

Filtros pasa bajas y pasa altas

J. Leonardo Valadez

Facultad de Ingeniería Mecánica y
Eléctrica, San Nicolás de los Garza Nuevo
León, México. ID: 2079870
juan.valadezo@uanl.edu.mx

Abstract. En este documento se desarrolla y simula la implementación de filtros pasa bajos y pasa altos de primer y segundo orden, partiendo de sus respectivas ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones resultantes se integran en un programa en Python para realizar la implementación digital de cada filtro.

Palabras clave.- filtros, métodos numéricos, procesamiento señales.

I. Introducción

Muchas señales contienen componentes de frecuencia no deseadas, las cuales pueden introducir ruido o distorsión en las mediciones. Para mitigar estos efectos, se emplean filtros específicos que eliminan o atenúan dichas frecuencias. En este proyecto se implementan dos tipos de filtros: pasa bajas y pasa altas. El filtro pasa bajas permite el paso de frecuencias por debajo de una frecuencia de corte definida, mientras que el filtro pasa altas atenúa las frecuencias inferiores a ese umbral, dejando pasar únicamente las más altas. Para comprobar los filtros propuestos, se utilizará la siguiente señal compuesta:

$$u(t) = \sin \sin (2\pi 50t) + 0.5 \sin (2\pi 300t)$$

En este trabajo, se comienza con la resolución del filtro pasa bajas de primer orden, utilizando la transformada de Laplace y posteriormente el método de diferencias finitas hacia atrás para su discretización. Procedimiento:

$$\begin{aligned} L \left[\frac{\tau dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \right] \\ \tau(sY(s) - y(0)) + y(s) = U(s) \\ Y(s)(\tau s + 1) = U(s) \\ \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \\ \tau \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \right) + y_i = u_i \\ y_i = \frac{(u_i \Delta x + \tau y_{i-1})}{1 + \tau \Delta x} \end{aligned}$$

Las ecuaciones destacadas en negrita corresponden a las que se utilizarán para aplicar el filtro a la señal de entrada, la cual está compuesta por dos componentes: una señal senoidal de 50 Hz y otra de 300 Hz, esta última con una amplitud reducida por un factor de 0.5. El siguiente paso consiste en realizar el mismo procedimiento, pero ahora considerando un filtro pasa bajas de segundo orden.

$$\begin{aligned} L \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2w_n \zeta \frac{dy(t)}{dt} + w_n^2 y(t) = w_n^2 u(t) \right] \\ (s^2 Y(s) - sy(0) - y(0)) + 2w_n \zeta (sY(s) - y(0)) \\ + w_n^2 Y(s) = w_n^2 U(s) \\ ((s^2) + 2w_n \zeta s + w_n^2) Y(s) = w_n^2 U(s) \\ \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2w_n \zeta s + w_n^2} \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2} \\ \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2} + 2w_n \zeta \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} + y_i w_n^2 = u_i w_n^2 \\ y_i = \frac{\Delta x^2 w_n^2 u_i - y_{i-2} + 2(1 + \Delta x w_n \zeta)}{1 + 2\Delta x w_n \zeta + \Delta x^2 w_n^2} \end{aligned}$$

Con esto, se han obtenido las ecuaciones necesarias para programar e implementar tanto el filtro pasa bajas de primer orden como el de segundo orden. El siguiente paso es repetir el procedimiento para el caso del filtro pasa altas, cuya principal característica es la presencia de una derivada temporal en la salida dentro de su ecuación

diferencial, lo que implica que el enfoque de resolución será en esencia muy similar.

$$L \left[\frac{\tau dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{\tau du(t)}{dt} \right]$$

$$\tau(sY(s) - y(0)) + y(s) = sU(s)$$

$$Y(s)(\tau s + 1) = sU(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{\tau s + 1}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\tau \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \right) + y_i = \left(\frac{u_i - y_{i-1}}{\Delta x} \right)$$

$$y_i = \frac{u_i - u_{i-1} + \tau y_{i-1}}{\tau + \Delta x}$$

Ahora el siguiente desarrollo se enfoca en resolver la ecuación diferencial pero para un filtro pasa altas de segundo orden como se muestra a continuación.

$$L \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2w_n \zeta \frac{dy(t)}{dt} + w_n^2 y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \right]$$

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - y(0)) + 2w_n \zeta (sY(s) - y(0)) + w_n^2 Y(s) = (s^2 Y(s) - sy(0) - y(0))U(s)$$

$$(s^2 + 2w_n \zeta s + w_n^2)Y(s) = s^2 U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 2w_n \zeta s + w_n^2}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2}$$

$$y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} + 2w_n \zeta y_i - y_{i-1} \Delta x + y_i w_n^2 \Delta x^2 = u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}$$

$$y_i = \frac{((2 + 2w_n \Delta x)y_{i-1} - y_{i-2} + u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2})}{1 + 2\Delta x w_n \zeta + w_n^2 \Delta x^2}$$

II. Resultados y discusión

-
- En este caso, el entorno de programación Python fue utilizado para simular filtros a partir de sus funciones de transferencia, así como para resolver sus ecuaciones mediante el método de diferencias finitas. Para este último, se implementó un ciclo

que calcula secuencialmente cada valor del vector temporal generado. Con el fin de garantizar una adecuada resolución en las gráficas, se definió una frecuencia de muestreo de 10,000 Hz y un tamaño de paso temporal de 0.00001 segundos.

