

嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略

摘要

我国嫦娥三号卫星已成功完成月球表面软着陆。卫星在高速飞行的情况下，要保证准确地在月球预定区域内实现软着陆，关键问题是着陆轨道与控制策略的设计。而本文主要研究的就是卫星绕月飞行以及着陆过程中的一系列问题。

针对问题一，要确定着陆准备轨道近月点和远月点的位置，本文用经、纬度及高度来表示位置。通过嫦娥三号卫星的着陆轨迹结合经纬度计算方法即可推出近月点的位置，由于近、远月点的连线过球心，故可由对应关系求得远月点的位置。又因为卫星所有可能的着陆轨迹在月球表面的投影为一个半圆，故近月点位置不唯一，且位置范围应为一个半圆周，远月点同理。

再求卫星在准备着陆轨道近月点和远月点的速度，采用能量法。因卫星在准备着陆轨道只受万有引力作用，故可根据能量守恒定律结合开普勒面积定律建立求解速度的模型。最后得到卫星在近月点速度大小为 $v=1692.2m/s$ ，远月点速度大小为 $v'=1613.9m/s$ ，速度方向均为沿轨迹的切线方向。

针对问题二，由于主减速阶段水平方向的初速度和竖直方向的降落高度较其他阶段要大很多，所以整个着陆过程中的燃料消耗集中在这一阶段。本文在主减速阶段通过建立极坐标来表示卫星着陆轨道 $S(r_0(t), \theta(t))$ ，并结合约束条件建立相关微分方程模型对轨道进行求解。再建立耗燃最少的目标函数，利用贪婪算法寻找到最优控制策略 $u(t)=u(F, \psi)$ 。

而对于其余各阶段，在达到满足关键点状态的基础上，找到一种次优化模型减少燃料的消耗。最终，求得整个软着陆过程的燃料消耗量为 $1217.2kg$ ，所经历的总时间为 $570.1519s$ 。

针对问题三，在软着陆各阶段中，主减速阶段消耗的燃料最多，该阶段的误差对于整个优化过程也是至关重要。通过分析主减速阶段的优化结果，将主推力 F 与夹角 ψ 敏感度进行比较，可知 ψ 对优化结果影响更为显著，所以为减少误差要着重控制夹角 ψ 。

关键词： 能量守恒定律；开普勒定律；贪婪算法；最优控制策略；目标函数

一、问题重述

嫦娥三号于 2013 年 12 月 2 日 1 时 30 分成功发射,12 月 6 日抵达月球轨道。嫦娥三号在着陆准备轨道上的运行质量为 $2.4t$, 其安装在下部的主减速发动机能够产生 $1500N$ 到 $7500N$ 的可调节推力, 其比冲 (即单位质量的推进剂产生的推力) 为 $2940m/s$, 可以满足调整速度的控制要求。在四周安装有姿态调整发动机, 在给定主减速发动机的推力方向后, 能够自动通过多个发动机的脉冲组合实现各种姿态的调整控制。嫦娥三号的预定着陆点为 $19.51W$, $44.12N$, 海拔为 $-2641m$ (见附件 1)。

嫦娥三号在高速飞行的情况下, 要保证准确地在月球预定区域内实现软着陆, 关键问题是着陆轨道与控制策略的设计。其着陆轨道设计的基本要求: 着陆准备轨道为近月点 $15km$, 远月点 $100km$ 的椭圆形轨道; 着陆轨道为从近月点至着陆点, 其软着陆过程共分为 6 个阶段 (见附件 2), 要求满足每个阶段在关键点所处的状态; 尽量减少软着陆过程的燃料消耗。

根据上述的基本要求, 请你们建立数学模型解决下面的问题:

- (1) 确定着陆准备轨道近月点和远月点的位置, 以及嫦娥三号相应速度的大小与方向。
- (2) 确定嫦娥三号的着陆轨道和在 6 个阶段的最优控制策略。
- (3) 对于你们设计的着陆轨道和控制策略做相应的误差分析和敏感性分析。

二、问题假设

1. 假设月球表面的重力加速度不变, 因为卫星距离月球表面的高度要远远小于月球半径, 故其引起的重力加速度的变化很小, 这里可忽略不计。
2. 不考虑月球的自转, 因为月球自转会对月球表面加速度大小产生影响, 而不考虑自转则万有引力提供向心力, 月球表面重力加速度为恒定的值。
3. 月球引力非球项、日月引力摄动等影响因素均可忽略不计, 因为若考虑到这些力将会影响卫星着陆时的轨迹, 分析受力时也极为复杂。
4. 视月球为规则的球体, 则可根据球的一些性质确定月球的经、纬度变化, 求解轨道及确定位置时较方便。
5. 假设发动机制动时产生内能的耗燃量忽略不计, 若将产生内能的耗燃量也考虑在内, 则求得的耗燃量与实际耗燃量之间存在误差。

三、符号说明

符号	含 义
M	月球质量
m	嫦娥三号卫星初始质量
v	卫星在近日点速度
v'	卫星在远日点速度
v_{xi}	卫星第 i 阶段末水平速度
v_{yi}	卫星第 i 阶段末竖直速度
v_i	卫星第 i 阶段末合速度
E_A	卫星经过近月点的机械能
E_B	卫星经过远月点的机械能
h_i	卫星第 i 阶段的下降高度
t_i	卫星第 i 阶段所用时间
x_i	卫星着陆第 i 阶段水平位移
a_i	第 i 阶段的合加速度
a_{xi}	第 i 阶段加速度 a 的水平分量
a_{yi}	第 i 阶段加速度 a 的竖直分量
m_i	变化的嫦娥三号卫星质量
\dot{m}_i	单位时间燃料消耗的公斤数
F	卫星发动机的推力
a_{Fi}	第 i 阶段推力提供的加速度
M_i	第 i 阶段燃料消耗量

四、问题分析

通过阅读题目全文可知,本文给出一些有关嫦娥三号绕月飞行的相关信息与数据,并主要求解着陆准备轨道近月点和远月点的位置,以及嫦娥三号相应速度的大小与方向和嫦娥三号的软着陆轨道设计与控制策略这两个问题。最后再对设计的着陆轨道和控制策略做相应的误差分析和敏感性分析。下面是具体问题的分析过程:

4.1 问题一分析

欲求着陆轨道近月点和远月点的位置,因题目中给出预定着陆点的位置信息及月球和卫星的质量等一些基本量,且卫星从近月点开始着陆,故可通过嫦娥三

号卫星的着陆轨迹进而推出近月点的位置。而近月点的位置可由经度、纬度和高度来表示，远月点与近月点的连线过月球球心，故其纬度的大小相同，但方向相反，经度的大小互补，方向相反，且近远月点的高度题目已给出分别为 15km 和 100km 。故只要确定近月点的经纬度即可确定其位置。

对于嫦娥三号在近远月点的速度大小与方向，我们可以采用能量法，由于卫星绕月球在准备着陆轨道上只受万有引力作用，故遵循能量守恒定律，再结合开普勒第二定律的面积相等公式，联立便可求得卫星在近远月点的速度大小，而方向即为沿轨道的切线方向。

4.2 问题二分析

根据着陆轨道设计的基本要求：着陆准备轨道为近月点 15km ，远月点 100km 的椭圆形轨道；着陆轨道为从近月点至着陆点，其软着陆过程共分为 6 个阶段（见附件 2），要求满足每个阶段在关键点所处的状态；尽量减少软着陆过程的燃料消耗。

首先，可利用问题一所求得的数据，建立出着陆准备椭圆轨道的方程模型。

其次，再分别考虑软着陆过程的 6 个阶段：

第一阶段着陆准备轨道模型已求出，而对于第二阶段主减速段主要是减小水平方向的速度，由于该阶段水平方向的初速度和竖直方向的位移相比于其他阶段都很大，所以整个着陆过程中的燃料消耗集中在这一阶段，所以燃料优化应该主要在这一阶段进行。

第三阶段快速调整段，快速减小水平方向的速度使其减至零。通过这一给定条件建立相关运动学模型，即可表示出卫星在这一阶段的着陆轨迹。通过轨迹进而求得推力以及这一阶段燃料的消耗量。

