



UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
NUEVO LEÓN



FACULTAD DE
INGENIERÍA MECÁNICA
Y ELÉCTRICA

Dinámica lateral-direccional

Dinámica de Vuelo

7mo semestre

Plan 401

Dr. Erik Gilberto Rojo Rodríguez



Contenidos de la Unidad Temática

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. **Introducción**
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

- a. **Dinámicas de navegación y orientación lateral-direccional aisladas.**
- b. **Efectos aerodinámicos lateral-direccionales.**
- c. **Análisis de estabilidad estática lateral-direccional.**
 - i. Derivadas de estabilidad lateral-direccionales (estáticas).
 - ii. Derivadas de control lateral-direccionales.
- d. **Análisis de estabilidad dinámica lateral-direccional.**
 - i. Modo de oscilación *Dutch-Roll*.
 - ii. Modo de oscilación Espiral.
 - iii. Derivadas de estabilidad lateral-direccional (dinámicas).

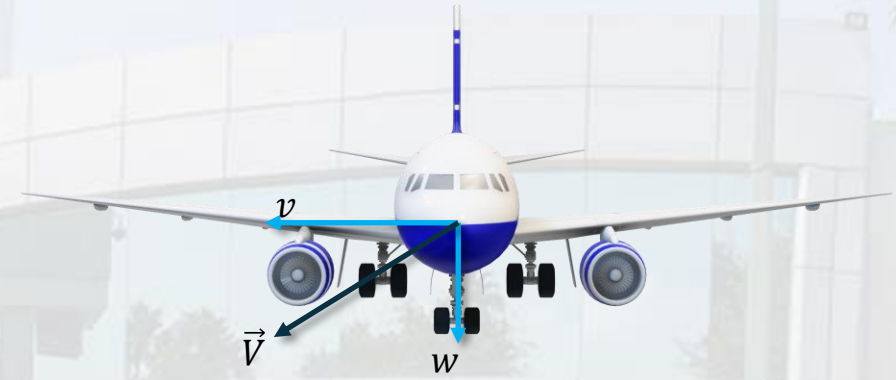


UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
NUEVO LEÓN



FACULTAD DE
INGENIERÍA MECÁNICA
Y ELÉCTRICA

Dinámica de navegación y orientación

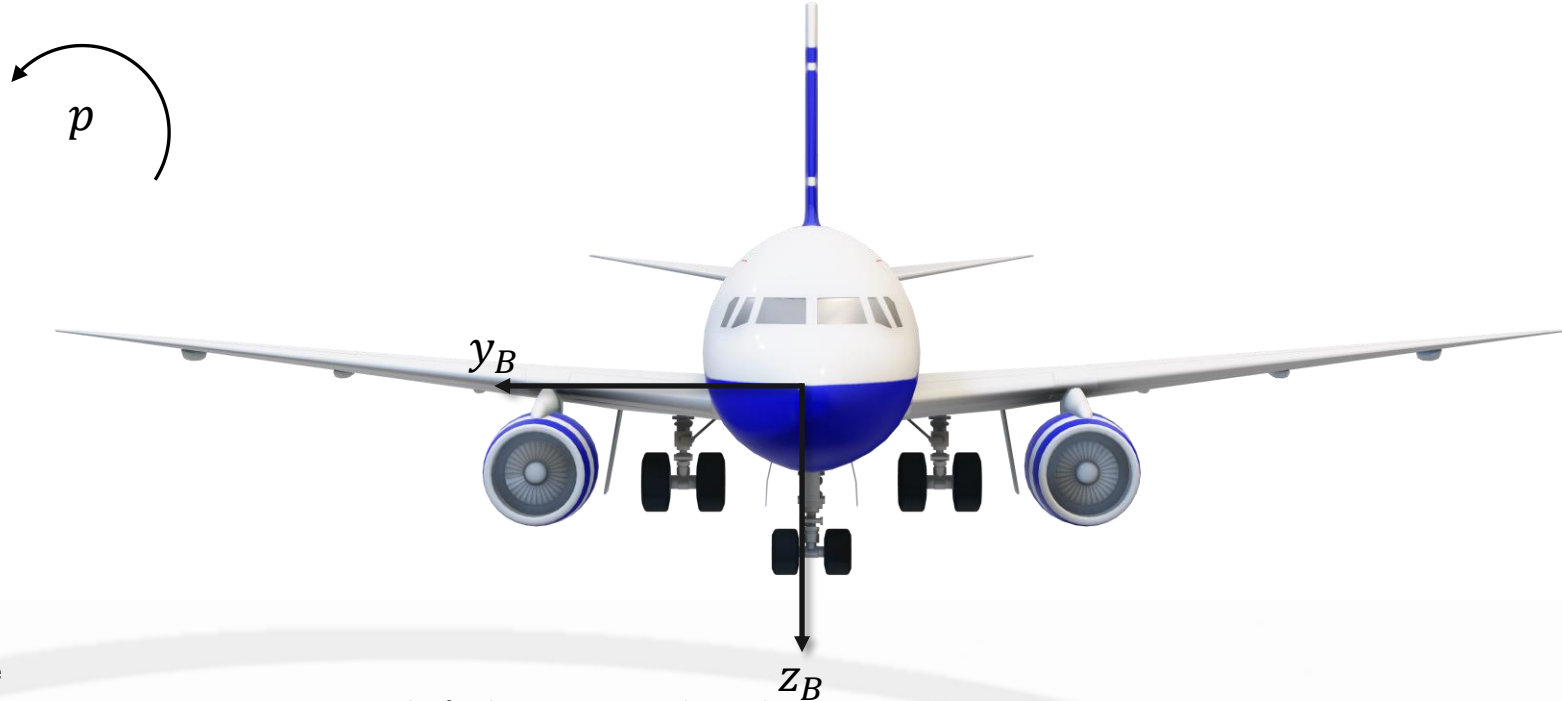




Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. **Dinámica
aislada**
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Generalmente se
cumple que:

$$p \neq \dot{\phi}$$

Cómo la dinámica es
aislada, se puede
establecer que:

$$p \approx \dot{\phi}$$
$$\int p dt \approx \phi$$

La dinámica lateral-direccional de la aeronave son aquellos
estados que se manifiestan en el plano $y_B z_B$ del marco del
cuerpo.

Involucra los siguientes estados:

v	\dot{y}_I	y_I	p	$\dot{\phi}$	ϕ	δ_{ail}	δ_{rudd}
$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$		$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$		$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$	$\underbrace{\hspace{2.5cm}}$	
Velocidades lineales		Desplazamientos	Velocidades angulares		Ángulo	Entradas de control	



Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. **Dinámica
aislada**
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Generalmente se
cumple que:

$$p \neq \dot{\phi}$$

Cómo la dinámica es
aislada, se puede
establecer que:

$$p \approx \dot{\phi}$$
$$\int p dt \approx \phi$$

La dinámica lateral-direccional de la aeronave son aquellos
estados que se manifiestan en el plano $y_B z_B$ del marco del
cuerpo.

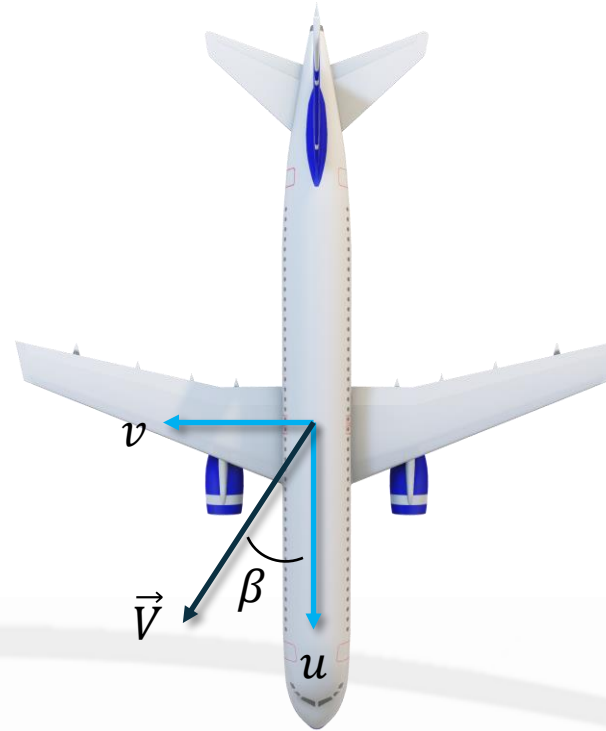
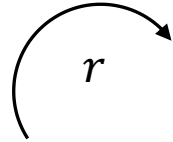
Involucra los siguientes estados:

v	\dot{y}_I	y_I	p	$\dot{\phi}$	ϕ	δ_{ail}	δ_{rudd}
Velocidades lineales		Desplazamientos	Velocidades angulares		Ángulo	Entradas de control	

Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
- 2. Dinámica
aislada**
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Generalmente se
cumple que:

$$p \neq \dot{\phi}$$

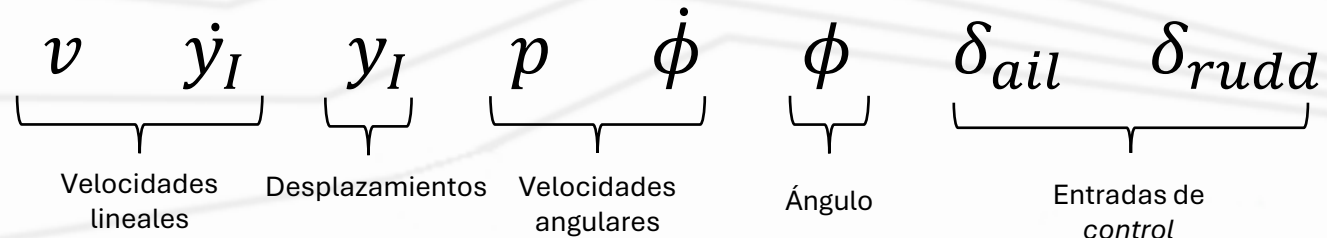
Cómo la dinámica es
aislada, se puede
establecer que:

$$p \approx \dot{\phi}$$

$$\int p dt \approx \phi$$

La dinámica lateral-direccional de la aeronave son aquellos estados
que se manifiestan en el plano $y_B z_B$ del marco del cuerpo.

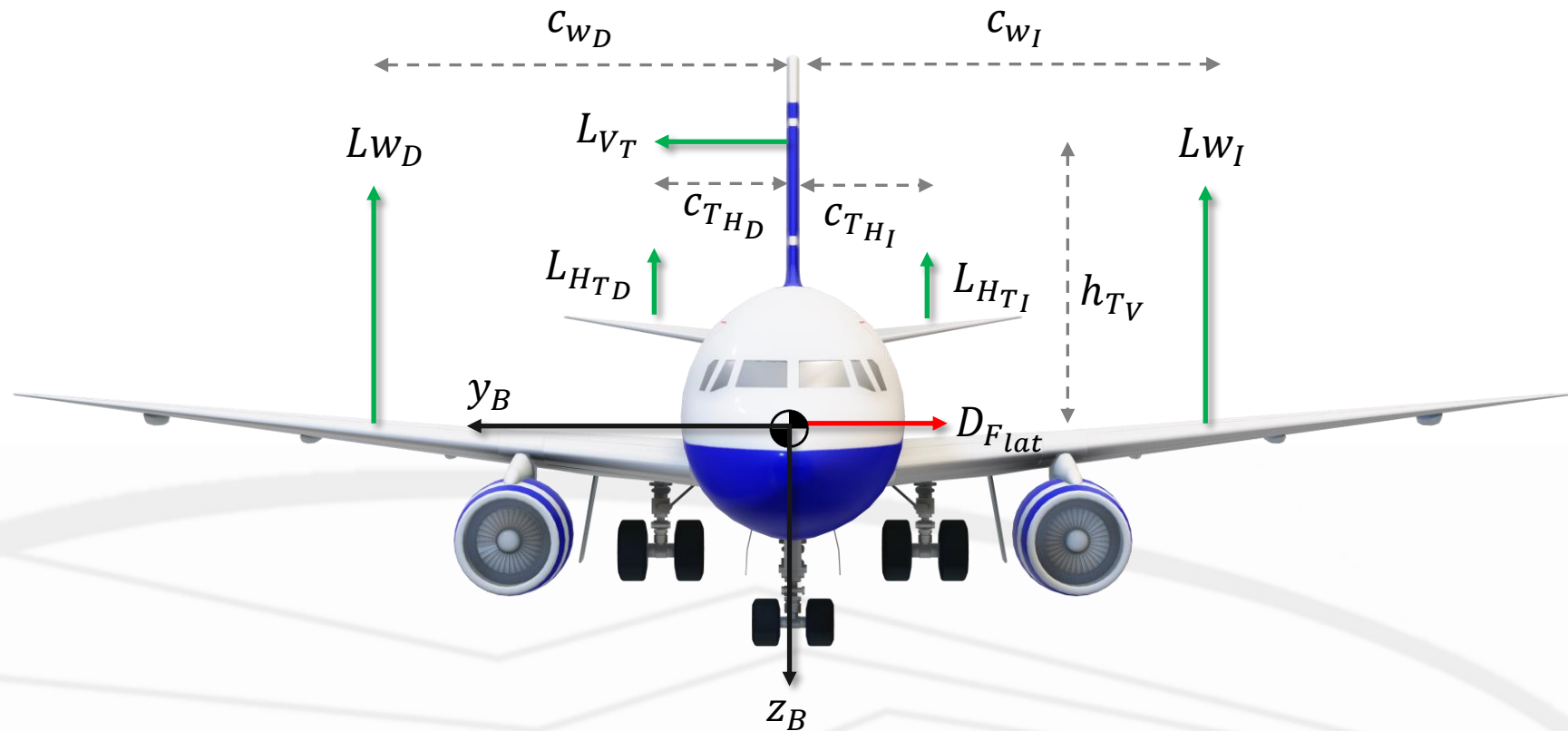
Involucra los siguientes estados:



Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

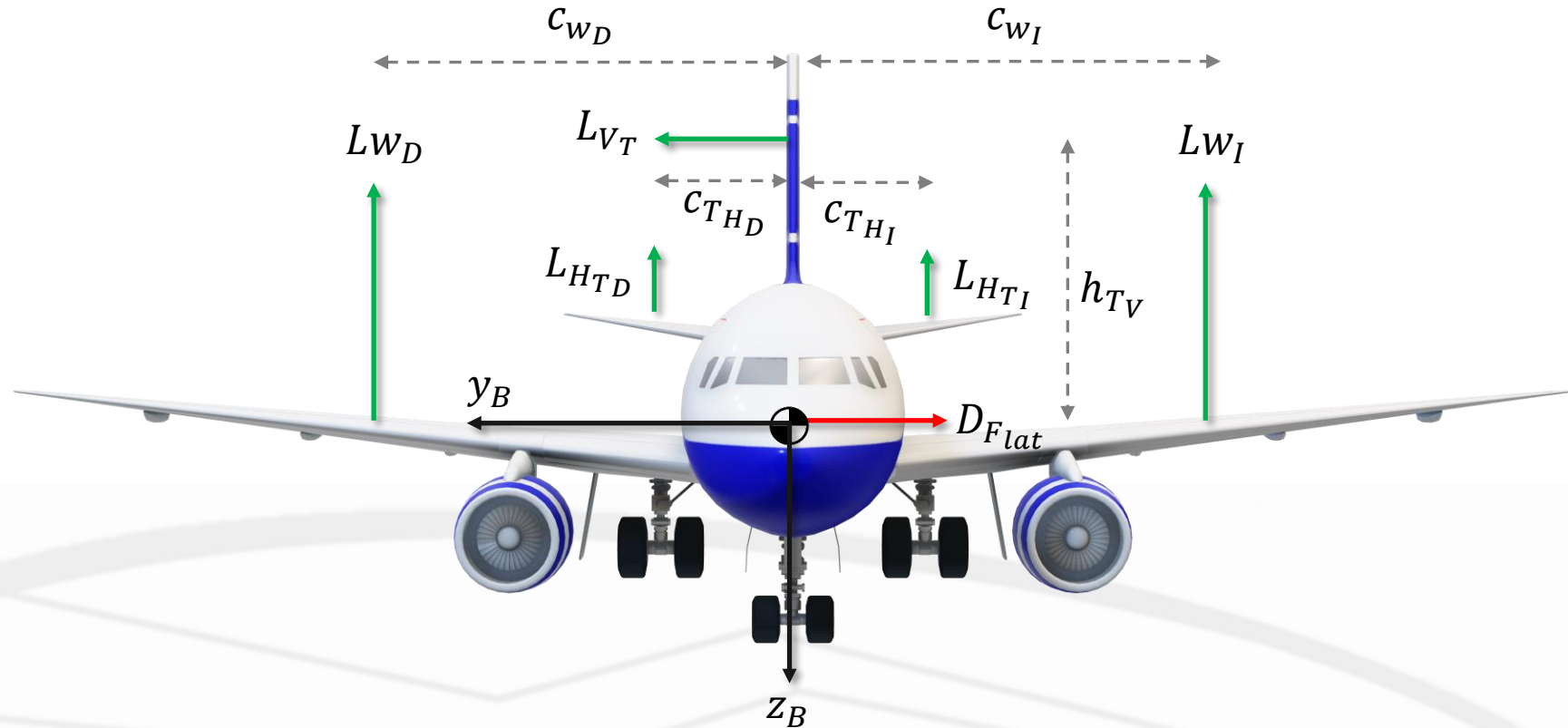
1. Introducción
- 2. Dinámica
aislada**
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
- 2. Dinámica
aislada**
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



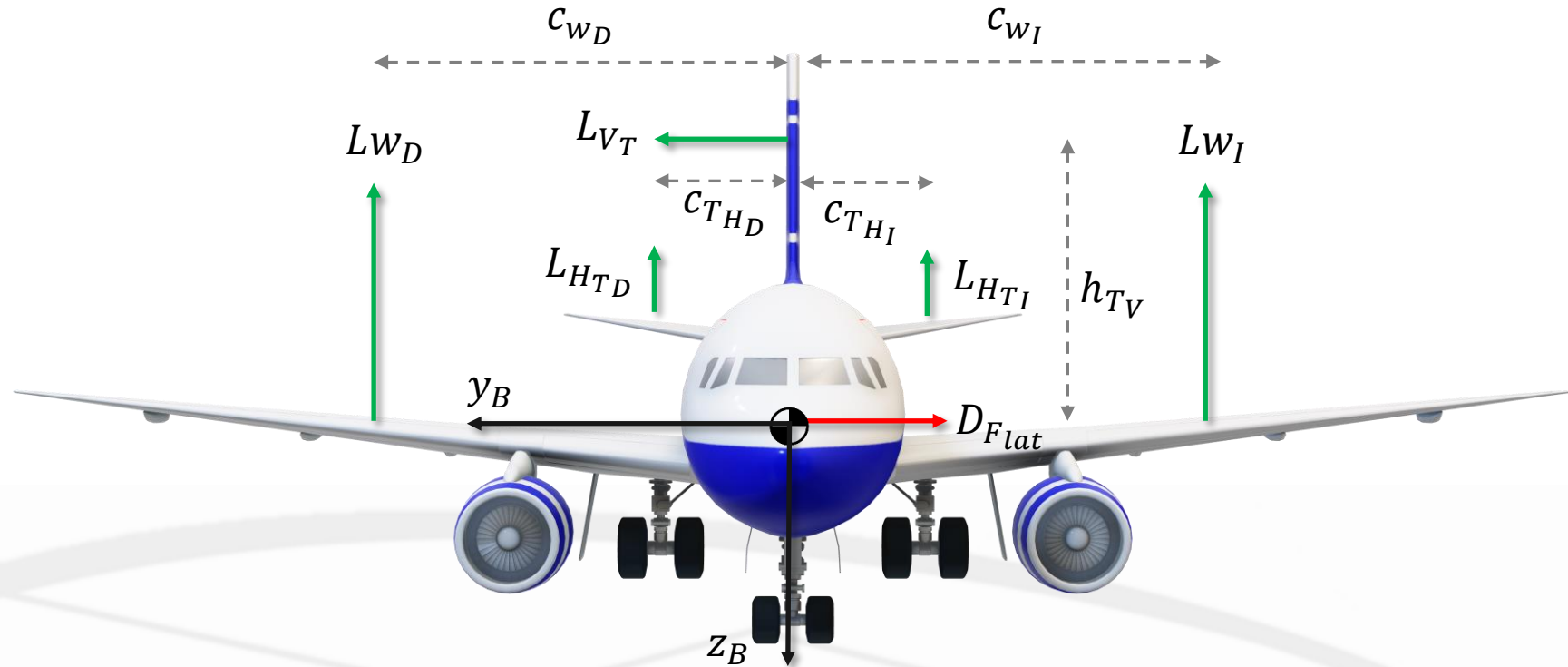
Estableciendo la sumatoria de momentos longitudinales considerando *valor absoluto* de distancias y fuerzas con dirección convencional:

$$\sum \mathcal{L} = L_{W_I} c_{W_I} - L_{W_D} c_{W_D} + L_{H_{T_I}} c_{T_{H_I}} - L_{H_{T_D}} c_{T_{H_D}} + L_{V_T} h_{T_V}$$

Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
- 2. Dinámica
aislada**
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

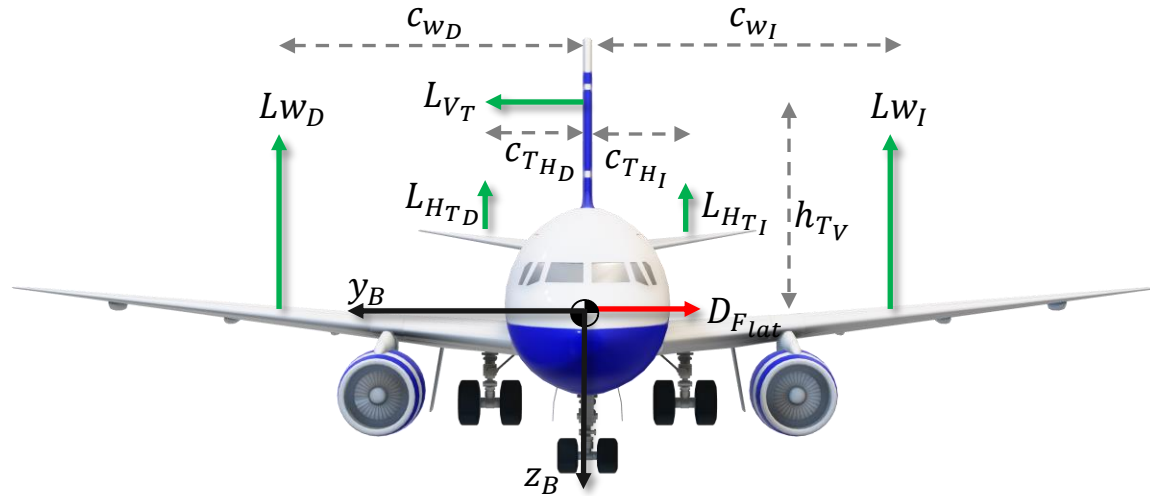


$$\sum \mathcal{L} = \underbrace{L_{WI} c_{WI}}_{\text{Sustentación semi-ala izquierda}} - \underbrace{L_{WD} c_{WD}}_{\text{Sustentación semi-ala derecha}} + \underbrace{L_{HTI} c_{THI}}_{\text{Sustentación semi-estabilizador izquierdo}} - \underbrace{L_{HTD} c_{THD}}_{\text{Sustentación semi-estabilizador derecho}} + \underbrace{L_{VT} h_{TV}}_{\text{Sustentación estabilizador vertical}}$$

Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
- 2. Dinámica
aislada**
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Si se consideran los signos de las distancias, es necesario tomar en cuenta la notación de *producto cruz* para la obtención de los momentos.

$$\hat{M} = \hat{r} \times \hat{F}$$

Ecuación de momentos
vectorial

$$\hat{M} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ d_x & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} d_y F_z - d_z F_y \\ d_z F_x - d_x F_z \\ d_x F_y - d_y F_x \end{bmatrix}$$

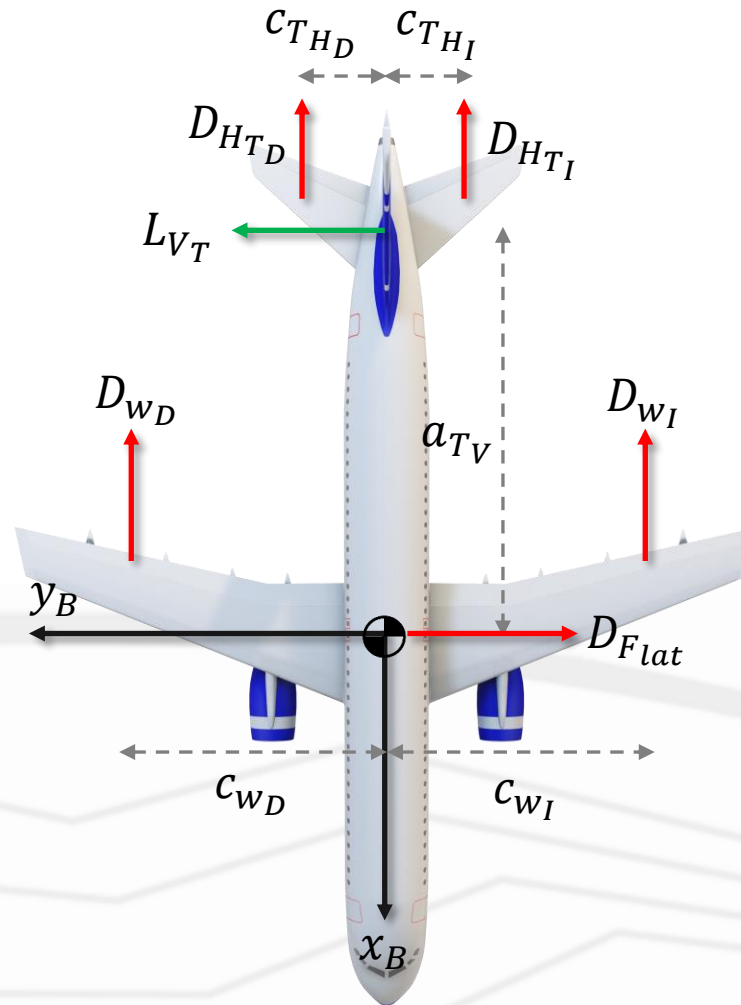
$$\mathcal{L} = d_y F_z - d_z F_y$$

$$\sum \mathcal{L} = [L_{W_I} c_{W_I}] + [L_{W_D} c_{W_D}] + [L_{H_{T_I}} c_{T_{H_I}}] + [L_{H_{T_D}} c_{T_{H_D}}] + [-L_{V_T} h_{T_V}]$$

Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

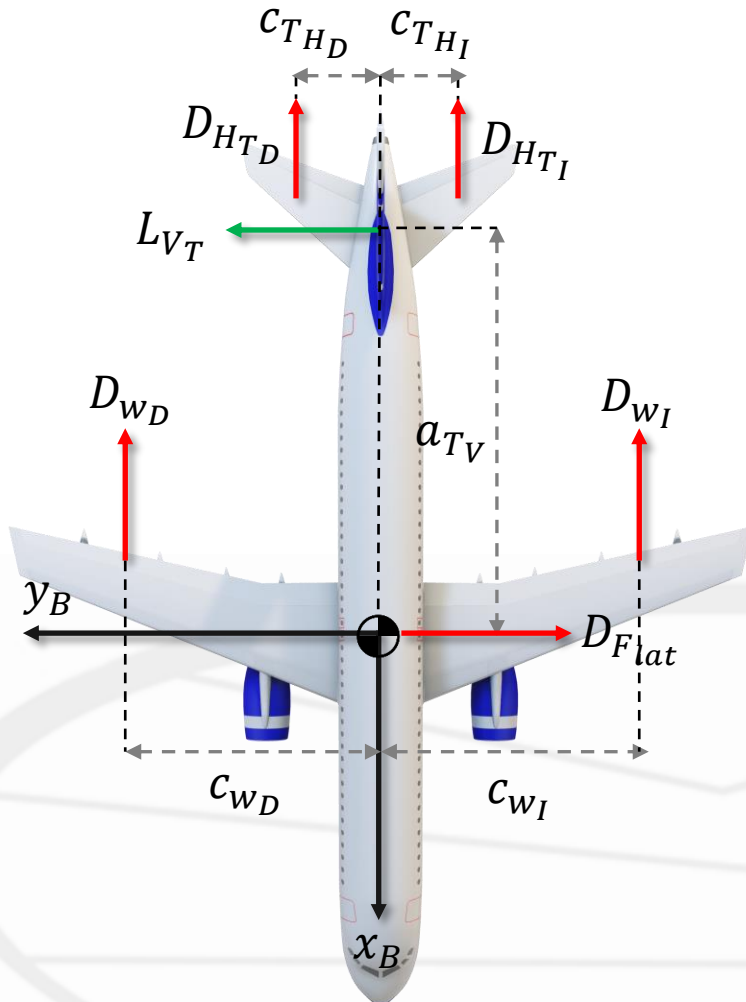
1. Introducción
- 2. Dinámica
aislada**
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
- 2. Dinámica
aislada**
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

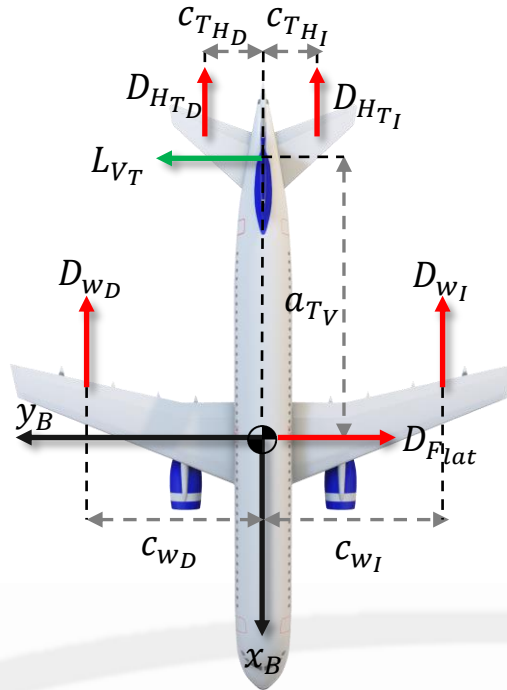


$$\sum \mathcal{N} = \overbrace{D_{wD} c_{wD}}^{\text{Resistencia al avance semi-ala derecha}} - \underbrace{D_{wI} c_{wI}}_{\text{Resistencia al avance semi-ala izquierda}} + \overbrace{D_{HTD} c_{THD}}^{\text{Resistencia al avance semi-estabilizador derecho}} - \underbrace{D_{HTI} c_{THI}}_{\text{Resistencia al avance semi-estabilizador izquierdo}} - \overbrace{L_{VT} a_{TV}}^{\text{Sustentación estabilizador vertical}}$$

Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
- 2. Dinámica
aislada**
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Si se consideran los signos de las distancias, es necesario tomar en cuenta la notación de *producto cruz* para la obtención de los momentos.

$$\hat{M} = \hat{r} \times \hat{F}$$

Ecuación de momentos
vectorial

$$\hat{M} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ d_x & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} d_y F_z - d_z F_y \\ d_z F_x - d_x F_z \\ d_x F_y - d_y F_x \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = d_x F_y - d_y F_x$$

$$\sum \mathcal{N} = [-D_{WD} c_{WD}] + [-D_{WI} c_{WI}] + [-D_{HTD} c_{THD}] + [-D_{HTI} c_{THI}] + [L_{VT} a_{TV}]$$



Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción

2. Dinámica
aislada

3. Efectos
aerodinámicos

4. Estabilidad
estática

5. Estabilidad
dinámica

6. Recapitulación

Recordando las ecuaciones de la dinámica de traslación y orientación en el marco del cuerpo

**Dinámica de
posición MRC**

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{I \leftarrow B}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + R_{B \leftarrow W} \begin{bmatrix} \frac{F_{Ax}}{m} \\ \frac{F_{Ay}}{m} \\ \frac{F_{Az}}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix}$$

**Dinámica de
orientación MRC**

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right)$$

Simplificando para la dinámica lateral-direccional; esto es, considerando el resto de estados como cero:

$$m\dot{v} = F_{y_B} + mg \sin \phi - mru$$

$$J_{xx} \dot{p} = \mathcal{L}$$

$$J_{zz} \dot{r} = \mathcal{N}$$

Dinámica Lateral-Direccional Aislada



Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción

2. Dinámica
aislada

3. Efectos

aerodinámicos

4. Estabilidad

estática

5. Estabilidad

dinámica

6. Recapitulación

$$m\dot{v} = F_{y_B} + mg \sin \phi - mru$$

$$J_{xx} \dot{p} = \mathcal{L}$$

$$J_{zz} \dot{r} = \mathcal{N}$$

Dinámica Lateral-Direccional Aislada

Es posible linealizar algunos términos por medio de la *aproximación de ángulo pequeño* como:

$$m\dot{v} = F_{y_B} + mg\phi - mru \}$$

Esto **no** puede considerarse un sistema lineal aún dado que tiene *interdependencia de estados*, por lo que no cumple con el *principio de superposición*.

Esto significa que es necesario *establecer un punto de operación* y linealizar de manera analítica.



Dinámica de navegación y orientación

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción

2. **Dinámica
aislada**

3. Efectos
aerodinámicos

4. Estabilidad
estática

5. Estabilidad
dinámica

6. Recapitulación

Considerando un sistema lineal para la dinámica lateral-direccional,
dependiendo de coeficientes tal que:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & Y_r & Y_\phi \\ L_v & L_p & L_r & L_\phi \\ N_v & N_p & N_r & N_\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta_{ail}} & Y_{\delta_{rudd}} \\ L_{\delta_{ail}} & L_{\delta_{rudd}} \\ N_{\delta_{ail}} & N_{\delta_{rudd}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ail} \\ \delta_{rudd} \end{bmatrix}$$

Es posible expandir para obtener:

$$\dot{v} = Y_v v + Y_p p + Y_r r + Y_\phi \phi + Y_{\delta_{ail}} \delta_{ail} + Y_{\delta_{rudd}} \delta_{ail}$$

$$\dot{p} = L_v v + L_p p + L_r r + L_\phi \phi + L_{\delta_{ail}} \delta_{ail} + L_{\delta_{rudd}} \delta_{ail}$$

$$\dot{r} = N_v v + N_p p + N_r r + N_\phi \phi + N_{\delta_{ail}} \delta_{ail} + N_{\delta_{rudd}} \delta_{ail}$$

Lo que es comparable a:

$$\dot{v} = \frac{F_{yB}}{m} + g\phi - ru$$

$$\dot{p} = \frac{\mathcal{L}}{J_{xx}}$$

$$\dot{r} = \frac{\mathcal{N}}{J_{zz}}$$



UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
NUEVO LEÓN



FACULTAD DE
INGENIERÍA MECÁNICA
Y ELÉCTRICA

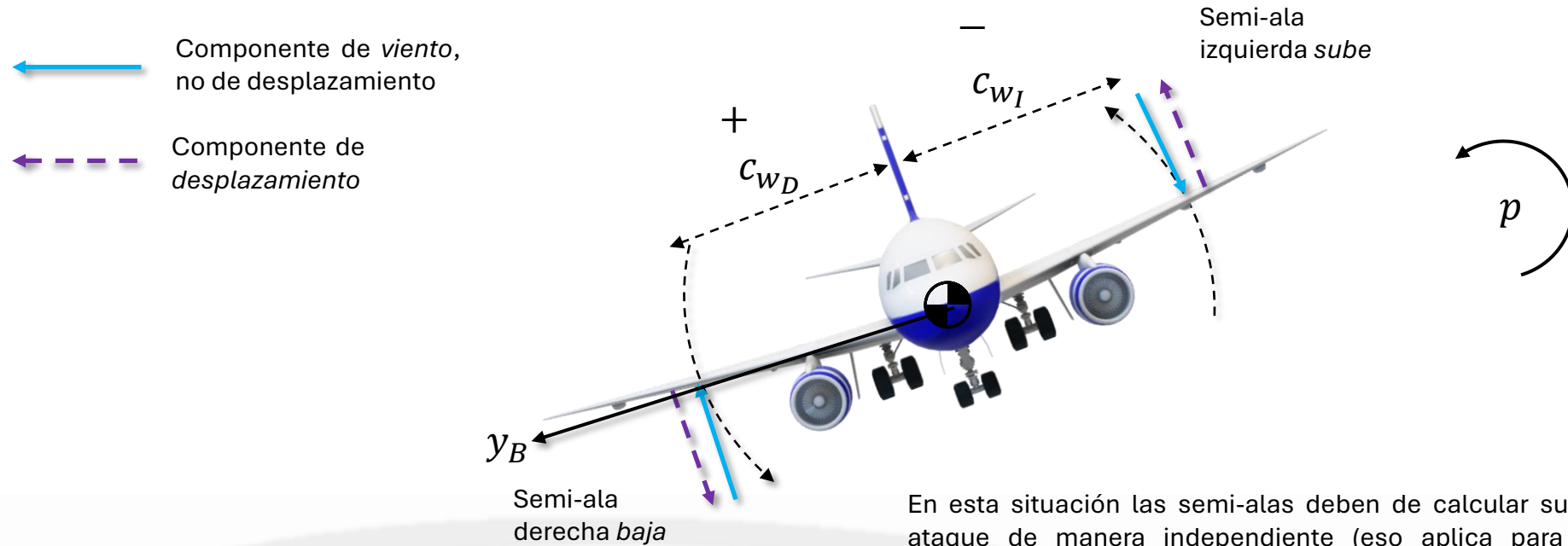
Efectos aerodinámicos en la dinámica lateral-direccional



Efectos del ángulo de ataque en giros

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



En esta situación las semi-alas deben de calcular su ángulo de ataque de manera independiente (eso aplica para los semi-estabilizadores horizontales)

$ c_{wD} $ $ c_{wI} $	$+c_{wD}$ $-c_{wI}$
$w_{pD} = c_{wD}p$	$w_{pD} = (c_{wD}p)$
$w_{pI} = -c_{wI}p$	$w_{pI} = (c_{wI}p)$

