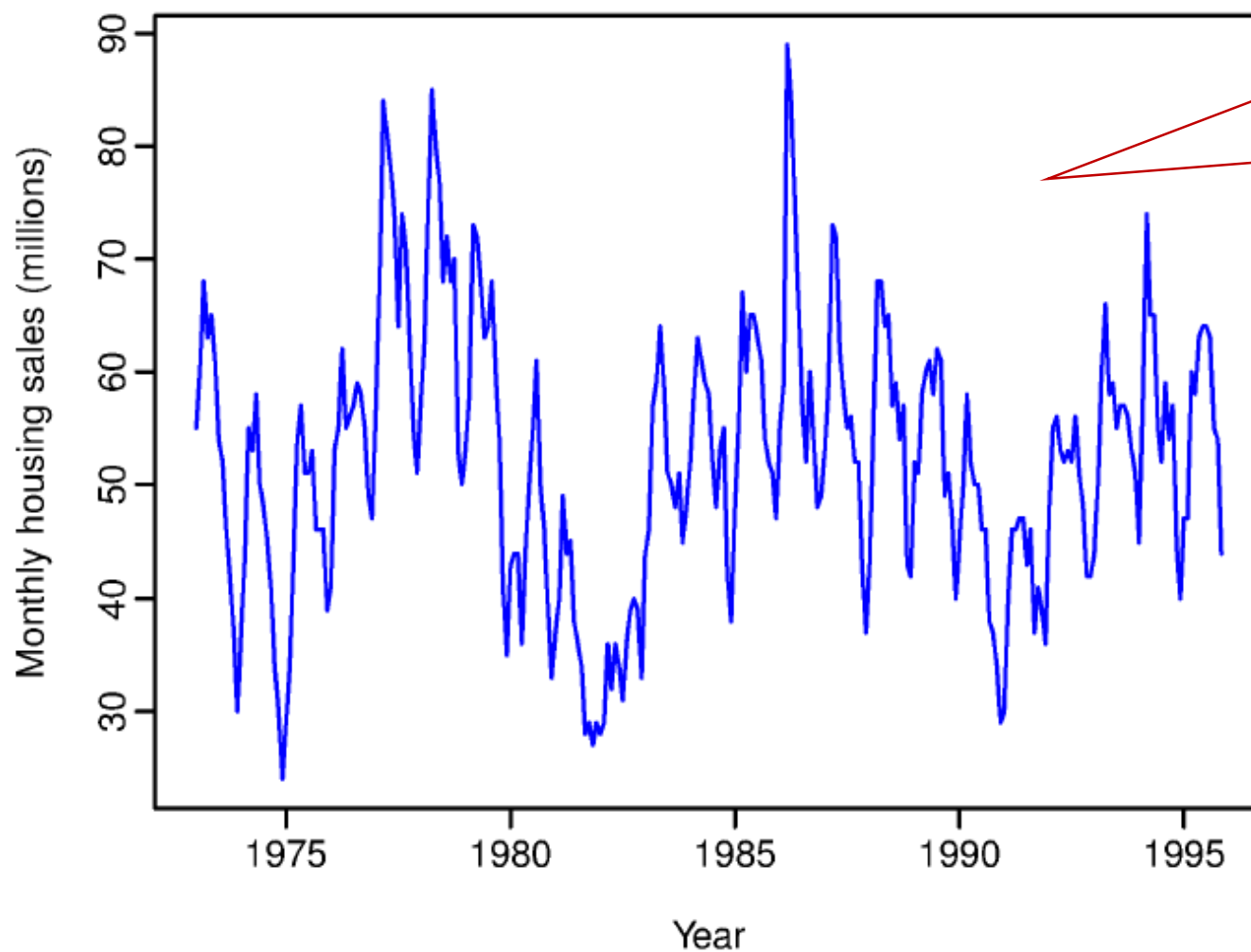


# Пример: тренд и сезонность



12 месяцев

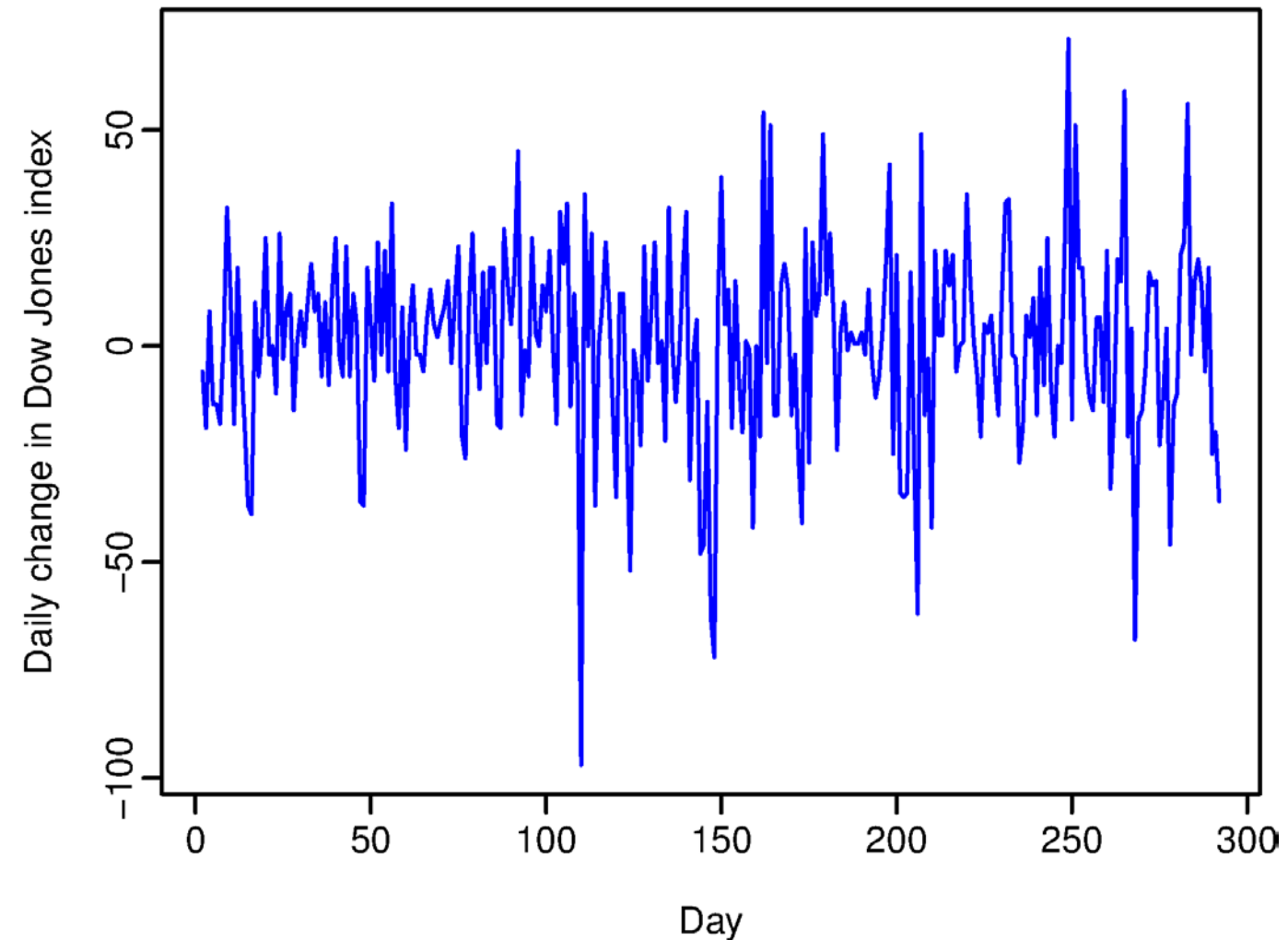
# Пример: сезонность, циклы



Годовая сезонность  
(ежегодные пики),  
недетерминированные  
экономические спады



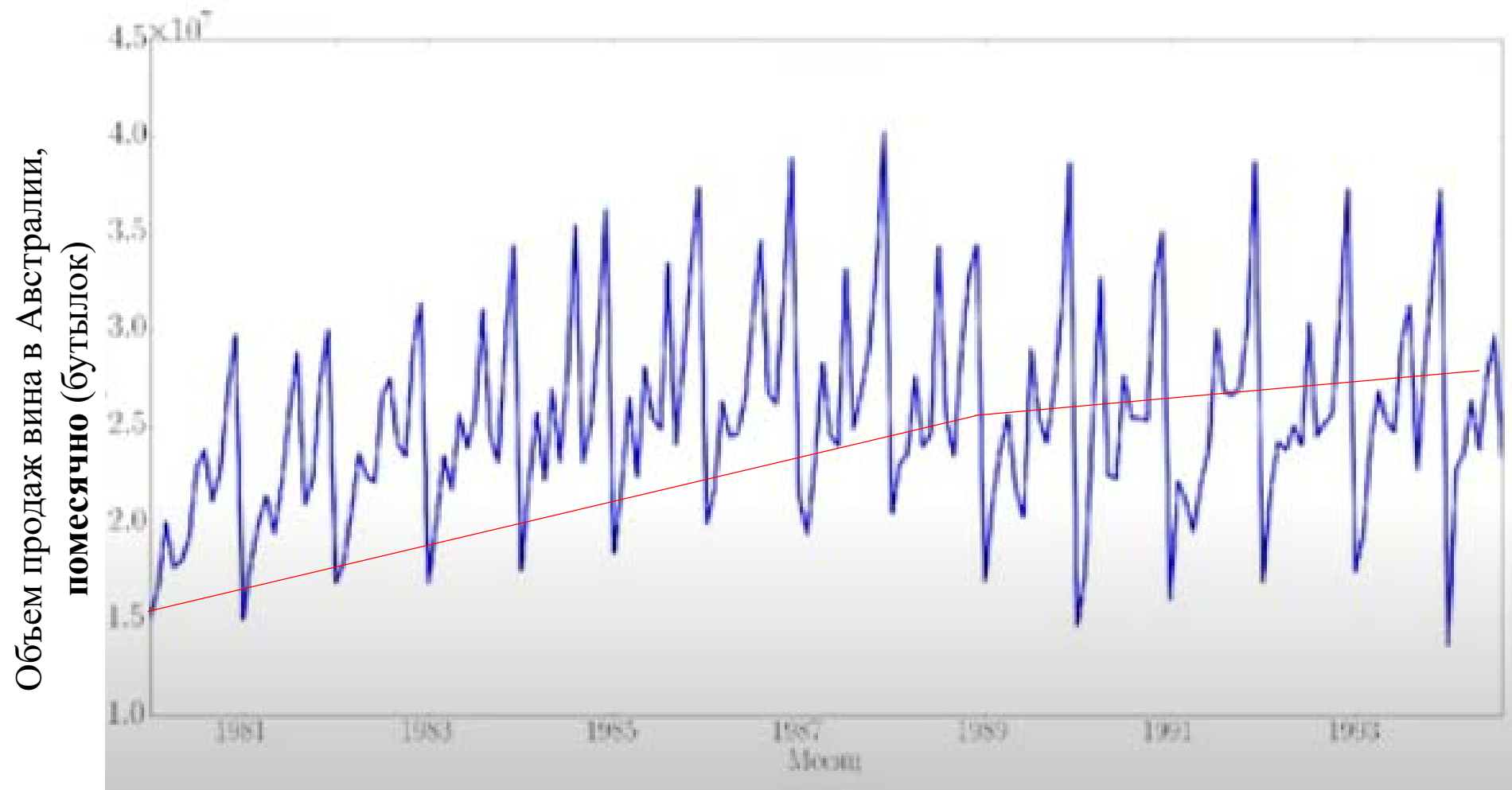
# Пример: отсутствие тренда, сезонности, циклов



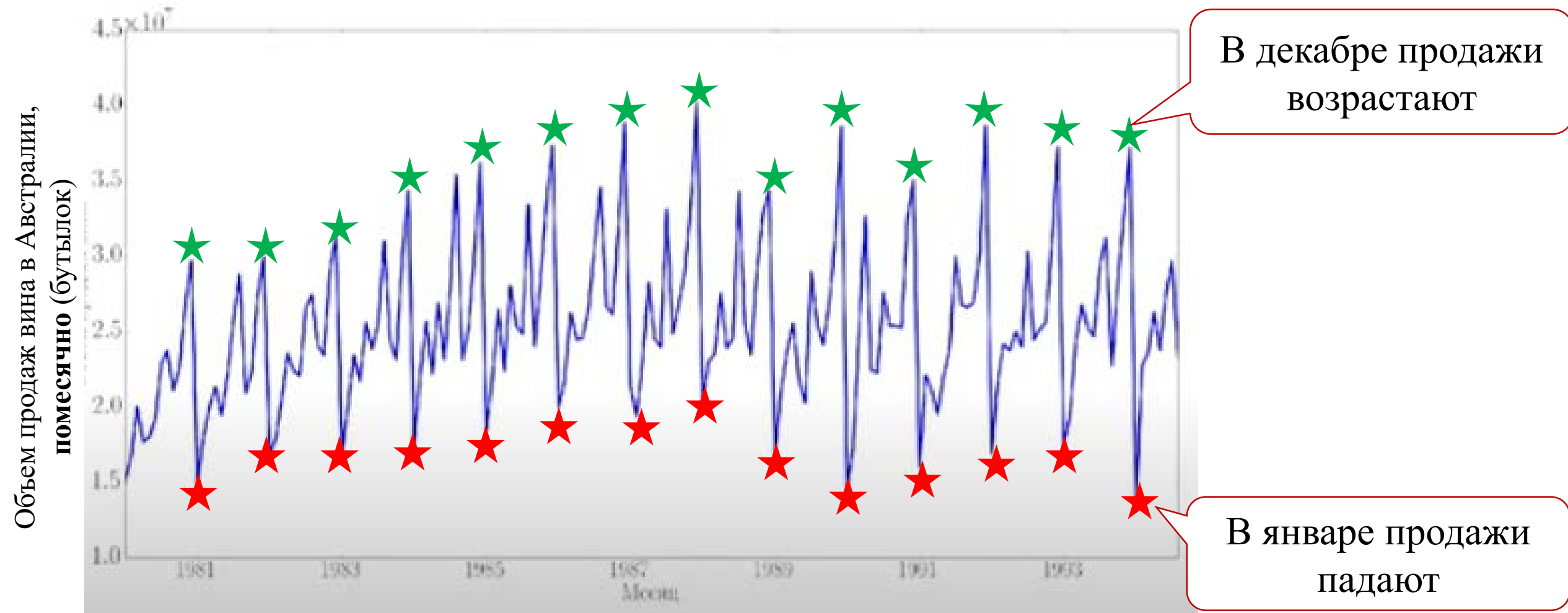
# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- **Автокорреляция временного ряда**
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Анализ остатков
- Построение прогноза

# Автокорреляция временного ряда



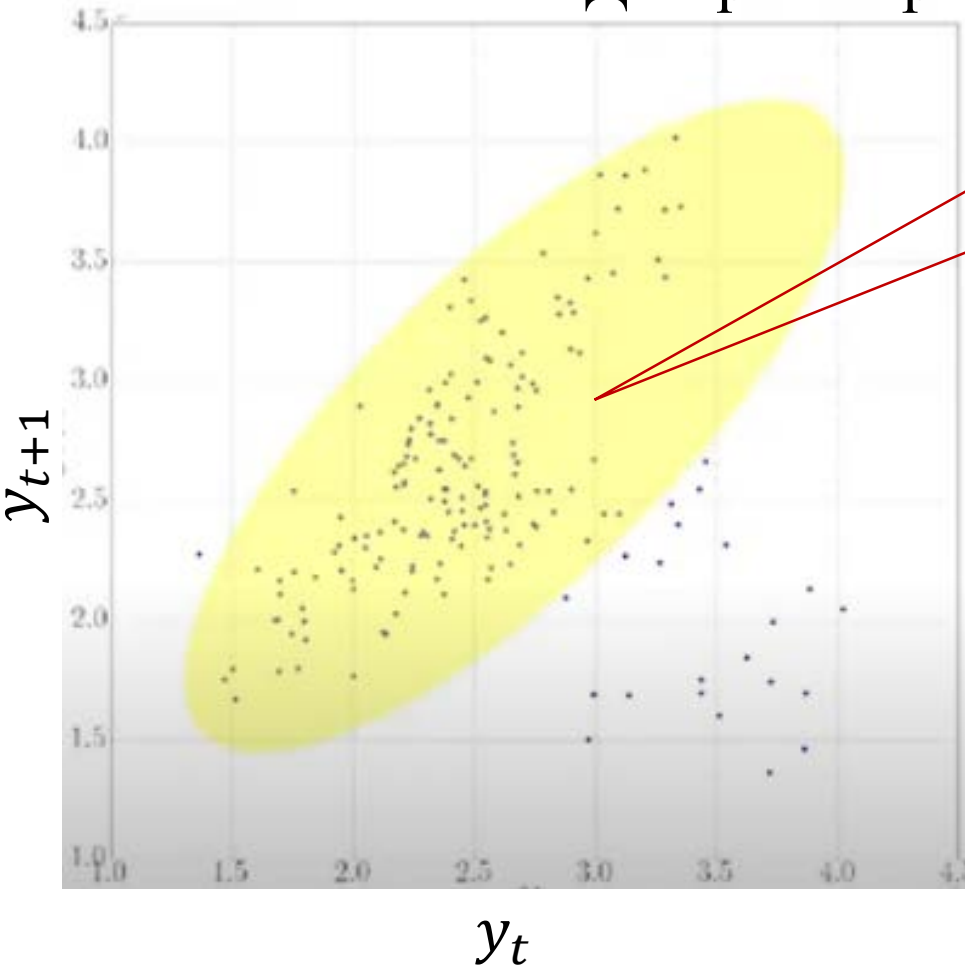
# Автокорреляция временного ряда





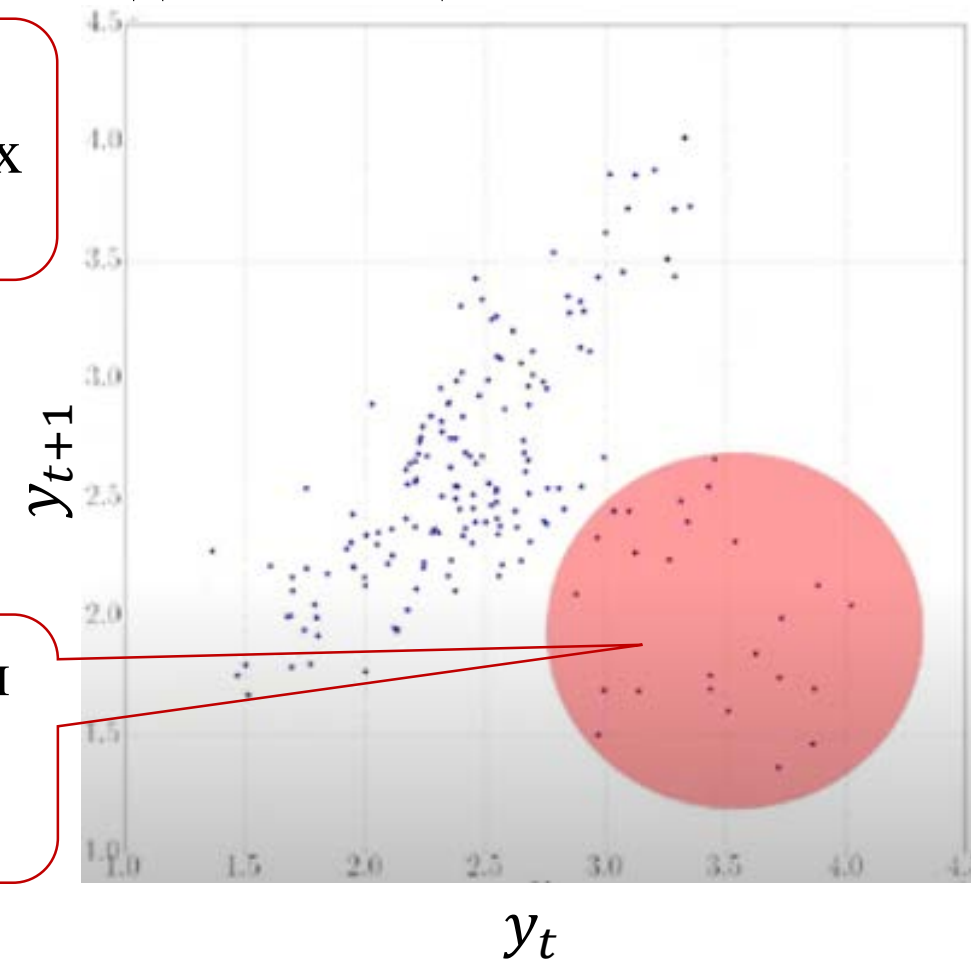
# Автокорреляция временного ряда

Диаграмма рассеяния для продаж в соседних месяцах



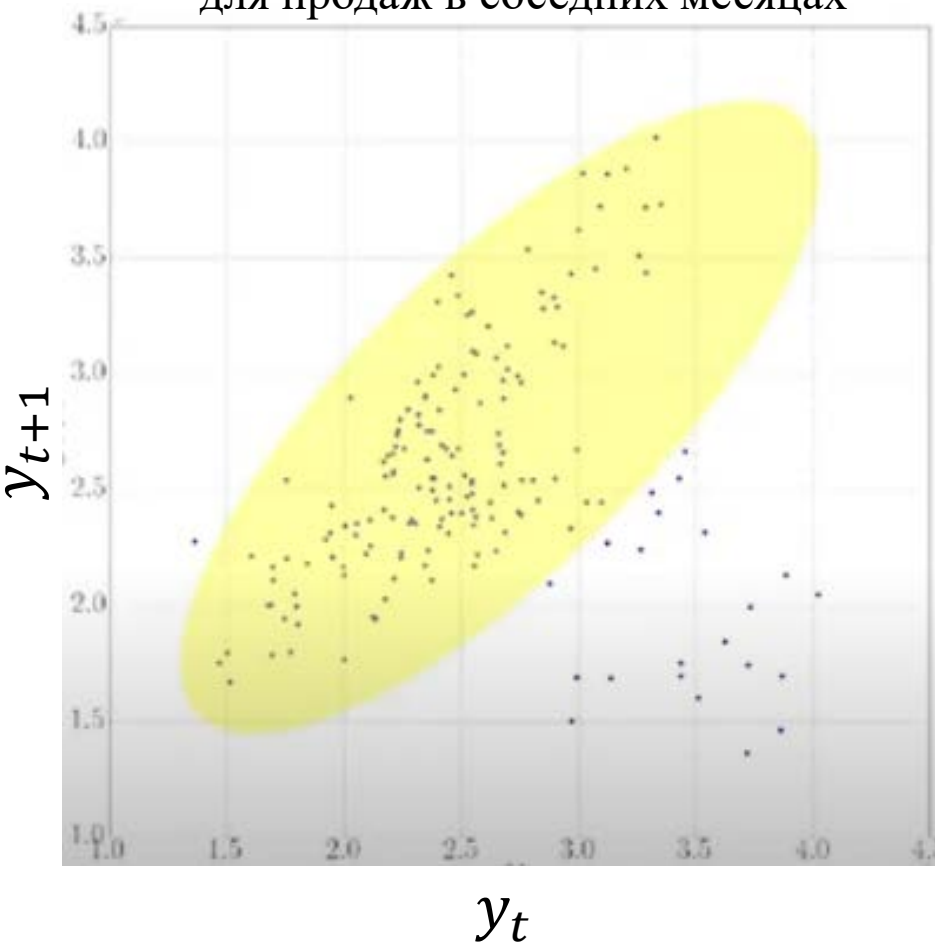
В феврале-ноябре  
продажи в соседних  
месяцах похожи

