Fundamentos y herramientas matemáticas

Dinámica de Vuelo

7mo semestre

Plan 401

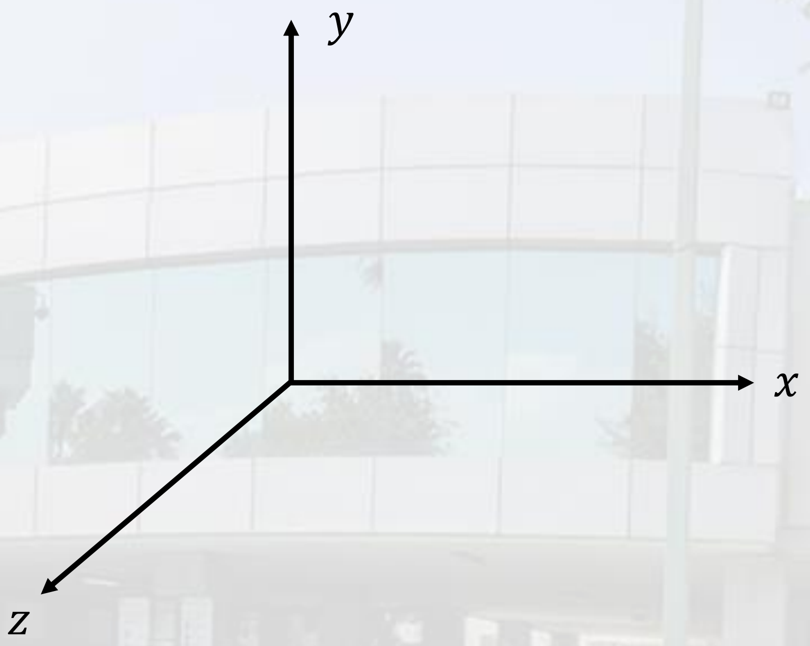
Dr. Erik Gilberto Rojo Rodríguez

Contenidos de la Unidad Temática

Universidad Autónoma de Nuevo León

a. **Álgebra lineal.**
    a. Vectores.
    b. Operaciones vectoriales.
    c. Matrices.
    d. Transformaciones lineales.
    e. Tensor de inercia.
b. **Sistemas dinámicos.**
    a. Análisis de fuerzas.
    b. Análisis de momentos.
    c. Puntos de equilibrio.
    d. Espacio de estados.

Vectores y matrices

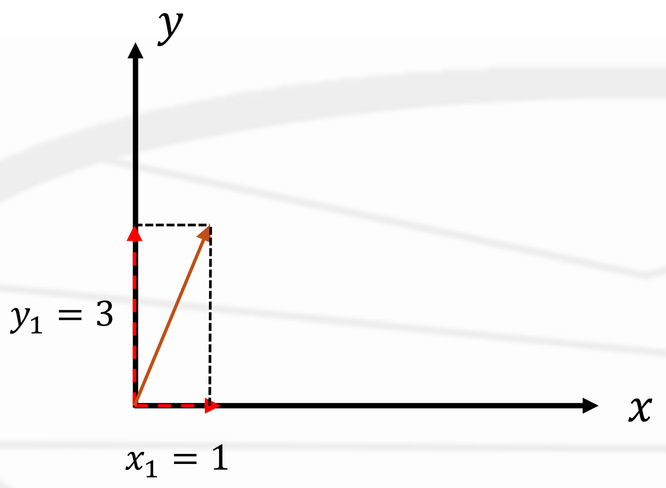


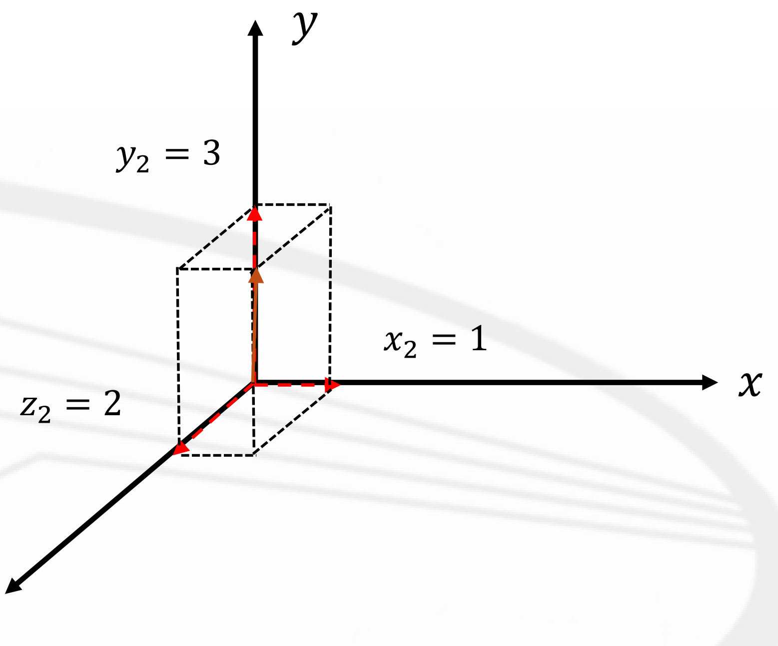
Vectores

¿Qué es un vector?

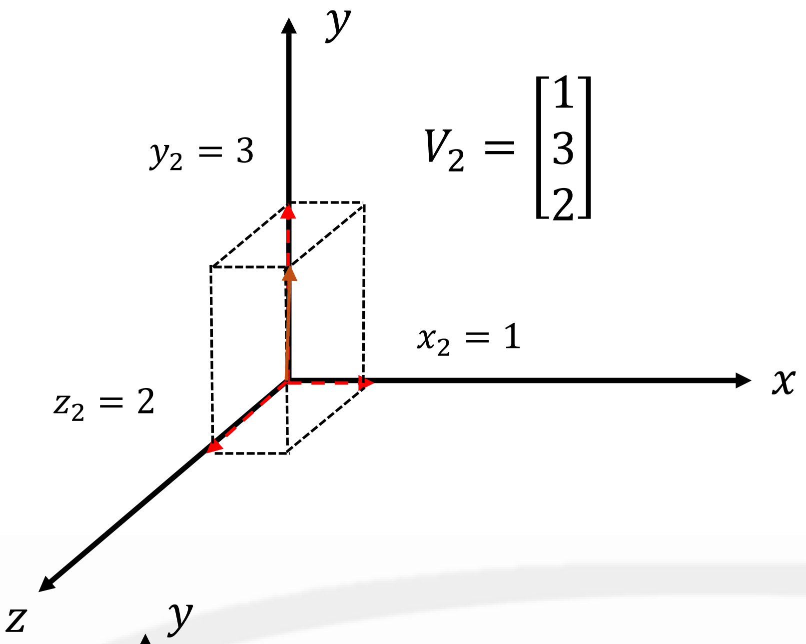
Un vector es un arreglo o *lista* de elementos que guardan una relación a la hora de describir las *características* de algo.
Desde el punto de vista físico y mecánico, un vector se compone de los elementos que describen las componentes que forman una magnitud física; ya sea de manera direccional, o fenómenos individuales con una relación de salida.

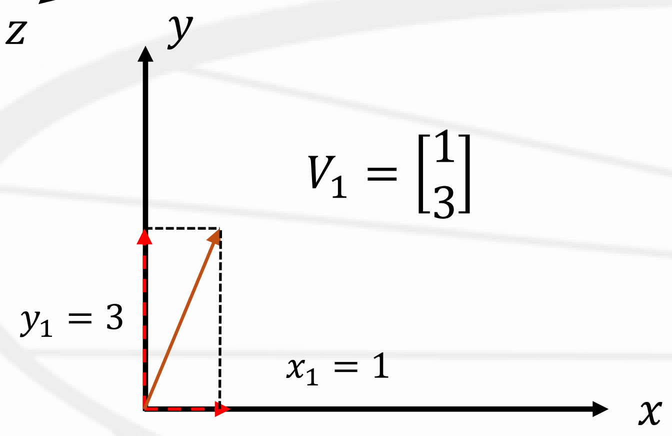
$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$





Vectores





Espacio vectorial

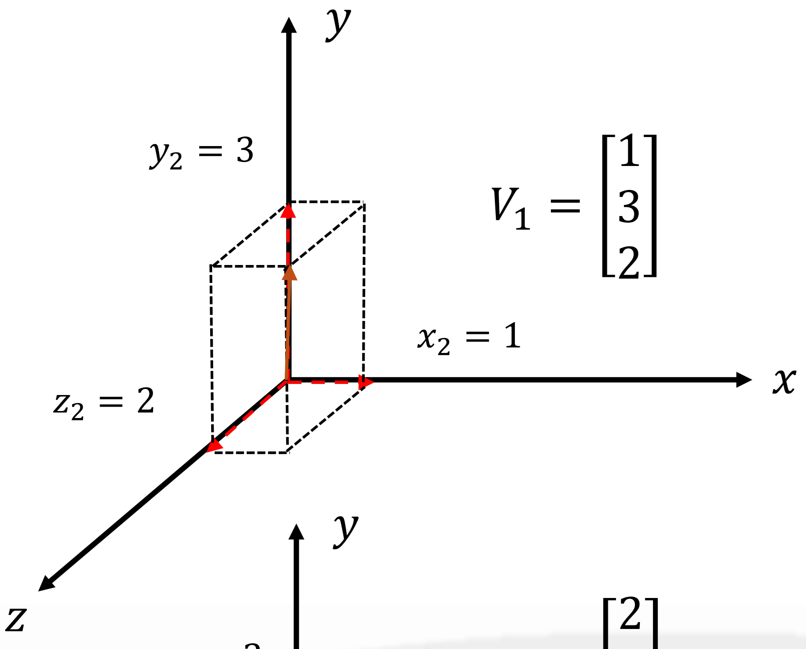
Un espacio vectorial representa el *grupo* de características que pertenecen o se relacionan de alguna manera a una salida.
Los espacios vectoriales pueden ser **ortogonales** o no; esto es, que sus *ejes* pueden estar a 90° los unos de los otros, como un espacio *cartesiano*, o no estarlo, como un conjunto de velocidades angulares.

Es importante no confundir *relación* con ***dependencia***. La dependencia significa que los valores del vector **NO** pueden cambiar, sin alterar a otros.

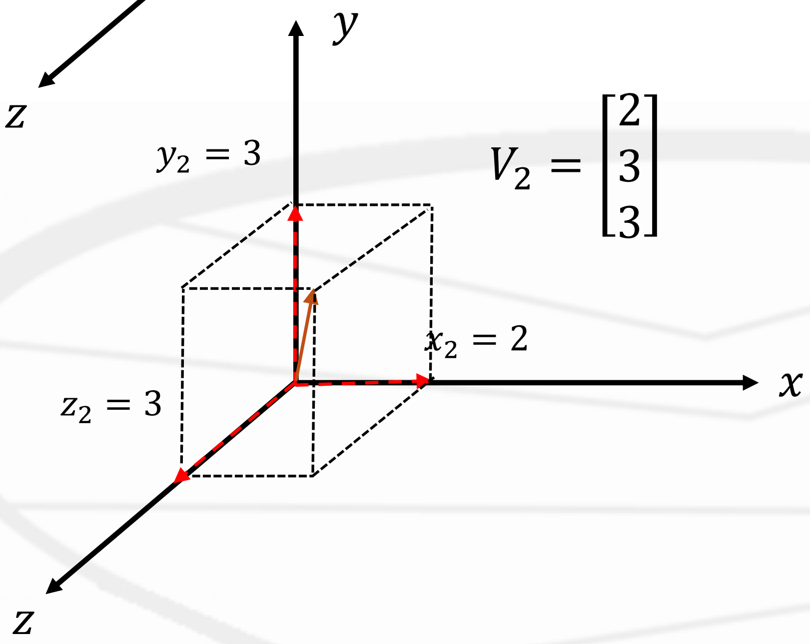
Las dimensiones del espacio vectorial definen la cantidad de elementos que pertenecen a él; con esta información se pueden obtener distintas propiedades necesarias para realizar transformaciones.

Operaciones vectoriales – producto cruz

Universidad Autónoma de Nuevo León



$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Producto cruz

- Se aplica a vectores de la misma dimensión.
- Obtiene un vector que es ortogonal a ambos vectores iniciales.

$$V_1 \times V_2 = V_3$$

$$\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{matrix}$$

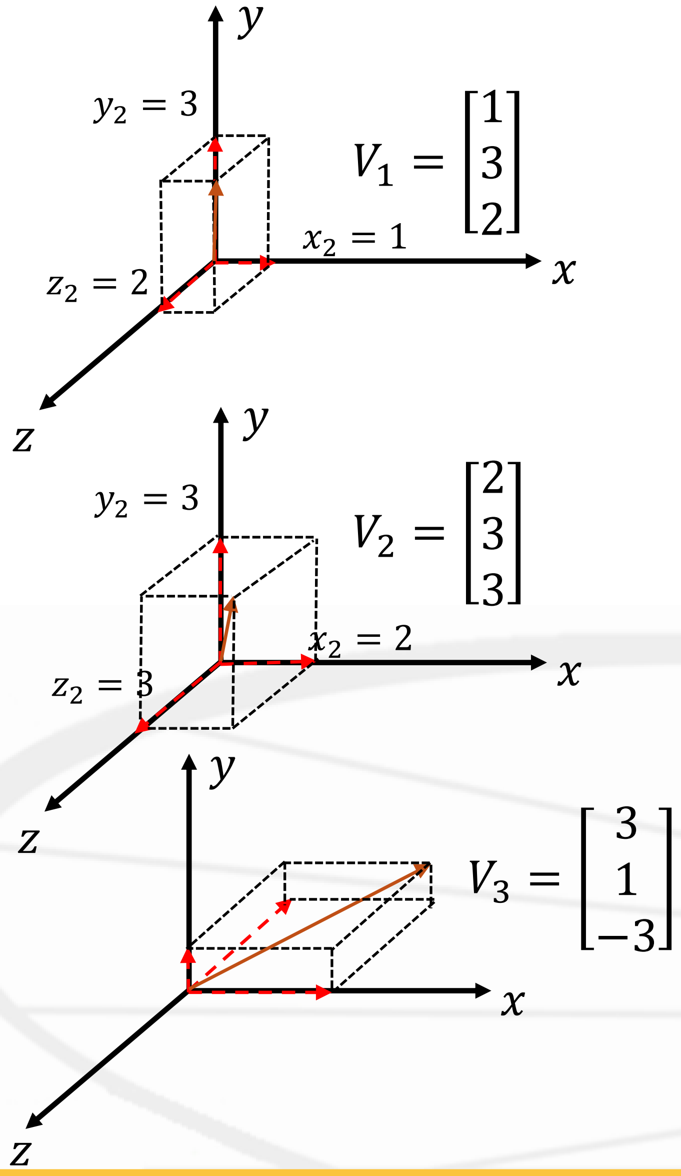
$$i \to (3 * 3) - (2 * 3) = 3$$

$$j \to (2 * 2) - (1 * 3) = 1$$

$$k \to (1 * 3) - (3 * 2) = -3$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Operaciones vectoriales – producto punto



Producto cruz

- Se aplica a vectores de la misma dimensión.
- Obtiene un vector que es ortogonal a ambos vectores iniciales.

