UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

Dinámica longitudinal

Dinámica de Vuelo

7mo semestre

Plan 401

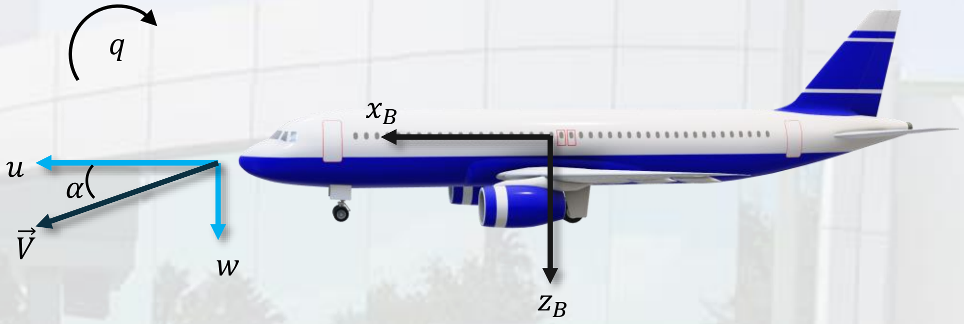
Dr. Erik Gilberto Rojo Rodríguez

Contenidos de la Unidad Temática

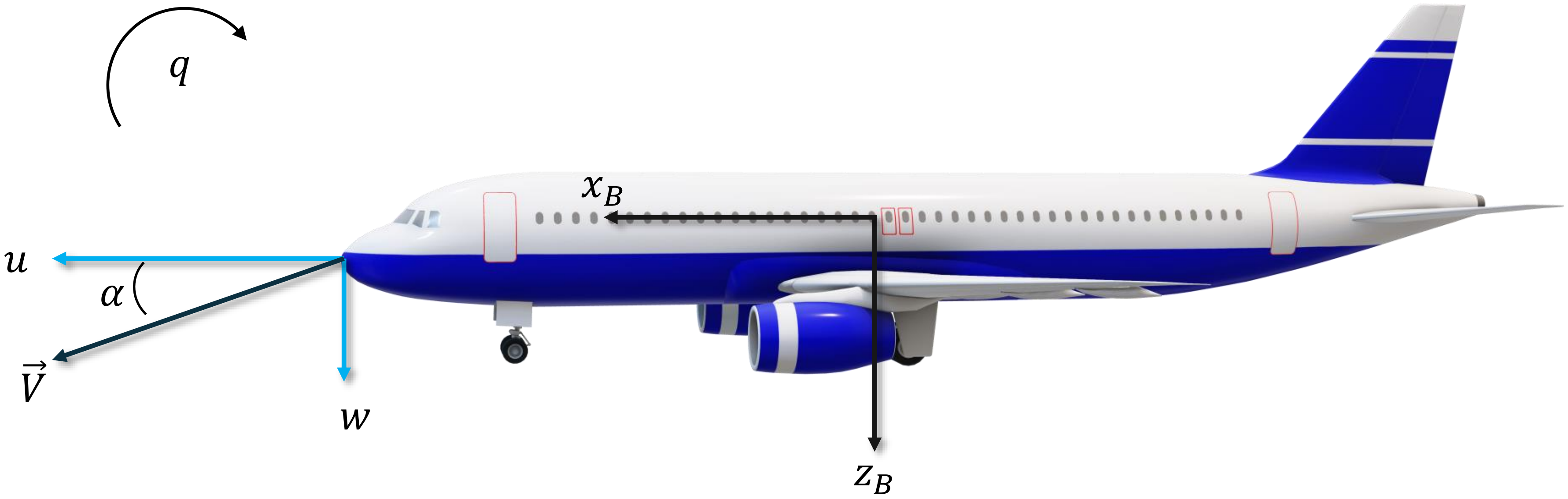
Universidad Autónoma de Nuevo León

a. **Dinámicas de navegación y orientación longitudinal aisladas.**
b. **Efectos aerodinámicos longitudinales.**
c. **Análisis de estabilidad estática longitudinal.**
   i. Derivadas de estabilidad longitudinales (estáticas).
   ii. Derivadas de control longitudinales.
d. **Análisis de estabilidad dinámica longitudinal.**
   i. Modo de oscilación Fugoide.
   ii. Modo de oscilación Periodo Corto.
   iii. Derivadas de estabilidad longitudinal (dinámicas).

Dinámica de navegación y orientación



Dinámica de navegación y orientación



Generalmente se cumple que:

$$q \neq \dot{\theta}$$

Cómo la dinámica es aislada, se puede establecer que:

$$q \approx \dot{\theta}$$

$$\int q \; dt \approx \theta$$

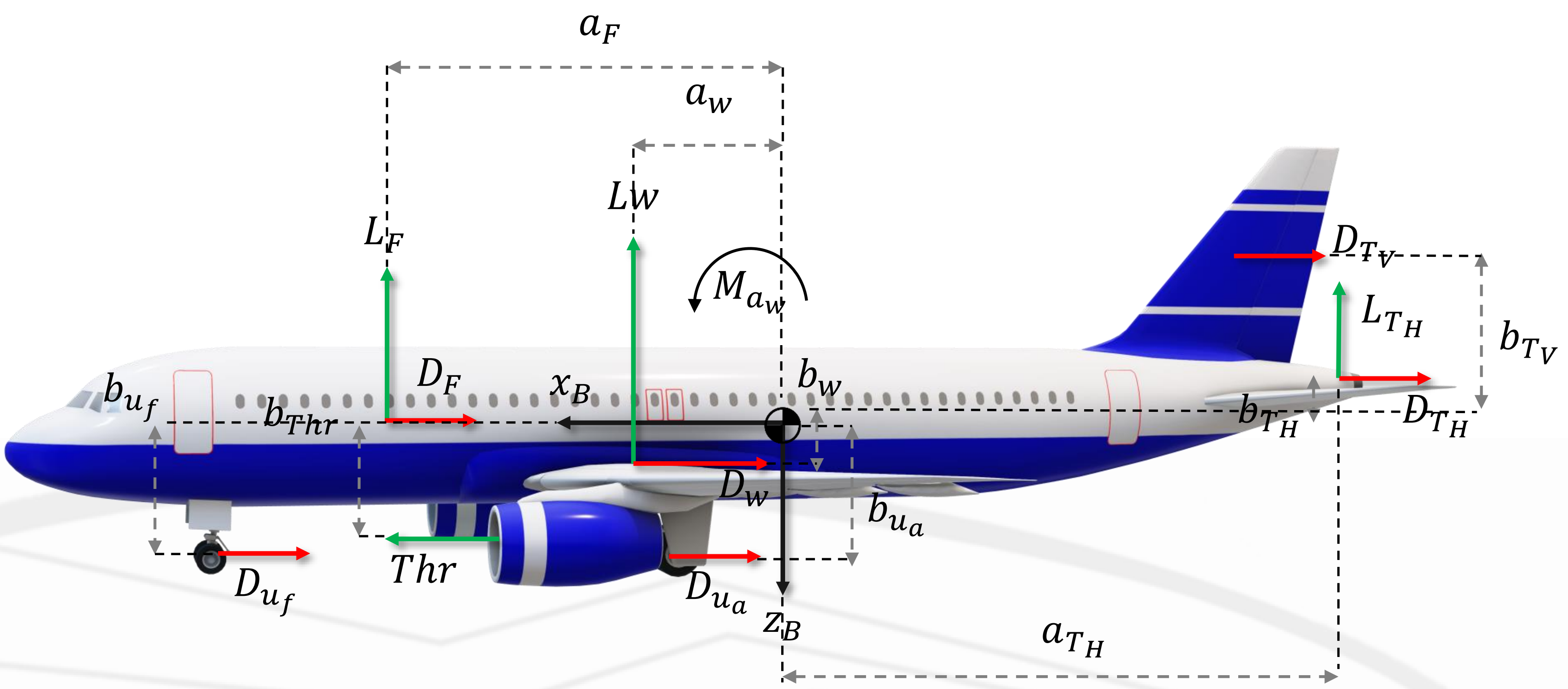
La dinámica longitudinal de la aeronave son aquellos estados que se manifiestan en el plano $x_B z_B$ del marco del cuerpo.

Involucra los siguientes estados:

$$\underbrace{u \quad w \quad \dot{x}_I \quad \dot{z}_I}_{\text{Velocidades lineales}} \quad \underbrace{x_I \quad z_I}_{\text{Desplazamientos}} \quad \underbrace{q \quad \dot{\theta}}_{\text{Velocidades angulares}} \quad \underbrace{\theta}_{\text{Ángulo}} \quad \underbrace{Thr \quad \delta_{elev}}_{\text{Entradas de } control}$$

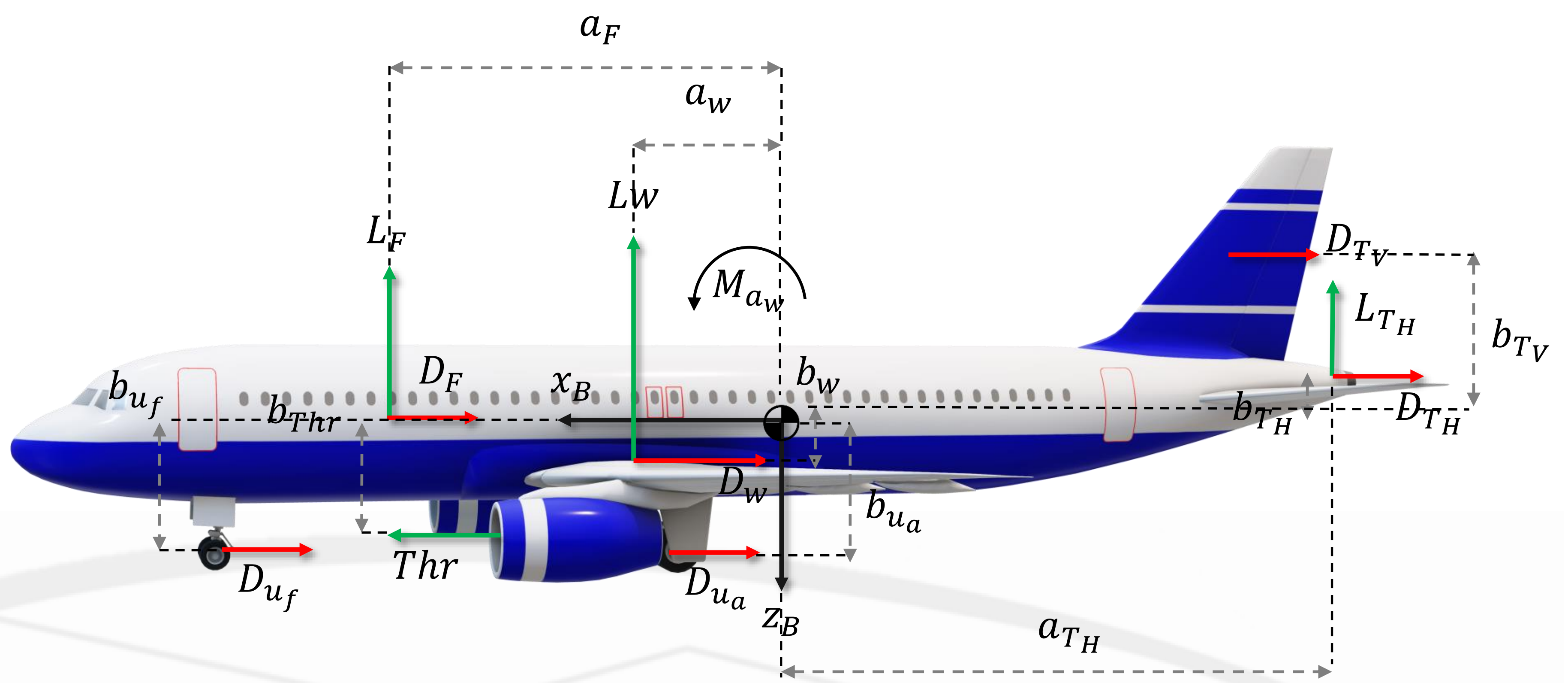
Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León



Dinámica de navegación y orientación

Universidad Autónoma de Nuevo León



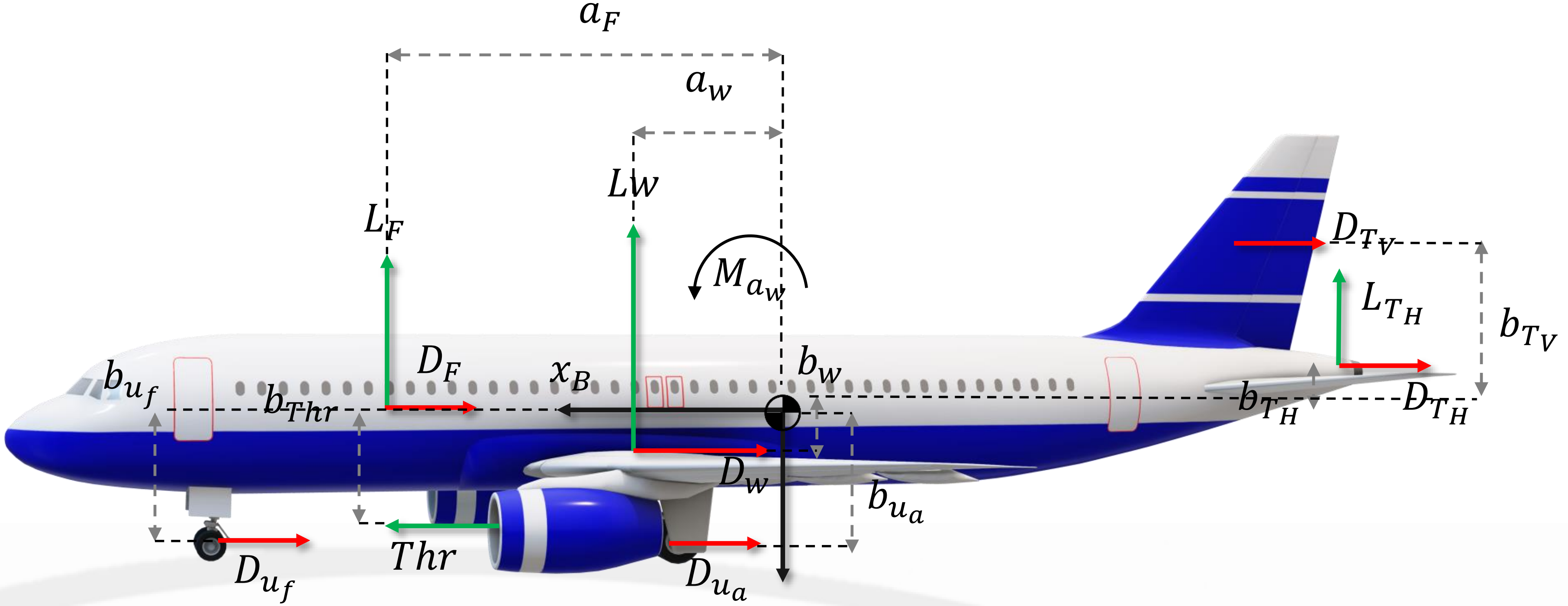
Estableciendo la sumatoria de momentos longitudinales considerando *valor absoluto* de distancias y fuerzas con dirección *convencional*:

$$\sum \mathcal{M} = (L_{w_1} + L_{w_2})a_w - (D_{w_1} + D_{w_2})b_w - \left(L_{T_{H_1}} + L_{T_{H_2}}\right)a_{T_H} + \left(D_{T_{H_1}} + D_{T_{H_2}}\right)b_{T_H} + D_{T_V}b_{T_V}$$

$$+L_F a_F + Thr\, b_{Thr} - D_{u_f}b_{u_f} - D_{u_a}b_{u_a} - M_{a_w}$$

Dinámica de navegación y orientación

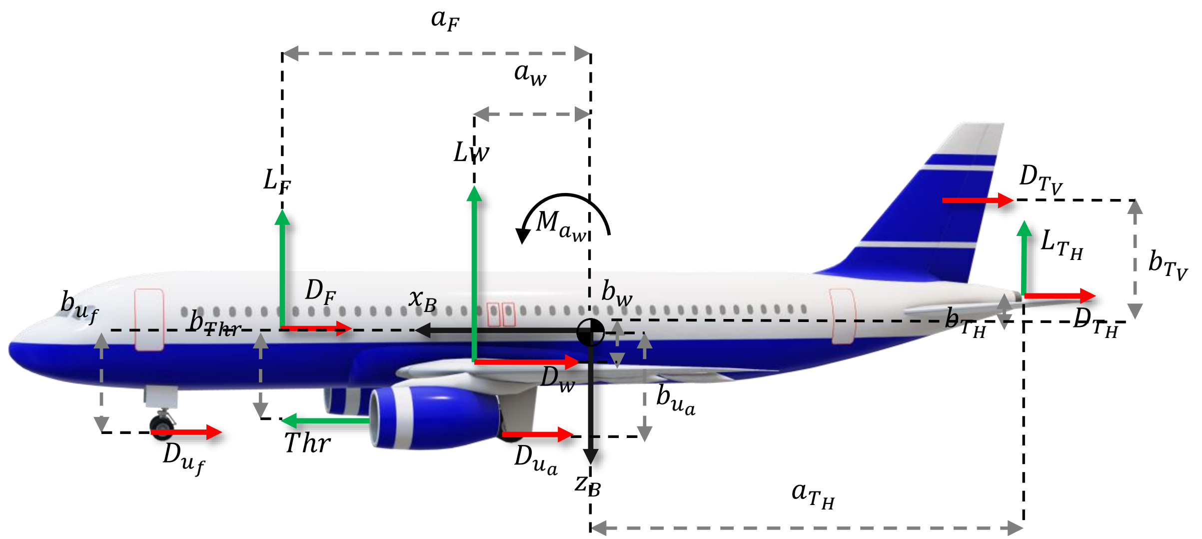
Universidad Autónoma de Nuevo León



$$\sum \mathcal{M} = \overbrace{(L_{w_1} + L_{w_2})a_w}^{\text{Sustentación Ala}} - \overbrace{(D_{w_1} + D_{w_2})b_w}^{\text{Resistencia al avance Ala}} - \overbrace{\left(L_{T_{H_1}} + L_{T_{H_2}}\right) a_{T_H}}^{\text{Sustentación estabilizador horizontal}} + \overbrace{\left(D_{T_{H_1}} + D_{T_{H_2}}\right) b_{T_H}}^{\text{Resistencia al avance estabilizador horizontal}} + \overbrace{D_{T_V} b_{T_V}}^{\text{Resistencia al avance estabilizador vertical}}$$

$$+\underbrace{L_F a_F}_{\text{Sustentación fuselaje}} + \underbrace{Thr\, b_{Thr}}_{\text{Empuje}} - \underbrace{D_{u_f} b_{u_f}}_{\text{Resistencia al avance tren de aterrizaje delantero}} - \underbrace{D_{u_a} b_{u_a}}_{\text{Resistencia al avance tren de aterrizaje trasero}} - \underbrace{M_{a_w}}_{\text{Momento aerodinámico Ala}}$$