第四阶段粗避障段，对图像的每一块区域进行扫描，找出平坦的区域，从而避开大的陨石坑，确定最佳着陆点。同时通过对推力的控制，实现在着陆点上方悬停。

第五阶段精避障段和粗避障过程类似，由于在粗避障阶段我们已经找到了平坦面积大的区域，所以在这一阶段我们根据对这 $100\times 100\text{m}$ 等高线图的分析，选择 $20\times 20\text{m}$ 区域进行扫描，直接以方差为判断标准找出方差最小的区域即为最优着陆点，用欧式距离算出两点之间的水平距离 x_5 。

第六阶段缓速下降阶段，要求实现在距离月面 4m 处相对月面静止。而对于第三、四、五、六阶段着陆轨道的模型，可由关键点的约束条件来建立。且耗燃料量的求解也均可由推力与质量变化递推公式求出。

4.3 问题三分析

要求分析控制策略的误差以及敏感度，根据问题二的求解，可知控制阶段的误差来源主要是重力加速度的变化；由于燃料消耗主要是主减速阶段，所以减少

这一段误差是至关重要的,通过分析优化结果对主推力 F 与夹角 ψ 敏感度比较,可知 ψ 对优化结果影响更为显著,所以在减少误差这一点上要着重控制夹角 ψ 。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 嫦娥三号着陆准备轨道运动模型

由题意可知,嫦娥三号卫星在“落月”前最后一次轨道调整,是从轨道高度 100 公里的环月圆轨道进入到环月椭圆轨道,即通过降轨进入预定的月面着陆准备轨道。如下图 1 所示:

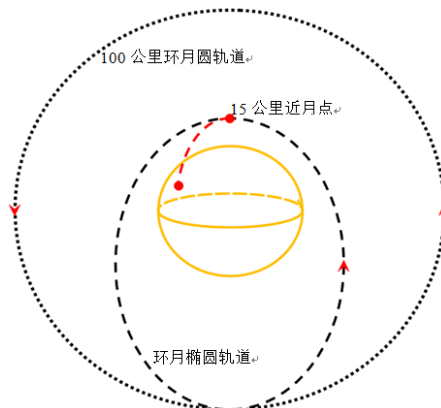


图 1. 嫦娥三号近月轨道示意图

在实施软着陆之前,嫦娥三号还将在这条近月点高度约 15 公里、远月点高度约 100 公里的椭圆轨道上继续飞行。

众所周知,太阳系中的八大行星都在按照各自的椭圆轨道绕太阳进行公转,太阳位于椭圆的一个焦点上,行星的运动遵循开普勒三定律。而本文,我们采用同样的思想来考虑嫦娥三号卫星在着陆准备轨道上的运动。月球位于椭圆轨道其中的一个焦点 F 上,椭圆的半长轴为 a , 半短轴为 b , 半焦距为 c , 月球的质量为 M , 卫星的质量为 m , 卫星运动到近日点 A 的速度为 v , 运动到远日点 B 的速度为 v' , 飞行轨道如下图 2 所示:

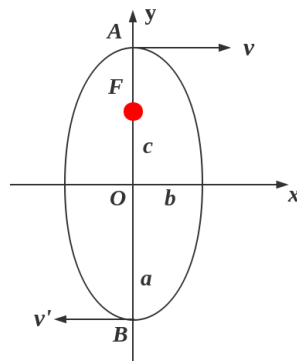


图 2. 嫦娥三号着陆准备轨道示意图

下面，我们从能量的角度来求卫星在近日点和远日点的速度^[1]：

由于速度 v 和 v' 均沿轨迹的切线方向，故速度 v 和 v' 的方向均与椭圆的长轴垂直。

设近月点高度为 r_1 ，远月点高度为 r_2 ，月球的半径为 R ，且 A 、 B 两点距月球球心的距离分别为 L_A 和 L_B ：

$$L_A = r_1 + R \quad (1)$$

$$L_B = r_2 + R \quad (2)$$

在 A 、 B 两点分别取极短的相等时间 Δt ，则卫星与月球连线在这两段时间内扫过的面积分别为

$$\Delta S_A = \frac{1}{2} v \cdot \Delta t \cdot L_A$$

$$\Delta S_B = \frac{1}{2} v' \cdot \Delta t \cdot L_B$$

再根据开普勒第二定律：卫星和月球的连线在相等的时间内扫过相等的面积，故有

$$\Delta S_A = \Delta S_B$$

由此，可推导出两速度之间的关系式

$$v' = \frac{L_A}{L_B} \cdot v \quad (3)$$

卫星绕月运动的总机械能等于其动能和引力势能之和，故当卫星分别经过 A 、 B 两点时的机械能分别为

$$E_A = \frac{1}{2} mv^2 + \left(-\frac{GMm}{L_A} \right) \quad (4)$$

$$E_B = \frac{1}{2} mv'^2 + \left(-\frac{GMm}{L_B} \right) \quad (5)$$

由于卫星在运动过程中只受万有引力作用，所以遵循机械能守恒定律，故有

$$E_A = E_B \quad (6)$$

将 (3) ~ (6) 式联立解得

$$v = \sqrt{\frac{2GML_B}{(L_A + L_B)L_A}} \quad (7)$$

$$v' = \sqrt{\frac{2GML_A}{(L_A + L_B)L_B}} \quad (8)$$

因为 $L_B > L_A$ ，故很明显 $v > v'$ ，正好符合我们对近日点和远日点速度大小的关系的认知。

5.1.2 着陆准备轨道近远月点位置确定模型

求出速度后，我们再确定着陆准备轨道近月点和远月点的位置。这里，我们用经度、纬度和高度三个变量来表示着陆准备轨道近月点和远月点的位置。且题目中已给出嫦娥三号预定着陆点的位置，故由卫星离开近月点到快速调整阶段结束的运动过程，即可推出近月点和远月点的位置。

我们假设卫星下降这两个阶段是做抛物线运动，则这段时间加速度为定值。现将卫星的抛物线运动过程分解为水平和竖直两个方向来求。下降轨迹如下图所示：

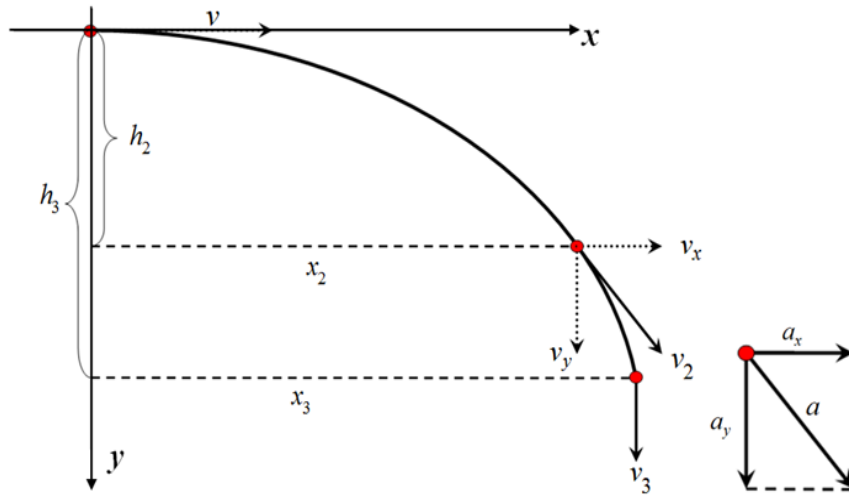


图 3. 卫星下降两阶段的运动轨迹

嫦娥三号卫星从近月点开始做抛物线运动，初速度为 v ，到第二阶段末的水平速度为 v_x ，竖直速度为 v_y ，合速度为 v_2 ，所用时间为 t_2 ，下降的高度为 h_2 。

