



UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
NUEVO LEÓN



FACULTAD DE
INGENIERÍA MECÁNICA
Y ELÉCTRICA

Análisis dinámico

Dinámica de Vuelo

7mo semestre

Plan 401

Dr. Erik Gilberto Rojo Rodríguez



Contenidos de la Unidad Temática

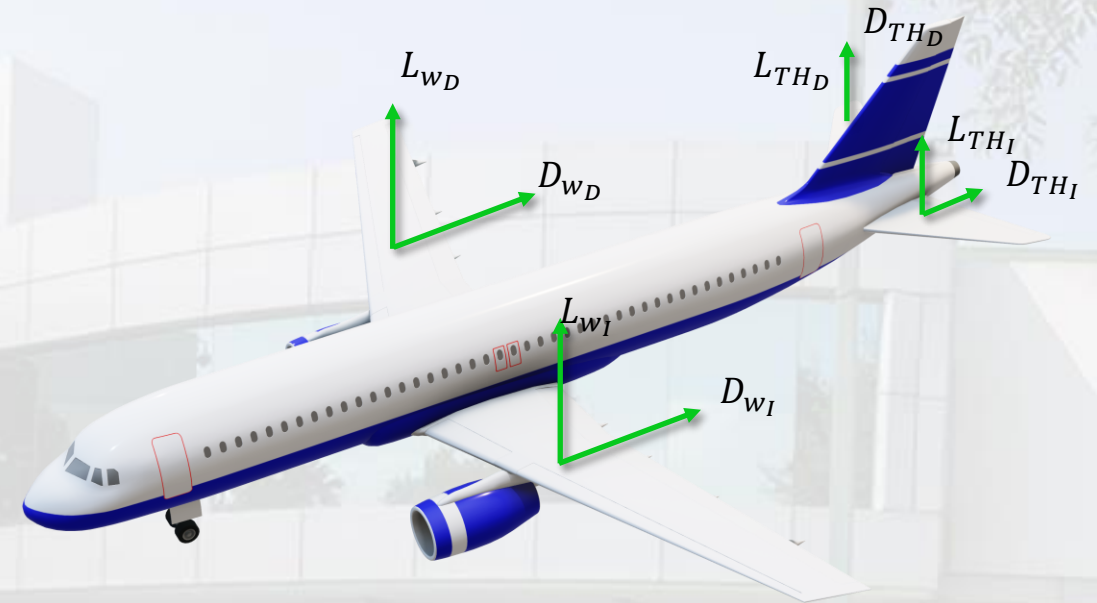
Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción

2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

- a. **Análisis de fuerzas.**
 - a. Vectores de fuerzas en el marco del cuerpo.
 - b. Vectores de fuerzas en el marco aerodinámico.
- b. **Análisis de momentos.**
 - a. Vectores de momentos.
- c. **Dinámica de navegación en el marco de referencia inercial.**
- d. **Dinámica de navegación de referencia de la aeronave.**
 - a. Efectos de las fuerzas ficticias.
- e. **Dinámica de orientación en el marco de referencia de la aeronave.**
 - a. Efectos giroscópicos.

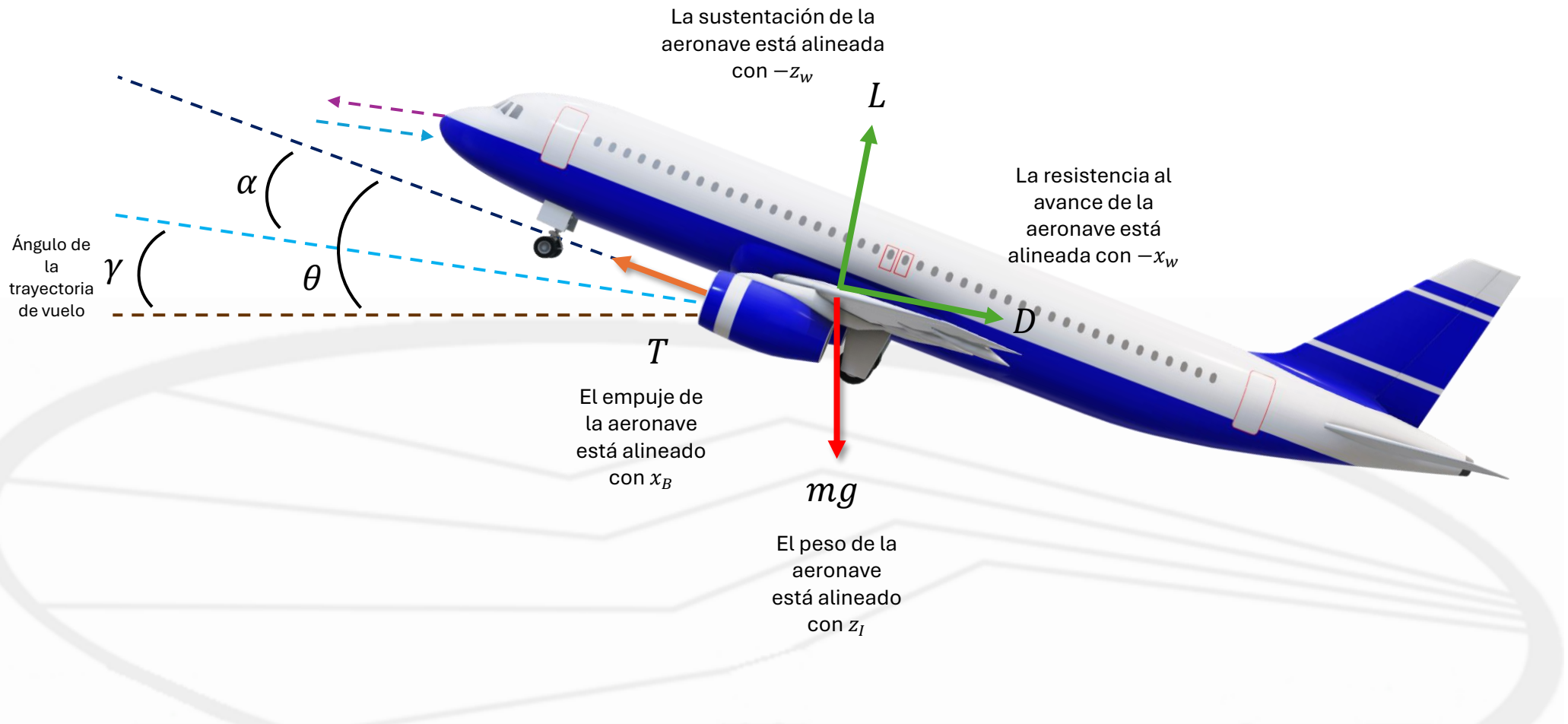
Análisis de fuerzas



Análisis de fuerzas – marco inercial

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

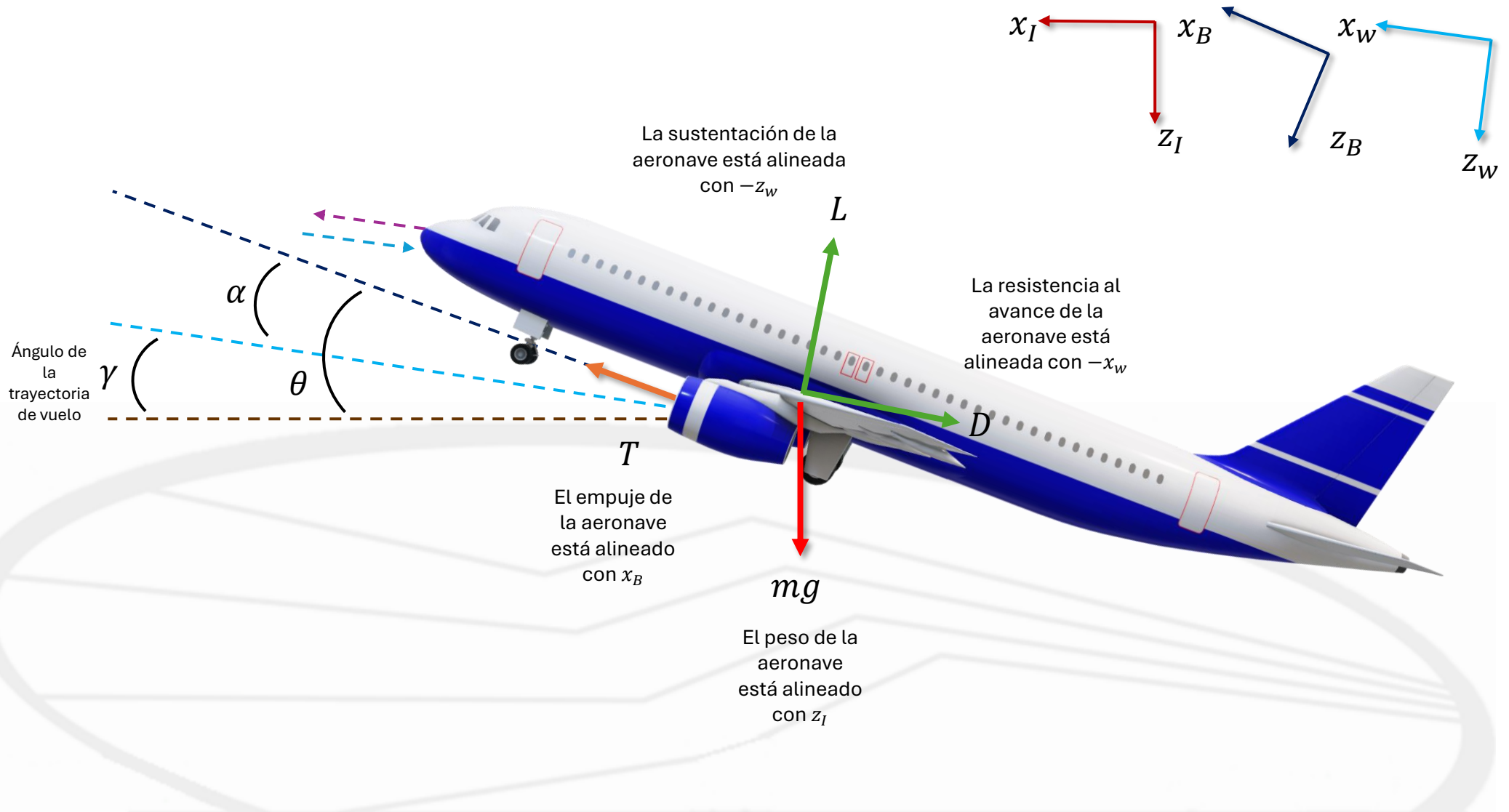
1. Introducción
- 2. Análisis de fuerzas**
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación



Análisis de fuerzas – marco inercial

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

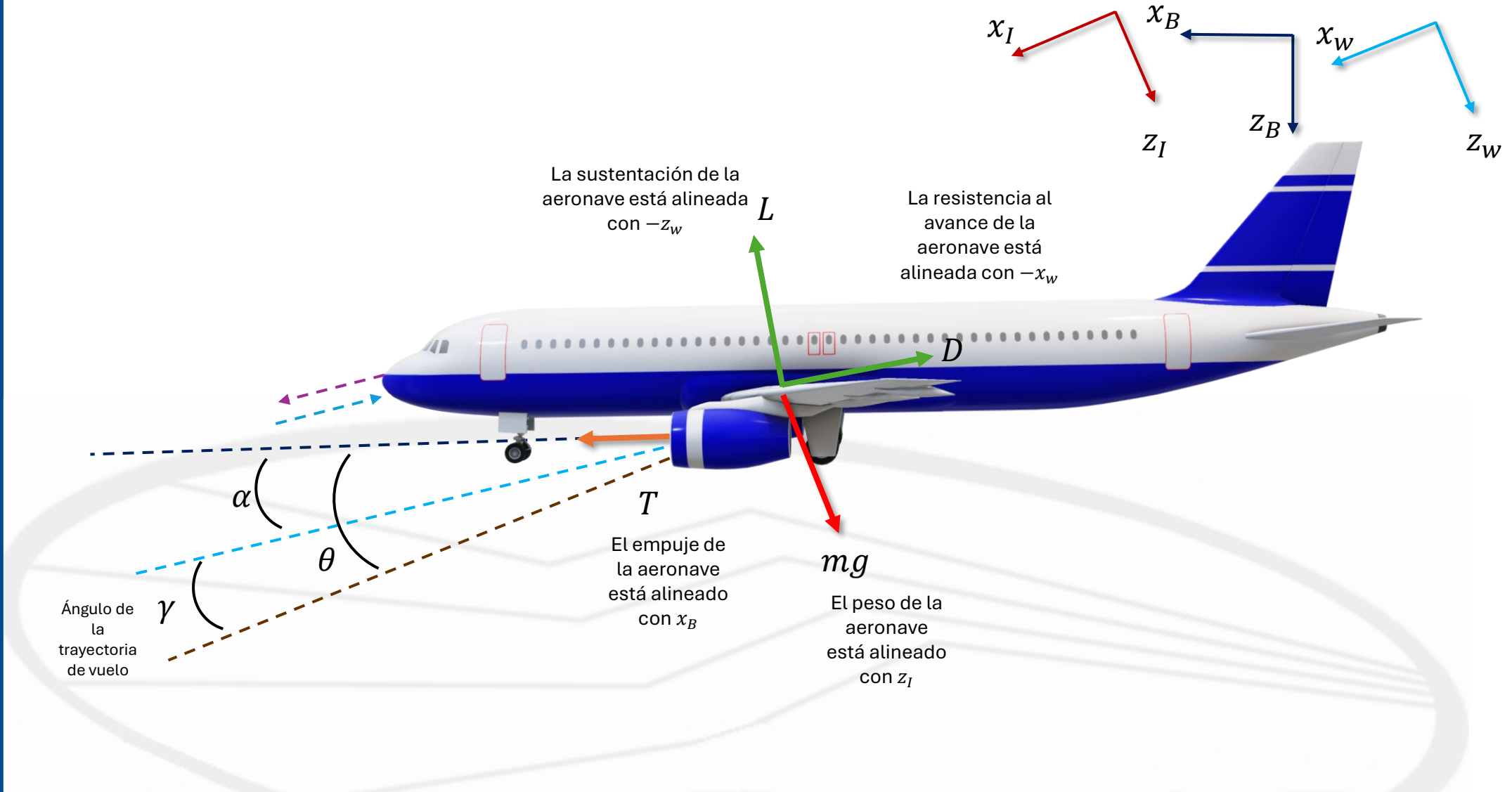
1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación



Análisis de fuerzas – marco inercial

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

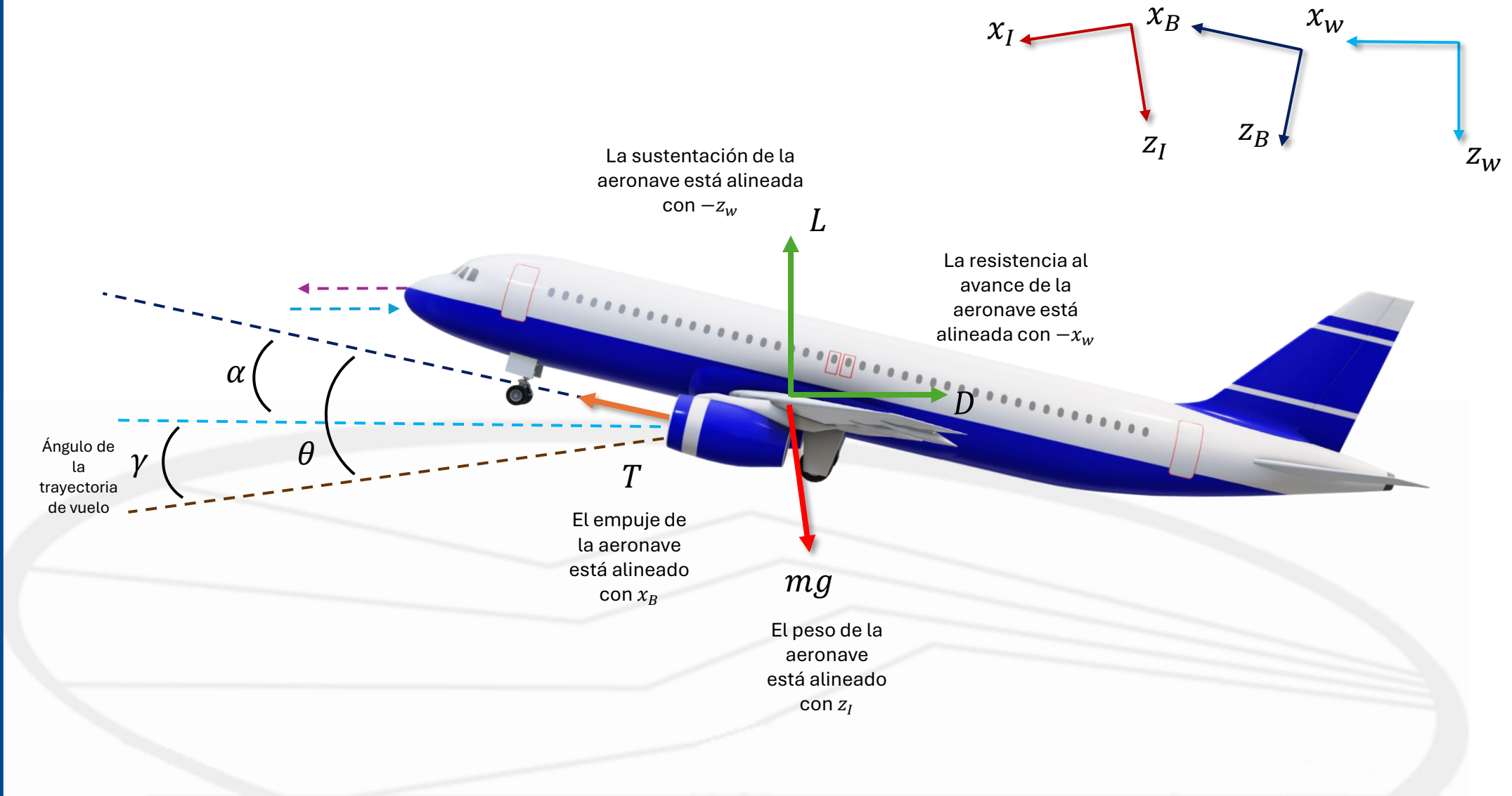
1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación



Análisis de fuerzas – marco inercial

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
- 2. Análisis de fuerzas**
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación





Análisis de fuerzas – marco inercial

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción

2. Análisis de
fuerzas

3. Análisis de
momentos

4. Din. Posición
MRI

5. Din. Posición
MRC

6. Din.
Orientación
MRC.

7. Recapitulación

$$\text{Fuerzas en el marco inercial} \left\{ \vec{F}_I = \underbrace{R_{I \leftarrow B} \vec{F}_{B Thr}}_{\substack{\text{Fuerzas del marco del cuerpo} \\ \text{rotadas al marco inercial, sin} \\ \text{contar las aerodinámicas;} \\ \text{esto es, fuerzas puramente del} \\ \text{cuerpo.}}} + \overbrace{m g e_3}^{\substack{\text{Fuerza debió al peso} \\ \text{(solo actúa en z)}}} + \underbrace{R_{I \leftarrow B} R_{B \leftarrow W} \vec{F}_A}_{\substack{\text{Fuerzas aerodinámicas} \\ \text{rotadas al marco del cuerpo, y} \\ \text{luego rotadas al marco inercial.}}} \right\} \text{Vector de fuerzas aerodinámica; sustentaciones y resistencias al avance.}$$



Análisis de fuerzas – marco del cuerpo

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
- 2. Análisis de fuerzas**
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

$$\begin{array}{c} \text{Fuerzas en} \\ \text{el marco} \\ \text{inercial} \end{array} \left\{ \overrightarrow{F_B} = \overbrace{\overrightarrow{F_{BThr}}}^{\text{Vector de}} + \overbrace{R_{I \leftarrow B}^{-1} m g e_3}^{\substack{\text{Fuerzas del marco} \\ \text{inercial rotadas al} \\ \text{marco del cuerpo} \\ \text{(matriz de rotación} \\ \text{inversa)}}} + \underbrace{R_{B \leftarrow W} F_A}_{\substack{\text{Fuerzas} \\ \text{aerodinámicas} \\ \text{rotadas al} \\ \text{marco del} \\ \text{cuerpo}}} \right.$$



Análisis de fuerzas – marco del cuerpo

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

Vector de fuerzas en el
marco inercial

$$\overrightarrow{F_{Ig}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

Vector de fuerzas en el
marco del cuerpo

$$\overrightarrow{F_{BThr}} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vector de fuerzas en el
marco aerodinámico

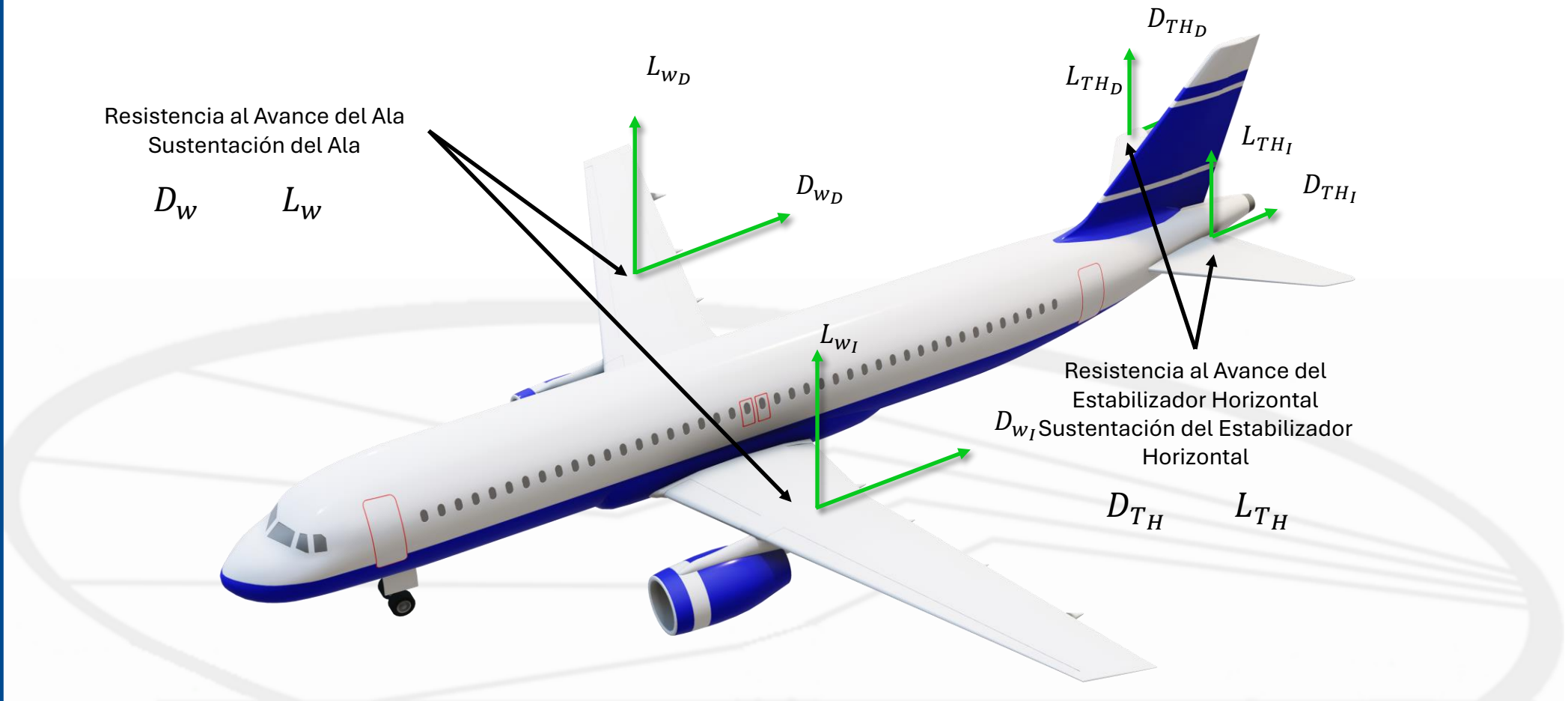
$$\overrightarrow{F_A} = \begin{bmatrix} D_{wI} + D_{wD} + D_{THI} + D_{THD} + D_{TVI} + D_{TVD} + D_{fg} + D_{uc} \\ Y_{fg} + L_{TV} \\ L_{wI} + L_{wD} + L_{THI} + L_{THD} + L_{fg} \end{bmatrix}$$