Dinámica de navegación y orientación



$$\widehat{M} = \hat{r} \times \widehat{F}$$

Ecuación de momentos vectorial

$$\widehat{M} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ d_x & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} d_yF_z - d_zF_y \\ d_zF_x - d_xF_z \\ d_xF_y - d_yF_x \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M} = d_zF_x - d_xF_z$$

Si se consideran los signos de las distancias, es necesario tomar en cuenta la notación de *producto cruz* para la obtención de los momentos.

$$\sum \mathcal{M} = [-(L_{w_1} + L_{w_2})a_w] + [(D_{w_1} + D_{w_2})b_w] + \left[-\left(L_{T_{H_1}} + L_{T_{H_2}}\right)a_{T_H}\right] + \left[\left(D_{T_{H_1}} + D_{T_{H_2}}\right)b_{T_H}\right] + [D_{T_V}b_{T_V}]$$
$$+[-L_Fa_F] + [Thr\,b_{Thr}] + \left[D_{u_f}b_{u_f}\right] + [D_{u_a}b_{u_a}] + [M_{a_w}]$$

Dinámica de navegación y orientación

Recordando las ecuaciones de la dinámica de traslación y orientación en el marco del cuerpo

Dinámica de posición MRC

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{T}{m}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + R_{I\leftarrow B}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ g\end{bmatrix} + R_{B\leftarrow W}\begin{bmatrix}\frac{F_{A_x}}{m}\\ \frac{F_{A_y}}{m}\\ \frac{F_{A_z}}{m}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}rv - qw\\ pw - ru\\ qu - pv\end{bmatrix}$$

Dinámica de orientación MRC

$$\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \dot{q}\\ \dot{r}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}J_{xx} & J_{xy} & J_{xz}\\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz}\\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz}\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}\mathcal{L}\\ \mathcal{M}\\ \mathcal{N}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}J_{xx} & J_{xy} & J_{xz}\\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz}\\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}\right)$$

Simplificando para la dinámica longitudinal; esto es, considerando el resto de estados como cero:

$$\dot{u} = \frac{F_{x_B}}{m} - g\sin\theta - qw$$

$$\dot{w} = \frac{F_{z_B}}{m} + g\cos\theta + qu$$

$$J_{yy}\,\dot{q} = \mathcal{M}$$

Dinámica Longitudinal Aislada

Dinámica de navegación y orientación

$$\dot{u} = \frac{F_{x_B}}{m} - g\sin\theta - qw$$

$$\dot{w} = \frac{F_{z_B}}{m} + g\cos\theta + qu$$

$$J_{yy}\,\dot{q} = \mathcal{M}$$

Dinámica Longitudinal Aislada

Es posible linealizar algunos términos por medio de la *aproximación de ángulo pequeño* como:

$$\left.\dot{u} = \frac{F_{x_B}}{m} - g\,\theta - qw\right\}$$

$$\left.\dot{w} = \frac{F_{z_B}}{m} + g + qu\right\}$$

Esto **no** puede considerarse un sistema lineal aún dado que tiene *interdependencia de estados*, por lo que no cumple con el *principio de superposición*.

Esto significa que es necesario *establecer un punto de operación* y linealizar de manera analítica.

Dinámica de navegación y orientación

Considerando un sistema lineal para la dinámica longitudinal, dependiendo de coeficientes tal que:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & X_\theta \\ Z_u & Z_w & Z_q & Z_\theta \\ M_u & M_w & M_q & M_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_{elev}} & X_{Thr} \\ Z_{\delta_{elev}} & Z_{Thr} \\ M_{\delta_{elev}} & M_{Thr} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{elev} \\ Thr \end{bmatrix}$$

Es posible expandir para obtener:

$$\dot{u} = X_u u + X_w w + X_q q + X_\theta \theta + X_{\delta_{elev}} \delta_{elev} + X_{Thr} Thr$$

$$\dot{w} = Z_u u + Z_w w + Z_q q + Z_\theta \theta + Z_{\delta_{elev}} \delta_{elev} + Z_{Thr} Thr$$

$$\dot{q} = M_u u + M_w w + M_q q + M_\theta \theta + M_{\delta_{elev}} M_{elev} + M_{Thr} Thr$$

Lo que es comparable a:

$$\dot{u} = \frac{F_{x_B}}{m} - g\theta - qw$$

$$\dot{w} = \frac{F_{z_B}}{m} + g + qu$$

$$\dot{q} = \frac{\mathcal{M}}{J_{yy}}$$

Dinámica de navegación y orientación

Universidad Autónoma de Nuevo León

$$\dot{u} = \frac{F_{x_B}}{m} - g\theta - qw$$

$$\dot{w} = \frac{F_{z_B}}{m} + g + qu$$

$$\dot{q} = \frac{\mathcal{M}}{J_{yy}}$$

$$\dot{u} = X_u u + X_w w + X_q q + X_\theta \theta + X_{\delta_{elev}} \delta_{elev} + X_{Thr} Thr$$

$$\dot{w} = Z_u u + Z_w w + Z_q q + Z_\theta \theta + Z_{\delta_{elev}} \delta_{elev} + Z_{Thr} Thr$$

$$\dot{q} = M_u u + M_w w + M_q q + M_\theta \theta + M_{\delta_{elev}} M_{elev} + M_{Thr} Thr$$

El tener un sistema lineal permite estudiar las propiedades de la dinámica de manera más sencilla utilizando herramientas como:

- Dominio de Laplace.
- Diagrama de Bode.
- Estabilidad por márgenes de fase y ganancia

Dinámica de navegación y orientación

$$\dot{u} = \frac{F_{x_B}}{m} - g\theta - qw$$

$$\dot{u} = X_u u + X_w w + X_q q + X_\theta \theta + X_{\delta_{elev}} \delta_{elev} + X_{Thr} Thr$$

¿Qué elementos dependen de *u*?

$$D_w = \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{u^2 + w^2}\right)^2 S C_D$$

Considerando la *resistencia al avance inducida*

$$D_w = \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{u^2 + w^2}\right)^2 S\left(\frac{C_L^2}{\pi AR}\right)$$

$$D_w = \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{u^2 + w^2}\right)^2 S\left(\frac{\left(C_{l\_\alpha}\alpha - C_{l_\alpha}\alpha_{0_L}\right)^2}{\pi AR}\right)$$

Expandiendo

$$D_w = \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{u^2 + w^2}\right)^2 S\left(\frac{C_{l_\alpha}^2\alpha^2 - 2C_{l_\alpha}\alpha C_{l_\alpha}\alpha_{0_L} + C_{l_\alpha}^2\alpha_{0_L}^2}{\pi AR}\right)$$

Dinámica de navegación y orientación

$$\dot{u} = X_u u + X_w w + X_q q + X_\theta \theta + X_{\delta_{elev}} \delta_{elev} + X_{Thr} Thr$$

¿Qué elementos dependen de *u*?

$$D_w = \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{u^2+w^2}\right)^2 SC_D$$

$$D_w = \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{u^2+w^2}\right)^2 S\left(\frac{C_L^2}{\pi AR}\right)$$

$$D_w = \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{u^2+w^2}\right)^2 S\left(\frac{\left(C_{l\_\alpha}\alpha - C_{l_\alpha}\alpha_{0_L}\right)^2}{\pi AR}\right)$$

$$D_w = \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{u^2+w^2}\right)^2 S\left(\frac{C_{l_\alpha}^2\alpha^2 - 2C_{l_\alpha}\alpha C_{l_\alpha}\alpha_{0_L} + C_{l_\alpha}^2\alpha_{0_L}^2}{\pi AR}\right)$$

$$D_w = \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{u^2+w^2}\right)^2 S\left(\frac{C_{l_\alpha}^2\alpha^2 - 2C_{l_\alpha}\alpha C_{l_\alpha}\alpha_{0_L} + C_{l_\alpha}^2\alpha_{0_L}^2}{\pi AR}\right)$$

Afectando términos

$$D_w = \frac{1}{2}\rho S\frac{C_{l_\alpha}^2}{\pi AR}\left(u^2\alpha^2 - 2u^2\alpha\alpha_{0_L} + u^2\alpha_{0L} + w^2\alpha^2 - 2w^2\alpha\alpha_{0_L} + w^2\alpha_{0_L}^2\right)$$

Simplificando

$$D_w = \frac{1}{2}\rho S\frac{C_{l_\alpha}^2}{\pi AR}\left(w^2 - 2uw\alpha_{0_L} + u^2\alpha_{0_L}^2 + \frac{w^4}{u^2} - \frac{2w^3}{u}\alpha_{0_L} + w^2\alpha_{0_L}^2\right)$$

Derivando respecto a la velocidad

$$\frac{\partial D_w}{\partial u} = \rho S\frac{C_{l_\alpha}}{\pi AR}\left(-w\alpha_{0_L} + u\alpha_{0_L}^2 - \frac{w^4}{u^3} + \frac{w^3}{u^3} + \frac{w^3}{u^2}\alpha_{0_L}\right)$$

Considerando una velocidad *w* cercana a 0

$$\frac{\partial D_w}{\partial u} = \rho S\frac{C_{l_\alpha}}{\pi AR}\left(u\alpha_{0_L}^2\right)$$

Dinámica de navegación y orientación

Universidad Autónoma de Nuevo León

$$\dot{u} = X_u u + X_w w + X_q q + X_\theta \theta + X_{\delta_{elev}} \delta_{elev} + X_{Thr} Thr$$

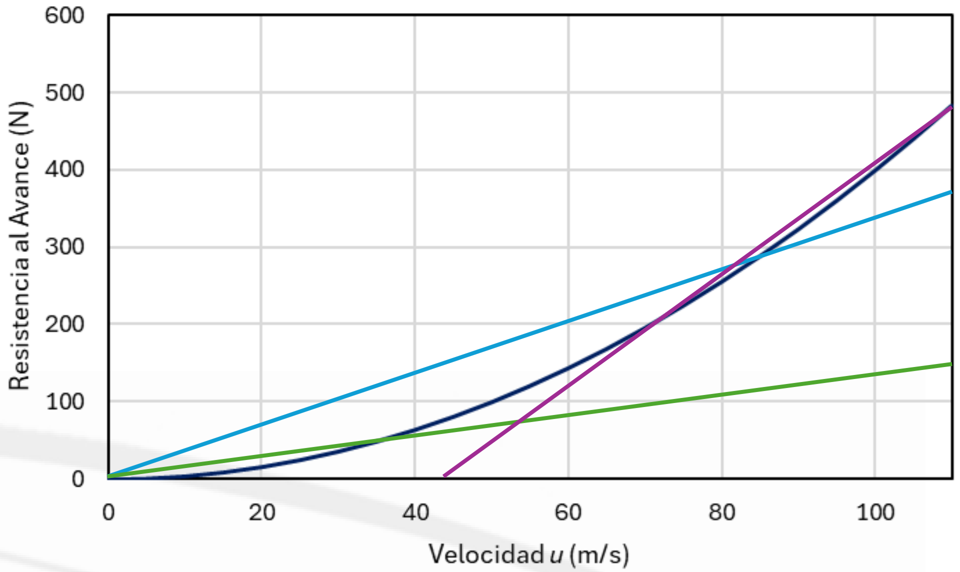
¿Qué elementos dependen de *u*?

$$D_w = \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{u^2 + w^2}\right)^2 S C_D$$

$$\frac{\partial D_w}{\partial u} = \rho S \frac{C_{l_\alpha}}{\pi AR}\left(u\alpha_{0_L}^2\right)$$

El valor obtenido **no es constante**, lo que significa que la *pendiente* cambia a diferentes valores, entonces ¿Cómo se obtiene un coeficiente constante que parametrice una ecuación lineal?

- Linealización por *Series de Taylor*.
- Linealización por *aproximación de ángulo pequeño*.
- Linealización por *aproximación numérica*.

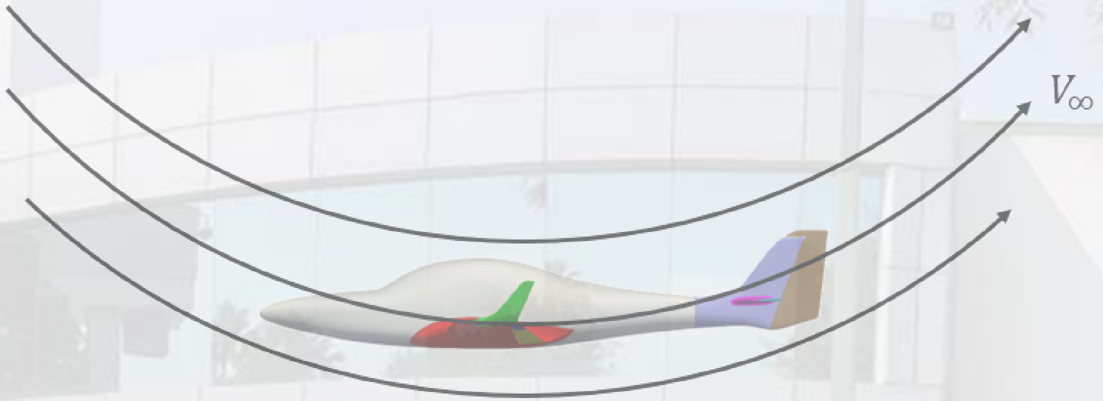


La mejor aproximación es aquella que esté más cerca del *punto de operación* a analizar.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

Efectos aerodinámicos en la dinámica longitudinal



Efectos del ángulo de ataque en giros

Universidad Autónoma de Nuevo León

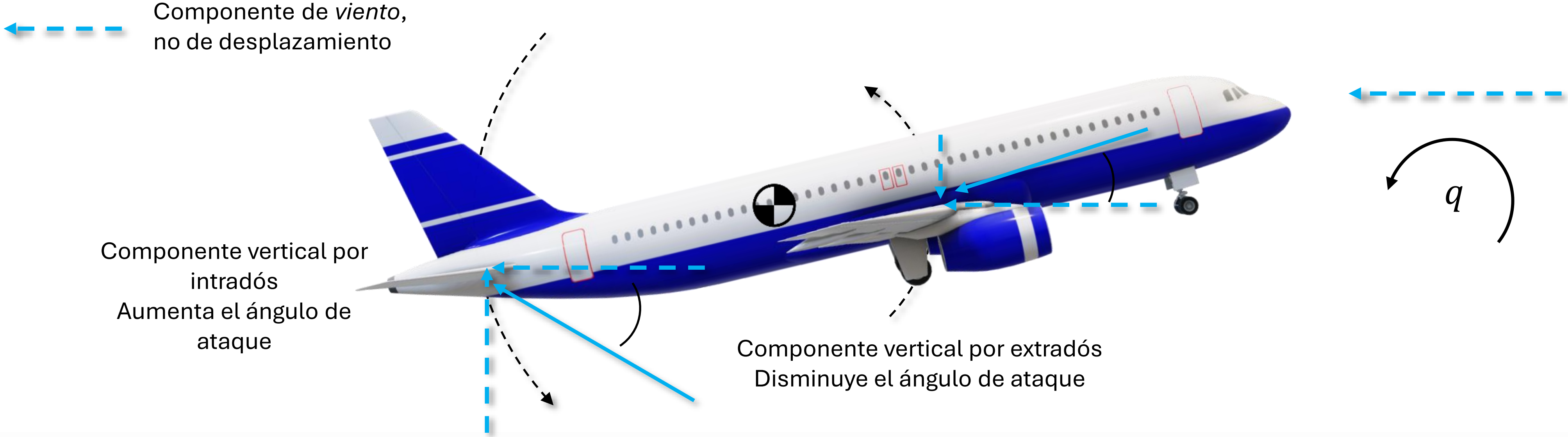
Al realizar un movimiento *giratorio*, distintas partes de la aeronave *inciden* el ciento a diferentes velocidades. Esto a consecuencia de estar *más alejadas* que otras del centro de giro.

Efectos del ángulo de ataque en giros

Universidad Autónoma de Nuevo León

Componente de *viento*, no de desplazamiento

Efectos del ángulo de ataque en giros



Esto significa que es necesario calcular las componentes de viento *debido a los giros **pqr***.