$$V_1 \times V_2 = V_3$$

$$\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{matrix}$$

$$i \rightarrow (3 * 3) - (2 * 3) = 3$$

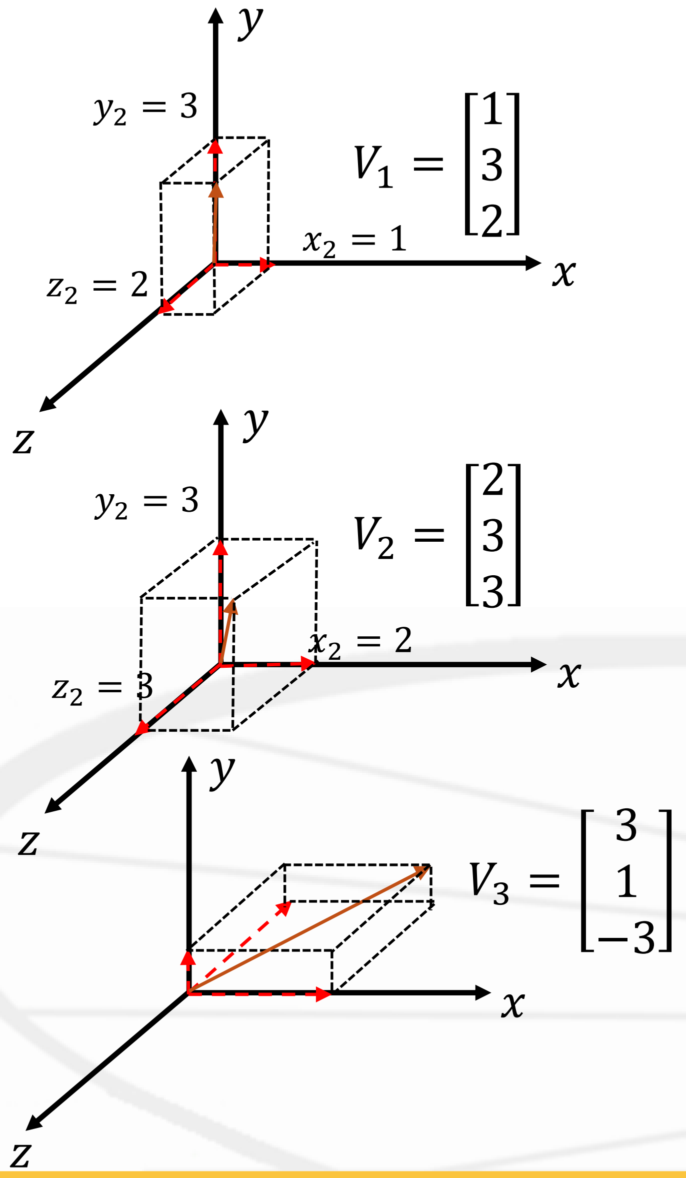
$$j \rightarrow (2 * 2) - (1 * 3) = 1$$

$$k \rightarrow (1 * 3) - (3 * 2) = -3$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Universidad Autónoma de Nuevo León

Operaciones vectoriales – producto punto



Producto punto

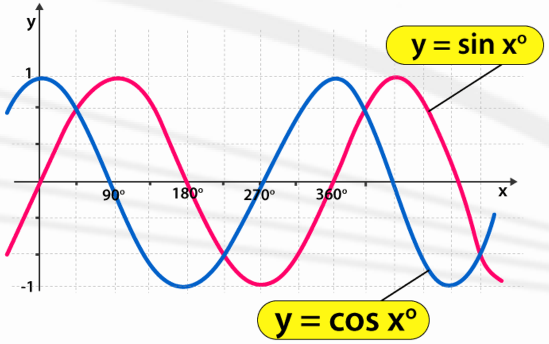
- Representa qué tanto *comparten* los vectores multiplicándose.
- Si los vectores son ortogonales, no comparten componente, por lo que el producto punto sería 0.

$$V_1 \cdot V_2 = A$$

$$V_1 \cdot V_3 = 0$$

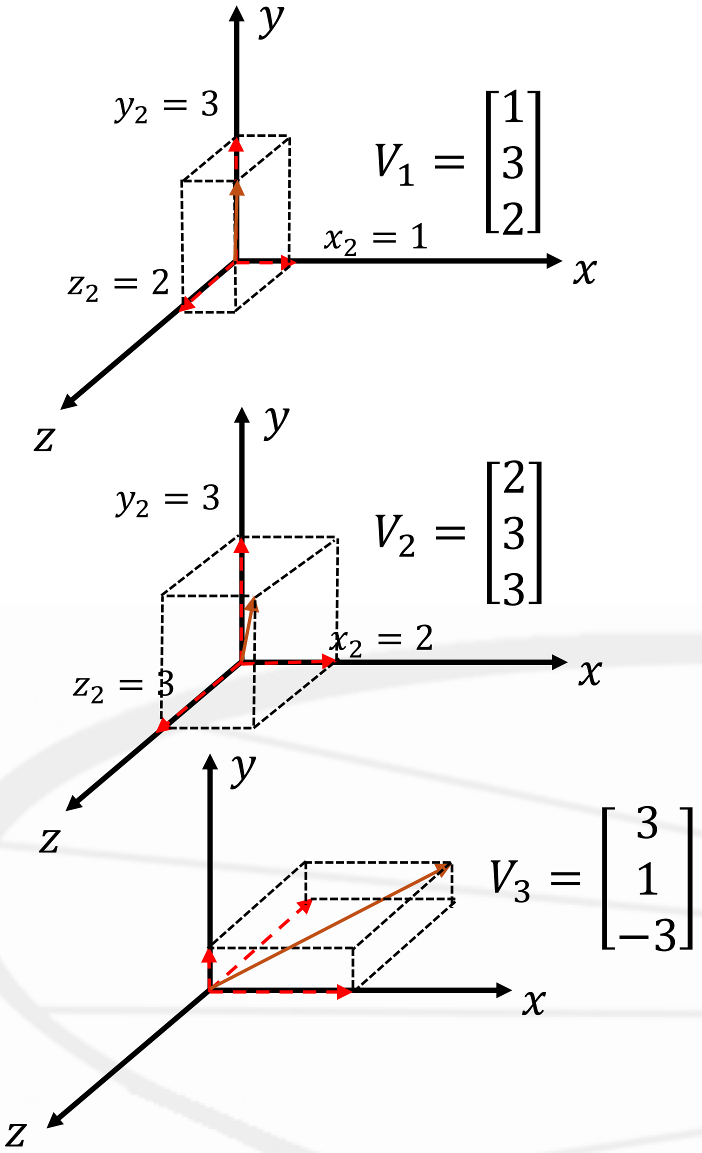
$$V_2 \cdot V_3 = 0$$

$$V_1 \cdot V_2 = |V_1||V_2| \cos\gamma$$



Operaciones vectoriales – producto punto

Universidad Autónoma de Nuevo León



Producto punto

- Representa qué tanto *comparten* los vectores multiplicándose.
- Si los vectores son ortogonales, no comparten componente, por lo que el producto punto sería 0.

$$V_1 \cdot V_2 = A$$

$$V_1 \cdot V_3 = 0$$

$$V_2 \cdot V_3 = 0$$

$$V_1 \cdot V_2 = (1 * 2) + (3 * 3) + (2 * 3) = 17$$

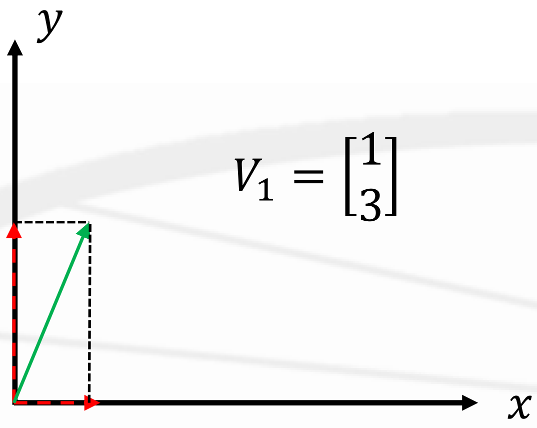
$$V_1 \cdot V_3 = (1 * 3) + (3 * 1) + (2 * -3) = 0$$

$$V_2 \cdot V_3 = (2 * 3) + (3 * 1) + (3 * -3) = 0$$

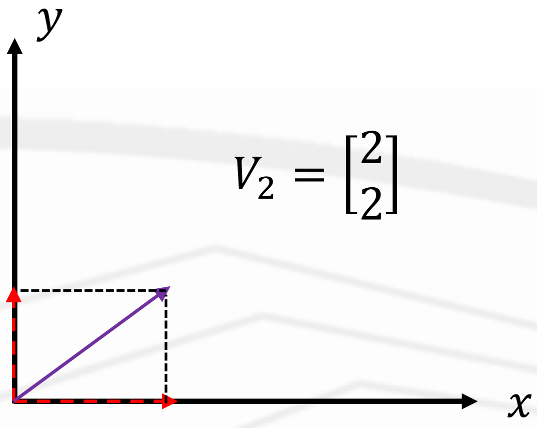
Operaciones vectoriales – suma

Suma de vectores

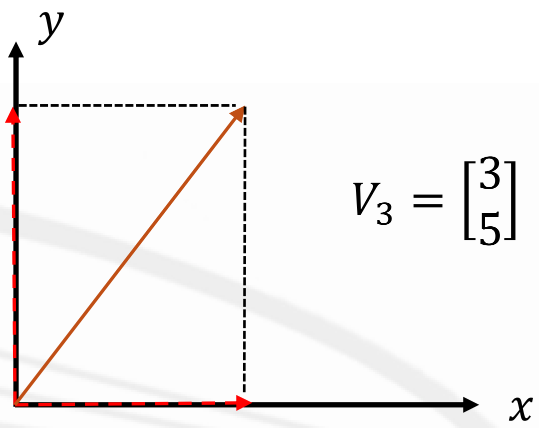
Suma la contribución de cada componente de los vectores al espacio vectorial.



$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



$$V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

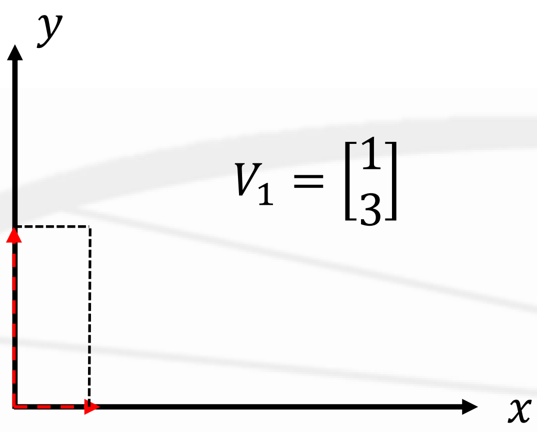


$$V_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

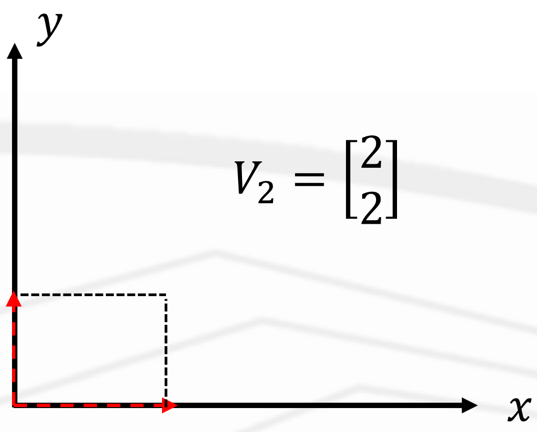
Operaciones vectoriales – suma

Suma de vectores

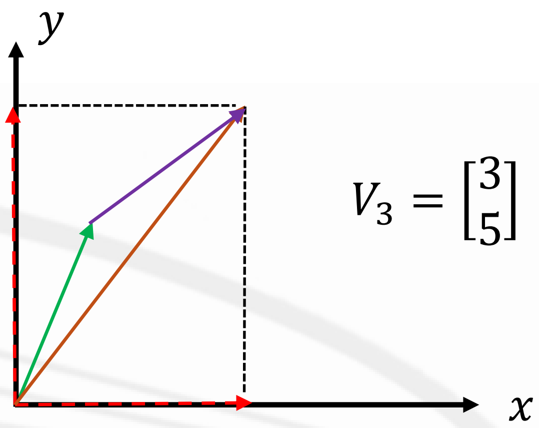
Suma la contribución de cada componente de los vectores al espacio vectorial.



$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



$$V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$V_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Operaciones vectoriales – multiplicación

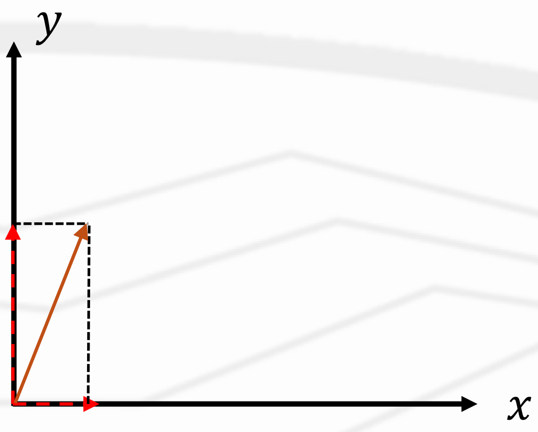
Multiplicación de vectores

Amplifica las componentes del vector a multiplicar.

$$V_2 = 2 * V_1$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Operaciones vectoriales – multiplicación

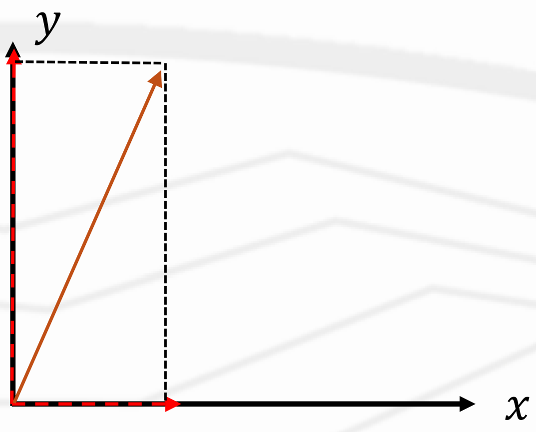
Multiplicación de vectores

Amplifica las componentes del vector a multiplicar.

$$V_2 = 2 * V_1$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

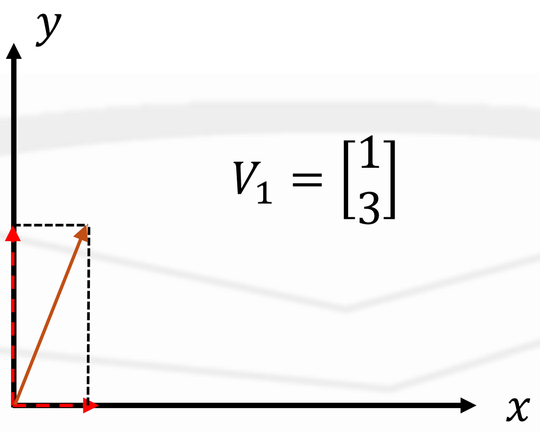


Operaciones vectoriales – multiplicación

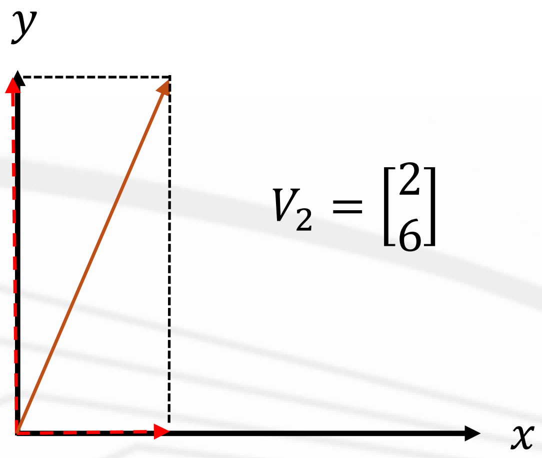
Multiplicación de vectores

Amplifica las componentes del vector a multiplicar.

$$V_2 = 2 * V_1$$



$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



$$V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matrices

Si un vector es una *lista* de elementos, una matriz, es una *lista de listas*; dicho en otras palabras, una matriz representa una colección de vectores o sub-espacios vectoriales que se relacionan de alguna manera.

$$Salida_1 = C_a * entrada_1 + C_b * entrada_2$$

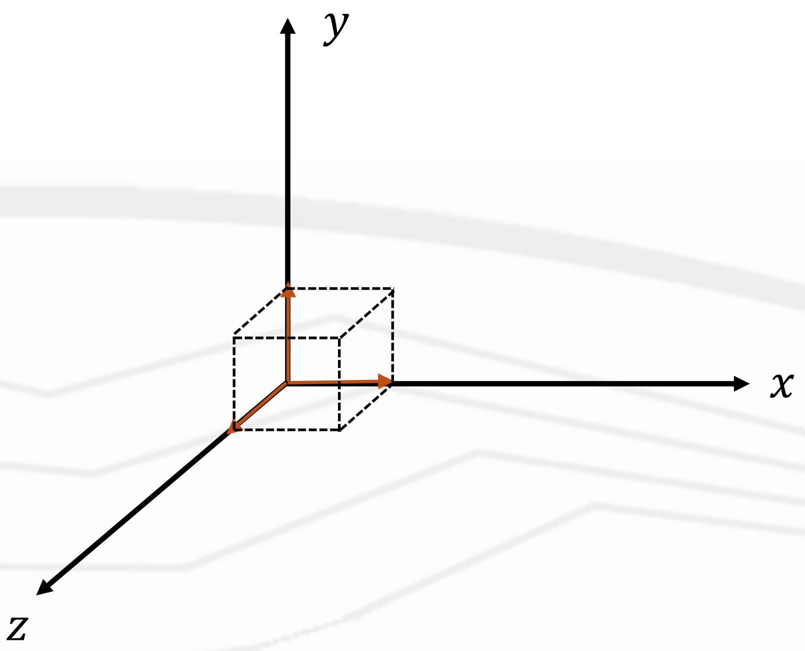
$$Salida_2 = C_c * entrada_1 + C_d * entrada_2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Salida_1 \\ Salida_2 \end{bmatrix}}_{\text{Vector de salidas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_a & C_b \\ C_c & C_d \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de coeficientes}} \underbrace{\begin{bmatrix} entrada_1 \\ entrada_2 \end{bmatrix}}_{\text{Vector de entradas}}$$

Matrices – vectores de base canónica

Vectores unitarios que por convención indican la dirección de la componente del espacio vectorial.

$$e_1 = \hat{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \hat{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_3 = \hat{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Matrices – vectores de base canónica

Vectores unitarios que por convención indican la dirección de la componente del espacio vectorial.

