
承诺书

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

日期: 2018 年 09 月 16 日

(请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面, 注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对, 如填写错误, 论文可能被取消评奖资格。)

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2018 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人						
备 注						

送全国评阅统一编号（由赛区组委会填写）：

全国评阅随机编号（由全国组委会填写）：

（请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。）

高温作业专用服装热传递模型

摘要

摘要隔热服的传热特性决定了隔热服能否有效隔热。我们建立了数学模型来模拟隔热服的热传导过程，并对隔热服的设计提出了建议。

针对问题一：要计算温度分布我们需要确定在一维均匀介质中热传导的方程， $\frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$ 其中 T 为温度， k 为热传导系数， c 为比热容， ρ 为密度。我们用差分法在程序中模拟热传导方程，题目给定的数据为微分方程的在一端边界条件，另一端边界条件为环境温度，通过 MATLAB® 模拟算得数据。

针对问题二：问题二没有给定人体一端的边界条件，而偏微分方程要有解必须有边界条件。我们构想了两种模型，来确定在人体一端的边界条件，其中第一种模型夹着在边界上热流为 0，即人体不吸热。第二种模型，将人看成在热传导中的第五层介质，并且要拟合人体的热扩散系数来匹配模型，最终采用第二种模型再对不同的二层厚度采用二分搜索，找到最少的第二层厚度。

针对问题三：观察到第四层的热扩散率远大于第二层，因此可以认为第四层的厚度比起第二层对整体的影响的小得多，结合实际情况中，第四层空气厚度不易控制，因此为确保安全，假设第四层厚度为最小值 0.6，仍然用二分法找到满足要求的第二层最小厚度。

关键字： 热传导 偏微分方程 二分法 差分法

目录

一、 问题重述.....	2
二、 模型的假设.....	3
三、 符号说明.....	3
四、 问题分析.....	3
4.1 问题一分析.....	3
4.2 问题二分析.....	4
4.3 问题三分析.....	4
五、 模型的建立与求解.....	4
5.1 热传导方程的推导与建立.....	4
5.2 热传导偏微分方程的差分法求解.....	5
5.3 模型在第一题中的应用.....	6
六、 原有模型的修正和推广及在第二、三题中的应用.....	7
七、 模型的不足.....	10
附录 A 热传导模型-matlab 源程序	12
附录 B 第二题代码	13
附录 C 第三题代码	15

一、 问题重述

隔热服通常由三层织物材料构成，分别为 I、II、III 层，其中 I 层与外界环境接触，III 层与皮肤之间还存在空隙，此空隙记为 IV 层。通过数学建模，构建隔热服导热模型。

(1) 对环境温度为 75°C 、II 层厚度为 6 mm、IV 层厚度为 5 mm、工作时间为 90 分钟的情形开展实验，测量得到假人皮肤外侧的温度)。建立数学模型，计算温度分布。

(2) 当环境温度为 65°C 、IV 层的厚度为 5.5 mm 时，确定 II 层的最优厚度，确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。

(3) 当环境温度为 80°C 时，确定 II 层和 IV 层的最优厚度，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。

二、模型的假设

- 专业隔热服的每一层材质均匀
- 隔热服每一层的截面周长远小于厚度
- 不考虑相对论，不考虑热辐射
- 隔热服初始温度为 25°C

1.

三、符号说明

符号	意义
A	截面面积
k	热传导率
Q	传导的热量
ρ	服装材料的质量密度
α	热扩散率
T	温度
t	时间

四、问题分析

通过阅读题目可知，本文给出了一些参数，以及当环境温度为 75°C ，II 层 IV 层厚度已知时测量 90 分钟测得的数据，除此以外还要求利用数学模型算出特定情况下的温度分布，最后确定不同环境温度下的衣服隔热层的最优厚度，下面是具体分析过程：

4.1 问题一分析

欲计算温度分布，我们根据已知的条件入手，一层外的环境温度 75°C ，三层织物材料以及空气层厚度都已知，所以我们只需通过推导热传导方程，利用差分法在 MATLAB[®] 中计算出温度分布即可。

首先，推导在单一介质中一维热传导公式，得出结论即温度对时间的偏微分和温度对相对位置二阶偏微分成正比例关系，其比例系数与热传导率，比热，密度相关。在此可用热扩散率代表。