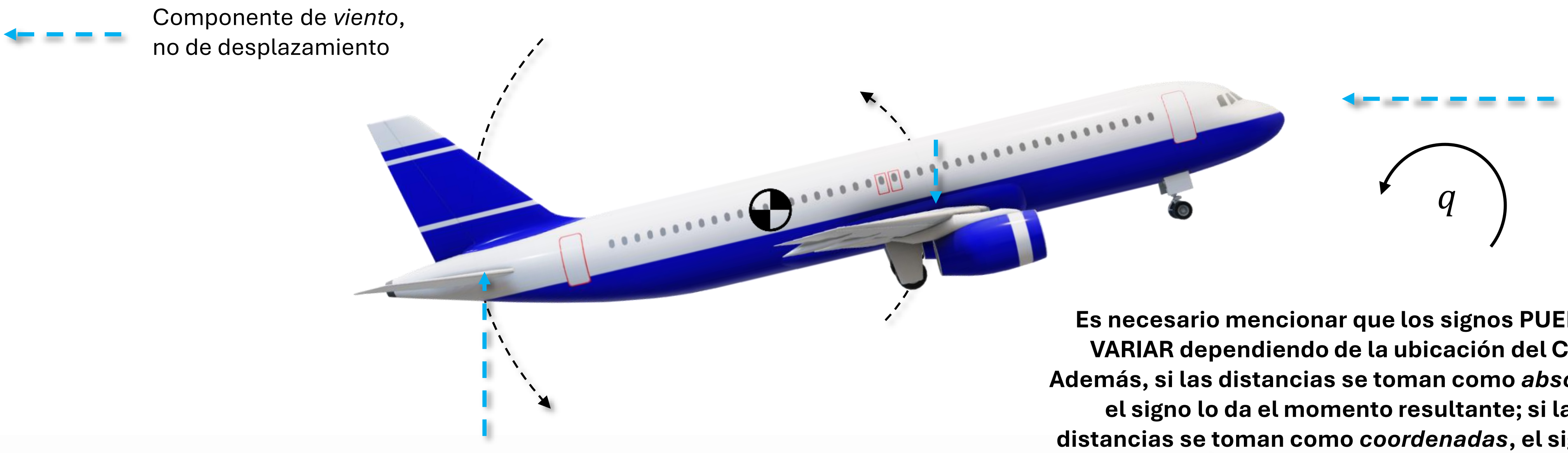
Recordando que la velocidad lineal debido a un giro está dada por:

$$W_L = \omega r$$

donde ω es la *velocidad angular*, y *r* es la *distancia al punto de giro* de donde se mide la *velocidad inducida*.

Efectos del ángulo de ataque en giros

Universidad Autónoma de Nuevo León



Es necesario mencionar que los signos PUEDEN VARIAR dependiendo de la ubicación del C.G. Además, si las distancias se toman como *absolutas*, el signo lo da el momento resultante; si las distancias se toman como *coordenadas*, el signo lo da la misma distancia.

En vista de esto se pueden definir las componentes de velocidad inducida para el giro en q como:

Estas son componentes de VIENTO

$$w_{q_w} = -a_w q$$

$$w_{q_T} = a_T q$$

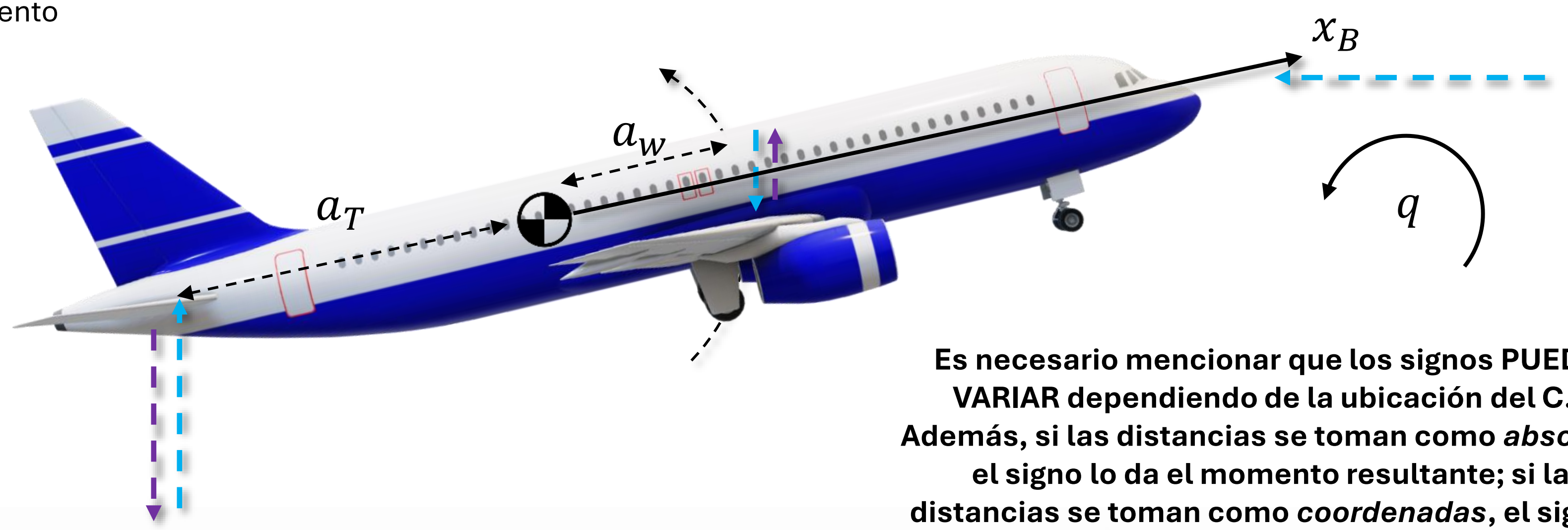
donde w_{q_w} es la velocidad vertical inducida para el ala, mientras que w_{q_T} es la velocidad vertical inducida para el estabilizador horizontal.

Efectos del ángulo de ataque en giros

Universidad Autónoma de Nuevo León

Componente de *viento*, no de desplazamiento

Componente de *desplazamiento*



Es necesario mencionar que los signos PUEDEN VARIAR dependiendo de la ubicación del C.G. Además, si las distancias se toman como *absolutas*, el signo lo da el momento resultante; si las distancias se toman como *coordenadas*, el signo lo da la misma distancia.

Considerando ya componentes de MOVIMIENTO

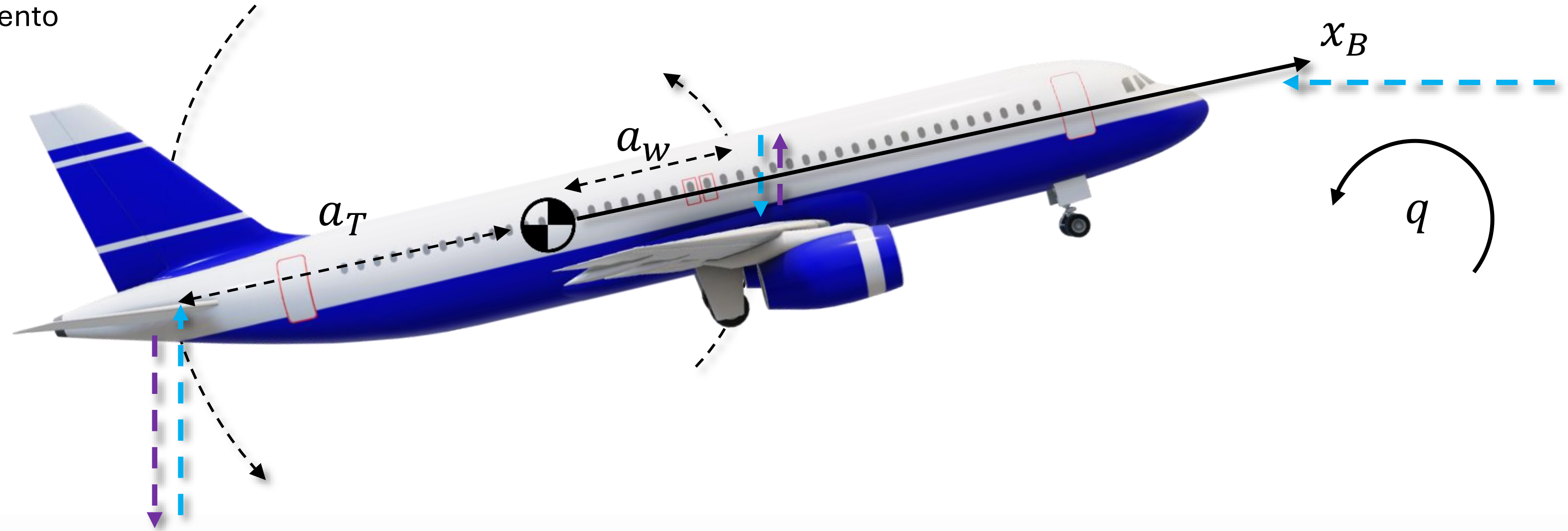
$\lvert a_w \rvert \quad \lvert a_T \rvert$	$+a_w \quad -a_T$
$w_{q_w} = -a_w q$	$w_{q_w} = -(a_w q)$
$w_{q_T} = a_T q$	$w_{q_T} = -(a_T q)$

Efectos del ángulo de ataque en giros

Universidad Autónoma de Nuevo León

Componente de *viento*, no de desplazamiento

Componente de *desplazamiento*



Esto lleva a que los ángulos de ataque para ambas superficies sean:

Ala *sube* $\quad w_{q_W} = -a_W q$

Estabilizador *baja* $\quad w_{q_T} = a_T q$

NED *z* positiva hacia abajo

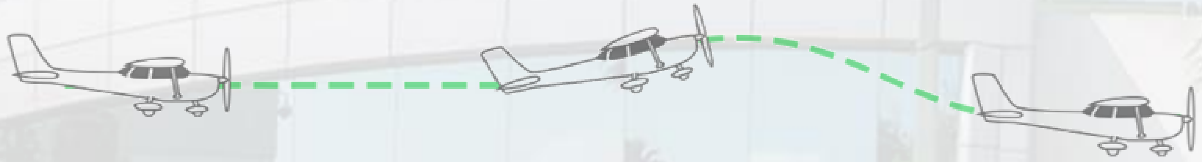
$$\alpha_W = \text{atan}\left(\frac{w + w_{q_W} \cdots}{u \cdots}\right)$$

$$\alpha_T = \text{atan}\left(\frac{w + w_{q_T} \cdots}{u \cdots}\right)$$

De este comportamiento se puede extraer el *grado de estabilidad*, *amortiguamiento* y *oscilación* de la aeronave frente a giros en *q*.

Entre *más grande* sea la *velocidad vertical* inducida, *más difícil* será hacer girar la aeronave.

Estabilidad estática



Estabilidad estática

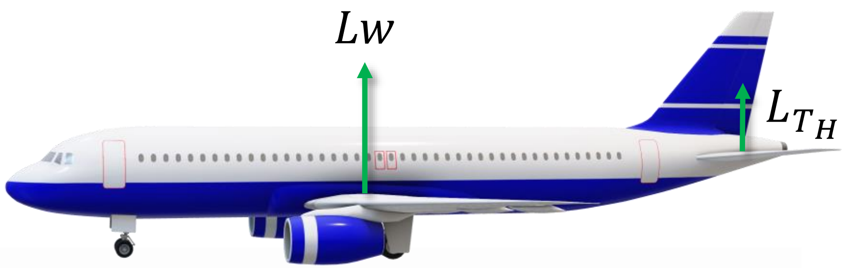
Un sistema es *estable* si sus estados están *acotados* para *entradas acotadas*.
Esto significa que para la dinámica longitudinal, los principales estados deben de comportarse dentro de un *rango controlado*; dicho de otra manera, **no deben** de crecer *sin control*.

Este comportamiento se garantiza mediante el siguiente planteamiento:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} < 0$$

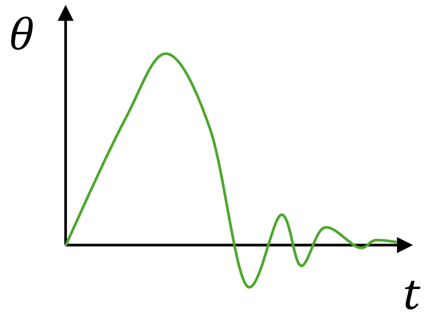
Lo anterior significa que:
"Si el ángulo de ataque CRECE, el momento longitudinal DECRECE, y viceversa"

Esto puede interpretarse como una condición *natural* que las aeronaves deben de poseer, de tal manera que, si por alguna razón el ángulo de ataque se eleva, la *nariz de la aeronave* tratará de *apuntarse a tierra* y ganar velocidad *u* por *acción de la gravedad*.

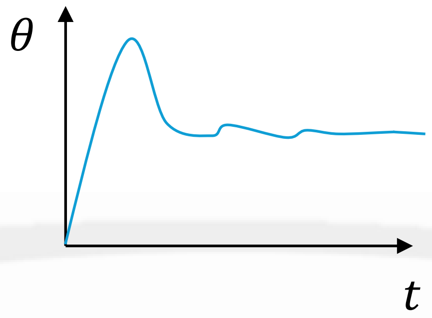


Estabilidad estática

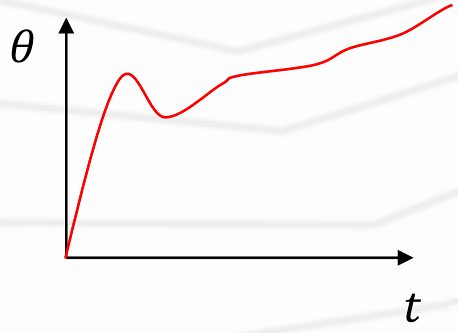
Sistema ***Estable***
Este regresa a su posición original frente a una perturbación.



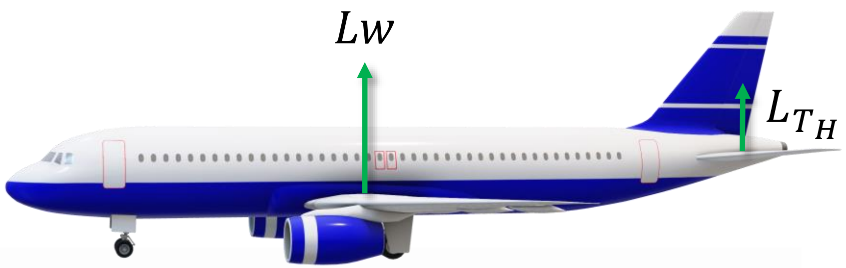
Sistema ***Neutro***
Este regresa se queda en la última posición a la que llegó después de una perturbación.



Sistema ***Inestable***
Este continua cambiando de posición incluso cuando la perturbación ya terminó su acción.



$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} < 0$$



Punto neutro

Sistema ***Estable***

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} < 0$$

u

$\mathcal{M}$= 0 unidades

Punto neutro

Sistema ***Estable***

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} < 0$$

Incremento súbito del ángulo de ataque

$\mathcal{M}$=−1500 unidades

Cómo *aumentó* el ángulo de ataque, el momento *disminuyó*, lo que ocasionará que la aeronave *regrese la nariz abajo* y recupere velocidad u.

Punto neutro

Sistema ***Estable***

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} < 0$$

$\mathcal{M}= 0$ unidades

Cómo ahora *decremento* el ángulo de ataque, el momento *incrementa*.

Aeronave regresa gradualmente a su posición inicial

Punto neutro

Universidad Autónoma de Nuevo León

Sistema ***Inestable***

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} > 0$$

$\mathcal{M} = 0$ unidades

Punto neutro

Universidad Autónoma de Nuevo León

Sistema ***Inestable***

$$\frac{\partial\,\mathcal{M}}{\partial\alpha} > 0$$

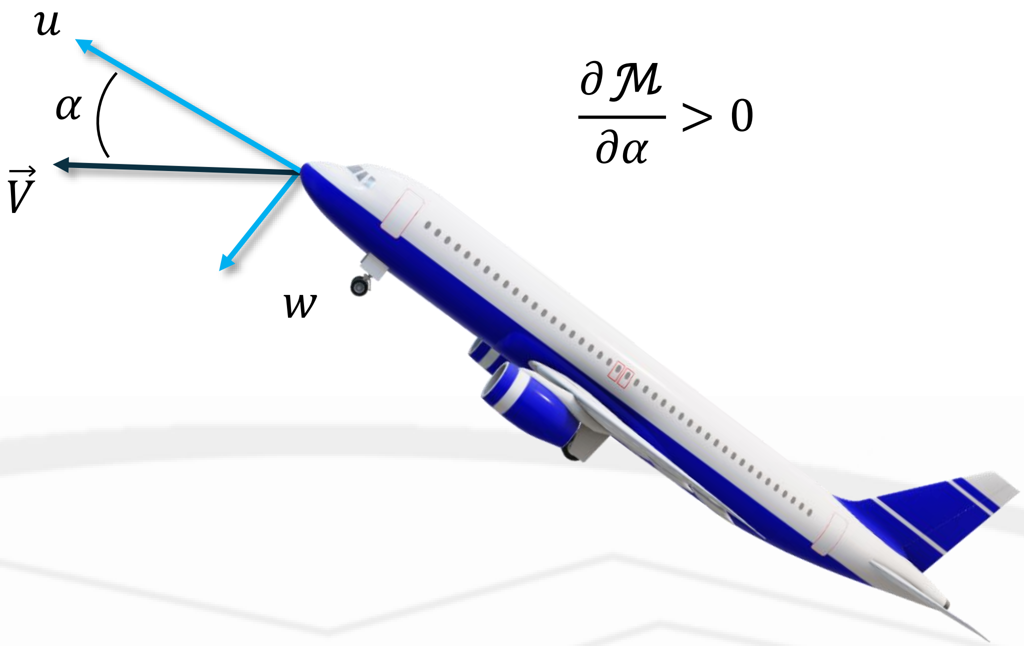
$\mathcal{M}$=+2500 unidades

Cómo *aumentó* el ángulo de ataque, el momento *aumentó también*, lo que ocasionará que la aeronave *suba la nariz aún más* y pierda velocidad *u*.

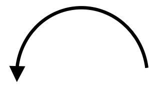
Incremento súbito del ángulo de ataque

Punto neutro

Sistema ***Inestable***



$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} > 0$$



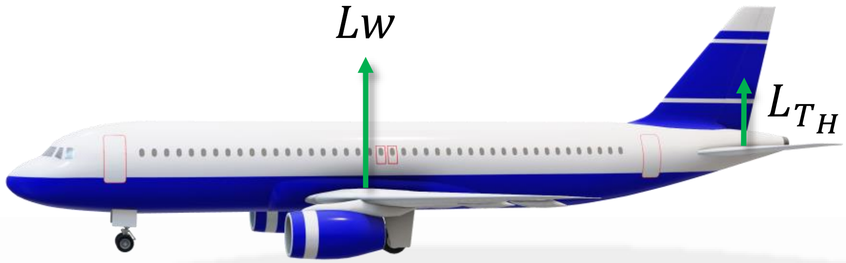
$\mathcal{M}$=+5500 unidades

El ángulo de ataque seguirá aumentando, por lo tanto el momento también, y así sucesivamente.