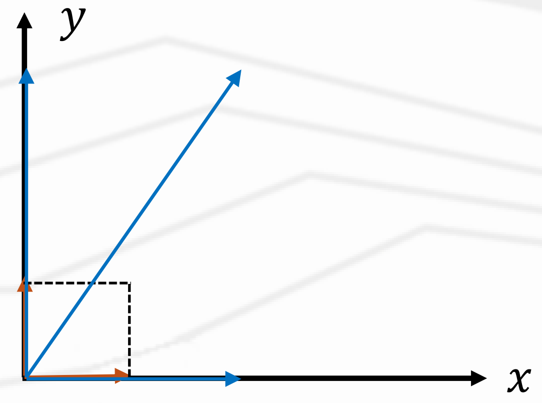
$$V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Es posible representar un vector como la amplificación del espacio vectorial definido por los vectores de base canónica.

$$V_1 = 2 * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = 2 * \hat{\imath} + 3 * \hat{\jmath}$$

$$e_1 = \hat{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



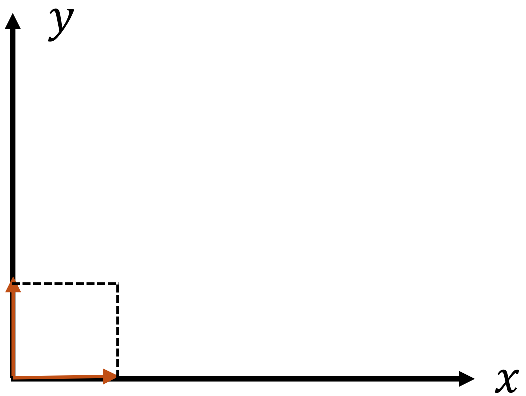
$$e_2 = \hat{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

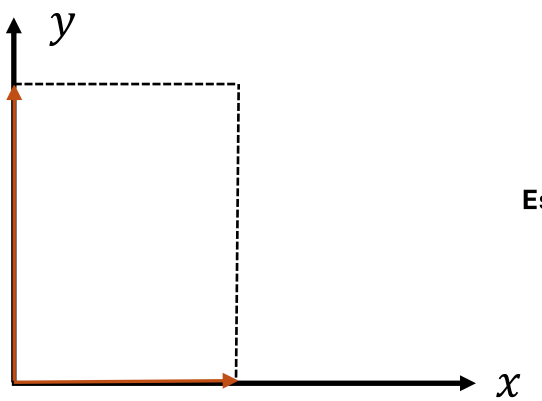
Matrices – vectores de base canónica

Universidad Autónoma de Nuevo León

Una transformación lineal representa llevar un vector de un espacio vectorial a otro.

Espacio vectorial unitario





Espacio vectorial *extendido*

$$e_{1_1} = \hat{\imath}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_{1_1} = \hat{\imath}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

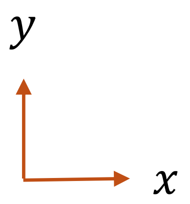
$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_{2_1} = \hat{\jmath}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

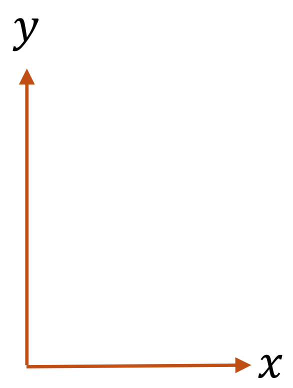
Universidad Autónoma de Nuevo León

Matrices – vectores de base canónica

Una transformación lineal representa llevar un vector de un espacio vectorial a otro.

Espacio vectorial unitario





Espacio vectorial *extendido*

$$e_{1_1} = \hat{\imath}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_{1_1} = \hat{\imath}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_{2_1} = \hat{\jmath}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrices – vectores de base canónica

Universidad Autónoma de Nuevo León

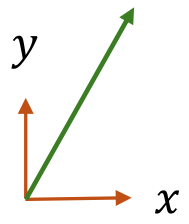
Una transformación lineal representa llevar un vector de un espacio vectorial a otro.

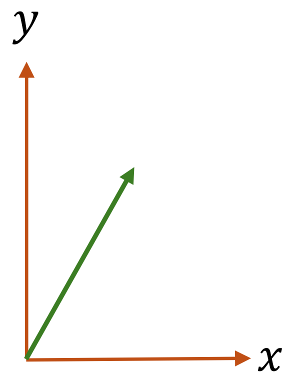
Suponiendo el siguiente vector en el espacio vectorial unitario

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \hat{\imath}_1 + 2\hat{\jmath}_1$$

Espacio vectorial unitario





Espacio vectorial *extendido*

Para obtener un vector con la misma magnitud en el *espacio vectorial extendido* se necesita:

$$e_{1_1} = \hat{\imath}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{1}{2}\hat{\imath}_1 + \frac{2}{3}\hat{\jmath}_1$$

$$e_{1_1} = \hat{\imath}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

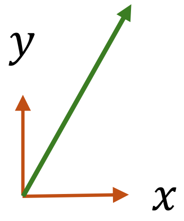
$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Universidad Autónoma de Nuevo León

Matrices – vectores de base canónica

Una transformación lineal representa llevar un vector de un espacio vectorial a otro.

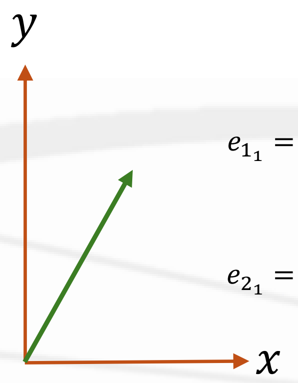
Espacio vectorial unitario



$$e_{1_1} = \hat{\imath}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Espacio vectorial extendido



$$e_{1_1} = \hat{\imath}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_2 = \begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

En el ***espacio vectorial unitario*** el vector *V* tiene coordenadas (1,2), mientras que en el ***espacio vectorial extendido*** el mismo vector tiene coordenadas (1/2, 2/3), lo que significa que se alteró su *proporción*.

Si se desea ***transformar*** de un espacio vectorial a otro, es necesario multiplicar el vector de entrada por la matriz formada por los *vectores de base canónica* del espacio a objetivo.

$$V_{out} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} V_{in}$$

$$V_{out} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$V_{out} = \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$$

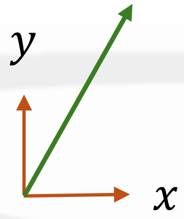
Matrices – vectores de base canónica

Universidad Autónoma de Nuevo León

Una transformación lineal representa llevar un vector de un espacio vectorial a otro.

También es posible *transformar* el vector original al nuevo espacio vectorial.

Espacio vectorial unitario

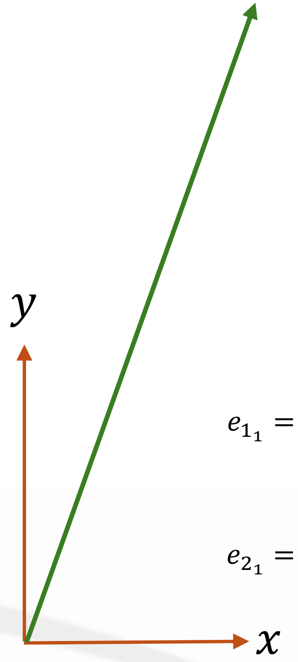


$$e_{1_1} = \hat{\imath}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Espacio vectorial *extendido*



$$e_{1_1} = \hat{\imath}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

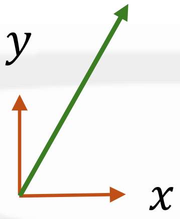
$$V = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matrices – vectores de base canónica

Una transformación lineal representa llevar un vector de un espacio vectorial a otro.

También es posible *transformar* el vector original al nuevo espacio vectorial.

Espacio vectorial unitario



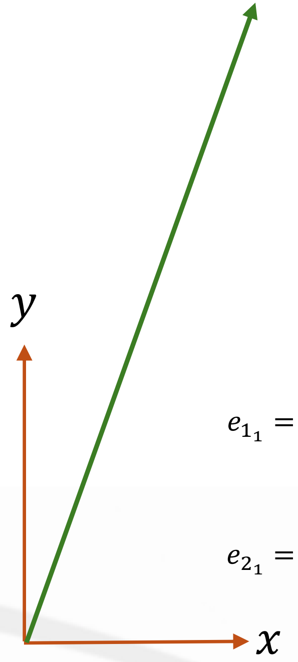
$$e_{1_1} = \hat{\imath}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Espacio vectorial *extendido*

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

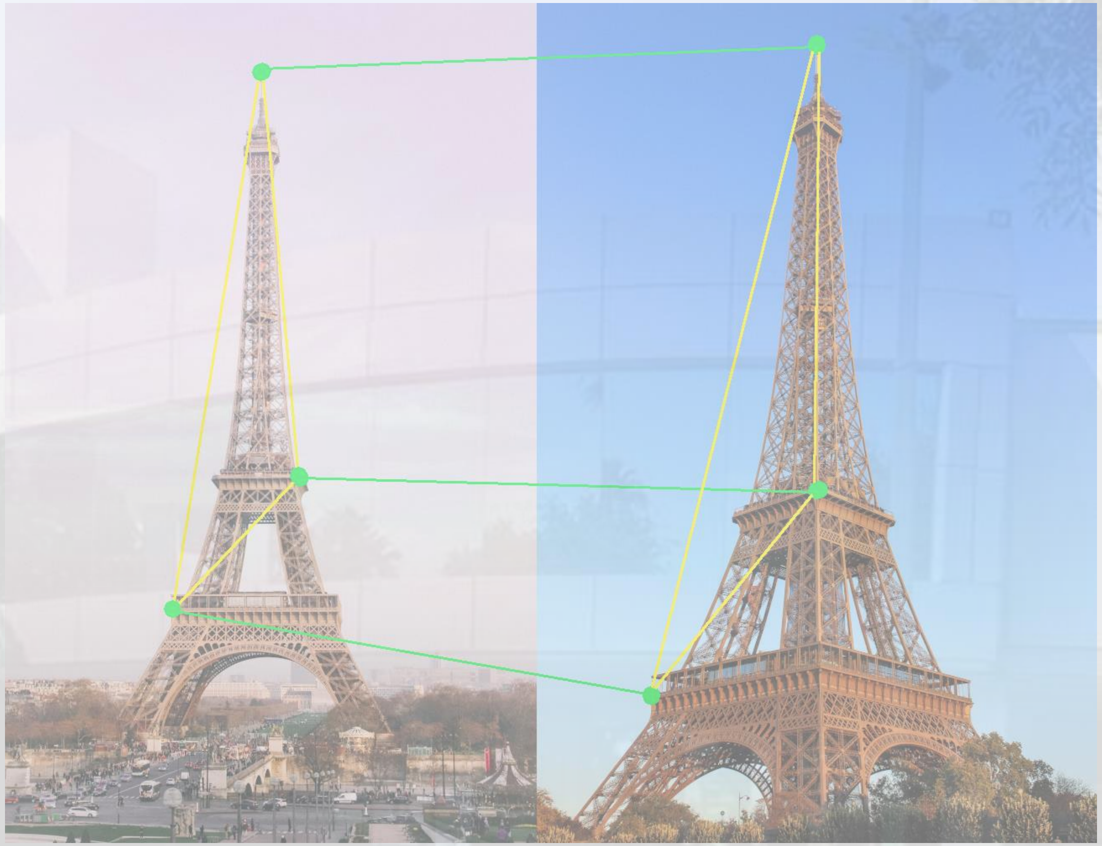


$$e_{1_1} = \hat{\imath}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Transformaciones lineales



Transformaciones – independencia lineal

Universidad Autónoma de Nuevo León

Si una matriz transforma linealmente un vector sin perder componentes es independientemente lineal; en otras palabras, no hay singularidades.

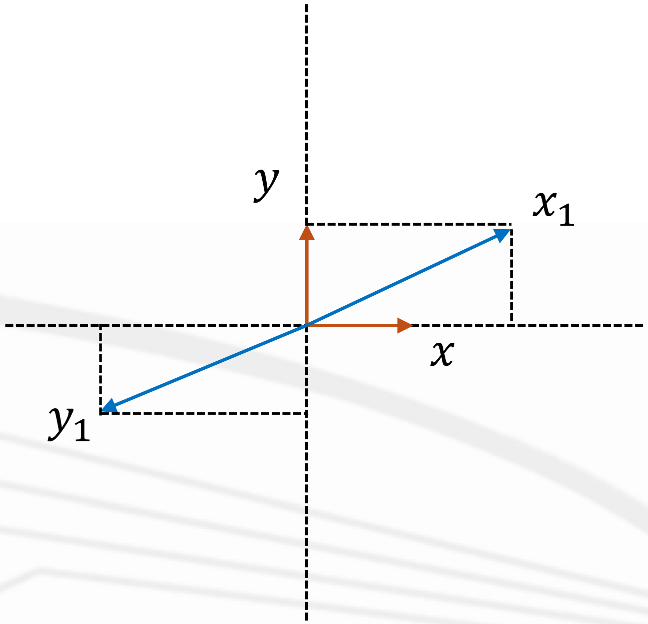
Considerando los siguientes vectores de base canónica. **Es necesario notar que *expanden* y *giran* el espacio vectorial**.

$$\hat{\imath}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\jmath}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estos vectores forman la siguiente matriz de *transformación*.

$$V_{out} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} V_{in}$$

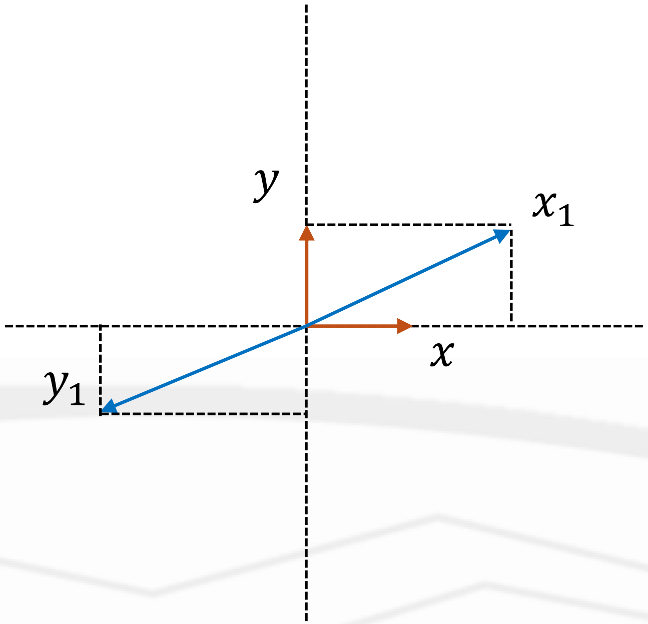
Graficando el nuevo espacio vectorial junto con un espacio vectorial unitario.