其次，对于四个不同的材质有不同的热扩散率，所以将定义域分成四段，然后把热传导方程利用差分法进行迭代，在 MATLAB® 中模拟。

4.2 问题二分析

根据之前建立的模型假设，利用第一题的所给的数据，用最小二乘法求出人体的热扩散率，建立人体吸热模型，通过热传导方程的模拟，二分查找求出最终 II 层的最优厚度。

4.3 问题三分析

利用上一问建立的模型，通过大范围的尝试，我们发现第四层厚度的变化对结果的影响较小。同时我们发现第四层的热扩散率远大于第二层的，印证了之前尝试的结论。为求解最优厚度，需要从两方面考虑：

- 一、从节省材料出发，取第四层最厚，因此第二层取到最小。
- 二、从安全出发，取第四层最薄，从而满足要求的第二层厚度对所有第四层的厚度都能保证安全。

五、模型的建立与求解

5.1 热传导方程的推导与建立

设一函数 $T(x, t)$ 为温度随位置 x 和时间 t 的函数，其中位置 x 以最外层为零点，向内为正方向。

在热传导介质中取一个小薄片，根据傅里叶定律，有

$$dQ = -kA \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

其中 A 为截面面积， k 为热传导率， dQ 为传导的热量。

考虑一小段时间 Δt ，薄片右侧温度变化了 ΔT 。由比热容的定义可知薄片右侧的吸热为

$$c\Delta T(x_2 - x_1)A\rho$$

根据能量守恒，

$$\Delta t \left[-kA \frac{\partial T}{\partial x} (x = x_1) + kA \frac{\partial T}{\partial x} (x = x_2) \right] = c\Delta T(x_2 - x_1)A\rho$$

两边化简得

$$\frac{k}{c\rho(x_2 - x_1)} \left[\frac{\partial T}{\partial x}(x = x_2) - \frac{\partial T}{\partial x}(x = x_1) \right] = \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

令 $x_2 \rightarrow x_1$, 且 $\Delta t \rightarrow 0$ 最终得:

$$\frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

定义热扩散率 $\alpha = \frac{k}{c\rho}$, 我们得到热传导方程

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

要求解这个偏微分方程, 我们必须要有这个方程的边界条件。在这个情况下, 就是温度在 $x = 0$ 和 $x = L$ 的函数, 其中 L 为一维介质的长度。

5.2 热传导偏微分方程的差分法求解

为了求解此微分方程, 尝试将该差分方程建立单介质模型, 并用程序求解。根据差分法, 我们将介质分成 n 离散个点, 这时热传导方程 (2) 转化为

$$\frac{\Delta T}{\Delta t}(i) = \frac{\alpha}{\Delta x^2} [(T_{i+1} - T_i) - (T_i - T_{i-1})] \quad (4)$$

根据第一题所给条件, 我们有边界条件

$$\begin{cases} T(x = 0, t) = T_0 \\ T(x = L, t) = f(t) \end{cases}$$

其中 $f(t)$ 为第一题所给定的在不同时间测量的皮肤的温度。

将 L 平均分成 n 份, 得到每份的厚度 $dx = \frac{L}{n}$; 假设每段的初始温度都为 25°C , 并且设置每段温度在时间上的导数为零, 即 $dT/dt(i) = 0$ 通过式 (3), 依据每个时刻整个材料上的温度分布, 可以计算出每份薄片上温度对时间的导数即 $dT/dt(i)$ 。根据边界条件可以通过把 $T(0)$ 恒定为外界温度 T_0 , $T(n+1)$ 恒定为身体温度 37°C

并在每个小时刻 dt 下, 利用公式

$$T(i) := T(i) + \frac{dT}{dt}(i)dt$$

对 T 进行赋值, 不断循环, 得到当前时刻的温度 $T(i)$ 。代码实现为

```
for(i = 1:length(t))
    for(j = 2:n-1)
        dT_dt(j) = alpha * ((T(j+1)-T(j))/dx^2-(T(j)-T(j-1))/dx^2);
    end
    dT_dt(1) = alpha * (-(T(1)-Tout)/dx^2 + (T(2)-T(1))/dx^2);
    dT_dt(n) = alpha * (-(T(n)-T(n-1))/dx^2 + (Tin0-T(n))/dx^2);
    T(i) = T(i) + dT/dt(i) * dt
end
```