Incremento súbito del ángulo de ataque

Punto neutro

Esto vuelve necesario establecer el *punto* en el que la aeronave será ***estable*** o ***inestable***.



Simplificando la sumatoria de momentos longitudinales a las fuerzas que *más contribuyen*:

$$\sum \mathcal{M} = -L_w a_w - L_{T_H} a_{T_H}$$

Es posible expresar estas fuerzas como una *resultante* tal que:

$$F_{w-T_H} = L_w + L_{T_H}$$

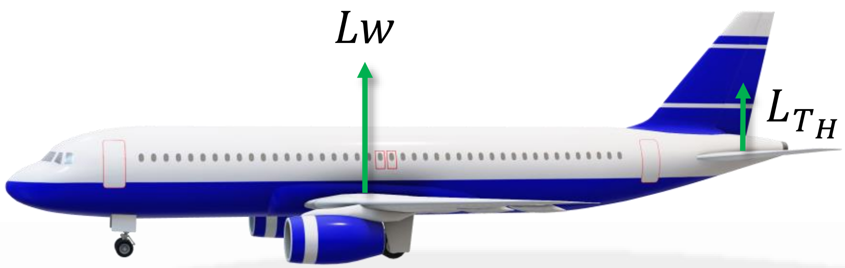
Por lo tanto la sumatoria de momentos longitudinales puede expresarte en términos de un punto *donde se encuentra ubicada* esta resultante como:

$$\sum \mathcal{M} = -F_{w-T_H} K_n$$

Punto neutro

$$\sum \mathcal{M} = -L_w a_w - L_{T_H} a_{T_H}$$

$$\sum \mathcal{M} = -F_{w-T_H} K_n$$



Estableciendo la condición de estabilidad estática como:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} a_w - \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha} a_{T_H}$$

Donde para la fuerza resultante se define como:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial F_{w-T_H}}{\partial \alpha} K_n$$

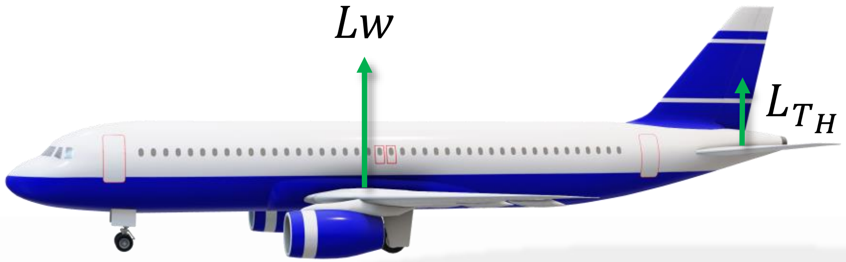
Sustituyendo se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} = -\left(\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} + \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha}\right) K_n$$

Punto neutro

$$\sum \mathcal{M} = -L_w a_w - L_{T_H} a_{T_H}$$

$$\sum \mathcal{M} = -F_{w-T_H} K_n$$



Igualando las ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} a_w - \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha} a_{T_H} \longleftrightarrow \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} = -\left(\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} + \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha}\right) K_n$$

Obteniendo como resultado:

$$-\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} a_w - \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha} a_{T_H} = -\left(\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} + \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha}\right) K_n$$

Despejando para el punto de ubicación de la resultante:

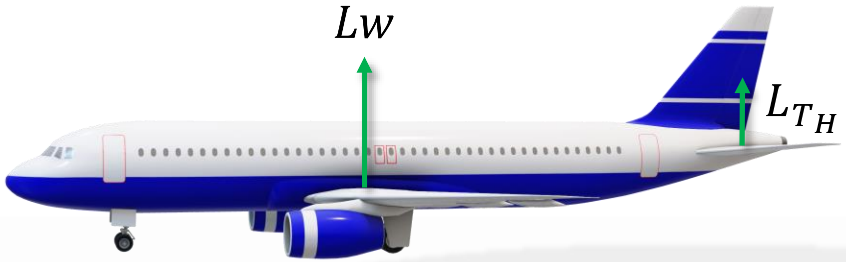
$$\frac{-\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} a_w - \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha} a_{T_H}}{-\left(\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} + \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha}\right)} = K_n$$

Punto neutro

Universidad Autónoma de Nuevo León

$$\sum \mathcal{M} = -L_w a_w - L_{T_H} a_{T_H}$$

$$\sum \mathcal{M} = -F_{w-T_H} K_n$$



$$\frac{-\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} a_w - \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha} a_{T_H}}{-\left(\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} + \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha}\right)} = K_n$$

Sabiendo que la sustentación se expresa como:

$$L_w = \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 S_w \left(Cl_{w_\alpha} \alpha + Cl_0\right)$$

$$L_{T_H} = \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 S_{T_H} \left(Cl_{TH_\alpha} \alpha\right)$$

Es posible derivar respecto al ángulo de ataque y obtener:

$$\frac{dL_w}{d\alpha} = \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 S_w Cl_{w_\alpha}$$

$$\frac{dL_{T_H}}{d\alpha} = \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 S_{T_H} Cl_{TH_\alpha}$$

Sustituyendo en la ecuación de la ubicación de la fuerza resultante tal que:

$$\frac{-\frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 S_w Cl_{w_\alpha} a_w - \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 S_{T_H} Cl_{TH_\alpha} a_{T_H}}{-\left(\frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 S_w Cl_{w_\alpha} + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 S_{T_H} Cl_{TH_\alpha}\right)} = K_n$$

Punto neutro

Universidad Autónoma de Nuevo León

$$\sum \mathcal{M} = -L_w a_w - L_{T_H} a_{T_H}$$

$$\sum \mathcal{M} = -F_{w-T_H} K_n$$

$$\frac{-\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} a_w - \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha} a_{T_H}}{-\left(\frac{\partial L_w}{\partial \alpha} + \frac{\partial L_{T_H}}{\partial \alpha}\right)} = K_n$$

$$\frac{-\frac{1}{2}\rho \vec{V}^2 S_w Cl_{w_\alpha} a_w - \frac{1}{2}\rho \vec{V}^2 S_{T_H} Cl_{TH_\alpha} a_{T_H}}{-\left(\frac{1}{2}\rho \vec{V}^2 S_w Cl_{w_\alpha} + \frac{1}{2}\rho \vec{V}^2 S_{T_H} Cl_{TH_\alpha}\right)} = K_n$$

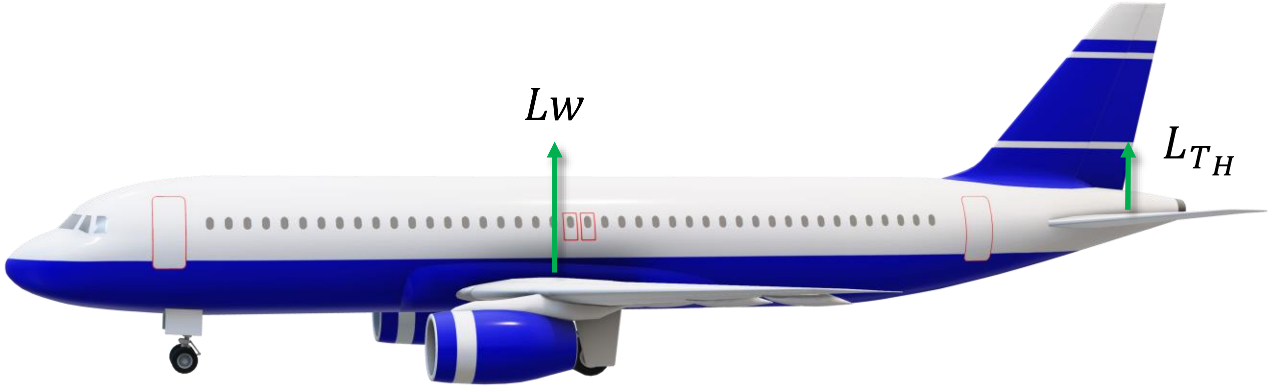
Factorizando la presión dinámica por la pendiente del perfil como:

$$\frac{\frac{1}{2}\rho \vec{V}^2 (-S_w Cl_{w_\alpha} a_w - S_{T_H} Cl_{TH_\alpha} a_{T_H})}{\frac{1}{2}\rho \vec{V}^2 (-Cl_{w_\alpha} S_w - Cl_{TH_\alpha} S_{T_H})} = K_n$$

Cancelando términos:

$$K_n = \frac{-S_w Cl_{w_\alpha} a_w - S_{T_H} Cl_{TH_\alpha} a_{T_H}}{-Cl_{w_\alpha} S_w - Cl_{TH_\alpha} S_{T_H}}$$

Punto neutro



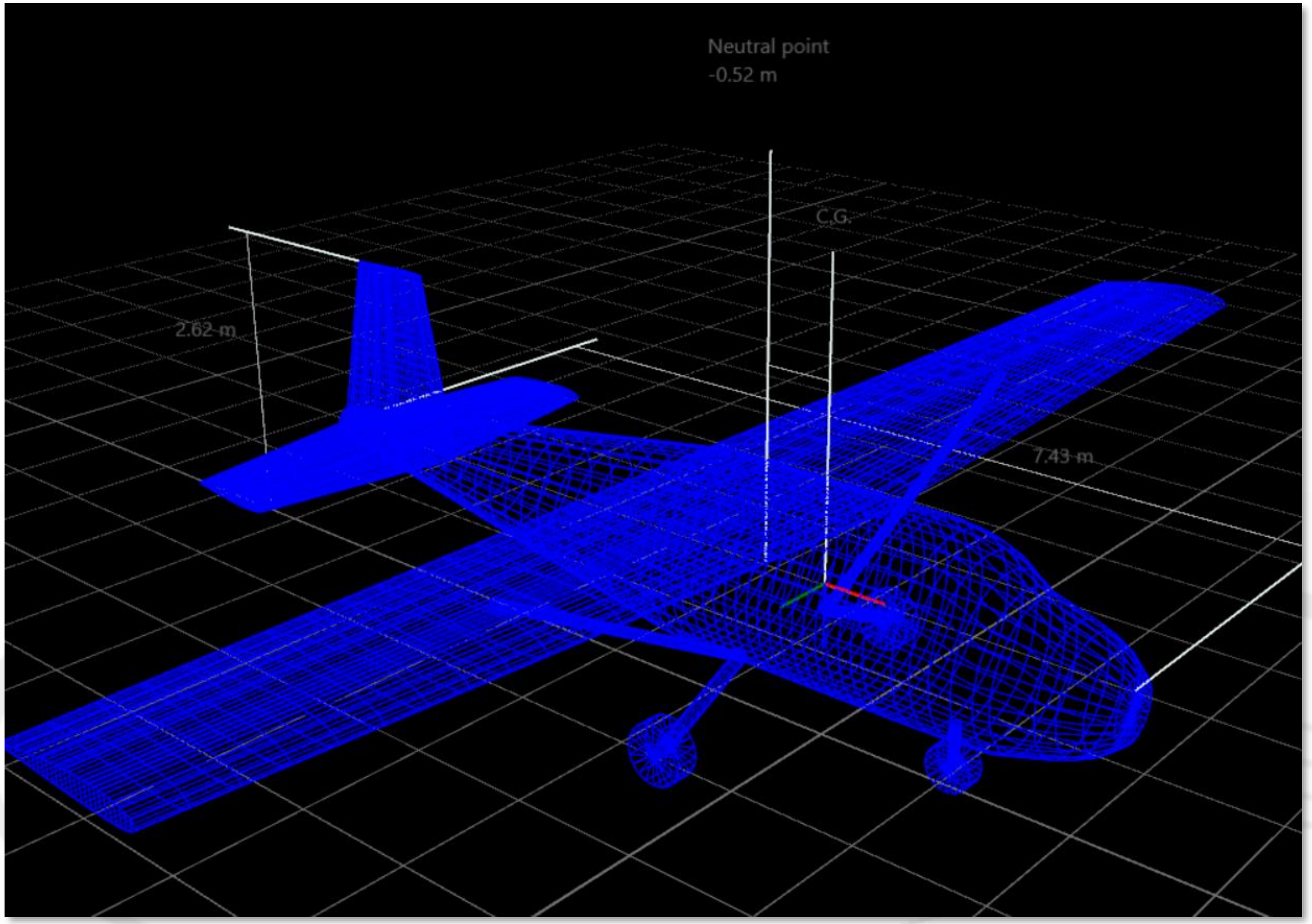
$$K_n = \frac{-S_w Cl_{w_\alpha} a_w - S_{T_H} Cl_{TH_\alpha} a_{T_H}}{-Cl_{w_\alpha} S_w - Cl_{TH_\alpha} S_{T_H}}$$

Nota: Es necesario recordar que las *distancias* son *coordenadas*, por lo que el signo afectará al resultado.

A esta *ubicación* se le conoce como el ***Punto Neutro***; que es el dónde se ubica la *resultante de las fuerzas de sustentación*.
Este punto es de gran importancia, dado que *establece* el margen de ***estabilidad estática*** de la aeronave, esto es, el margen de movimiento del *centro de gravedad* antes de que la aeronave sea inestable.

Punto neutro

Universidad Autónoma de Nuevo León

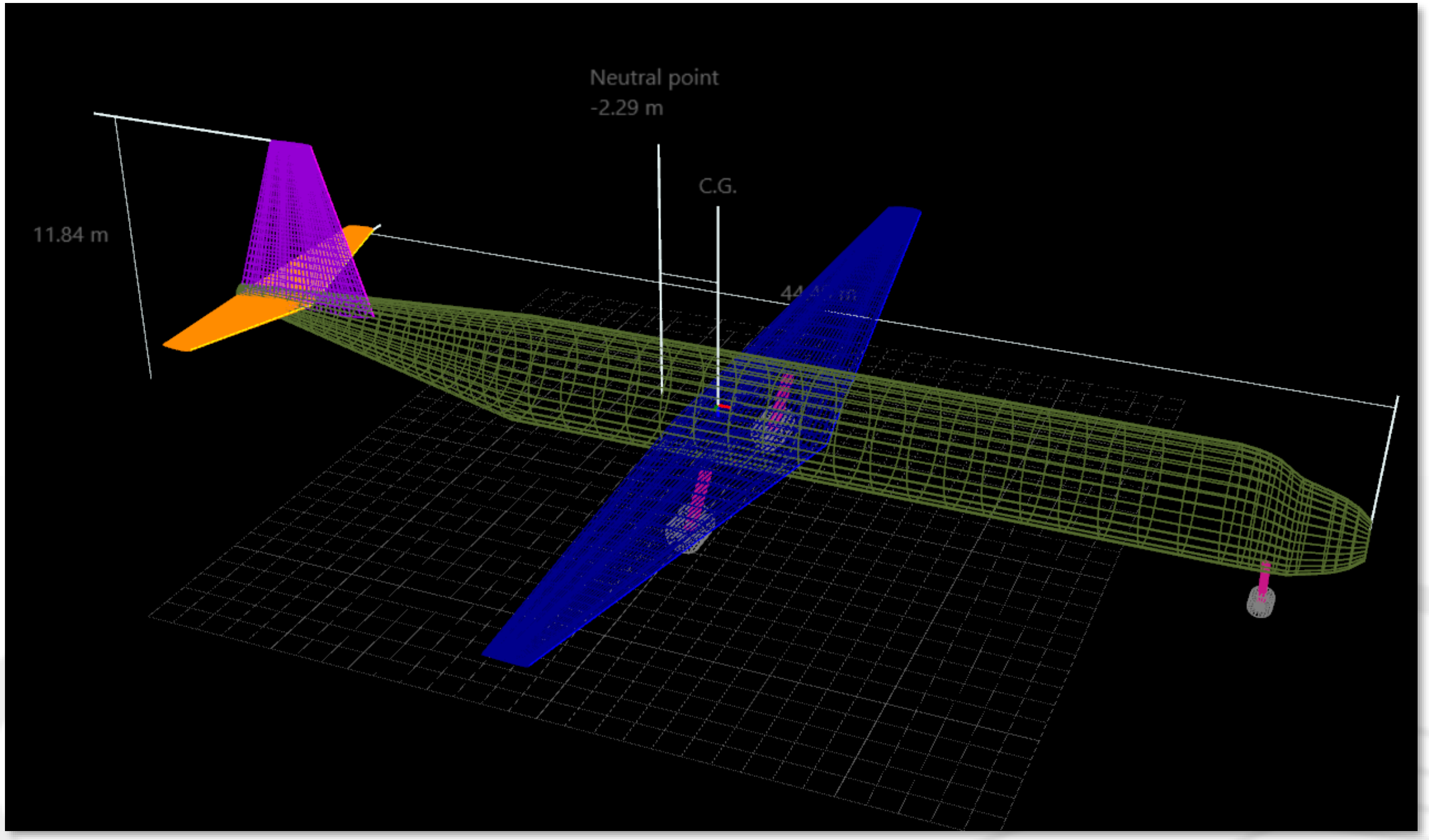


Para un C-172 se tiene un punto neutro, aproximadamente a:

$$K_n = -0.52\,m$$

Esto significa que el C-172 es una aeronave estable.
Además, lo anterior significa que si el *centro de gravedad* se mueve *hacia atrás*, si se sobrepasa el punto neutro, la aeronave se volverá *inestable*.