Ambos *ejes* del espacio vectorial quedan ***alineados***.

Transformaciones – independencia lineal

Si una matriz transforma linealmente un vector sin perder componentes es independientemente lineal; en otras palabras, no hay singularidades.

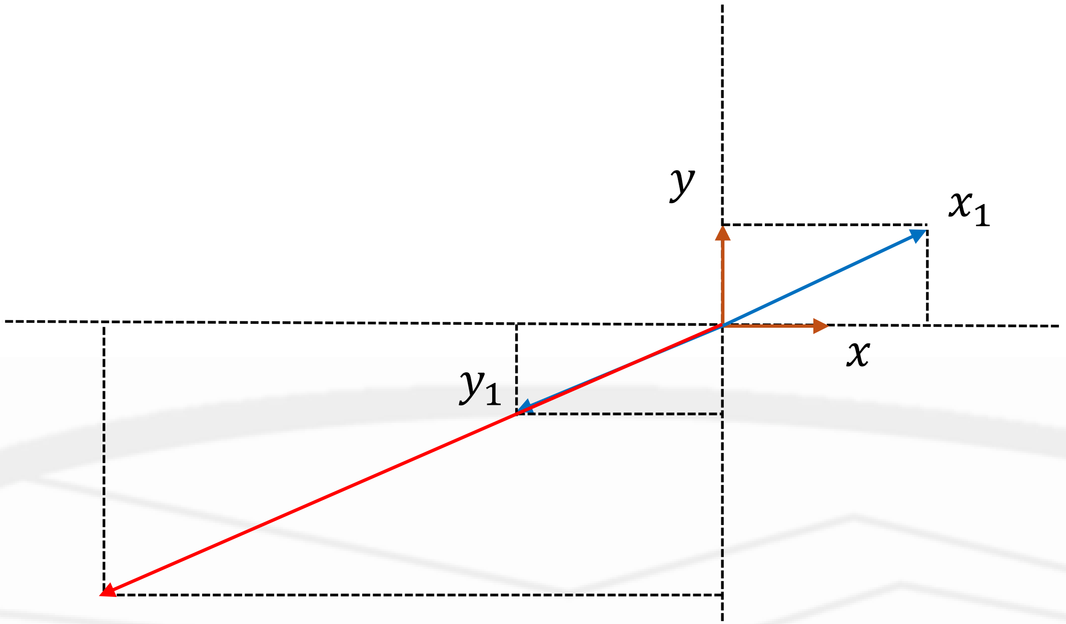


$$V_{out} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ambos *ejes* del espacio vectorial quedan ***alineados***.

Transformaciones – independencia lineal

Si una matriz transforma linealmente un vector sin perder componentes es independientemente lineal; en otras palabras, no hay singularidades.



$$V_{out} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ambos *ejes* del espacio vectorial quedan ***alineados***.

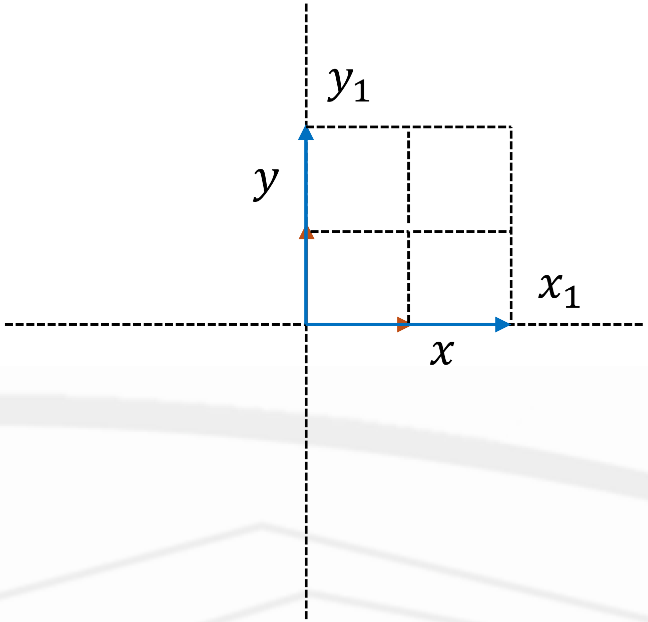
Transformaciones – determinante

Universidad Autónoma de Nuevo León

El determinante es el *área* de expansión del espacio vectorial.

$$V_{out} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} V_{in}$$

$$\hat{\imath}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\jmath}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

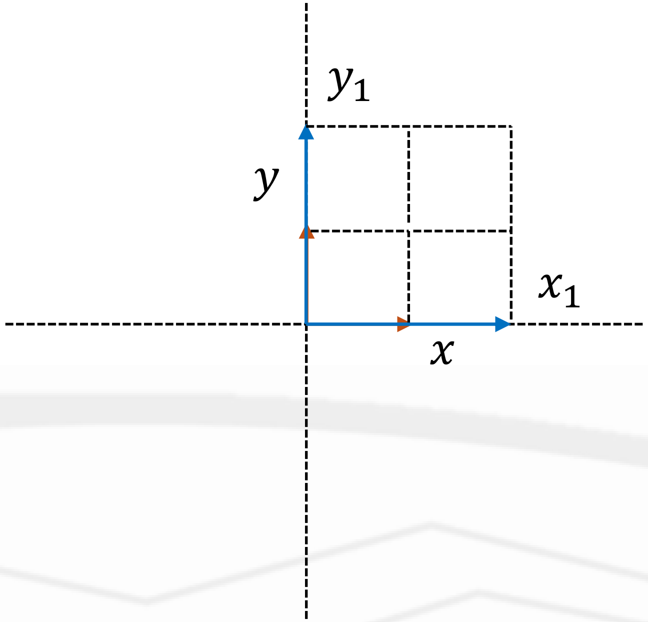


Transformaciones – determinante

El determinante es el *área* de expansión del espacio vectorial.

$$V_{out} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} V_{in}$$

$$\hat{\imath}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\jmath}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

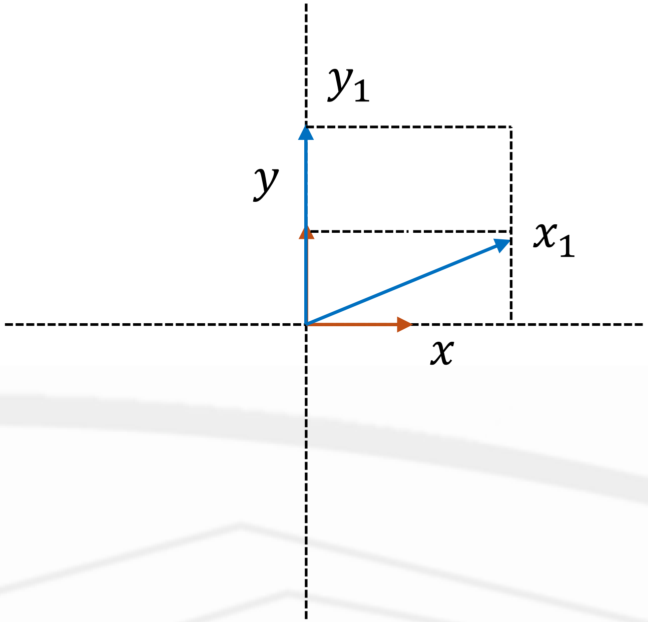
$$\det(M) = (2 * 2) - (0 * 0) = 4$$

Transformaciones – Ortogonalidad

Establece si la transformación lineal lleva a un espacio vectorial con componentes ortogonales.

$$V_{out} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} V_{in}$$

$$\hat{\imath}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\jmath}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

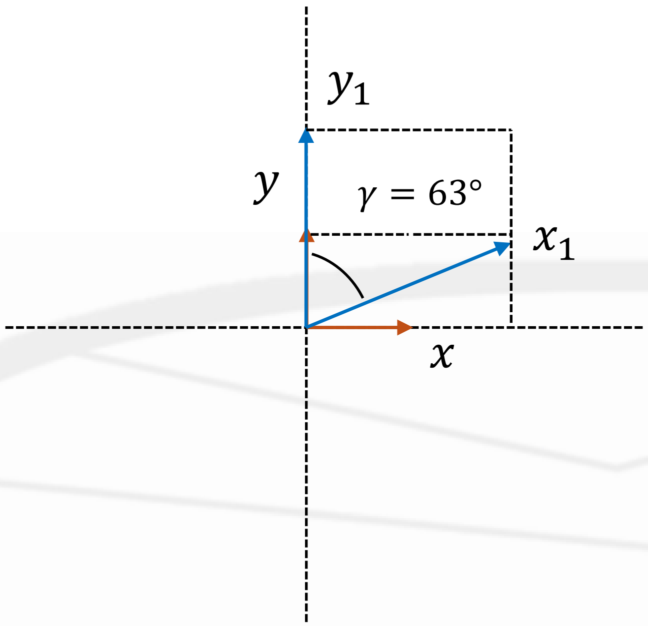


Transformaciones – Ortogonalidad

Universidad Autónoma de Nuevo León

Establece si la transformación lineal lleva a un espacio vectorial con componentes ortogonales.

$$V_{out} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} V_{in}$$



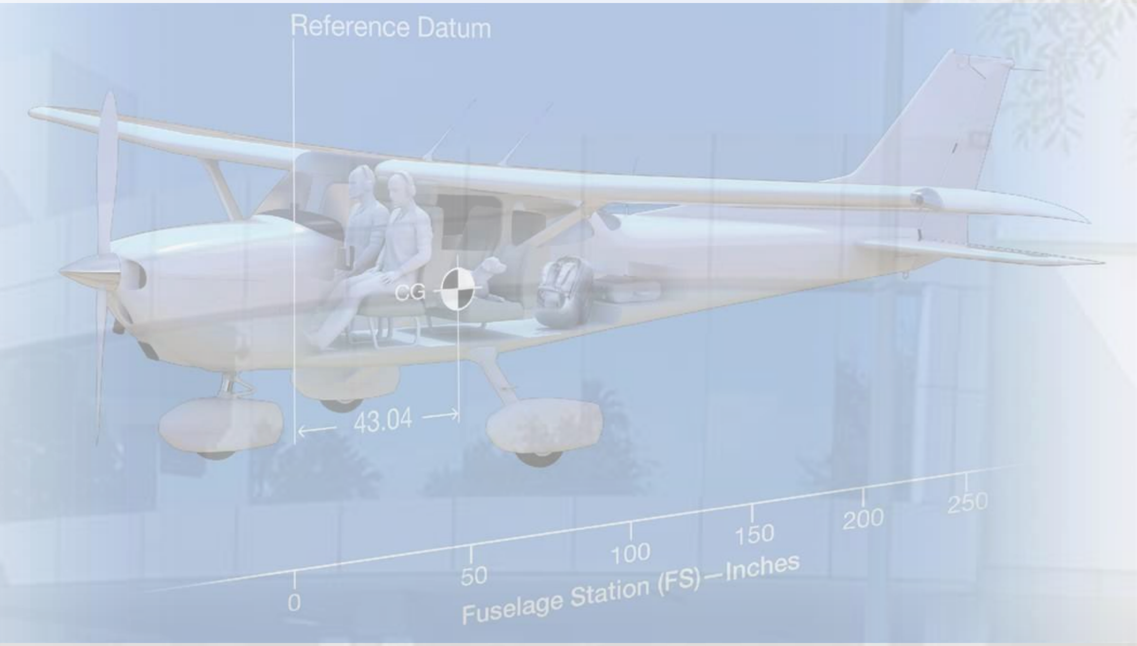
$$o = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = (2 * 0) + (1 * 2) = 2$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \cos\gamma = (2 * 0) + (1 * 2) = 2$$

$$|2.236||2|\cos\gamma = (2 * 0) + (1 * 2) = 2$$

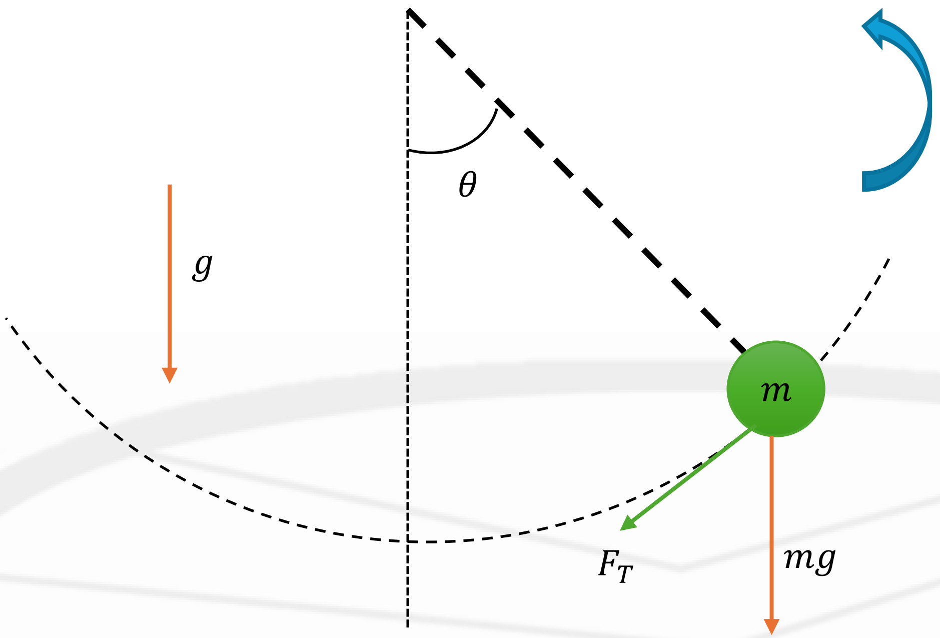
$$\gamma = 63°$$

Tensor de inercia



Tensor de inercia

Universidad Autónoma de Nuevo León



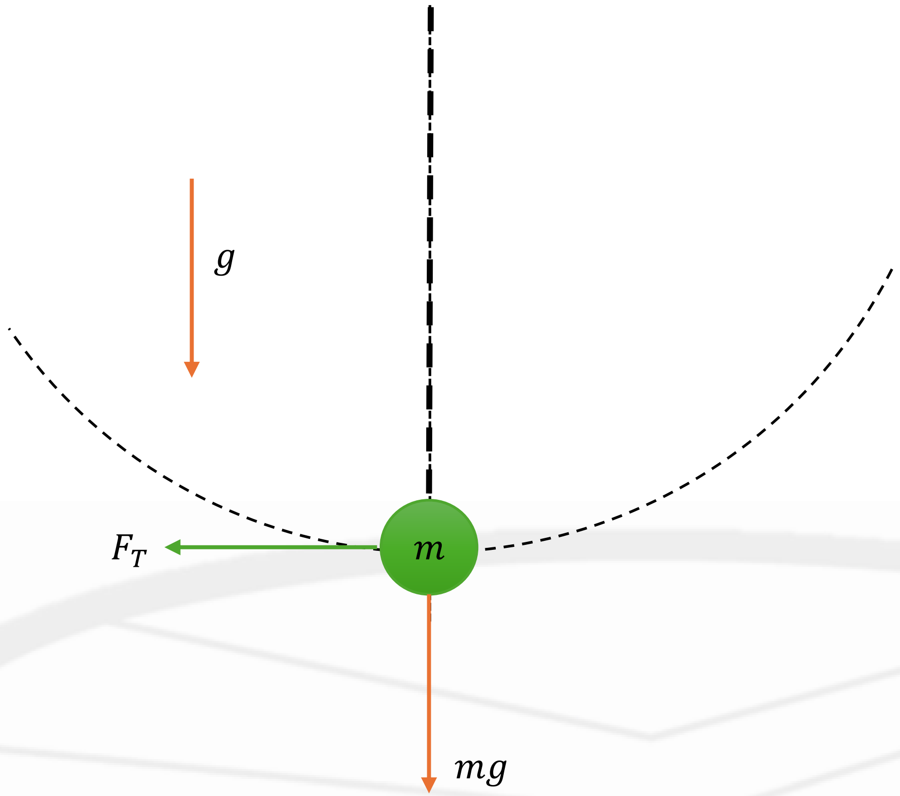
Para obtener el cómo se calcula el momento de inercia es necesario analizar el movimiento de una masa en un sistema giratorio. Esto puede ser visto como el problema del péndulo.