Análisis de fuerzas – aeronave

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
- 2. Análisis de fuerzas**
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Dinámicas MRA.
8. Recapitulación

$$\vec{F}_A = \begin{bmatrix} D_{wI} + D_{wD} + D_{THI} + D_{THD} + D_{TVI} + D_{TV_D} + D_{fg} + D_{uc} \\ Y_{fg} + L_{TV} \\ L_{wI} + L_{wD} + L_{THI} + L_{THD} + L_{fg} \end{bmatrix}$$

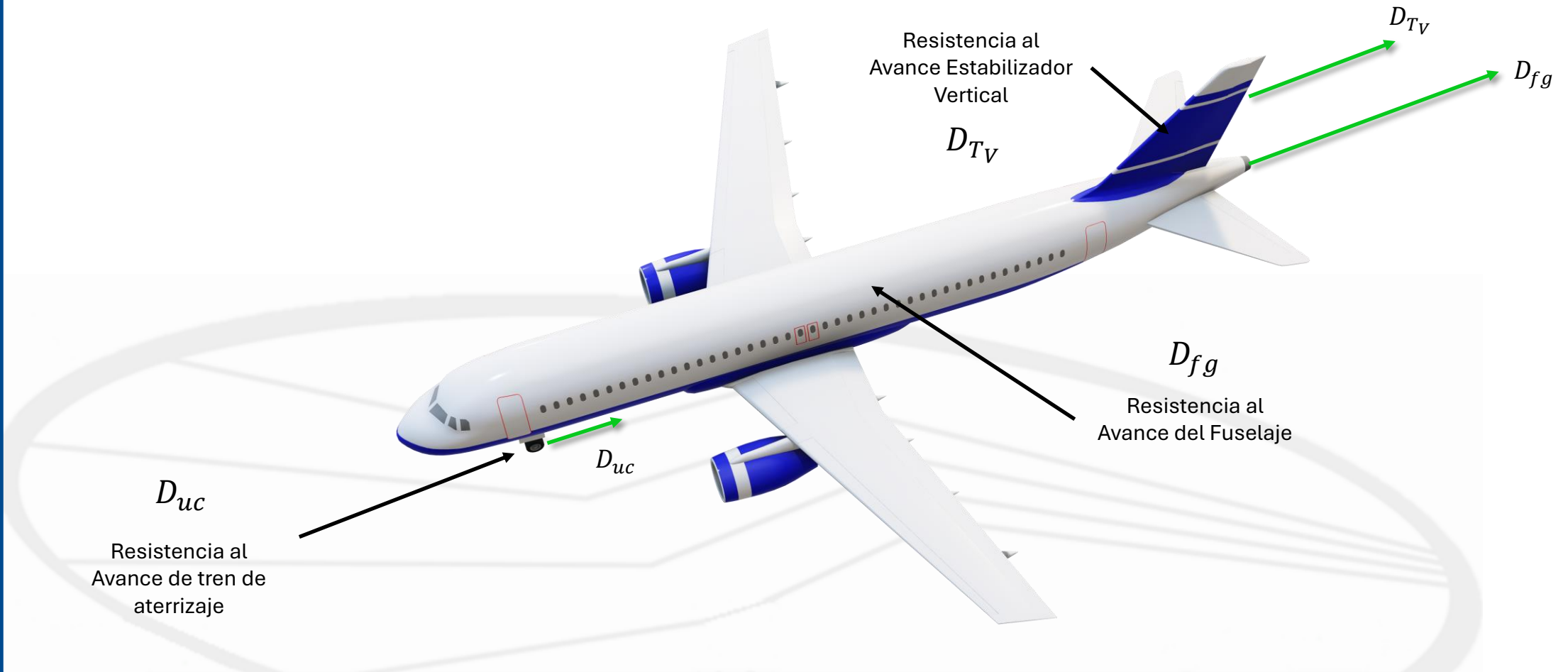


Análisis de fuerzas – aeronave

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. **Análisis de fuerzas**
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

$$\vec{F}_A = \begin{bmatrix} D_{wI} + D_{wD} + D_{THI} + D_{THD} + D_{TVI} + D_{TV_D} + D_{fg} + D_{uc} \\ Y_{fg} + L_{TV} \\ L_{wI} + L_{wD} + L_{THI} + L_{THD} + L_{fg} \end{bmatrix}$$

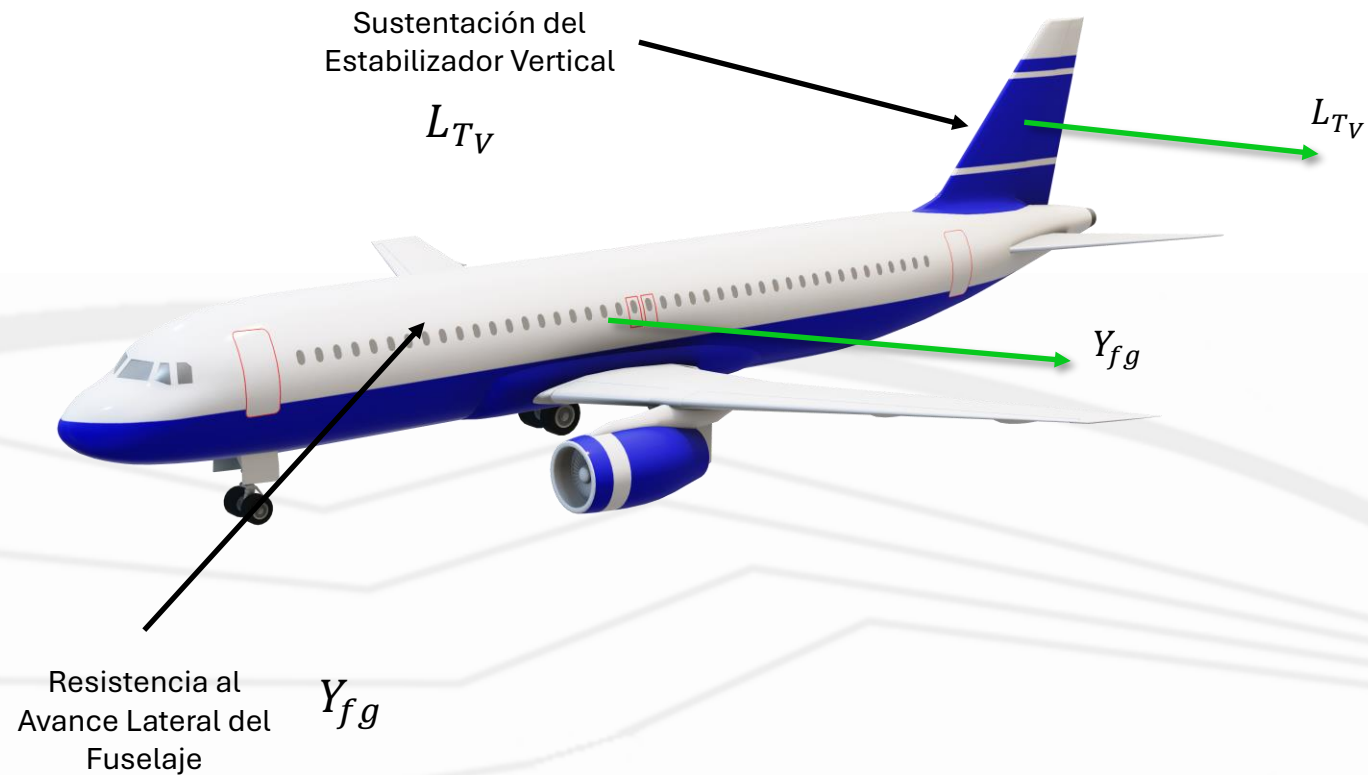


Análisis de fuerzas – aeronave

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

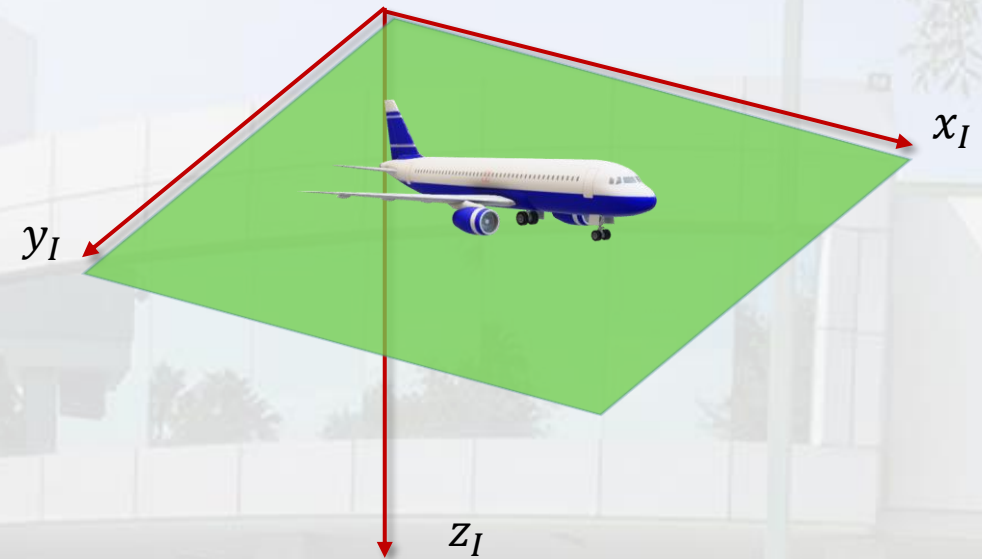
1. Introducción
- 2. Análisis de fuerzas**
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

$$\vec{F}_A = \begin{bmatrix} D_{wI} + D_{wD} + D_{THI} + D_{THD} + D_{TVI} + D_{TVD} + D_{fg} + D_{uc} \\ Y_{fg} + L_{TV} \\ L_{wI} + L_{wD} + L_{THI} + L_{THD} + L_{fg} \end{bmatrix}$$





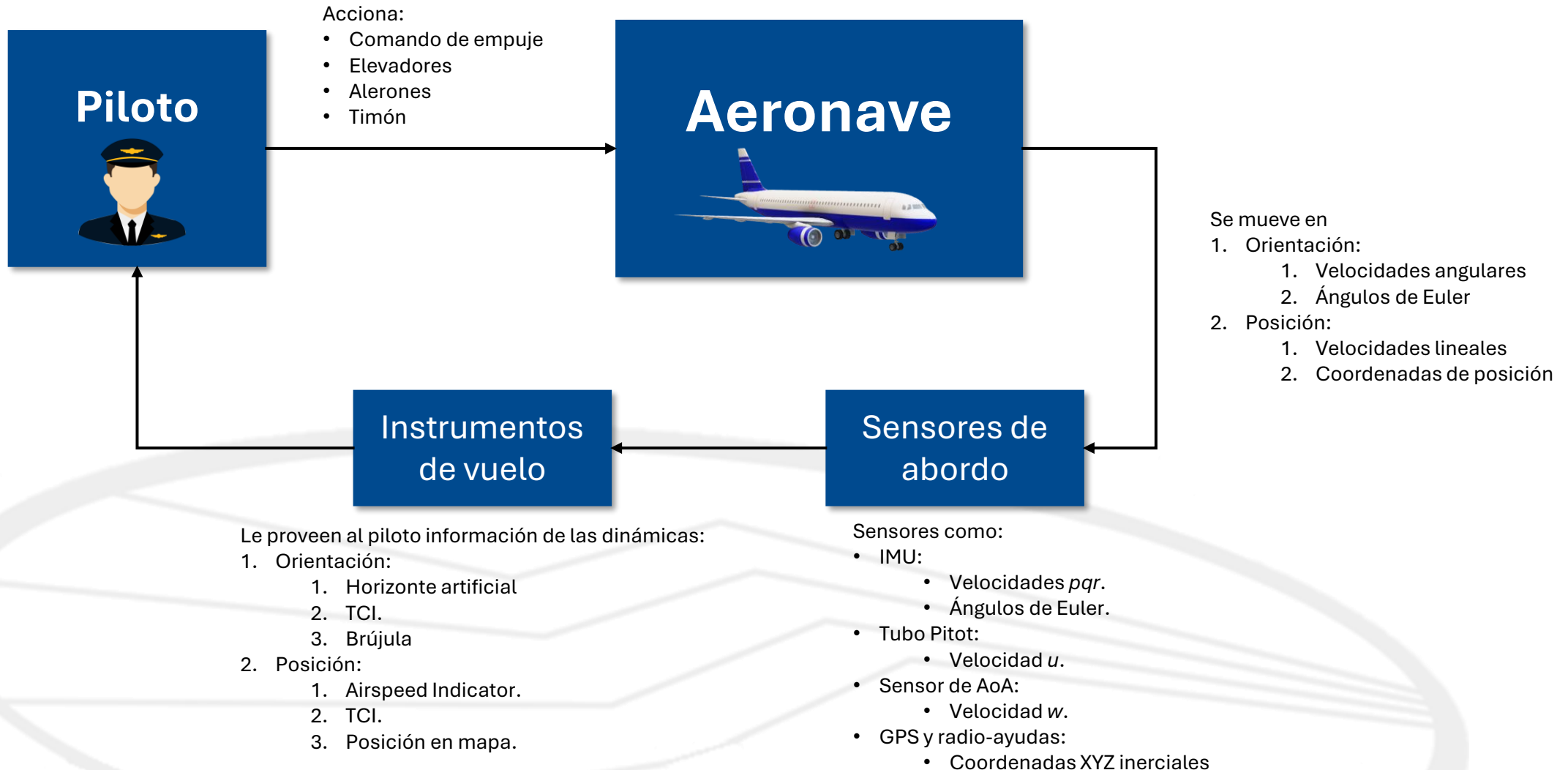
Dinámica de Posición en el Marco de Referencia Inercial