Punto neutro

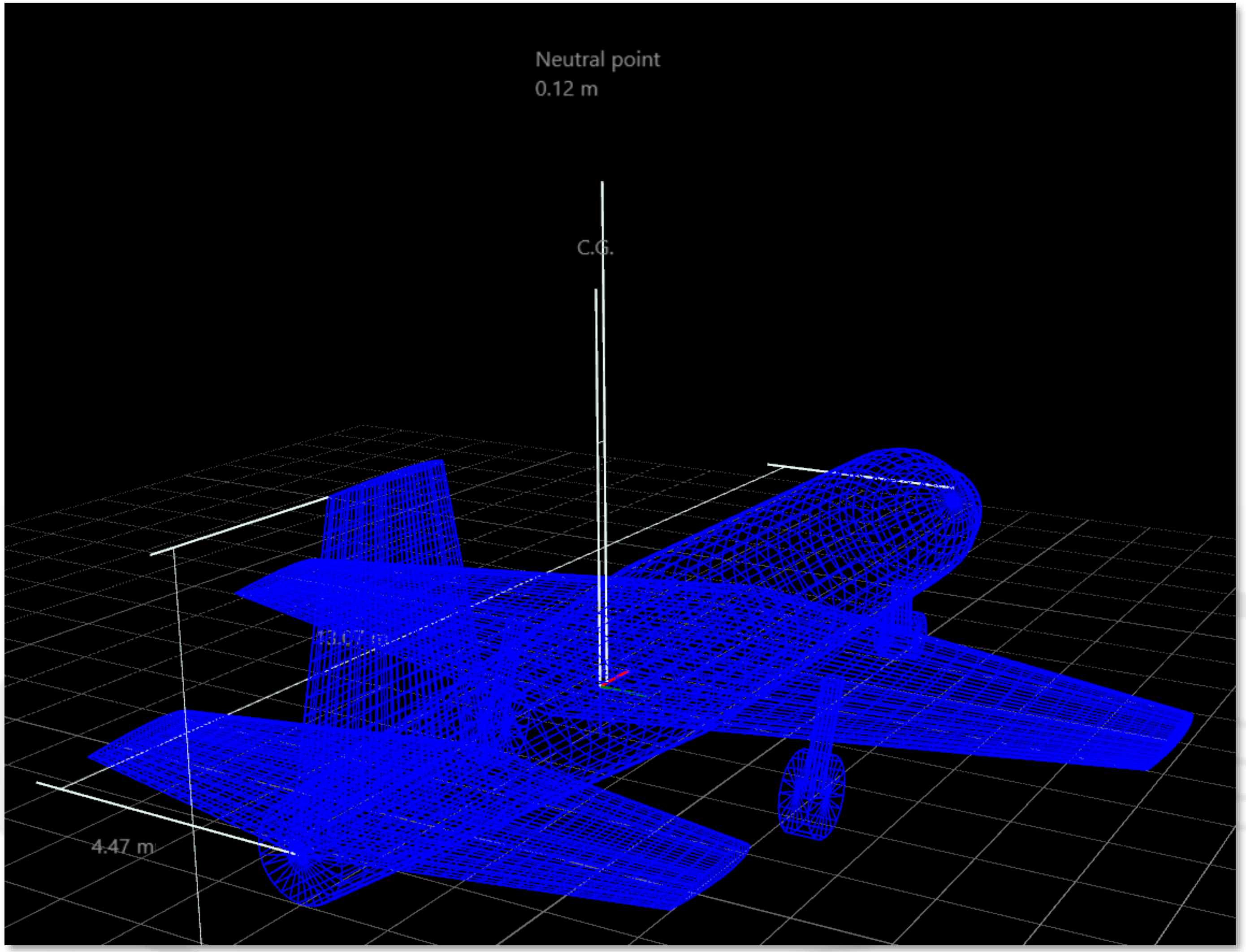


Para un A-321 Neo se tiene un punto neutro *fuera del borde de salida del ala*, aproximadamente a:

$$K_n = -2.29\ m$$

Esto significa que el A-321 Neo es una aeronave estable, con *moderada* tendencia de *nariz pesada*, si no se ajusta de manera adecuada.

Punto neutro



Para algunas aeronaves *caza*, se presentan puntos neutros muy pequeños o incluso positivos; lo que las vuelve *inestables*.

$$K_n = 0.12\, m$$

Lo anterior significa que la aeronave *no requiere* gran esfuerzo para realizar maniobras de gran velocidad, pero requiere *sobrecorrecciones* constantes y rápidas para mantener la estabilidad en vuelo recto.

Derivadas de estabilidad

De la misma manera que existen los *coeficientes aerodinámicos* también se pueden definir coeficientes respecto a otras *magnitudes variables* de la dinámica de vuelo de una aeronave, entre las que se pueden considerar para la *dinámica longitudinal*:

- Variación de momento longitudinal $\mathcal{M}$ respecto al ángulo de ataque α – $\boldsymbol{C_M}$ ***coeficiente de momento longitudinal***.
- Variación de momento longitudinal $\mathcal{M}$ respecto a la velocidad angular q – $\boldsymbol{C_M}$ ***coeficiente de momento longitudinal***.
- Variación de la fuerza de sustentación L respecto al ángulo de ataque α - $\boldsymbol{C_L}$ ***coeficiente de sustentación.***
- Variación de la fuerza de sustentación L respecto a la velocidad angular q - $\boldsymbol{C_L}$ ***coeficiente de sustentación.***
- Variación de la fuerza de resistencia al avance D respecto al ángulo de ataque α – $\boldsymbol{C_D}$ **coeficiente de resistencia al avance.**
- Variación de la fuerza de resistencia al avance D respecto a la velocidad angular q – $\boldsymbol{C_D}$ **coeficiente de resistencia al avance.**

Estos *coeficientes* son adimensionales, por lo que en sí mismo no representan alguna fuerza como tal. Lo anterior requiere el uso de una ecuación que incluya un *parámetro de referencia*, para este caso:

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w C_L$$

Todas las ecuaciones de utilizan la ***superficie del ala*** como parámetro de referencia.

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w C_D$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w \bar{c} C_M$$

El *momento longitudinal* también considera la ***cuerda media del ala*** como parámetro de referencia; esto al ser un *momento*.

Derivadas de estabilidad

Considerando esta estructura de *fuerzas* y *momento,* la variación respecto a la variable independiente se debe de dar dentro del coeficiente en sí. Esta variación es **no lineal**, sin embargo, para pequeñas variaciones de las variables de entrada se pueden tomar como *lineales*, lo que significa que su *derivada* respecto a esta variable será una *constante*, a estas se les conoce como las **Derivadas de Estabilidad**.
Algunas de las *derivadas de estabilidad longitudinales* son:

- C_{M_α} - razón de variación del *coeficiente de momento longitudinal* respecto al *ángulo de ataque* α.
- C_{M_q} - razón de variación del *coeficiente de momento longitudinal* respecto a la *velocidad angular* q.
- $C_{M_{\delta_e}}$ - razón de variación del *coeficiente de momento longitudinal* respecto al *angulo del elevador* δ_e.
- C_{L_α} - razón de variación del *coeficiente de sustentación* respecto al *ángulo de ataque* α.
- C_{L_q} - razón de variación del *coeficiente de sustentación* respecto a la *velocidad angular* q.
- $C_{L_{\delta_e}}$ - razón de variación del *coeficiente de sustentación* respecto al *angulo del elevador* δ_e.
- C_{D_α} - razón de variación del *coeficiente de resistencia al avance* respecto al *ángulo de ataque* α.
- C_{D_q} - razón de variación del *coeficiente de resistencia al avance* respecto a la *velocidad angular* q.
- $C_{D_{\delta_e}}$ - razón de variación del *coeficiente de resistencia al avance* respecto al *angulo del elevador* δ_e.

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w C_L \qquad D = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w C_D \qquad \mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w \bar{c} C_M$$

Derivadas de estabilidad

Universidad Autónoma de Nuevo León

	Derivadas de estabilidad de *momento longitudinal*	Derivadas de estabilidad *aerodinámicas longitudinales*		
	C_{M_α}	C_{L_α}	C_{D_α}	Dependientes del ángulo de ataque
Derivadas de *amortiguamiento longitudinal*	C_{M_q}	C_{L_q}	C_{D_q}	Dependientes de la velocidad angular *q*
Derivadas de *Control longitudinal*	$C_{M_{\delta_e}}$	$C_{L_{\delta_e}}$	$C_{D_{\delta_e}}$	Dependientes de la deflexión del elevador

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w C_L$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w C_D$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w \bar{c} C_M$$

Derivadas de estabilidad

C_{M_α}	C_{L_α}	C_{D_α}
C_{M_q}	C_{L_q}	C_{D_q}
$C_{M_{\delta_e}}$	$C_{L_{\delta_e}}$	$C_{D_{\delta_e}}$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w C_L$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w C_D$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w \bar{c} C_M$$

Algunos conceptos clave de las *derivadas de estabilidad*:

- Son *adimensionales*, lo que significa que ***se pueden comparar***. Esto permite establecer las *características de estabilidad* con base a coeficientes.
- Son *lineales*, por lo que son una **simplificación**. Casos como la *resistencia al avance* no se aproximan del todo bien.
- Corresponden a las *fuerzas* y *momentos* de **toda la aeronave**, no solo del ala.
- Algunas se pueden calcular *analíticamente*, pero otras, por su nivel de complejidad, resulta más eficiente su cálculo **numérico**.
- Brindan información de la *estabilidad estática*, significando que no pueden predecir directamente comportamientos ***variantes en el tiempo***.

Derivada de momento longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

Recordando la ecuación de *momento longitudinal*:

$$\sum \mathcal{M} = [-(L_{w_1} + L_{w_2})a_w] + [(D_{w_1} + D_{w_2})b_w] + \left[-\left(L_{T_{H_1}} + L_{T_{H_2}}\right)a_{T_H}\right] + \left[\left(D_{T_{H_1}} + D_{T_{H_2}}\right)b_{T_H}\right] + [D_{T_V}b_{T_V}]$$

$$+[-L_F a_F] + [Thrb_{Thr}] + \left[D_{u_f}b_{u_f}\right] + [D_{u_a}b_{u_a}] + [M_{a_w}]$$

Reduciendo para solo considerar efectos de fuerzas de mayor impacto en el momento, y aquellos que dependen directamente del ángulo de ataque:

$$\sum \mathcal{M} = [-(L_{w_1} + L_{w_2})a_w] + \left[-\left(L_{T_{H_1}} + L_{T_{H_2}}\right)a_{T_H}\right] + [-L_F a_F] + [M_{a_w}]$$

Suponiendo que no se presentan movimientos *laterales-direccionales*, por lo que as superficies sustentadoras se pueden considerar como una, además, considerando **convención de signos en las distancias**, y **AFECTANDO EL SIGNO DE LA SUSTENTACIÓN**:

$$\sum \mathcal{M} = L_w(\alpha_w)a_w + L_{T_H}(\alpha_{T_H})a_{T_H} + L_F(\alpha)a_F + M_{a_w}$$

$$\sum \mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w(C_{l_\alpha}\alpha_w + C_{l_0})a_w + \frac{1}{2}\rho V^2 S_{T_H}(C_{l_{\alpha_{T_H}}}\alpha_{T_H})a_{T_H} + \frac{1}{2}\rho V^2 S_F(C_f\alpha)a_F + \frac{1}{2}\rho V^2 S_w\bar{c}C_{M_a}$$

Derivada de momento longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

$$\sum \mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w\left(C_{l_\alpha}\alpha_w + C_{l_0}\right)a_w + \frac{1}{2}\rho V^2 S_{T_H}\left(C_{l_{\alpha_{T_H}}}\alpha_{T_H}\right)a_{T_H} + \frac{1}{2}\rho V^2 S_F\left(C_f\alpha\right)a_F + \frac{1}{2}\rho V^2 S_w\bar{c}C_{M_a}$$

Simplificando con presión dinámica:

$$\sum \mathcal{M} = q_{dyn}S_w\left(C_{l_\alpha}\alpha_w + C_{l_0}\right)a_w + q_{dyn}S_{T_H}\left(C_{l_{\alpha_{T_H}}}\alpha_{T_H}\right)a_{T_H} + q_{dyn}S_F\left(C_f\alpha\right)a_F + q_{dyn}S_w\bar{c}C_{M_a}$$

Suponiendo movimientos angulares pequeños, por lo que los ángulos de ataque se consideran iguales:

$$\mathcal{M} = q_{dyn}S_w\left(C_{l_\alpha}\alpha + C_{l_0}\right)a_w + q_{dyn}S_{T_H}\left(C_{l_{\alpha_{T_H}}}\alpha\right)a_{T_H} + q_{dyn}S_F\left(C_f\alpha\right)a_F + q_{dyn}S_w\bar{c}C_{M_a}$$

Afectando y agrupando términos similares:

$$\mathcal{M} = q_{dyn}S_wC_{l_\alpha}\alpha a_w + q_{dyn}S_{T_H}C_{l_{\alpha_{T_H}}}\alpha a_{T_H} + q_{dyn}S_FC_f\alpha a_F + q_{dyn}S_wC_{l_0}a_w + q_{dyn}S_w\bar{c}C_{M_a}$$

$$\mathcal{M} = \left(q_{dyn}S_wC_{l_\alpha}a_w + q_{dyn}S_{T_H}C_{l_{\alpha_{T_H}}}a_{T_H} + q_{dyn}S_FC_fa_F\right)\alpha + q_{dyn}S_wC_{l_0}a_w + q_{dyn}S_w\bar{c}C_{M_a}$$

Si se considera VRN, es posible agrupar en constantes los siguientes elementos:

$$C_{m_1} = q_{dyn}S_wC_{l_\alpha}a_w + q_{dyn}S_{T_H}C_{l_{\alpha_{T_H}}}a_{T_H} + q_{dyn}S_FC_fa_F$$

$$C_{m_2} = q_{dyn}S_wC_{l_0}a_w + q_{dyn}S_w\bar{c}C_{M_a}$$

Derivada de momento longitudinal

$$\mathcal{M} = \left(q_{dyn}S_w C_{l_\alpha} a_w + q_{dyn}S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H} + q_{dyn}S_F C_f a_F\right)\alpha + q_{dyn}S_w C_{l_0} a_w + q_{dyn}S_w \bar{c} C_{M_a}$$

Si se considera VRN, es posible agrupar en constantes los siguientes elementos:

$$C_{m_1} = q_{dyn}S_w C_{l_\alpha} a_w + q_{dyn}S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H} + q_{dyn}S_F C_f a_F$$

$$C_{m_2} = q_{dyn}S_w C_{l_0} a_w + q_{dyn}S_w \bar{c} C_{M_a}$$

El *momento longitudinal* depende del ángulo de ataque, por lo que toma una estructura de variación lineal como:

$$\mathcal{M} = C_{m_1}\alpha + C_{m_2}$$

Para garantizar la *estabilidad estática*, es necesario cumplir que:

$$\boldsymbol{S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H} < S_w C_{l_\alpha} a_w + S_F C_f a_F}$$

Derivada de momento longitudinal

$$\mathcal{M} = C_{m_1}\alpha + C_{m_2}$$

$$\boldsymbol{S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H} < S_w C_{l_\alpha} a_w + S_F C_f a_F}$$

Considerando el caso de una aeronave C-172 con los siguientes datos geométricos y aerodinámicos (donde no se toma en cuenta la acción de la propulsión al estar alineada con el C.G. de la aeronave):

Ala

$$S_w = 16\,m^2$$

$$C_{l_\alpha} = 4.87\frac{1}{rad}$$

$$a_w = -0.05$$

Estabilizador horizontal

$$S_{T_H} = 3.6\,m$$

$$C_{l_{\alpha_{T_H}}} = 3.71\frac{1}{rad}$$

$$a_{T_H} = -4.25$$

$$\boldsymbol{S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H}} = (3.6)(3.71)(-4.25) = -56.76$$

$$\boldsymbol{S_w C_{l_\alpha} a_w} = (16)(4.87)(-0.05) = -3.896$$

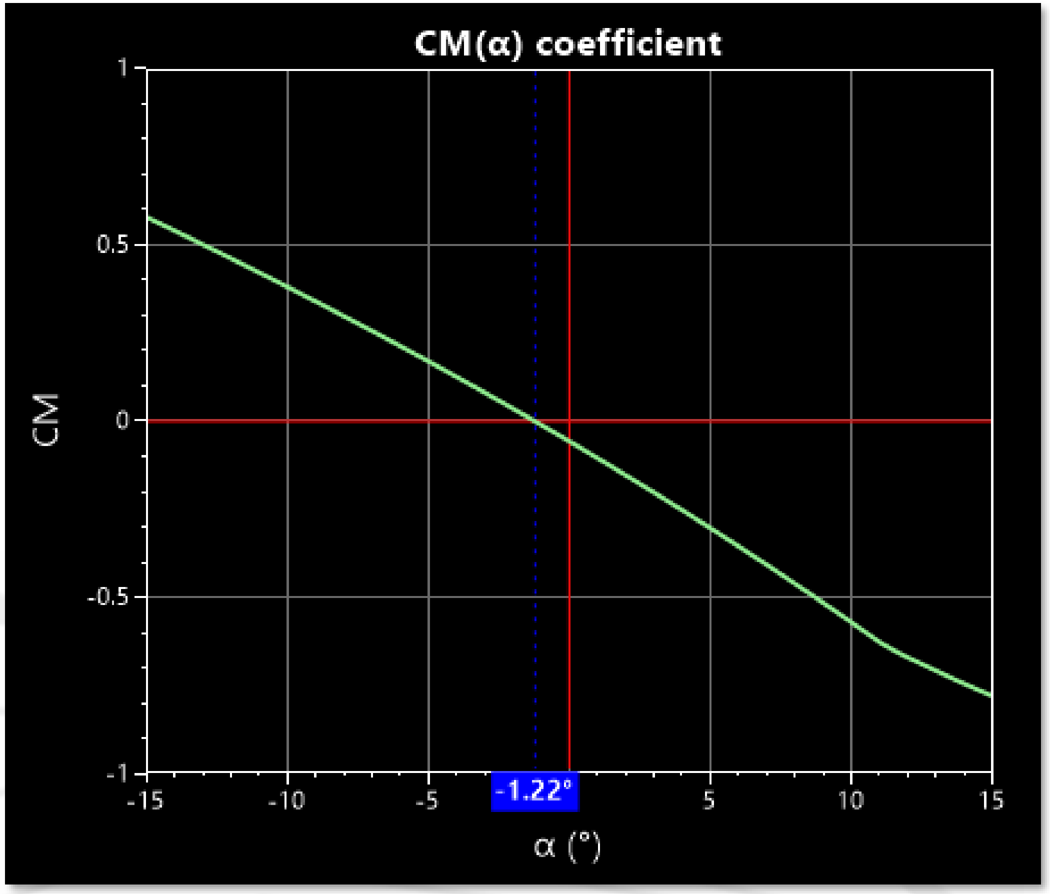
Lo anterior significa que la aeronave es *longitudinalmente estable*.