1. Los filtros se simularán bajo las siguientes condiciones:
2. Frecuencia de corte: 200 Hz
3. Señal de entrada previamente definida
4. Frecuencia de muestreo: 10,000 Hz
5. Paso temporal: 0.00001 s
6. El valor de τ corresponde al tiempo característico, calculado como el inverso de la frecuencia de corte
7. La frecuencia natural se considera igual a la frecuencia de corte
8. El factor de amortiguamiento para filtros de segundo orden se fija en 0.5
9. El tiempo total de simulación va de 0 a 0.1 segundos

El siguiente paso es desplegar los filtros donde se mostrará la señal de entrada, señal de salida, diagrama de Bode y diagrama de fase pasando primero por las simulaciones en base a la función de transferencia y luego a la solución por diferencias finitas.

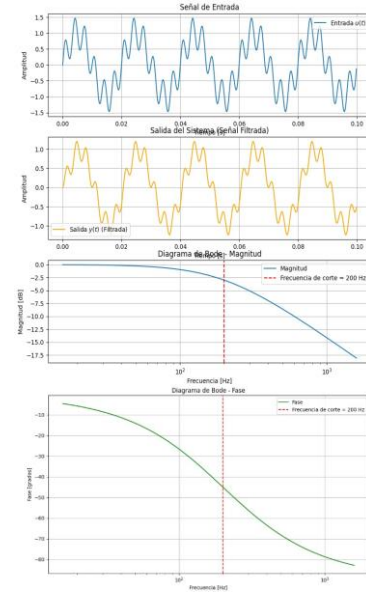


Fig. 1 Gráficas obtenidas de filtro pasa bajas de primer orden a través de Laplace.

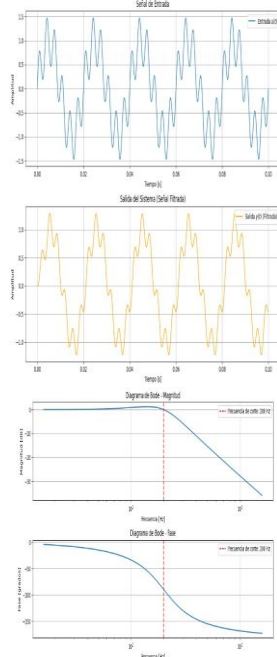


Fig. 2 Gráficas obtenidas de filtro pasa bajas de segundo orden a través de Laplace.

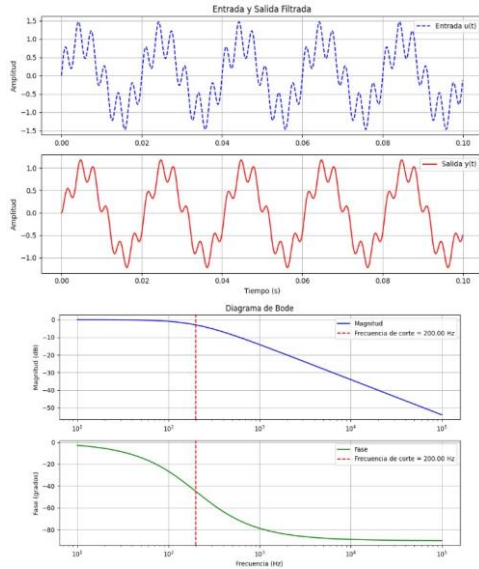


Fig. 3 Gráficas obtenidas de filtro pasa bajas de primer orden a través de diferencias finitas hacia atrás.

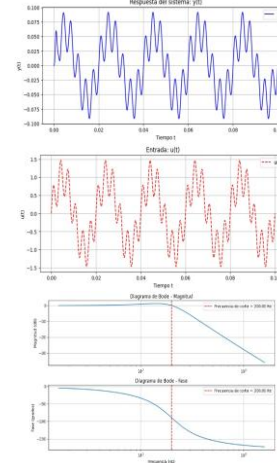


Fig. 4 Gráficas obtenidas de filtro pasa bajas de segundo orden a través de diferencias finitas.