在代码调试中，我们取用第一类介质条件，把热扩散率 α 设置成介质一的 α ，将介质厚度 L 设置成第一层介质厚度 L_1 ，并设置边界条件分别为外部温度 T_{out} 恒定为 75°C ，内部为人体的温度 T_{in0} 恒定 37°C ，我们发现 dt 与 dx 必须有相近的数量级，才能使得程序正常的运行，否则程序会崩溃。通过重新研究算法，我们发现，由于在偏微分方程中， dt 与 dx 是同阶无穷小，所以 dt 与 dx 的大小需要相近。而如果 dx 太大，精度过低，如果 dx 太小，会使得相应的 dt 太小，那么计算效率过低，将会使单次计算的时间花费过长。经过我们的调试，我们选择了 n 的数量为 20，得到了合适大小的 dx 。最终通过程序模拟出了温度分布。图一为 100ms 时刻单介质温度分布图

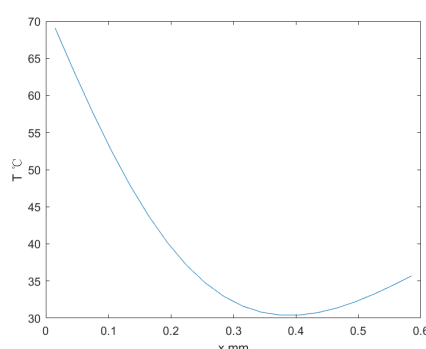


图 1 100ms 时刻单介质温度分布图

5.3 模型在第一题中的应用

在第一题的模型中，四层热传导层全部已知，接下来只需要在不同的 x 段，选取不同的热扩散率 α 。

材料	密度 (kg/m ³)	比热 (J/(kg · °C))	热传导率 (W/(m · °C))	热扩散率 (m ² /s)
I	300	1377	0.082	0.198499153
II	862	2100	0.37	0.204397304
III	74.2	1726	0.045	0.351372539
IV	1.18	1005	0.028	23.61075976
water	1040	4200	0.599	0.1371337

表 1 不同材料的热传导率 α 对比图

代码实现为：

```
if j <= n1
```



```

        alpha = alpha1;
elseif j <= n1+n2
    alpha = alpha2;
elseif j <= n1 + n2 + n3
    alpha = alpha3;
else
    alpha = alpha4;
end
end

```

通过计算出四种材料的 α 对比由表 1 给出。

根据要求，在此把边界条件设置为，外层恒定为 75°C ，内层温度与皮肤设定为第一问所给的皮肤表层温度。外层温度设定代码实现仍按照单层介质，内层温度设定代码实现通过循环，将每秒的皮肤表层温度设定为题目附件所给温度，代码实现：

```

if(t(i) == skintemp(k,1))
    T(n) = skintemp(k,2);
    k = k+1;
end

```

最终计算出不同时刻各个位置的温度，每隔十秒抽取一个数据，存入到 Excel 表格 answer.xlsx 中。第一题完整代码在文末。

六、原有模型的修正和推广及在第二、三题中的应用

在第二题中，由于不能使用第一题的皮肤表面温度，因此需要对人体的吸热建立一个模型，来确定这个微分方程的一个边界条件。我们考虑了以下几种模型：

1. 将人体视为真空，且人体表面温度等于 IV 的最内部的温度
2. 将人体视为一个厚度足够厚的导热层，其他的热学性质假设与水相同

对于每一种模型，我们将运行结果与第一题中的实验数据对比，以此选择匹配更好的模型。

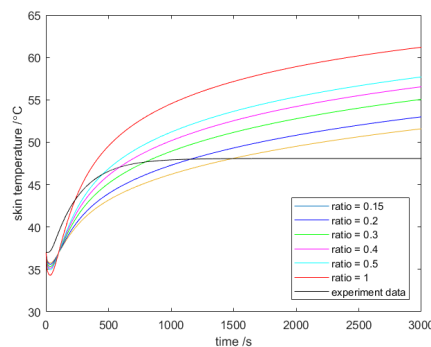


图 2 α 实验数据对比

对于第一种假设，我们改变方程的边界条件。在隔热服的末端有绝热条件，所以在 $x = L_1 + L_2 + \dots + L_5$ 的位置有

$$\frac{dQ}{dt}(x = L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = 0$$

根据 Fourier's law

$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

可以得到

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x = L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = 0$$