到第三阶段末，水平方向速度减为 0，位移为 x_3 ，所用的总时间为 t_3 ，下降的高度为 h_3 。

而在这两阶段，加速度 a 为定值，将 a 沿水平和竖直方向分解为 a_x 和 a_y 。

故在竖直方向上，由运动学公式可列得：

$$h_2 = \frac{1}{2} a_y t_2^2 \quad (9)$$

$$h_3 = \frac{1}{2} a_y t_3^2 \quad (10)$$

$$v_y = a_y t_2 \quad (11)$$

水平方向上有

$$v_x = v_0 - a_x t_2 \quad (12)$$

$$v = a_x t_3 \quad (13)$$

又因为 v_x 、 v_y 的合速度为 v_2 ，故有

$$v_2^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (14)$$

联立公式(9)~(14)，即可求得所有的未知量 a_x, a_y, t_1, t_2 ，其中：

$$t_2 = \sqrt{\frac{4 \times h_1 \times h_2}{v_1^2 - (v - v \times \sqrt{\frac{h_1}{h_2}})^2}}$$

由于卫星水平方向做匀减速运动，这里我们用到时间 t_2 和平均速度，求出卫星下落的水平位移为

$$x_3 = \frac{v}{2} \cdot t_3 \quad (15)$$

我们模拟卫星下落的正面示意图，如下所示：

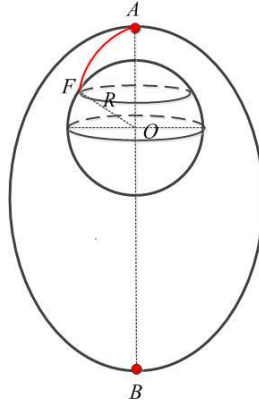


图 4. 卫星软着陆运动轨迹

A 为近月点即卫星离开着陆准备轨道的点， F 为卫星的预着陆点，题目中已给出 F 的位置，经度设为 α_0 ，纬度设为 β_0 ，这里我们用坐标表示为 $F(\alpha_0, \beta_0)$ ， O 为月球球心，故弧 AF 以 OF 为轴旋转一周， A 点的路径即为一个圆周。我们取 AF 绕轴 OF 旋转后在月球球面上所形成的投影，即可得到一个圆，如下图 5 所示：

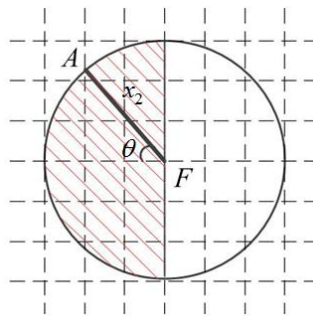


图 5. 卫星近月点位置投影

上图中，横虚线表示月球的纬线，纵虚线表示月球的经线， AF 长度即为前面所求得的卫星水平位移 x_2 ， AF 与纬线的夹角为 θ ，取值范围为

$$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

故图 5 中阴影部分的半圆周即为卫星近月点位置的选取范围。理由如下：

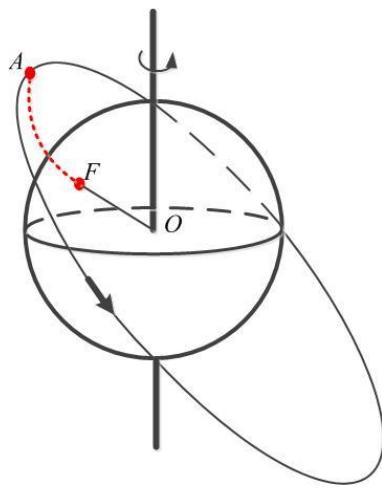


图 6. 正确卫星近月点位置

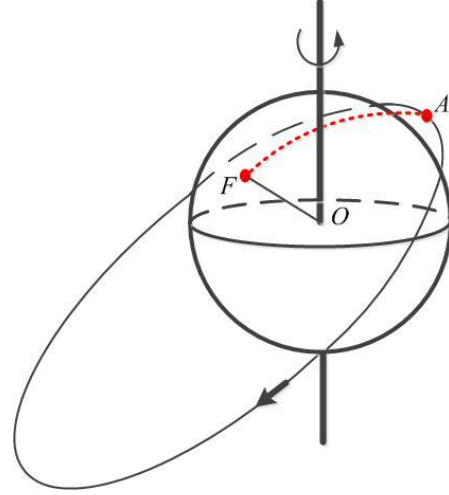


图 7. 错误卫星近月点位置

因为卫星绕月方向与月球自转方向相同，月球绕月轴自西向东转。当近月点 A 的位置在 θ 范围内时，如图 6 所示，卫星在轨道旋转方向与自转方向相同，故从 A 点可下降到预着陆点 F 。而当近月点 A 的位置在 θ 范围之外时，如图 7 所示，卫星绕月旋转方向与月球自转方向相反，故卫星从 A 点下降时不能落到预着陆点 F 。

因此，准备着陆轨道近月点 A 的位置可落在过 F 点经线左侧的半圆周，即 AF 与纬线的夹角 θ 的范围为

$$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

我们假设投影得到的圆所覆盖的经纬度是均匀变化的，1 经度所对应的长度为 s ，1 纬度所对应的长度为 s' ，则表示经度的示意图如下：

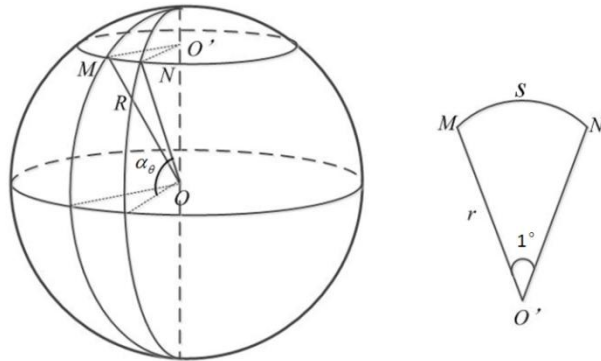


图 8. 月球经度求解示意图

故求得 1 经度所对应 MN 的长度为

$$s = \frac{2\pi R \sin \alpha_\theta}{360} \quad (16)$$

表示纬度的示意图如下：

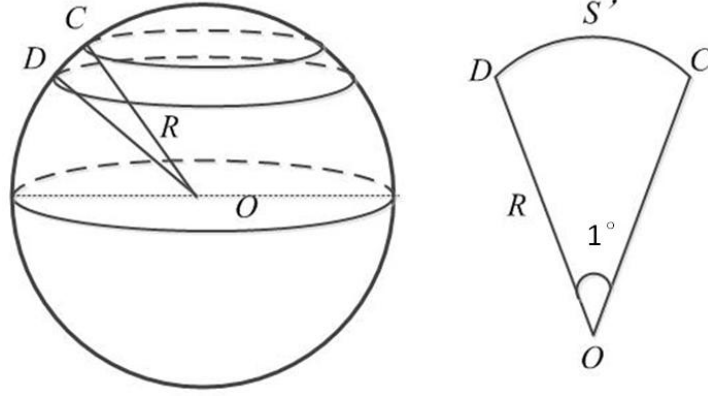


图 9. 月球纬度求解示意图

故求得 1 纬度所对应 CD 的长度为

$$s' = \frac{\pi R}{180} \quad (17)$$

于是，由已知点 F 的经纬度即可求出满足条件的所有 A 点的经纬度，这里 A 点的经度设为 α_θ ，纬度设为 β_θ ，表达式如下：

$$\alpha_\theta = \alpha_0 + x_3 \cos \theta / s \quad (18)$$

$$\beta_\theta = \beta_0 + x_3 \sin \theta / s' \quad (19)$$

由于近月点 A 与远月点 B 的连线经过月球球心，如图 4 所示，故近远月点的经纬度是对称的，求得 A 点经纬度便可知 B 点。再根据题中所给出近远月点高度，即可确定近月点与远月点的位置。

5.1.3 近远月点位置及卫星速度的求解

由 5.1.1 能量关系，以及已知数据：

引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11} N m^2 / kg^2$ ；月球质量 $M = 7.3477 \times 10^{22} kg$