Considerando el siguiente sistema donde se tiene una masa infinitamente pequeña y unida a un centro de giro por una barra con masa despreciable; la única componente de fuerza que se tiene es la gravedad.

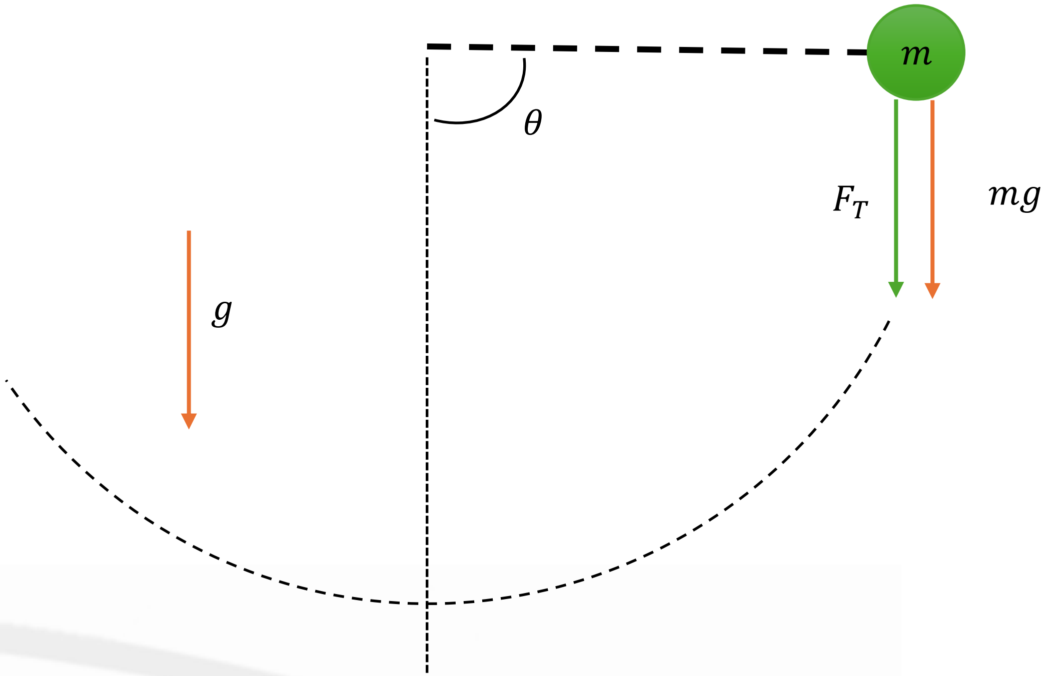
El peso de la masa siempre es perpendicular a tierra, por lo que, dependiendo del ángulo de la masa, este se verá reflejado de distinta manera en el centro de giro.

Tensor de inercia

Universidad Autónoma de Nuevo León



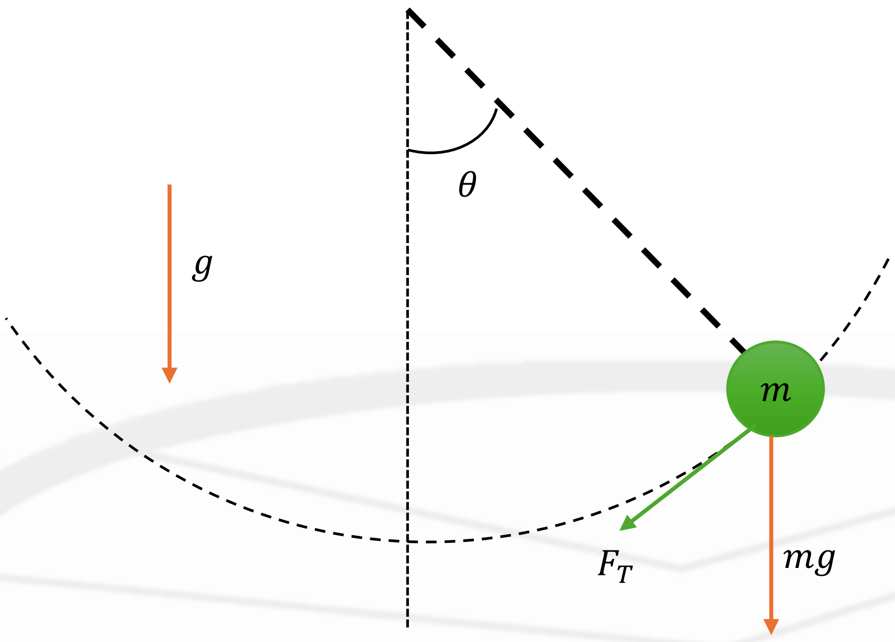
Vector de peso a 90° de la dirección tangencial de giro.



Vector de peso alineado con la dirección tangencial de giro.

Tensor de inercia

Universidad Autónoma de Nuevo León



Definiendo las componentes de fuerza:

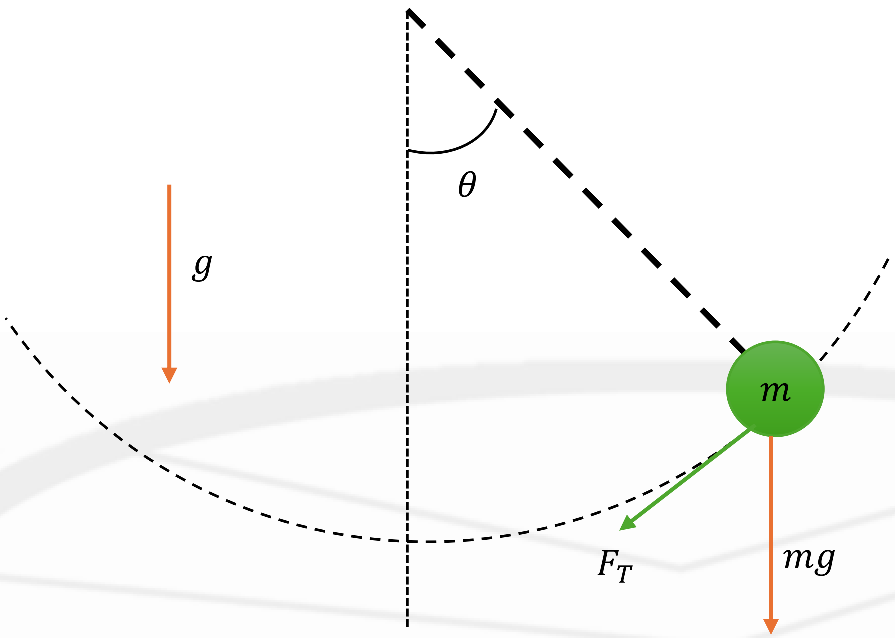
$$F_T = mg\sin\theta$$

Recordar que la componente senoidal de desvanece a 0°.

Utilizando la segunda Ley de Newton:

$$J\ddot{\theta} = \sum \tau$$

Tensor de inercia



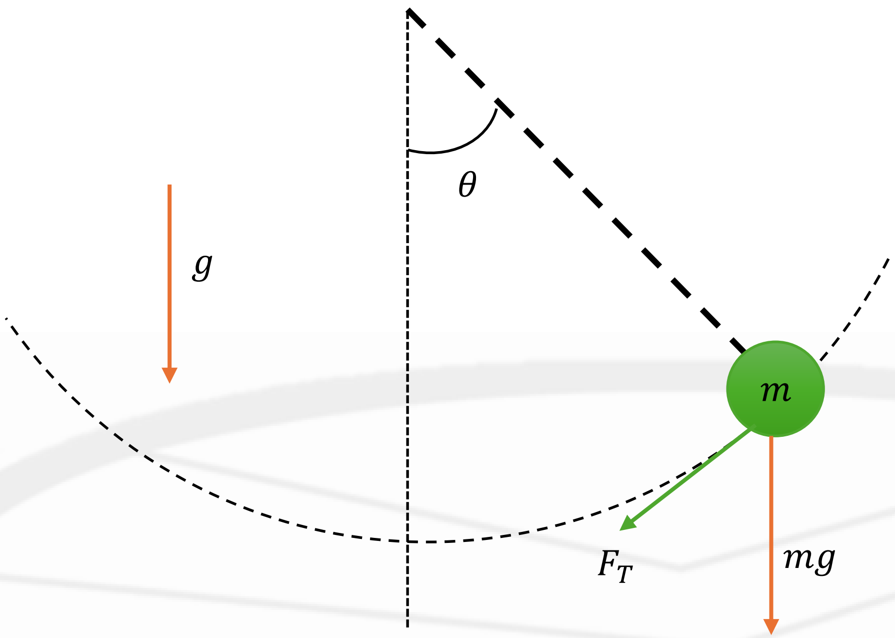
Obteniendo el momento que genera la componente de fuerza:

$$\tau = -lmg\sin\theta$$

Sustituyendo:

$$J\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta$$

Tensor de inercia



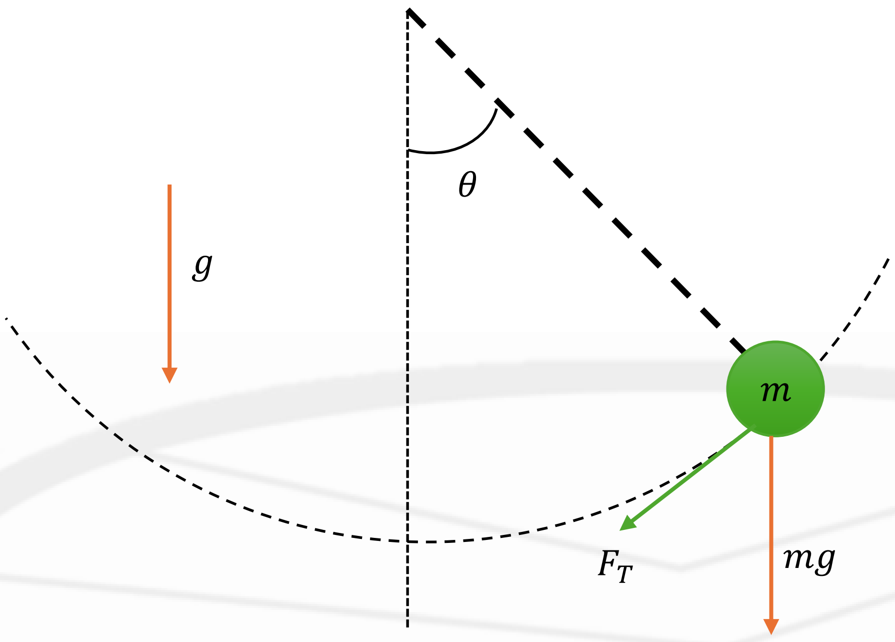
$$J\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta$$

Considerando ahora la segunda *Ley de Newton* pero desde el punto de referencia de la masa:

$$m\ddot{x} = F_T$$

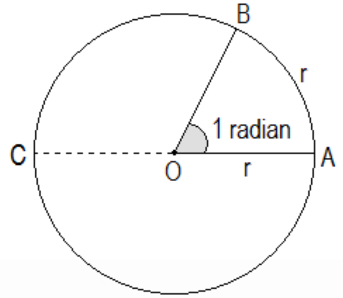
Tomando *x* como la componente de movimiento lineal siempre tangente a la circunferencia de giro.

Tensor de inercia



$$J\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta$$
$$m\ddot{x} = F_T$$

Recordando que un ángulo de 1 radian significa aquel ángulo que se forma por una longitud de arco igual a un radio:



Esto lleva a definir que la longitud de arco recorrida es igual a:

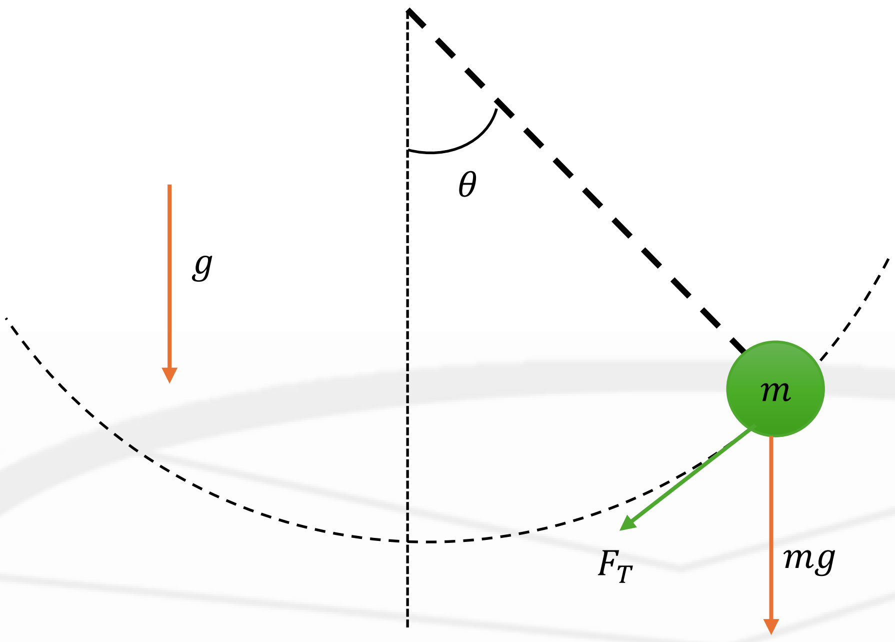
$$P_r = l\theta$$

Por lo que si se deriva respecto al tiempo para obtener velocidad lineal:

$$\dot{x} = l\dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = l\ddot{\theta} \longleftarrow \text{Y obteniendo aceleración:}$$

Tensor de inercia



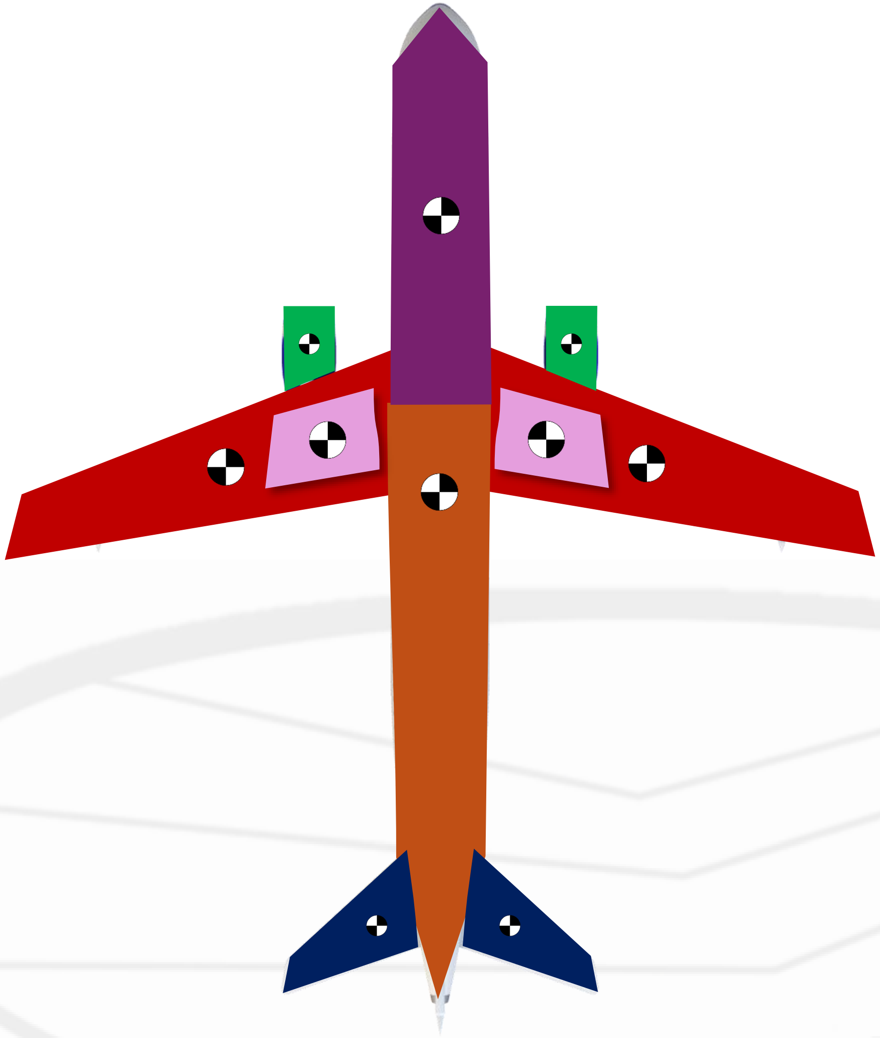
$$J\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta$$
$$m\ddot{x} = F_T$$
$$\ddot{x} = l\ddot{\theta}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$ml\ddot{\theta} = F_T = mg\sin\theta$$
$$J\ddot{\theta} = -lml\ddot{\theta}$$
$$J = ml^2$$

Esto significa que la masa tiene un momento de inercia proporcional a su masa y cuadráticamente proporcional a la distancia al punto de giro.
Nótese que se omite el signo negativo dado el análisis de direcciones de velocidad lineal.