因此在差分法的实现中，将最后一个节点的温度值与前一个节点设为相等。经过模型的运算我们发现人体表面温度上升很快。由此推断出误差主要是由于没有考虑人体的吸热导致的，所以接下来考虑第二个模型。

在第二个模型中，我们增加一个导热层（人体），长度 L_5 设为 1000mm（远大于隔热服的厚度），其他热学参数设为与水相同，在人体的末端仍然考虑绝热的边界条件，即

$$\frac{dQ}{dt}(x = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) = 0$$

经过运算后发现人体温度上升过快。我们认为主要的误差来源于没有考虑到人体有自我调温的机制。如果考虑到人体的自我调温，实际的热扩散率 α 会小于在这个模型中取的 α 。因此接下来我们要通过模拟找到一个合适的热扩散率 α 。

将需要计算的参数设置为人体“物质的”热扩散率的倍率，每 10 秒取一次点，将每次模拟的结果与第一题的实验数据做最小二乘法，通过二分法找到偏差最小的一个 α 。

题目给出的实验数据中观察到，在 1100 秒左右皮肤温度就上升至 48°C 左右，以后温度几乎不再上升。我们认为与事实情况不符。人体由隔热服完全包裹，没有向外散热的途径（热辐射可以忽略不计），人体表面的温度应该会持续上升，假如时间无限长最终体表温度会与外界环境相同。也就是说，在数据上体表温度应该会收敛于外界环境温度，而不是所给数据中的 48°C 左右。所以我们将给定数据中从靠近 48°C 左右的后半部分都舍弃不用，只使用前 1110 秒的数据。计算最小二乘的公式为：

$$\sum_{i=1}^n (T_\alpha(i) - T_0(i))^2$$

其中 T_α 为模拟得到的温度， T_0 为实验的数据温度， n 为节点总数，此情形下为 110。

我们需要调整的参数为水 α 的倍率，为精确到 1 位小数，取了 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0 六个数据，其中 1 作为对比。最终找到：人体的热扩散率 α 为水的 0.4 倍为最优解。于是得到了经过修正和优化的模型，可以用于第二题和第三题的计算。

接下来运用二分法，将第二层的厚度 L_2 从 6mm 到 25mm 二分，最终精确到一位小数得到 23.1mm 的厚度下限。

对于第三题我们先选取了不同大小的 L_2 分别为 15, 20, 23, 25mm 和不同大小的 L_4 为 0.6, 3.5, 6.4mm, 发现 L_4 对结果的影响远小于 L_2 对结果的影响。而它们的 α 的数量级差距也印证了这一点。

于是有了两种考虑：

第一种：当 L_4 越大的时候，就可以取到 L_2 越小的情况，因为 L_4 是空气，所以越小的 L_2 将会节省更多的材料，在这种情况下，我们将 L_4 定于最大值 6.4，然后通过 L_2 进行二分，算出满足条件的最小 L_2 ，最后给出结果为 $L_2 = 6.4\text{mm}$, $L_4 = 19.2\text{mm}$ 。

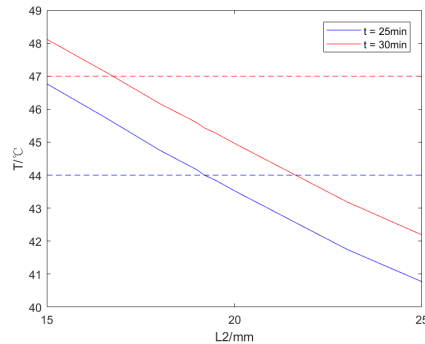


图3 L_2 在 6.4mm 时最终温度随 L_4 的变化

第二种：因为 L_4 为空气，而衣服贴着皮肤的这部分空气是没法人为确定的，为了尽量确保安全，我们将空气层 L_4 定为最小值。在这种 L_4 的情况下，利用二分法找到满足条件的 L_2 ，给出结果哦为 $L_2 = 0.6\text{mm}$, $L_4 = 22\text{mm}$ 。