Dinámicas de una aeronave

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación



Dinámicas de una aeronave

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

Entradas:

- Deflexión Elevador
- Deflexión Alerón
- Deflexión Timón
- Porcentaje de potencia

Aeronave



Salidas:

1. Dinámica de orientación:
 1. Aceleraciones angulares
 2. Velocidades angulares
 3. Ángulos
2. Dinámica de posición:
 1. Aceleraciones lineales
 2. Velocidades lineales
 3. Coordenadas de desplazamiento

¿Qué se debe de hacer si se quiere *predecir* el cómo se va a comportar una aeronave?

Diseñar un modelo **matemático** que describa los diferentes fenómenos involucrados en las dinámicas de la aeronave, considerando los parámetros de entrada.

Dinámicas de una aeronave

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

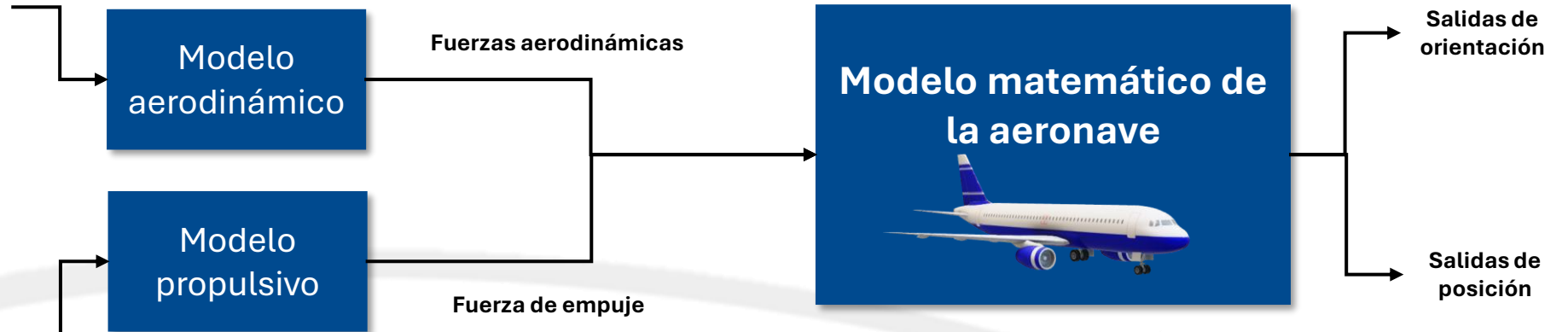
1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

Entradas:

- Deflexión Elevador
- Deflexión Alerón
- Deflexión Timón

Entradas:

- Porcentaje de potencia

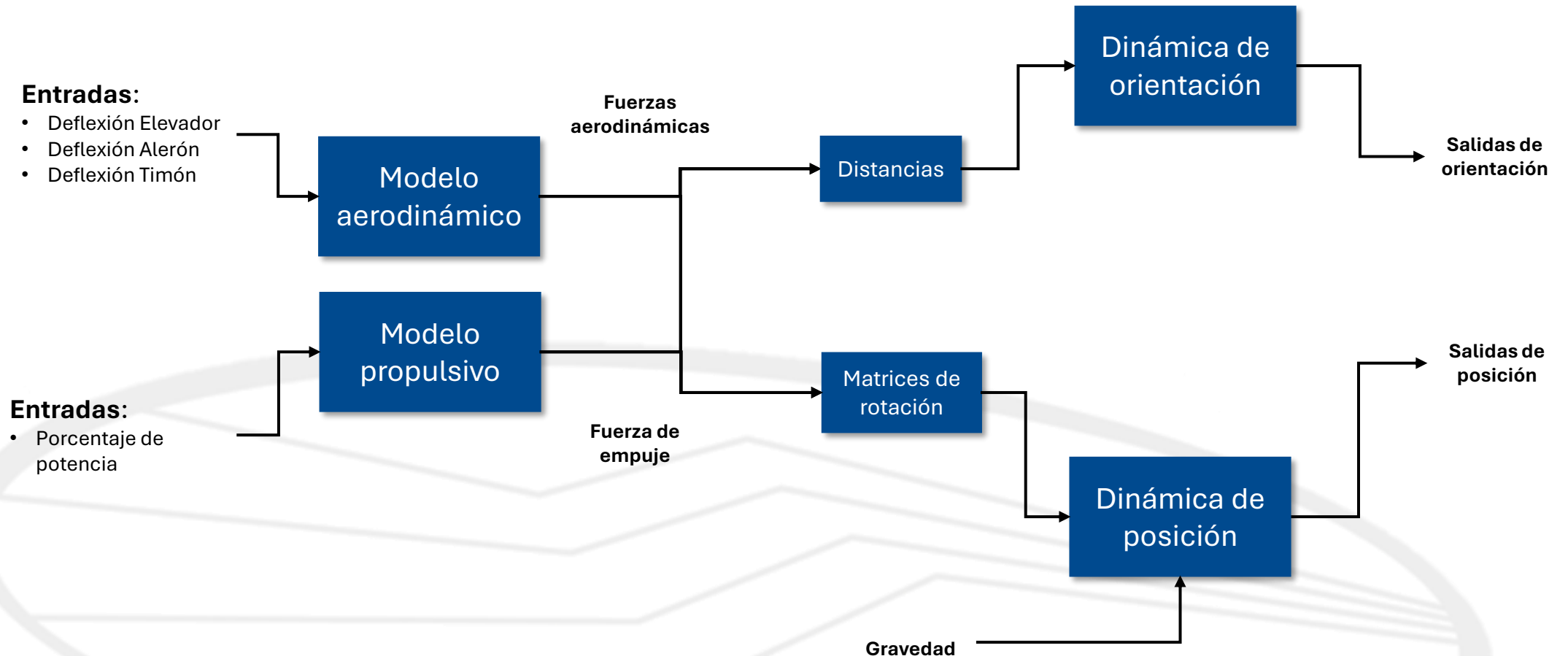




Dinámicas de una aeronave

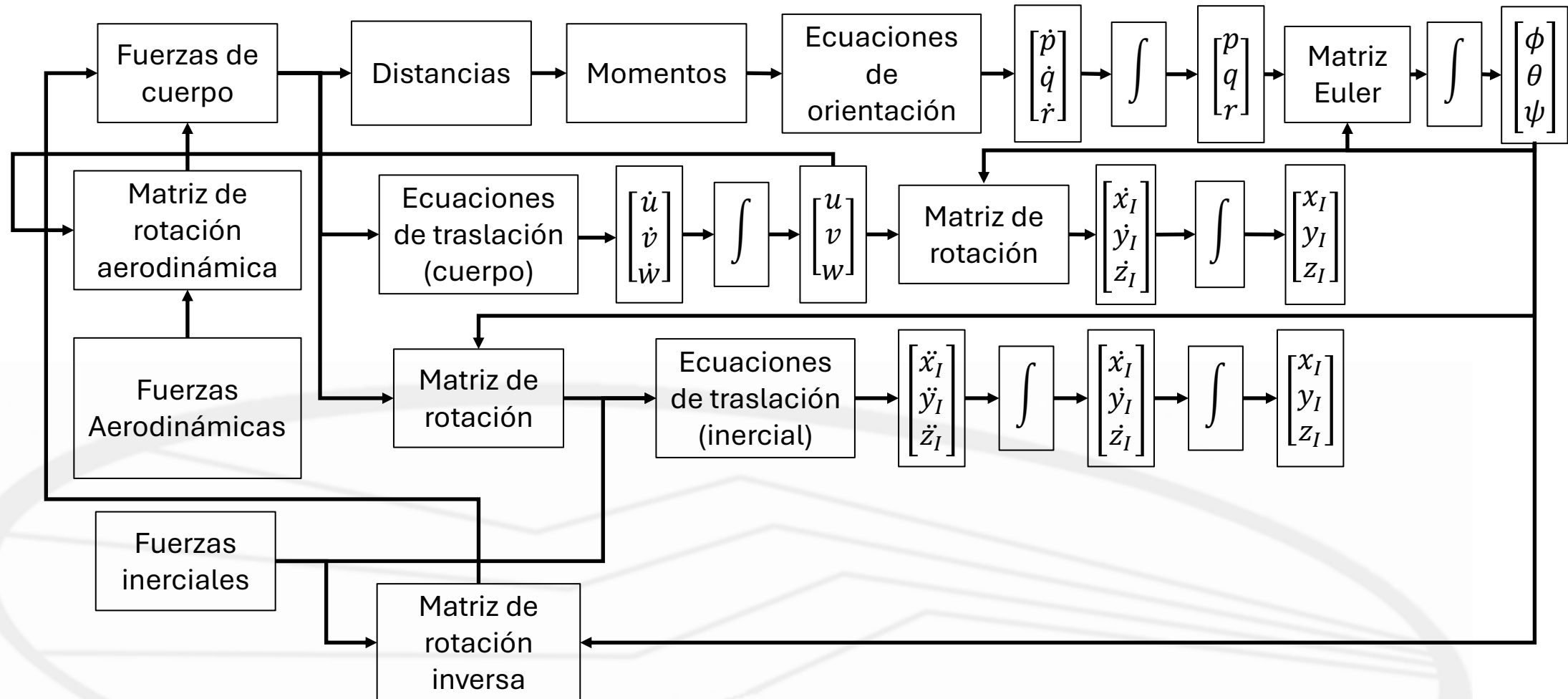
Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación





- Introducción
- Análisis de fuerzas
- Análisis de momentos
- **Din. Posición**
 - MRI**
- Din. Posición
 - MRC
- Din.
 - Orientación
 - MRC.
- Recapitulación