Tensor de inercia de una aeronave



Para el cálculo del tensor de inercia en una aeronave es necesario considerar los elementos que aportan *momento de inercia*, por lo que se requieren sus posiciones y pesos.

De acuerdo con el *Teorema de Eje Paralelo*, la suma de los momentos de inercia por eje que cada componente aporta da como resultado el momento de inercia total en ese eje.

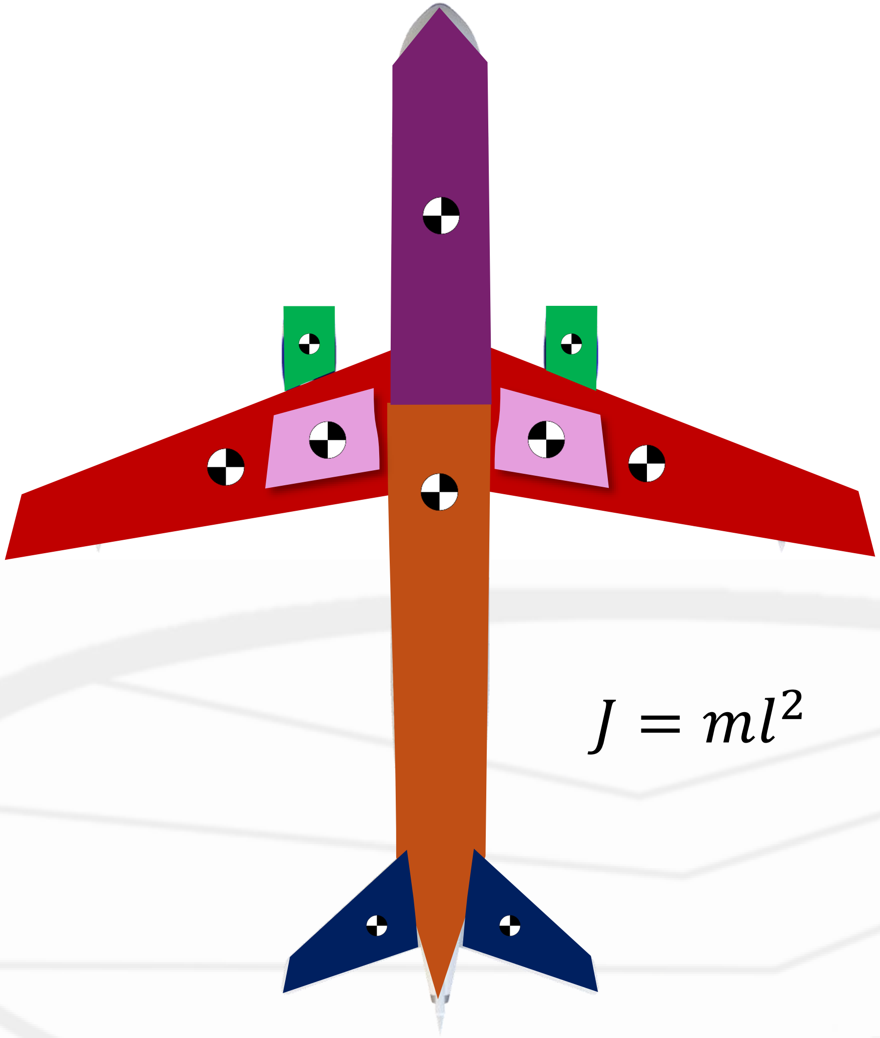
$$J = ml^2$$

En una aeronave los elementos que más aportan al tensor de inercia son:

- Peso de cada semi-ala.
- Peso de cada semi-estabilizador.
- Peso de los propulsores.
- Peso de las secciones de fuselaje.
- Peso del combustible.

Tensor de inercia de una aeronave

Universidad Autónoma de Nuevo León



$$J = ml^2$$

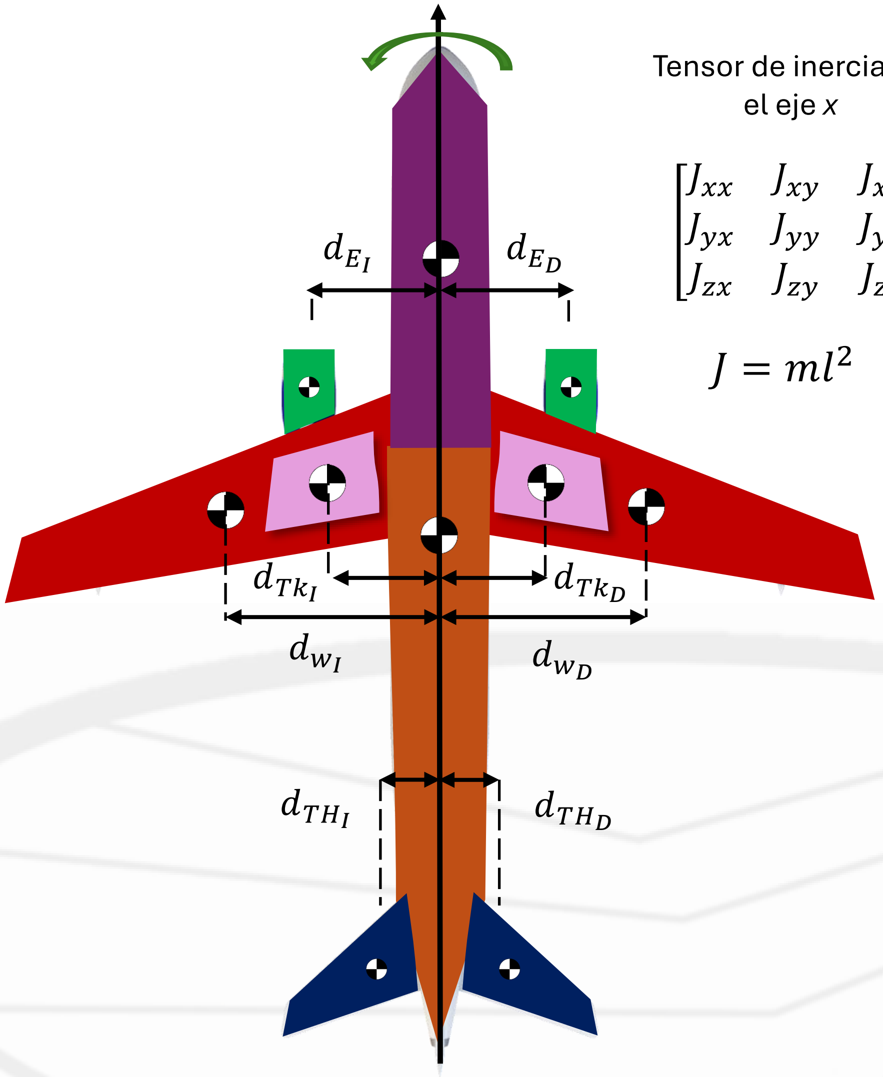
Considerando un *Airliner* típico, como el **Boeing 737-800**, se puede estimar de manera general la distribución de masa como:

- Peso de cada semi-ala – (x2) 30%
- Peso de cada semi-estabilizador – (x2) 10%
- Peso de los propulsores – (x2) 10%
- Peso de las secciones de fuselaje – (x2) 35%
- Peso del combustible – (x2) 15%

Sabiendo que en una configuración típica esta aeronave tiene una masa total de aproximadamente 65,000 Kg, cada elemento pesa:

- Semi-ala izquierda 9,750 Kg.
- Semi-ala derecha 9,750 Kg.
- Semi-estabilizador izquierdo 3,250 Kg.
- Semi-estabilizador derecho 3,250 Kg.
- Propulsor izquierdo 6,500 Kg.
- Propulsor derecho 6,500 Kg.
- Sección delantera del fuselaje 13,000 kg.
- Sección trasera del fuselaje 9,750 Kg.
- Tanque de combustible izquierdo: 4,875 Kg.
- Tanque de combustible derecho: 4,875 Kg.

Tensor de inercia de una aeronave



Tensor de inercia en el eje *x*

$$\begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

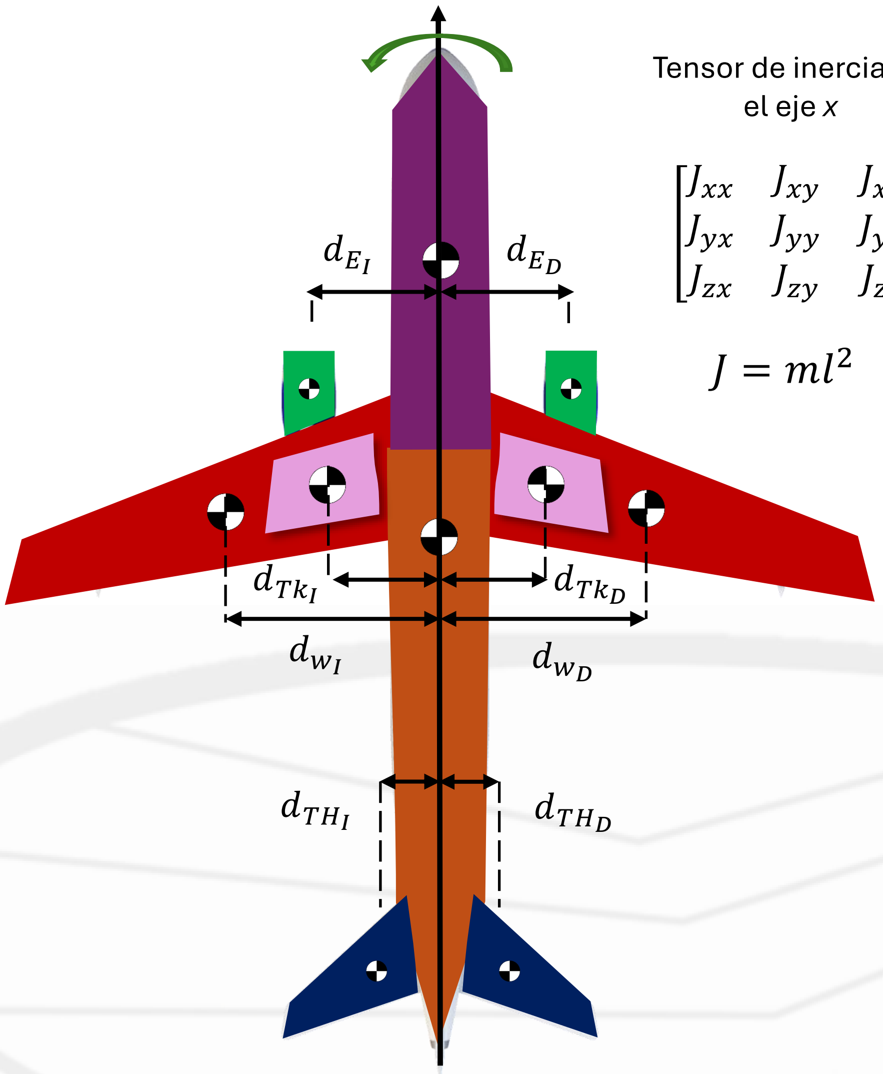
$$J = ml^2$$

- Semi-ala izquierda 9,750 Kg.
- Semi-ala derecha 9,750 Kg.
- Semi-estabilizador izquierdo 3,250 Kg.
- Semi-estabilizador derecho 3,250 Kg.
- Propulsor izquierdo 6,500 Kg.
- Propulsor derecho 6,500 Kg.
- Sección delantera del fuselaje 13,000 kg.
- Sección trasera del fuselaje 9,750 Kg.
- Tanque de combustible izquierdo: 4,875 Kg.
- Tanque de combustible derecho: 4,875 Kg.

$$J_{xx} = m_{w_I} d_{w_I}^2 + m_{w_D} d_{w_D}^2 + m_{E_I} d_{E_I}^2 + m_{E_D} d_{E_D}^2 + m_{TH_I} d_{TH_I}^2 + m_{TH_D} d_{TH_D}^2 + m_{TK_I} {d_{Tk_I}}^2 + m_{TK_D} {d_{Tk_D}}^2$$

Tensor de inercia de una aeronave

Universidad Autónoma de Nuevo León



Tensor de inercia en el eje *x*

$$\begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

$$J = ml^2$$

- Semi-ala izquierda 9,750 Kg.
- Semi-ala derecha 9,750 Kg.
- Semi-estabilizador izquierdo 3,250 Kg.
- Semi-estabilizador derecho 3,250 Kg.
- Propulsor izquierdo 6,500 Kg.
- Propulsor derecho 6,500 Kg.
- Sección delantera del fuselaje 13,000 kg.
- Sección trasera del fuselaje 9,750 Kg.
- Tanque de combustible izquierdo: 4,875 Kg.
- Tanque de combustible derecho: 4,875 Kg.

$$J_{xx} = m_{W_I}d_{W_I}^2 + m_{W_D}d_{W_D}^2 + m_{E_I}d_{E_I}^2 + m_{E_D}d_{E_D}^2 + m_{TH_I}d_{TH_I}^2 + m_{TH_D}d_{TH_D}^2 + m_{TK_I}{d_{Tk_I}}^2 + m_{TK_D}{d_{Tk_D}}^2$$

$d_{W_I} = 6\,m$ | $d_{W_D} = 6\,m$

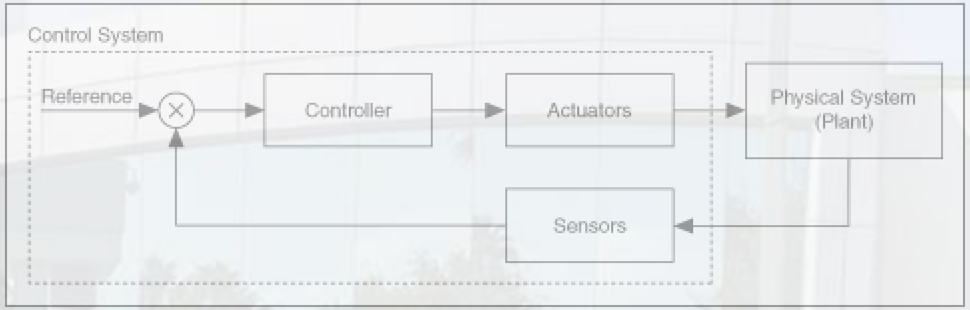
$d_{TH_I} = 2\,m$ | $d_{TH_D} = 2\,m$

$d_{E_I} = 4.9\,m$ | $d_{E_D} = 4.9\,m$

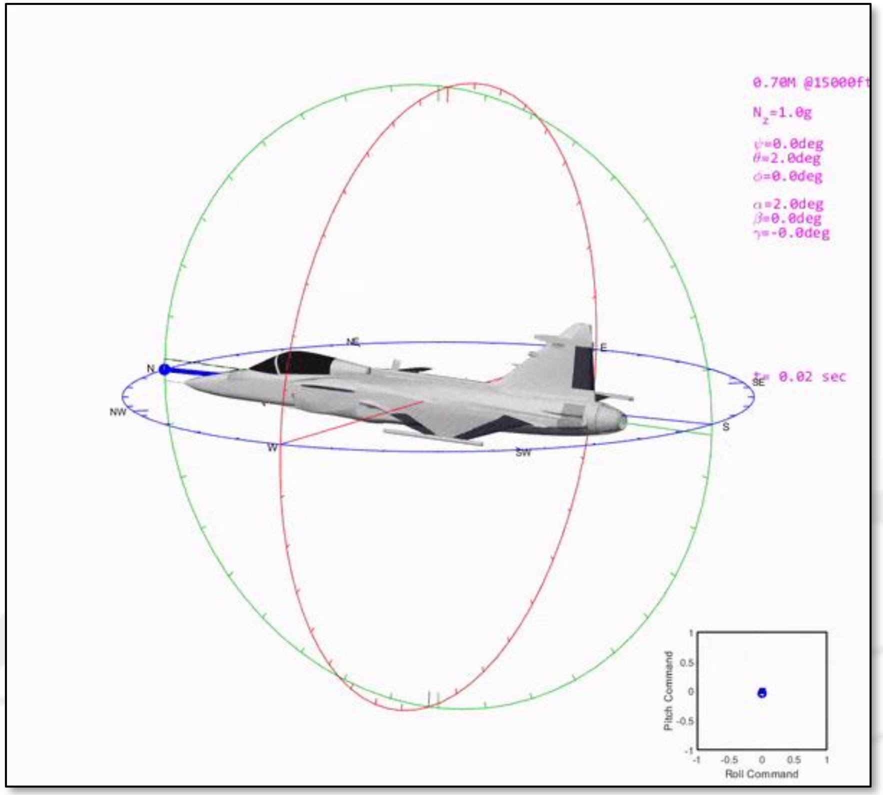
$d_{Tk_I} = 5$ | $d_{Tk_D} = 5\,m$

$$J_{xx} = 1{,}283{,}880\ kgm^2$$

Sistemas dinámicos



Análisis de fuerzas



El término *grados de libertad* (GDL) se refiere al número de valores o parámetros independientes que un sistema puede tener.

