

Actividad: filtro de Kalman

Valadez Ortiz, Juan Leonardo. 2079870

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, San Nicolás de los Garza Nuevo León, México

Resumen. En este documento se presenta la explicación del filtro de Kalman así como la implementación de este en un ejemplo para la predicción de estados o variables comparando con diferentes variables medidas y discutir acerca de la implementación y resultados que se obtuvieron.

Palabras clave – *filtro, estimación, fusión.*

I. INTRODUCCIÓN

El filtro de Kalman es una técnica utilizada para estimar variables del sistema que no se pueden medir directamente, basándose en otras variables que sí se observan, aunque estas contengan errores. Este método no solo considera los errores de medición, sino que también incorpora la incertidumbre del sistema provocada por factores como el ruido. Su funcionamiento se basa en dos conjuntos de ecuaciones: las ecuaciones principales y las de estado. A través de ellas, se combinan las predicciones de las variables ocultas con las mediciones disponibles para mejorar la exactitud del sistema. En esencia, el proceso consiste en una etapa de predicción, donde se anticipa el valor de las variables según su comportamiento dinámico, seguida de una etapa de corrección, en la que estas predicciones se ajustan utilizando las mediciones reales. Una característica clave del filtro de Kalman es su naturaleza recursiva: cada nueva estimación corregida se convierte en el punto de partida para la siguiente predicción. Esto permite al sistema afinar continuamente sus cálculos con base en información actualizada, mejorando así la precisión global de las estimaciones.

II. DESARROLLO

A. Teoría

Para describirlo matemáticamente se usa el siguiente procedimiento:

$$Z_t = H_t * x_t + u_t$$

Esta primera ecuación describe la igualdad del vector Z que representa a las variables observables junto con las variables de estado que son las que se predicen y la matriz H que se caracteriza por relacionar las variables observables con la matriz de variables de estado y se define como matriz de observación además de incorporar el término u que básicamente cuantifica que las variables medidas puedan tener un error de medición y además es independiente de las variables que se predicen. Otro punto que se asume es que sigue una distribución media nula y se describe con la siguiente ecuación:

$$u_t \sim N(0, R_t)$$

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + K_n(z_n - \hat{x}_{n,n-1})$$
$$P_{n,n} = (1 - K_n)P_{n,n-1}$$

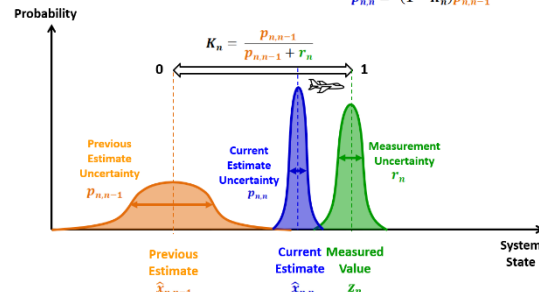


Ilustración 1. Distribución de las incertidumbres en el filtro de Kalman.

Por otra parte, hay una ecuación que permite predecir las variables de estado que se define como:

$$x_t = A_t * x_{t-1} + e_t$$

Donde estos términos permiten predecir las variables a partir del estado anterior así como agregar un vector e que representa los errores que puede tener el sistema a partir de las incertidumbres con las que se tiene en las variables de estado donde en este punto se agrega una matriz Q que representa la matriz de covarianzas con la cual se modela el posible ruido que tenga el sistema y de igual manera se modela

con una distribución gaussiana de media nula. En base a esto para poder modelar el filtro de Kalman en un código se sigue el siguiente procedimiento donde se toman en cuenta las ecuaciones de predicción y ecuaciones de corrección reescritas de la siguiente manera:

- Ecuaciones de predicción: En este punto se calculan las nuevas variables tomando en cuenta la matriz A que representa como cambia los estados del sistema a través del tiempo buscando hacer una predicción del sistema, así como la matriz P que define la estimación de la covarianza que básicamente es como varía el error. Estas ecuaciones son las siguientes:

$$x_{t+1, opt}^p = A_t * x_{t, opt}$$

$$P_{t+1}^p = A_t * P_t * A_t' + Q$$

- Ecuaciones de corrección: A partir de las predicciones realizadas, se corrigen y se indica con la matriz H cuales variables son las observables o medibles, así como un parámetro representado con K que representa la ganancia de Kalman que parametriza la confiabilidad en la predicción del sistema basada en la incertidumbre o la medición del sistema. Las ecuaciones de corrección son las siguientes:

$$x_{t+1, opt}^p = x_{t+1, opt}^p + K_{t+1} * \left(\frac{Z_{t+1} - Z_{t+1}^p}{Predicción en t + 1} \right) = x_{t+1, opt}^p + K_{t+1} * (Z_{t+1} - H_{t+1} * x_{t+1, opt}^p)$$

$$\hat{P}_{t+1} = (I - K_{t+1} * H_{t+1}) * P_t^p$$

Al implementar estas ecuaciones dentro de un algoritmo en un programa se puede desarrollar el filtro de Kalman en una aplicación real.