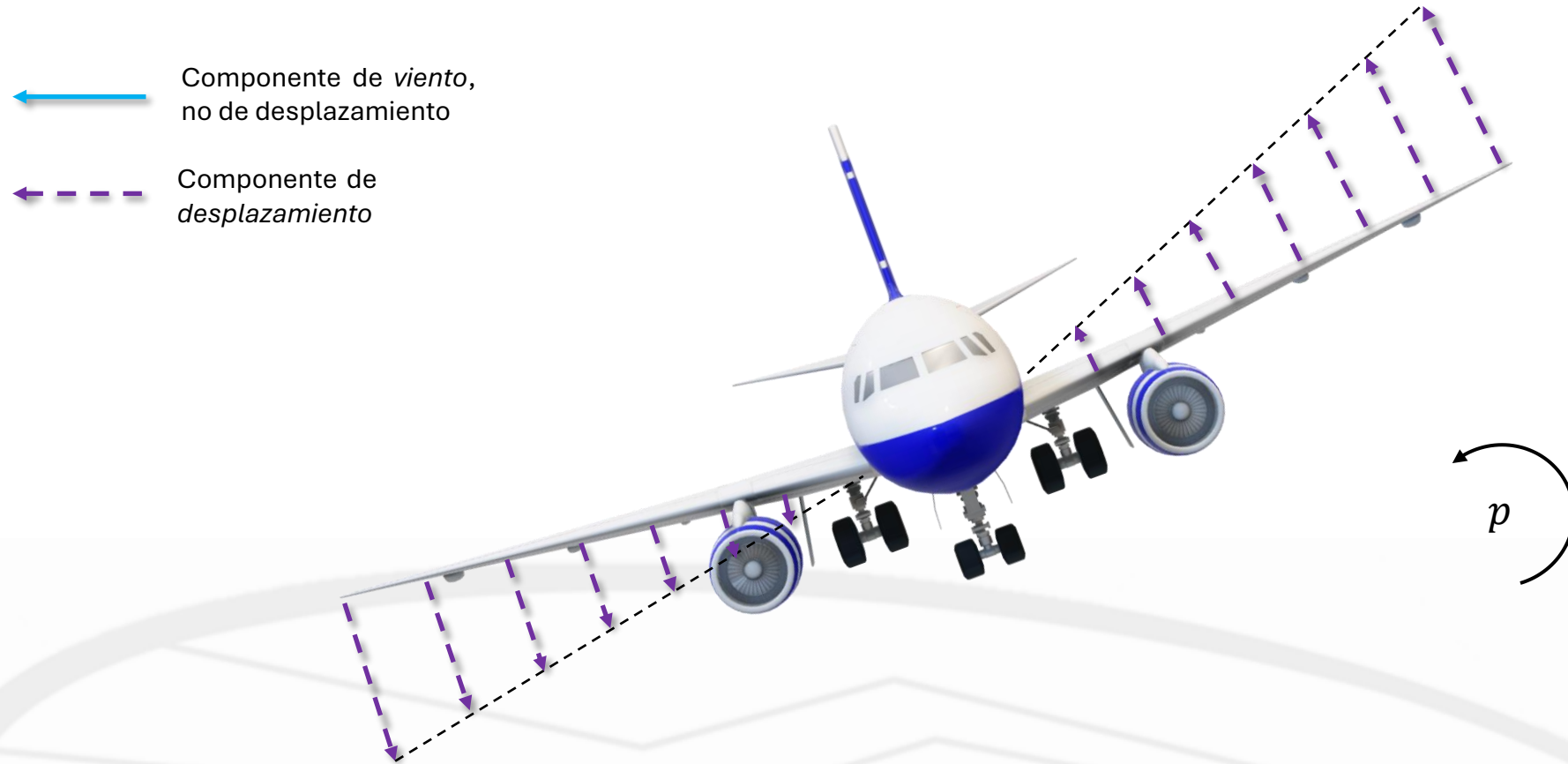
$$\alpha_{wI} = \text{atan} \left(\frac{w + w_{qw} + w_{pI}}{u \dots} \right)$$

$$\alpha_{wD} = \text{atan} \left(\frac{w + w_{qw} + w_{pD}}{u \dots} \right)$$

Efectos del ángulo de ataque en giros

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Resulta necesario mencionar que en el movimiento en p la distribución de velocidades no es *igual* a lo largo de la semi-envergadura; esta varía de manera lineal, al ir decrementando la distancia. Esto lleva a que se realice lo siguiente:

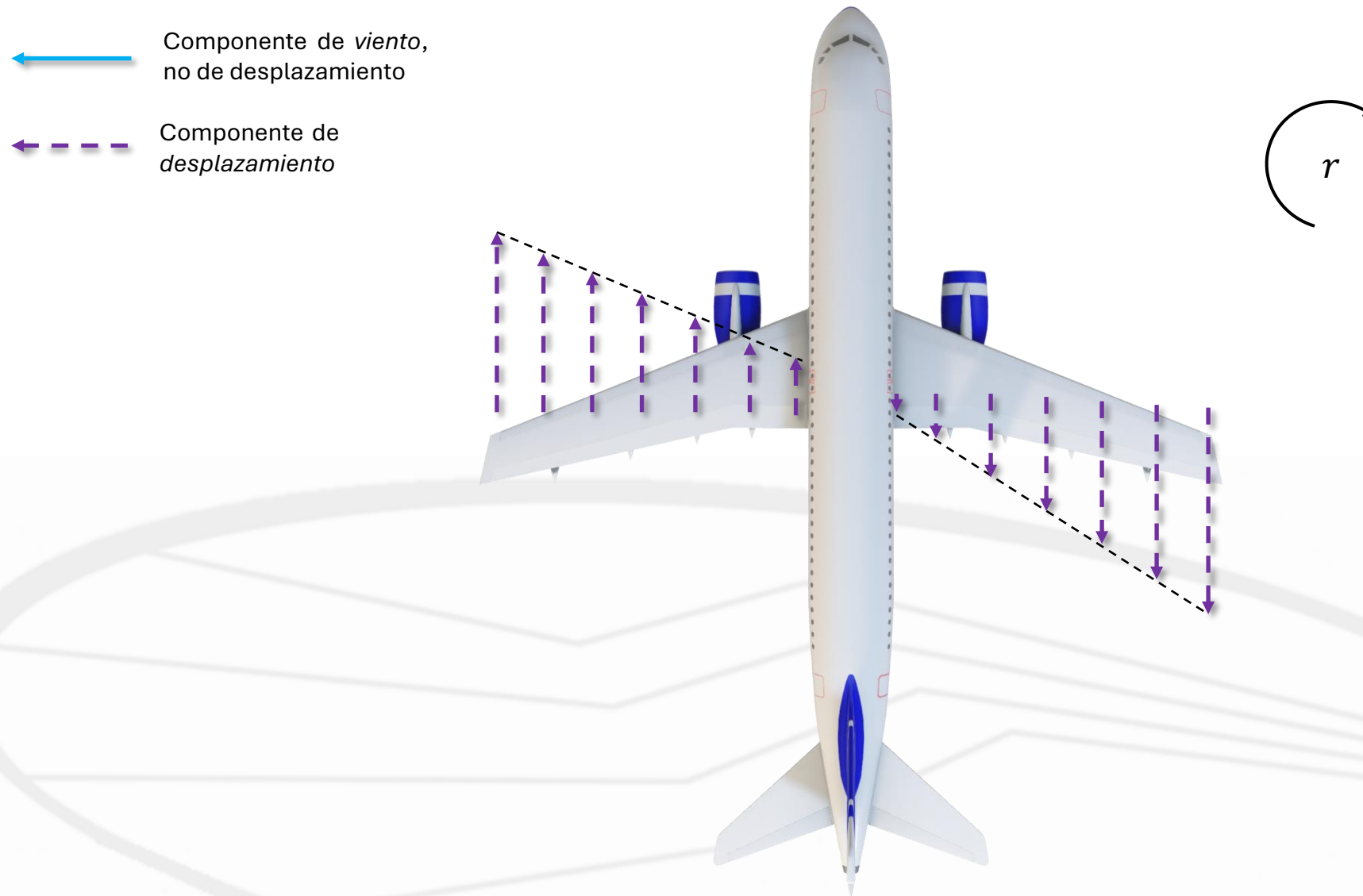
- Segmentar la semi-ala y calcular componentes locales.
- Buscar una resultante de acuerdo con la ubicación de la *resultante de fuerza*.
- Realizar la integración continua en la ecuación de sustentación.



Efectos del ángulo de ataque en giros

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
- 3. Efectos
aerodinámicos**
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Efectos del ángulo de ataque en giros

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

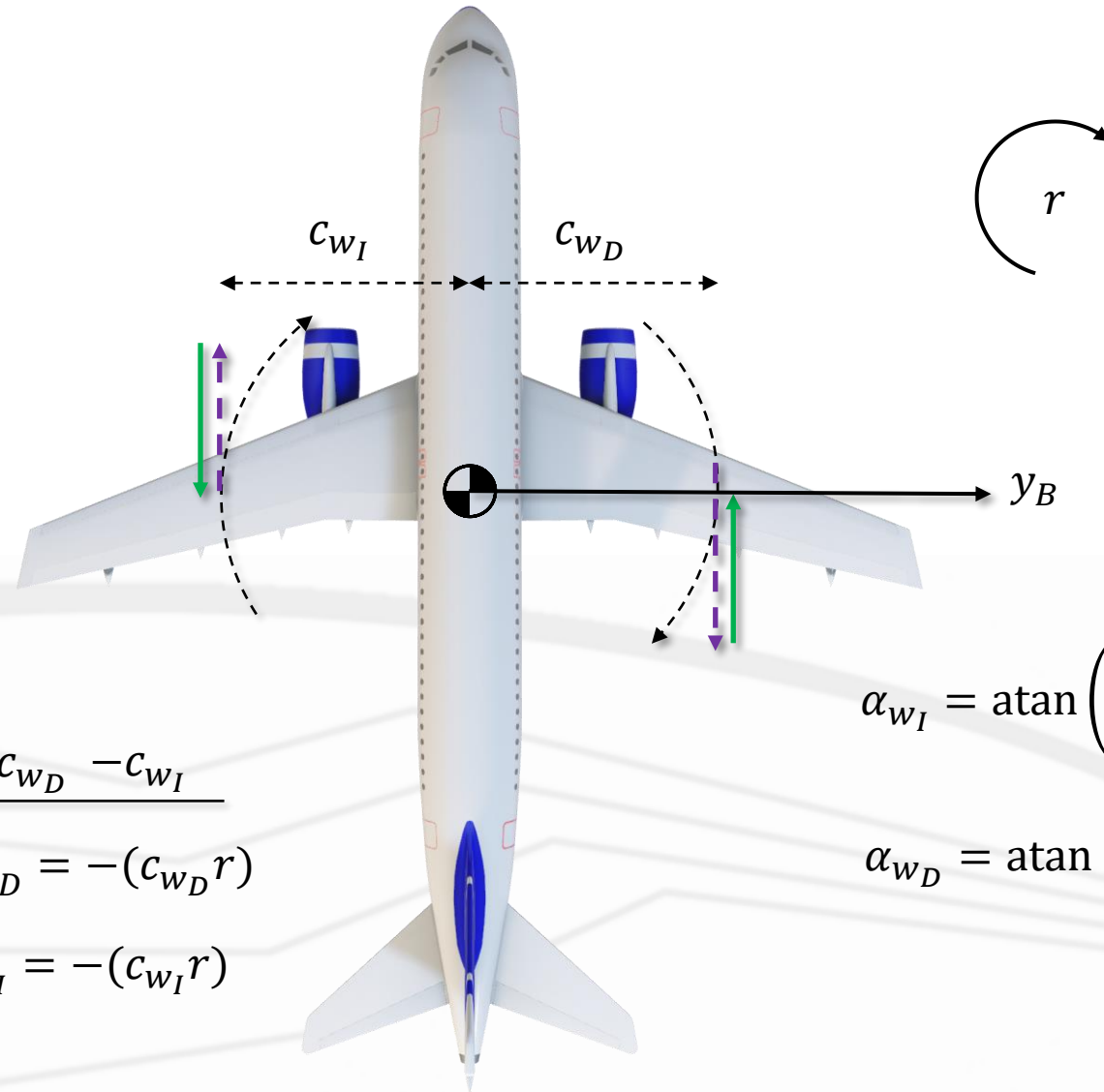
1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

← Componente de *viento*,
no de desplazamiento

← Componente de
desplazamiento

La *distancia* a la
resultante de fuerza es la
misma que para p , dado
que es el mismo punto de
aplicación.

$ c_{w_D} $	$ c_{w_I} $	$+c_{w_D}$	$-c_{w_I}$
$u_{r_D} = -c_{w_D}r$		$u_{r_D} = -(c_{w_D}r)$	
	$u_{r_I} = c_{w_I}r$		$u_{r_I} = -(c_{w_I}r)$

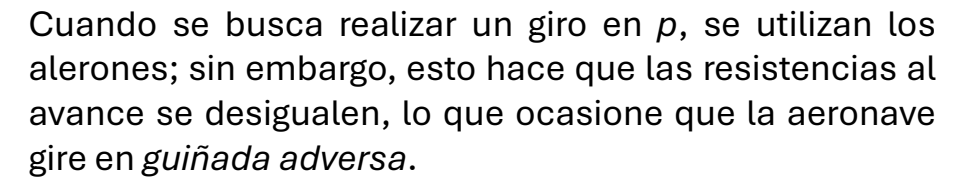


$$\alpha_{w_I} = \text{atan} \left(\frac{w + w_{q_w} + w_{p_I}}{u + u_{r_I}} \right)$$

$$\alpha_{w_D} = \text{atan} \left(\frac{w + w_{q_w} + w_{p_D}}{u + u_{r_D}} \right)$$



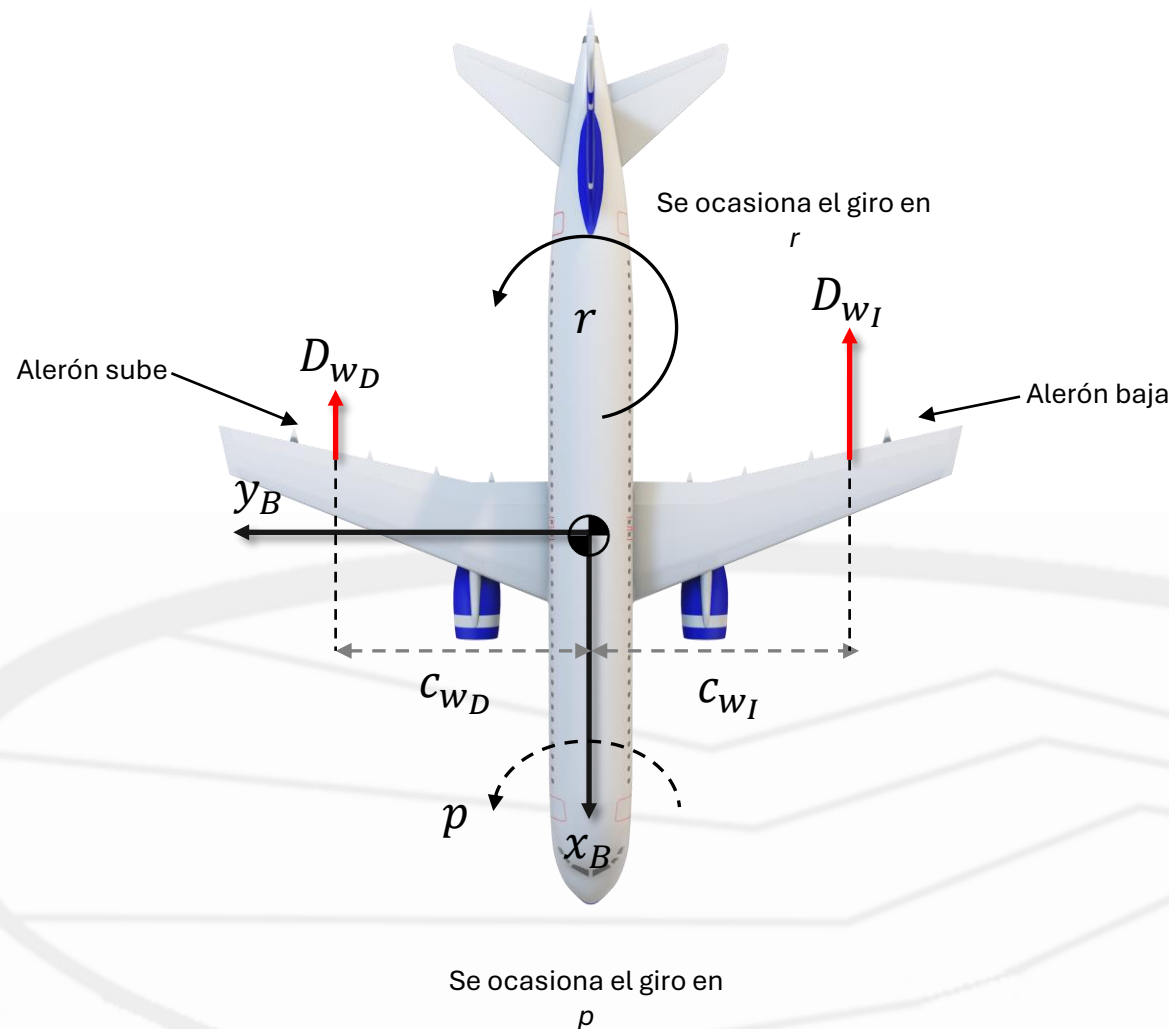
1. Introducción
2. Dinámica
aislada
- 3. Efectos
aerodinámicos**
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Guiñada adversa

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
- 3. Efectos
aerodinámicos**
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Cuando se busca realizar un giro en p , se utilizan los alerones; sin embargo, esto hace que las resistencias al avance se desigüen, lo que ocasione que la aeronave gire en *guiñada adversa*.

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_{ind}}$$

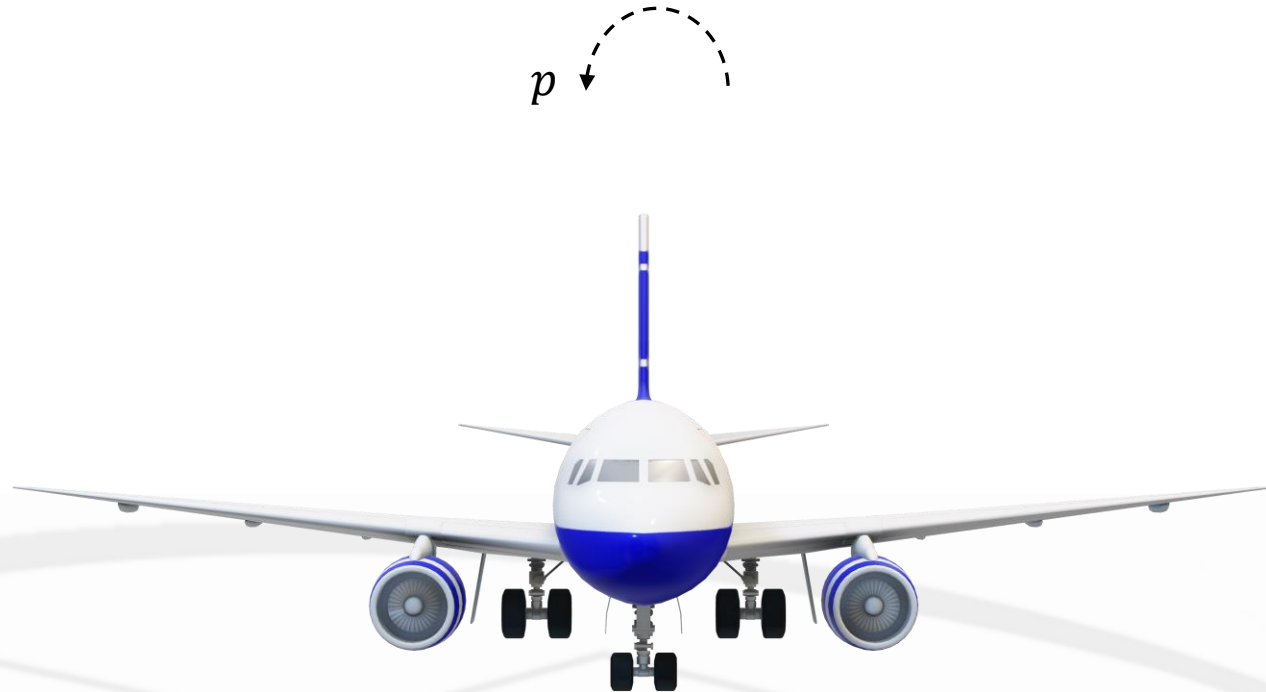
$$C_{D_{ind}} = \frac{C_L^2}{\pi A Re}$$



Guiñada adversa

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
- 3. Efectos
aerodinámicos**
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