$L_A = 1737.013 + 15 = 1752.013 km$ ； $L_B = 1737.013 + 100 = 1837.013 km$

代入公式 (7)、(8) 求出的嫦娥三号卫星在准备着陆轨道近月点与远月点的速度大小为

$$v = 1692.2 m / s$$

$$v' = 1613.9 m / s$$

速度 v 和 v' 的方向均为沿轨迹的切线方向。

再根据 5.1.2 所建立的模型结合题中已知数据，由公式 (18) 和 (19)，即可得到准备着陆轨道近月点的经纬度为

$$\alpha_\theta = 19.51 + 23.8030 \cos \theta (W)$$

$$\beta_{\theta} = 44.12 + 17.0878 \sin \theta \text{ (N)}$$

远月点的经纬度可表示为

$$\alpha_{\theta} = 160.49 + 23.8030 \cos \theta \text{ (E)}$$

$$\beta_{\theta} = 44.12 + 17.0878 \sin \theta \text{ (S)}$$

其中, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

而近月点高度为 15km , 远月点高度为 100km 。

下面我们例举出几个特殊夹角的近远月点位置, 如下表 1 所示 (这里的位置用表示经度、纬度、高度表示):

表 1. 五个特殊角度的近远月点位置

角度大小	近月点位置	远月点位置
$-\frac{\pi}{2}$	19.5100W, 27.0322N, 15km	160.4900E, 27.0322S, 100km
$-\frac{\pi}{4}$	36.3413W, 32.0371N, 15km	143.6587E, 32.0371S, 100km
0	43.3130W, 44.1200N, 15km	136.6870E, 44.1200S, 100km
$\frac{\pi}{4}$	36.3413W, 56.2029N, 15km	143.6587E, 56.2029S, 100km
$\frac{\pi}{2}$	19.5100W, 61.2078N, 15km	160.4900E, 61.2078S, 100km

而对于其他位置, 应该是一个角度对应一个位置, 在这里就不一一例举。

5.2 问题二模型的建立与求解

建立嫦娥三号的着陆轨道模型, 我们根据着陆轨道设计的基本要求:

- ① 着陆准备轨道为近月点 15km , 远月点 100km 的椭圆形轨道;
- ② 着陆轨道为从近月点至着陆点, 其软着陆过程共分为 6 个阶段 (见附件 2), 要求满足每个阶段在关键点所处的状态;
- ③ 尽量减少软着陆过程的燃料消耗。

再通过综合分析, 建立出优化的着陆轨道模型。

5.2.1 阶段一: 着陆准备轨道模型的建立

首先, 求得要求①的椭圆形着陆准备轨道模型。由 5.1.1 可知, 嫦娥三号卫星飞行的着陆准备轨道示意图如下图 2 (这里借用前文已给出的图) 所示:

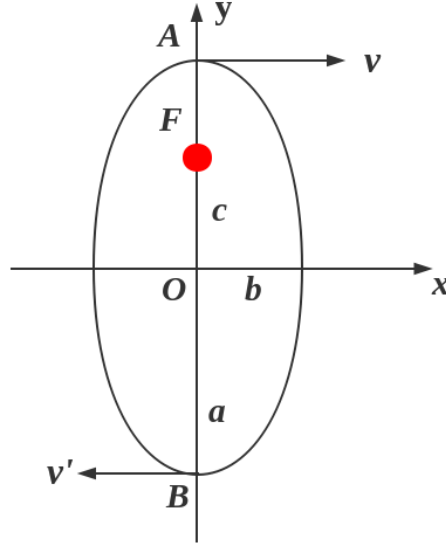


图 2. 嫦娥三号着陆准备轨道示意图

月球位于椭圆轨道其中的一个焦点 F 上，椭圆的半长轴为 a ，半短轴为 b ，半焦距为 c ，且 A 、 B 两点距月球球心的距离分别为 L_A 和 L_B ，则有

$$L_A = a - c \quad (20)$$

$$L_B = a + c \quad (21)$$

L_A 和 L_B 的值已由 5.1.3 求出，代入(20)和(21)式后联立即可解得 a, c 的值。再由数学公式可得椭圆轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (22)$$

其中， $b^2 = a^2 - c^2$ 。

5.2.2 着陆准备轨道模型的求解

由 5.1.1 求得的 A 、 B 两点距月球球心的距离分别为

$$L_A = 1752.013km, L_B = 1837.013km$$

进而求得 a, c, b 的值分别为

$$a = 1794.513km, c = 42.5km, b = 1795.0km$$

最后将 a 、 b 的值代入公式 (22) 求得卫星准备着陆椭圆轨迹的方程为

$$\frac{x^2}{1794.513^2} + \frac{y^2}{1795^2} = 1$$

5.2.3 阶段二：主减速阶段轨道优化模型

由要求②可知，嫦娥三号卫星着陆轨道为从近月点至着陆点，其软着陆过程

分为 6 个阶段：着陆准备轨道、主减速段、快速调整段、粗避障段、精避障段、缓速下降阶段。

第一阶段着陆准备轨道段已由 5.2.2 求出。下面分析第二阶段主减速段：

主减速段的区间是距离月面 15km 到 3km 。该阶段的主要是减速，实现到距离月面 3 公里处嫦娥三号的速度降到 57m/s 。而这一过程使用较为简单的二维模型便可以很好的描述这一问题，即假设卫星在一个固定的铅垂面内运动^[2]，没有考虑侧向运动，而且得到的模型忽略月球自转。故我们可建立如图 10 所示的软着陆极坐标系：

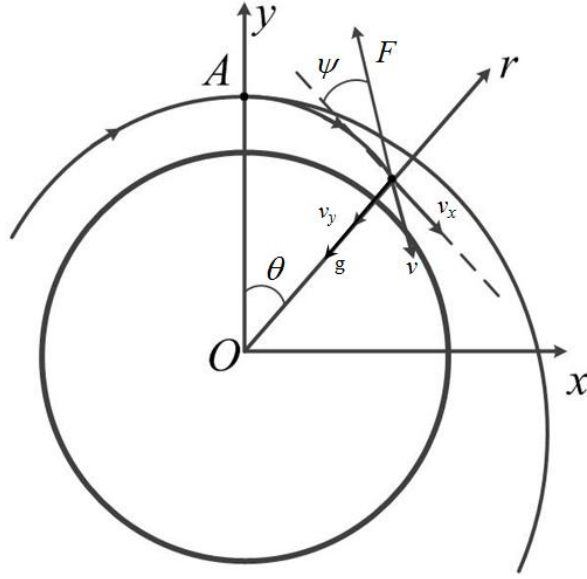


图 10. 纵向面软着陆坐标示意图

取月球球心 O 为坐标原点， \overrightarrow{Oy} 指向着陆注意轨道的近月点； r 为卫星到月心的距离； θ 是 \overrightarrow{Oy} 和 \overrightarrow{Or} 的夹角； ψ 为推力方向与 \overrightarrow{Or} 垂线的夹角； F 为制动常值推力大小。由图 10 可知，卫星着陆轨迹沿矢径方向的变化关系式为

$$dr = v_y dt \quad (23)$$

其中， dr 表示卫星沿矢径 \overrightarrow{Or} 方向的变化量， v_y 表示速度 v 沿矢径方向的分解量。

而 v_y 的变化量我们可表示为

$$dv_y = \left(g - \frac{F \sin \psi}{m} \right) dt \quad (24)$$

g 为月球的重力加速度，可由下面的物理公式求得：

$$\frac{GMm}{R^2} = mg$$

对于加速度 ω 的变化量，由 $v = r_0 \omega$ ，可知

$$d\omega = \frac{dv_x}{r_0} = \frac{1}{R} \cdot \frac{F \cos \psi}{m} dt \quad (25)$$

由题中附件 1 给出的数据可知，月球的半径为 $R=1737.013km$ ，而近月点高度为 $r_1=15km$ ，因月球半径远远大于近月点里月球表面的高度，故这里我们将 r_0 等效为月球半径 R 。