В декабре продажи  
возрастают,  
в январе – падают



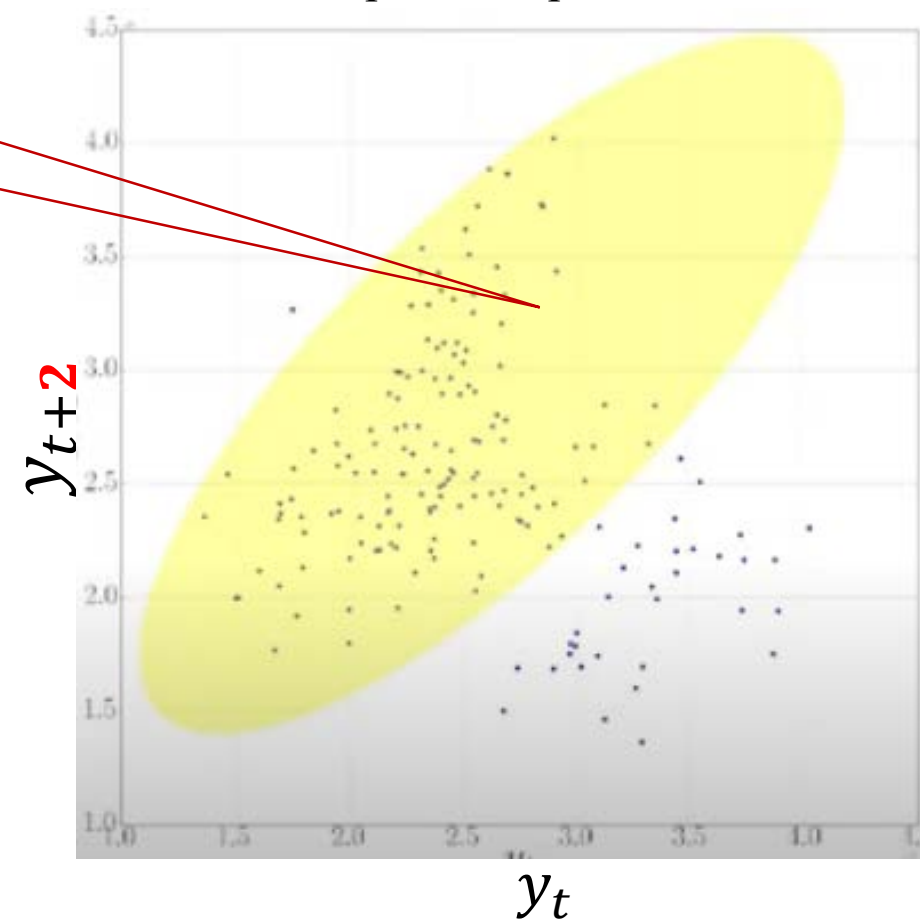
# Автокорреляция временного ряда

Диаграмма рассеяния  
для продаж в соседних месяцах



Кластер  
укрупняется

Диаграмма рассеяния  
для продаж через месяц



# Автокорреляция временного ряда

Диаграмма рассеяния  
для продаж в соседних месяцах

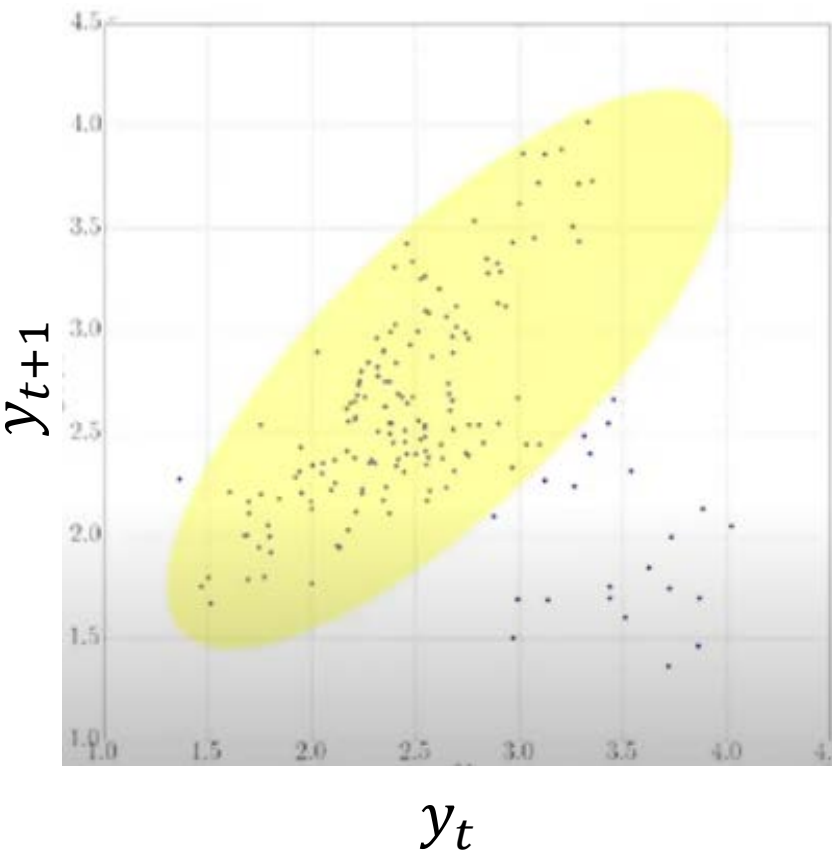


Диаграмма рассеяния  
для продаж через месяц

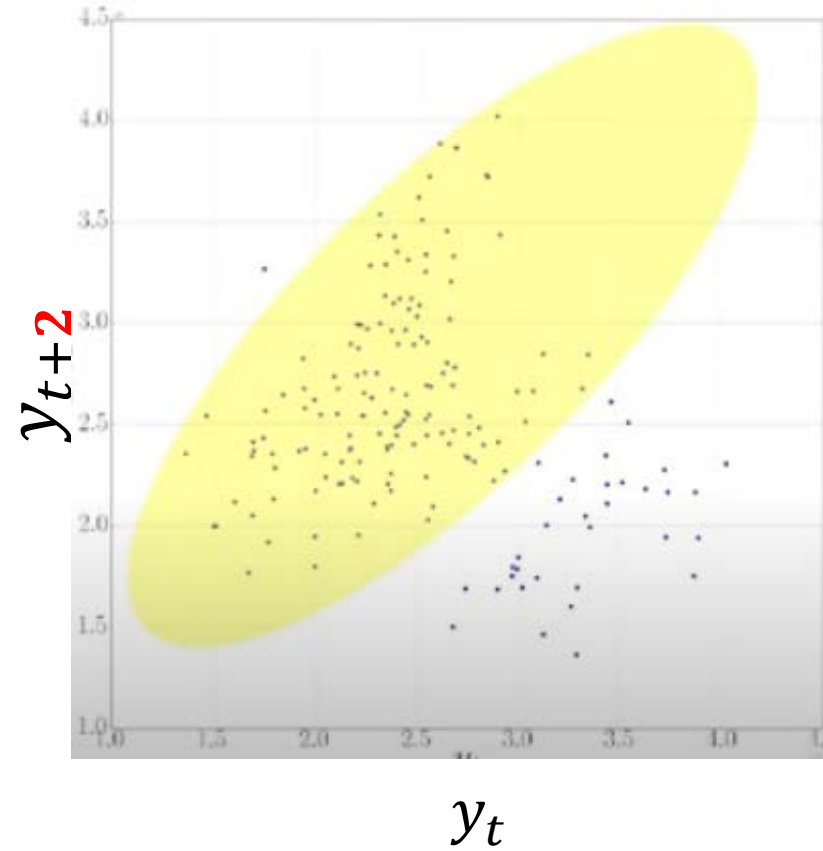
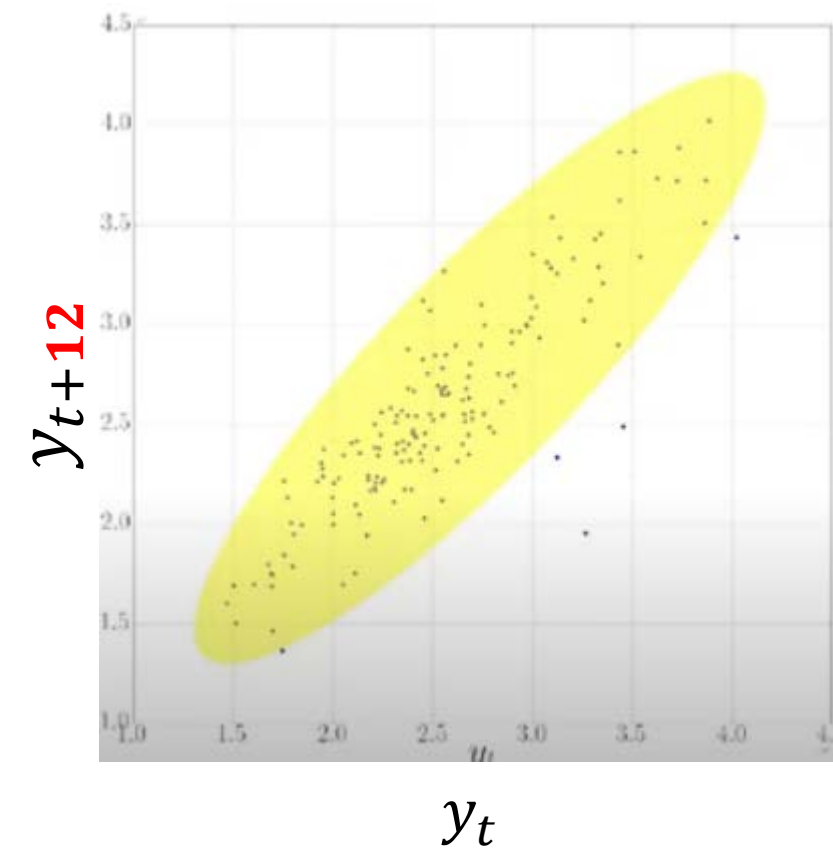
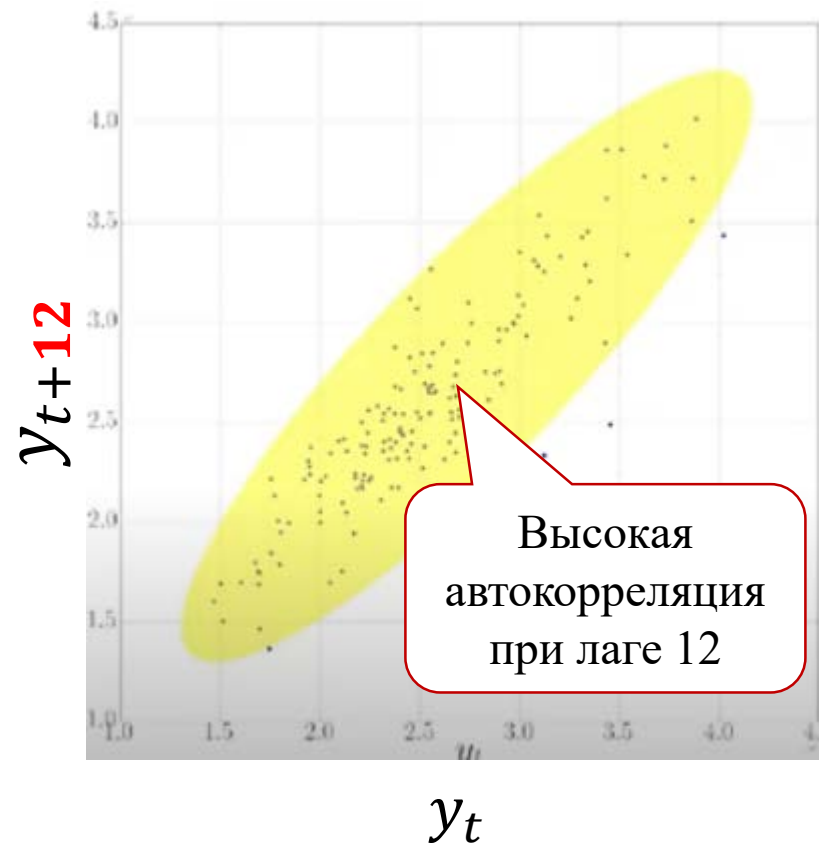


Диаграмма рассеяния  
для продаж через год (12 мес.)



# Автокорреляция временного ряда

Диаграмма рассеяния  
для продаж через год (12 мес.)



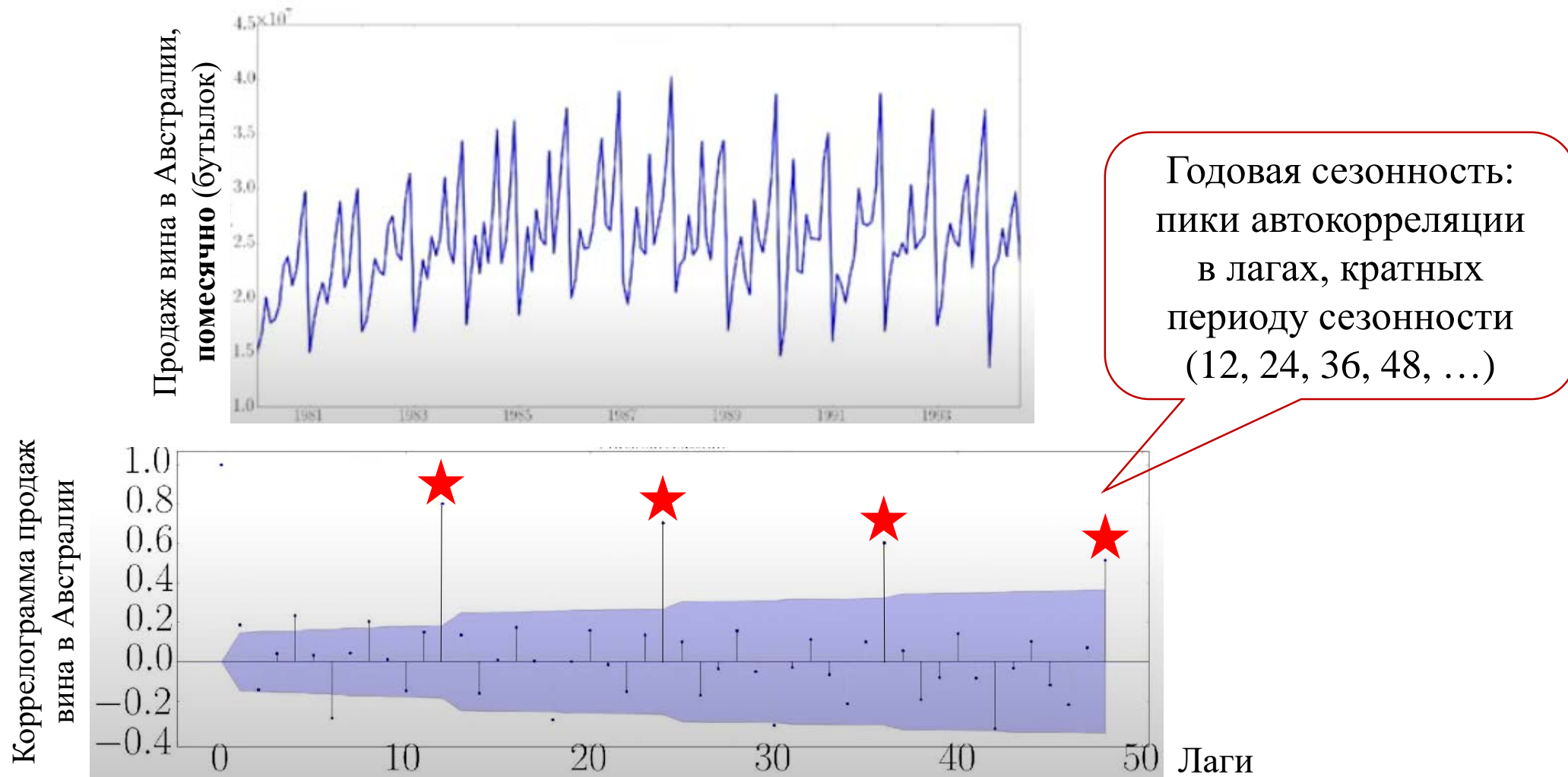
- Функция автокорреляции вычисляет корреляцию Пирсона между рядом и его копией со значениями, отстоящими на заданный лаг:
$$ACF(lag) = corr(y_t, y_{t+lag})$$
- Функция частичной (частной) автокорреляции вычисляет корреляцию Пирсона между рядом и его копией со значениями, отстоящими на заданный лаг, дополнительно удаляя линейную зависимость между сдвинутыми рядами

# Вычисление автокорреляции

•  $Y = [2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]$

$lag$	$Y_t$	$Y_{t+lag}$	$ACF(lag)$
0	[2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]	[2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]	1
1	[2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, <del>10</del> ]	[ <del>2</del> , 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]	0.331354
2	[2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, 9, <del>5</del> , <del>10</del> ]	[ <del>2</del> , <del>7</del> , 3, 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]	0.158205
3	[2, 7, 3, 1, 0, 6, 8, <del>9</del> , <del>5</del> , <del>10</del> ]	[ <del>2</del> , <del>7</del> , <del>3</del> , 1, 0, 6, 8, 9, 5, 10]	-0.171137

# Коррелограмма (график функции автокорреляции)

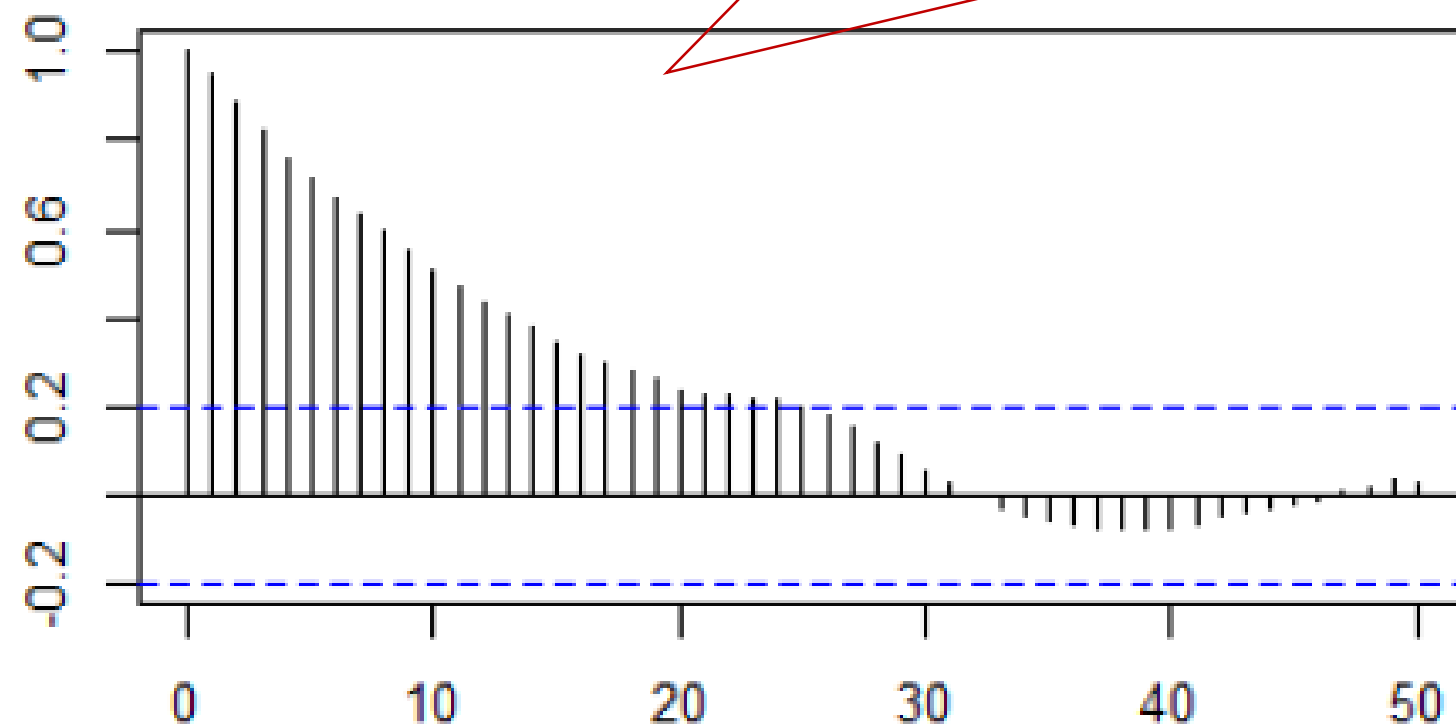
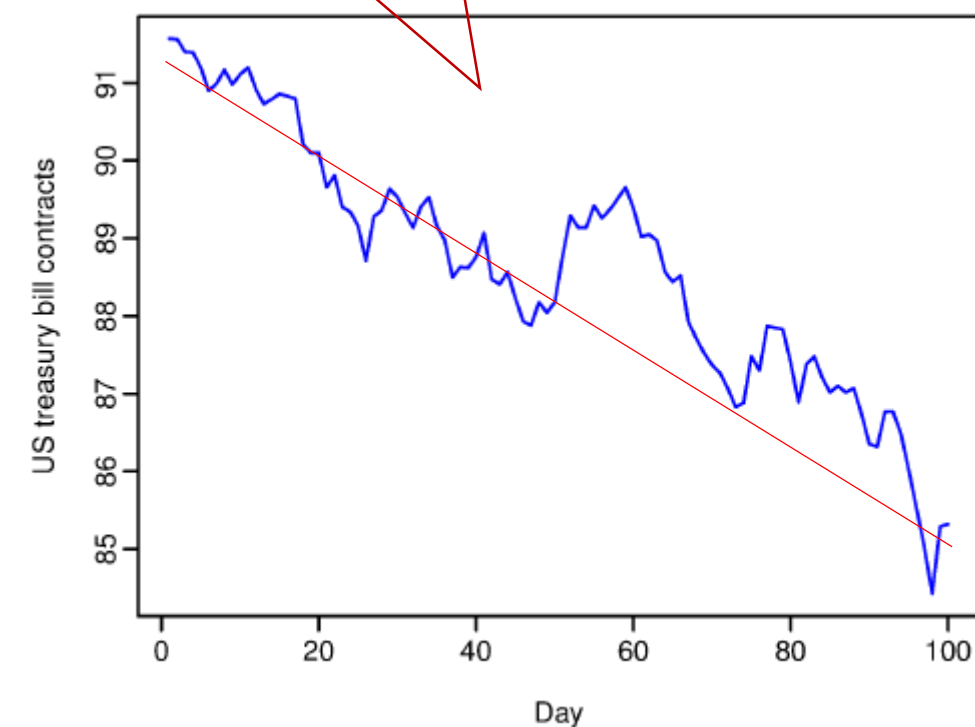