Desde la perspectiva de cuerpos rígidos en movimiento, el número de *movimientos* diferentes se consideran como GDL; por lo tanto, un cuerpo rígido puede tener **3 rotaciones y 3 movimientos lineales.**

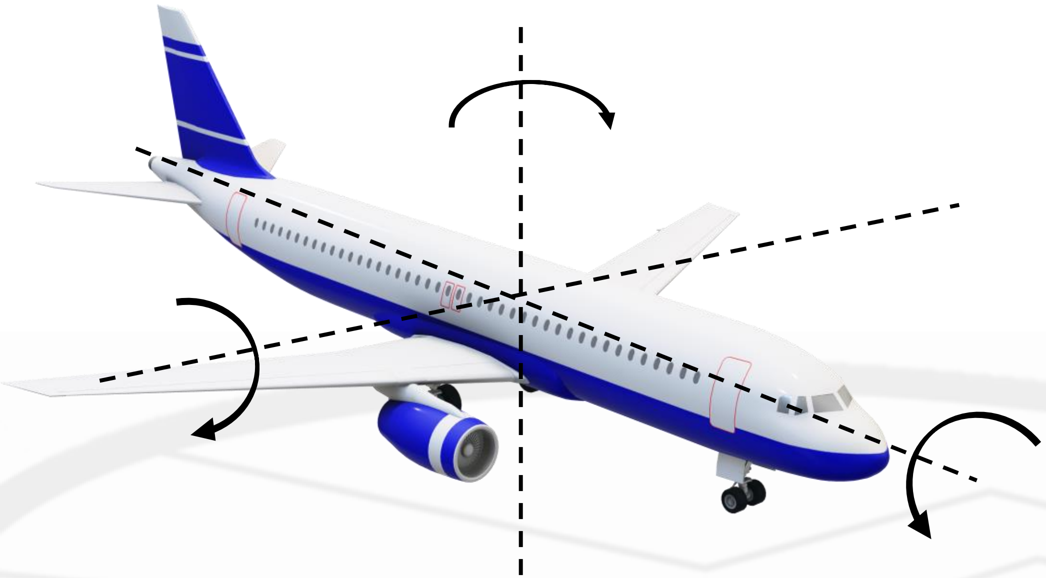
En mecanismos, podría haber más de 6 GDL. Cada GDL representa el movimiento individual de una parte del mecanismo. Por ejemplo, en una aeronave, existen muchos mecanismos que pueden tener numerosos GDL, como:

- Superficies de control.
- Tren de aterrizaje.
- Motores.
- Sistema hidráulico.

<u>**Cada GDL puede describirse mediante una única ecuación.**</u>

Análisis de fuerzas

Universidad Autónoma de Nuevo León



$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = m\ddot{y}$$

$$\sum F_z = m\ddot{z}$$

Conservación de momentum lineal

$$\vec{F} = m\dot{\vec{V}}$$

$$\sum M_x = J_{xx}\,\dot{\omega}_x$$

$$\sum M_y = J_{yy}\,\dot{\omega}_y$$

$$\sum M_z = J_{zz}\,\dot{\omega}_z$$

Conservación de momentum angular

$$\vec{\tau} = J\dot{\vec{\Omega}}$$

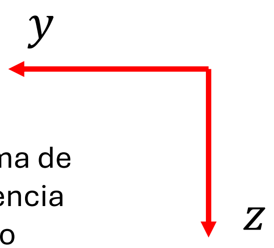
$$\vec{\tau} = J\dot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega} \times (J\vec{\Omega})$$

Esto solo es válido si las velocidades angulares son cercanas a 0.

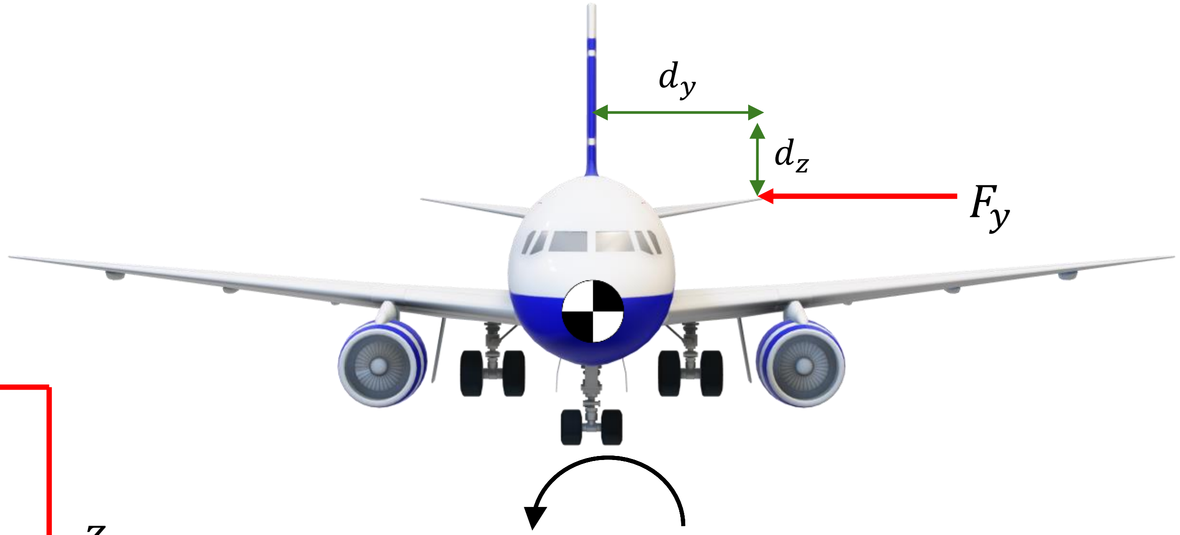
m Masa del cuerpo rígido

J Tensor de inercia

Análisis de momentos



Sistema de referencia fijo



Considerando la regla de la mano derecha para el sentido positivo del giro

Sabiendo que la fuerza es **positiva** y la distancia **negativa**, el momento alrededor del eje *x* resultara positivo tal como:

$$M_x = d_y F_z - d_z F_y$$

$$M_x = -d_z F_y$$

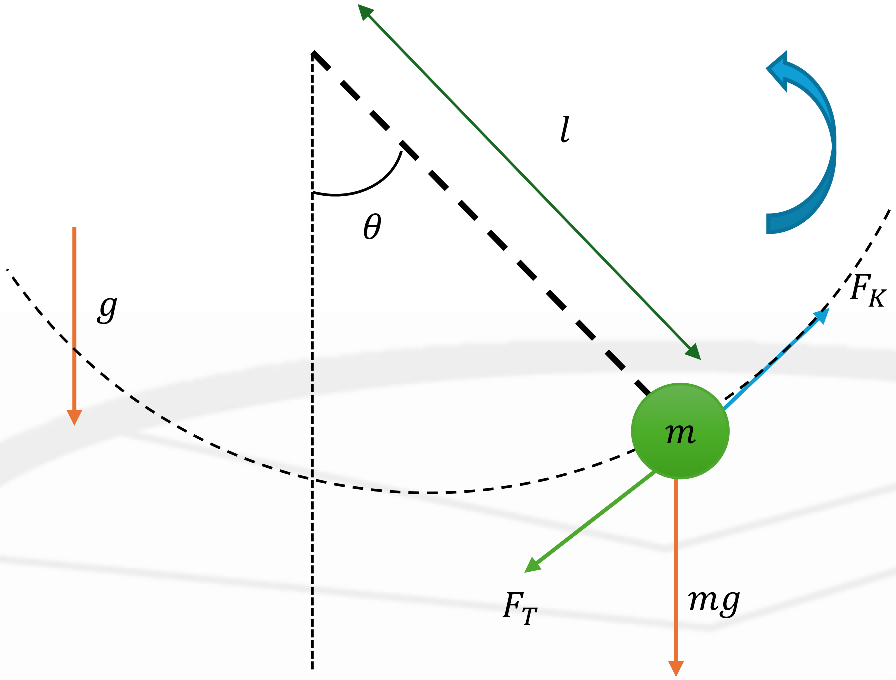
$$\hat{M} = \hat{r} \times \hat{F}$$

Ecuación de momentos vectorial

$$\hat{M} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ d_x & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} d_y F_z - d_z F_y \\ d_z F_x - d_x F_z \\ d_x F_y - d_y F_x \end{bmatrix}$$

Punto de equilibrio

Universidad Autónoma de Nuevo León



$$J\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta$$

Terminando de resolver el modelo para el caso del péndulo; y considerando ahora una resistencia al avance por fricción simple:

$$F_K = b\dot{x}$$

Recordando que:

$$-\dot{x} = l\dot{\theta}$$

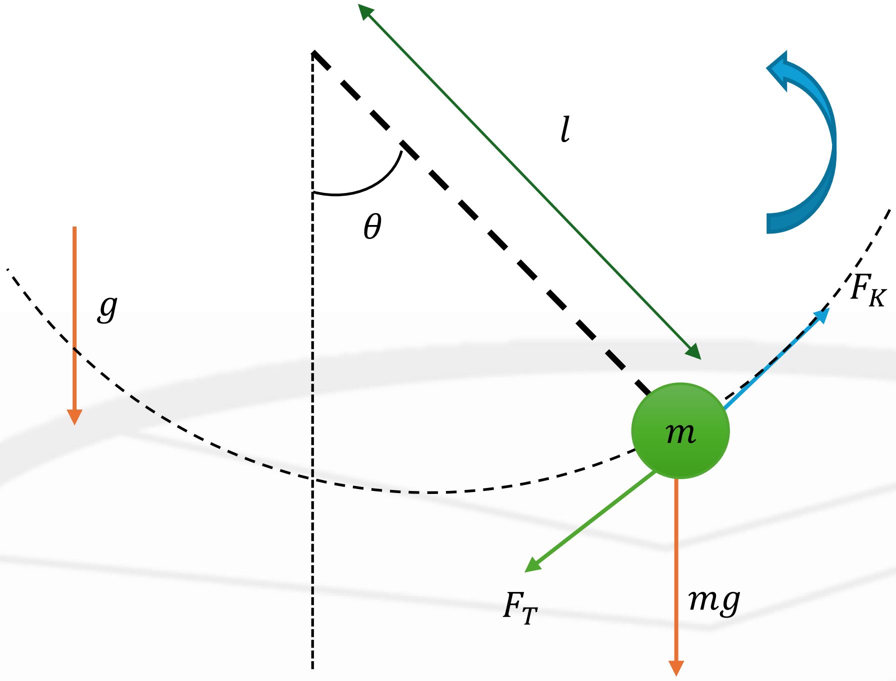
$$F_K = -bl\dot{\theta}$$

Reacomodando términos:

$$J\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta - bl^2\dot{\theta}$$

Punto de equilibrio

Universidad Autónoma de Nuevo León



$$J\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta - bl^2\dot{\theta}$$

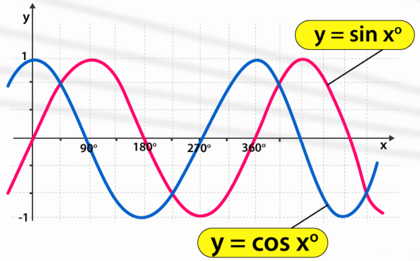
Los puntos de equilibrio son aquellos valores de los estados del sistema donde este ya no está en movimiento; esto es, no hay velocidad o aceleraciones, por lo tanto:

$$J0 = -lmg\sin\theta - bl^2 0$$

$$0 = \sin\theta$$

$$\theta = \operatorname{asin} 0$$

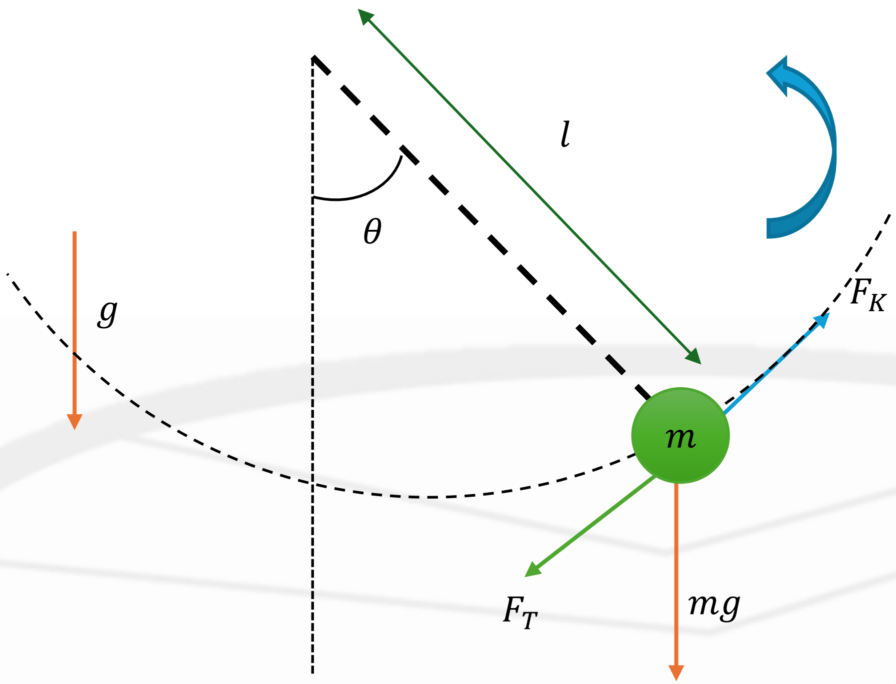
Una función senoidal es 0 a 0° y 180°; esto significa que el péndulo puede estar en reposo en estas dos posiciones; sin embargo, a 0° se tiene un punto de equilibrio estable, y a 180° inestable.

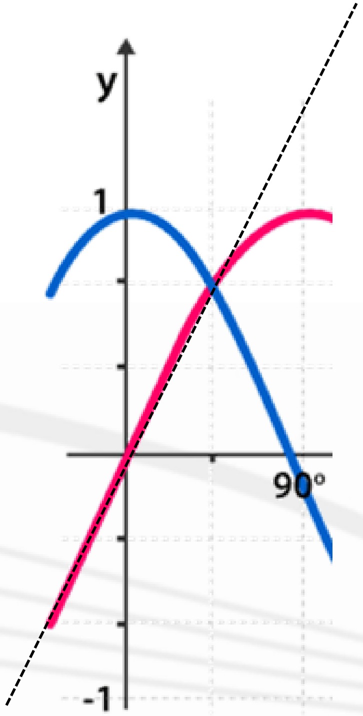


Punto de equilibrio – linealización

$$J\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta - bl^2\dot{\theta}$$

Es posible notar que una senoidal se comporta de manera recta en un rango pequeño de ángulos.