En esta parte del filtro pasa bajas se muestra que no hay diferencia entre la señal filtrada y señal original para ambos casos de primer orden y segundo orden pero la diferencia sí radica en cómo se comporta tomando en cuenta el cambio que tiene en los diagramas de fase donde se observa que la pendiente del diagrama de Bode en primer orden es menos pronunciada y sin tanto cambio como al de segundo orden donde la pendiente es más pronunciada y que a la vez depende del factor de amortiguamiento. Finalmente con el diagrama de fase se puede observar que en primer orden el desfase es de -90° mientras que en segundo orden es -180° lo cual representa que la salida está invertida y la diferencia del valor numérico radica en la intensidad del cambio.

III. Referencias

- Ogata, K. (2010). Modern Control Engineering (5th ed.). Prentice Hall.
- Padilla, A. (2020). Instrumentación y sistemas de control en aeronaves. Cengage Learning.

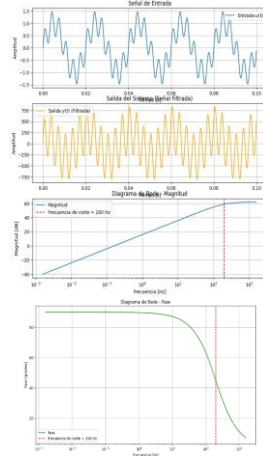


Fig. 5 Gráficas obtenidas de filtro pasa altas de primer orden a través de Laplace.

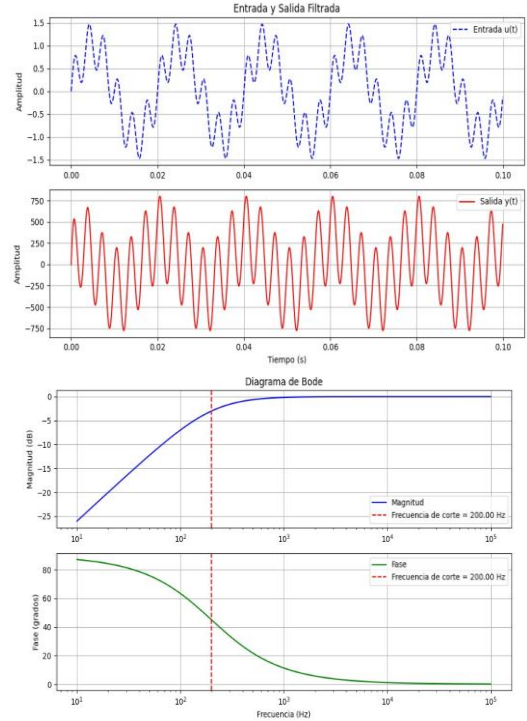


Fig. 7 Gráficas obtenidas de filtro pasa altas de primer orden a través de diferencias finitas.

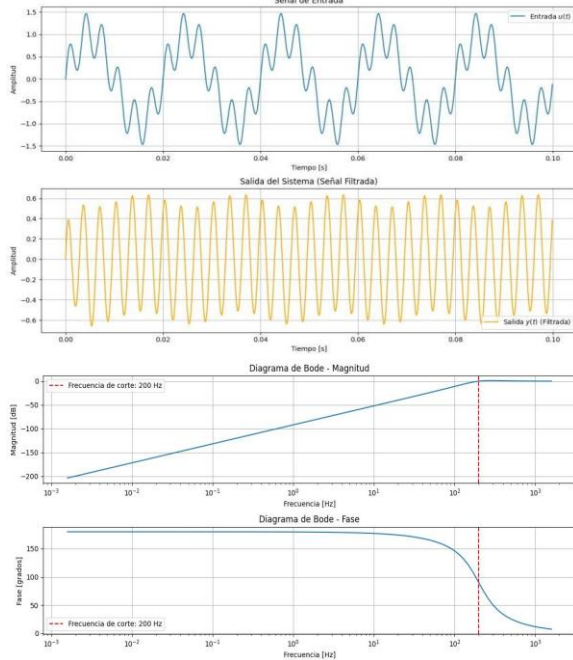


Fig. 6 Gráficas obtenidas de filtro pasa altas de segundo orden a través de Laplace.

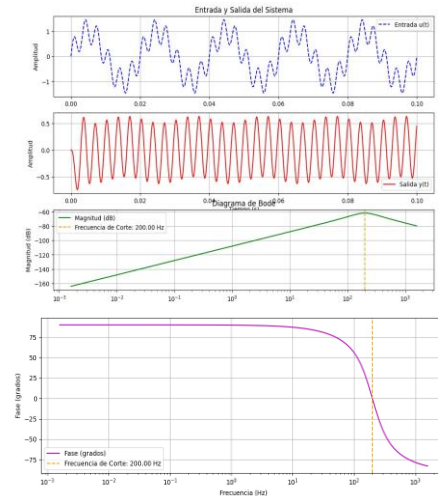


Fig. 8 Gráficas obtenidas de filtro pasa altas de segundo orden a través de diferencias finitas.