# Коррелограмма: сильный тренд

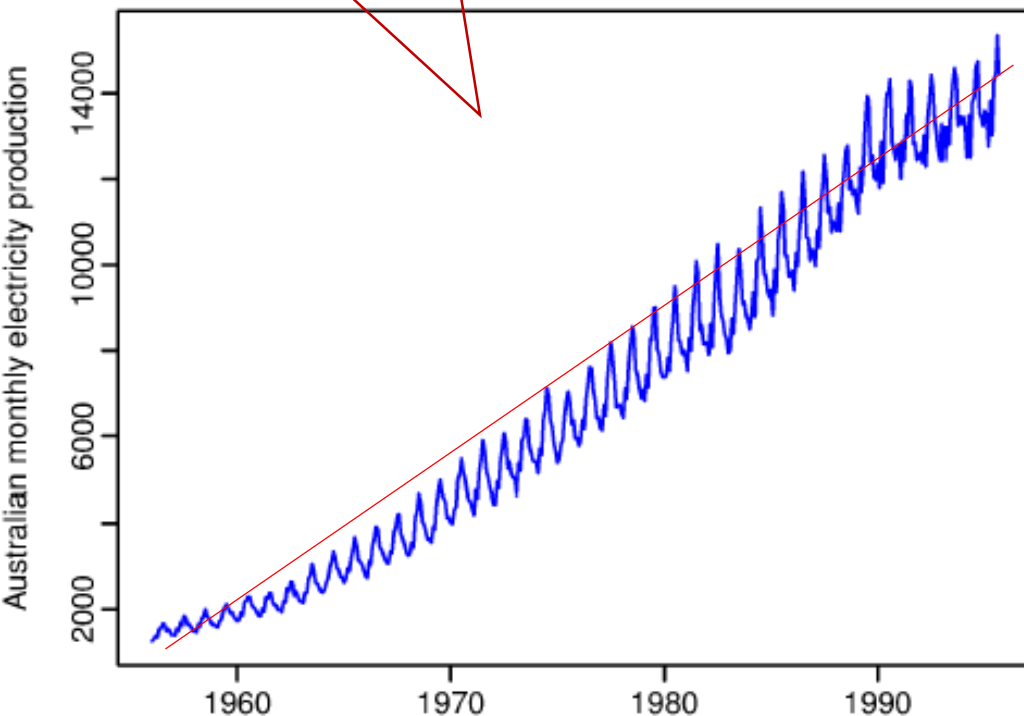
Ряд с сильным трендом

Типичная структура автокорреляции для ряда с сильным трендом: большие значения при малых лагах, убывание, колебания вокруг нуля

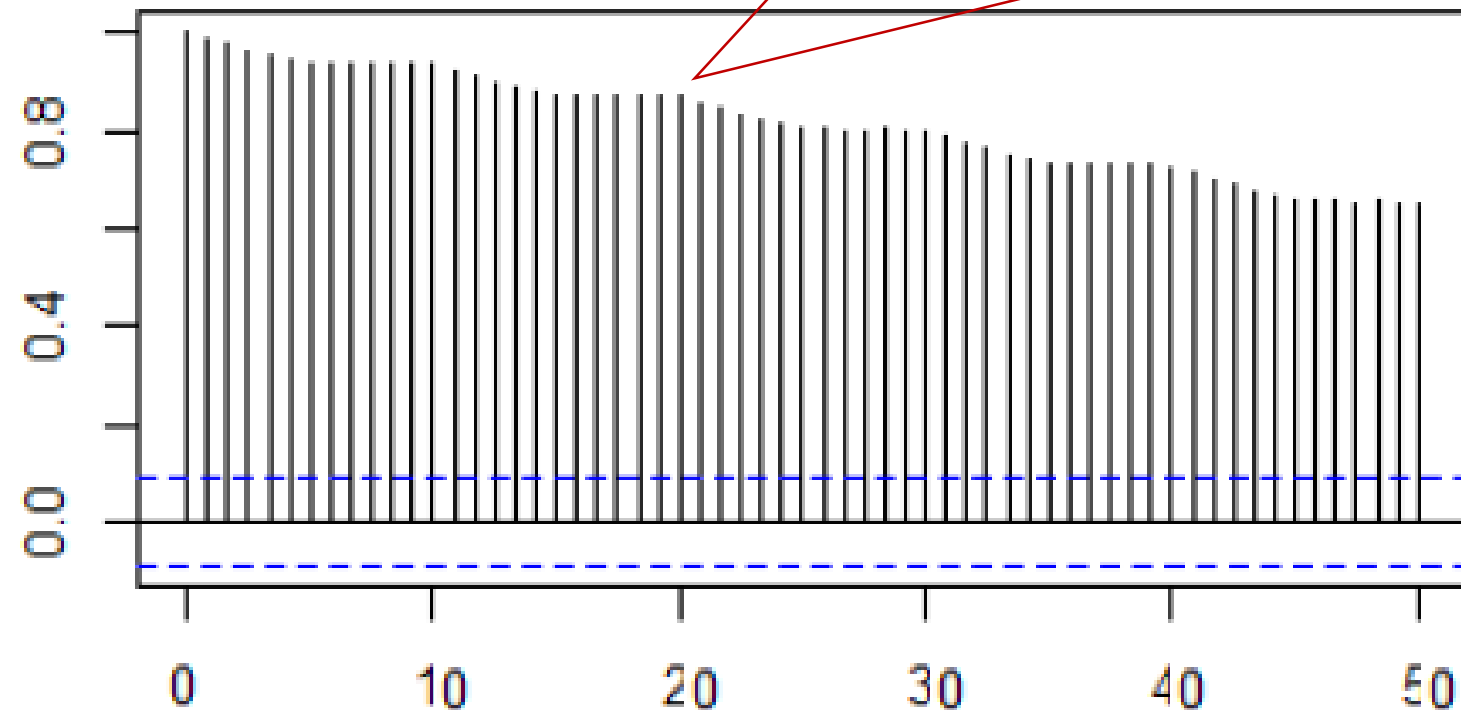


# Коррелограмма: сильный тренд и сезонность

Ряд с сильным трендом  
и сезонностью

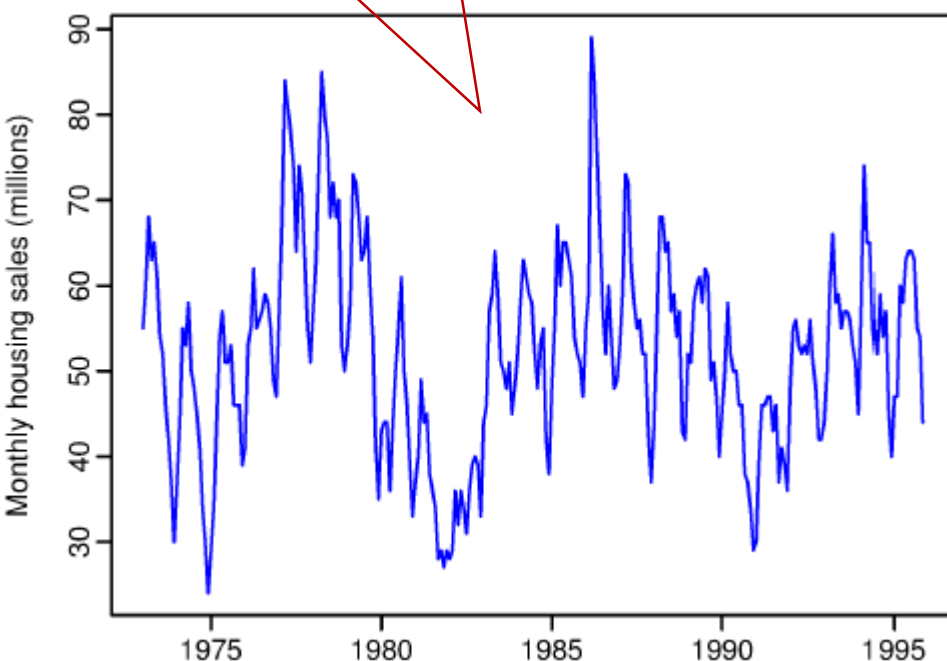


Типичная структура автокорреляции для ряда с сильным трендом  
и сезонностью: слабо различимые пики автокорреляции  
в лагах, кратных периоду сезонности (12, 24, 36, 48, ...)

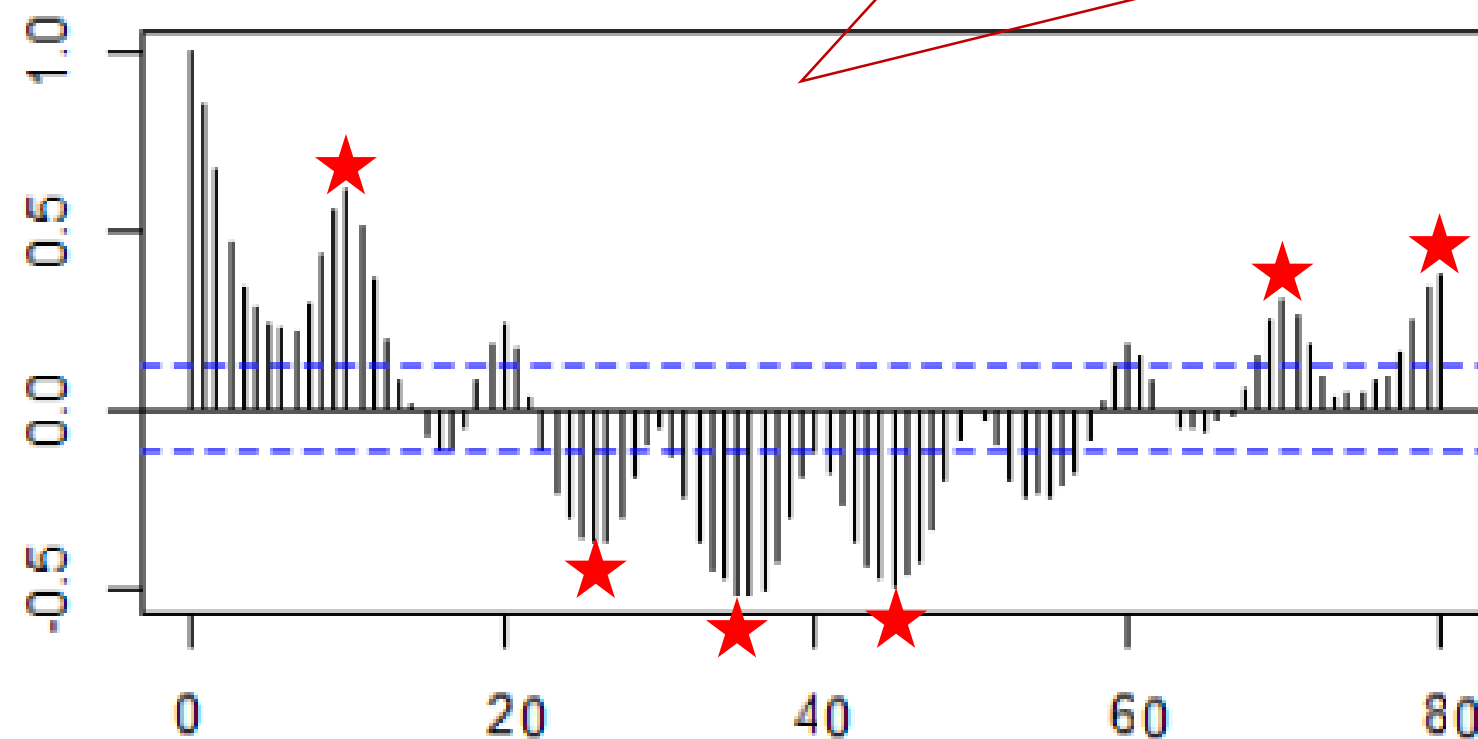


# Коррелограмма: сезонность и циклы

Ряд с сезонностью  
и циклами

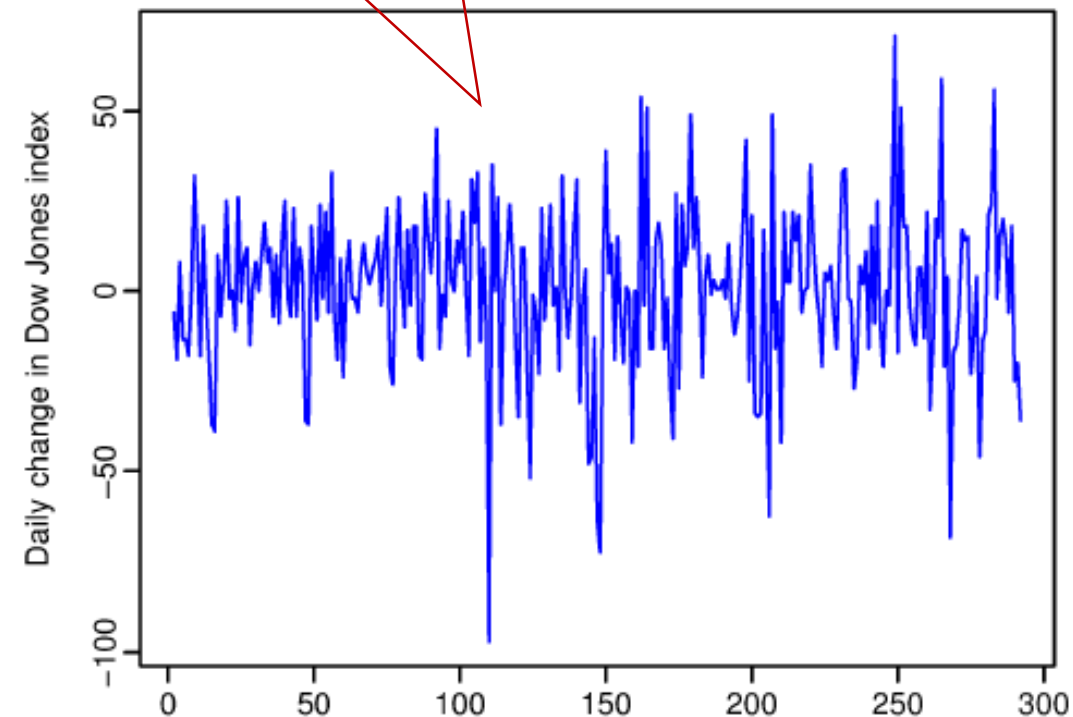


Типичная структура автокорреляции для ряда с сезонностью и циклами: циклы приводят к сдвигу пиков автокорреляции в лагах, кратных периоду сезонности, в иные лаги

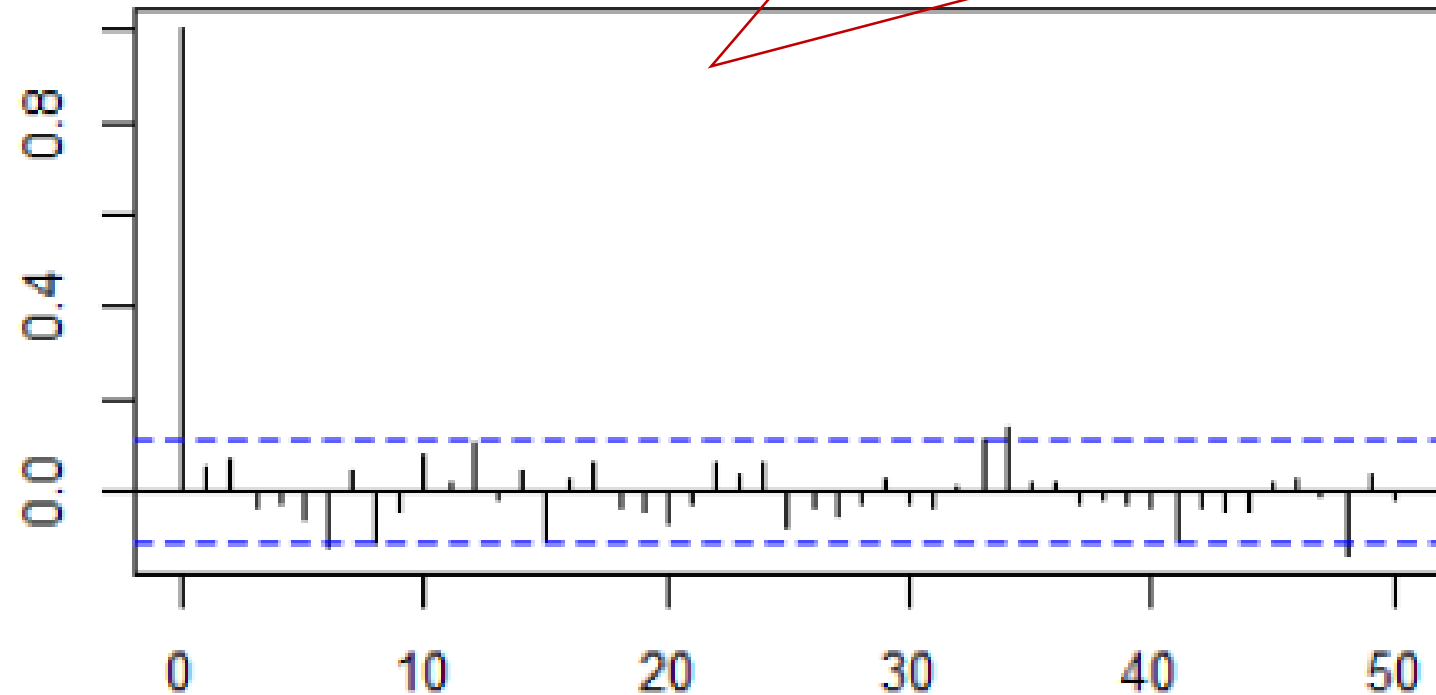


# Коррелограмма: отсутствие тренда, сезонности и циклов

Ряд без тренда,  
сезонности и циклов



Типичная структура автокорреляции для ряда без тренда,  
сезонности и циклов: значения слабо колеблются вокруг нуля



# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- **Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда**
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Построение прогноза
- Анализ остатков

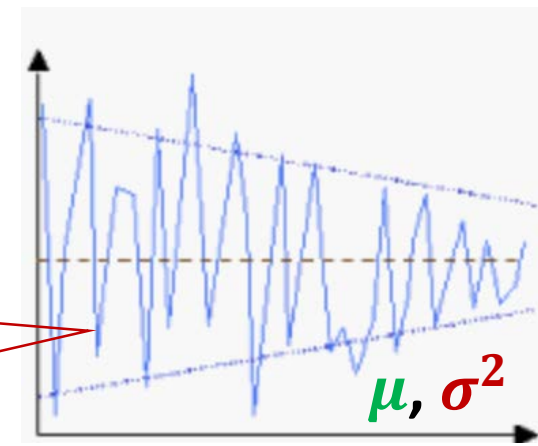
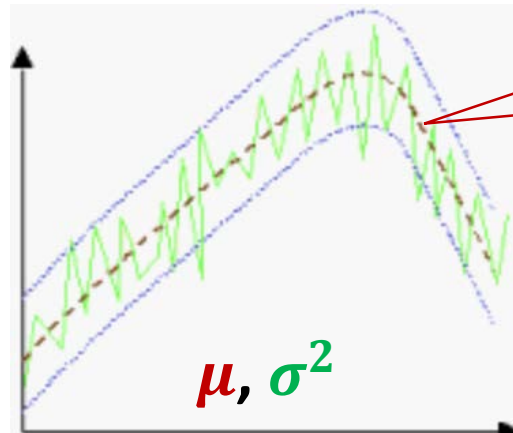
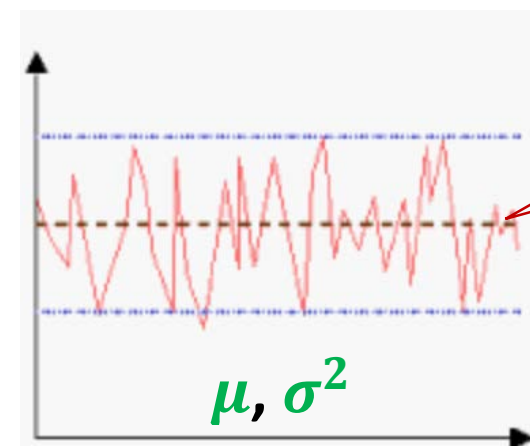
# Стационарный (stationary) ряд: стабильность характеристик

- Среднее арифметическое
$$\mu(T_{i,m}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m t_k$$

- Дисперсия
$$\sigma^2(T_{i,m}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (t_k - \mu)^2$$

- Ковариация
$$\text{cov}(T_{i,m}, T_{j,m}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m (t_{i+k-1} - \mu(T_{i,m}))(t_{j+k-1} - \mu(T_{j,m}))$$