根据角速度的变化即可得到角度 θ 的变化，关系式如下：

$$d\theta = \omega(t)dt \quad (26)$$

因主推动力而消耗的燃料质量变化为：

$$dm = -\frac{F}{v_e} dt \quad (27)$$

将公式 (27) 代入 (23) 和 (26) 式进行积分求解，便可得到 r 和 θ 关于时间 t 的表达式为：

$$r = \frac{1}{2}gt^2 - v_e \sin(\psi)((t-b)\ln(b) - \ln(b-t)) + t$$

$$\theta = \int_0^t \omega_0 - \frac{v_e \cos \psi}{R} (\ln(b) - \ln(b-t)) dt$$

其中， $b = \frac{v_e m(t)}{F}$ ， v_e 是以 m/s 为单位的比冲， $m(t)$ 是 t 时刻嫦娥三号的质量。

而着陆轨迹上的点到球心的距离可表示为

$$r_0 = R + r_1 - r \quad (28)$$

则卫星着陆轨迹方程可用 $S(r_0(t), \theta(t))$ 表示。

结合轨道设计的基本要求，满足各阶段关键点状态，故第二阶段末速度为 v_2 ，所用时间为 t_2 ，下降的高度为 h_2 。因此，为了在到达月面时实现软着陆，即卫星在第二阶段末达到相应的状态，显然应有如下约束条件

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = v_2^2 \\ r = h_2 \end{cases} \quad (29)$$

其中， $v_2 = 57m/s$ ， $h_2 = 12000m$ 。

最优软着陆轨道设计的目的是寻找最优控制策略 $u(t) = u(F, \psi)$ ，使得着陆过程燃料消耗量最少，故建立如下目标函数

$$\min \int_{m_0}^{m(t_2)} dm = \int_0^{t_2} -\frac{F}{v_e} dt \quad (30)$$

其中，

$$\dot{m} = \frac{F}{v_e}$$

\dot{m} 是单位时间燃料消耗的公斤数, m_0 为卫星初始质量。

5.2.4 主减速阶段最优控制策略求解

为能使着陆轨道设计最优化, 可通过控制推力 F 和夹角 ψ 来实现目标函数的最优化。由于 F 的范围题目中已给出为 $1500N$ 到 $7500N$, 再由图 10 可知, ψ 角度的变化范围为

$$\psi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

所要达到的目标函数为

$$\min \int_{m_0}^{m(t_2)} dm = \int_0^{t_2} -\frac{F}{v_e} dt$$

其中约束条件为

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = v_2^2 \\ r = h_2 \end{cases}$$

因为该问题的推动力 F 为一个常数, 所以转化为求主减速阶段花费时间最短问题, 即该优化目标函数转换为对时间 t 求最小值:

$$\min \int_{m_0}^{m(t_2)} dm = \int_0^{t_2} -\frac{F}{v_e} dt \Leftrightarrow \min t$$

对于任意一个 F, ψ , 都有一个时间 t , 使其满足约束条件, 我们寻找所有满足条件的 t 中最小的 t_{\min} 作为最优解, 其所对应的 F, ψ 也为最优控制的条件。

显然该问题是一个全局优化问题, 我们求解全局最优解先通过求解一系列局部最优解, 最后得到全局最优解, 而贪婪算法正是通过求解一系列局部最优解而得到全局最优解的优化算法, 所以本题的我们采用贪婪算法^[3], 寻找最优的控制策略 $u(t) = u(F, \psi)$ 。

具体步骤为:

- Step1:** 从初始 F_0, ψ_0 , 根据约束条件我们可以求出 F_0, ψ_0 条件下对应的从近月点到达主减速阶段末端的时间 t_0 ;
- Step2:** 选取步长 $dF, d\psi$, 改变 F, ψ 的大小使其成为 F_i, ψ_i , 求该阶段的最短时间 t_i ;
- Step3:** 遍历所有的 F, ψ , 找到所有满足约束条件的 t_i ;
- Step4:** 从所有满足条件的 t_i 中找到最小的 t_{\min} , 即为全局最优解, 其对应的 F, ψ , 就是对应的最优控制策略。

最后, 将这一阶段卫星始末状态及控制策略进行汇总, 结果如下表 2 所示:

表 2. 卫星第二阶段着陆过程控制策略及状态分析

	初状态		末状态		常值推力 (N)	夹角 ψ	耗燃量 (kg)
	速度 (m/s)	高度 (m)	速度 (m/s)	高度 (m)			
主减速阶段	1692.2	15000	57	3000	7198	0.431	1094.4

5.2.5 阶段三：快速调整阶段轨道优化模型

第三阶段为快速调整阶段，主要是调整探测器姿态，需要从距离月面 $3km$ 到 $2.4km$ 处将水平速度减为 $0m/s$ ，即使主减速发动机的推力竖直向下，之后进入粗避障阶段。从这一阶段开始，卫星着陆的水平位移变化不大，故可将往后的轨迹运动过程看作是二维平面运动。

设第三阶段初始速度为 v_2 ，末速度为 v_3 ，推力为 F ，所用时间为 t_3 。运动轨迹示意图如下：

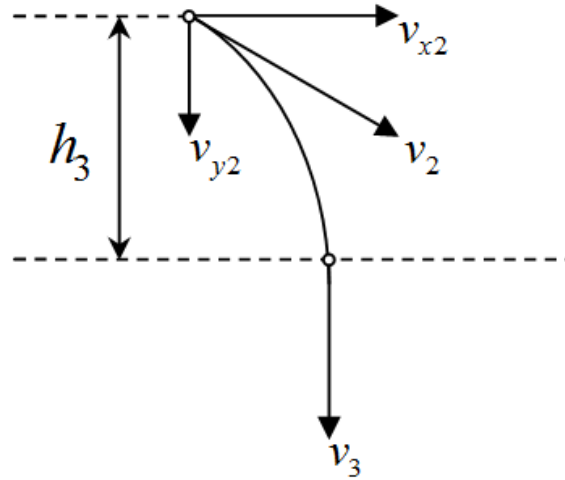


图 11. 第三阶段卫星着陆轨迹示意图

假设着陆轨迹运动在竖直方向为加速度恒定的匀减速运动，则由运动学公式可求得

$$h_3 = v_{y2}t_3 + \frac{1}{2}gt_3^2$$

由题目可知， $h_3 = 600m$ ，即可得到这一阶段所用时间 t_3 ，再由 t_3 可求解第三阶段末卫星竖直方向的速度为

$$v_{y3} = gt_3$$

为满足卫星水平末速度减为 0 的状态，则应有

$$v_{x2} - a_{x3}t_3 = 0 \quad (31)$$

其中， v_{x2} 和 v_{y2} 已由 5.2.4 求出，故由 (31) 式可求得水平方向加速度 a_{x3} 。

根据附件中所给的材料可知，关于比冲求推力的表达式为

$$F = \dot{m}_i v_e$$

而由分析可知，这一阶段推力 F 作用于水平方向，故由牛顿第二定律可列得

$$F = m_{i-1} a_{x3}$$

其中， v_e 是以米/秒为单位的比冲， \dot{m}_i 是单位时间燃料消耗的公斤数。将时间 t_3 均分为若干个 Δt 小段，则每隔 Δt 时间段，燃料都会减少，故可得卫星质量递推公式为

$$m_i = m_{i-1} - \dot{m}_i$$

再根据燃料消耗最小化原则，建立消耗燃料的目标函数为

$$M_i = \sum \dot{m}_i \quad (32)$$

5.2.6 快速调整阶段控制策略的求解

快速调整阶段嫦娥三号卫星着陆轨道是以满足其关键点状态的终端条件为依据，从而建立卫星着陆运动轨迹模型，轨道方程如下所示：

$$\begin{cases} h_3 = v_{y2} t_3 + \frac{1}{2} g t_3^2 \\ v_{y3} = g t_3 \\ v_{x2} - a_{x3} t_3 = 0 \end{cases} \quad (33)$$

从剩余燃料的角度考虑结合上述模型的求解结果即可得到推力与变化的卫星质量之间的动态关系表达式

$$\begin{cases} F = \dot{m}_i v_e \\ F = m_{i-1} a_{x3} \\ m_i = m_{i-1} - \dot{m}_i \end{cases} \quad (34)$$