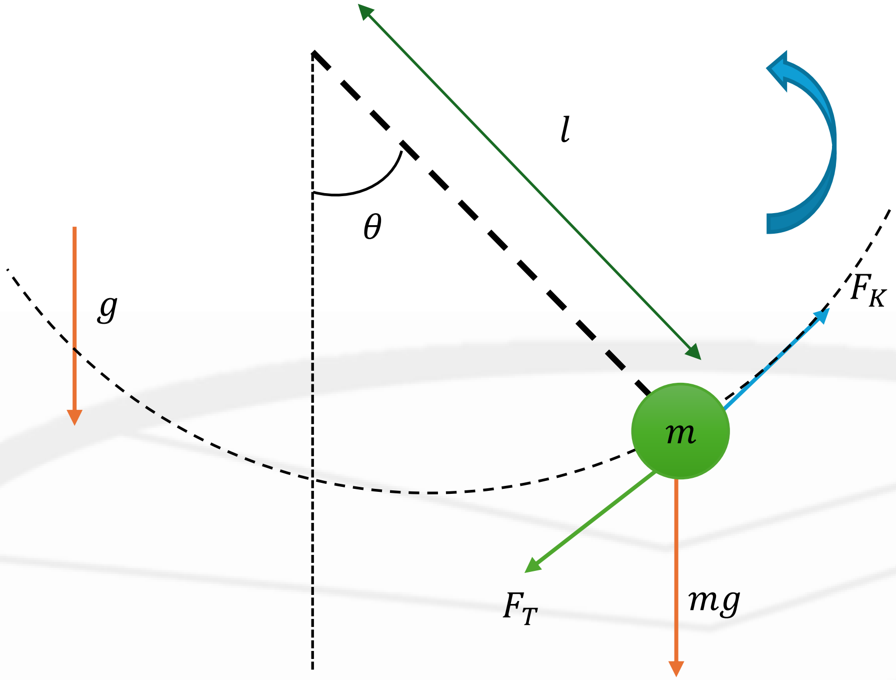


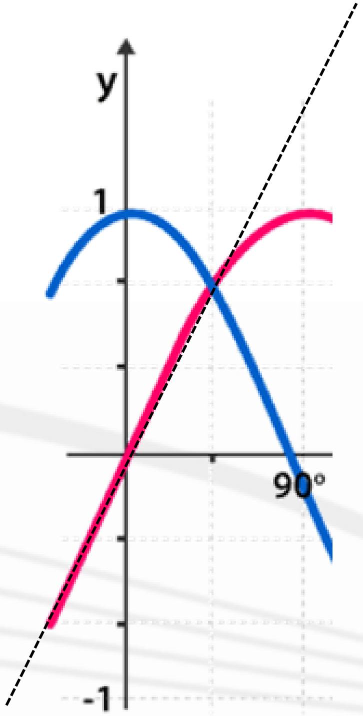


Punto de equilibrio – linealización

$$J\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta - bl^2\dot{\theta}$$

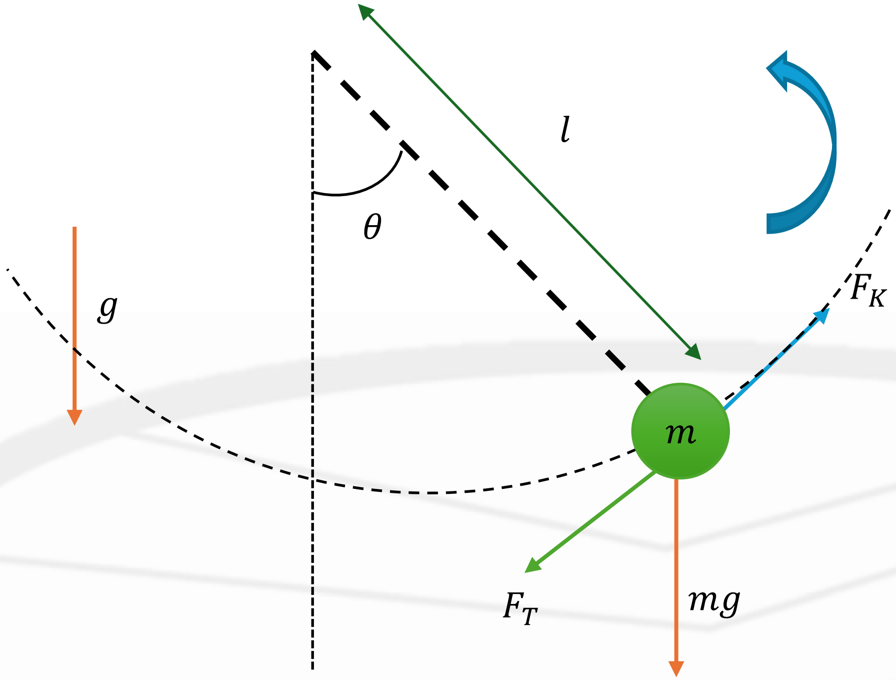
Es posible notar que una senoidal se comporta de manera recta en un rango pequeño de ángulos.





Punto de equilibrio – linealización

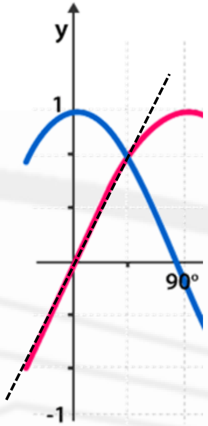
Universidad Autónoma de Nuevo León



$$J\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta - bl^2\dot{\theta}$$

Es posible notar que una senoidal se comporta de manera recta en un rango pequeño de ángulos.

Esto lleva a que para ángulos pequeños:



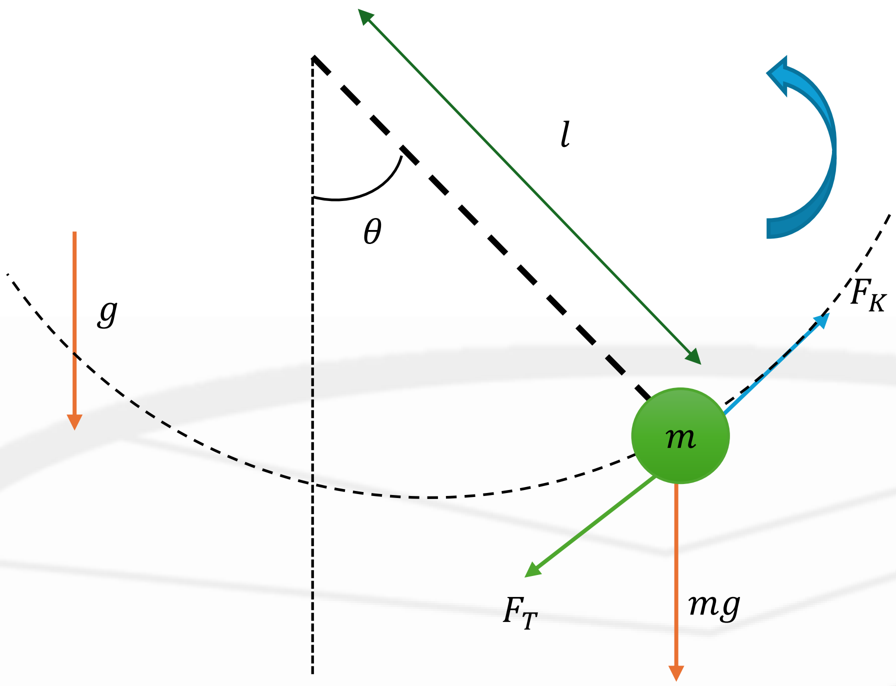
$$\sin\theta \approx \theta$$

Por lo tanto, el modelo dinámico:

$$J\ddot{\theta} = -lmg\,\theta - bl^2\dot{\theta}$$

Punto de equilibrio – linealización

Universidad Autónoma de Nuevo León



$$J\ddot{\theta} = -lmg\,\theta - bl^2\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{lmg}{J}\theta - \frac{bl^2}{J}\dot{\theta}$$

Definiendo un vector de estados de salida como:

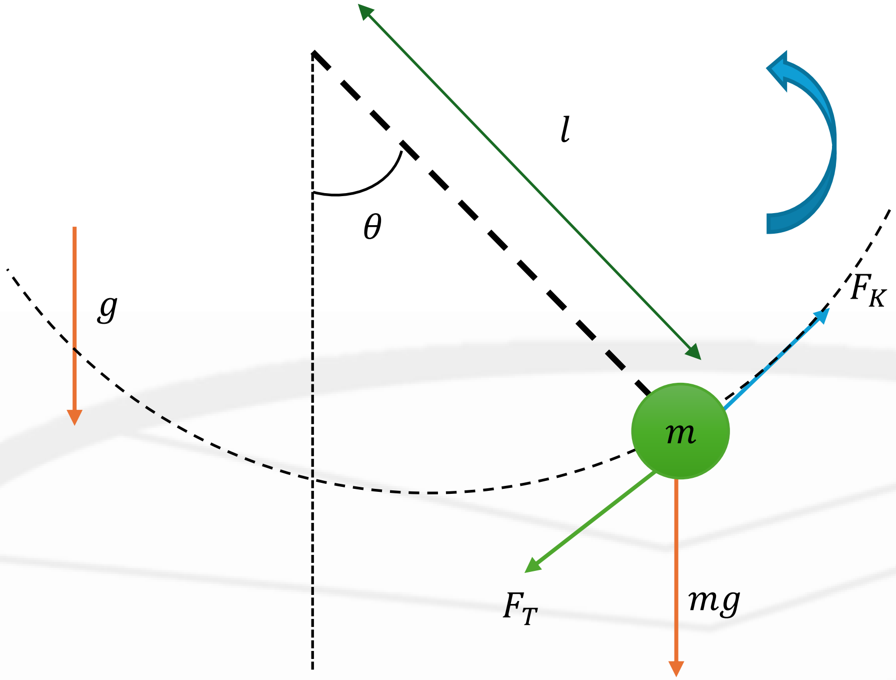
$$\begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

Es posible obtener una representación de la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Donde x representa el vector de estados, u el vector de entradas, A la matriz de coeficientes de los estados y B la matriz de coeficientes de las entradas.

Punto de equilibrio – linealización



$$J\ddot{\theta} = -lmg\,\theta - bl^2\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{lmg}{J}\theta - \frac{bl^2}{J}\dot{\theta}$$

$$\begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

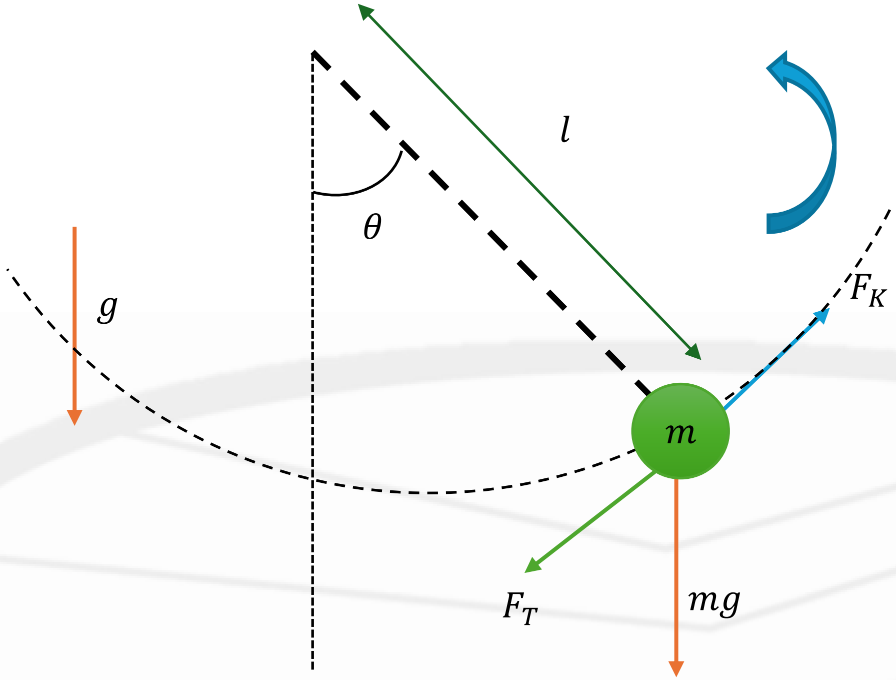
$$\begin{bmatrix}\dot{\theta} \\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{lmg}{J} & -\frac{bl^2}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

A esto se le conoce como espacio de estados.

Nota: esto es una representación simplificada, es necesario tomar en cuenta la entrada y una ecuación para la salida.

Punto de equilibrio – linealización

Universidad Autónoma de Nuevo León



$$\ddot{\theta} = -\frac{lmg}{J}\theta - \frac{bl^2}{J}\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta - \frac{b}{m}\dot{\theta}$$

$$\begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta} \\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

A esto se le conoce como espacio de estados.

Nota: esto es una representación simplificada, es necesario tomar en cuenta la entrada y una ecuación para la salida.

Recapitulación

$$V_1 \times V_2 = V_3$$

El producto cruz resulta en un vector *ortogonal* a los vectores multiplicados.

$$V_3 \angle V_1 = 90°$$

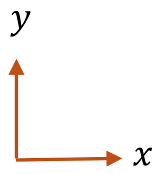
$$V_3 \angle V_2 = 90°$$

El producto punto se utiliza para encontrar el ángulo entre dos vectores; puede usarse para comprobar ortogonalidad.

$$V_1 \cdot V_2 = A$$

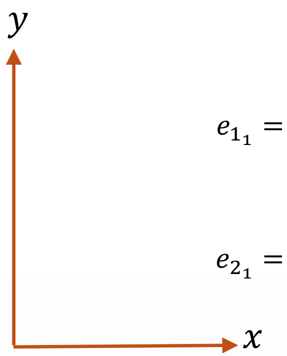
$$V_1 \cdot V_3 = 0$$

$$V_2 \cdot V_3 = 0$$



$$e_{1_1} = \hat{\imath}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



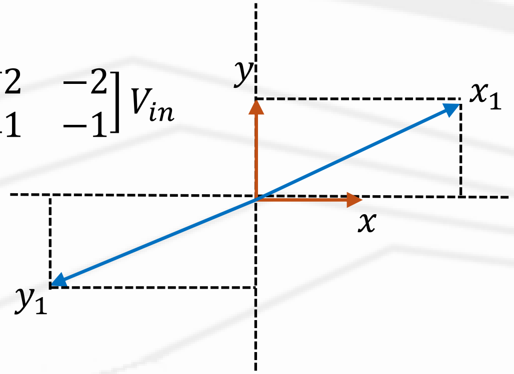
$$e_{1_1} = \hat{\imath}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{2_1} = \hat{\jmath}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores de base canónica describen el *espacio matemático* que representan.

Una *matriz de transformación* se forma de varios *vectores de base canónica*. Si la matriz tiene *dependencia lineal*, se pierde una de las *dimensiones*.

$$V_{out} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} V_{in}$$



Recapitulación

Un desplazamiento angular resulta en un desplazamiento lineal relativo.

$$P_r = l\theta$$

$$\dot{x} = l\dot{\theta}$$

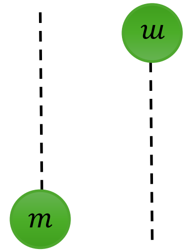
$$\ddot{x} = l\ddot{\theta}$$

Una inercia *puntual* se puede obtener considerando el sistema dinámico de un *péndulo*.

$$J\ddot{\theta} = -lmg\sin\theta$$

$$J = ml^2$$

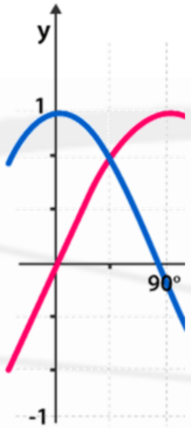
El *punto de equilibrio* resulta de analizar la condición de *no movimiento* relativo en el sistema



$$J0 = -lmg\sin\theta - bl^2 0$$

$$0 = \sin\theta$$

$$\theta = \operatorname{asin} 0$$



$$\sin\theta \approx \theta$$

$$\cos\theta \approx 1$$

Algunas funciones trigonométricas se pueden *linealizar* si se consideran cambio de ángulos pequeños (+- 15°)

El *espacio de estados* es una representación *matricial* de las dinámicas de un sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

Fundamentos y herramientas matemáticas

Dinámica de Vuelo

7mo semestre

Plan 401

Dr. Erik Gilberto Rojo Rodríguez