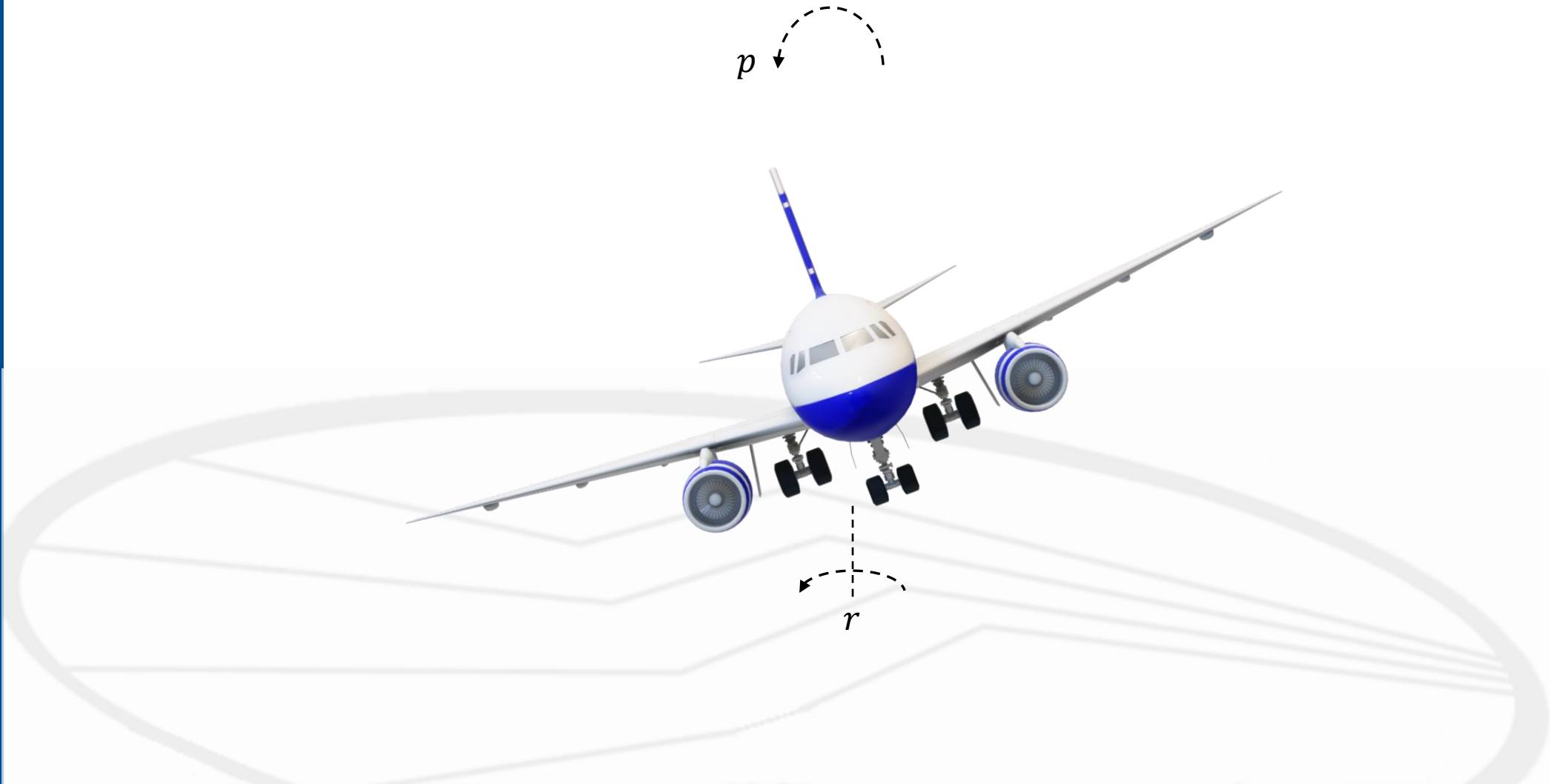




Guiñada adversa

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
- 3. Efectos
aerodinámicos**
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación





Guiñada adversa

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
- 3. Efectos
aerodinámicos**
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



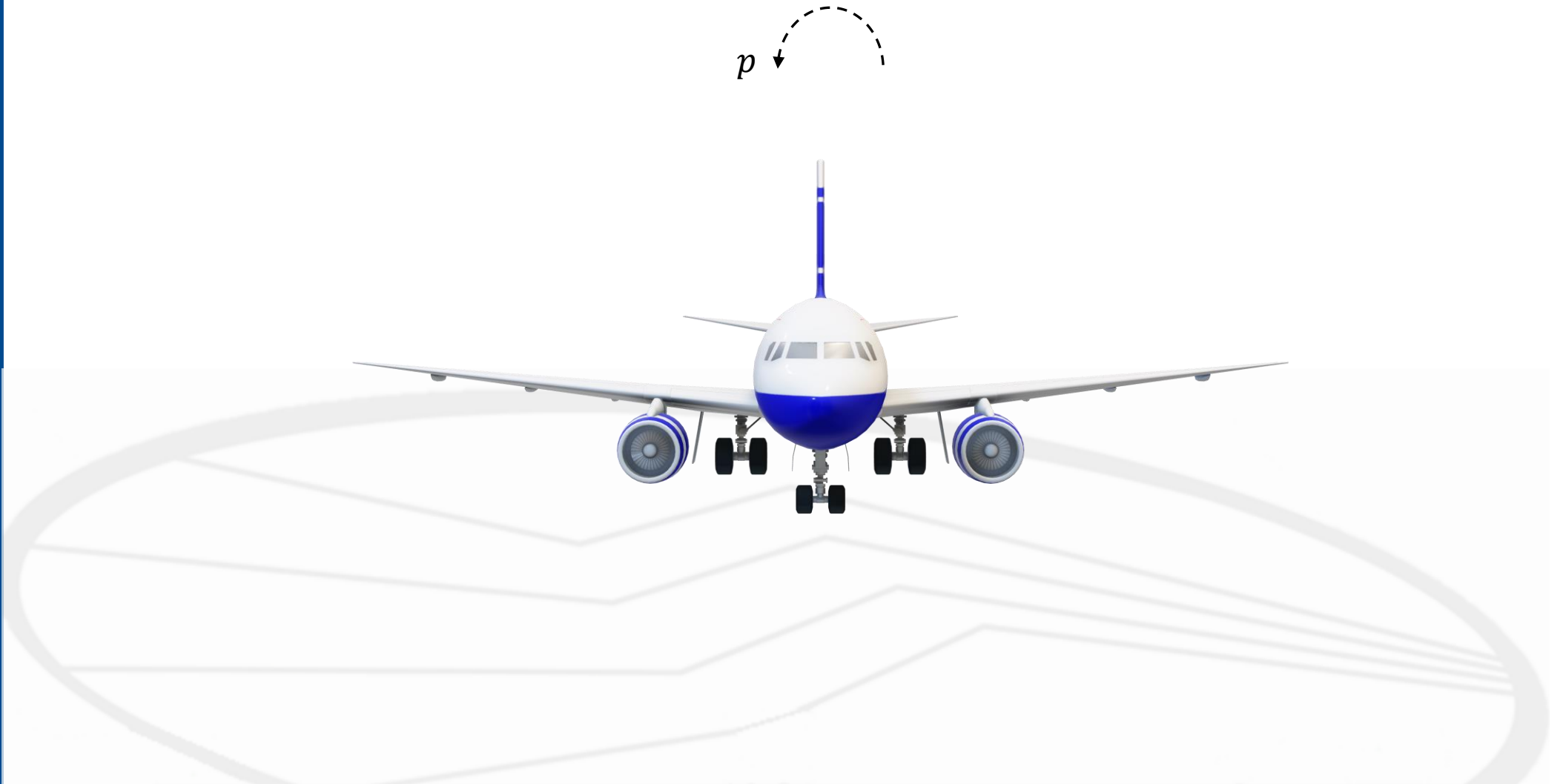
Sin un estabilizador vertical adecuado, la aeronave *no podrá* cambiar de dirección



Guiñada adversa

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
- 3. Efectos
aerodinámicos**
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

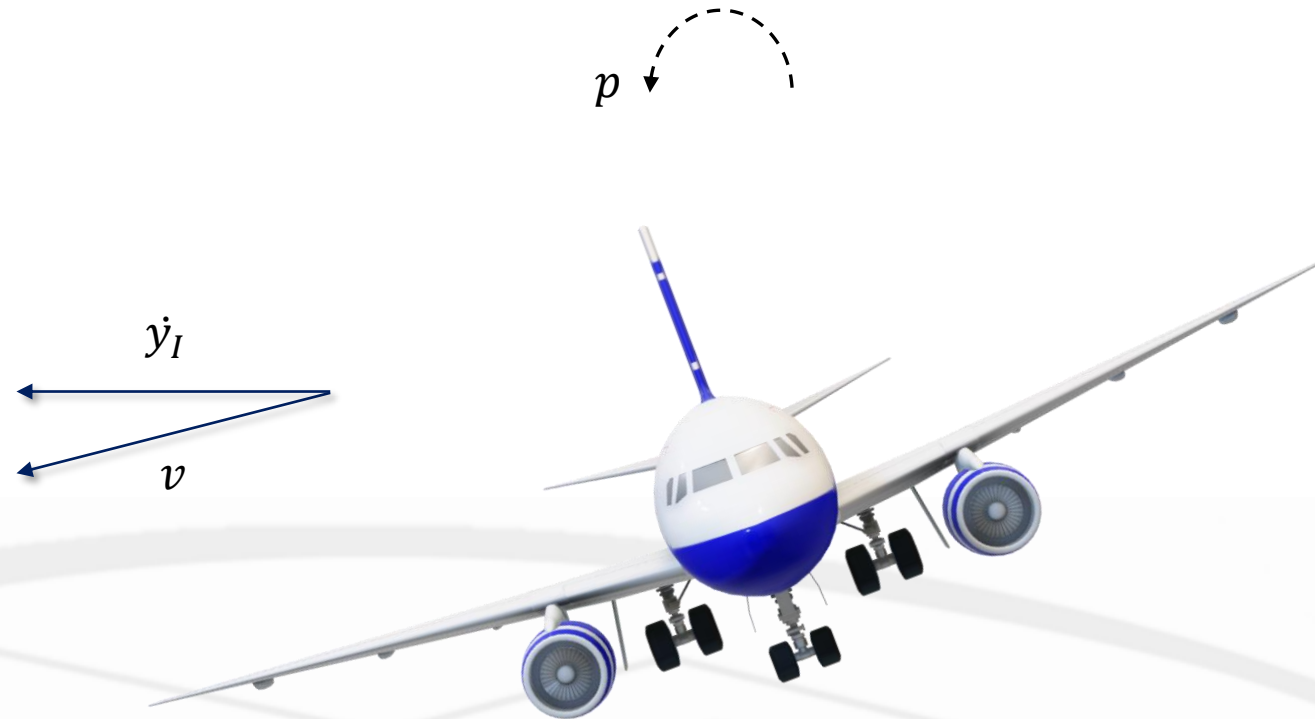




Guiñada adversa

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
- 3. Efectos
aerodinámicos**
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

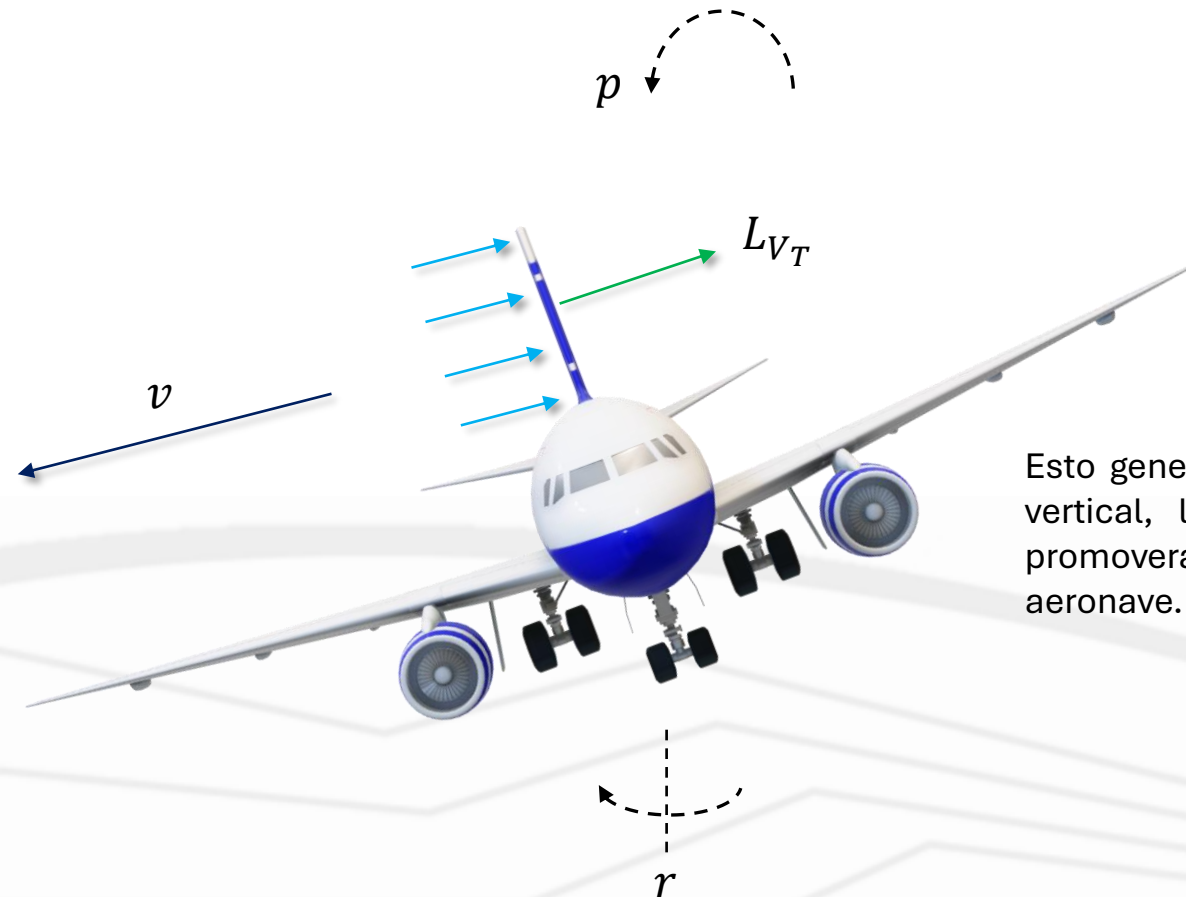


En una maniobra de giro en p , al cambiar el ángulo ϕ , se inducirá una velocidad v que afectará el estabilizador vertical.

Guiñada adversa

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
- 3. Efectos
aerodinámicos**
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Esto generará flujo lateral sobre el estabilizador vertical, lo que ocasionará sustentación que promoverá la *guiñada* en el sentido de giro de la aeronave.

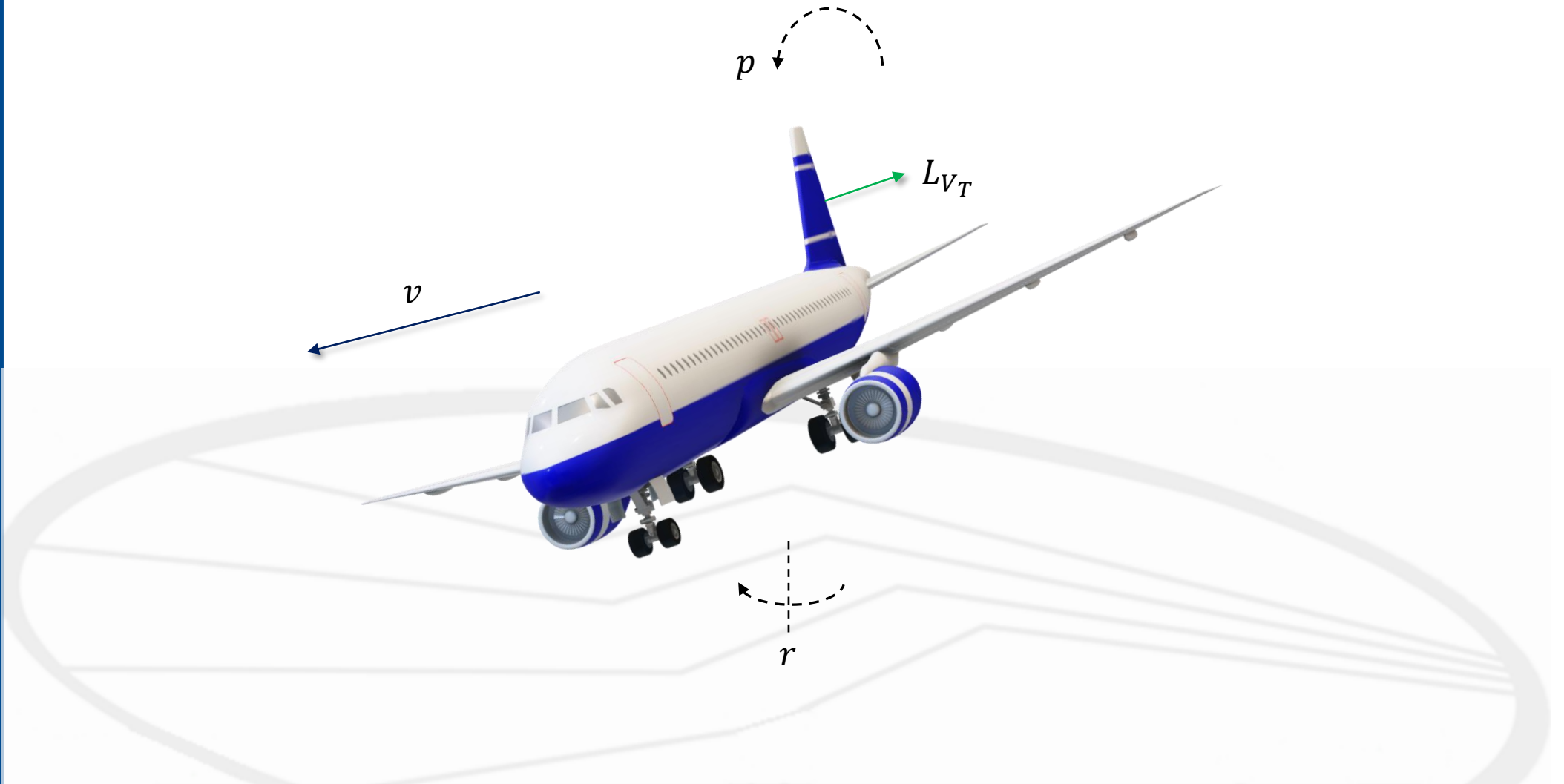
En una maniobra de giro en p , al cambiar el ángulo ϕ , se inducirá una velocidad v que afectará el estabilizador vertical.