而对于推力 F 的分析：

F 提供的加速度的大小不变，由于 m 随时间的增加而减小，所以根据 $F = ma$ ，得 F 随着时间的增加而不断减小，但由于当 $\Delta t = 0.01s$ 时，在相邻 Δt 时间段内，质量 m 的变化量之差 $\dot{m}_i - \dot{m}_{i-1}$ 的数量级很小为 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ ，所以可以近似认为每相邻两段时间 m 的变化量是不变的，所以 F 的变化率是一个常数。因此，由图像及已知数据即可求出推力 F 的表达式为：

$$F_3 = 3975.4 - 4.079t$$

而此阶段卫星始末状态及控制策略进行汇总，结果如下表 3 所示：

表 3. 卫星第三阶段着陆过程控制策略及状态分析

	初状态		末状态		耗燃量 (kg)
	速度 (m/s)	高度 (m)	速度 (m/s)	高度 (m)	
快速调整阶段	57	3000	49.1974	2400	76.7

5.2.7 阶段四：粗避障阶段轨道设计模型的建立

粗避障段的范围是距离月面 2.4km 到 100m 区间，其主要是要求避开大的陨石坑，实现在设计着陆点上方 100m 处悬停，并初步确定落月地点。

首先要求避开大的陨石坑，找到相对平坦的区域，且该平坦区域尽可能大，以便于月球探测车探索更广阔的区域，我们的先利用 *MATLAB* 将附件 3 中所给的图像进行处理，计算机处理算法如下：

Step1: 首先我们先将所给的图像，用 *MATLAB* 导入计算机中^[5]，转换成灰度值矩阵，因为嫦娥三号在粗避障阶段后需要精避障，下一阶段拍摄到区域大小为 100×100m，所以我们可以将粗避障阶段拍摄到的区域划分为一系列 100×100m 小的区域供飞行器作为备选着陆区域；

Step2: 计算划分每个 100×100m 小区域的方差值 P_i ，具体求法如下：
首先，求出每一块区域高度的平均值

$$\bar{h}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h_{ij}$$

其中， h_{ij} 表示第 i 个区域的第 j 个高度。

则每一块区域高度的方差为

$$P_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (h_{ij} - \bar{h}_i)^2$$

P_i 用于评估该区域的平坦程度，为了区别平坦程度，我们取定一个方差的阈值 P_0 ，本题中我们选取划分的每个小区域方差值的平均值，即

$$P_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i$$

若 $P_i < P_0$ 时，可认为该区域相对平坦保留；

若 $P_i > P_0$ ，则认为该区域不平坦，排除。

Step3: 将 Step2 得到的区域进行扩大，边长递增 100，使其成为 200×200m 的区域，再计算扩大后区域的方差，再与阈值 P_0 比较，筛选规则与步骤二完全相同；

Step4: 重复 Step3，直到筛选到只剩下一个区域，若最后一次筛选没有保留

任何区域，则从上一步保留的区域中选取方差最小的区域作为着陆区域。而该最小着陆区域的中心点即为选定的预着陆点。

设中心点的坐标为 $O(x_0, y_0)$ 预着陆点的坐标为 $Q(x_1, y_1)$ ，则这一阶段卫星轨迹的水平位移为：

$$x_4 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

选定一个预着陆点后，可画出卫星在这一阶段着陆轨迹的示意图：

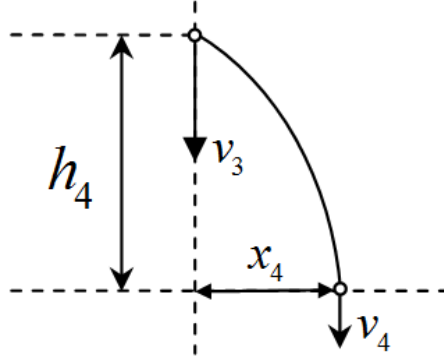


图 13. 粗避障阶段卫星着陆轨迹示意图

由图 12 可知，卫星水平方向位移为 x_4 ，下降的高度 h_4 ，这一阶段竖直方向上加速度为恒定值，做匀减速运动，水平方向做前半段位移匀加速后半段位移匀减速的运动，加速度大小不变，方向在位移中间改变。

故由运动学公式列得一系列方程组：

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a_{x4}t_4^2 = x_4 \\ v_{y4} - a_{y4}t_4 = 0 \\ \frac{1}{2}a_{y4}t_4^2 = h_4 \end{cases} \quad (35)$$

由此方程组即可求得 a_{y4} ， a_{x4} ，以及 t_4 的值。而推力提供的加速度大小可表示为

$$a_{F_4} = \sqrt{a_{x_4}^2 + a_{y_4}^2} \quad (36)$$

故接下来的模型同 5.2.5 的 (33) 式求出这一阶段所耗燃料的目标函数为

$$M = \sum \dot{m}_i$$

5.2.8 粗避障阶段控制策略求解

由 5.2.7 建立的模型所确定粗避障阶段预着陆点的范围如下图所示：

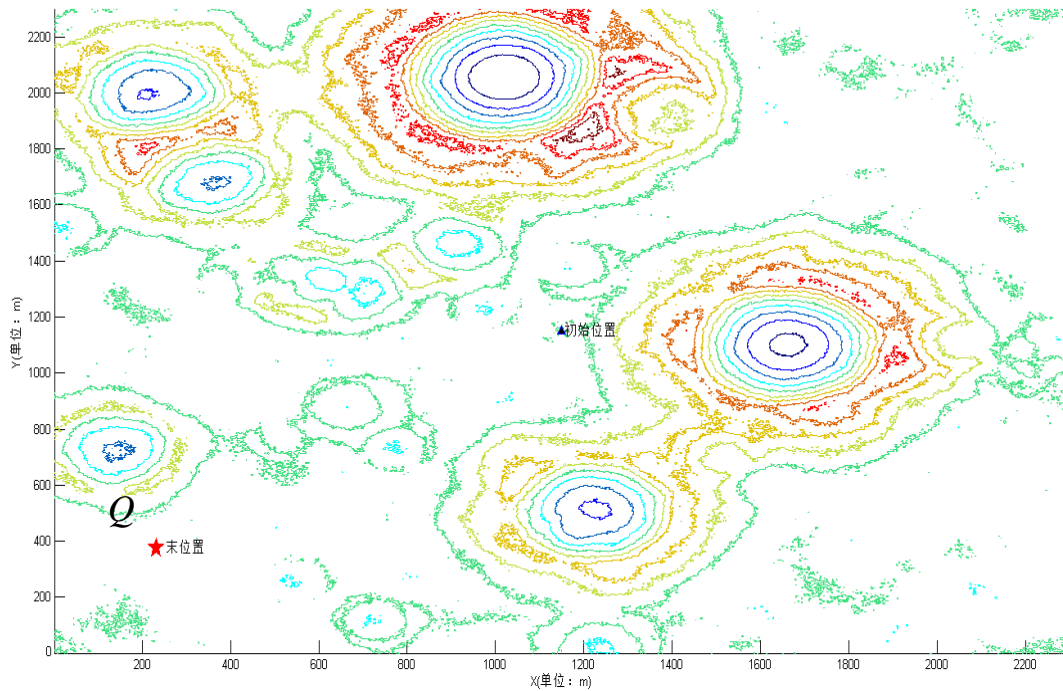


图 14. 粗避障阶段卫星预着陆点位置示意图

通过 *MATLAB* 的编程计算即可确定该位置，以图像左下角 X 与 Y 的交点为原点建立坐标轴。则得到预着陆点的位置坐标为 $Q(231,376)$ 。

粗避障阶段卫星着陆轨迹的表达式为 (35)，再同 5.2.6 快速调整阶段控制策略的求解过程。利用 *MATLAB* 编程求解出推力 F 随时间变化的表达式为：

$$F_4 = 2847.7 - 2.0757t$$

而此阶段卫星始末状态及控制策略进行汇总，结果如下表 4 所示：

表 4. 卫星第四阶段着陆过程控制策略及状态分析

	初状态		末状态		耗燃量 (kg)
	速度 (m/s)	高度 (m)	速度 (m/s)	高度 (m)	
粗避障阶段	49.1974	2400	0	100	33.4

5.2.9 精避障阶段轨道模型的建立

精避障段的区间是距离月面 100m 到 30m。要求分析嫦娥三号悬停在距离月面 100m 处，对着陆点附近区域 100m 范围内拍摄图像获得的三维数字高程图。并避开较大的陨石坑，确定最佳着陆地点，实现在着陆点上方 30m 处水平方向速度为 0m/s。