B. Implementación

Se desea estimar el estado completo de un sistema no completamente observable directamente: el péndulo invertido sobre un carrito. Para ello, se utilizará un filtro de Kalman, considerando únicamente la medición de la posición del carrito como información disponible. El sistema está sujeto a perturbaciones externas e incluye ruido tanto en el proceso como en la medición.

Considerando el péndulo colgando hacia abajo ($\theta = 0$) como el punto de operación, se linealizan las ecuaciones de movimiento, y el sistema se expresa en forma de espacio de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu + w$$

$$y = Hx + v$$

Consideramos los siguientes parámetros del sistema dentro del *script* en Python de acuerdo a Ilustración 2.

```
# =====
# Parámetros físicos
# =====
m = 1 # masa del péndulo
M = 5 # masa del carro
L = 2 # longitud del péndulo
g = -10 # gravedad negativa
d = 1 # fricción
b = -1 # factor de dirección
```

Ilustración 2. Parámetros físicos de inicialización.

A partir de la linealización (e.g., vía el método de Lagrange o Newton-Euler), se obtienen las matrices del sistema:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta/M & bmg/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b\delta/ML & -b(m+M)g/ML & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ b/ML \end{bmatrix} u \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

Ilustración 3. Matrices del sistema.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

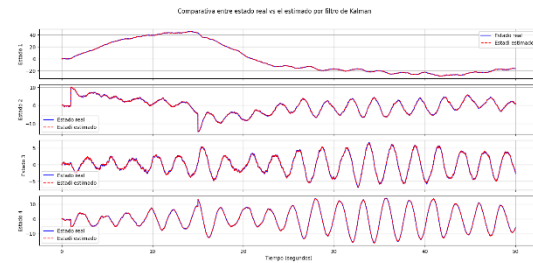


Ilustración 4. representación de los 4 estados en el sistema.

El filtro de Kalman logra una estimación eficiente incluso cuando solo se mide la posición del carrito. Las oscilaciones amortiguadas presentes tras las perturbaciones (probablemente en $t=1s$ y $t=15s$) son correctamente modeladas por el estimador. La tabla 1 brinda un resumen como discusión de qué sucede en cada estado:

Estado	Variable física	Fenómeno	Estimado vs real
1	Posición x	Movimiento traslacional	El filtro sigue muy cerca a la señal real
2	Velocidad x-punto	Fuerzas aplicadas	La señal es precisa primeros segundos, después discrepa un poco
3	Angulo de péndulo theta	Similar a un péndulo físico	Capta oscilaciones con gran precisión
4	Velocidad angular	Tasa de cambio de ángulo	La estimación va fielmente a la dinamica de oscilación

Ilustración 5. Resumen de discusiones por estado dado.

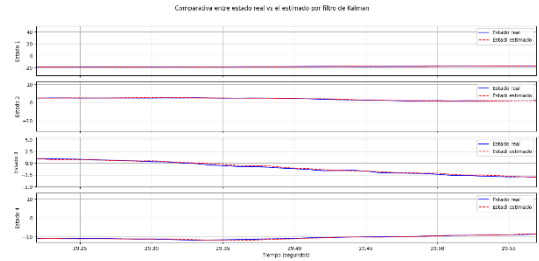


Ilustración 6. Precisión del filtro.

IV. CONCLUSIÓN

La implementación del filtro de Kalman en el sistema carrito-péndulo invertido ha demostrado ser una herramienta poderosa para la estimación de estados en sistemas dinámicos parcialmente observables. A lo largo del desarrollo de esta actividad, se documentó detalladamente el fundamento teórico del filtro, resaltando su carácter recursivo y su capacidad para combinar predicciones del modelo con mediciones ruidosas, mediante la incorporación explícita de incertidumbre tanto del proceso como de la medición.

Partiendo del modelo linealizado del sistema alrededor del punto de equilibrio con el péndulo hacia abajo ($\theta = 0$), se planteó un sistema de cuatro estados del cual solo se mide la posición del carrito. Tras verificar su observabilidad —

condición indispensable para garantizar que los estados no observables puedan reconstruirse— se diseñó el estimador, considerando ruido blanco gaussiano y perturbaciones externas aplicadas intencionalmente en instantes clave (1s y 15s).

V. REFERENCIAS

[1] Woodman, O. J. (2007). *An introduction to inertial navigation*. University of Cambridge, Computer Laboratory.

Appendice

Repositorio de codigos:

<https://github.com/Archimedean2345/labAvionica/tree/main>