Guiñada adversa

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
- 3. Efectos
aerodinámicos**
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación





UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
NUEVO LEÓN



FACULTAD DE
INGENIERÍA MECÁNICA
Y ELÉCTRICA

Estabilidad estática





Derivada de estabilidad

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
- 4. Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

	Derivadas de estabilidad de momento lateral	Derivadas de estabilidad de momento direccional	Derivadas de estabilidad aerodinámicas lateral- direccionales	
	$C_{l\beta}$	$C_{N\beta}$	$C_{Y\beta}$	Dependientes del ángulo de derrape
Derivadas de amortiguamiento lateral	C_{lp}	C_{Np}	C_{Yp}	Dependientes de la velocidad angular p
Derivadas de amortiguamiento direccional	C_{lr}	C_{Nr}	C_{Yr}	Dependientes de la velocidad angular r
Derivadas de control lateral	$C_{l\delta_a}$	$C_{N\delta_a}$	$C_{Y\delta_a}$	Dependientes de la deflexión de aleroses
Derivadas de control direccional	$C_{l\delta_r}$	$C_{N\delta_r}$	$C_{Y\delta_r}$	Dependientes de la deflexión del timón

Derivada de momento lateral

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

$$\sum \mathcal{L} = [L_{w_I} c_{w_I}] + [L_{w_D} c_{w_D}] + [L_{H_{T_I}} c_{T_{H_I}}] + [L_{H_{T_D}} c_{T_{H_D}}] + [-L_{V_T} h_{T_V}]$$

Considerando la **convención de signos en las distancias**, y **AFECTANDO EL SIGNO DE LA SUSTENTACIÓN**:

$$\mathcal{L} = -L_{w_I} c_{w_I} - L_{w_D} c_{w_D} - L_{H_{T_I}} c_{T_{H_I}} - L_{H_{T_D}} c_{T_{H_D}} + L_{V_T} h_{T_V}$$

Suponiendo que el movimiento de la resultante de *sustentación* a lo largo de la envergadura es pequeño:

$$c_{w_I} = -c_{w_D}$$

$$c_{T_{H_I}} = -c_{T_{H_D}}$$

$$\mathcal{L} = (-L_{w_D}(\beta_{w_D}, \alpha_{w_D}) + L_{w_I}(\beta_{w_I}, \alpha_{w_I}))c_w + (-L_{H_{T_D}}(\beta_{T_{H_D}}, \alpha_{T_{H_D}}) + L_{H_{T_I}}(\beta_{T_{H_I}}, \alpha_{T_{H_I}}))c_{T_H} + L_{V_T}(\beta_{T_V})h_{T_V}$$

Recordando los efectos del *ángulo diedro*:

$$w_{\beta_D} = v \sin \Gamma \longrightarrow w_{\beta_D} \approx v\Gamma$$

$$w_{\beta_I} = -v \sin \Gamma \longrightarrow w_{\beta_I} \approx -v\Gamma$$

$$\alpha_{w_D} = \text{atan}\left(\frac{v\Gamma}{u}\right) \longrightarrow \alpha_{w_D} \approx \left(\frac{v\Gamma}{u}\right)$$

$$\alpha_{w_I} = \text{atan}\left(\frac{-v\Gamma}{u}\right) \longrightarrow \alpha_{w_I} \approx \left(\frac{-v\Gamma}{u}\right)$$



$$\beta = \text{atan}\left(\frac{v}{u}\right)$$

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. **Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Repetición

Derivada de momento lateral

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. **Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

$$\mathcal{L} = (-L_{w_D}(\beta_{w_D}, \alpha_{w_D}) + L_{w_I}(\beta_{w_I}, \alpha_{w_I}))c_w + (-L_{H_{T_D}}(\beta_{T_{H_D}}, \alpha_{T_{H_D}}) + L_{H_{T_I}}(\beta_{T_{H_I}}, \alpha_{T_{H_I}}))c_{T_H} + L_{V_T}(\beta_{T_V})h_{T_V}$$

Reescribiendo para el ángulo de derrape:

$$\beta = \text{atan}\left(\frac{v}{u}\right) \longrightarrow \beta \approx \frac{v}{u} \longrightarrow v = u\beta$$

$$\alpha_{w_D} \approx \beta\Gamma \quad \left| \quad \alpha_{w_I} \approx -\beta\Gamma$$

Considerando que el estabilizador horizontal tiene un efecto menor en esta dinámica:

$$\mathcal{L} = (-L_{w_D}(\alpha_{w_D}) + L_{w_I}(\alpha_{w_I}))c_w + L_{V_T}(\beta_{T_V})h_{T_V}$$

Recordando que la *superficie alar* corresponde para ambas semi-alas:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\rho V^2 S_w (C_{l_\alpha} \alpha_{w_D} + C_{l_0})c_w + \frac{1}{4}\rho V^2 S_w (C_{l_\alpha} \alpha_{w_I} + C_{l_0})c_w + \frac{1}{2}\rho V^2 S_{T_V} (C_{l_{\alpha_{T_V}}} \beta)h_{T_V}$$

Simplificando con presión dinámica:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}q_{dyn} S_w (C_{l_\alpha} \alpha_{w_D} + C_{l_0})c_w + \frac{1}{2}q_{dyn} S_w (C_{l_\alpha} \alpha_{w_I} + C_{l_0})c_w + q_{dyn} S_{T_V} (C_{l_{\alpha_{T_V}}} \beta)h_{T_V}$$





Derivada de momento lateral

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
- 4. Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

$$w_{\beta_D} \approx v\Gamma$$

$$w_{\beta_I} \approx -v\Gamma$$

$$\alpha_{w_D} \approx \left(\frac{v\Gamma}{u}\right)$$

$$\alpha_{w_I} \approx \left(\frac{-v\Gamma}{u}\right)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}q_{dyn}S_w(C_{l_\alpha}\alpha_{w_D} + C_{l_0})c_w + \frac{1}{2}q_{dyn}S_w(C_{l_\alpha}\alpha_{w_I} + C_{l_0})c_w + q_{dyn}S_{TV}(C_{l_{\alpha_{TV}}}\beta)h_{TV}$$

Afectando términos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}q_{dyn}S_w(C_{l_\alpha}\beta\Gamma + C_{l_0})c_w + \frac{1}{2}q_{dyn}S_w(-C_{l_\alpha}\beta\Gamma + C_{l_0})c_w + q_{dyn}S_{TV}(C_{l_{\alpha_{TV}}}\beta)h_{TV}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}q_{dyn}S_wC_{l_\alpha}\beta\Gamma c_w - \frac{1}{2}q_{dyn}S_wC_{l_0}c_w - \frac{1}{2}q_{dyn}S_wC_{l_\alpha}\beta\Gamma c_w + \frac{1}{2}q_{dyn}S_wC_{l_0}c_w + q_{dyn}S_{TV}C_{l_{\alpha_{TV}}}\beta h_{TV}$$

Simplificando

$$\mathcal{L} = -q_{dyn}S_wC_{l_\alpha}\beta\Gamma c_w + q_{dyn}S_{TV}C_{l_{\alpha_{TV}}}\beta h_{TV}$$

Reordenando términos:

$$\mathcal{L} = q_{dyn}(-S_wC_{l_\alpha}\Gamma c_w + S_{TV}C_{l_{\alpha_{TV}}}h_{TV})\beta$$

$$C_{l_{mom}} = q_{dyn}(-S_wC_{l_\alpha}\Gamma c_w + S_{TV}C_{l_{\alpha_{TV}}}h_{TV})$$

Reescribiendo utilizando las constantes
definidas:

$$\mathcal{L} = C_{l_{mom}}\beta$$



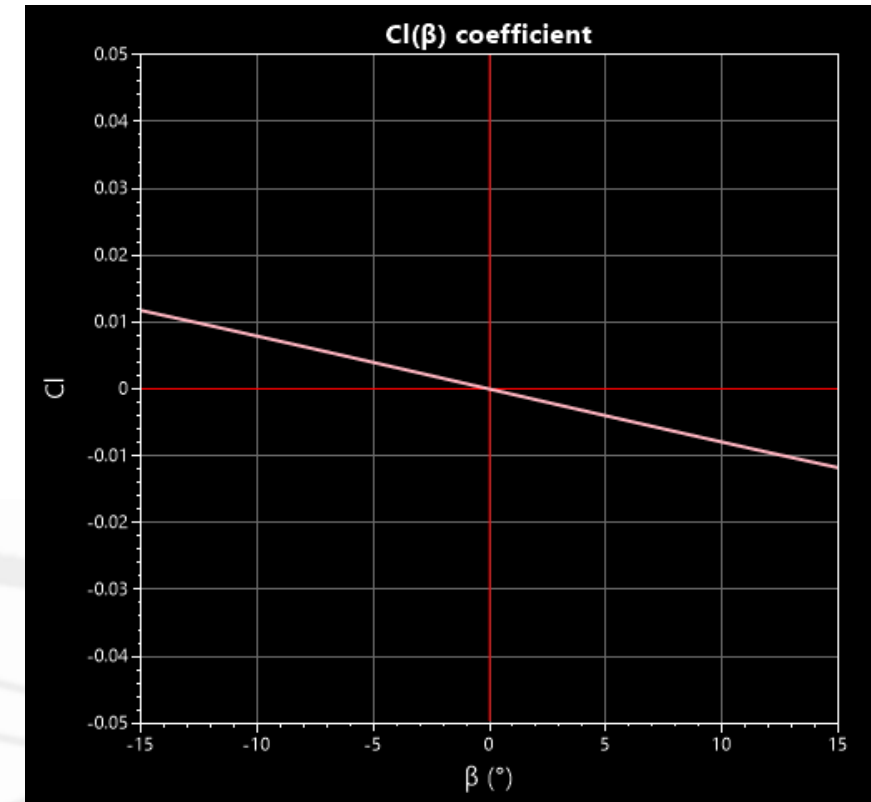
Derivada de momento lateral

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
- 4. Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

El cambio del momento *lateral* se puede aproximar como un cambio lineal. Este comportamiento es *simétrico*, dado que se manifiesta en uno de los ejes de *simetría* de la aeronave.

$$\mathcal{L} = C_{l_{mom}} \beta$$



Esta gráfica corresponde al **coeficiente**.
¿Cómo se obtiene?



Derivada de momento lateral

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
- 4. Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

Para poder *comparar* el comportamiento entre diversas aeronaves, usualmente se considera la ecuación con una estructura de coeficiente referenciada a la superficie alar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_w b_w C_l$$

Considerando la ecuación con estructura lineal:

$$\mathcal{L} = C_{l_{mom}} \beta$$

Igualando términos y simplificando:

$$C_{l_{mom}} \beta = q_{dyn} S_w b_w C_l$$

Sustituyendo términos constantes:

$$C_{l_{mom}} = q_{dyn} (-S_w C_{l_\alpha} \Gamma c_w + S_{TV} C_{l_{\alpha TV}} h_{TV})$$
$$C_l = \frac{q_{dyn} (-S_w C_{l_\alpha} \Gamma c_w + S_{TV} C_{l_{\alpha TV}} h_{TV})}{q_{dyn} S_w b_w} \beta$$



Derivada de momento lateral

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
- 4. Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

$$C_l = \frac{q_{dyn} (-S_w C_{l_\alpha} \Gamma c_w + S_{TV} C_{l_{\alpha_{TV}}} h_{TV})}{q_{dyn} S_w b_w} \beta$$

Simplificando términos:

$$C_l = \frac{(-S_w C_{l_\alpha} \Gamma c_w + S_{TV} C_{l_{\alpha_{TV}}} h_{TV})}{S_w b_w} \beta$$

Se obtiene la ecuación del *coeficiente de momento lateral*, el cual es *comparable* con otras aeronaves y permite establecer similitudes de reacción:

$$C_l = \left(-\frac{C_{l_\alpha} \Gamma c_w}{b_w} + \frac{S_{TV} C_{l_{\alpha_{TV}}} h_{TV}}{S_w b_w} \right) \beta$$



Derivada de momento lateral

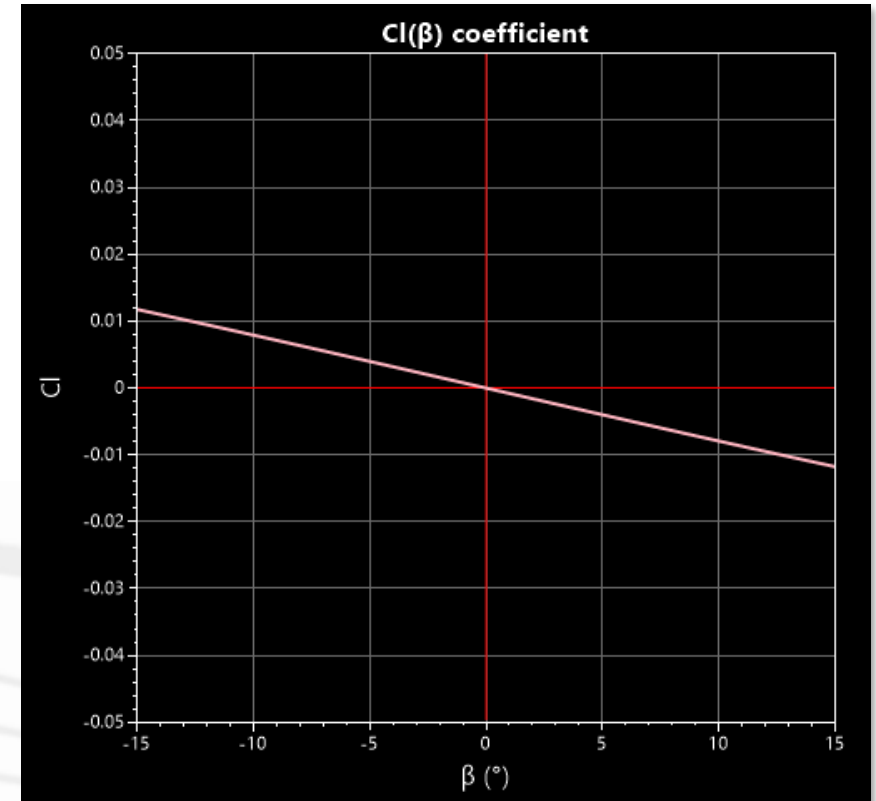
Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. **Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

$$C_l = \left(-\frac{C_{l_\alpha} \Gamma c_w}{b_w} + \frac{S_{TV} C_{l_{\alpha TV}} h_{TV}}{S_w b_w} \right) \beta$$

Es importante tomar los siguientes puntos en cuenta:

- Idealmente no se tiene una *condición inicial*, dado que la aeronave es simétrica en este eje. No obstante, aeronaves mono-motor pudieran presentar ligeras variaciones debido al *p-factor*.
- El ángulo diedro afecta ampliamente este coeficiente.
- La distancia c_w se toma como *positiva* dadas las suposiciones realizadas anteriormente.
- La distancia h_{TV} presenta signo; típicamente *negativo* para estabilizadores verticales convencionales.





Derivada de momento lateral

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

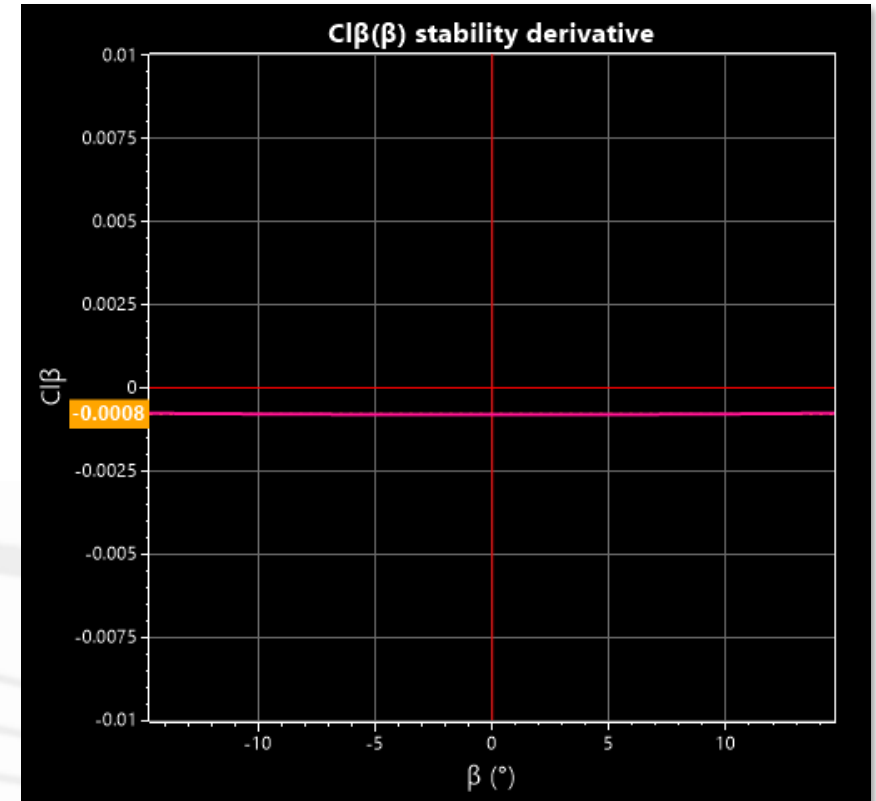
$$C_l = \left(-\frac{C_{l\alpha} \Gamma c_w}{b_w} + \frac{S_{TV} C_{l\alpha_{TV}} h_{TV}}{S_w b_w} \right) \beta$$

Derivando respecto al ángulo de derrape:

$$\frac{\partial C_l}{\partial \beta} = -\frac{C_{l\alpha} \Gamma c_w}{b_w} + \frac{S_{TV} C_{l\alpha_{TV}} h_{TV}}{S_w b_w}$$

A este valor se le conoce como la **derivada de estabilidad lateral**, o en ocasiones “**rolling moment derivative**” Típicamente representada como:

$$C_{l\beta}$$





Derivada de momento lateral

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
- 4. Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

$$C_{l\beta}$$

$$\frac{dC_l}{d\beta} = -\frac{C_{l\alpha}\Gamma c_w}{b_w} + \frac{S_{TV}C_{l\alpha_{TV}}h_{TV}}{S_w b_w}$$

Considerando el caso de una aeronave C-172 con los siguientes datos geométricos y aerodinámicos:

Ala

$$S_w = 16 \text{ m}^2$$
$$C_{l\alpha} = 4.87 \frac{1}{\text{rad}} = 0.085 \frac{1}{^\circ}$$
$$b_w = 11 \text{ m}$$
$$c_w \approx 3 \text{ m}$$
$$\Gamma = 1.5^\circ$$

Estabilizador vertical

$$S_{TV} = 1.55 \text{ m}$$
$$C_{l\alpha_{TV}} = 3.6 \frac{1}{\text{rad}} = 0.063 \frac{1}{^\circ}$$
$$h_{TV} \approx -0.5 \text{ m}$$

No confundir con la envergadura del estabilizador horizontal.

$$\frac{dC_l}{d\beta} = -\frac{(0.085)(0.0262)(3)}{11} + \frac{(1.55)(0.063)(-0.5)}{(16)(11)} = -0.00088 \frac{1}{\text{deg}}$$

Derivada de momento direccional

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

$$\sum \mathcal{N} = [-D_{w_D} c_{w_D}] + [-D_{w_I} c_{w_I}] + [-D_{H_{T_D}} c_{T_{H_D}}] + [-D_{H_{T_I}} c_{T_{H_I}}] + [L_{V_T} a_{T_V}]$$

Considerando la **convención de signos en las distancias**, y **AFECTANDO EL SIGNO DE LA SUSTENTACIÓN y RESISTENCIA AL AVANCE**:

$$\mathcal{N} = -D_{w_D} c_{w_D} - D_{w_I} c_{w_I} - D_{H_{T_D}} c_{T_{H_D}} - D_{H_{T_I}} c_{T_{H_I}} + L_{V_T} a_{T_V}$$

Suponiendo que el movimiento de la resultante de *sustentación* a lo largo de la envergadura es pequeño:

$$c_{w_I} = -c_{w_D}$$

$$c_{T_{H_I}} = -c_{T_{H_D}}$$

$$\mathcal{N} = (D_{w_D}(\beta_{w_D}, \alpha_{w_D}) - D_{w_I}(\beta_{w_I}, \alpha_{w_I}))c_w + (D_{H_{T_D}}(\beta_{T_{H_D}}, \alpha_{T_{H_D}}) - D_{H_{T_I}}(\beta_{T_{H_I}}, \alpha_{T_{H_I}}))c_{T_H} - L_{V_T}(\beta_{T_V})a_{T_V}$$

Recordando los efectos del *ángulo diedro*:

$$w_{\beta_D} = v \sin \Gamma \longrightarrow w_{\beta_D} \approx v\Gamma$$

$$w_{\beta_I} = -v \sin \Gamma \longrightarrow w_{\beta_I} \approx -v\Gamma$$

$$\alpha_{w_D} = \text{atan}\left(\frac{v\Gamma}{u}\right) \longrightarrow \alpha_{w_D} \approx \left(\frac{v\Gamma}{u}\right)$$

$$\alpha_{w_I} = \text{atan}\left(\frac{-v\Gamma}{u}\right) \longrightarrow \alpha_{w_I} \approx \left(\frac{-v\Gamma}{u}\right)$$



$$\beta = \text{atan}\left(\frac{v}{u}\right)$$

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

Derivada de momento direccional

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. **Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

$$\mathcal{N} = (D_{w_D}(\beta_{w_D}, \alpha_{w_D}) - D_{w_I}(\beta_{w_I}, \alpha_{w_I}))c_w + (D_{H_{TD}}(\beta_{TH_D}, \alpha_{TH_D}) - D_{H_{TI}}(\beta_{TH_I}, \alpha_{TH_I}))c_{TH} - L_{VT}(\beta_{TV})a_{TV}$$

Reescribiendo para el ángulo de derrape:

$$\beta = \text{atan}\left(\frac{v}{u}\right) \longrightarrow \beta \approx \frac{v}{u} \longrightarrow v = u\beta$$

$$\alpha_{w_D} \approx \beta\Gamma \quad \left| \quad \alpha_{w_I} \approx -\beta\Gamma$$

Considerando que el *estabilizador horizontal* tiene un efecto menor en esta dinámica:

$$\mathcal{N} = (D_{w_D}(\beta_{w_D}, \alpha_{w_D}) - D_{w_I}(\beta_{w_I}, \alpha_{w_I}))c_w + L_{VT}(\beta_{TV})a_{TV}$$

Recordando que la *superficie alar* corresponde para ambas semi-alas:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{4}\rho V^2 S_w \left(\frac{(C_{l_\alpha}\beta\Gamma + C_{l_0})^2}{\pi A Re} + C_{D_0} \right) c_w - \frac{1}{4}\rho V^2 S_w \left(\frac{(-C_{l_\alpha}\beta\Gamma + C_{l_0})^2}{\pi A Re} + C_{D_0} \right) c_w - \frac{1}{2}\rho V^2 S_{TV} (C_{l_{\alpha_{TV}}}\beta) a_{TV}$$