由题目要求可知，该阶段卫星着陆轨道的水平方向做先匀加后匀减的运动，竖直方向做加速度恒定的匀加速运动，且精避障阶段运动轨迹与粗避障阶段轨迹类似。

则由运动学公式可列得竖直方向上有

$$h_5 = \frac{1}{2} g t_5^2 \quad (37)$$

$$v_{y5} = g t_5 \quad (38)$$

求得时间 t_5 ，再代入水平方向运动学公式

$$x_5 = \frac{1}{4} a_{x5} t_5^2 \quad (39)$$

由此解得水平方向加速度 a_{x5} 的值，进而还可求得提供加速度的推力 F 以及此阶段燃料的消耗量。

5.2.10 精避障阶段控制策略求解

由 5.2.9 建立的模型所确定粗避障阶段预着陆点的范围如下图所示：

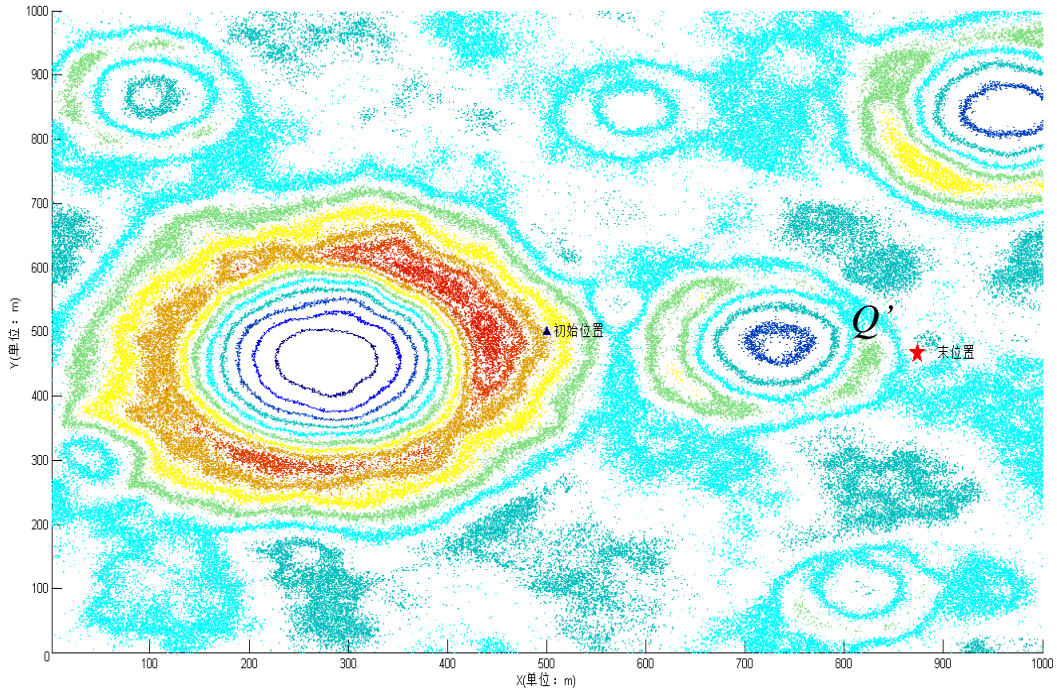


图 15. 精避障阶段卫星预着陆点位置示意图

通过 *MATLAB* 的编程计算即可确定该位置，以图像左下角 X 与 Y 的交点为原点建立坐标轴。则得到预着陆点的位置坐标为 $Q'(774, 434)$ 。

由 5.2.9 可求得精细避障阶段卫星着陆轨迹，同样再利用 *MATLAB* 编程求解出推力 F 随时间变化的表达式为：

$$F_5 = 2083.5 - 1.2303t$$

而此阶段卫星始末状态及控制策略进行汇总，结果如下表 5 所示：

表 5. 卫星第五阶段着陆过程控制策略及状态分析

	初状态		末状态		耗燃量 (kg)
	速度 (m/s)	高度 (m)	速度 (m/s)	高度 (m)	
精避障阶段	0	100	15.0799	30	6.5

5.2.11 缓速下降阶段轨道模型的建立

缓速下降阶段的主要任务控制着陆器在距离月面 $4m$ 处的速度为 $0m/s$ ，即实现在距离月面 $4m$ 处相对月面静止。且该阶段推力方向向下，水平方向静止。故由运动学公式对竖直方向卫星运动进行求解，有

$$v_{y5}^2 = 2a_{y5}h_5 \quad (40)$$

因 h_5 和 v_{y5} 已知，故可求得 a_{y5} 的值。进而套用上面的模型也可求得提供加速度的推力 F 以及此阶段燃料的消耗量。

5.2.12 缓速下降阶段控制策略求解

由 5.2.11 可求得缓速下降阶段卫星着陆轨迹，同样再利用 *MATLAB* 编程求解出推力 F 随时间变化的表达式为：

$$F_6 = 5200.4 - 7.695t$$

而此阶段卫星始末状态及控制策略进行汇总，结果如下表 6 所示：

表 6. 卫星第六阶段着陆过程控制策略及状态分析

	初状态		末状态		耗燃量 (kg)
	速度 (m/s)	高度 (m)	速度 (m/s)	高度 (m)	
缓速下降阶段	15.0799	30	0	4	6.1

5.3 问题三模型的误差分析与敏感性分析

因为在软着陆阶段中，主减速阶段消耗的燃料是最多的，经过第二问的计算可以知道，该阶段消耗的燃料质量占整个过程的比重为：

$$\eta = \frac{1094.4}{1271.2} = 86.1\%$$

所以该阶段的误差对于整个优化过程是至关重要的，因此我们主要分析主减速阶段。

该阶段通过建立极坐标系，运用微分方程，采用贪婪算法进行优化，该阶段主要的误差在于实际操作中不容易控制主推力和嫦娥三号与月心连线的夹角 ψ 为定值，由分析可知角度对于优化结果的影响是非常大的，在我们确定最优解时，

得到力和夹角分别为：

$$F = 7189N, \psi = 0.4310rad$$

在按此条件下，分析这优化结果对于哪一个影响因素是更为敏感的。

为此我们对两因素进行敏感性分析：

在 F, ψ 都是最优控制条件下，我们计算得到该阶段时间为 $t = 447s$ ；

下面我们分别计算当 F 一定和 ψ 一定时，另一个因素对结果的影响，为此我们选定两个因素的在最优解时 $\pm 10\%$ 偏差区间内，所求时间的变化：

先让 $F = 7189N$ ，选取与 ψ 相距 10% 的邻域 $\psi \in [0.38, 0.47]rad$ ，步长为 $0.01rad$ ；

用每个 ψ 求得该阶段的时间 T_ψ ，最大时间与最小时间差值为：

$$\Delta T_F = T_{F_{\max}} - T_{F_{\min}} = 330.9417s$$

再让 $\psi = 0.4310rad$ ，选取与 F 相距 10% 的邻域 $F \in [6470, 7500]N$ ，步长为 $1N$ ；

用每个 F 求得该阶段的时间 T_F ，最大时间与最小差值为：

$$\Delta T_F = T_{F_{\max}} - T_{F_{\min}} = 330.9417s$$

显然：

$$\Delta T_F < \Delta T_\psi$$

即在相同变化范围情况下， ψ 比 F 影响最终结果的效果更显著，即该阶段的优化结果对于因素 ψ 更为敏感。

即在控制该过程时，为避免误差的产生，必须保证 ψ 维持常值。

六、模型的评价

6.1 模型的优点

问题一我们根据能量守恒定律以及开普勒三定律，准确的计算出嫦娥三号在椭圆轨道近月点与远月点的速度以及方向，又通过预定着陆点，通过合理的假设，反推出椭圆轨道近月点与远月点的坐标范围；