对于两种考虑的结果，我们更加倾向于后者确保安全的情况，那么最终将答案定为 $L_2 = 0.6\text{mm}$, $L_4 = 22\text{mm}$ 。

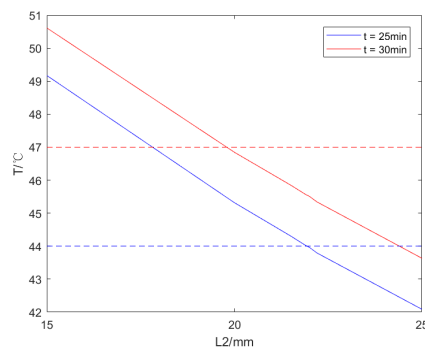


图4 L_2 在 0.6mm 时最终温度随 L_4 的变化

第二三题完整代码在文末。

七、模型的不足

1. 人体的厚度并不是在每个地方都是均匀的，比如四肢的厚度和隔热服的厚度相比就不是很大。
2. 第四层的起始温度受人体皮肤的影响可能高于常温。

参考文献

- [1] JEARL WALKER , principle of physics 10th, P535, 10th edition.
- [2] Kody powell, 'Solving the Heat Diffusion Equation (1D PDE) in Matlab', 26 Aug 2017.

附录 A 热传导模型—matlab 源程序

```
function [] = thermal_newone1_4()

load('data.mat');
L1 = 0.6; % thickness of layerI, mm
L2 = 6;   % thickness of layerII, mm
L3 = 3.6; % thickness of layerIII, mm
L4 = 5;   % thickness of layerIV, mm

alpha1 = 0.19849915; %thermal para of layerI
alpha2 = 0.2043973;  %thermal para of layerII
alpha3 = 0.35137254; %thermal para of layerIII
alpha4 = 23.61075976; %thermal para of layerIV

n1 = 7;
dx = L1/n1;

n2 = floor(L2/dx);
n3 = floor(L3/dx);
n4 = floor(L4/dx);
%n5 = floor(L5/dx);

n = n1+n2+n3+n4; % number of the node

T0 = 25;          % initail costum temparture
Tout = 75;        % Temparture ouside

dt = 0.0001;

dT_dt = zeros(1,n);

T = T0 * ones(1,n);

t_final = 5400; % end time
t = 0: dt : t_final;

tempMatrix = T(1:n);

k = 1;
for i = 1:length(t)

    if(t(i) == skintemp(k,1))
        T(n) = skintemp(k,2);
```

```

        k = k+1;
    end

    for j = 2:n-1
        if j <= n1
            alpha = alpha1;
        elseif j <= n1+n2
            alpha = alpha2;
        elseif j <= n1 + n2 + n3
            alpha = alpha3;
        else
            alpha = alpha4;
        end

        dT_dt(j) = alpha * ((T(j+1)-T(j))/dx^2-(T(j)-T(j-1))/dx^2);
    end
    dT_dt(1) = alpha1 * ((T(2)-T(1))/dx^2-(T(1)-Tout)/dx^2);

    T = T + dT_dt * dt;

    if (mod(i,10/dt)==0)
        tempMatrix = [tempMatrix;zeros(1,n); T(1:n)];
    end
    if (mod(i,20/dt)==0)
        file_name = [num2str(int32(t(i))), 'sFile.mat'];
        save(file_name,'tempMatrix','dT_dt');
    end

    if isnan(T(1))
        break;
    end
    disp(t(i));

end
final_file_name = ['answer_L2_' num2str(L2) '.mat'];

save(final_file_name, 'tempMatrix');
disp('end');
end

```

附录 B 第二题代码

```

function [] = thermal_newone_latest2_4(racial, L2)

L1 = 0.6; % thickness of layerI, mm