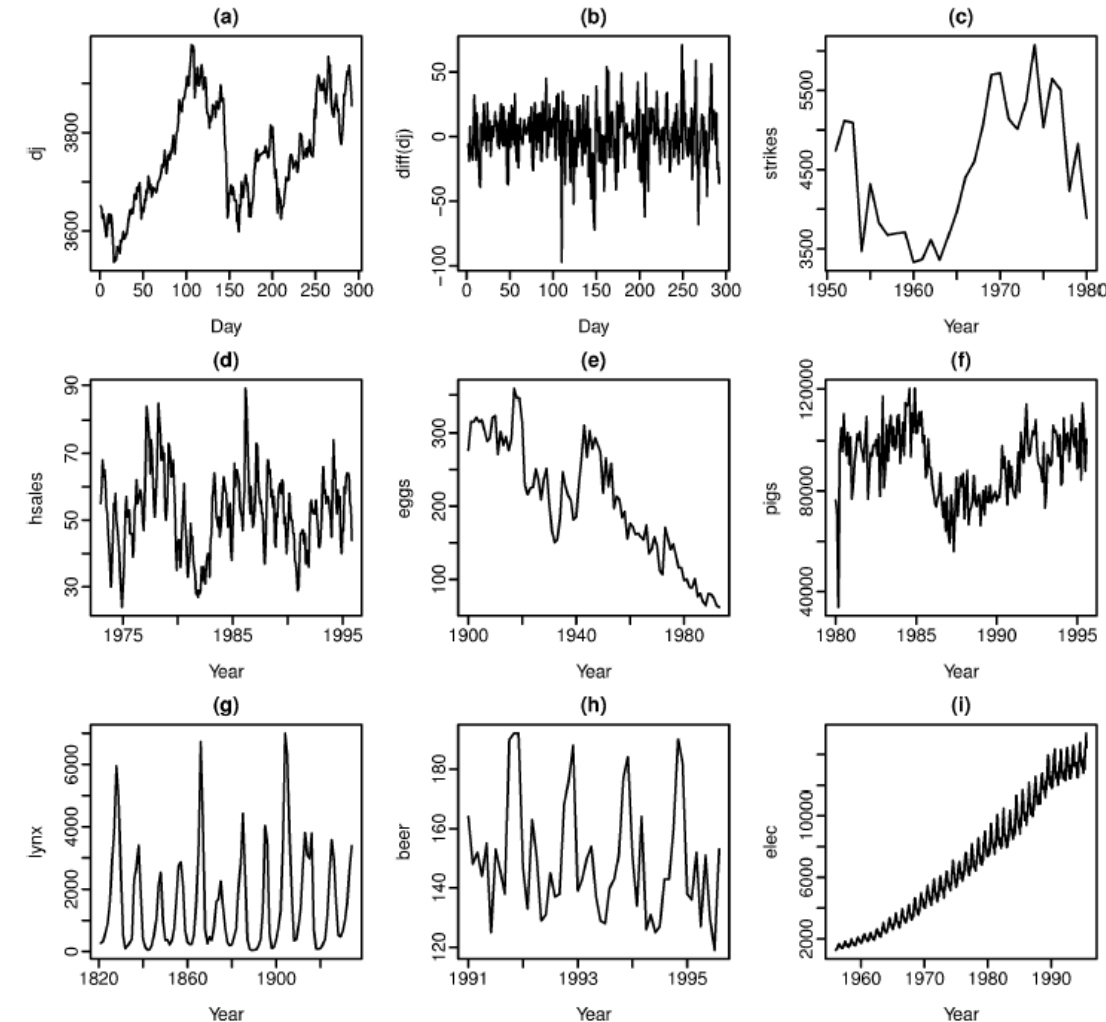
Ряд  $y_1, \dots, y_T$  стационарен, если  
 $\forall s$  распределение  $y_t, \dots, y_{t+s}$   
не зависит от времени  $t$



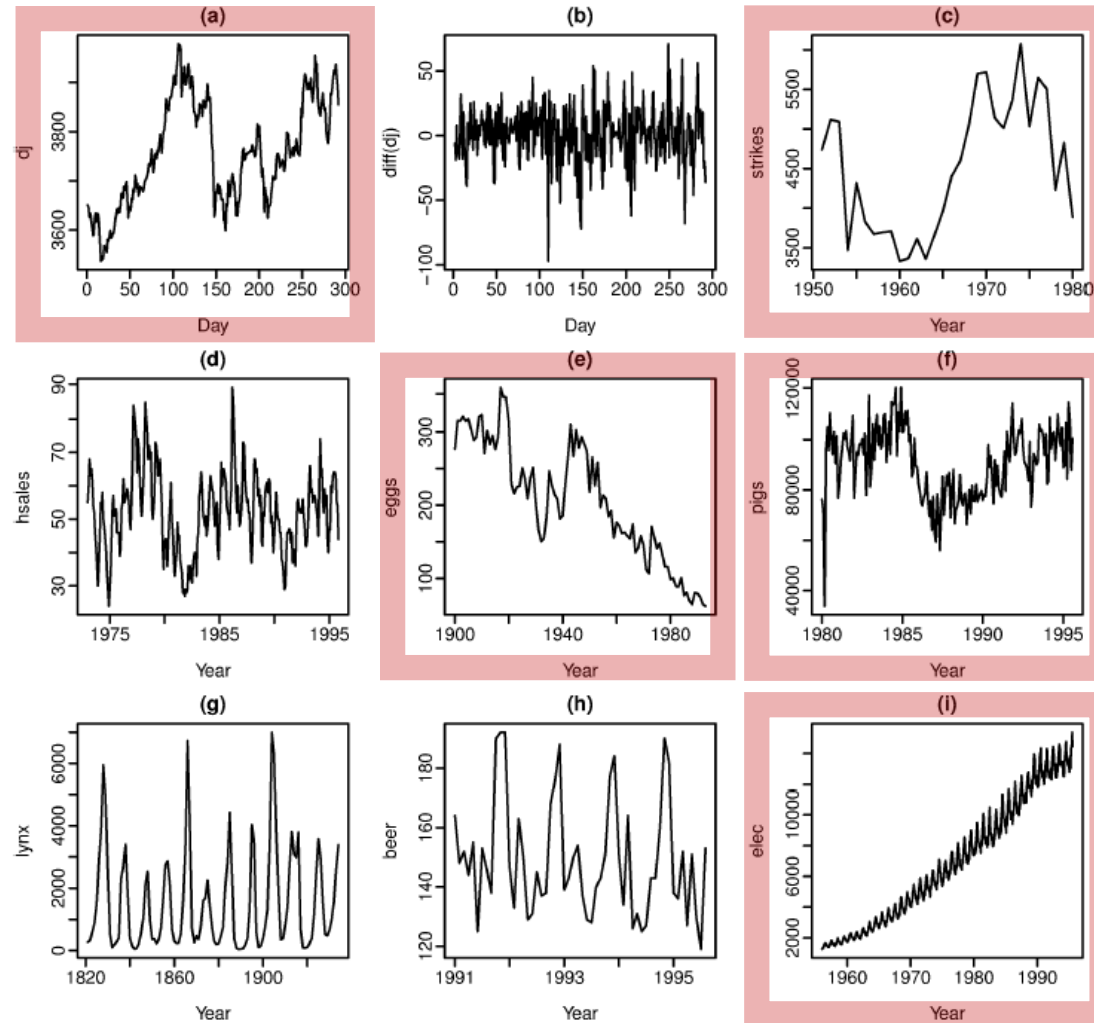


# Влияние компонентов ряда на стационарность

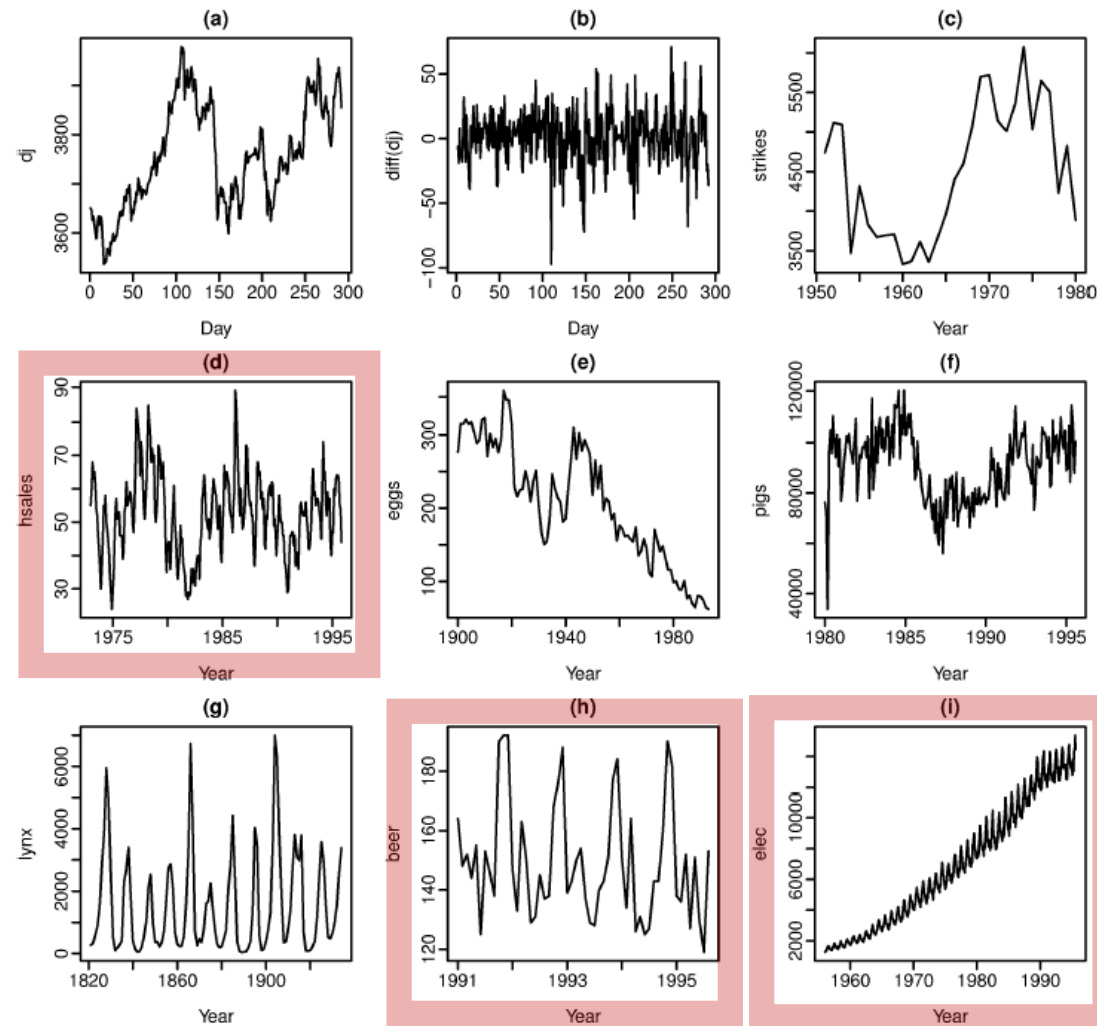
- Ряды с трендом не стационарны
  - распределения в окнах в начале и в конце ряда существенно отличаются
- Ряды с сезонностью не стационарны
  - распределения в окнах длины менее сезона в периоды минимумов и максимумов существенно отличаются
- Ряды с неперiodическими циклами стационарны
  - нельзя предсказать заранее локацию минимумов и максимумов



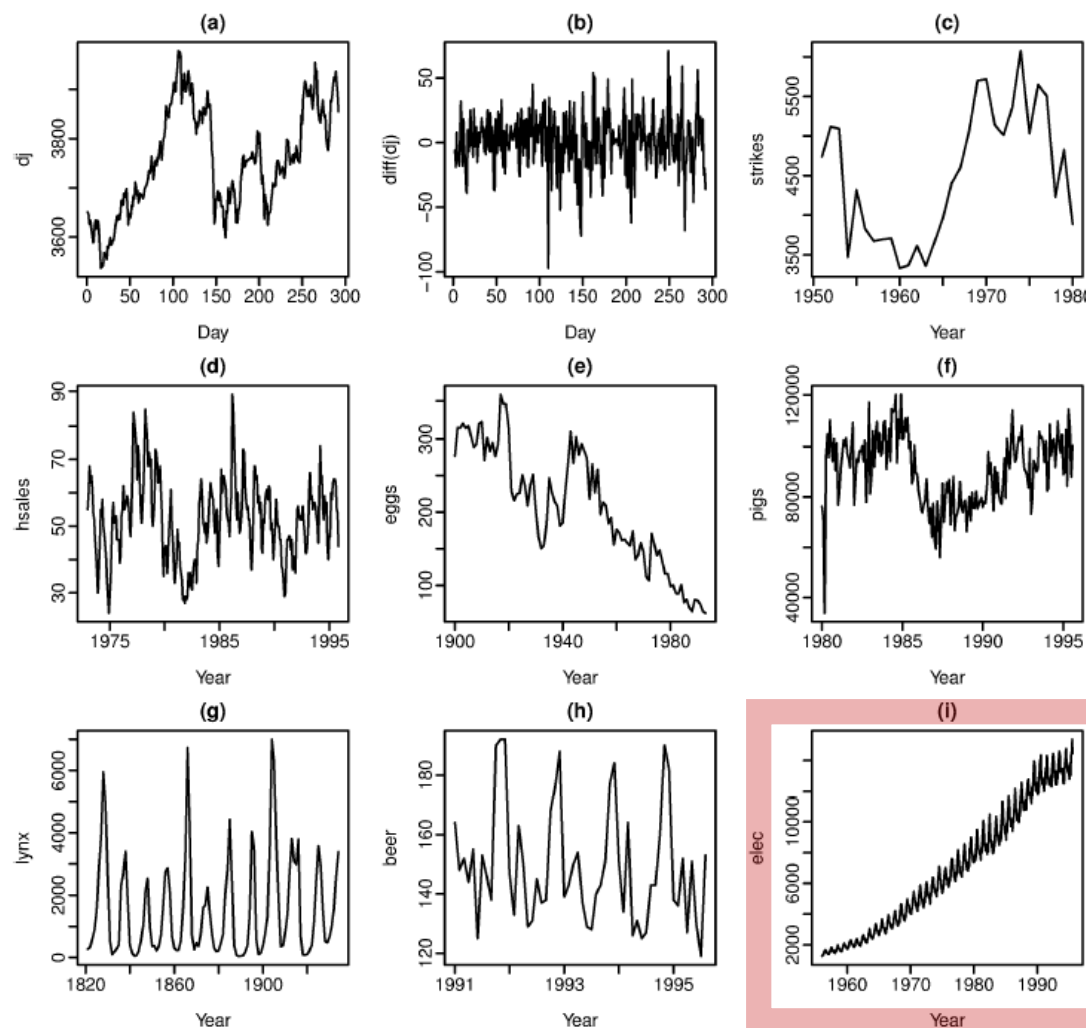
# Ряды с трендом не стационарны



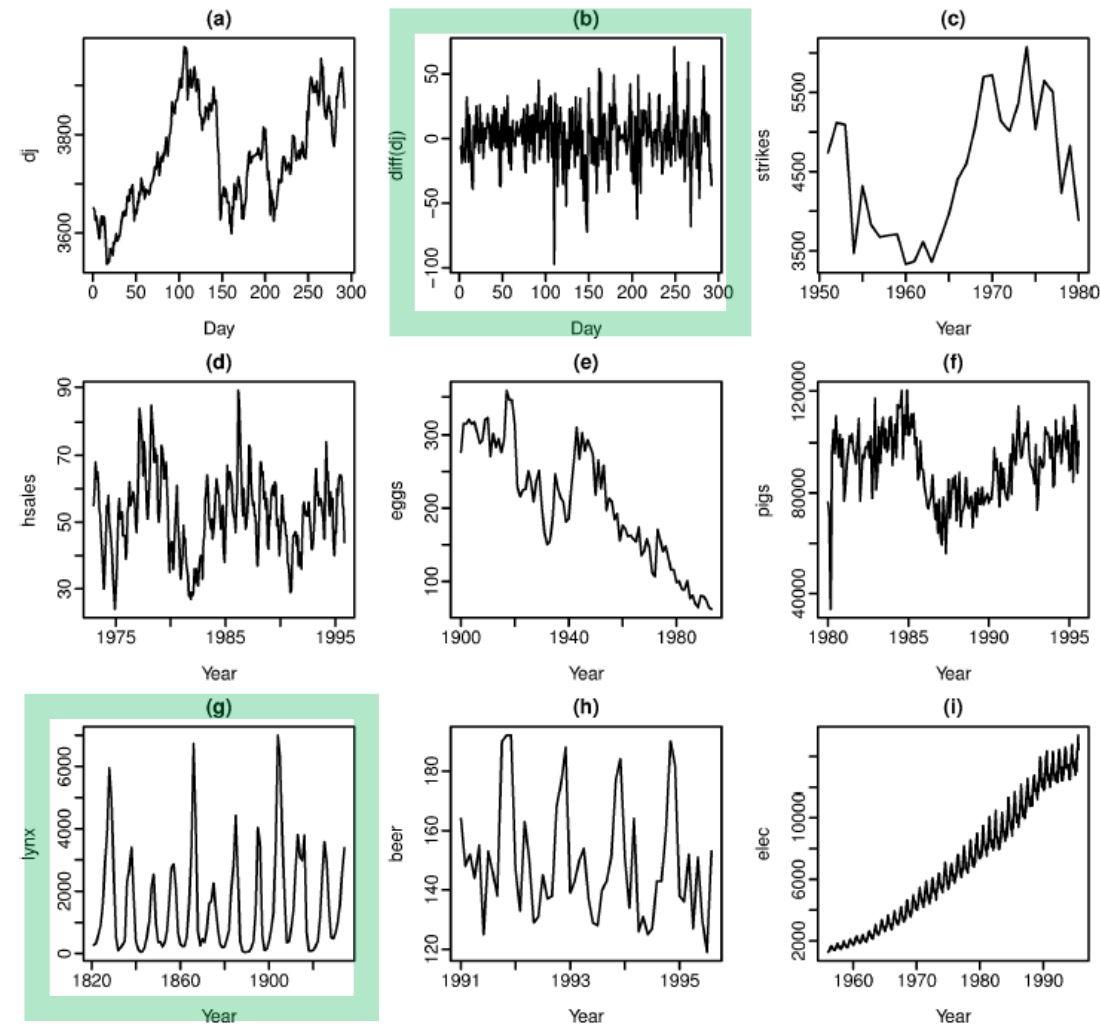
# Ряды с сезонностью не стационарны



# Ряды с меняющейся дисперсией не стационарны



# Стационарные ряды



# Проверка ряда на стационарность

- Визуальный анализ, проверка постоянства среднего и дисперсии
- Автокорреляционная функция (ACF, Autocorrelation function)
- Статистические тесты
  - Тест Дики–Фуллера (Dickey–Fuller test)
  - Тест KPSS (Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin test)



# Тест Дикки–Фуллера (Dickey–Fuller test)

- Ряд  $y_1, \dots, y_T$
- Гипотеза  $H_0$ : ряд не стационарен
- Гипотеза  $H_1$ : ряд стационарен
- Статистика: нет
- При  $H_0$   $DF(y)$  имеет табличное распределение



**Дэвид Дикки**  
(David A. Dickey)  
р. 1945



**Уэйн Фуллер**  
(Wayne A. Fuller)  
р. 1931

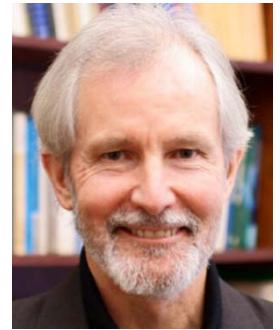
# Тест KPSS (Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin test)

- Ряд  $y_1, \dots, y_T$
- Гипотеза  $H_0$ : ряд стационарен
- Гипотеза  $H_1$ : ряд не стационарен и описывается моделью  $y_t = \alpha y_{t-1}$
- Статистика:  $KPSS(y) = \frac{1}{\lambda^2 T^2} \sum_{i=1}^T \left( \sum_{t=1}^i y_t \right)^2$
- При  $H_0$   $KPSS(y)$  имеет табличное распределение



Денис Квятковский  
(Denis Kwiatkowski)

?