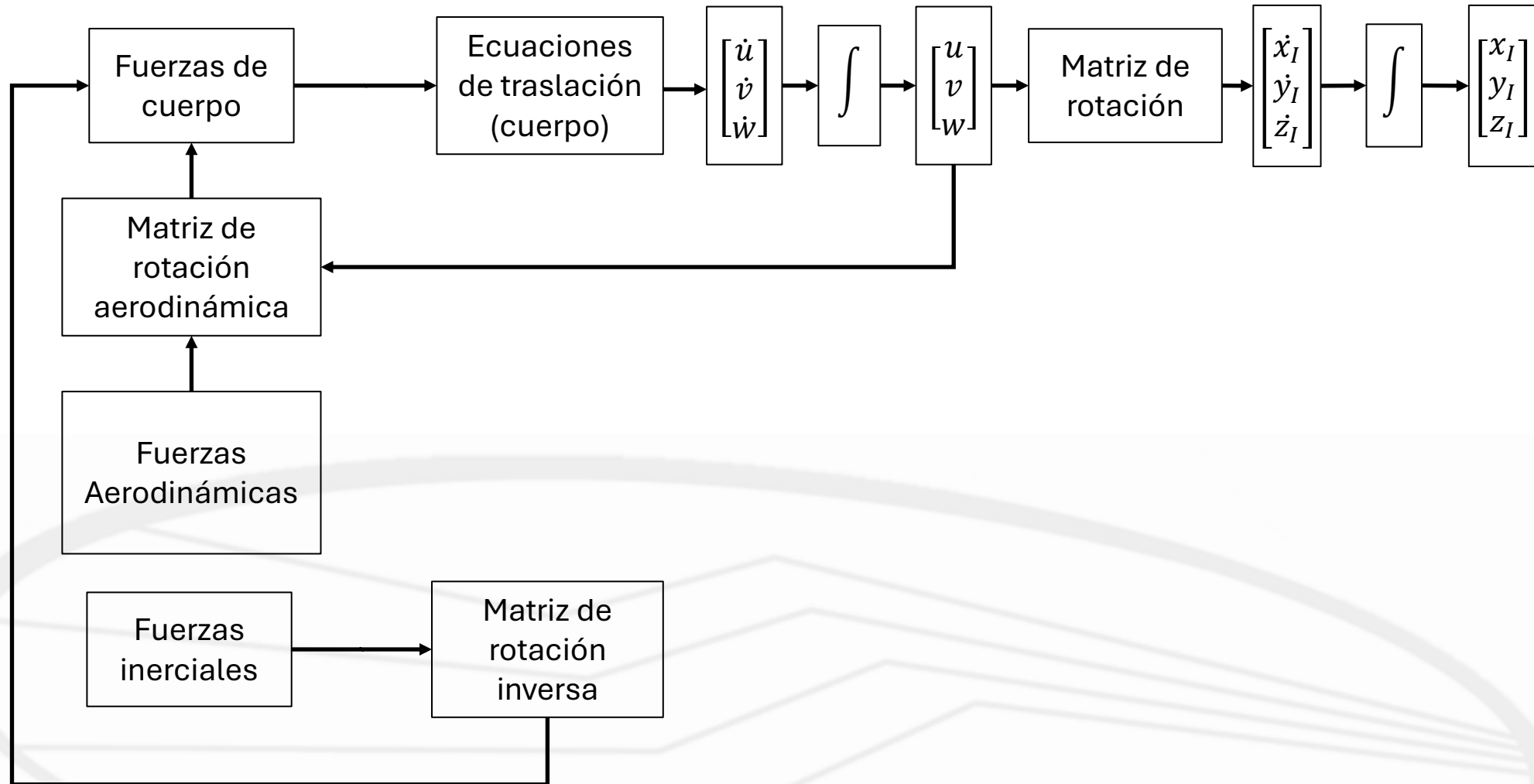




Dinámicas de una aeronave

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
- 4. Din. Posición MRI**
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

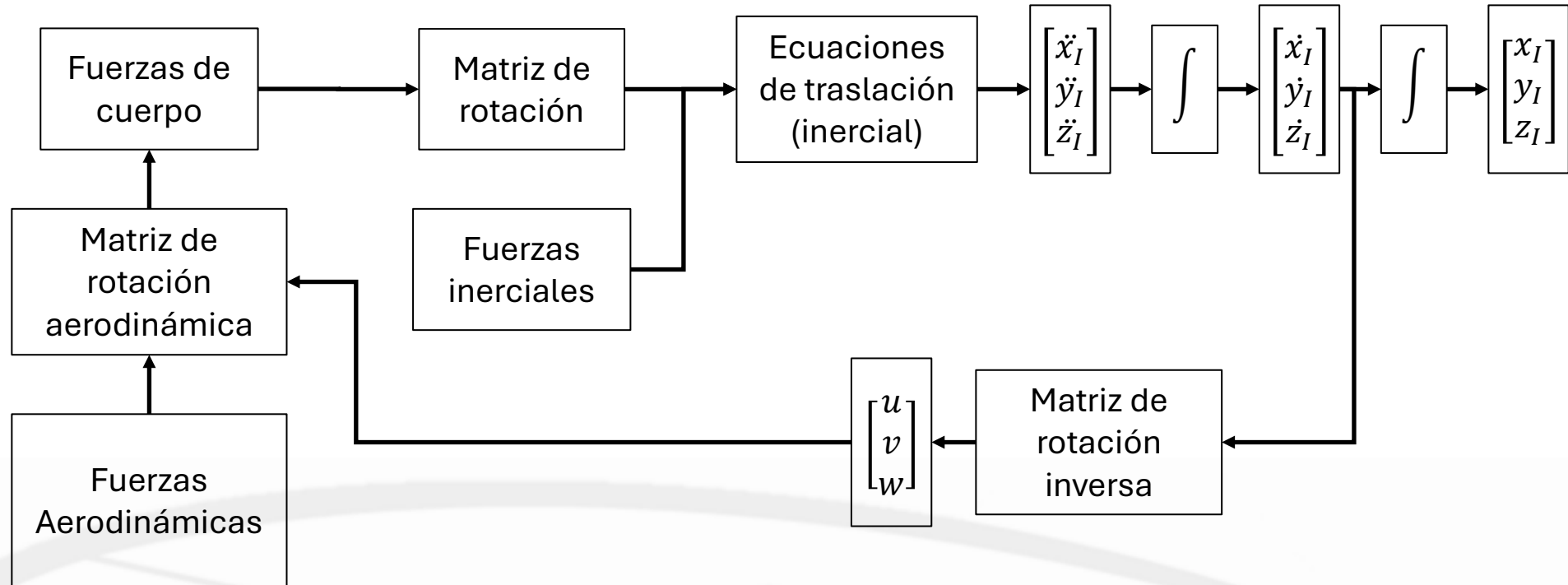




Dinámicas de una aeronave

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
- 4. Din. Posición MRI**
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación





Ecuaciones de traslación - MRI

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. **Din. Posición MRI**
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

$$\underbrace{m\dot{\vec{V}}_I}_{\text{Segunda Ley de Newton}} = \underbrace{F_I}_{\text{Fuerzas en el marco inercial (gravedad)}} + \underbrace{R_{I \leftarrow B} F_B}_{\text{Fuerzas del marco del cuerpo rotadas al marco inercial.}}$$

Fuerzas en el marco del cuerpo; empuje, aerodinámicas, similares.



Ecuaciones de traslación - MRI

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. **Din. Posición MRI**
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

$$\underbrace{m\dot{\vec{V}}_I}_{\text{Segunda Ley de Newton}} = \underbrace{R_{I \leftarrow B} F_B}_{\text{Fuerzas del marco del cuerpo rotadas al marco inercial, sin contar las aerodinámicas; esto es, fuerzas puramente del cuerpo.}} + \overbrace{mge_3}^{\text{Fuerza debió al peso (solo actúa en z)}} + \underbrace{R_{I \leftarrow B} R_{B \leftarrow W} F_A}_{\text{Fuerzas aerodinámicas rotadas al marco del cuerpo, y luego rotadas al marco inercial.}}$$

Vector de fuerzas aerodinámica; sustentaciones y resistencias al avance.



Ecuaciones de traslación - MRI

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
- 4. Din. Posición MRI**
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

$$m\dot{\vec{V}}_I = F_I + R_{I \leftarrow B} F_B$$

$$m\dot{\vec{V}}_I = R_{I \leftarrow B} F_B + mge_3 + R_{I \leftarrow B} R_{B \leftarrow W} F_A$$

Expandiendo los vectores

$$\left\{ m\dot{\vec{V}}_I = R_{I \leftarrow B} \begin{bmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \\ F_{Bz} \end{bmatrix} + mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + R_{I \leftarrow B} R_{B \leftarrow W} \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} \right.$$

Peso de la aeronave solo en

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x}_I \\ \ddot{y}_I \\ \ddot{z}_I \end{bmatrix} = \underbrace{R_{I \leftarrow B} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Empuje rotado al marco inercial}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}}_{\text{Peso de la aeronave solo en}} + R_{I \leftarrow B} R_{B \leftarrow W} \underbrace{\begin{bmatrix} D_w + D_{TH} + D_{TV} + D_{fg} + D_{uc} \\ Y_{fg} + L_{TV} \\ L_w + L_{TH} + L_{fg} \end{bmatrix}}_{\text{Vectores de Resistencia al Avance, Resistencia Lateral y Sustentación.}}$$

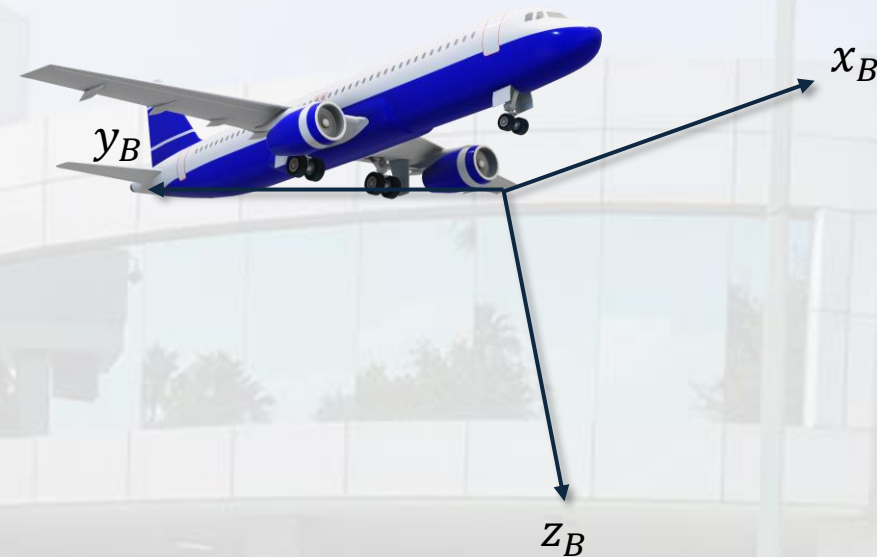


UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
NUEVO LEÓN



FACULTAD DE
INGENIERÍA MECÁNICA
Y ELÉCTRICA

Dinámica de Posición en el Marco de Referencia del Cuerpo





Ecuaciones de traslación - MRC

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
- 5. Din. Posición MRC**
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

$$\underbrace{m\dot{\vec{V}}_B}_{\text{Segunda Ley de Newton}} = \underbrace{F_B}_{\text{Vector de fuerzas de cuerpo (empuje)}} + \underbrace{R_{I \leftarrow B}^{-1} m g e_3}_{\text{Fuerzas del marco inercial rotadas al marco del cuerpo (matriz de rotación inversa)}} + \underbrace{R_{B \leftarrow W} F_A}_{\text{Fuerzas aerodinámicas rotadas al marco del cuerpo}} - \underbrace{\Omega \times m\vec{V}_B}_{\text{Efecto de fuerzas ficticias}}$$

Vector de velocidades angulares pqr

Es importante recordar que *La Segunda Ley de Newton* es referida al **marco de referencia inercial**, por lo que relativo al marco del cuerpo aparecen las *fuerzas ficticias*.

Ecuaciones de traslación - MRC

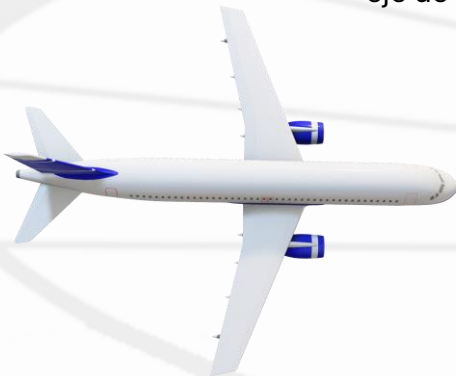
Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. **Din. Posición MRC**
6. Din. Orientación MRC.
7. Repetición

$$\underbrace{m \dot{\vec{V}}_B}_{\text{Segunda Ley de Newton}} = \underbrace{F_B}_{\text{Vector de fuerzas de cuerpo (empuje)}} + \underbrace{R_{I \leftarrow B}^{-1} m g e_3}_{\text{Fuerzas del marco inercial rotadas al marco del cuerpo (matriz de rotación inversa)}} + \underbrace{R_{B \leftarrow W} F_A}_{\text{Fuerzas aerodinámicas rotadas al marco del cuerpo}} - \underbrace{\Omega \times m \vec{V}_B}_{\text{Efecto de fuerzas ficticias}}$$

Vector de velocidades angulares pqr

Si una aeronave gira súbitamente, a pesar de que lleve **Empuje**, esta se *desacelera* relativa a su eje de movimiento y *trata de continuar* en la dirección *inercial* que ya llevaba.