Derivada de momento longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

En la realidad el comportamiento del *momento longitudinal* no es completamente lineal respecto al ángulo de ataque; sin embargo, la aproximación lineal da una visión adecuada de las propiedades de estabilidad.

$$\mathcal{M} = C_{m_1}\alpha + C_{m_2}$$



Esta gráfica corresponde al **coeficiente. ¿Cómo se obtiene?**

Derivada de momento longitudinal

Para poder *comparar* el comportamiento entre diversas aeronaves, usualmente se considera la ecuación con una estructura de coeficiente referenciada a la superficie alar:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w \bar{c} C_M$$

Considerando la ecuación con estructura lineal:

$$\mathcal{M} = C_{m_1}\alpha + C_{m_2}$$

Igualando términos y simplificando:

$$C_{m_1}\alpha + C_{m_2} = q_{dyn} S_w \bar{c} C_M$$

Se obtiene la ecuación del *coeficiente de momento longitudinal*, el cual es *comparable* con otras aeronaves y permite establecer similitudes de reacción:

$$C_M = \frac{C_{m_1}}{q_{dyn} S_w \bar{c}}\alpha + \frac{C_{m_2}}{q_{dyn} S_w \bar{c}}$$

Derivada de momento longitudinal

Recordando las constantes previamente definidas:

$$C_{m_1} = q_{dyn}S_w C_{l_\alpha} a_w + q_{dyn}S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H} + q_{dyn}S_F C_f a_F$$

$$C_{m_2} = q_{dyn}S_w C_{l_0} a_w + q_{dyn}S_w \bar{c} C_{M_a}$$

$$C_M = \frac{C_{m_1}}{q_{dyn}S_w\bar{c}}\alpha + \frac{C_{m_2}}{q_{dyn}S_w\bar{c}}$$

Sustituyendo y afectando:

$$C_M = \frac{q_{dyn}S_w C_{l_\alpha} a_w + q_{dyn}S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H} + q_{dyn}S_F C_f a_F}{q_{dyn}S_w\bar{c}}\alpha + \frac{q_{dyn}S_w C_{l_0} a_w + q_{dyn}S_w \bar{c} C_{M_a}}{q_{dyn}S_w\bar{c}}$$

Lo que resulta en:

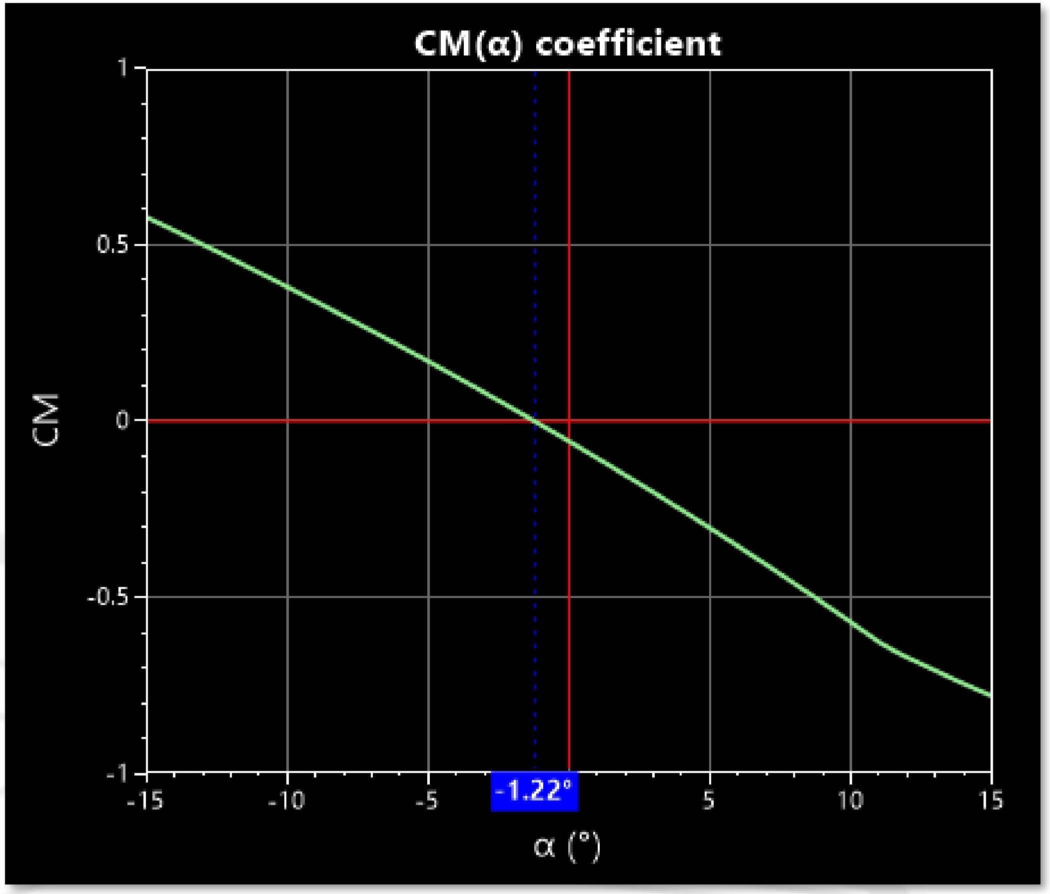
$$C_M = \left(\frac{C_{l_\alpha} a_w}{\bar{c}} + \frac{S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H}}{S_w\bar{c}} + \frac{S_F C_f a_F}{S_w\bar{c}}\right)\alpha + \left(\frac{C_{l_0} a_w}{\bar{c}} + C_{M_a}\right)$$

Derivada de momento longitudinal

$$C_M = \underbrace{\left(\frac{C_{l_\alpha} a_w}{\bar{c}} + \frac{S_{T_H} C_{l_{\alpha T_H}} a_{T_H}}{S_w \bar{c}} + \frac{S_F C_f a_F}{S_w \bar{c}}\right)}_{\text{Pendiente}} \alpha + \overbrace{\left(\frac{C_{l_0} a_w}{\bar{c}} + C_{M_a}\right)}^{\text{Cruce por el eje}}$$

Es importante identificar algunos parámetros que establecen el comportamiento de la aeronave:

- Pendiente de cambio del coeficiente respecto al ángulo de ataque.
- Punto en el que no se cuenta con coeficiente de momento.
- Regiones de no linealidad.



Derivada de momento longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

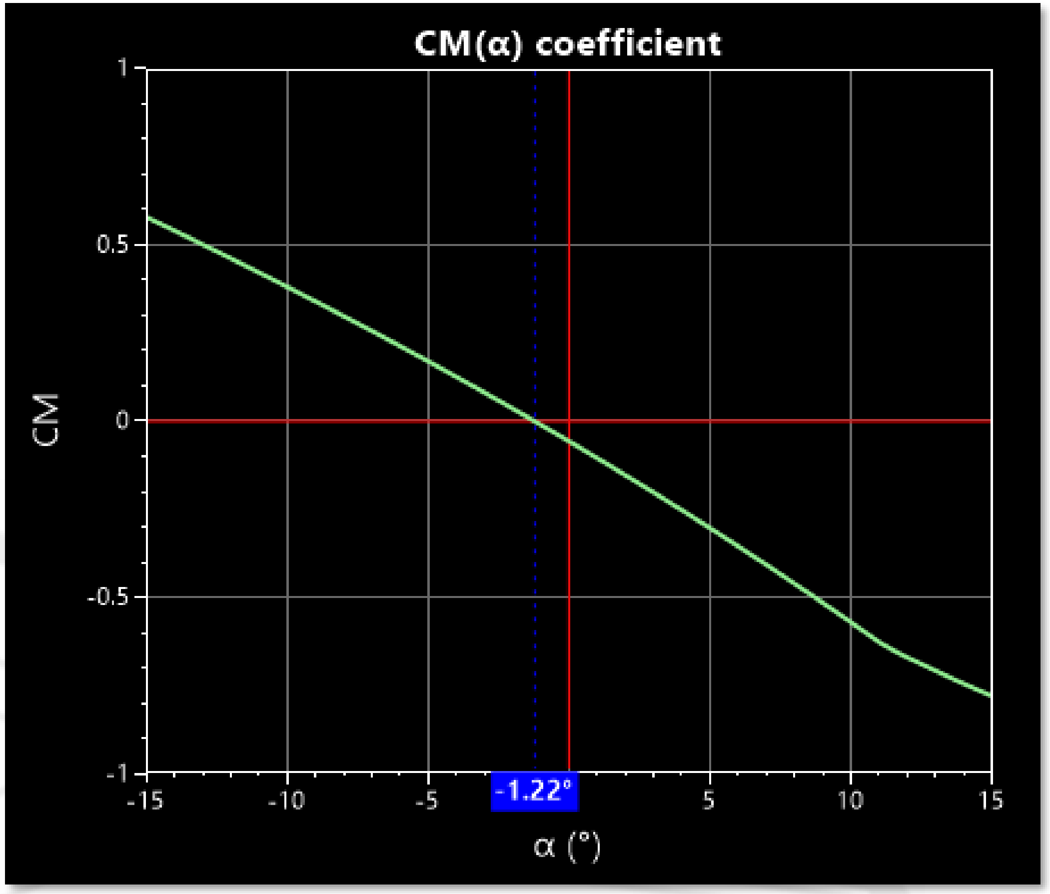
$$C_M = \left(\frac{C_{l_\alpha} a_W}{\bar{c}} + \frac{S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H}}{S_W \bar{c}} + \frac{S_F C_f a_F}{S_W \bar{c}} \right) \alpha + \left(\frac{C_{l_0} a_W}{\bar{c}} + C_{M_a} \right)$$

Derivando respecto al ángulo de ataque:

$$\frac{\partial C_M}{\partial \alpha} = \frac{C_{l_\alpha} a_W}{\bar{c}} + \frac{S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H}}{S_W \bar{c}} + \frac{S_F C_f a_F}{S_W \bar{c}}$$

Esta es la ***derivada de estabilidad de momento longitudinal*** respecto al *ángulo de ataque.*

$$C_{M_\alpha}$$

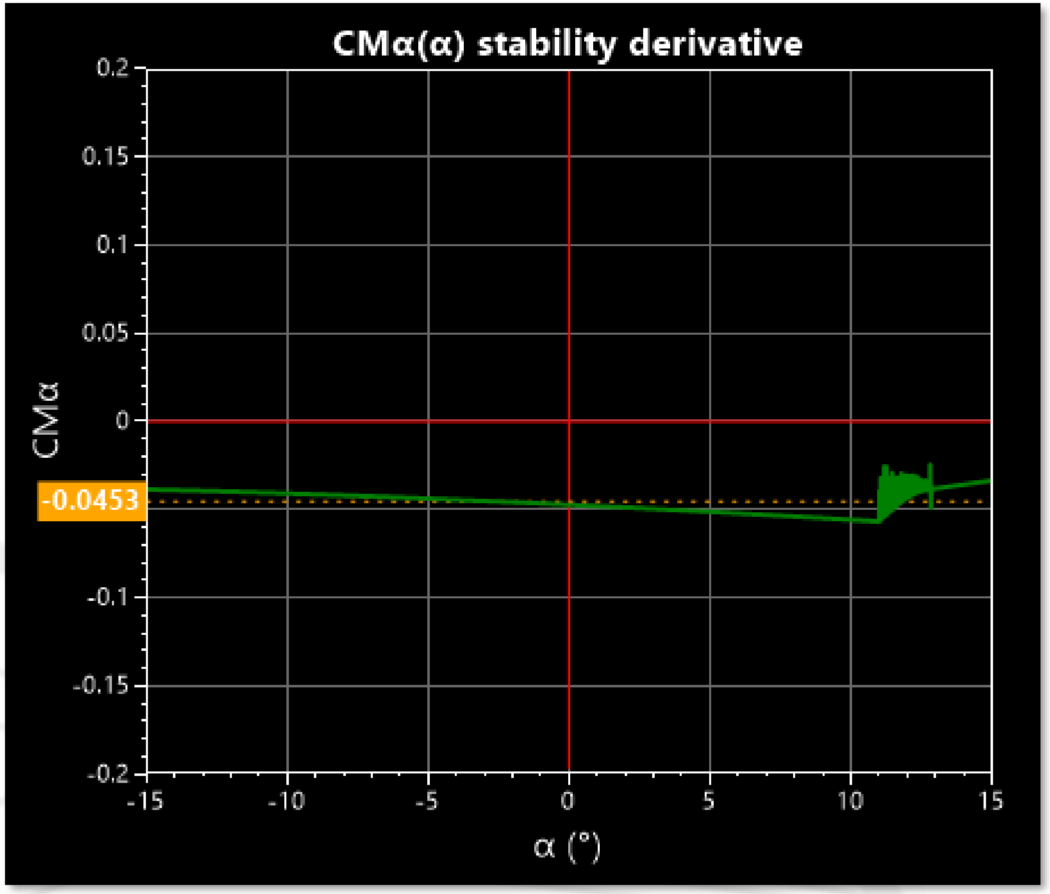


Derivada de momento longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

Esta es la ***derivada de estabilidad de momento longitudinal*** respecto al *ángulo de ataque*.

$$C_{M_\alpha}$$



Derivada de momento longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

$$C_{M_\alpha}$$

$$\frac{\partial C_M}{\partial \alpha} = \frac{C_{l_\alpha} a_w}{\bar{c}} + \frac{S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H}}{S_w \bar{c}} + \frac{S_F C_f a_F}{S_w \bar{c}}$$

Considerando el caso de una aeronave C-172 con los siguientes datos geométricos y aerodinámicos (donde no se toma en cuenta la acción de la propulsión al estar alineada con el C.G. de la aeronave):

Ala

$$S_w = 16\ m^2$$

$$C_{l_\alpha} = 4.87 \frac{1}{rad} = 0.085\ \frac{1}{\circ}$$

$$a_w = -0.05\ m$$

$$\bar{c} = 1.47\ m$$

Estabilizador horizontal

$$S_{T_H} = 3.6\ m^2$$

$$C_{l_{\alpha_{T_H}}} = 3.71 \frac{1}{rad} = 0.0648\ \frac{1}{\circ}$$

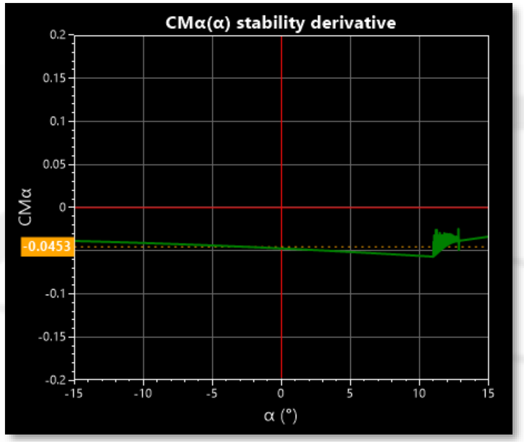
$$a_{T_H} = -4.25$$

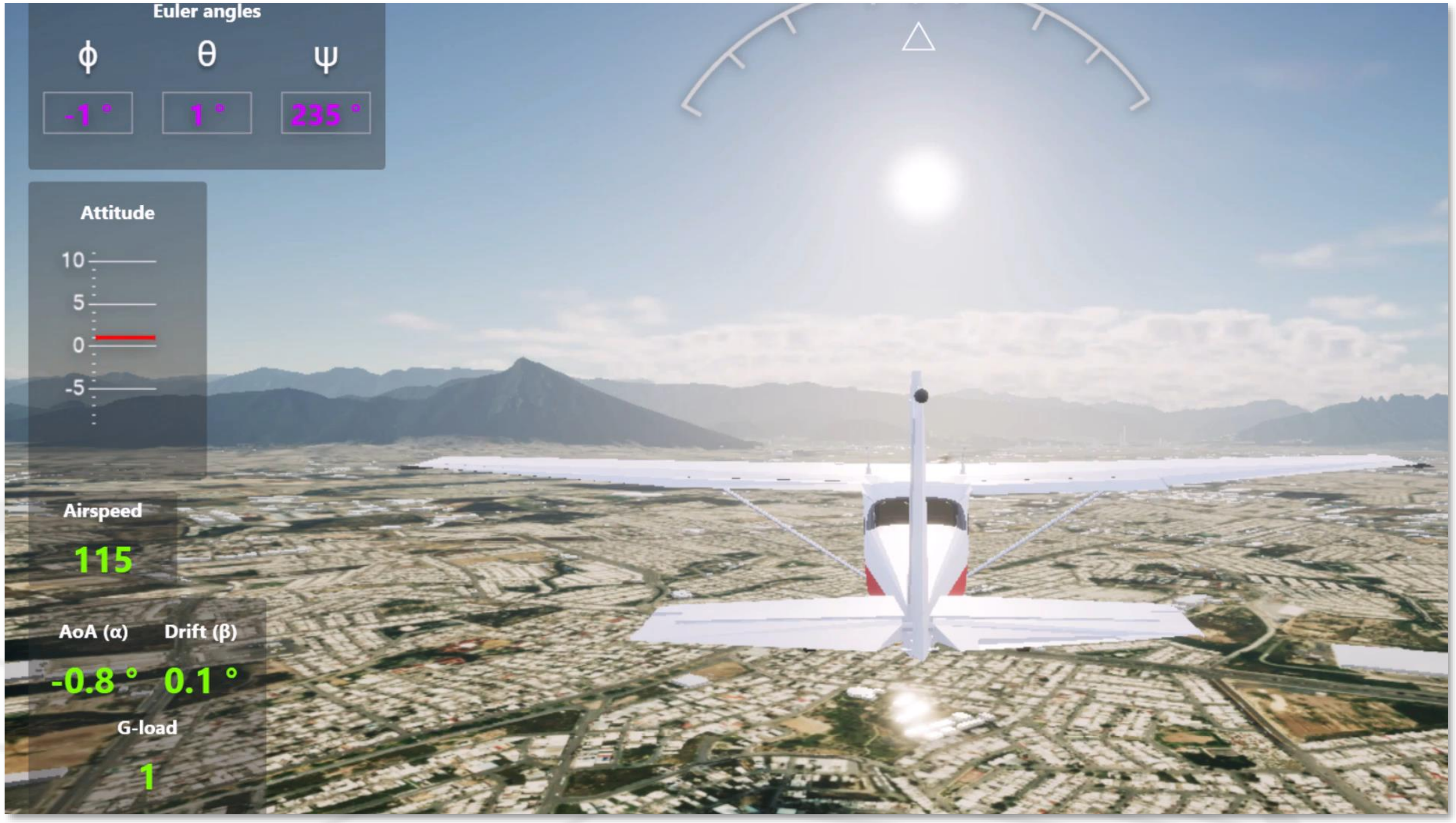
$$\frac{dC_M}{d\alpha} = \frac{(0.085)(-0.05)}{(1.47)} + \frac{(3.6)(0.0648)(-4.25)}{(16)(1.47)} = -0.045\ \frac{1}{deg}$$