Питер Филипс  
(P.C.B. Philips)

р. 1948



Питер Шмидт  
(Peter Schmidt)

р. 1947



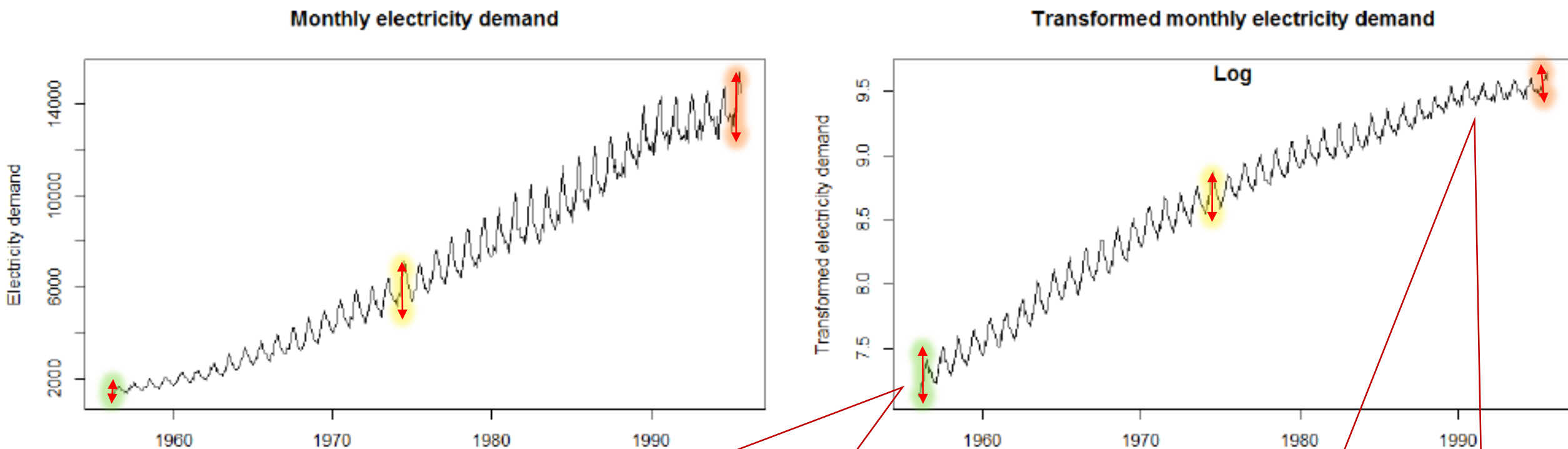
Юнчхоль Шин  
(Youngcheol Shin)

р. 1960

# Стабилизирующие преобразования ряда

- Стабилизация монотонно меняющейся дисперсии ряда
  - Логарифмирование
  - Преобразование Бокса–Кокса
- Стабилизация среднего значения ряда, удаление тренда и сезонности
  - Дифференцирование ряда
  - Сезонное дифференцирование ряда
  - Комбинированное дифференцирование ряда

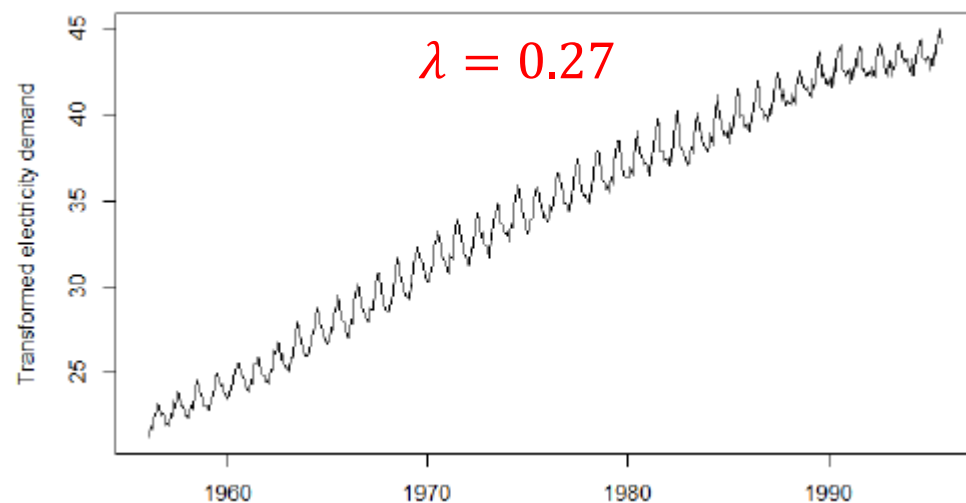
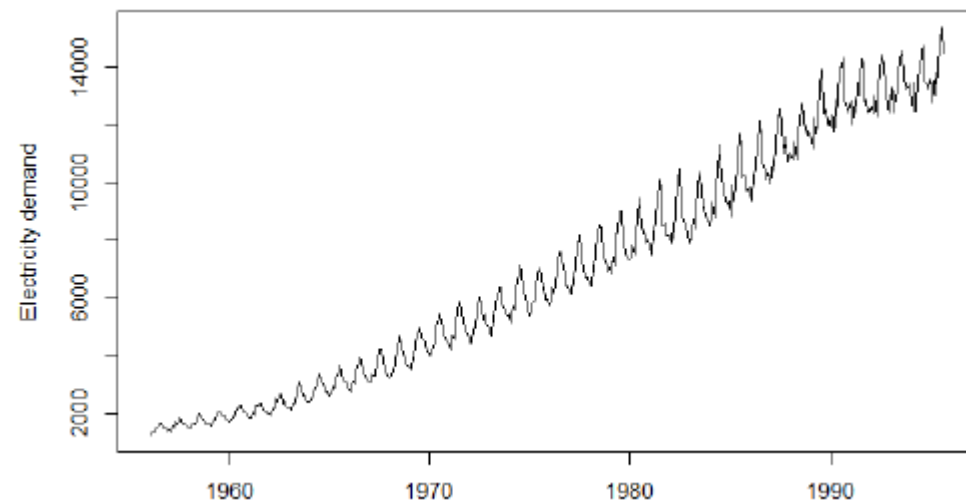
# Логарифмирование ряда



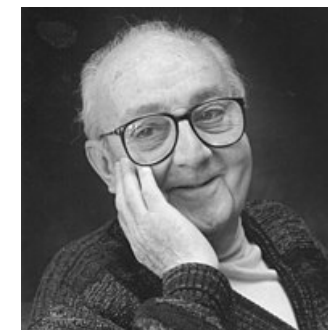
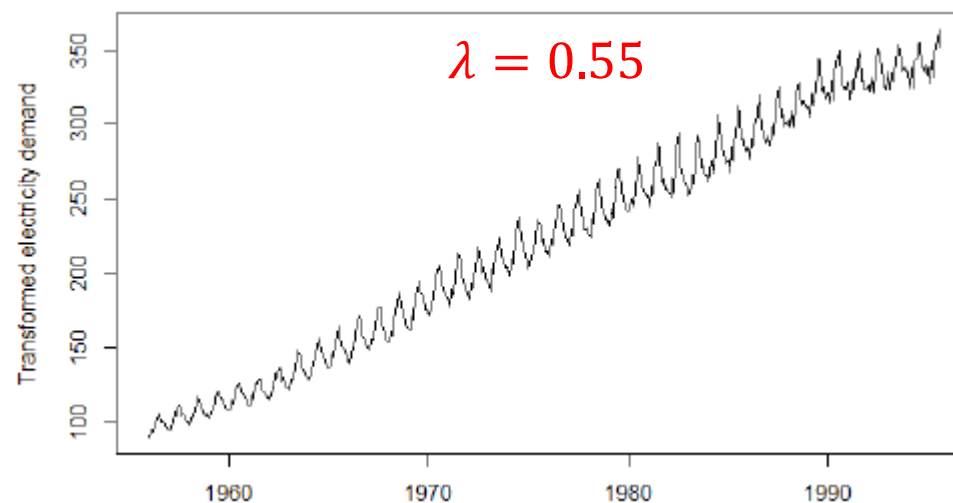
Стабилизация дисперсии  
не обязательно приведет к стационарности ряда

После логарифмирования  
размах колебаний стал примерно одинаков

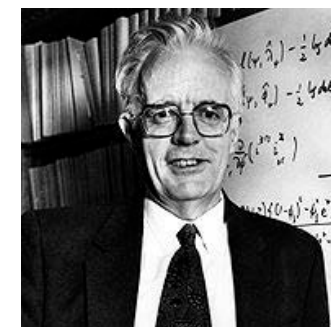
# Преобразование Бокса–Кокса (Box–Cox transformation)



$$y'_t = \begin{cases} \ln y_t, & \lambda = 0 \\ \frac{y_t^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \end{cases}$$



**Дж.Э.П. Бокс**  
(G.E.P. Box)  
1919-2013



**Сэр Дэвид Кокс**  
(Sir D.R. Cox)  
1924-2022

# Преобразование Бокса–Кокса (Box–Cox transformation)

Преобразование  
для выполнения прогноза

$$y'_t = \begin{cases} \ln y_t, & \lambda = 0 \\ (y_t^\lambda - 1)/\lambda, & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

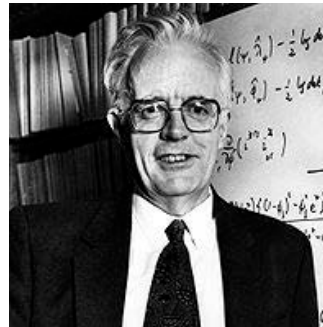
Преобразование прогноза  
трансформированного ряда  
в прогноз исходного ряда

$$\hat{y}_t = \begin{cases} \exp(y'_t), & \lambda = 0 \\ (\lambda \hat{y}'_t + 1)^{1/\lambda}, & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

- Если  $\exists y_t \leq 0$ , то к ряду нужно добавить константу (и вычесть ее для получения прогноза исходного ряда)
- Значение  $\lambda$  слабо влияет на прогноз (можно округлять)
- Значение  $\lambda$  сильно влияет на предсказательный интервал



Дж.Э.П. Бокс  
(G.E.P. Box)  
1919-2013



Сэр Д.Р. Кокс  
(Sir D.R. Cox)  
1924-2022

# Дифференцирование ряда для удаления тренда и сезонности

- Переход к попарным разностям соседних значений (дифференцирование 1-го порядка):

$$y_1, \dots, y_T \rightarrow y'_2, \dots, y'_T$$
$$y'_t = y_t - y_{t-1} = (1 - B)y_t$$

- Дифференцирование 2-го порядка

$$y_1, \dots, y_T \rightarrow y'_2, \dots, y'_T \rightarrow y''_3, \dots, y''_T$$
$$y''_t = y'_t - y'_{t-1} = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} = (1 - B)^2 y_t$$

- Дифференцирование 3-го порядка

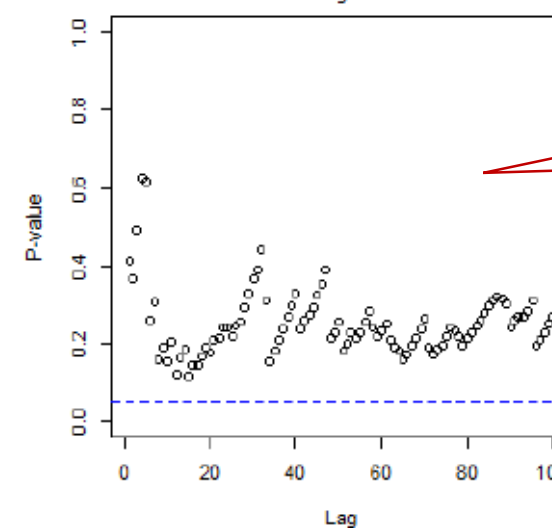
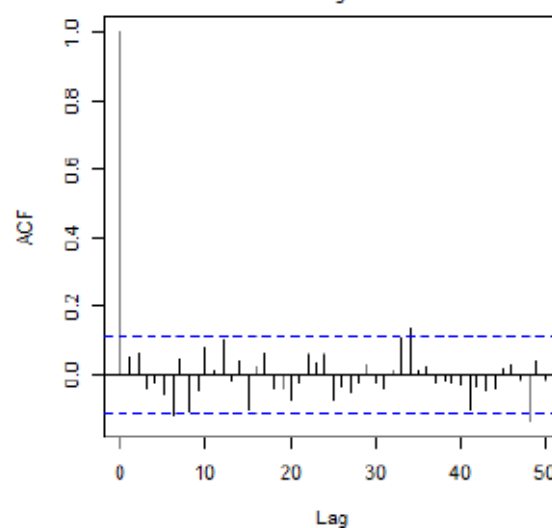
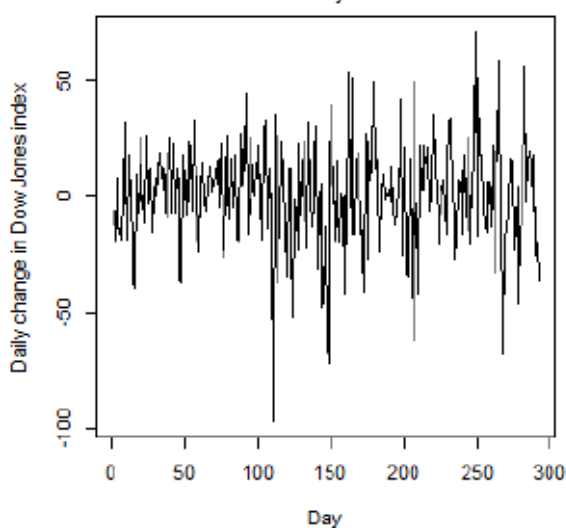
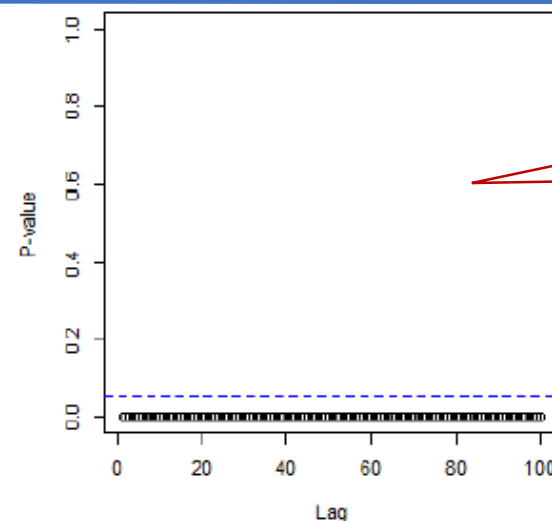
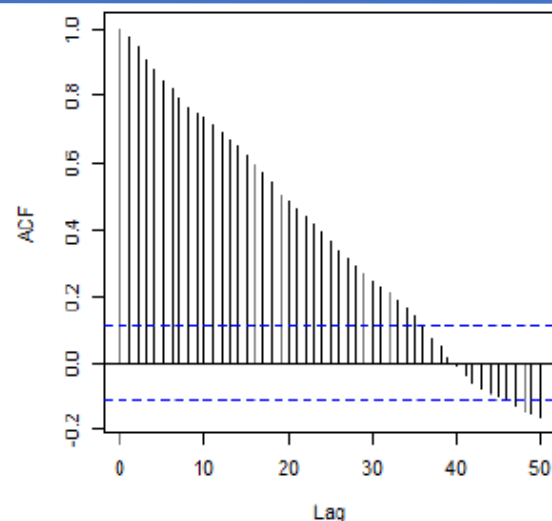
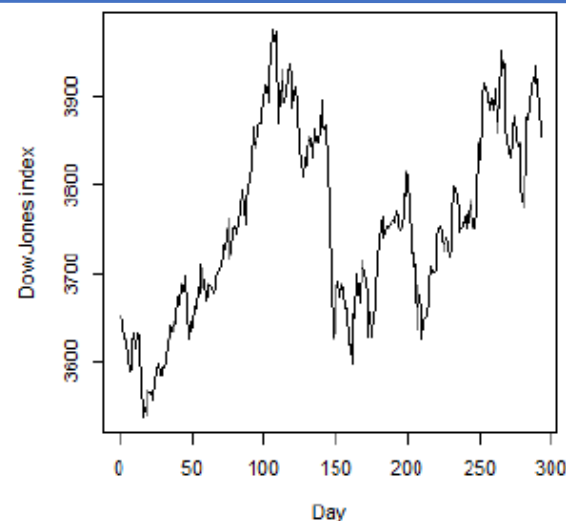
$$y_1, \dots, y_T \rightarrow y'_2, \dots, y'_T \rightarrow y''_3, \dots, y''_T \rightarrow y'''_4, \dots, y'''_T$$
$$y'''_t = y''_t - y''_{t-1} = y_t - 3y_{t-1} + 3y_{t-2} - y_{t-3} = (1 - B)^3 y_t$$

- Дифференцирование  $d$ -го порядка

$$y_1, \dots, y_T \rightarrow y'_2, \dots, y'_T \rightarrow \dots \rightarrow y^{(d-1)}_{d+1}, \dots, y^{(d-1)}_T$$
$$\nabla^d y_t = (1 - B)^d y_t$$



# Дифференцирование ряда



# Сезонное дифференцирование для удаления сезонности

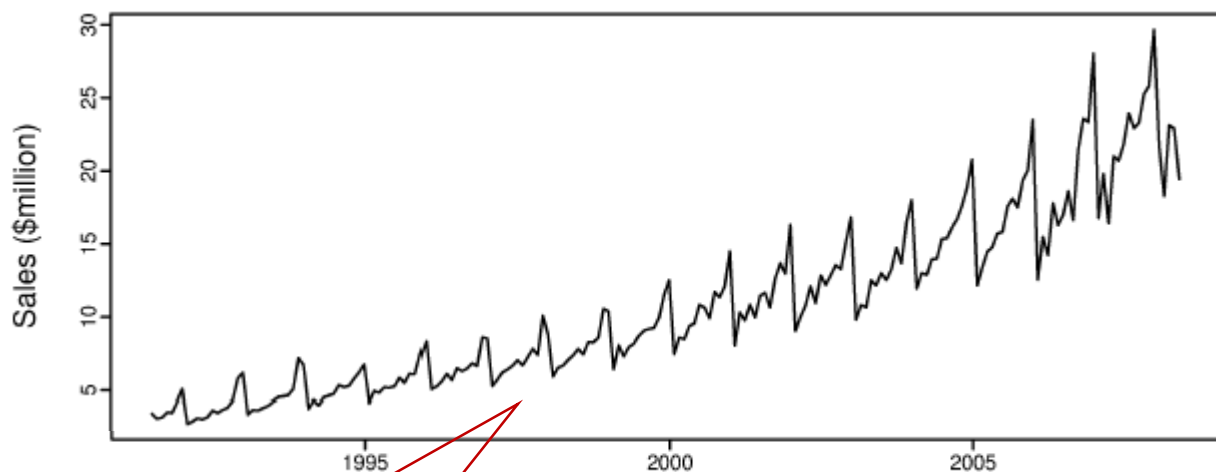
- Переход к попарным разностям значений в соседних сезонах:

$$y_1, \dots, y_T \rightarrow y'_{s+1}, \dots, y'_T$$
$$y'_t = y_t - y_{t-s} = (1 - B^s)y_t$$

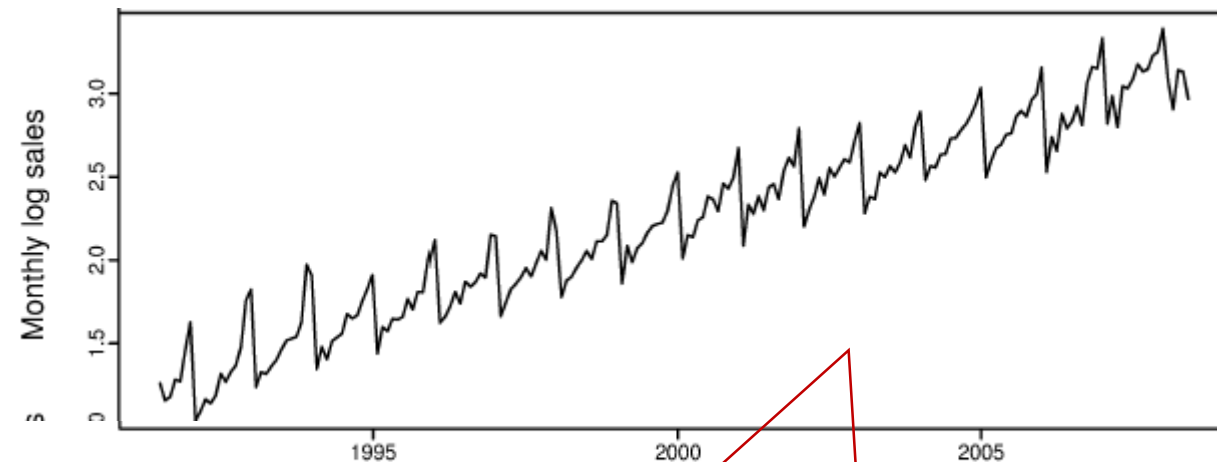
- Может обеспечить стационарность
- Может комбинироваться с обычным дифференцированием:  
 $(1 - B)(1 - B^s)y_t$  или  $(1 - B^s)(1 - B)y_t$ .

При ярко выраженной сезонности лучше начинать с сезонного дифференцирования

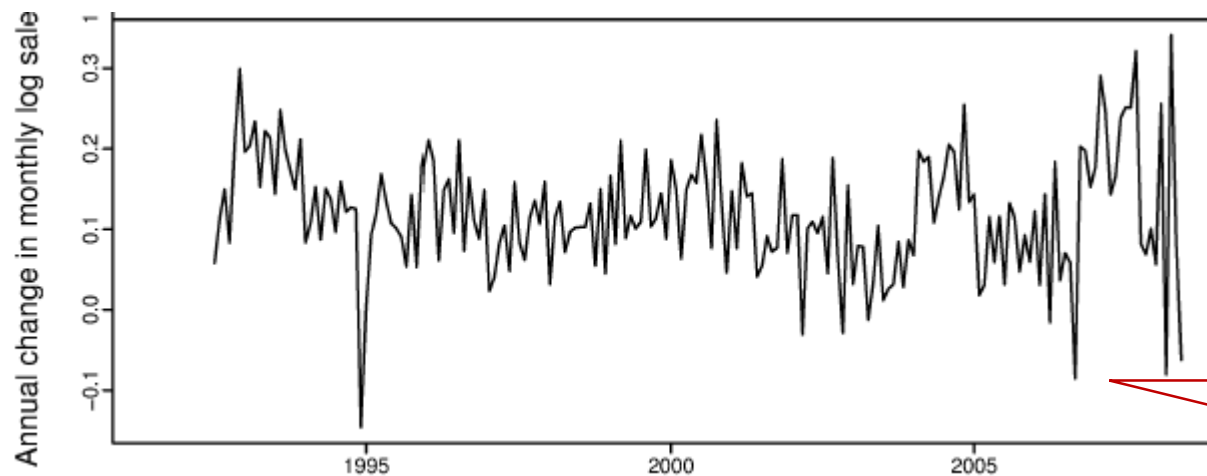
# Сезонное дифференцирование



Исходный ряд  
KPSS:  $p < 0.01$



Логарифмированный ряд  
KPSS:  $p < 0.01$



Ряд после сезонного  
дифференцирования  
KPSS:  $p > 0.1$

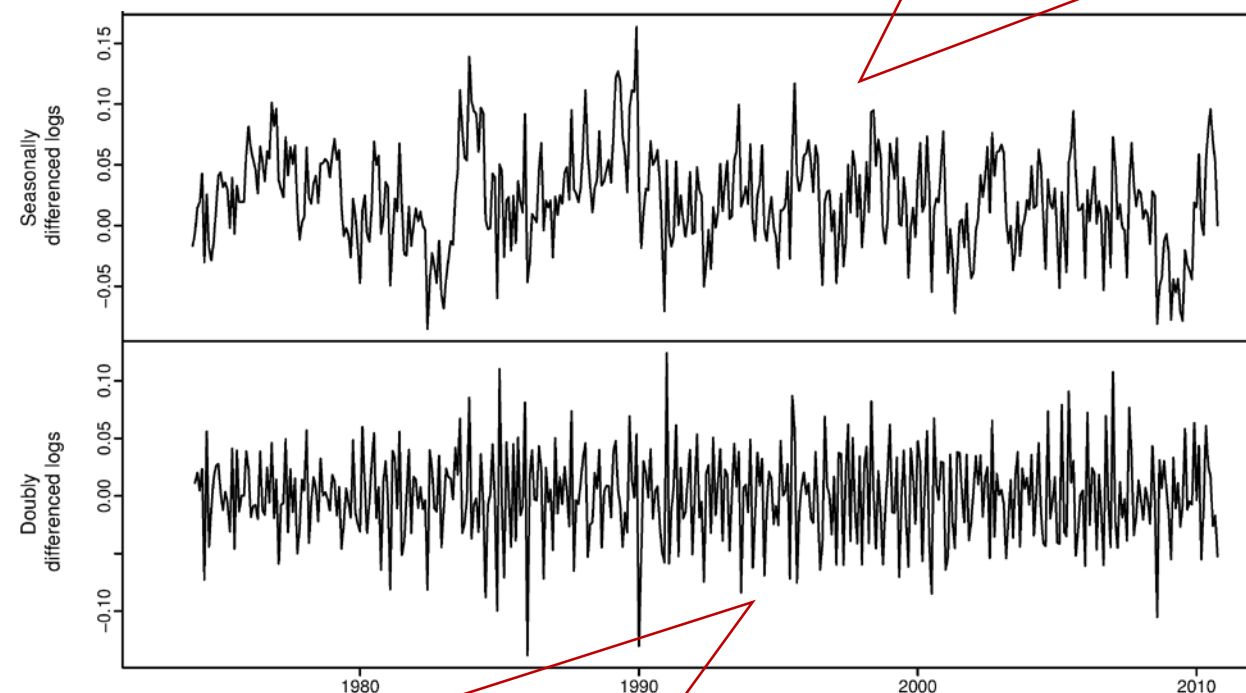
# Комбинированное дифференцирование

Исходный ряд,  
KPSS:  $p < 0.01$



Логарифмированный ряд,  
KPSS:  $p < 0.01$

Сез. дифф-й логарифмированный  
ряд, KPSS:  $p = 0.0355$



Дважды диф-й логарифмированный ряд,  
KPSS:  $p > 0.1$

# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- **Модель AR (авторегрессия ряда)**
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Анализ остатков
- Построение прогноза