A continuación, se obtiene la respuesta del filtro pasa altas. A diferencia del caso anterior, este tipo de filtro permite el paso de las componentes de alta frecuencia, suprimiendo aquellas por debajo de la frecuencia de corte. Esto se refleja en los resultados,

donde se observa un aumento en la amplitud de la respuesta a frecuencias más elevadas, así como una inversión en el comportamiento del diagrama de Bode respecto al filtro pasa bajas. En el diagrama de fase también se evidencia un cambio, mostrando un desfase que abarca tanto valores positivos como negativos.

Este análisis permite contrastar las principales diferencias entre los filtros pasa altas y pasa bajas. Particularmente, en el caso del filtro de segundo orden, se destaca la capacidad de ajustar su comportamiento dinámico mediante la modificación del factor de amortiguamiento. Esto influye directamente en la pendiente de las curvas del diagrama de Bode y en la transición de fase, lo cual se ilustrará a continuación.

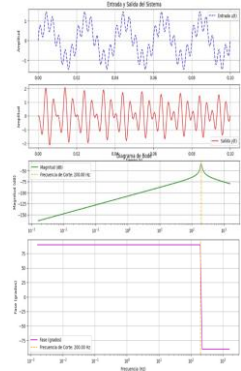


Fig. 9 Gráficas obtenidas de filtro pasa altas de segundo orden a través de diferencias finitas con factor de amortiguamiento nulo.

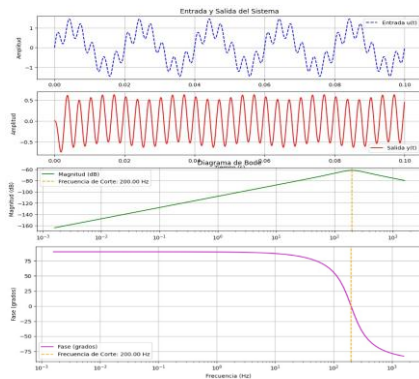


Fig. 10 Gráficas obtenidas de filtro pasa altas de segundo orden a través de diferencias finitas con factor de amortiguamiento de 0.5

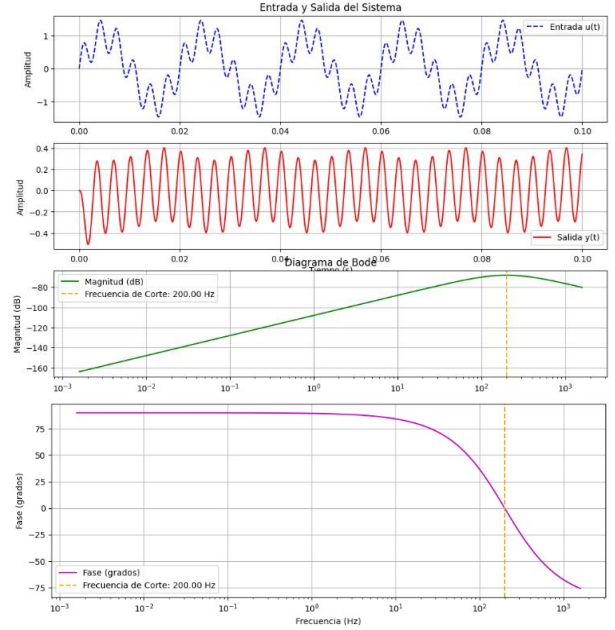


Fig. 10 Gráficas obtenidas de filtro pasa altas de segundo orden a través de diferencias finitas con factor de amortiguamiento de 1.

Finalmente, se presenta la evidencia del efecto del factor de amortiguamiento mencionado previamente. Este parámetro influye directamente en la velocidad de respuesta del filtro, pero su aumento no siempre resulta beneficioso. En los casos donde se elimina el amortiguamiento para obtener una respuesta más rápida, se observa una filtración deficiente, ya que el sistema no logra atenuar adecuadamente las frecuencias no deseadas. En contraste, con valores de amortiguamiento de 0.5 y 1, la respuesta filtrada se comporta de manera más estable y eficiente, preservando las características de la señal útil.

A partir de estos resultados, es posible analizar cómo tanto el tipo de filtro como el orden del sistema afectan significativamente su desempeño. Estas variables deben considerarse cuidadosamente durante el diseño, dependiendo del tipo de respuesta que se requiera obtener para cada aplicación.

Apéndice

IV. Link de repositorio a códigos simulados

<https://github.com/Archimedean2345/labAvionica>