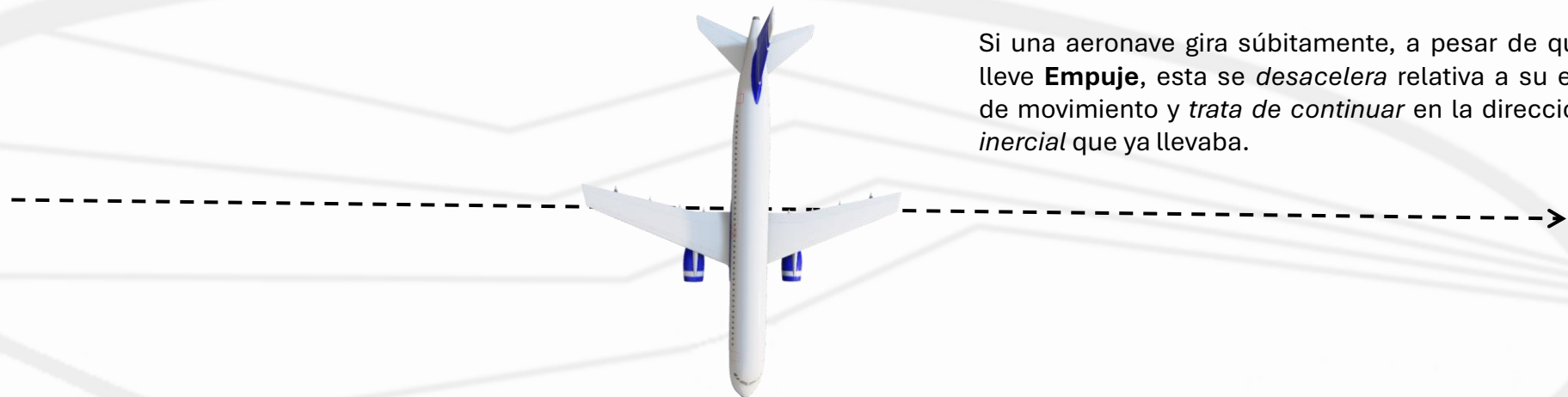
Ecuaciones de traslación - MRC

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. **Din. Posición MRC**
6. Din. Orientación MRC.
7. Repetición

$$\underbrace{m\dot{\vec{V}}_B}_{\text{Segunda Ley de Newton}} = \underbrace{F_B}_{\text{Vector de fuerzas de cuerpo (empuje)}} + \underbrace{R_{I \leftarrow B}^{-1} m g e_3}_{\text{Fuerzas del marco inercial rotadas al marco del cuerpo (matriz de rotación inversa)}} + \underbrace{R_{B \leftarrow W} F_A}_{\text{Fuerzas aerodinámicas rotadas al marco del cuerpo}} - \underbrace{\Omega \times m\vec{V}_B}_{\text{Efecto de fuerzas ficticias}}$$

Vector de velocidades angulares pqr





Ecuaciones de traslación - MRC

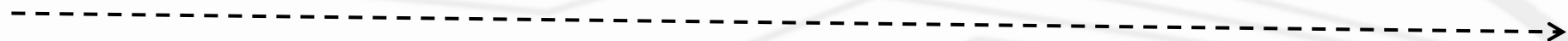
Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
- 5. Din. Posición MRC**
6. Din. Orientación
7. Recapitulación

$$\underbrace{m\dot{\vec{V}}_B}_{\text{Segunda Ley de Newton}} = \underbrace{F_B}_{\text{Vector de fuerzas de cuerpo (empuje)}} + \underbrace{R_{I \leftarrow B}^{-1} m g e_3}_{\text{Fuerzas del marco inercial rotadas al marco del cuerpo (matriz de rotación inversa)}} + \underbrace{R_{B \leftarrow W} F_A}_{\text{Fuerzas aerodinámicas rotadas al marco del cuerpo}} - \underbrace{\Omega \times m\vec{V}_B}_{\text{Efecto de fuerzas ficticias}}$$

Vector de velocidades angulares pqr

La aeronave se volvió a *acelerar* debido al **Empuje**, pero no conservó la velocidad en el eje del cuerpo





Ecuaciones de traslación - MRC

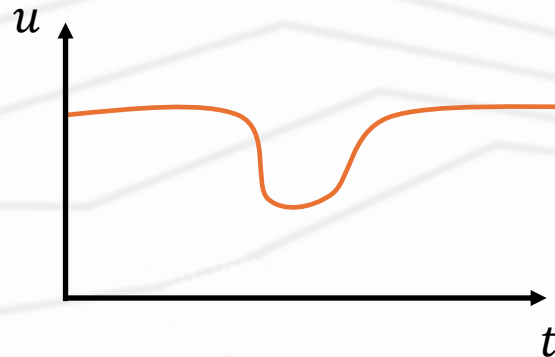
Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
- 5. Din. Posición MRC**
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

$$\underbrace{m\dot{\vec{V}}_B}_{\text{Segunda Ley de Newton}} = \underbrace{F_B}_{\text{Vector de fuerzas de cuerpo (empuje)}} + \underbrace{R_{I \leftarrow B}^{-1} m g e_3}_{\text{Fuerzas del marco inercial rotadas al marco del cuerpo (matriz de rotación inversa)}} + \underbrace{R_{B \leftarrow W} F_A}_{\text{Fuerzas aerodinámicas rotadas al marco del cuerpo}} - \underbrace{\Omega \times m\vec{V}_B}_{\text{Efecto de fuerzas ficticias}}$$

Vector de velocidades angulares pqr

A pesar de que no hubo un cambio en la fuerza de empuje, si ocurrió una *desaceleración* relativa al eje cuerpo.





Fuerzas ficticias

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de
fuerzas
3. Análisis de
momentos
4. Din. Posición
MRI
- 5. Din. Posición
MRC**
6. Din.
Orientación
MRC.
7. Recapitulación

Fuerzas ficticias

$$-\Omega \times m\vec{V}_B$$

Expandiendo los
vectores

$$-\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times m \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Realizando el
producto cruz

$$\begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p & q & r \\ mu & mv & mw \end{array}$$

Vector de fuerzas
resultantes

$$\begin{bmatrix} mqw - mrv \\ mru - mpw \\ mpv - mqu \end{bmatrix}$$



Fuerzas ficticias

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de
fuerzas
3. Análisis de
momentos
4. Din. Posición
MRI
5. **Din. Posición
MRC**
6. Din.
Orientación
MRC.
7. Repetición

$$-\Omega \times m \vec{V}_B$$

$$-\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times m \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p & q & r \\ mu & mv & mw \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} mqw - mrv \\ mru - mpw \\ mpv - mqu \end{bmatrix}$$

$$m \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{I \leftarrow B}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + R_{B \leftarrow W} \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} mqw - mrv \\ mru - mpw \\ mpv - mqu \end{bmatrix}$$

$$m \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{I \leftarrow B}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + R_{B \leftarrow W} \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mrv - mqw \\ mpw - mru \\ mqu - mpv \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{I \leftarrow B}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + R_{B \leftarrow W} \begin{bmatrix} \frac{F_{Ax}}{m} \\ \frac{F_{Ay}}{m} \\ \frac{F_{Az}}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix}$$



Fuerzas ficticias

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de
fuerzas
3. Análisis de
momentos
4. Din. Posición
MRI
5. **Din. Posición
MRC**
6. Din.
Orientación
MRC.
7. Recapitulación

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{I \leftarrow B}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + R_{B \leftarrow W} \begin{bmatrix} \frac{F_{Ax}}{m} \\ \frac{F_{Ay}}{m} \\ \frac{F_{Az}}{m} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix}}$$

A los efectos de
fuerza generados por
este vector se les
conoce como
Fuerzas de Coriolis.

Si se combinan movimientos de traslación y giro, desde la perspectiva de los ocupantes de la aeronave, se sienten fuerzas debido a los *efectos inerciales*, estas son las *fuerzas ficticias*; tienen este nombre dado que desde el marco fijo no se aprecian, y en esencia no hay fenómeno de conservación de *momentum* que las genere.

Fuerzas ficticias

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de
fuerzas
3. Análisis de
momentos
4. Din. Posición
MRI
- 5. Din. Posición
MRC**
6. Din.
Orientación
MRC.
7. Repetición

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{I \leftarrow B}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + R_{B \leftarrow W} \begin{bmatrix} \frac{F_{Ax}}{m} \\ \frac{F_{Ay}}{m} \\ \frac{F_{Az}}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix}$$

Aeronave con velocidad crucero en
VRN

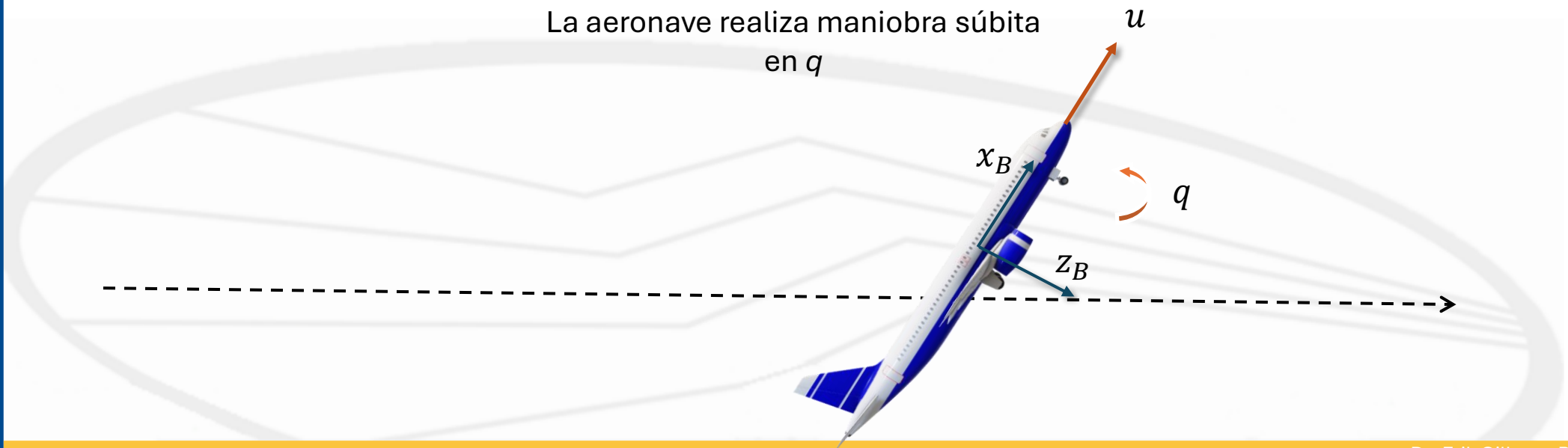


Fuerzas ficticias

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de
fuerzas
3. Análisis de
momentos
4. Din. Posición
MRI
5. **Din. Posición
MRC**
6. Din.
Orientación
MRC.
7. Recapitulación

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{I \leftarrow B}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + R_{B \leftarrow W} \begin{bmatrix} \frac{F_{Ax}}{m} \\ \frac{F_{Ay}}{m} \\ \frac{F_{Az}}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix}$$