```

```

L3 = 3.6; % thickness of layerIII, mm
L4 = 5;   % thickness of layerIV, mm
L5 = 100; % Assuming thinckness of body, mm

alpha1 = 0.19849915; %thermal para of layerI
alpha2 = 0.2043973;  %thermal para of layerII
alpha3 = 0.35137254; %thermal para of layerIII
alpha4 = 23.61075976; %thermal para of layerIV
alpha5 = 0.1371337*racial;

n1 = 7;
dx = L1/n1;

    % number of the node
n2 = floor(L2/dx);
n3 = floor(L3/dx);
n4 = floor(L4/dx);
n5 = floor(L5/dx);

n = n1+n2+n3+n4;

T0 = 25;    % initail costum temparture
Tout = 75;  % Temparture ouside
Tin0 = 37;  % initail Temparture inside

dt = 0.00015; % the step long of time

dT_dt = zeros(1,n+n5); % initial rate of change

T0 = T0 * ones(1,n);
T5 = Tin0 * ones(1,n5);
T = [T0 T5];

t_final = 5400; % end time
t = 0: dt :t_final;

tempMatrix = T(n);

for i = 1:length(t)

    for j = 2:n+n5-1
        if j <= n1
            alpha = alpha1;
        elseif j <= n1+n2
            alpha = alpha2;
        elseif j <= n1 + n2 + n3

```



```

        alpha = alpha3;
    elseif j <= n1+n2+n3+n4
        alpha = alpha4;
    else
        alpha = alpha5;
    end

    dT_dt(j) = alpha * ((T(j+1)-T(j))/dx^2-(T(j)-T(j-1))/dx^2);
end
dT_dt(1) = alpha1 * ((T(2)-T(1))/dx^2-(T(1)-Tout)/dx^2); %the rate of change of first node
dT_dt(n+n5) = alpha5 * (-(T(n+n5)-T(n+n5-1))/dx^2); %the rate of change of first node

T = T + dT_dt * dt;

if (t(i) == fix(t(i)))
    display(t(i));
end

if mod(i,10/dt)==0    % Every 10s we get a temperature
    tempMatrix = [tempMatrix; T(n)];
end

end
save('F:/Matlab/Q2/rac_05/answer.mat', 'tempMatrix');
disp('end');

```

附录 C 第三题代码

```

function [] = thermal_newone_latest3_3(L2, L4)

L1 = 0.6; % thickness of layerI, mm
L3 = 3.6; % thickness of layerIII, mm
L5 = 100; % Assuming thinckness of body, mm

alpha1 = 0.19849915; %thermal para of layerI
alpha2 = 0.2043973; %thermal para of layerII
alpha3 = 0.35137254; %thermal para of layerIII
alpha4 = 23.61075976; %thermal para of layerIV
alpha5 = 0.1371337*0.4;

n1 = 7;
dx = L1/n1;

```

```

        % number of the node
n2 = floor(L2/dx);
n3 = floor(L3/dx);
n4 = floor(L4/dx);
n5 = floor(L5/dx);

n = n1+n2+n3+n4;

T0 = 25;      % initail costum temparture
Tout = 75;    % Temparture outside
Tin0 = 37;    % initail Temparture inside

dt = 0.00015; % the step long of time

dT_dt = zeros(1,n+n5); % initial rate of change

T0 = T0 * ones(1,n);
T5 = Tin0 * ones(1,n5);
T = [T0 T5];

t_final = 5400; % end time
t = 0: dt :t_final;

tempMatrix = T(n);

for i = 1:length(t)

    for j = 2:n+n5-1
        if j <= n1
            alpha = alpha1;
        elseif j <= n1+n2
            alpha = alpha2;
        elseif j <= n1 + n2 + n3
            alpha = alpha3;
        elseif j <= n1+n2+n3+n4
            alpha = alpha4;
        else
            alpha = alpha5;
        end

        dT_dt(j) = alpha * ((T(j+1)-T(j))/dx^2-(T(j)-T(j-1))/dx^2);
    end

    dT_dt(1) = alpha1 * ((T(2)-T(1))/dx^2-(T(1)-Tout)/dx^2); %the rate of change of first node
    dT_dt(n+n5) = alpha5 * (-(T(n+n5)-T(n+n5-1))/dx^2); %the rate of change of first node

    T = T + dT_dt * dt;

```

```
if (t(i) == fix(t(i)))  
    display(t(i));  
end  
  
if mod(i,10/dt)==0    % Every 10s we get a temperature  
    tempMatrix = [tempMatrix; T(n)];  
end  
  
end  
save('F:/Matlab/Q2/rac_05/answer.mat', 'tempMatrix');  
disp('end');  
  
end
```