Simplificando con presión dinámica:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2}q_{dyn} S_w \left(\frac{(C_{l_\alpha}\beta\Gamma + C_{l_0})^2}{\pi A Re} + C_{D_0} \right) c_w - \frac{1}{2}q_{dyn} S_w \left(\frac{(-C_{l_\alpha}\beta\Gamma + C_{l_0})^2}{\pi A Re} + C_{D_0} \right) c_w - q_{dyn} S_{TV} (C_{l_{\alpha_{TV}}}\beta) a_{TV}$$



Derivada de momento direccional

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
- 4. Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} q_{dyn} S_w \left(\frac{(C_{l_\alpha} \beta \Gamma + C_{l_0})^2}{\pi A R e} + C_{D_0} \right) c_w - \frac{1}{2} q_{dyn} S_w \left(\frac{(-C_{l_\alpha} \beta \Gamma + C_{l_0})^2}{\pi A R e} + C_{D_0} \right) c_w - q_{dyn} S_{T_V} (C_{l_{\alpha T_V}} \beta) a_{T_V}$$

Expandiendo los términos cuadráticos:

$$C_{l_\alpha}^2 \beta^2 \Gamma^2 + 2 C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} + C_{l_0}^2 \quad \left| \quad C_{l_\alpha}^2 \beta^2 \Gamma^2 - 2 C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} + C_{l_0}^2 \right.$$

Considerando un *ángulo de derrape* y un *ángulo diedro* suficientemente pequeños:

$$C_{l_\alpha}^2 \beta^2 \Gamma^2 \approx 0$$

Simplificando

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} q_{dyn} S_w \left(\frac{2 C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} + C_{l_0}^2}{\pi A R e} + C_{D_0} \right) c_w - \frac{1}{2} q_{dyn} S_w \left(\frac{-2 C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} + C_{l_0}^2}{\pi A R e} + C_{D_0} \right) c_w - q_{dyn} S_{T_V} (C_{l_{\alpha T_V}} \beta) a_{T_V}$$

Reordenando términos:

$$\mathcal{N} = \frac{q_{dyn} S_w}{\pi A R e} C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} c_w + \frac{q_{dyn} S_w}{2 \pi A R e} C_{l_0}^2 c_w + \frac{1}{2} q_{dyn} S_w C_{D_0} c_w + \frac{q_{dyn} S_w}{\pi A R e} C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} c_w - \frac{q_{dyn} S_w}{2 \pi A R e} C_{l_0}^2 c_w - \frac{1}{2} q_{dyn} S_w C_{D_0} c_w - q_{dyn} S_{T_V} C_{l_{\alpha T_V}} \beta a_{T_V}$$

Afectando y cancelando términos similares:

$$\mathcal{N} = \frac{2 q_{dyn} S_w}{\pi A R e} C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} c_w - q_{dyn} S_{T_V} C_{l_{\alpha T_V}} \beta a_{T_V}$$



Derivada de momento direccional

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
- 4. Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} q_{dyn} S_w \left(\frac{(C_{l_\alpha} \beta \Gamma + C_{l_0})^2}{\pi A Re} + C_{D_0} \right) c_w - \frac{1}{2} q_{dyn} S_w \left(\frac{(-C_{l_\alpha} \beta \Gamma + C_{l_0})^2}{\pi A Re} + C_{D_0} \right) c_w - q_{dyn} S_{TV} (C_{l_{\alpha_{TV}}} \beta) a_{TV}$$

Expandiendo los términos cuadráticos:

$$C_{l_\alpha}^2 \beta^2 \Gamma^2 + 2 C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} + C_{l_0}^2 \quad \left| \quad C_{l_\alpha}^2 \beta^2 \Gamma^2 - 2 C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} + C_{l_0}^2 \right.$$

Considerando un *ángulo de derrape* y un *ángulo diedro* suficientemente pequeños:

$$C_{l_\alpha}^2 \beta^2 \Gamma^2 \approx 0$$

Simplificando

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} q_{dyn} S_w \left(\frac{2 C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} + C_{l_0}^2}{\pi A Re} + C_{D_0} \right) c_w - \frac{1}{2} q_{dyn} S_w \left(\frac{-2 C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} + C_{l_0}^2}{\pi A Re} + C_{D_0} \right) c_w - q_{dyn} S_{TV} (C_{l_{\alpha_{TV}}} \beta) a_{TV}$$

Reescribiendo utilizando las constantes definidas:

$$\mathcal{N} = \frac{2 q_{dyn} S_w}{\pi A Re} C_{l_\alpha} \beta \Gamma C_{l_0} c_w - q_{dyn} S_{TV} C_{l_{\alpha_{TV}}} \beta a_{TV} \longrightarrow C_{N_{mom}} = \frac{2 q_{dyn} S_w}{\pi A Re} C_{l_\alpha} \Gamma C_{l_0} c_w - q_{dyn} S_{TV} C_{l_{\alpha_{TV}}} a_{TV}$$

Por lo que el momento queda con una estructura tipo:

$$\mathcal{N} = C_{N_{mom}} \beta$$



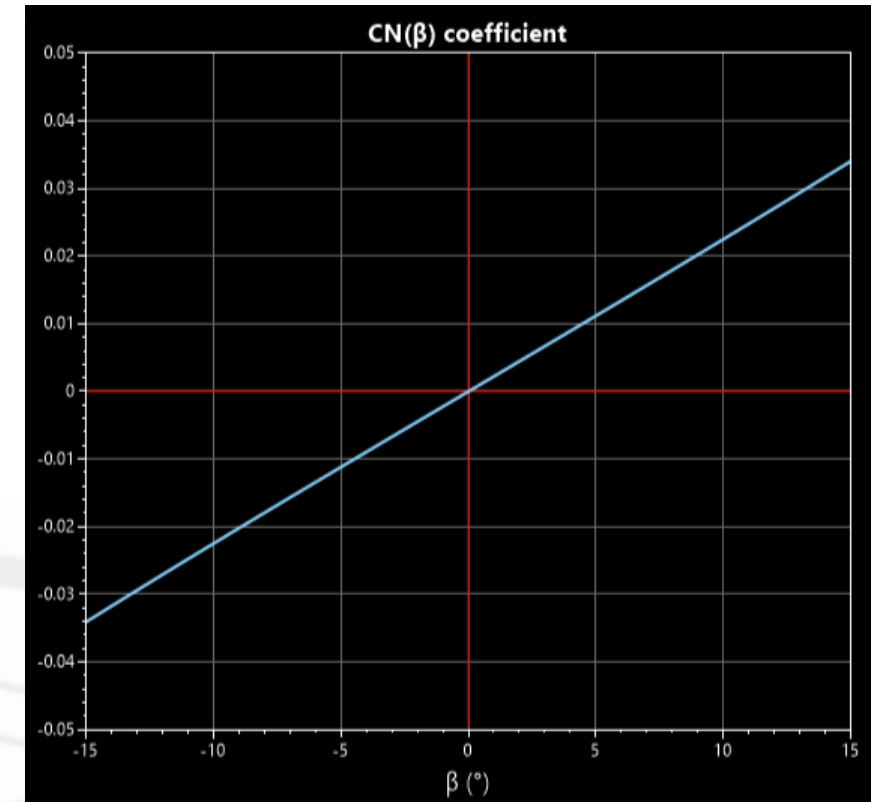
Derivada de momento direccional

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
- 4. Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

El cambio del momento *direccional* se puede aproximar como un cambio lineal. Este comportamiento es *simétrico*, dado que se manifiesta en uno de los ejes de *simetría* de la aeronave.

$$\mathcal{N} = C_{N_{mom}}\beta$$



Esta gráfica corresponde al **coeficiente**.
¿Cómo se obtiene?



Derivada de momento direccional

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
- 4. Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

Para poder *comparar* el comportamiento entre diversas aeronaves, usualmente se considera la ecuación con una estructura de coeficiente referenciada a la superficie alar:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_w b_w C_N$$

Considerando la ecuación con estructura lineal:

$$\mathcal{N} = C_{N_{mom}} \beta$$

Igualando términos y simplificando:

$$C_{N_{mom}} \beta = q_{dyn} S_w b_w C_N$$

Sustituyendo términos constantes:

$$C_{N_{mom}} = \frac{2q_{dyn} S_w}{\pi A R e} C_{l_\alpha} \Gamma C_{l_0} c_w - q_{dyn} S_{T_V} C_{l_{\alpha_{T_V}}} a_{T_V}$$

$$C_N = \frac{\frac{2q_{dyn} S_w}{\pi A R e} C_{l_\alpha} \Gamma C_{l_0} c_w - q_{dyn} S_{T_V} C_{l_{\alpha_{T_V}}} a_{T_V}}{q_{dyn} S_w b_w} \beta$$



Derivada de momento direccional

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
- 4. Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

$$C_N = \frac{\frac{2q_{dyn}S_w}{\pi A Re} C_{l_\alpha} \Gamma C_{l_0} c_w - q_{dyn} S_{TV} C_{l_{\alpha TV}} a_{TV}}{q_{dyn} S_w b_w} \beta$$

Simplificando términos:

$$C_N = \frac{\frac{2S_w}{\pi A Re} C_{l_\alpha} \Gamma C_{l_0} c_w - S_{TV} C_{l_{\alpha TV}} a_{TV}}{S_w b_w} \beta$$

Se obtiene la ecuación del *coeficiente de momento direccional*, el cual es *comparable* con otras aeronaves y permite establecer similitudes de reacción:

$$C_N = \left(\frac{2C_{l_\alpha} \Gamma C_{l_0} c_w}{\pi A Re b_w} - \frac{S_{TV} C_{l_{\alpha TV}} a_{TV}}{S_w b_w} \right) \beta$$



Derivada de momento direccional

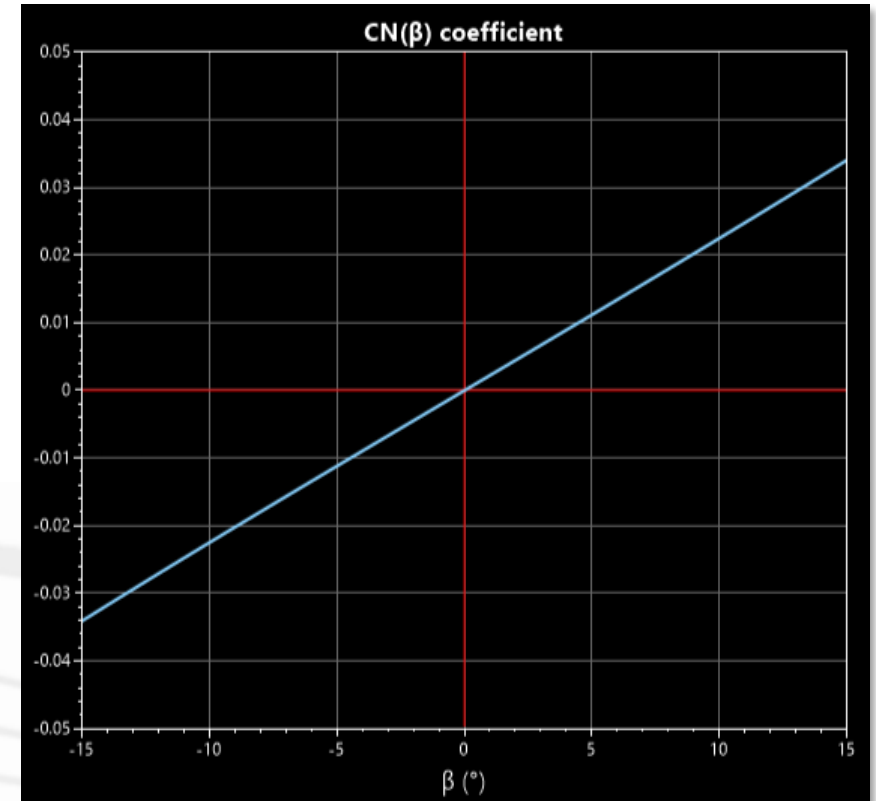
Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. **Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

$$C_N = \left(\frac{2C_{l_\alpha} \Gamma C_{l_0} c_w}{\pi A R e b_w} - \frac{S_{T_V} C_{l_{\alpha T_V}} a_{T_V}}{S_w b_w} \right) \beta$$

Es importante tomar los siguientes puntos en cuenta:

- Idealmente no se tiene una *condición inicial*, dado que la aeronave es simétrica en este eje. No obstante, aeronaves mono-motor pudieran presentar ligeras variaciones debido al *p-factor*.
- El ángulo diedro afecta ampliamente este coeficiente.
- La distancia c_w se toma como *positiva* dadas las suposiciones realizadas anteriormente.
- La distancia a_{T_V} presenta signo; típicamente *negativo* para estabilizadores verticales convencionales.





Derivada de momento direccional

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. **Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

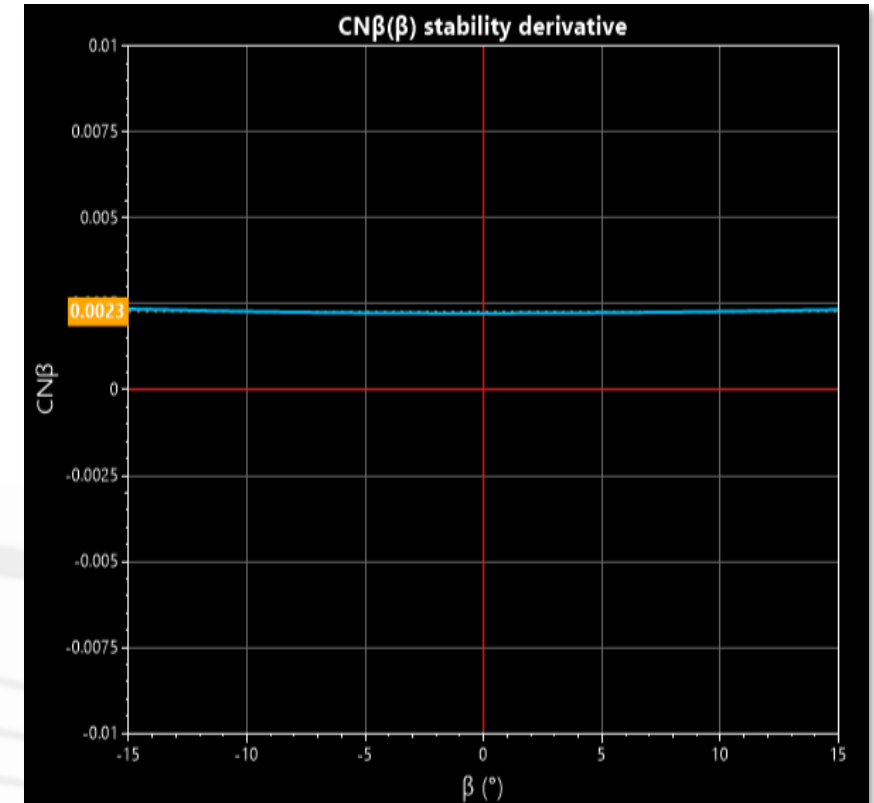
$$C_N = \left(\frac{2C_{l_\alpha} \Gamma C_{l_0} c_w}{\pi A R e b_w} - \frac{S_{TV} C_{l_{\alpha TV}} a_{TV}}{S_w b_w} \right) \beta$$

Derivando respecto al ángulo de derrape:

$$\frac{\partial C_N}{\partial \beta} = \frac{2C_{l_\alpha} \Gamma C_{l_0} c_w}{\pi A R e b_w} - \frac{S_{TV} C_{l_{\alpha TV}} a_{TV}}{S_w b_w}$$

A este valor se le conoce como la **derivada de estabilidad direccional**, o en ocasiones “**yawing moment derivative**”
Típicamente representada como:

$$C_{N\beta}$$



Cálculo numérico de derivadas de estabilidad

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Para el cálculo de las *derivadas de estabilidad y control* se pueden utilizar ***aproximaciones numéricas***.

Lo anterior permite obtener las respuestas de manera numéricamente sencilla, y evaluar el comportamiento de la aeronave con geometrías definidas.

Para lograr el cálculo numérico es necesario obtener las *fuerzas y momentos* resultantes en diferentes configuraciones de vuelo, y *adimensionalizar*. Esto se puede hacer utilizando *hojas de cálculo* y/o simulaciones numéricas.

Con los datos anteriores, las *pendientes* de cambio de los coeficientes resultan en las *derivadas de estabilidad y control*.

$$\delta_a = 0^\circ$$

$$\mathcal{L} = 0 \text{ Nm}$$

$$Cl = 0$$

$$V = 60 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$S_w = 16.16 \text{ m}^2$$

$$b_w = 10.97 \text{ m}$$

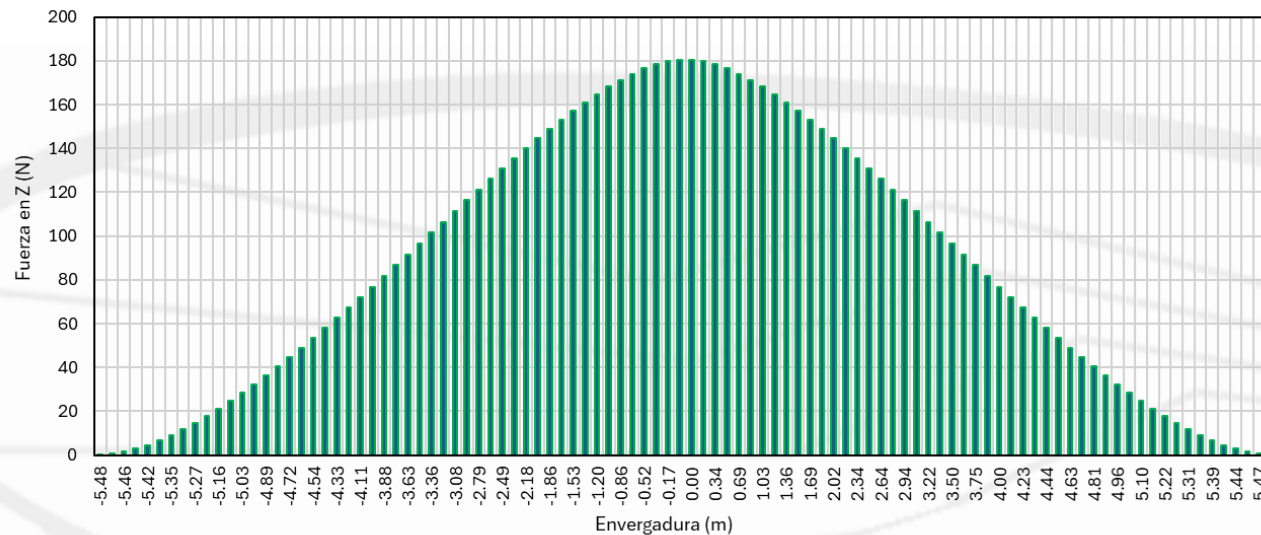
Cálculo numérico de derivadas de estabilidad