# Авторегрессия $AR(p)$

- $AR(p)$ -процесс, авторегрессионный процесс порядка  $p$ :

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

- $y_t$  – стационарный ряд со средним  $\mu$
- $\phi_1, \dots, \phi_p$  – коэффициенты, параметры модели ( $\phi_p \neq 0$ )
- $\varepsilon_t$  – гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$
- $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)$

- Запись посредством оператора обратного сдвига:

$$\phi(B)y_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)y_t = \varepsilon_t, \text{ где } By_t = y_{t-1}$$

- Линейная комбинация  $p$  подряд идущих элементов ряда дает белый шум

## Авторегрессия AR(1) и AR(2)

- Ряд  $AR(p)$  стационарный, если выполняются ограничения на коэффициенты:
  - $AR(1): -1 < \phi_1 < 1$
  - $AR(2): -1 < \phi_2 < 1, \phi_1 + \phi_2 < 1, \phi_2 - \phi_1 < 1$
  - $AR(\dots)$ : более сложные ограничения

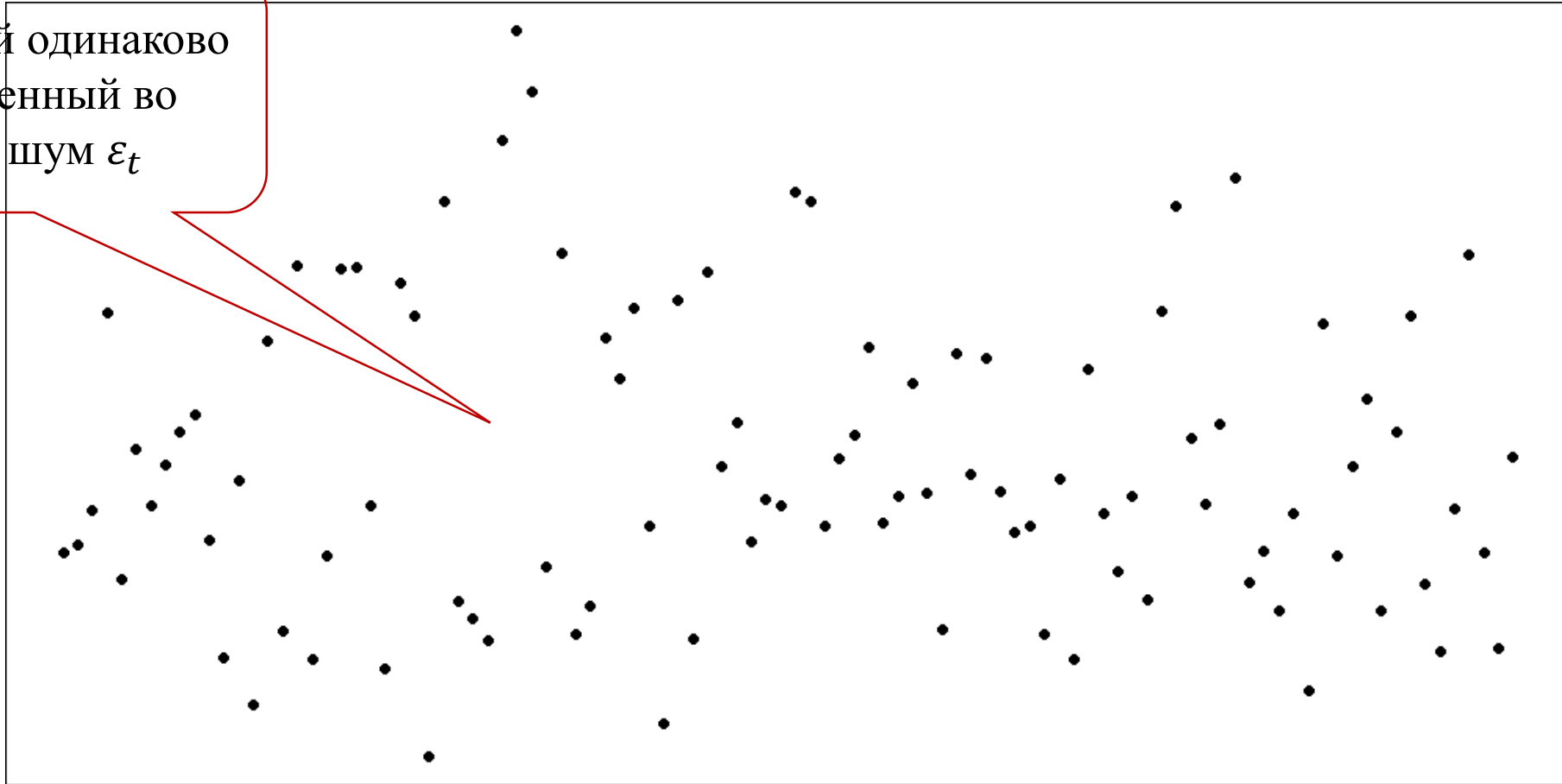


# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- **Модель MA (скользящее среднее ряда)**
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Анализ остатков
- Построение прогноза

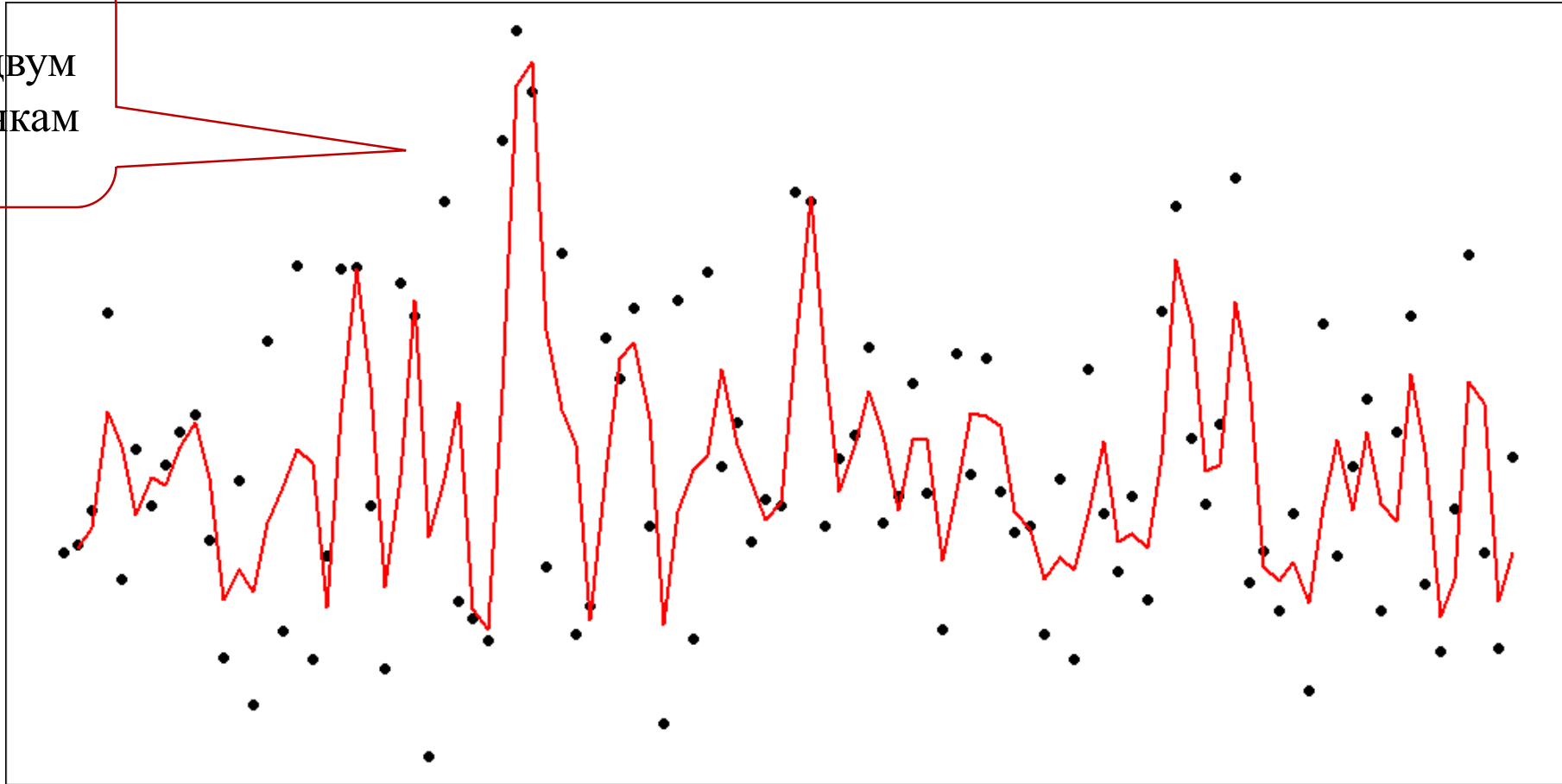
# Скользящее среднее

Независимый одинаково  
распределенный во  
времени шум  $\varepsilon_t$



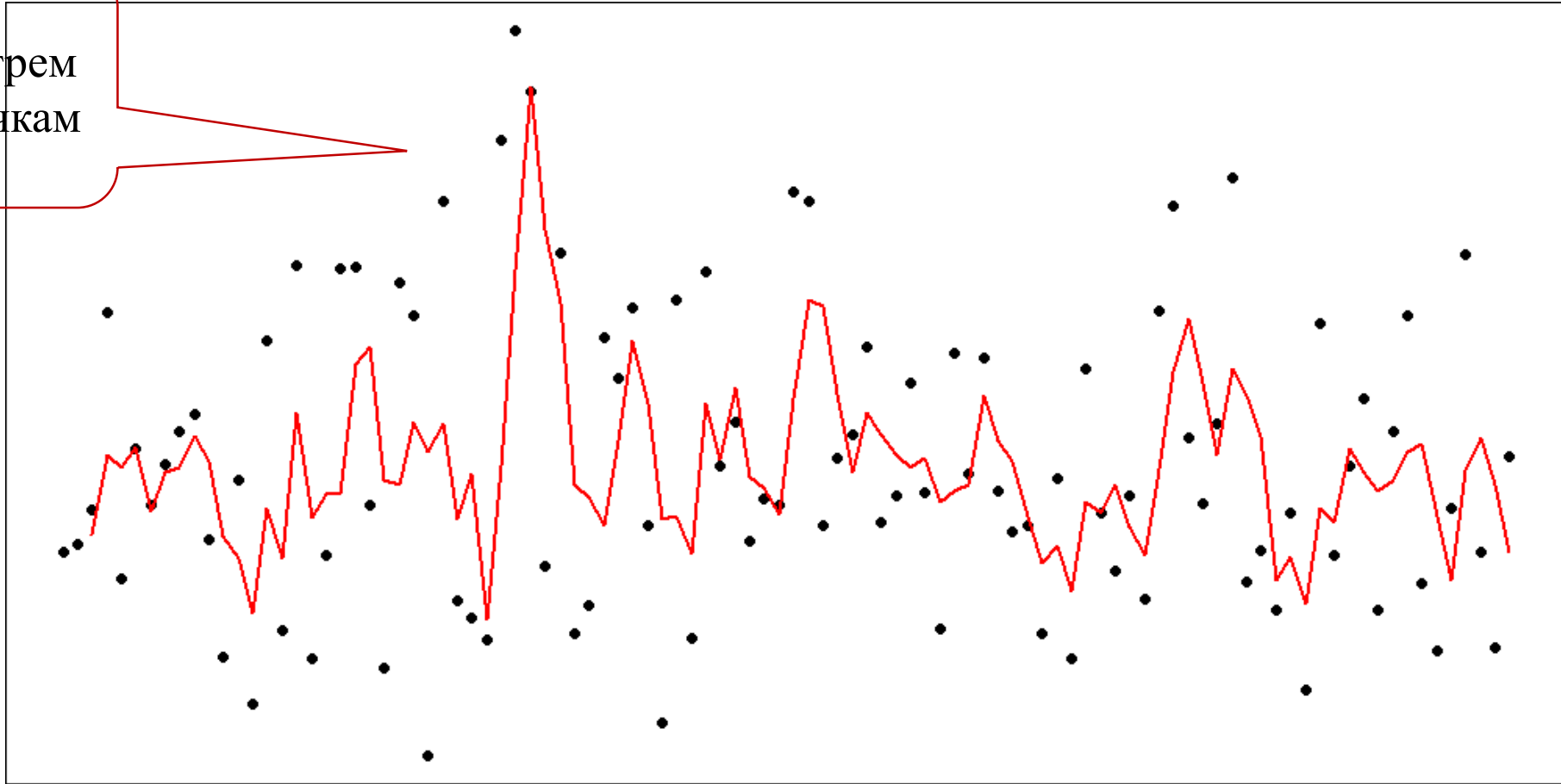
# Скользящее среднее

Среднее по двум  
соседним точкам



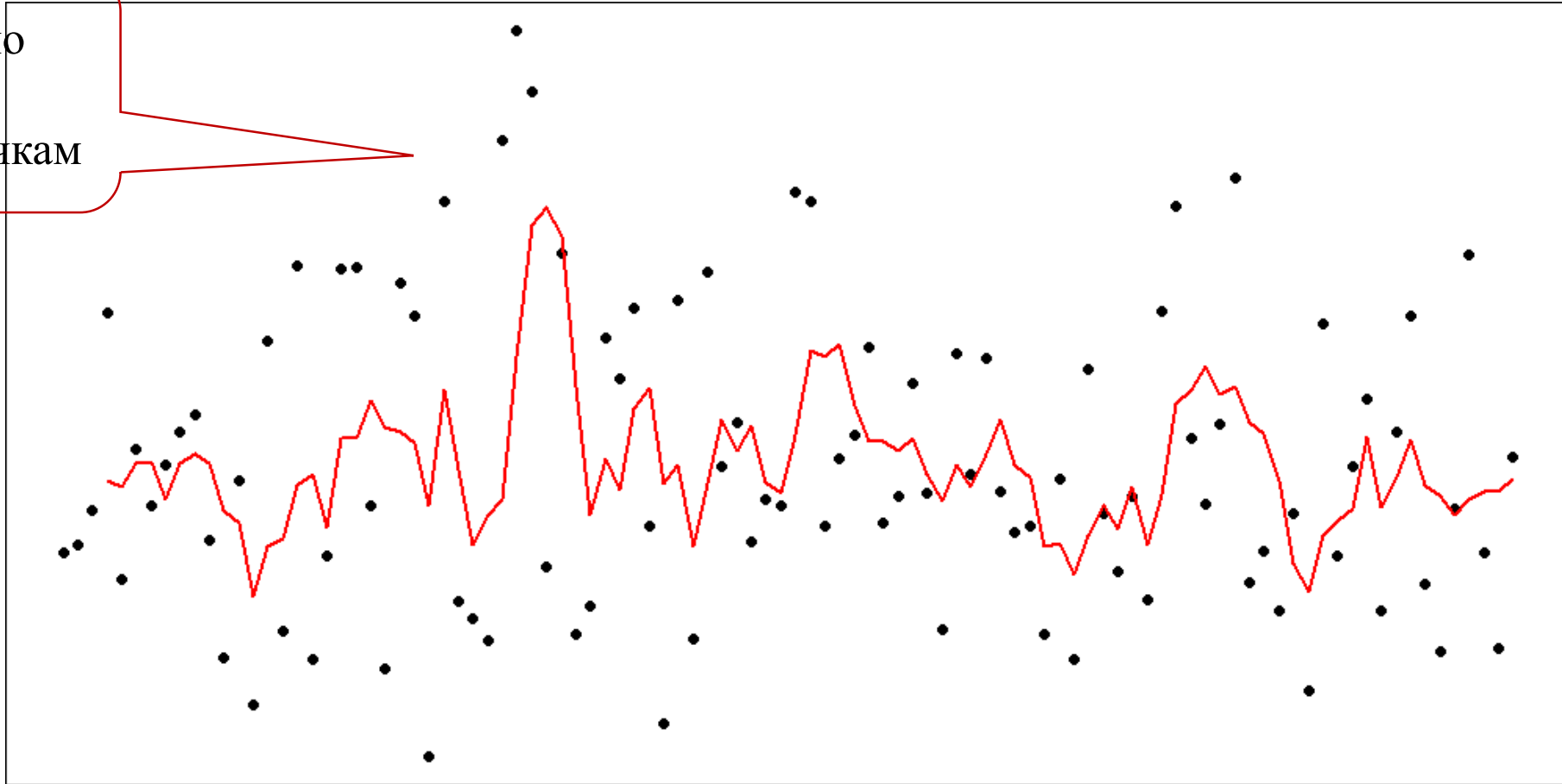
# Скользящее среднее

Среднее по трем соседним точкам

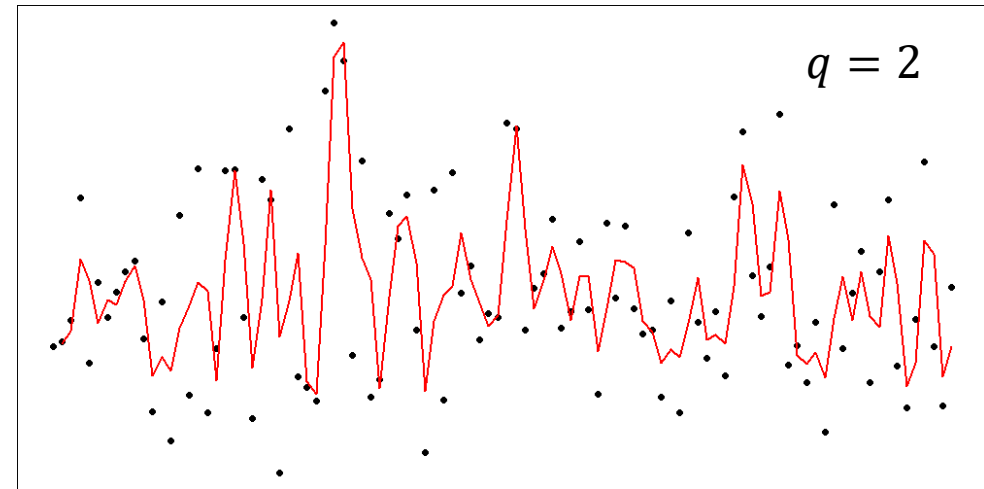
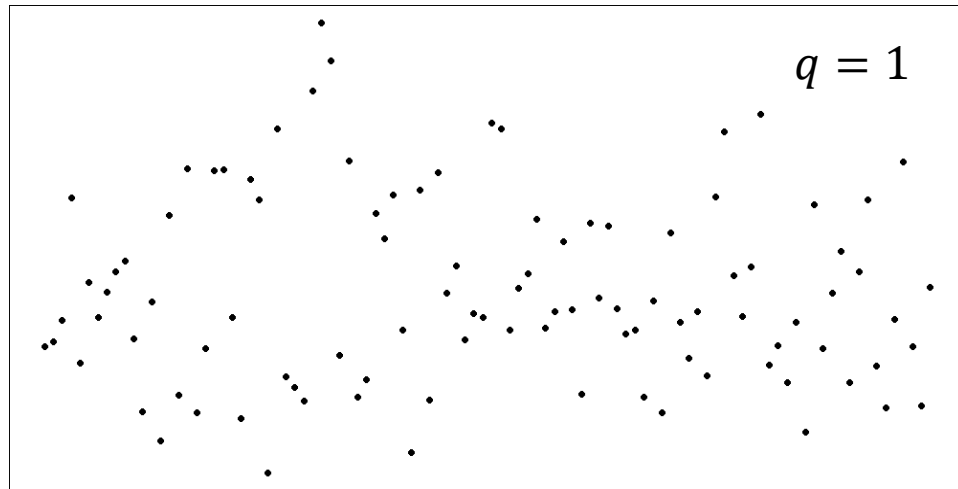


# Скользящее среднее

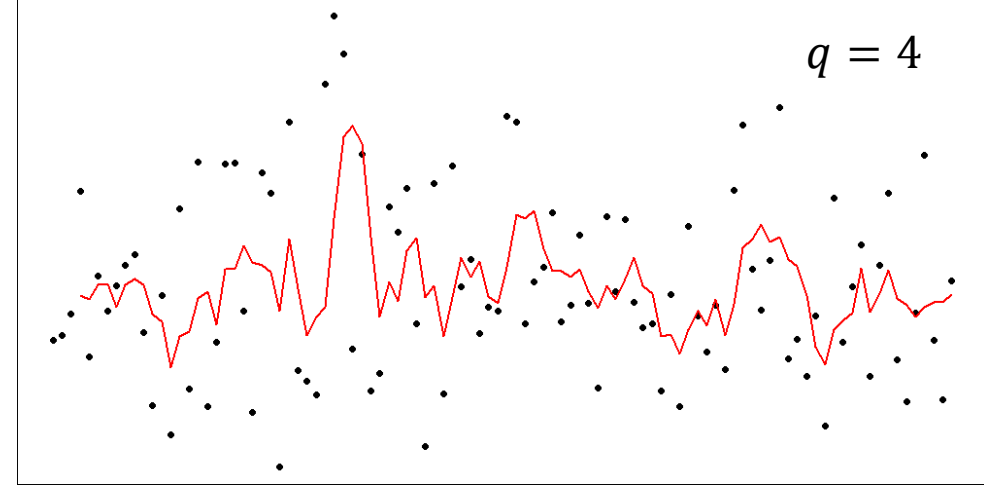
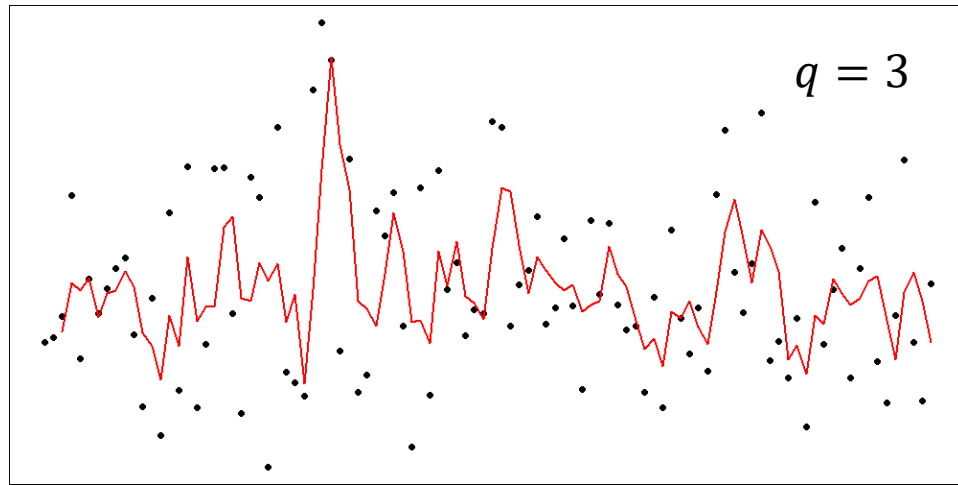
Среднее по  
четырем  
соседним точкам