Fuerzas ficticias

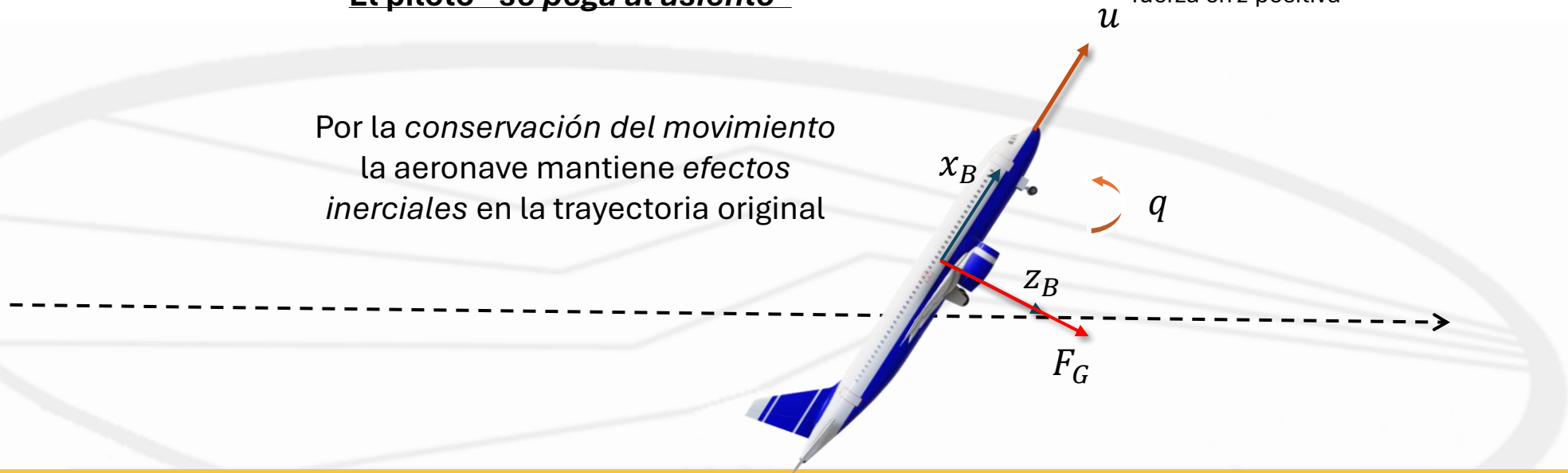
Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de
fuerzas
3. Análisis de
momentos
4. Din. Posición
MRI
5. **Din. Posición
MRC**
6. Din.
Orientación
MRC.
7. Recapitulación

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{I \leftarrow B}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + R_{B \leftarrow W} \begin{bmatrix} \frac{F_{Ax}}{m} \\ \frac{F_{Ay}}{m} \\ \frac{F_{Az}}{m} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ \textcolor{red}{qu} - pv \end{bmatrix}}_{\text{Se manifiesta una fuerza en z positiva}}$$

El piloto “se pega al asiento”

Por la *conservación del movimiento*
la aeronave mantiene *efectos*
inerciales en la trayectoria original

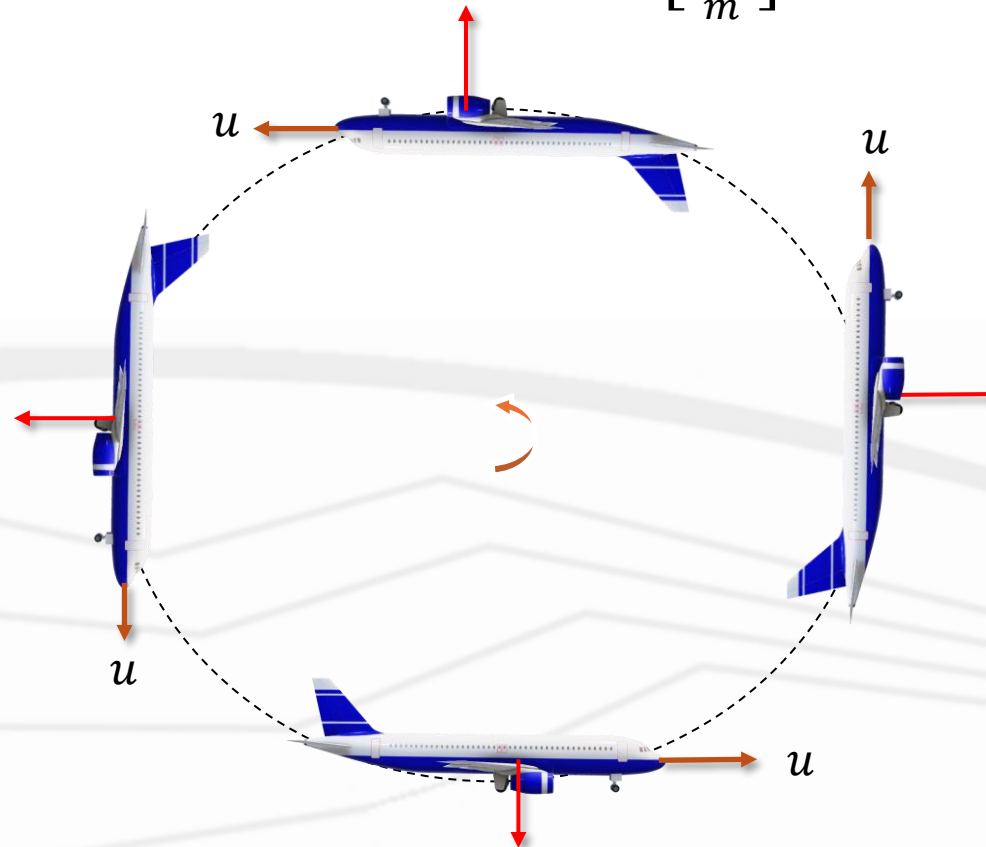


Fuerzas ficticias

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de
fuerzas
3. Análisis de
momentos
4. Din. Posición
MRI
- 5. Din. Posición
MRC**
6. Din.
Orientación
MRC.
7. Recapitulación

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{I \leftarrow B}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + R_{B \leftarrow W} \begin{bmatrix} \frac{F_{Ax}}{m} \\ \frac{F_{Ay}}{m} \\ \frac{F_{Az}}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ \textcolor{red}{qu} - pv \end{bmatrix}$$



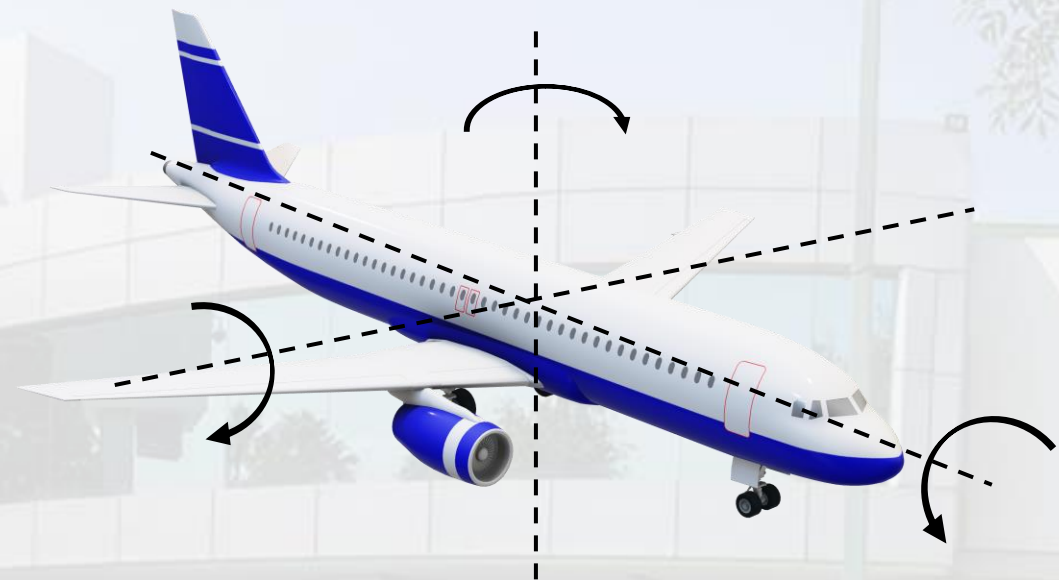


UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
NUEVO LEÓN



FACULTAD DE
INGENIERÍA MECÁNICA
Y ELÉCTRICA

Dinámica de Orientación en el Marco de Referencia del Cuerpo

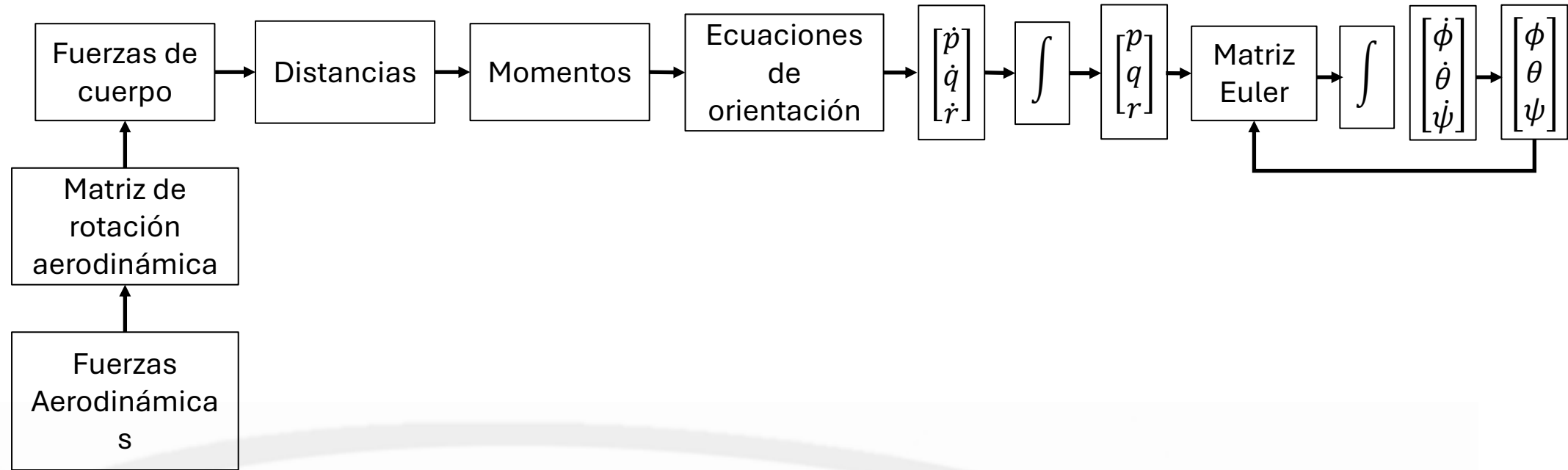




Dinámica de orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
- 6. Din. Orientación MRC.**
7. Recapitulación





Dinámica de orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
- 6. Din. Orientación MRC.**
7. Recapitulación

Vector de momentos
medidos desde el C.G.

$$\underbrace{J\dot{\Omega}}_{\text{Segunda Ley de Newton}} = \underbrace{\tau}_{\text{Vector de momentos medidos desde el C.G.}} - \underbrace{\Omega \times J\Omega}_{\text{Efecto giroscópico}}$$

Segunda Ley de
Newton

Efecto
giroscópico



Dinámica de orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
- 6. Din. Orientación MRC.**
7. Recapitulación

$$J\dot{\Omega} = \tau - \Omega \times J\Omega$$

Expandiendo los vectores

$$\begin{Bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Vector de aceleraciones angulares

Vector de momentos

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{Tensor de inercia de la aeronave}} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right)$$