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



Considerando la **derivada de control lateral con alerón**, para realizar su cálculo, es necesario evaluar el momento \mathcal{L} a diferentes *deflexiones* de alerón. Para el caso de VRN sin ángulo de alerón se presenta la siguiente distribución de fuerzas:



$$\delta_a = 0^\circ$$

$$\mathcal{L} = 0 \text{ Nm}$$

$$Cl = 0$$

$$V = 60 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$S_w = 16.16 \text{ m}^2$$

$$b_w = 10.97 \text{ m}$$

Cálculo numérico de derivadas de estabilidad

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

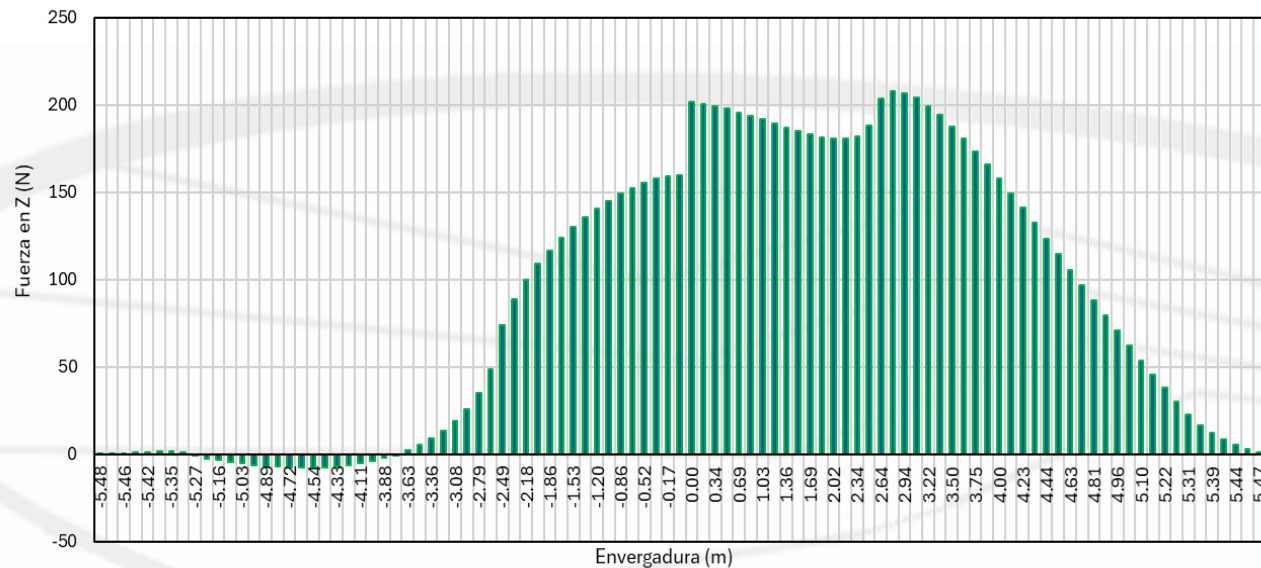


Considerando **deflexión de
alerones negativa**:

$$\delta_a = -15^\circ$$

$$\mathcal{L} = -14750 \text{ Nm}$$

$$Cl = -0.0543$$



$$V = 60 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$S_w = 16.16 \text{ m}^2$$

$$b_w = 10.97 \text{ m}$$

Cálculo numérico de derivadas de estabilidad

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

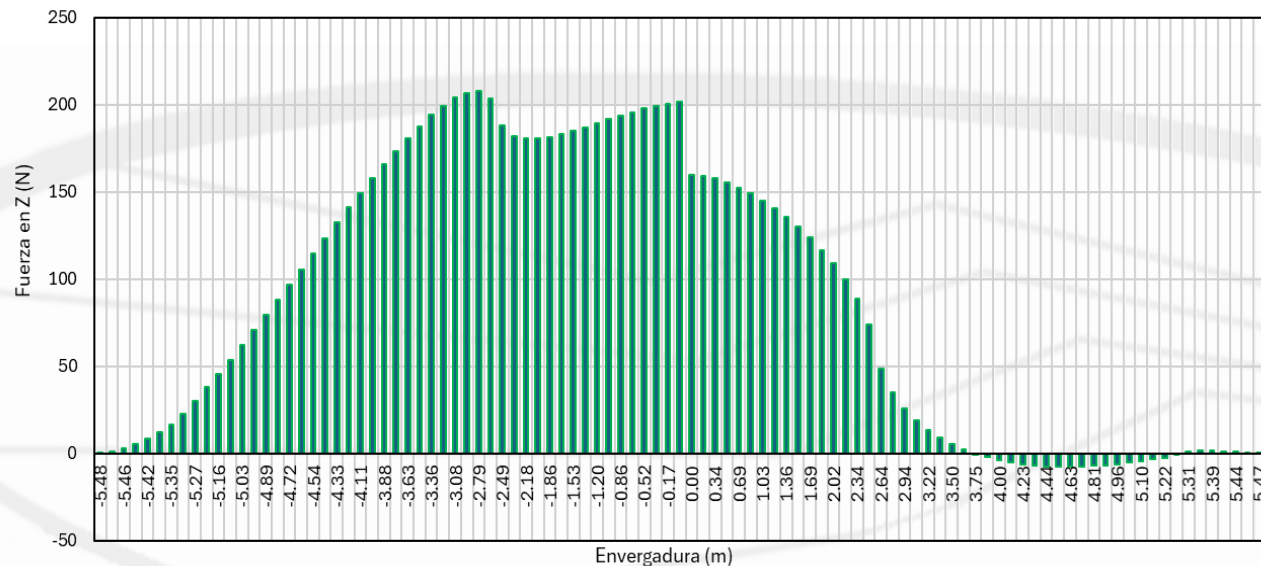


Considerando **deflexión de
alerones positiva:**

$$\delta_a = 15^\circ$$

$$\mathcal{L} = 14750 \text{ Nm}$$

$$Cl = 0.05433$$



$$V = 60 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$S_w = 16.16 \text{ m}^2$$

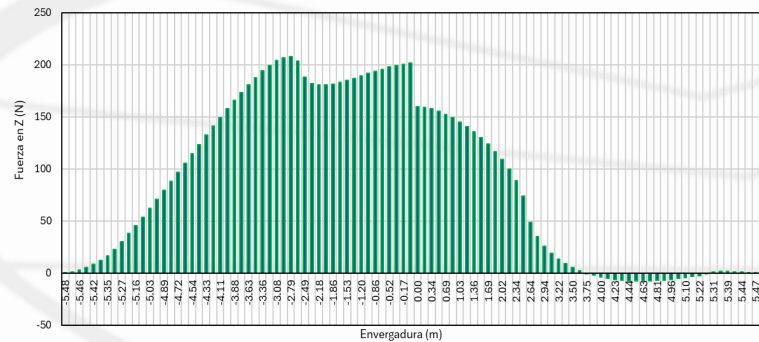
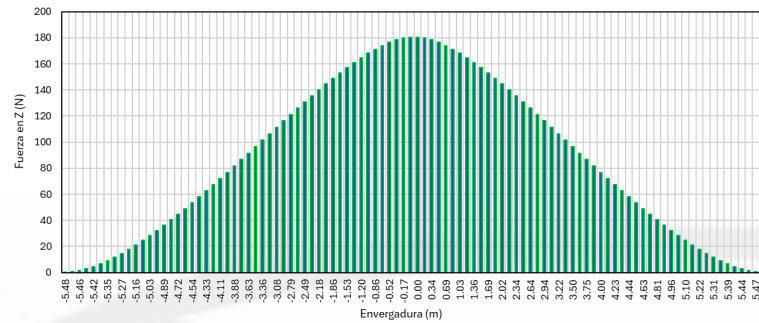
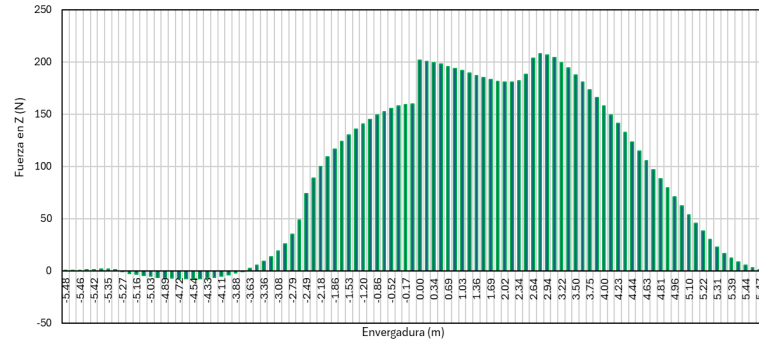
$$b_w = 10.97 \text{ m}$$



Cálculo numérico de derivadas de estabilidad

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



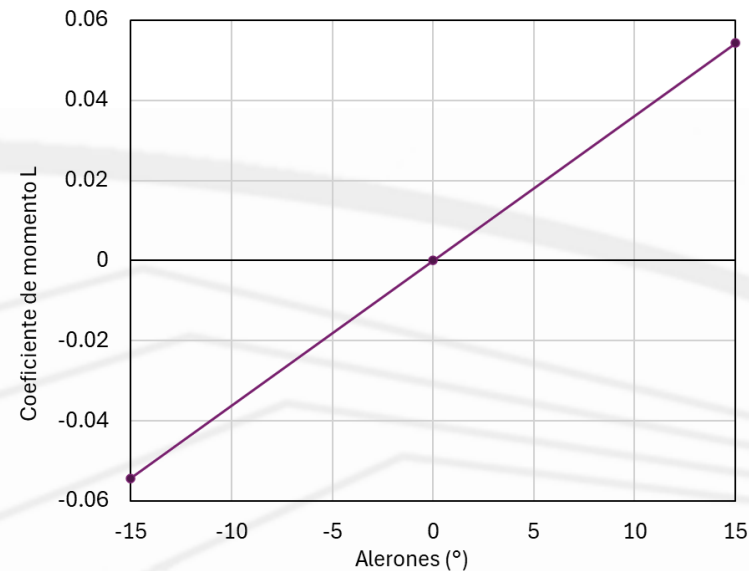
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_w b_w C_l$$

$$C_l = \frac{2\mathcal{L}}{\rho V^2 S_w b_w}$$

$$\delta_a = 15^\circ$$

$$\mathcal{L} = 14750 \text{ Nm}$$

$$C_l = 0.05433$$



$$V = 60 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$S_w = 16.16 \text{ m}^2$$

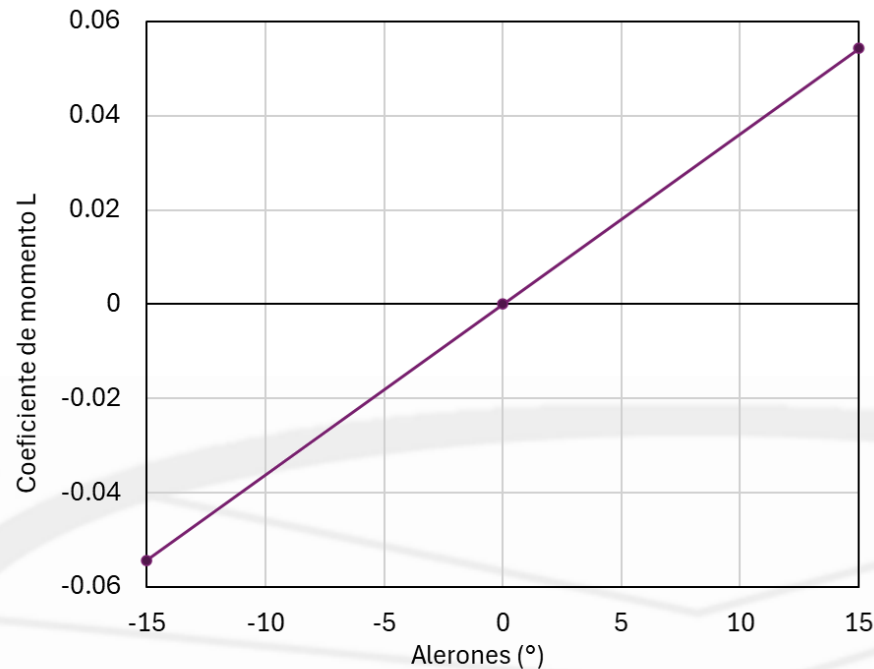
$$b_w = 10.97 \text{ m}$$



Cálculo numérico de derivadas de estabilidad

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. **Estabilidad
estática**
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_w b_w C_l$$

$$C_l = \frac{2\mathcal{L}}{\rho V^2 S_w b_w}$$

$$C_{l_{\delta_a}} = 0.003622 \frac{1}{^\circ}$$

$$C_{l_{\delta_a}} = 0.2075 \frac{1}{rad}$$

$$\delta_a = 15^\circ$$

$$\mathcal{L} = 14750 \text{ Nm}$$

$$C_l = 0.05433$$

$$V = 60 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$S_w = 16.16 \text{ m}^2$$

$$b_w = 10.97 \text{ m}$$



UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
NUEVO LEÓN



FACULTAD DE
INGENIERÍA MECÁNICA
Y ELÉCTRICA

Estabilidad dinámica



Derivada de momento direccional

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
- 5. Estabilidad
dinámica**
6. Recapitulación



$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & Y_r & Y_\phi \\ L_v & L_p & L_r & L_\phi \\ N_v & N_p & N_r & N_\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta_{ail}} & Y_{\delta_{rudd}} \\ L_{\delta_{ail}} & L_{\delta_{rudd}} \\ N_{\delta_{ail}} & N_{\delta_{rudd}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ail} \\ \delta_{rudd} \end{bmatrix}$$

$$\dot{v} = \frac{F_{yB}}{m} + g\phi - ru \quad \left| \quad \dot{p} = \frac{\mathcal{L}}{J_{xx}} \quad \right| \quad \dot{r} = \frac{\mathcal{N}}{J_{zz}}$$

$$\boxed{C_{l_\beta} \quad C_{N_\beta}}$$

Las derivadas de estabilidad de amortiguamiento consideran la siguiente convención

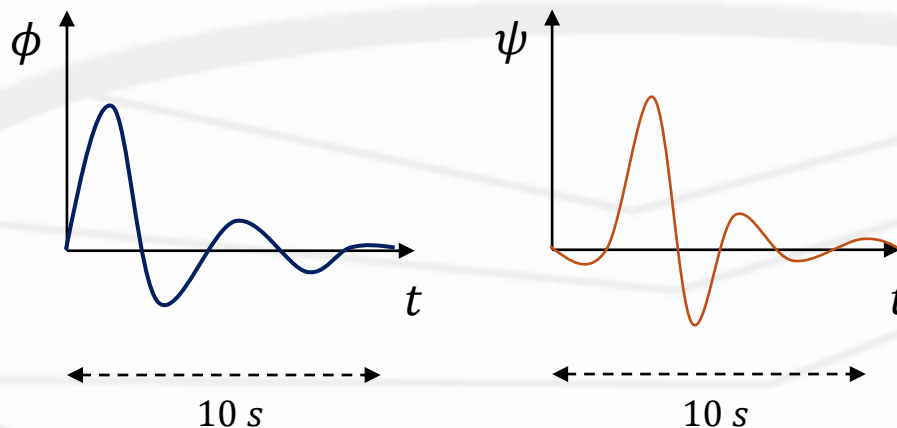
$$\begin{aligned} C_{l_p} &= \frac{2V}{b_w} \frac{\partial C_l}{\partial p} & C_{N_p} &= \frac{2V}{b_w} \frac{\partial C_N}{\partial p} \\ C_{l_r} &= \frac{2V}{b_w} \frac{\partial C_l}{\partial r} & C_{N_r} &= \frac{2V}{b_w} \frac{\partial C_N}{\partial r} \end{aligned}$$

Modo de oscilación – balanceo del holandés

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

El **Dutch-Roll** es un modo de oscilación de la aeronave de la **dinámica lateral direccional** que presenta las siguientes características:

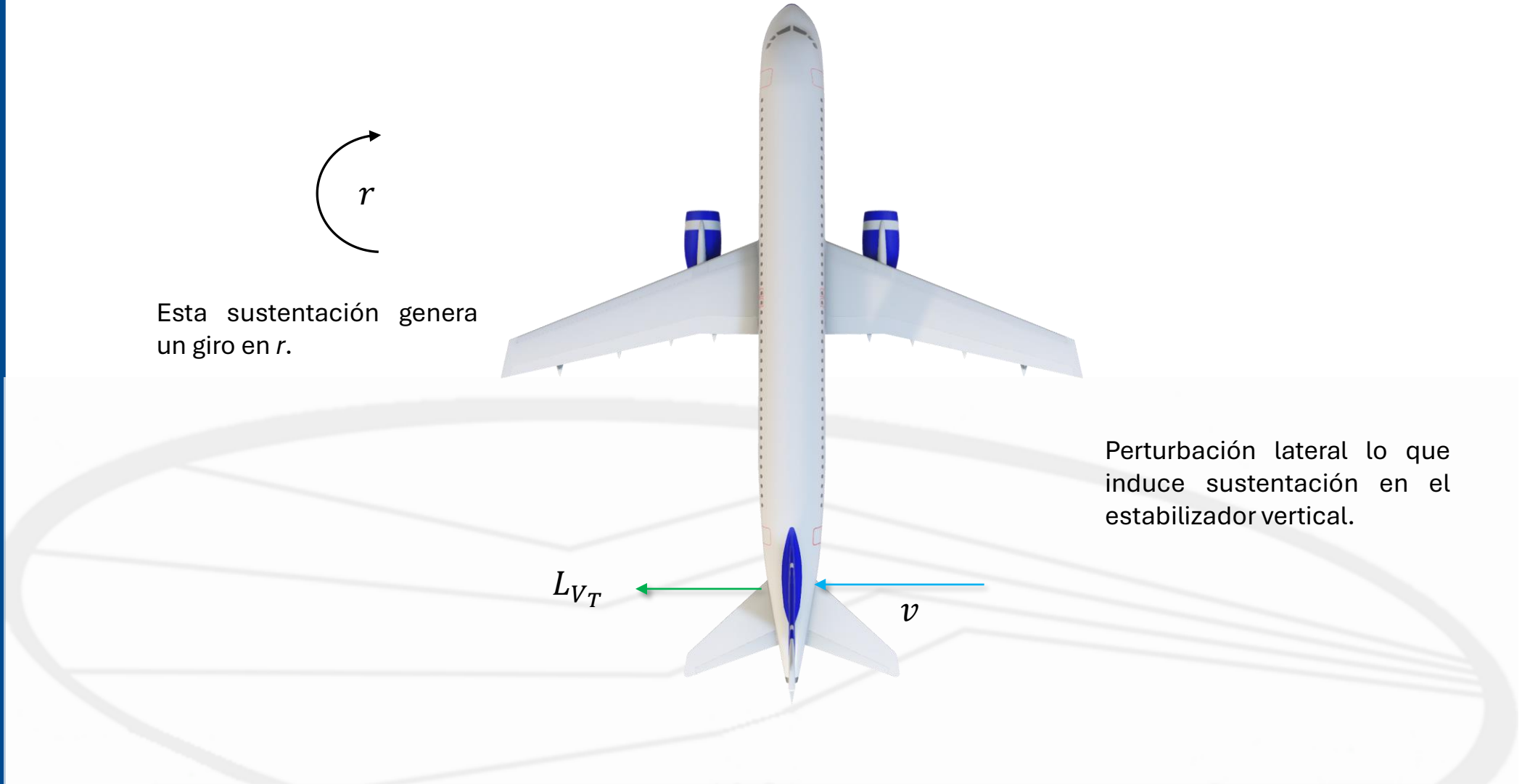
- Acople en el movimiento de ϕ y ψ .
- Se presenta debido al *acoplamiento aerodinámico* de semi-ala y estabilizador vertical.
- Lo induce perturbaciones de viento laterales en v , o giros súbitos en r o p .
- Es posible inducirlo con movimientos rápidos de *timón*.
- Tiene duración de entre 1 y 10 s.



Modo de oscilación – balanceo del holandés

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

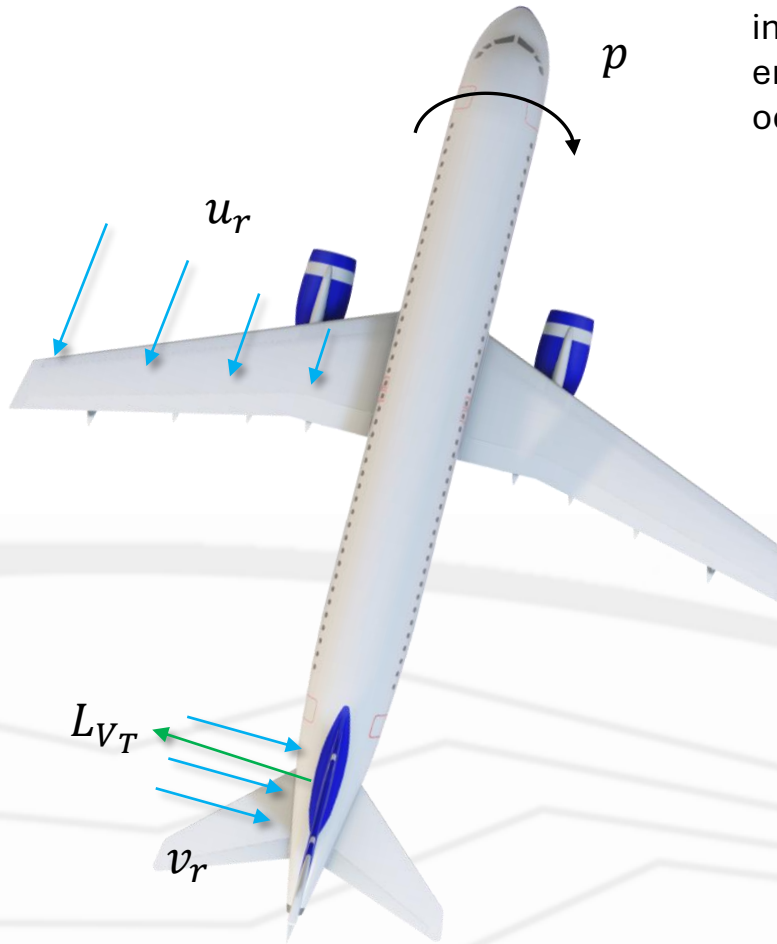
1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
- 5. Estabilidad
dinámica**
6. Recapitulación



Modo de oscilación – balanceo del holandés

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

El movimiento direccional induce velocidad distinta en las semi-alas, lo que ocasiona un giro en p .