# Скользящее среднее



Скользящее  
усреднение  
стабилизирует  
шум



# Скользящее среднее $MA(q)$

- $MA(\textcolor{red}{q})$ :

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_{\textcolor{red}{q}} \varepsilon_{t-\textcolor{red}{q}}$$

- $y_t$  – стационарный ряд с нулевым средним
- $\theta_1, \dots, \theta_{\textcolor{red}{q}}$  – коэффициенты, параметры модели ( $\theta_{\textcolor{red}{q}} \neq 0$ )
- $\varepsilon_t$  – гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$
- Запись посредством оператора обратного сдвига:  
 $y_t = \theta(B)\varepsilon_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_{\textcolor{red}{q}} B^{\textcolor{red}{q}})\varepsilon_t$ , где  $B y_t = y_{t-1}$
- Линейная комбинация  $q$  подряд идущих компонент белого шума дает элемент ряда



## Скользящее среднее $MA(1)$ и $MA(2)$

- Модель  $MA(p)$  обратима (допускать настройку под данные), если выполняются ограничения на коэффициенты:
  - $MA(1): -1 < \theta_1 < 1$
  - $MA(2): -1 < \theta_2 < 1, \theta_1 + \theta_2 > -1, \phi_2 - \phi_1 < 1$
  - $MA(\dots)$ : более сложные ограничения

# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- **Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA**
- Подбор параметров моделей
- Анализ остатков
- Построение прогноза

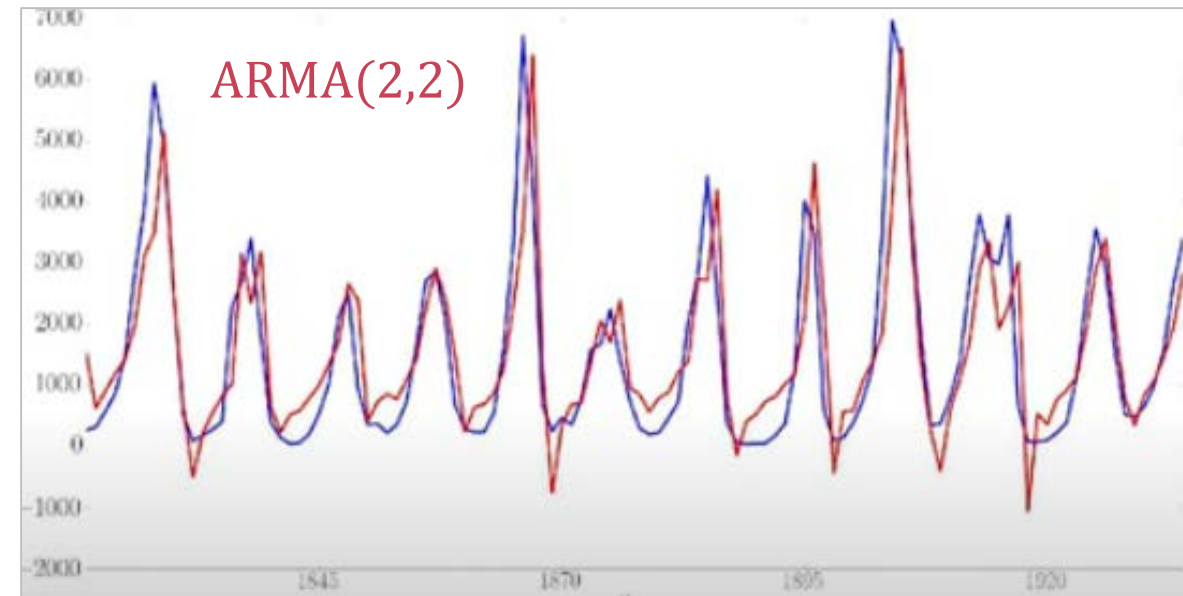
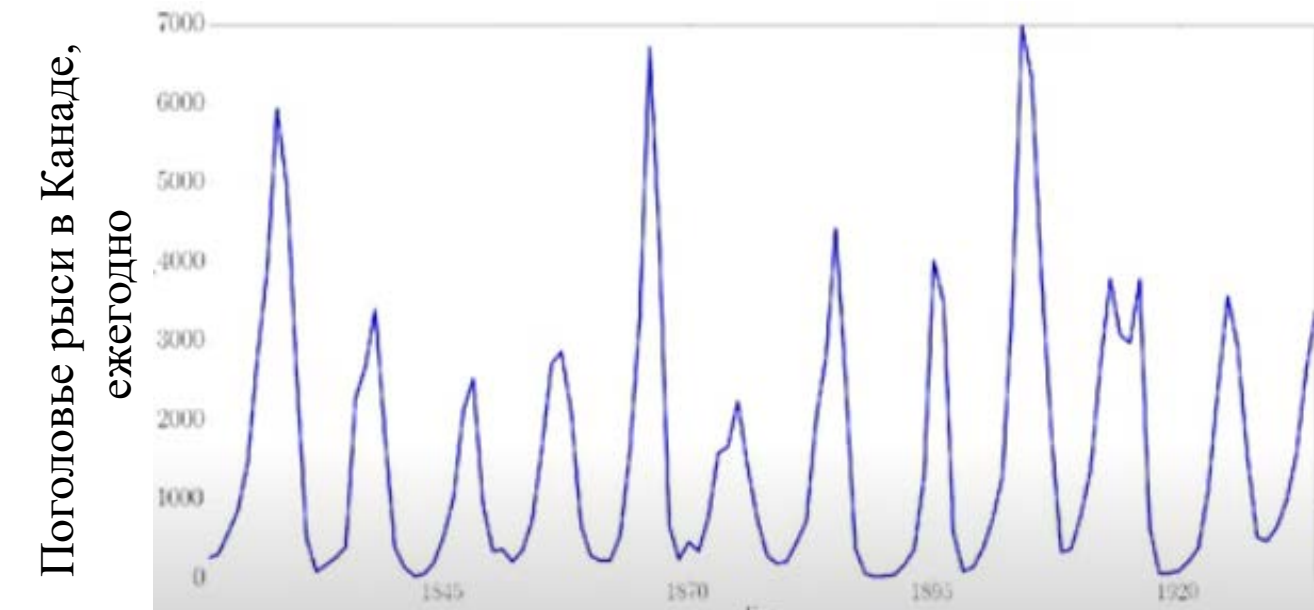
# Модель $ARMA(p, q) = AR(p) + MA(q)$ (AutoRegressive Moving Average)

- $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$ 
  - $y_t$  – стационарный ряд с нулевым средним
  - $\phi_1, \dots, \phi_p$  и  $\theta_1, \dots, \theta_q$  – параметры модели ( $\theta_q \neq 0, \phi_p \neq 0$ )
  - $\varepsilon_t$  – гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$
- Вид модели, если среднее равно  $\mu$ :
$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$
$$\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$$
- Запись посредством оператора обратного сдвига:  $\phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t$
- Теорема Волда: любой стационарный ряд может быть аппроксимирован моделью  $ARMA(p, q)$  с любой точностью



Х.О.А. Волд  
(H.O.A. Wold)  
1908-1992

# Модель $ARMA(p, q)$ : пример



# Модель ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average)

- Ряд описывается моделью  $ARIMA(p, d, q)$ , если его дифференцирование  $d$ -го порядка

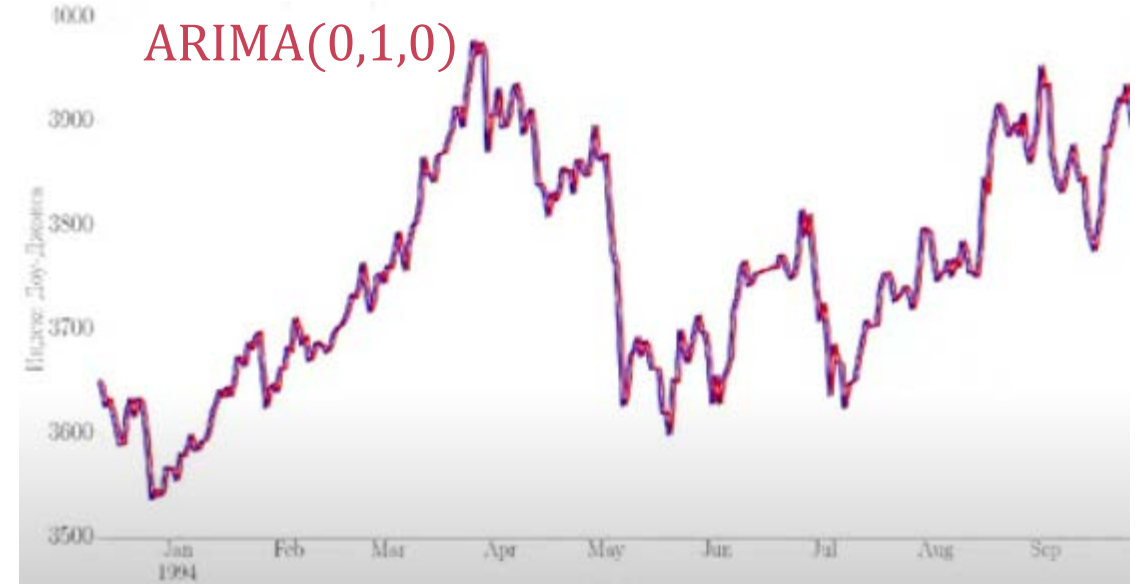
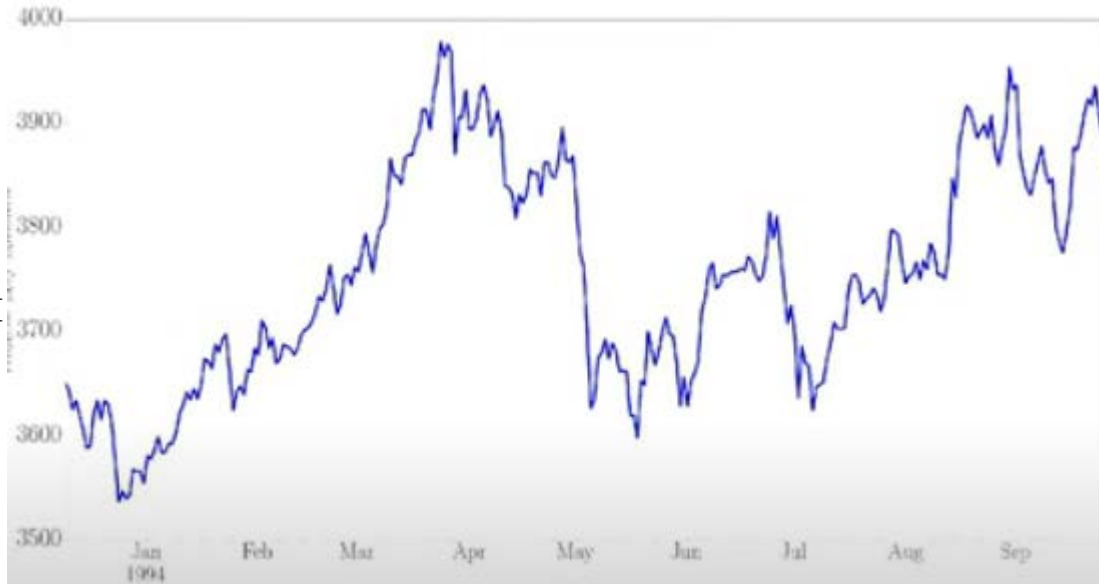
$$\nabla^d y_t = (1 - B)^d y_t$$

описывается моделью  $ARMA(p, q)$

$$\phi(B)\nabla^d y_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

# Модель $ARIMA(p, q, d)$ : пример

Индекс Доу Джонса,  
ежедневно



## Модель Seasonal ARMA: $\text{SARMA}(p, q) \times (P, Q)_S = \text{ARMA}(p, q) \times (P, Q)_S$

- В ряд, имеющий сезонный период длины  $S$ , описываемый моделью  $\text{ARMA}(p, q)$ 

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$
 добавлены  $P$  компонент авторегрессии
 
$$+ \phi_S y_{t-S} + \phi_{2S} y_{t-2S} + \dots + \phi_{PS} y_{t-PS}$$
 и  $Q$  компонент скользящего среднего
 
$$+ \theta_S y_{t-S} + \theta_{2S} y_{t-2S} + \dots + \theta_{QS} y_{t-QS}$$
- $\text{ARMA}(p, q) \times (P, Q)_S$ :  $\Phi_P(B^S)\phi(B)y_t = \alpha + \Theta_Q(B^S)\theta(B)y_t$ , где
 
$$\Phi_P(B^S) = 1 - \phi_1 B^S - \phi_2 B^{2S} - \dots - \phi_P B^{PS}$$

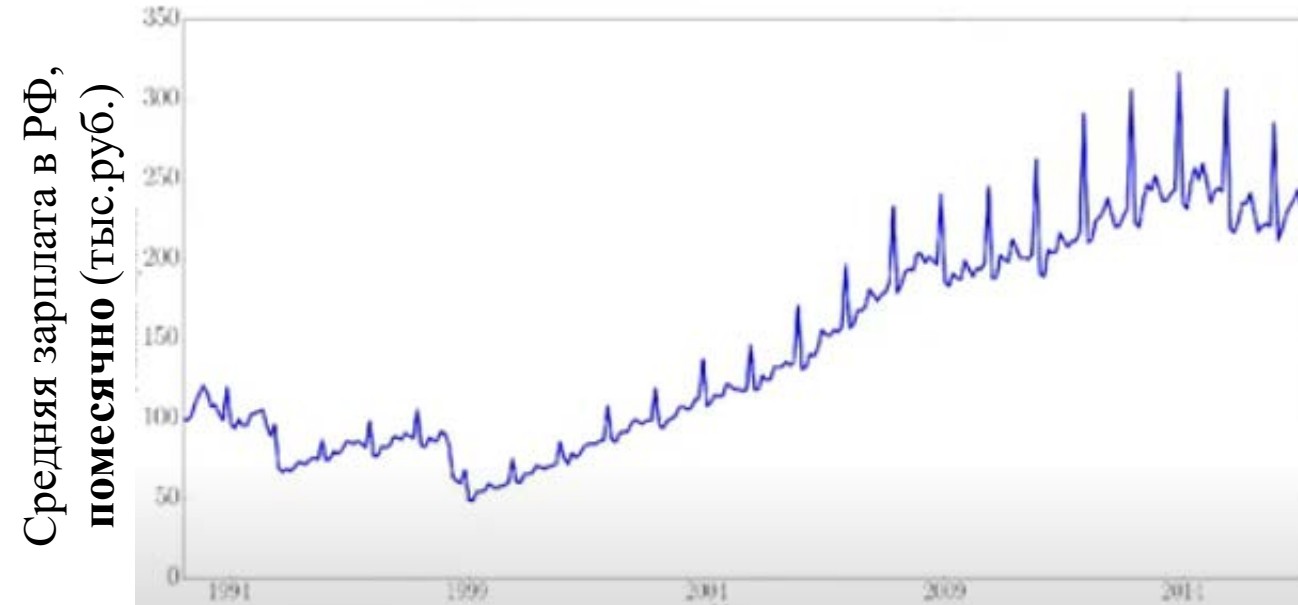
$$\Theta_Q(B^S) = 1 + \theta_1(B^S) + \theta_2(B^{2S}) + \dots + \theta_Q(B^{QS})$$



## Модель Seasonal Integrated ARMA: SARIMA( $p, d, q$ ) $\times$ ( $P, D, Q$ )

- SARIMA( $p, d, q$ )  $\times$  ( $P, D, Q$ ) – это модель SARMA( $p, q$ )  $\times$  ( $P, Q$ )<sub>S</sub> для ряда, к которому применили дифференцирование  $d$ -го порядка и сезонное дифференцирование  $D$ -го порядка
- $\Phi_P(B^S)\phi(B)\nabla_S^D\nabla^d y_t = \alpha + \Theta_Q(B^S)\theta(B)y_t$ , где
$$\Phi_P(B^S) = 1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2S} - \dots - \Phi_P B^{PS}$$
$$\Theta_Q(B^S) = 1 + \Theta_1(B^S) + \Theta_2(B^{2S}) + \dots + \Theta_Q(B^{QS})$$

# Модель $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)$ : пример



# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- **Подбор параметров моделей**
- Анализ остатков
- Построение прогноза

# Параметры моделей

- $\alpha, \phi, \theta$
- $d, D$
- $q, Q$
- $p, P$

## Подбор $\alpha$ , $\phi$ , $\theta$

- Если все остальные параметры фиксированы ( $p, d, q, P, D, Q$ ), то коэффициенты регрессии  $\phi_1, \dots, \phi_p$  подбираются методом наименьших квадратов (МНК)
- Чтобы найти коэффициенты скользящего среднего  $\theta_1, \dots, \theta_q$ , шумовая компонента предварительно оценивается с помощью остатков авторегрессии
- Если шум белый (независимый одинаково распределенный гауссовский), то МНК дает оценки максимального правдоподобия

## Подбор $d, D$

- Подбор порядков дифференцирования выполняется так, чтобы ряд стал стационарным
- Следует начинать с сезонного дифференцирования
- Меньший порядок дает меньшую дисперсию итогового прогноза

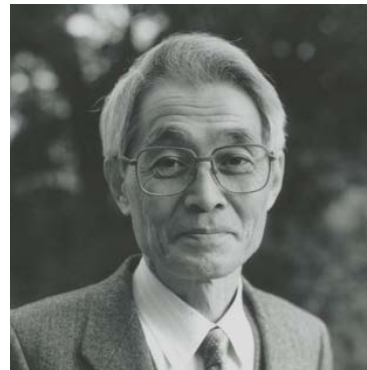
# Подбор $q, Q, p, P$

- Начальные приближения выбираются на основе автокорреляций
- Для сравнения моделей с разными параметрами используется информационный критерий Акаике

$$AIC = 2k - 2\ln(L),$$

$k$  – количество параметров модели ( $k = p + P + q + Q + 1$ ),

$L$  – максимум функции правдоподобия модели



Хироцугу Акаике  
(Hirotugu Akaike)

1927-2009

# Содержание

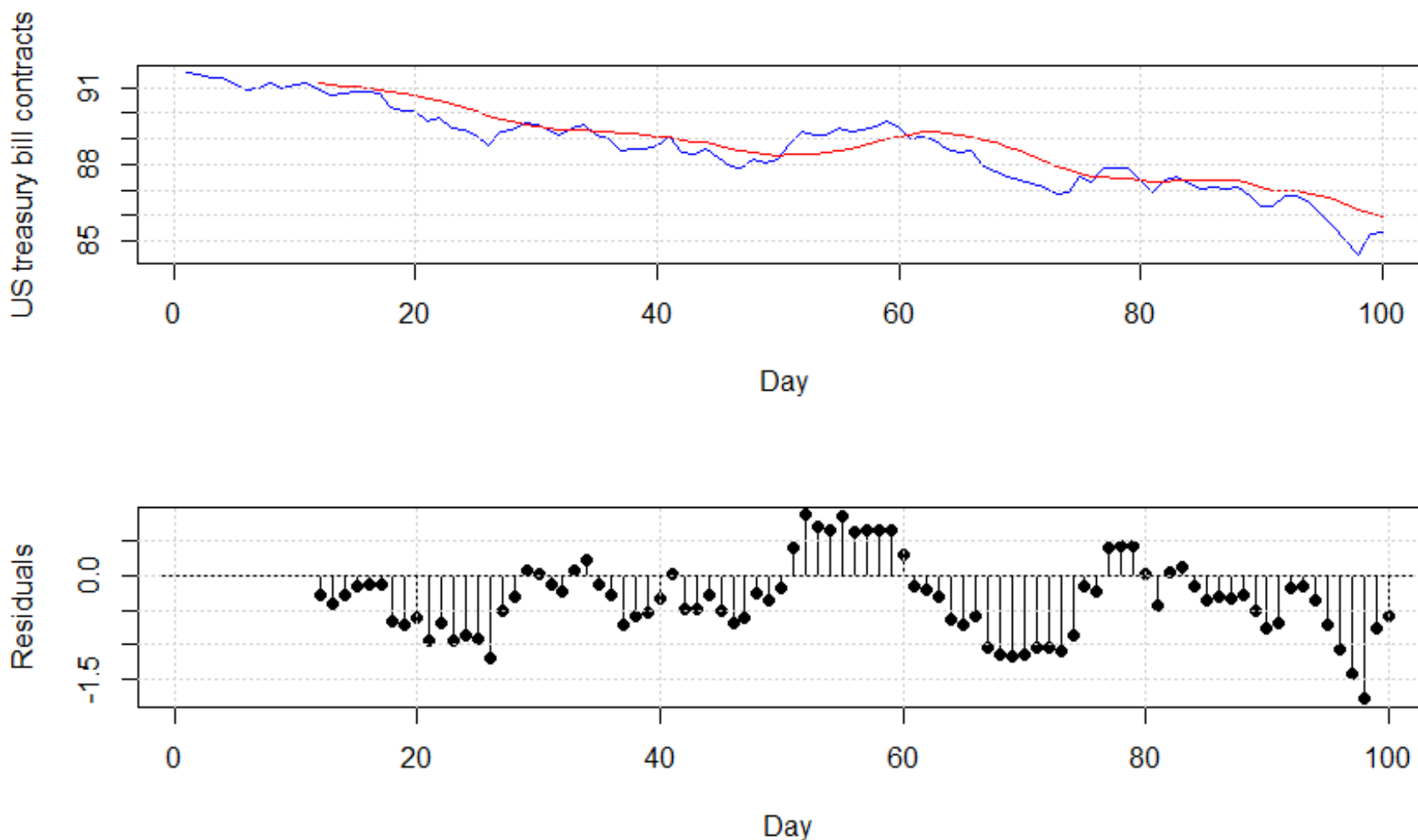
- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- **Анализ остатков**
- Построение прогноза