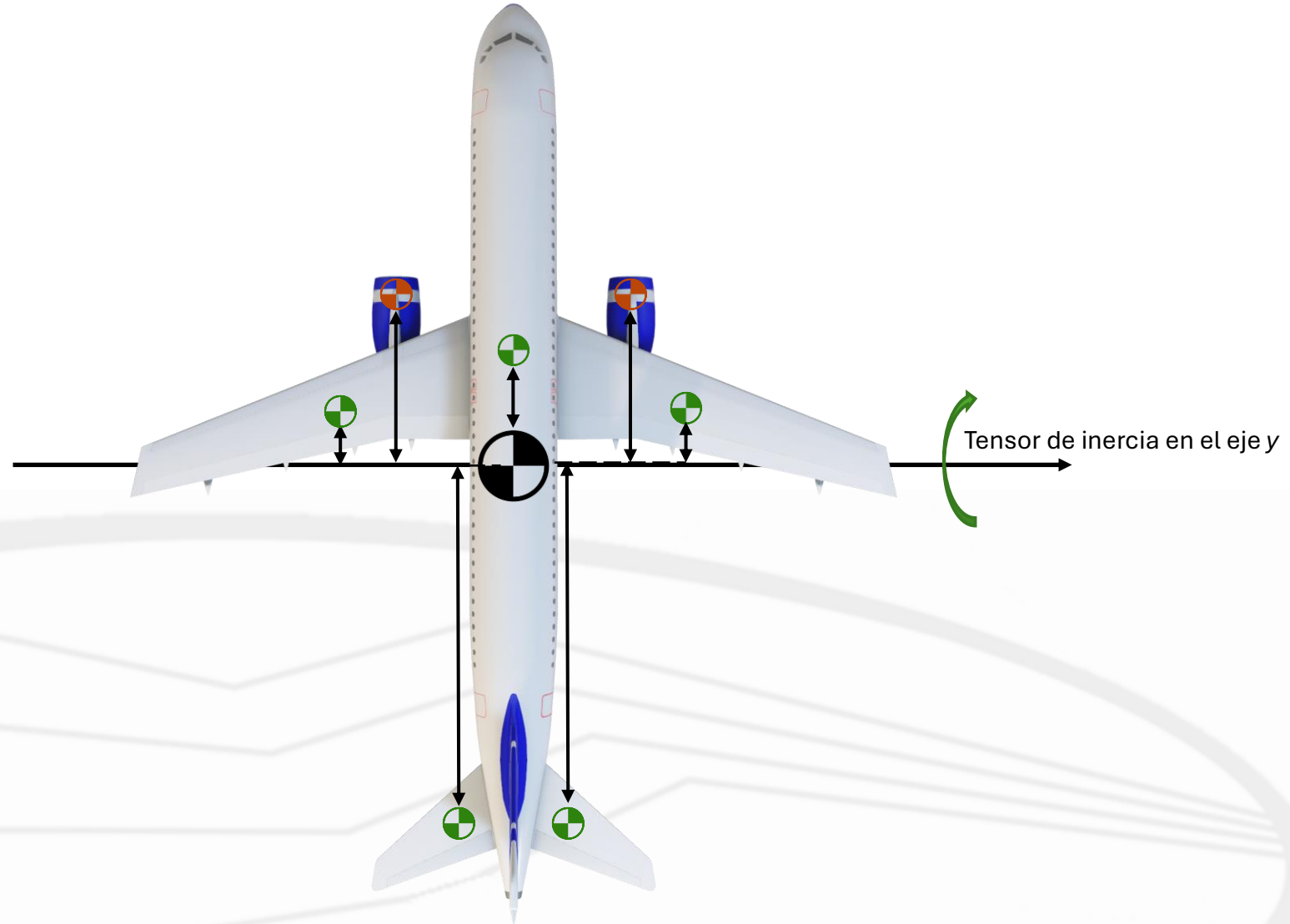
Tensor de inercia de la aeronave

Tensor de inercia

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
- 6. Din. Orientación MRC.**
7. Recapitulación

$$\begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$



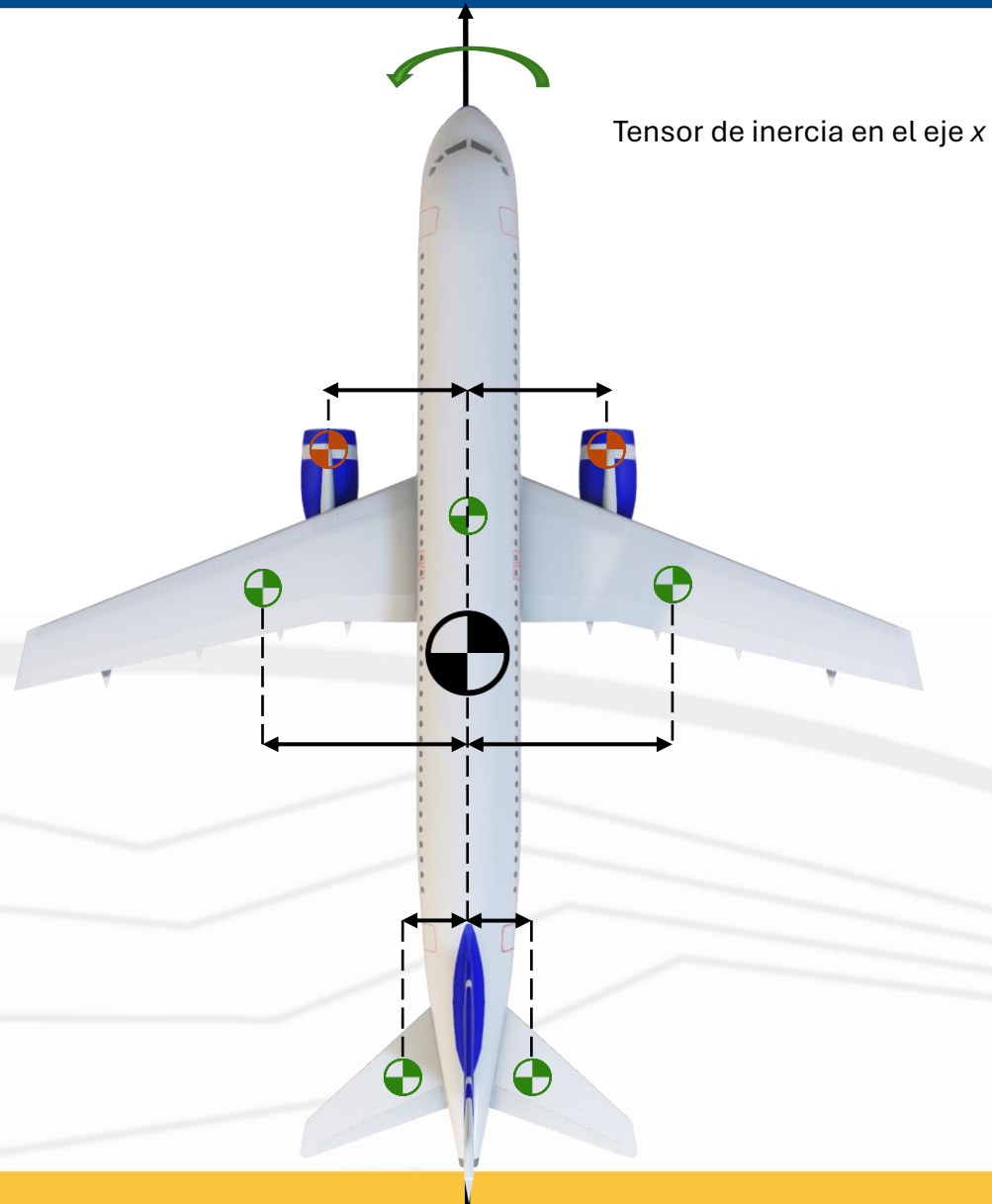


Tensor de inercia

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

$$\begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$





Tarea

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.
7. Recapitulación

Simular ambos modelos de la dinámica de posición y comprobar que sean coincidentes:

1. Prueba 1:

1. Considerar ángulos de Euler fijos pero diferentes de 0.
2. Establecer las fuerzas aerodinámica como fijas.
3. Establecer las fuerzas de cuerpo fijas.
4. Obtener los vectores de velocidad en el marco del cuerpo y el marco inercial de manera independiente.
5. Rotar ambos vectores a su contra parte y comparar.

2. Prueba 2:

1. Considerar 2 ángulos de Euler fijos y varíe una de las velocidades de cuerpo.
2. Programar la matriz de Euler para considerar el cambio de los ángulos de Euler como resultado de la variación de una de las velocidades de cuerpo.
3. Establecer las fuerzas aerodinámica como fijas.
4. Establecer las fuerzas de cuerpo fijas.
5. Obtener los vectores de velocidad en el marco del cuerpo y el marco inercial de manera independiente.
6. Rotar ambos vectores a su contra parte y comparar.

$$m\dot{\vec{V}}_I = R_{I \leftarrow B} F_B + m g e_3 + R_{I \leftarrow B} R_{B \leftarrow W} F_A$$
$$m\dot{\vec{V}}_B = F_B + R_{I \leftarrow B}^{-1} m g e_3 + R_{B \leftarrow W} F_A - \Omega \times m \vec{V}_B$$





UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
NUEVO LEÓN



FACULTAD DE
INGENIERÍA MECÁNICA
Y ELÉCTRICA

Recapitulación de la Unidad Temática



Recapitulación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de
fuerzas
3. Análisis de
momentos
4. Din. Posición
MRI
5. Din. Posición
MRC
6. Din.
Orientación
MRC.

7. Recapitulación

Los vectores de fuerzas se pueden representar en
diferentes marcos de referencia.

\vec{F}_I Fuerzas en el *marco de referencia inercial*

\vec{F}_B Fuerzas en el *marco de referencia del cuerpo*

\vec{F}_W Fuerzas en el *marco de referencia aerodinámico
(viento)*

El vector de fuerzas en el *marco de referencia inercial*
presenta las siguientes características:

- El peso de la aeronave ya está en este marco.
- Las fuerzas de empuje fijas en la aeronave se tienen que rotar con la *matriz de rotación*.
- Las fuerzas aerodinámicas tienen que rotarse primero al *marco del cuerpo* y luego al *marco inercial*.

$$\vec{F}_I = R_{I \leftarrow B} \vec{F}_{B_{Thr}} + m g e_3 + R_{I \leftarrow B} R_{B \leftarrow W} \vec{F}_A$$

$$\vec{F}_{I_g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

No todos los vectores de fuerza están en el mismo marco de referencia. Además, estos vectores se componen de una serie de fuerzas/fenómenos que pueden depender de otros *estados* de la aeronave, como las fuerzas aerodinámicas.

$$\vec{F}_{B_{Thr}} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_A = \begin{bmatrix} D_{wI} + D_{wD} + D_{THI} + D_{THD} + D_{TVI} + D_{TVD} + D_{fg} + D_{uc} \\ Y_{fg} + L_{TV} \\ L_{wI} + L_{wD} + L_{THI} + L_{THD} + L_{fg} \end{bmatrix}$$

El vector de fuerzas en el *marco de referencia del cuerpo*
presenta las siguientes características:

- El peso de la aeronave se tiene que rotar con la inversa de la *matriz de rotación* para tenerlo en el *marco del cuerpo*.
- Las fuerzas de empuje fijas en la aeronave ya están en el *marco del cuerpo*.
- Las fuerzas aerodinámicas tienen que rotarse con la *matriz de rotación aerodinámica* al marco del cuerpo.

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{B_{Thr}} + R_{I \leftarrow B}^{-1} m g e_3 + R_{B \leftarrow W} \vec{F}_A$$



Recapitulación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Análisis de fuerzas
3. Análisis de momentos
4. Din. Posición MRI
5. Din. Posición MRC
6. Din. Orientación MRC.

7. Recapitulación

La dinámica de *posición* se representa con la *Segunda Ley de Newton* y puede establecerse en distintos *marcos de referencia*.
Para el *marco de referencia inercial*:

$$m\dot{\vec{V}}_I = F_I + R_{I \leftarrow B} F_B$$
$$m\dot{\vec{V}}_I = R_{I \leftarrow B} F_B + mge_3 + R_{I \leftarrow B} R_{B \leftarrow W} F_A$$

La *dinámica de posición* en el *marco de referencia del cuerpo* se expresa como:

$$m\dot{\vec{V}}_B = F_B + R_{I \leftarrow B}^{-1} mge_3 + R_{B \leftarrow W} F_A - \Omega \times m\vec{V}_B$$

La *dinámica de posición* en el *marco de referencia del cuerpo* está referenciada a un **marco de referencia rotativo**, lo anterior significa que es necesario considerar los efectos de las *fuerzas ficticias*.

$$\begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix}$$

La *dinámica de orientación* vista desde el *marco del cuerpo* requiere considerar los *efectos giroscópicos*, en caso contrario, al considerar la *dinámica* en el *marco inercial*, sería necesario tener un *tensor de inercia* dependiente de la *orientación*.

$$J\dot{\Omega} = \tau - \Omega \times J\Omega$$



UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
NUEVO LEÓN



FACULTAD DE
INGENIERÍA MECÁNICA
Y ELÉCTRICA

Análisis dinámico

Dinámica de Vuelo

7mo semestre

Plan 401

Dr. Erik Gilberto Rojo Rodríguez