Derivada de momento longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

$$C_{M_\alpha} = -0.045 \ \frac{1}{deg}$$





Derivada de control longitudinal

Recordando la ecuación de *momento longitudinal*:

$$\sum \mathcal{M} = [-(L_{w_1} + L_{w_2})a_w] + [(D_{w_1} + D_{w_2})b_w] + \left[-\left(L_{T_{H_1}} + L_{T_{H_2}}\right)a_{T_H}\right] + \left[\left(D_{T_{H_1}} + D_{T_{H_2}}\right)b_{T_H}\right] + [D_{T_V}b_{T_V}]$$

$$+[-L_F a_F] + [Thr b_{Thr}] + \left[D_{u_f}b_{u_f}\right] + [D_{u_a}b_{u_a}] + [M_{a_w}]$$

Reduciendo para solo considerar efectos de fuerzas de mayor impacto en el momento, y aquellos que dependen directamente de la deflexión del elevador:

$$\sum \mathcal{M} = \left[-\left(L_{T_{H_1}} + L_{T_{H_2}}\right)a_{T_H}\right]$$

Suponiendo que no se presentan movimientos *laterales-direccionales*, por lo que as superficies sustentadoras se pueden considerar como una, además, considerando **convención de signos en las distancias**, y **AFECTANDO EL SIGNO DE LA SUSTENTACIÓN**:

$$\sum \mathcal{M} = L_{T_H}(\alpha_{T_H})a_{T_H}$$

$$\sum \mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{T_H}(C_{l_{\alpha_{T_H}}}\alpha_{T_H} + C_e\delta_e)a_{T_H}$$

Derivada de control longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

$$\sum \mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{T_H}\left(C_{l_{\alpha_{T_H}}}\alpha_{T_H} + C_e\delta_e\right)a_{T_H}$$

Simplificando con presión dinámica:

$$\sum \mathcal{M} = q_{dyn} S_{T_H}\left(C_{l_{\alpha_{T_H}}}\alpha_{T_H} + C_e\delta_e\right)a_{T_H}$$

Suponiendo movimientos angulares pequeños, por lo que los ángulos de ataque se consideran nulos:

$$\mathcal{M} = q_{dyn} S_{T_H}(C_e\delta_e)a_{T_H}$$

Afectando y agrupando términos similares:

$$\mathcal{M} = q_{dyn} S_{T_H} C_e\delta_e a_{T_H}$$

Si se considera VRN, es posible agrupar en una constante

$$c_{m_3} = q_{dyn} S_{T_H} C_e\delta_e a_{T_H}$$

Universidad Autónoma de Nuevo León

Derivada de control longitudinal

$$\mathcal{M} = q_{dyn} S_{T_H} C_e \delta_e a_{T_H}$$

Si se considera VRN, es posible agrupar en una constante

$$c_{m_3} = q_{dyn} S_{T_H} C_e a_{T_H}$$

El *momento longitudinal* depende del ángulo de deflexión del elevador, por lo que toma una estructura de variación lineal como:

$$\mathcal{M} = C_{m_3} \delta_e$$

Para poder *comparar* el comportamiento entre diversas aeronaves, usualmente se considera la ecuación con una estructura de coeficiente referenciada a la superficie alar:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_w \bar{c} C_M$$

Derivada de control longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

El *momento longitudinal* depende del ángulo de deflexión del elevador, por lo que toma una estructura de variación lineal como:

$$\mathcal{M} = C_{m_3}\delta_e$$

Para poder *comparar* el comportamiento entre diversas aeronaves, usualmente se considera la ecuación con una estructura de coeficiente referenciada a la superficie alar:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w \bar{c} C_M$$

Igualando términos y simplificando:

$$c_{m_3}\delta_e = q_{dyn} S_w \bar{c} C_M$$

Se obtiene la ecuación del *coeficiente de momento longitudinal*, el cual es *comparable* con otras aeronaves y permite establecer similitudes de reacción:

$$C_M = \frac{C_{m_3}\delta_e}{q_{dyn} S_w \bar{c}}$$

Derivada de control longitudinal

Recordando las constantes previamente definidas:

$$c_{m_3} = q_{dyn} S_{T_H} C_e a_{T_H}$$

$$C_M = \frac{C_{m_3} \delta_e}{q_{dyn} S_w \bar{c}}$$

Sustituyendo y afectando:

$$C_M = \frac{q_{dyn} S_{T_H} C_e a_{T_H} \delta_e}{q_{dyn} S_w \bar{c}}$$

Lo que resulta en:

$$C_M = \frac{S_{T_H} C_e a_{T_H} \delta_e}{S_w \bar{c}}$$

Derivada de control longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

$$C_M = \frac{S_{T_H} C_e a_{T_H} \delta_e}{S_w \bar{c}}$$

Derivando respecto al ángulo de deflexión del elevador

$$\frac{\partial C_M}{\partial \delta_e} = \frac{S_{T_H} C_e a_{T_H}}{S_w \bar{c}}$$

Esta es la ***derivada de estabilidad de control longitudinal*** respecto al *ángulo de deflexión del elevador.*

$$C_{M_{\delta_e}}$$

Derivada de amortiguamiento longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

Recordando la ecuación de *momento longitudinal*:

$$\sum \mathcal{M} = [-(L_{w_1} + L_{w_2})a_w] + [(D_{w_1} + D_{w_2})b_w] + \left[-\left(L_{T_{H_1}} + L_{T_{H_2}}\right)a_{T_H}\right] + \left[\left(D_{T_{H_1}} + D_{T_{H_2}}\right)b_{T_H}\right] + [D_{T_V}b_{T_V}]$$

$$+[-L_F a_F] + [Thr\, b_{Thr}] + \left[D_{u_f}b_{u_f}\right] + [D_{u_a}b_{u_a}] + [M_{a_w}]$$

Reduciendo para solo considerar efectos de fuerzas de mayor impacto en el momento, y aquellos que dependen directamente de la velocidad angular *q*:

$$\sum \mathcal{M} = [-(L_{w_1} + L_{w_2})a_w] + \left[-\left(L_{T_{H_1}} + L_{T_{H_2}}\right)a_{T_H}\right]$$

Suponiendo que no se presentan movimientos *laterales-direccionales*, por lo que as superficies sustentadoras se pueden considerar como una, además, considerando **convención de signos en las distancias**, y **AFECTANDO EL SIGNO DE LA SUSTENTACIÓN**:

$$\sum \mathcal{M} = L_w(\alpha_w)a_w + L_{T_H}(\alpha_{T_H})a_{T_H}$$

$$\sum \mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w(C_{l_\alpha}\alpha_w + C_{l_0})a_w + \frac{1}{2}\rho V^2 S_{T_H}(C_{l_{\alpha_{T_H}}}\alpha_{T_H})a_{T_H}$$

Derivada de amortiguamiento longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

$$\sum \mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w\left(C_{l_\alpha}\alpha_w + C_{l_0}\right)a_w + \frac{1}{2}\rho V^2 S_{T_H}\left(C_{l_{\alpha_{T_H}}}\alpha_{T_H}\right)a_{T_H}$$

Simplificando con presión dinámica:

$$\sum \mathcal{M} = q_{dyn}S_w\left(C_{l_\alpha}\alpha_w + C_{l_0}\right)a_w + q_{dyn}S_{T_H}\left(C_{l_{\alpha_{T_H}}}\alpha_{T_H}\right)a_{T_H}$$

Considerando el ángulo de ataque dependiente de la velocidad angular *q*:

$$\mathcal{M} = q_{dyn}S_w\left(C_{l_\alpha}\operatorname{atan}\left(\frac{w - a_w q}{u}\right) + C_{l_0}\right)a_w + q_{dyn}S_{T_H}\left(C_{l_{\alpha_{T_H}}}\operatorname{atan}\left(\frac{w - a_{T_H} q}{u}\right)\right)a_{T_H}$$

Considerando movimientos de velocidad *w* pequeños y linealizando la *tangente inversa*:

$$\mathcal{M} = q_{dyn}S_w\left(-C_{l_\alpha}\frac{a_w q}{u} + C_{l_0}\right)a_w + q_{dyn}S_{T_H}\left(-C_{l_{\alpha_{T_H}}}\frac{a_{T_H} q}{u}\right)a_{T_H}$$

Simplificando y agrupando términos similares:

$$\mathcal{M} = -q_{dyn}S_w C_{l_\alpha}\frac{a_w^2 q}{u} + q_{dyn}S_w C_{l_0}a_w - q_{dyn}S_{T_H}C_{l_{\alpha_{T_H}}}\frac{a_{T_H}^2 q}{u}$$

Derivada de amortiguamiento longitudinal

$$\mathcal{M} = -q_{dyn} S_w C_{l_\alpha} \frac{a_w^2 q}{u} + q_{dyn} S_w C_{l_0} a_w - q_{dyn} S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} \frac{a_{T_H}^2 q}{u}$$

Agrupando términos:

$$\mathcal{M} = \left(-q_{dyn} S_w C_{l_\alpha} \frac{a_w^2}{u} - q_{dyn} S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} \frac{a_{T_H}^2}{u}\right) q + q_{dyn} S_w C_{l_0} a_w$$

Si se considera VRN, es posible agrupar en constantes los siguientes elementos:

$$c_{m_5} = -q_{dyn} S_w C_{l_\alpha} \frac{a_w^2}{u} - q_{dyn} S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} \frac{a_{T_H}^2}{u} \qquad \Big| \qquad c_{m_6} = q_{dyn} S_w C_{l_0} a_w$$

El *momento longitudinal* depende de la velocidad q, por lo que toma una estructura de variación lineal como:

$$\mathcal{M} = c_{m_5} q + c_{m_6}$$

Derivada de amortiguamiento longitudinal

Para poder *comparar* el comportamiento entre diversas aeronaves, usualmente se considera la ecuación con una estructura de coeficiente referenciada a la superficie alar:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w \bar{c} C_M$$

Considerando la ecuación con estructura lineal:

$$\mathcal{M} = c_{m_5} q + c_{m_6}$$

Igualando términos y simplificando:

$$c_{m_5} q + c_{m_6} = q_{dyn} S_w \bar{c} C_M$$

Se obtiene la ecuación del *coeficiente de momento longitudinal*, el cual es *comparable* con otras aeronaves y permite establecer similitudes de reacción:

$$C_M = \frac{c_{m_5} q}{q_{dyn} S_w \bar{c}} + \frac{c_{m_6}}{q_{dyn} S_w \bar{c}}$$

Derivada de amortiguamiento longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

Recordando las constantes previamente definidas:

$$c_{m_5} = -q_{dyn} S_w C_{l_\alpha} \frac{a_w^2}{u} - q_{dyn} S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} \frac{a_{T_H}^2}{u} \qquad \bigg| \qquad c_{m_6} = q_{dyn} S_w C_{l_0} a_w$$

$$C_M = \frac{c_{m_5} q}{q_{dyn} S_w \bar{c}} + \frac{c_{m_6}}{q_{dyn} S_w \bar{c}}$$

Sustituyendo y afectando:

$$C_M = \frac{\left(-q_{dyn} S_w C_{l_\alpha} \frac{a_w^2}{u} - q_{dyn} S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} \frac{a_{T_H}^2}{u}\right) q}{q_{dyn} S_w \bar{c}} + \frac{q_{dyn} S_w C_{l_0} a_w}{q_{dyn} S_w \bar{c}}$$

Lo que resulta en:

$$C_M = \left(-\frac{C_{l_\alpha} \frac{a_w^2}{u}}{\bar{c}} - \frac{S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} \frac{a_{T_H}^2}{u}}{S_w \bar{c}}\right) q + \frac{C_{l_0} a_w}{\bar{c}}$$

Derivada de amortiguamiento longitudinal

$$C_M = \left(-\frac{C_{l_\alpha} \frac{a_w^2}{u}}{\bar{c}} - \frac{S_{T_H} C_{l_{\alpha T_H}} \frac{a_{T_H}^2}{u}}{S_w \bar{c}} \right) q + \frac{C_{l_0} a_w}{\bar{c}}$$

Derivando respecto a la velocidad angular q:

$$\frac{\partial C_M}{\partial q} = -\frac{C_{l_\alpha} \frac{a_w^2}{u}}{\bar{c}} - \frac{S_{T_H} C_{l_{\alpha T_H}} \frac{a_{T_H}^2}{u}}{S_w \bar{c}}$$

Considerando la velocidad u como la velocidad del *flujo libre*.

$$\frac{\partial C_M}{\partial q} = -\frac{C_{l_\alpha} a_w^2}{V \bar{c}} - \frac{S_{T_H} C_{l_{\alpha T_H}} a_{T_H}^2}{V S_w \bar{c}}$$

Esta es la *derivada del coeficiente de momento* respecto a la velocidad angular q. No obstante, para obtener la *derivada de amortiguamiento*, es necesario considerar la siguiente equivalencia:

$$C_{M_q} = \left(\frac{2V}{\bar{c}} \right) \frac{\partial C_M}{\partial q}$$

Derivada de amortiguamiento longitudinal

Esta es la *derivada del coeficiente de momento* respecto a la velocidad angular q. No obstante, para obtener la *derivada de amortiguamiento*, es necesario considerar la siguiente equivalencia:

$$C_{M_q} = \left(\frac{2V}{\bar{c}}\right)\frac{\partial C_M}{\partial q}$$

$$\frac{\partial C_M}{\partial q} = -\frac{C_{l_\alpha} a_w^2}{V\bar{c}} - \frac{S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H}^2}{V S_w \bar{c}}$$

$$C_{M_q} = \left(\frac{2V}{\bar{c}}\right)\frac{\partial C_M}{\partial q} = \left(-\frac{2C_{l_\alpha} a_w^2}{\bar{c}^2} - \frac{2S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H}^2}{S_w \bar{c}^2}\right)$$

Esta es la ***derivada de amortiguamiento longitudinal*** respecto a la *velocidad angular q*.

$$C_{M_q}$$

Derivadas de momento longitudinal

Universidad Autónoma de Nuevo León

Derivadas de estabilidad de *momento longitudinal*

Derivadas de **_Rigidez_** *longitudinal*

$$C_{M_\alpha} = \frac{C_{l_\alpha} a_w}{\bar{c}} + \frac{S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H}}{S_w \bar{c}} + \frac{S_F C_f a_F}{S_w \bar{c}}$$

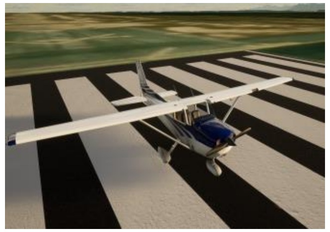
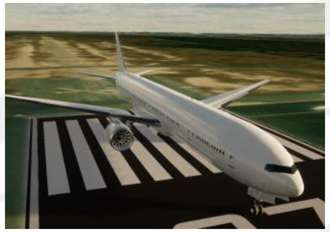
Derivadas de **_Amortiguamiento_** *longitudinal*

$$C_{M_q} = \left(-\frac{2 C_{l_\alpha} a_w^2}{\bar{c}^2} - \frac{2 S_{T_H} C_{l_{\alpha_{T_H}}} a_{T_H}^2}{S_w \bar{c}^2} \right)$$

Derivadas de **_Control_** *longitudinal*

$$C_{M_{\delta_e}} = \frac{S_{T_H} C_e a_{T_H}}{S_w \bar{c}}$$

Derivadas de momento longitudinal

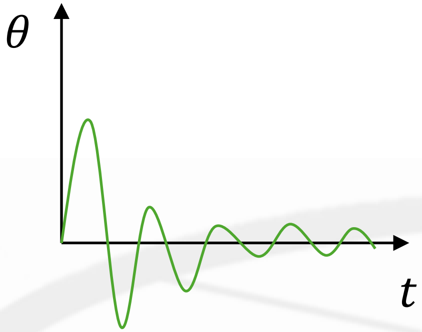
		C_{M_α}	C_{M_q}	$C_{M_{\delta_e}}$
	**Cessna 172**	$-2.1682\,\frac{1}{rad}$ | $-0.03778\,\frac{1}{\circ}$	$-14.7138\,\frac{1}{rad}$ | $-0.2568\,\frac{1}{\circ}$	$-1.2651\,\frac{1}{rad}$ | $-0.0221\,\frac{1}{\circ}$
	**Hawker 800**	$-2.3111\,\frac{1}{rad}$ | $-0.0403\,\frac{1}{\circ}$	$-14.6500\,\frac{1}{rad}$ | $-0.2557\,\frac{1}{\circ}$	$-1.3471\,\frac{1}{rad}$ | $-0.0235\,\frac{1}{\circ}$
	**Boeing 777**	$-3.6129\,\frac{1}{rad}$ | $-0.0631\,\frac{1}{\circ}$	$-45.2214\,\frac{1}{rad}$ | $-0.7893\,\frac{1}{\circ}$	$-2.0586\,\frac{1}{rad}$ | $-0.0359\,\frac{1}{\circ}$
	**Aerotigres Karma**	$-1.3414\,\frac{1}{rad}$ | $-0.0234\,\frac{1}{\circ}$	$-3.1378\,\frac{1}{rad}$ | $-0.0548\,\frac{1}{\circ}$	$-0.7154\,\frac{1}{rad}$ | $-0.0125\,\frac{1}{\circ}$

Estabilidad dinámica

Estabilidad dinámica

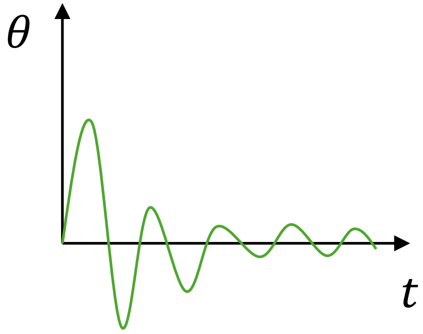
Considerando una *función de transferencia convencional* para un sistema de segundo orden ideal como:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



Se pueden identificar como parámetros la **frecuencia natural** y **factor de amortiguamiento, estos** cobran gran importancia porque definen el cómo *oscilará* la aeronave.