问题二通过微分方程合理的给出在主减速阶段的燃料优化模型，并达到了六个阶段所要求的状态。

6.2 模型的缺点

问题一采用抛物线模型，计算所消耗的时间过长，与实际状况有误差。

问题二中主要对主减速阶段进行了优化，而对其他阶段主要使其满足状态，而把燃料进行次优化处理，没有达到最优的状态。

七、参考文献

- [1] 王建伟, 李兴, 近日点和远日点速度的两种典型解法, 《物理教师》, 第 34 卷第 6 期: 58 页, 2013.2。
- [2] 张建辉, 张峰, 月球软着陆轨道优化方法比较研究, 《工程数学学报》, 第 29 卷第 3 期: 356~357 页, 2012.6。
- [3] 司守奎, 数学建模算法与应用, 北京: 国防工业出版社, 2011.8。
- [4] 周博, 谢东来, 张宪海等, *MATLAB* 科学计算, 北京: 机械工业出版社, 2010.5。
- [5] 刘浩, 韩晶, *MATLAB R2012a* 完全自学一本通, 北京: 电子工业出版社, 2013.1。

八、附录

附表一：

(1) 贪婪算法程序代码

```
clc
clear
g=1.6243;
%% 月球质量
M=7.3477*(10^22);
%% 引力常量
G=6.67*(10^(-11));
%% 近日点
rp=15000;
%% 远日点
R1=100000;
R=1737013;
%%
p1=R+rp;
p2=R+R1;
v0=1692.2;
%% 向径
r0=p1;
%% 向心速度
vy0=0;
%% 角度
q0=0;
%% 角速度
w0=v0/p1;
%% 初始质量
m0=2400;
%% 比冲
ve=2940;
%% 水平速度
vx0=v0;
k=1;
i=0;
t=300:1:900;
for F=1500:7500;
    for p=0:0.001:pi/2;
        b=m0*ve/F;
        %% 矢径变化
        temph=abs(1/2*g*t.^2-ve*sin(p)*((t-b).*(log(b)-log(b-t))+t)-12000);
        [t1,t2]=min(temph);
        tk=300+t2-1;
```

```

%% 角速度变化
w=w0-ve*cos(p)/R*(log(b)-log(b-tk));
vx=w*(R+3);
%% 竖直速度变化
vy=g*tk+ve*sin(p)*(log(b-tk)-log(b));
v=sqrt(vx^2+vy^2);
if abs(v-57)/57<0.02
    T(k)=tk;
    F1(k)=F;
    P(k)=p;
    k=k+1;
end
end
end
T,F1,P

```

(2) 求卫星着陆过程燃料消耗的程序代码

```

%% 环境清空
clc
clear
%% 数据初始化
m=2400;%初质量
g=1.6243;%月球重力加速度
a1=3.0449;%快速调整阶段加速度
a2=2.2197;%粗避障阶段加速度
a3=1.7428;%精避障阶段加速度
a4=4.3741;%缓速下降阶段加速度
t=0;
ve=2940;%比冲
m1=1094.4 %主减速阶段燃料消耗量
m=m-1094.4;
f1=zeros(1692,1);
%分段离散求燃料消耗
for i=1:1692
    m=m-m*a1/ve*0.01;
    M(i)=m;
    f1(i)=m*a1;
end
m2=2400-m %快速调整阶段燃料消耗
f2=zeros(1,9350);
for i=1:9350
    m=m-m*a2/ve*0.01;
    f2(i)=m*a2;
end

```

```

m3=2400-m %粗避障阶段燃料消耗
f3=zeros(1,928);
for i=1:928
    m=m-m*a3/ve*0.01;
    f3(i)=m*a3;
end
m4=2400-m %精避障阶段燃料消耗
f4=zeros(1,345);
for i=1:345
    m=m-m*a4 /ve*0.01;
    f4(i)=m*a4;
end
m5=2400-m %缓速下降阶段燃料消耗
%% 作推力随时间的变化图
i=0:0.01:16.91;
plot(i,f1)
xlabel('t(单位: s)')
ylabel('F(单位: N)')
figure(2)
i=0:0.01:93.49;
plot(i,f2)
xlabel('t(单位: s)')
ylabel('F(单位: N)')
figure(3)
i=0:0.01:9.27;
plot(i,f3)
xlabel('t(单位: s)')
ylabel('F(单位: N)')
figure(4)
i=0:0.01:3.44;
plot(i,f4)
xlabel('t(单位: s)')
ylabel('F(单位: N)')
%%求各个阶段的斜率
k1=(f1(1)-f1(size(f1,1)))/16.92 ;
k2=(f2(1)-f2(size(f2,2)))/93.5;
k3=(f3(1)-f3(size(f3,2)))/9.28;
k4=(f4(1)-f4(size(f4,2)))/3.45;

```

(3) 粗避障阶段程序代码

```

%%环境清空
clc
clear
%%

```

```

%图片读入
a1=imread('a1.tif');
%对 100*100m 的区域进行遍历求方差
for i=1:2201
    for j=1:2201
        t=(i-1)*2201+j
        b=double(a1(i:i+99,j:j+99));%区域选择
        q(t)=sum(sum((b-mean(mean(b))).^2))*10^-4;%求方差
    end
end
%保存所求方差
save data1 q
%%环境清空
clc
clear
%%
%图片读入
a1=imread('a1.tif');
%对 600*600m 的区域进行遍历求方差
for i=1:1701
    for j=1:1701
        t=(i-1)*1701+j
        b=double(a1(i:i+599,j:j+599));%区域选择
        q(t)=sum(sum((b-mean(mean(b))).^2))/3.6*10^-5;%求方差
    end
end
w=q;
%保存所求方差
save data2 w
%%环境清空
clc
clear
close
%%
%数据读入
a1=imread('a1.tif');
load data1
load data2
%方差排序
[x,y]=sort(q);
[m,n]=sort(w);
%求所对应的坐标
x1=ceil(y/2201);
y1=y-(x1-1)*2201;

```

```

x2=ceil(n/1701);
y2=n-(x2-1)*1701;
b=[x1;y1];
c=[x2;y2];
b=b';c=c';
%遍历选择最优
for i=1:size(x1,2)
    if x1(i)>=x2(1)&x1(i)<=(x2(1)+500)
        if y1(i)>=y2(1)&y1(i)<=(y2(1)+500)
            break;
        end
    end
end
end
%求两点位移
s=((1150-x1(i)-50)^2+(1150-y1(i)-50)^2)^0.5
%% 做等高线图
hold on
a1=flipud(a1);
contour(a1)
plot([1150,1150],[1150,1150],'^','markerfacecolor','k')
plot([b(i,1)+50,b(i,1)+50],[2301-b(i,2)-50,2301-b(i,2)-50], 'rp','markerfacecolor','r')
% text(1153,1150,'初始位置')
% text(b(i,1)+53,2301-b(i,2)-50,'末位置')
xlabel('单位: m')
ylabel('单位: m')

```

(4) 精避障阶段程序代码

```

%%环境清空
clc
clear
%%
%数据读入
a2=imread('a2.tif');
%%
%对 20*20m 的区域进行遍历求方差
for i=1:801
    for j=1:801
        t=(i-1)*801+j
        b=double(a2(i:i+199,j:j+199));%区域选择
        q(t)=sum(sum((b-mean(mean(b))).^2))*10^-4/4;%求方差
    end
end
end
e=q;
%保存所求方差

```

```

save data3 e
%%环境清空
clc
clear
close
%%
%数据读入
a2=imread('a2.tif');
load data3
%方差排序
[x,y]=sort(e);
%求所对应的坐标
x1=ceil(y/801);
y1=y-(x1-1)*801;
b=[x1;y1];
b=b';
b(1,:)
%求两点位移
s=((500-x1(1)-100)^2+(500-y1(1)-100)^2)^0.5*0.1
%% 作等高线图
hold on
a2=flipud(a2);
contour(a2)
plot([500,500],[500,500], '^','markerfacecolor','k')
plot([b(1,1)+100,b(1,1)+100],[1001-b(1,2)-100,1001-b(1,2)-100], 'rp','markerfacecolor','r')
% text(1153,1150,'初始位置')
% text(b(i,1)+53,2301-b(i,2)-50,'末位置')
xlabel('单位: m')
ylabel('单位: m')

```