**Остатки (residuals):  $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$ , разность между фактом и прогнозом**

- **Необходимые свойства остатков**
  - несмещенность
  - стационарность
  - неавтокоррелированность
- **Желательные свойства остатков**
  - нормальность распределения

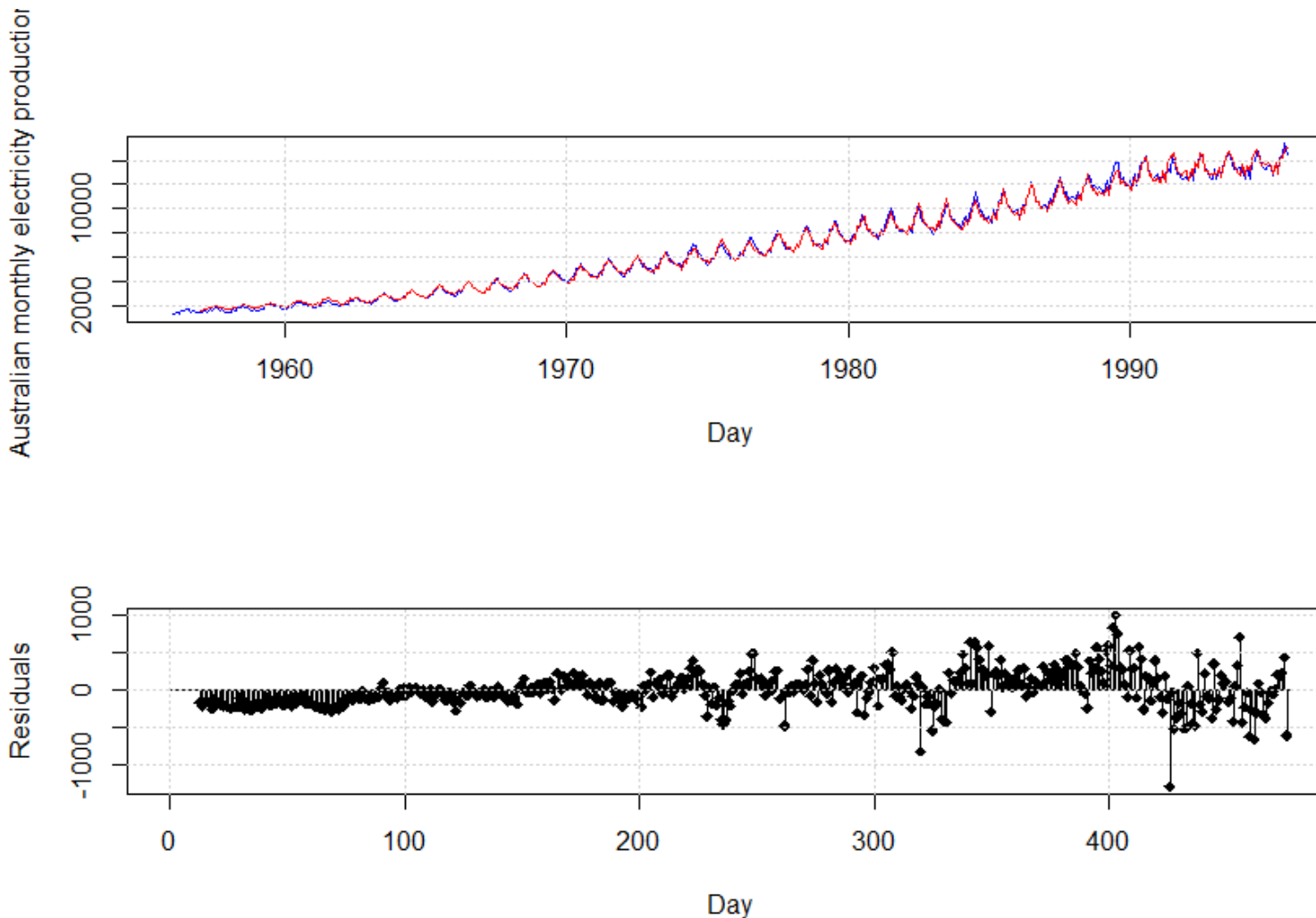
# Несмещенность остатков (равенство нулю среднего значения)



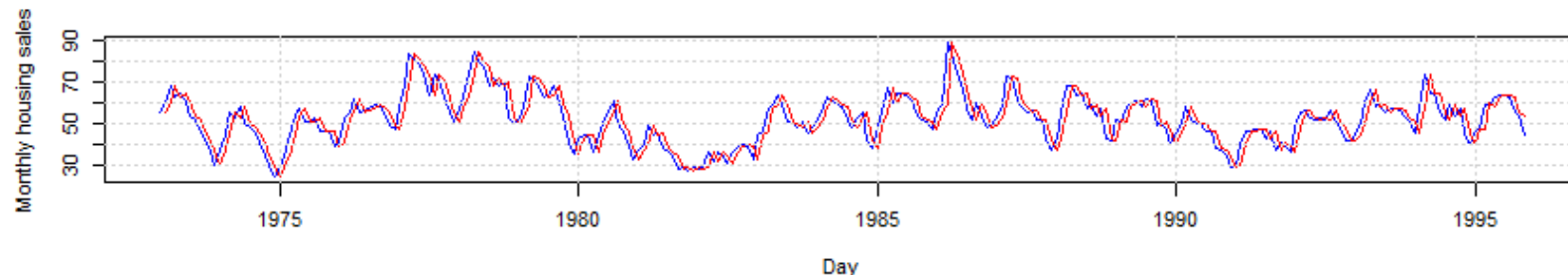
- Проверка критериями Стьюдента или Уилкоксона

# Стационарность остатков

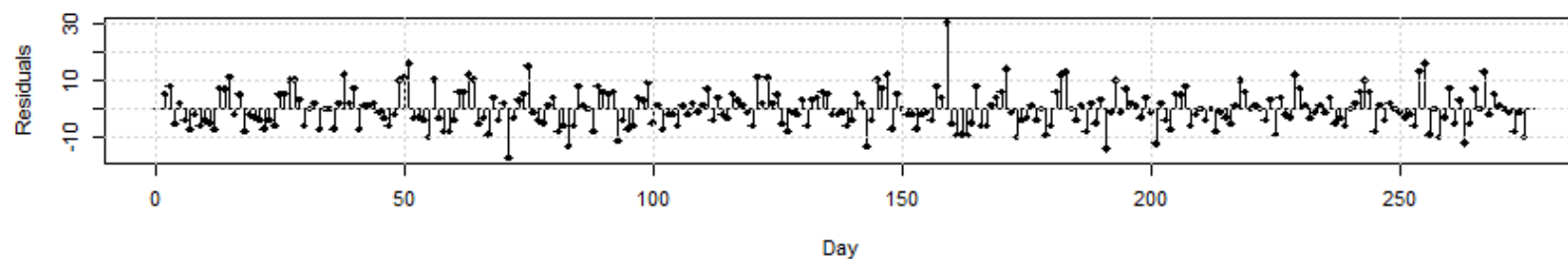
- Визуальная проверка, критерий KPSS



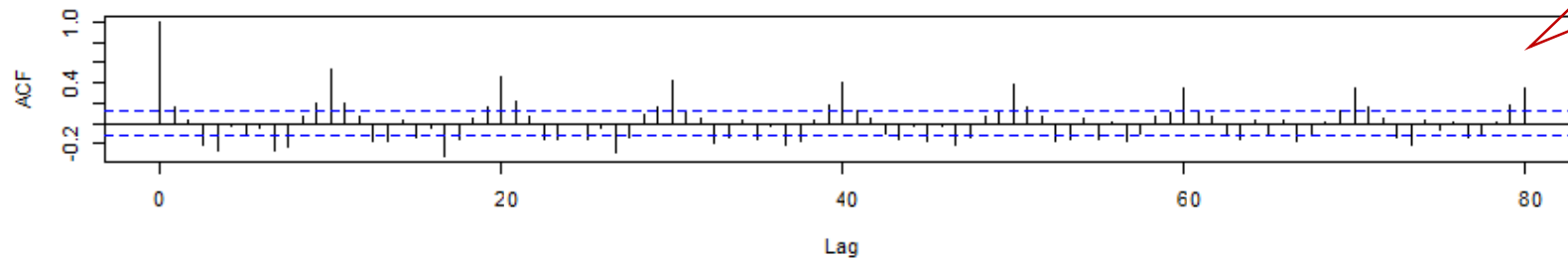
# Неавтокоррелированность остатков



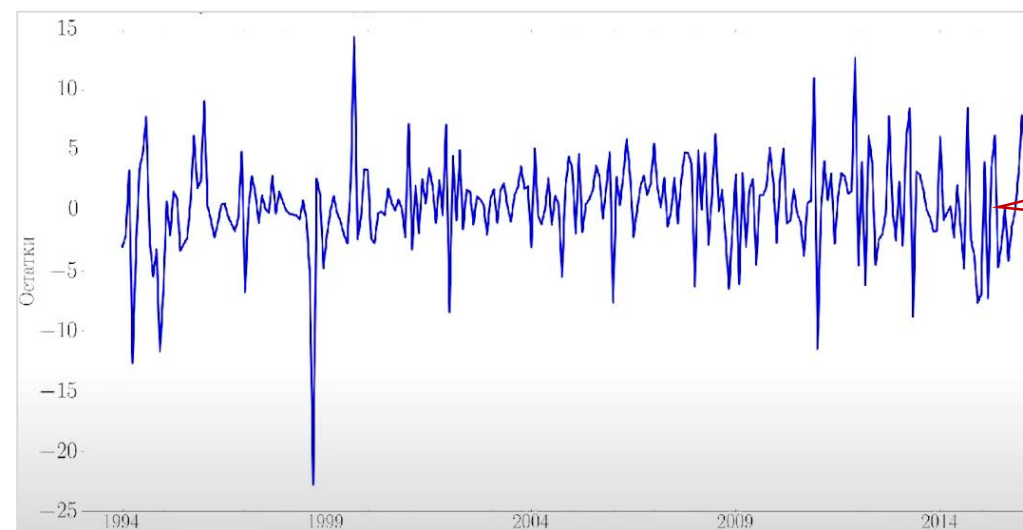
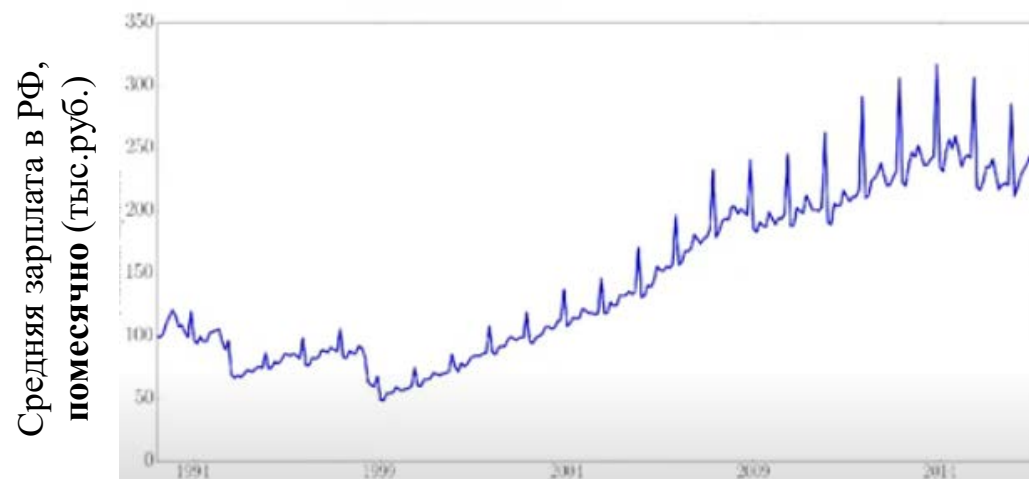
- Визуальная проверка АСФ, Q-критерий Льюнга–Бокса



Отсутствие автокорреляции (белый шум) в остатках показывает, что при прогнозе учтены все зависимости текущего значения ряда от предыдущих

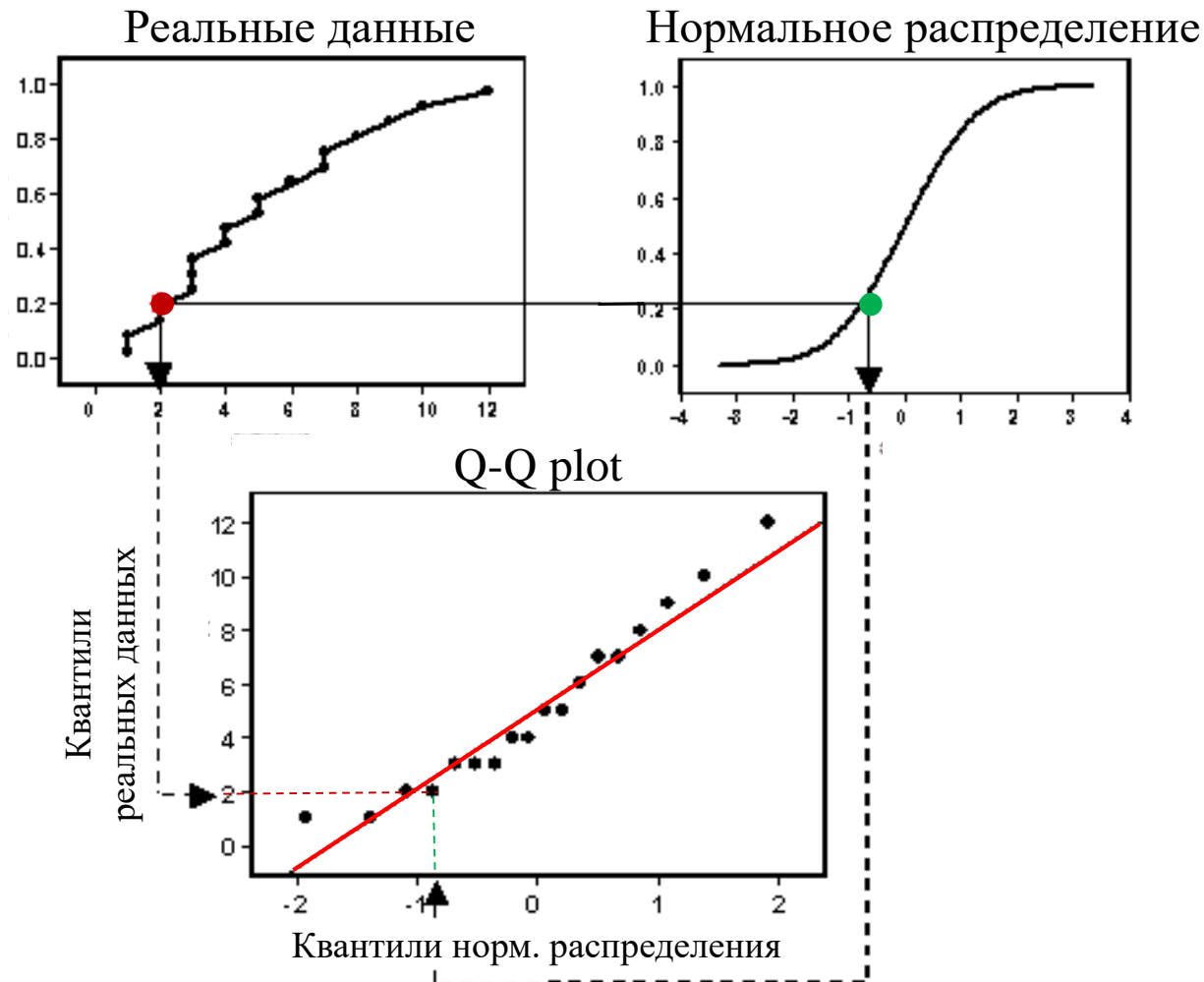


# Пример: остатки модели $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)$



Остатки модели  
выглядят  
как белый шум

# Нормальность распределения остатков



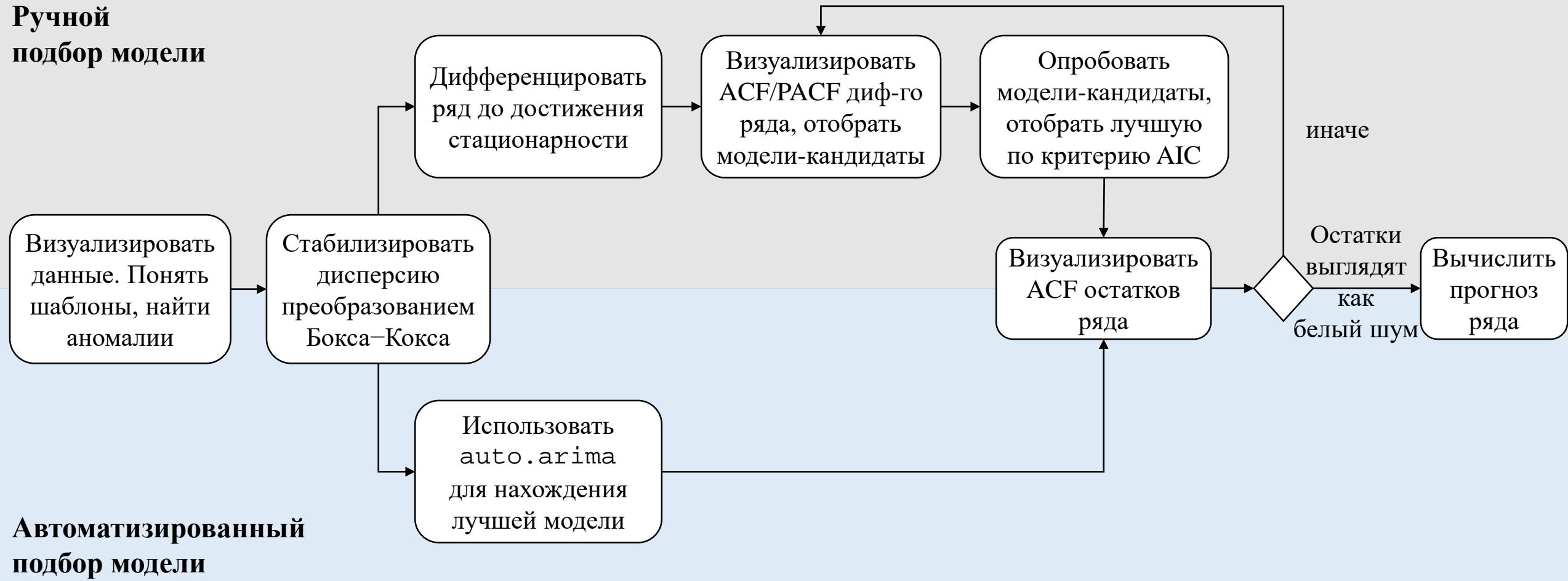
- Визуализация Q-Q plot, один из 20+ критериев нормальности (№ 1 – критерий Шапиро–Уилка)

# Содержание

- Постановка задачи прогнозирования
- Компоненты временного ряда
- Автокорреляция временного ряда
- Стационарность и стабилизирующие преобразования ряда
- Модель AR (авторегрессия ряда)
- Модель MA (скользящее среднее ряда)
- Модели ARMA, ARIMA, SARMA, SARIMA
- Подбор параметров моделей
- Анализ остатков
- **Построение прогноза**

# Общая схема прогноза

## Ручной подбор модели





# Вычисление прогноза

- Модель

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$$

# Вычисление прогноза

- Модель

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$$

- Замена  $t$  на  $T + 1$

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \varepsilon_{T+1} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$

# Вычисление прогноза

- Модель

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$$

- Замена  $t$  на  $T + 1$

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_{T+1} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$

- Замена будущих ошибок на нули

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \mathbf{0} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$



# Вычисление прогноза

- Модель

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$$

- Замена  $t$  на  $T + 1$

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \varepsilon_{T+1} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$

- Замена будущих ошибок на нули

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \hat{\theta}_1 \mathbf{\varepsilon}_T + \dots + \hat{\theta}_q \mathbf{\varepsilon}_{T+1-q}$$

- Замена прошлых ошибок на остатки

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_T + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T+1-q}$$



# Вычисление прогноза

- Модель

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$$

- Замена  $t$  на  $T + 1$

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \varepsilon_{T+1} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$

- Замена будущих ошибок на нули

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \hat{\theta}_1 \varepsilon_T + \dots + \hat{\theta}_q \varepsilon_{T+1-q}$$

- Замена прошлых ошибок на остатки

$$\hat{y}_{T+1|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 y_T + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+1-p} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_T + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T+1-q}$$

- Применение прогнозного значения в будущих прогнозах

$$\hat{y}_{T+2|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 \mathbf{y}_{T+1} + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+2-p} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_{T+1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T+2-q}$$
$$\hat{y}_{T+2|T} = \hat{\alpha} + \hat{\phi}_1 \hat{y}_{T+1|T} + \dots + \hat{\phi}_p y_{T+2-p} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_{T+1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T+2-q}$$

# Реализация в R, пакет forecast

## Подбор оптимальных параметров ARIMA

```
auto.arima(x, d=NA, D=NA, max.p=5, max.q=5,  
  max.P=2, max.Q=2, max.order=5, max.d=2,  
  max.D=1, start.p=2, start.q=2, start.P=1, start.Q=1,  
  stationary=FALSE,  
  seasonal=TRUE, ic=c("aicc", "aic", "bic"),  
  stepwise=TRUE, trace=FALSE,  
  approximation=(length(x)>100 | frequency(x)>12),  
  truncate=NULL, xreg=NULL,  
  test=c("kpss", "adf", "pp"),  
  seasonal.test=c("ocsb", "ch"), allowdrift=TRUE,  
  allowmean=TRUE, lambda=NULL,  
  parallel=FALSE, num.cores=2, ...)
```

## Прогноз по подобранной модели

```
forecast(object,  
  h=ifelse(frequency(object)>1,  
    2*frequency(object),10),  
  level=c(80,95), fan=FALSE, robust=FALSE,  
  lambda=NULL, find.frequency=FALSE,  
  allow.multiplicative.trend=FALSE, ...)
```

Параметр  $\lambda$   
преобразования Бокса–Кокса  
подбирается вручную

# Литература

1. Hyndman R.J., Athanasopoulos G. Forecasting: principles and practice (2nd edition). OTexts: Melbourne, Australia, 2018.  
<https://otexts.com/fpp2/>
2. Hyndman R.J., Athanasopoulos G. Forecasting: principles and practice (3rd edition). OTexts: Melbourne, Australia, 2021.  
<https://otexts.com/fpp3/>
3. Сильвер Н. Сигнал и Шум. Почему одни прогнозы сбываются, а другие – нет. М.: Колибри, 2015. 608 с.