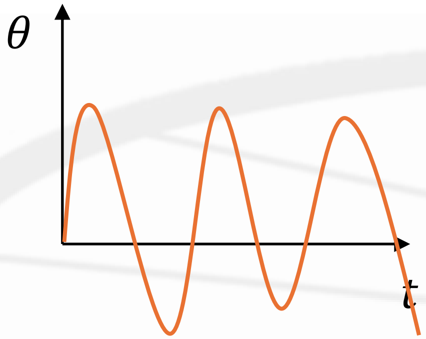
Estabilidad dinámica



$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \longrightarrow G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$$

Se pueden identificar como parámetros la **frecuencia natural** y **factor de amortiguamiento, estos** cobran gran importancia porque definen el cómo *oscilará* la aeronave.

Es posible caracterizar los ***modos de oscilación*** por medio de los coeficientes de los *polos*, utilizando las herramientas tradicionales de sistemas dinámicos.

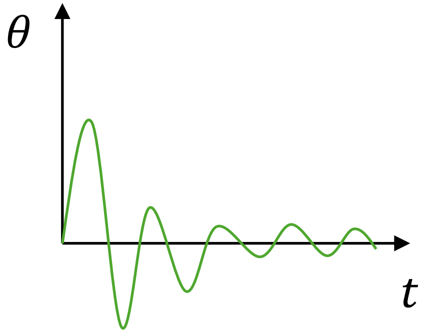


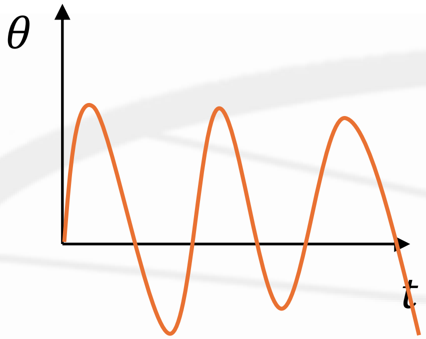
Recordando que también se puede expresar el sistema como un **espacio de estados**:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & X_\theta \\ Z_u & Z_w & Z_q & Z_\theta \\ M_u & M_w & M_q & M_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_{elev}} & X_{Thr} \\ Z_{\delta_{elev}} & Z_{Thr} \\ M_{\delta_{elev}} & M_{Thr} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{elev} \\ Thr \end{bmatrix}$$

$$\dot{u} = \frac{F_{x_B}}{m} - g\theta - qw \quad \Big| \quad \dot{w} = \frac{F_{z_B}}{m} + g + qu \quad \Big| \quad \dot{q} = \frac{\mathcal{M}}{J_{yy}}$$

Estabilidad dinámica





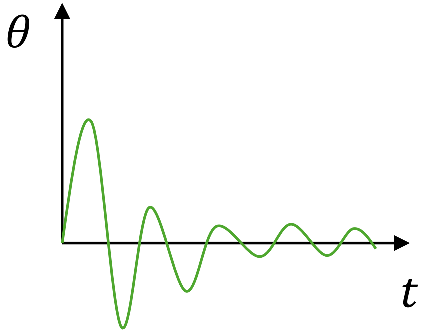
$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & X_\theta \\ Z_u & Z_w & Z_q & Z_\theta \\ M_u & M_w & M_q & M_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_{elev}} & X_{Thr} \\ Z_{\delta_{elev}} & Z_{Thr} \\ M_{\delta_{elev}} & M_{Thr} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{elev} \\ Thr \end{bmatrix}$$

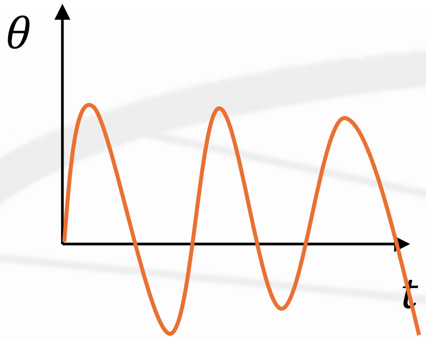
$$\dot{u} = \frac{F_{x_B}}{m} - g\theta - qw \quad \Big| \quad \dot{w} = \frac{F_{z_B}}{m} + g + qu \quad \Big| \quad \dot{q} = \frac{\mathcal{M}}{J_{yy}}$$

$$C_{M_\alpha} \qquad C_{M_q} \qquad C_{M_{\delta_e}}$$

Considerando las **derivadas de estabilidad de momento**, se pueden calcular los parámetros del espacio de estados que más impactan en la dinámica.

Estabilidad dinámica





$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & X_\theta \\ Z_u & Z_w & Z_q & Z_\theta \\ M_u & M_w & M_q & M_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_{elev}} & X_{Thr} \\ Z_{\delta_{elev}} & Z_{Thr} \\ M_{\delta_{elev}} & M_{Thr} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{elev} \\ Thr \end{bmatrix}$$

Si se considera un punto de VRN, con la posibilidad de *cambios súbitos en* **velocidad angular** y **elevador**, el espacio de estados se puede reducir a:

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w & Z_q \\ M_w & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_{elev}} \\ M_{\delta_{elev}} \end{bmatrix} \delta_{elev}$$

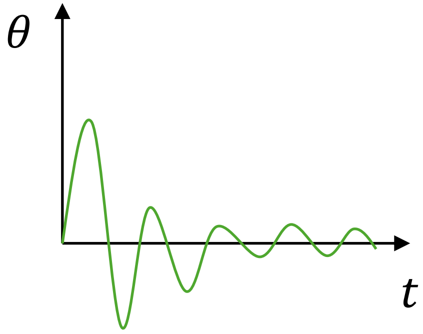
$$\dot{u} = \frac{F_{x_B}}{m} - g\theta - qw \quad \Bigg| \quad \dot{w} = \frac{F_{z_B}}{m} + g + qu \quad \Bigg| \quad \dot{q} = \frac{\mathcal{M}}{J_{yy}}$$

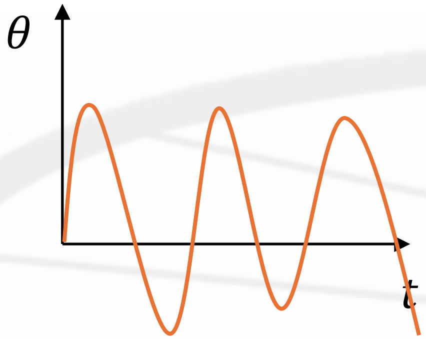
$$C_{M_\alpha} \qquad C_{M_q} \qquad C_{M_{\delta_e}}$$

Considerando las **derivadas de estabilidad de momento**, se pueden calcular los parámetros del espacio de estados que más impactan en la dinámica.

Estabilidad dinámica

Universidad Autónoma de Nuevo León





Relacionando el *cambio de momento respecto al ángulo de ataque* con la velocidad *w*.

$$\frac{\partial M}{\partial w} = \frac{\partial M}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial w}$$

Sabiendo que el *coeficiente de momento* se relaciona con la derivada de momento como:

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = q_{dyn} S_w \bar{c} C_{M_\alpha}$$

Derivando el *ángulo de ataque*.

$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{w}{u}\right) \approx \frac{w}{u} \longrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial w} = \frac{1}{u}$$

Conectando ambas ecuaciones:

$$\frac{\partial M}{\partial w} = q_{dyn} S_w \bar{c} C_{M_\alpha} \frac{1}{u}$$

Sabiendo que el coeficiente depende de la *inercia* tal que:

$$M_w = \frac{\partial M}{\partial w}\frac{1}{J_{yy}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w & Z_q \\ M_w & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_{elev}} \\ M_{\delta_{elev}} \end{bmatrix} \delta_{elev}$$

¿Cómo se calcularían las M_q y la $M_{\delta_{elev}}$ dadas las derivadas de estabilidad?

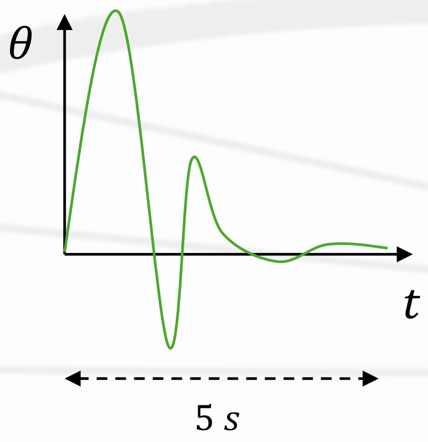
$$C_{M_\alpha} \qquad C_{M_q} \qquad C_{M_{\delta_e}}$$

Modo de oscilación – periodo corto

El ***Periodo corto*** es un modo de oscilación de la aeronave de la **dinámica longitudinal** que presenta las siguientes características:

- Movimiento *nariz arriba, nariz abajo*.
- Altera los estados *u, w, p* y θ.
- Tiene una duración de entre 0.5 s y 5 s.
- El ángulo de ataque ***cambia súbitamente***.
- Es muy agresivo.
- Va acoplado al *inicio de un fugoide*.

$$\theta \neq \alpha$$



$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w & Z_q \\ M_w & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_{elev}} \\ M_{\delta_{elev}} \end{bmatrix} \delta_{elev}$$

La *función de transferencia* resultante de este *espacio de estados* dará como resultado el **periodo corto**.

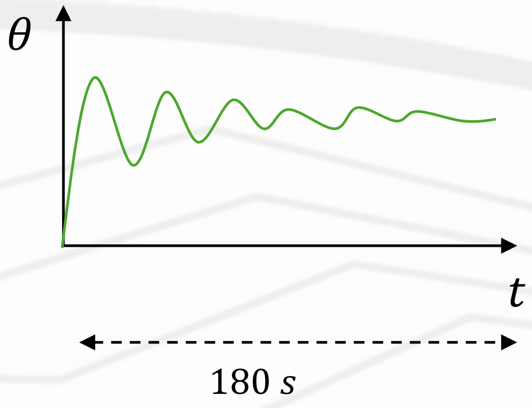
Modo de oscilación – periodo corto

Universidad Autónoma de Nuevo León

El ***Periodo corto*** es un modo de oscilación de la aeronave de la **dinámica longitudinal** que presenta las siguientes características:

- Movimiento *nariz arriba, nariz abajo*.
- Altera los estados u, w, p y θ.
- Tiene una duración de entre 0.5 s y 5 s.
- El ángulo de ataque ***cambia súbitamente***.
- Es muy agresivo.
- Va acoplado al *inicio de un fugoide*.

$$\theta \neq \alpha$$

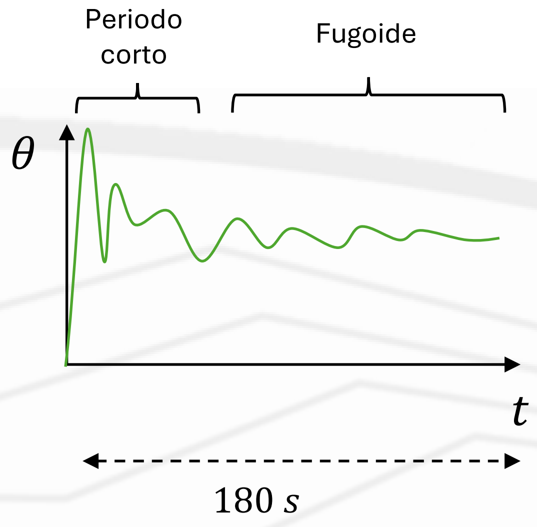


Modo de oscilación – periodo corto

El ***Periodo corto*** es un modo de oscilación de la aeronave de la **dinámica longitudinal** que presenta las siguientes características:

- Movimiento *nariz arriba, nariz abajo*.
- Altera los estados *u, w, p* y θ.
- Tiene una duración de entre 0.5 s y 5 s.
- El ángulo de ataque ***cambia súbitamente***.
- Es muy agresivo.
- Va acoplado al *inicio de un fugoide*.

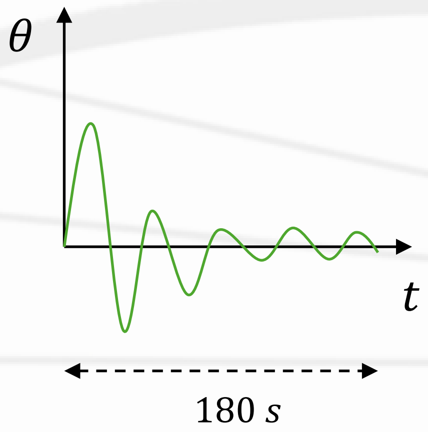
$$\theta \neq \alpha$$



Modo de oscilación – fugoide

El ***Fugoide*** es un modo de oscilación de la aeronave de la **dinámica longitudinal** que presenta las siguientes características:

- Movimiento *nariz arriba, nariz abajo*.
- Altera los estados *u, w, p* y θ.
- Tiene una duración de entre 10 s y 180 s.
- El ángulo de ataque se mantiene constante durante la oscilación:
    - Esto significa que la *u* y la *w* cambian sus valores de manera *coordinada* para mantener constante el ángulo de ataque.



$$\theta \neq \alpha$$

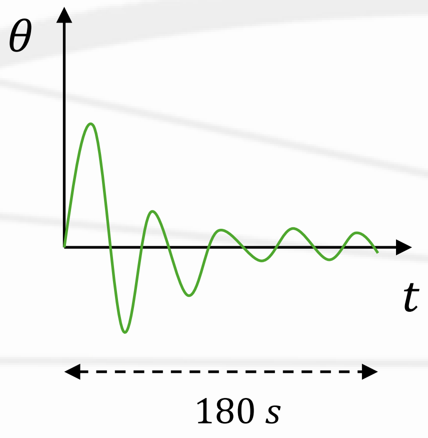
Universidad Autónoma de Nuevo León

Modo de oscilación – fugoide

El ***Fugoide*** es un modo de oscilación de la aeronave de la **dinámica longitudinal** que presenta las siguientes características:

- Movimiento *nariz arriba, nariz abajo*.
- Altera los estados u, w, p y θ.
- Tiene una duración de entre 10 s y 180 s.
- El ángulo de ataque se mantiene constante durante la oscilación:
    - Esto significa que la u y la w cambian sus valores de manera *coordinada* para mantener constante el ángulo de ataque.

$$\theta \neq \alpha$$

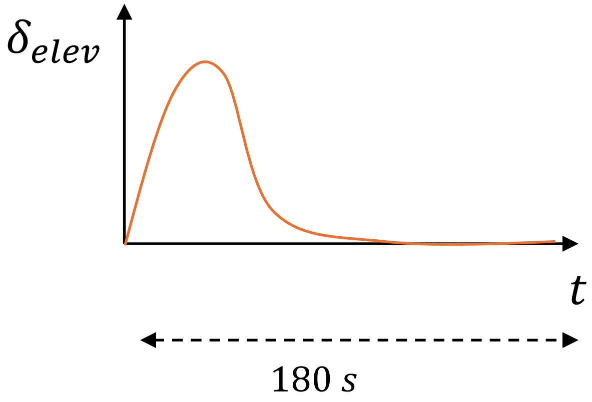


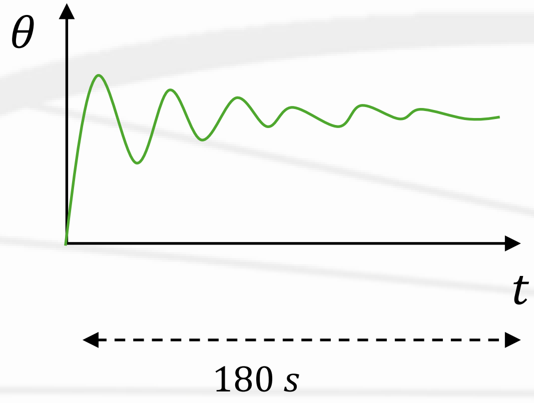
El Fugoide se ocasiona como consecuencia de:

- Perturbaciones de ángulo de ataque.
- Cambios en la condición de VRN.
- Perturbaciones en q.
- Cambios de momento súbito en M.

$$\underbrace{\theta \qquad q \qquad \alpha}_{\text{Ráfagas de viento}} \qquad \delta_{elev}$$

Modo de oscilación – fugoide





$$\theta \neq \alpha$$

El Fugoide se ocasiona como consecuencia de:

- Perturbaciones de ángulo de ataque.
- Cambios en la condición de VRN.
- Perturbaciones en q.
- Cambios de momento súbito en M.

$$\underbrace{\theta \qquad q \qquad \alpha}_{\text{Ráfagas de viento}} \qquad \delta_{elev}$$

Modo de oscilación – periodo corto + fugoide

Universidad Autónoma de Nuevo León