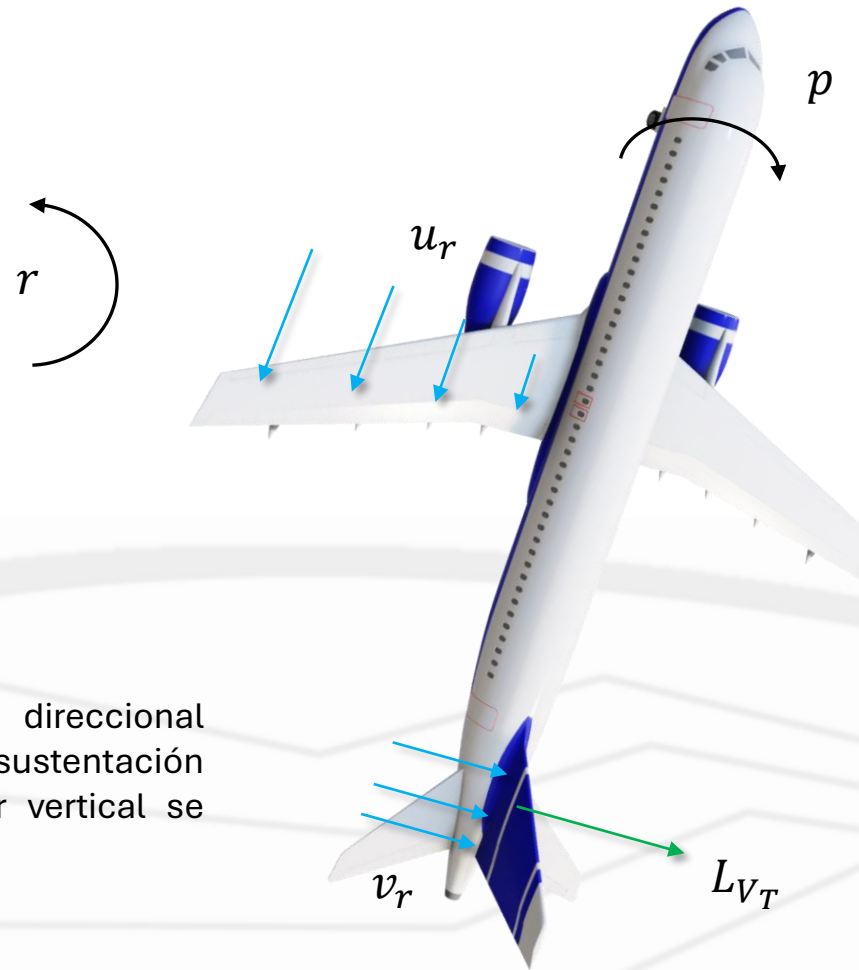


Además, la velocidad r , induce flujo lateral en sentido contrario en el estabilizador horizontal.

Modo de oscilación – balanceo del holandés

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación



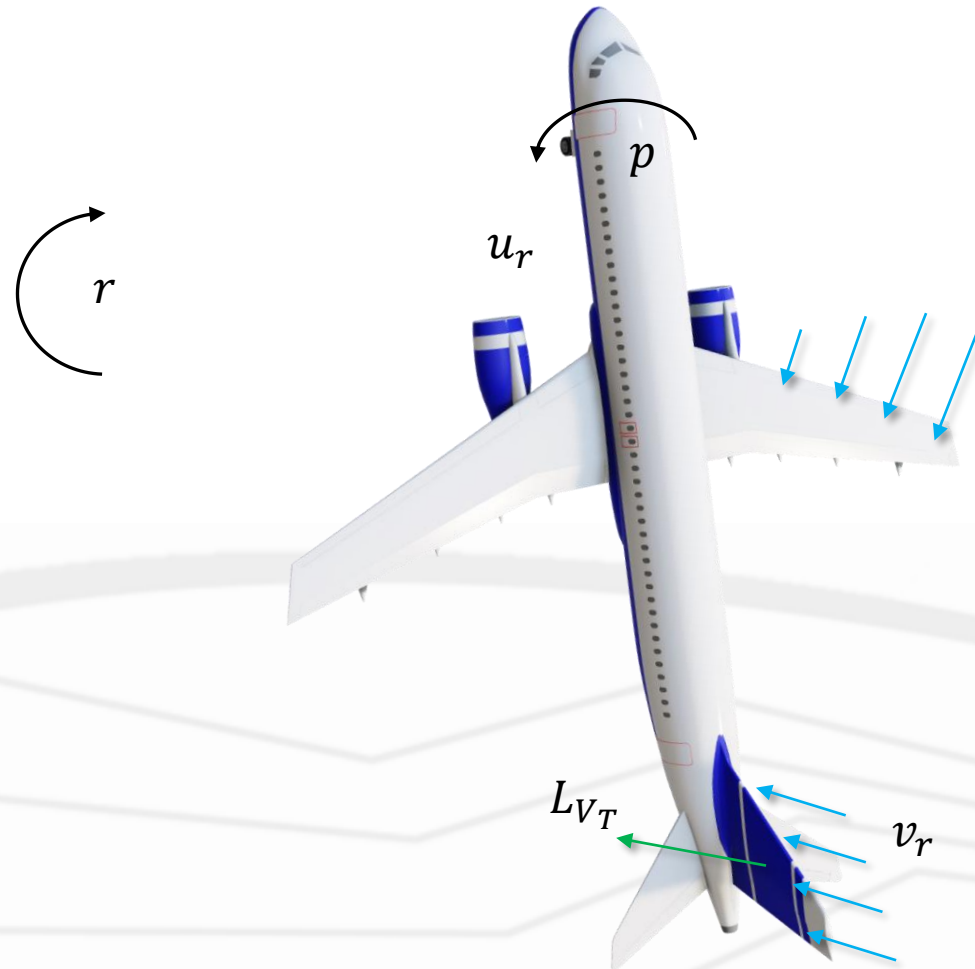
Esta inversión de la dirección de la sustentación, ocasiona un giro en r .

El movimiento direccional ocasiona que la sustentación del estabilizador vertical se *invierta*.

Modo de oscilación – balanceo del holandés

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

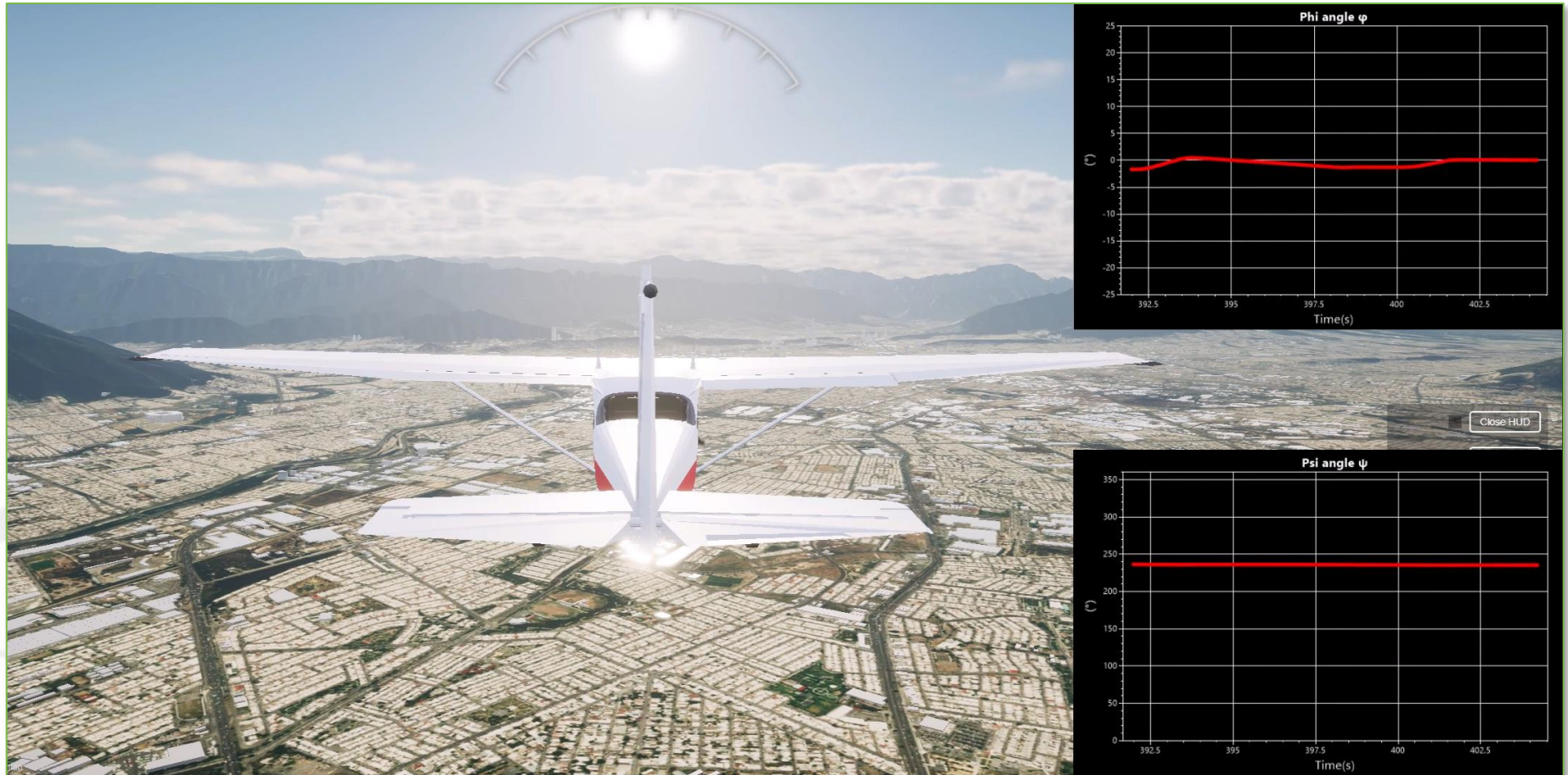


De esta manera **el ciclo se repite** hasta que se disipa la perturbación original.

Modo de oscilación – balanceo del holandés

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
- 5. Estabilidad
dinámica**
6. Recapitulación

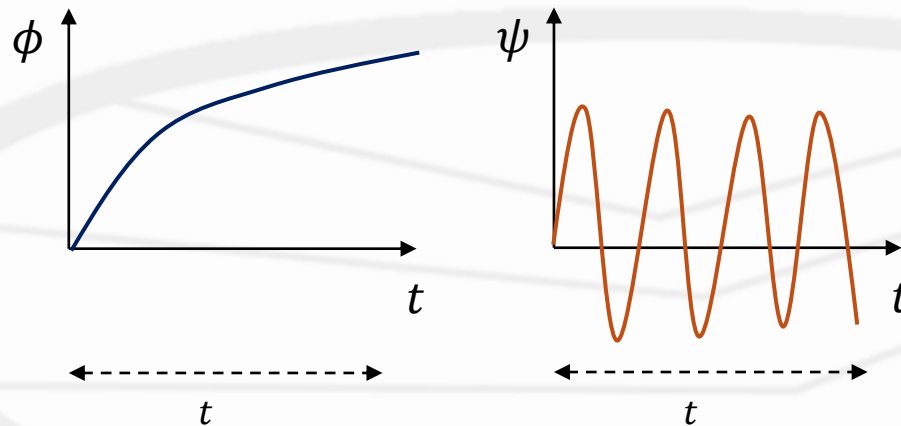


Modo de oscilación – espiral

Universidad
Autónoma de
Nuevo León

El **Espiral** es un modo de oscilación de la aeronave de la **dinámica lateral direccional** que presenta las siguientes características:

- Acople en el movimiento de ϕ y ψ .
- Se presenta debido al *acoplamiento aerodinámico* de semi-ala y estabilizador vertical.
- Lo induce un movimiento lateral *continuo* o en su defecto, ángulos ϕ suficientemente grandes para inducir una velocidad v considerable.
- Es un movimiento **inestable**, es decir, no es posible recuperarlo de manera natura; solo con acción del piloto.





Componente de *viento*,
no de desplazamiento

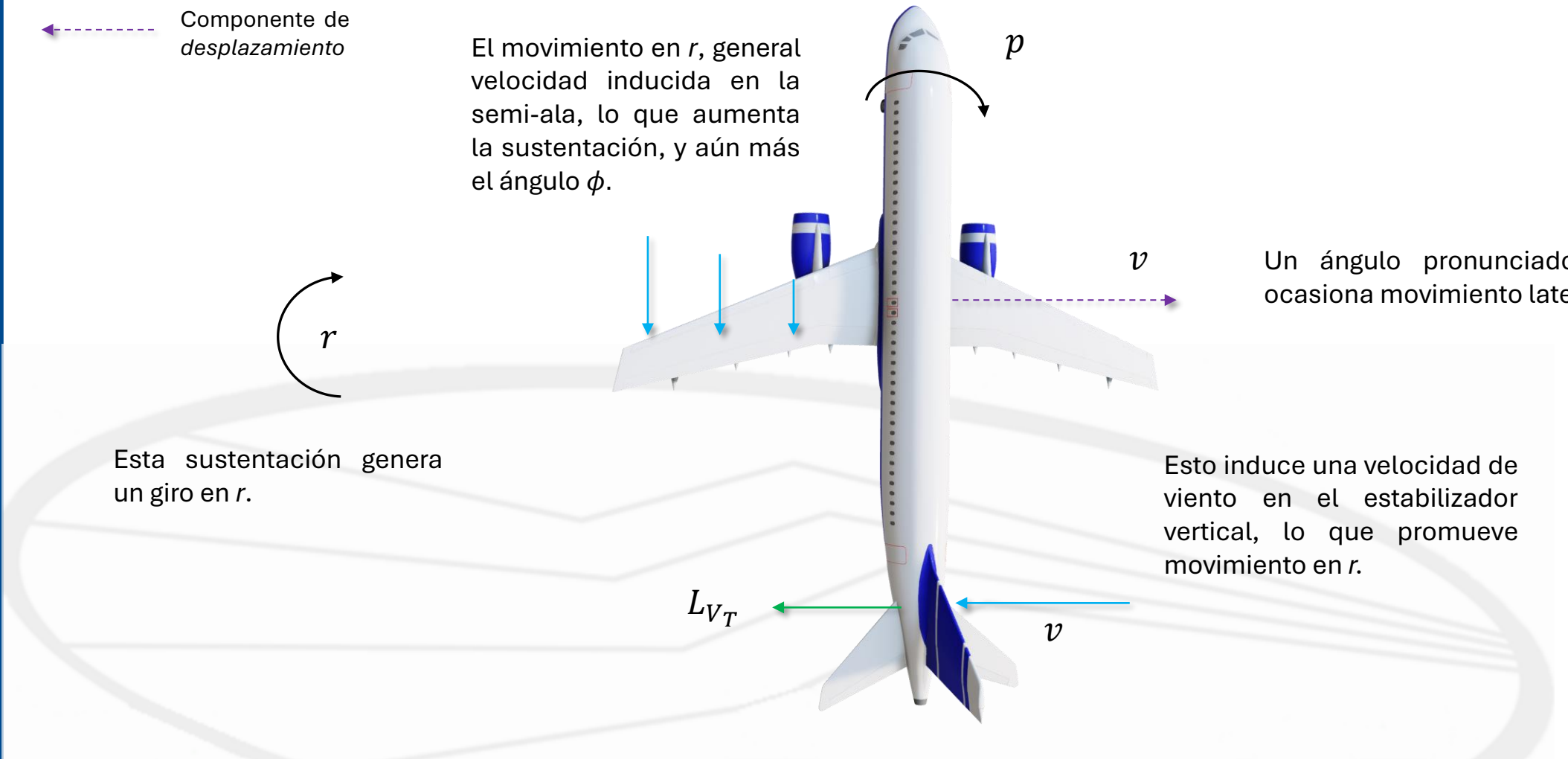
Componente de
desplazamiento

El movimiento en r , general velocidad inducida en la semi-ala, lo que aumenta la sustentación, y aún más el ángulo ϕ .

Esta sustentación genera un giro en r .

Un ángulo pronunciado ϕ ocasiona movimiento lateral.

Esto induce una velocidad de viento en el estabilizador vertical, lo que promueve movimiento en r .



Modo de oscilación – espiral

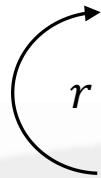
Universidad
Autónoma de
Nuevo León

1. Introducción
2. Dinámica
aislada
3. Efectos
aerodinámicos
4. Estabilidad
estática
5. Estabilidad
dinámica
6. Recapitulación

← Componente de *viento*,
no de desplazamiento

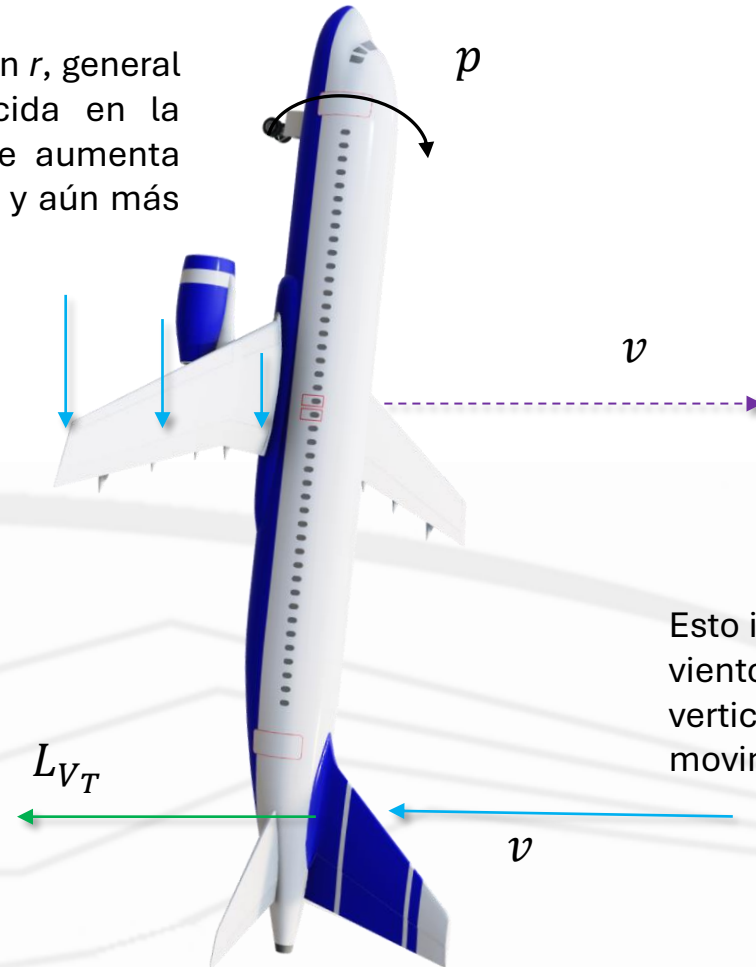
← Componente de
desplazamiento

El movimiento en r , general
velocidad inducida en la
semi-ala, lo que aumenta
la sustentación, y aún más
el ángulo ϕ .



Esta sustentación genera
un giro en r .

El movimiento es inestable,
dado que **no regresa de
manera natural**.



Un ángulo pronunciado ϕ
ocasiona movimiento lateral.

Esto induce una velocidad de
viento en el estabilizador
vertical, lo que promueve
movimiento en r .