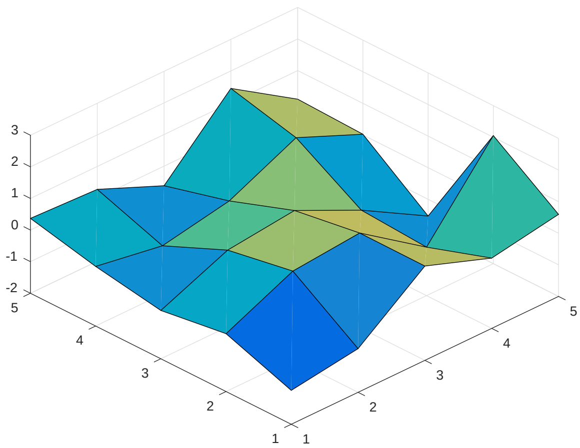
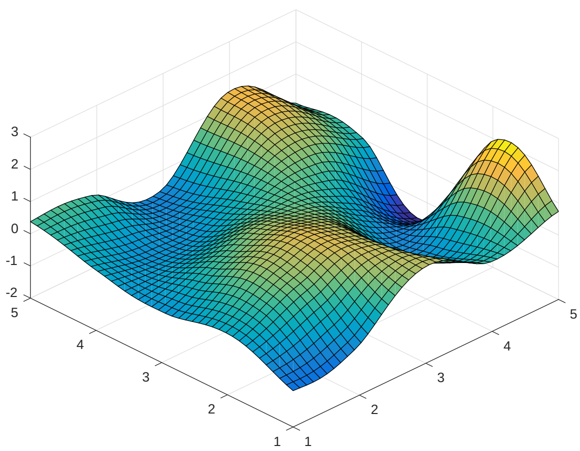
Interpolacijska ploskev

Imamo matriko V, ki predstavlja vrednosti funkcije $f(i,j) = V_{ij}$ v (celoštevilskih) točkah (i,j). Radi bi definirali gladko (zvezno odvedljivo) funkcijo $f(x,y)$, ki interpolira vrednosti f za vmesne realne argumente (x,y). Z drugimi besedami, iz podatkov kakršni so prikazani na Sliki 1, bi radi znali dobiti gladko ploskev kot je prikazana na Sliki 2.



Slika 1: Naključna 5×5 matrika podatkov kot jo izriše ukaz `surf`, ki vmesne vrednosti samodejno interpolira z linearnimi funkcijami.



Slika 2: Gladka interpolacijska funkcija $f(x,y)$, ki je definirana povsod na $[1,5] \times [1,5]$ in ki se za celoštevilske argumente ujema z vrednostmi, ki so prikazane na Sliki 1.

Ideja je, da funkcijo na celotnem območju $[1,n] \times [1,m]$ sestavimo kot zlepek funkcij, ki so definirane na posameznih kvadratih enotske velikosti. Pri tem pa je seveda potrebno poskrbeti, da se bodo vrednosti funkcije f in tudi vrednosti njenih odvodov na robu posameznega kvadrata povsod ujemale z vrednostmi in odvodi na robovih sosednjih kvadratov. To je možno storiti na več načinov, ideja rešitve, ki jo morate v nalogi implementirati, pa temelji na pojmu t.i. *razčlenitve enote*.

1. naloga: (1 točka) Poiščite polinom 3. stopnje $p(x)$, ki zadošča pogojem

$$p(0) = 1, p'(0) = 0, p(1) = 0, p'(1) = 0 \tag{1}$$

Osredotočimo se najprej na problem definicije interpolacijske funkcije na enotskem kvadratu $K = [0,1] \times [0,1]$.

Denimo, da imamo podane vrednosti funkcije na ogliščih enotskega kvadrata $A(0,0)$, $B(1,0)$,$C(0,1)$,$D(1,1)$ in da te vrednosti po vrsti označimo z a, b, c, d. Predpostavimo tudi, da imamo v ogliščih podane željene vrednosti parcialnih odvodov funkcije f po x in po y. Označimo te vrednosti z a_x, b_x, c_x, d_x ter a_y, b_y, c_y, d_y. Za posamezen kvadrat imamo skupaj torej 12 podatkov.
Najprej definirajmo *uteži*

$$\begin{aligned} w_A(x,y) &= p(x)p(y) \\ w_B(x,y) &= (1-p(x))p(y) \\ w_C(x,y) &= p(x)(1-p(y)) \\ w_D(x,y) &= (1-p(x))(1-p(y)) \end{aligned} \tag{2}$$

kjer je p rešitev naloge (1). Nato definiramo pomožne funkcije, ki imajo v ogliščih točno take vrednosti in odvode kot jih želimo

$$\begin{aligned} f_A(x,y) &= a + a_x x + a_y y \\ f_B(x,y) &= b + b_x(x-1) + b_y y \\ f_C(x,y) &= c + c_x x + c_y(y-1) \\ f_D(x,y) &= d + d_x(x-1) + d_y(y-1) \end{aligned} \tag{3}$$

in na koncu še funkcijo f (kjer pisanje argumentov (x,y) zaradi preglednosti povsod izpuščamo)

$$f = f_A w_A + f_B w_B + f_C w_C + f_D w_D \tag{4}$$

2. naloga: (4 točke) Napišite učinkovito funkcijo `Z=interpolationFunction(data,len)`, ki na `len` $\times$ `len` mreži enakomerno razporejenih točk na enotskem kvadratu K izračuna vrednosti funkcije (4), kjer spremenljivka `data` vsebuje vseh 12 potrebnih podatkov, in izračunane vrednosti vrne v `len` $\times$ `len` matriki `Z`. Kako podatke razporedite v strukturo `data` je vaša izbira (lahko je stolpec, vrstica, matrika ali ...).

Naslednji del naloge obsega teoretično utemeljitev interpolacije s funkcijo iz (4). Za implementacijo same rešitve ni potreben, pomemben je samo za razumevanje, kako takšna interpolacija deluje.

3. naloga: (4 točke)

- Pokažite, na čimbolj enostaven način, da za funkcije (2) povsod na K velja

$$w_A + w_B + w_C + w_D = 1$$

  (od tu ime razčlenitev enote). Ta enakost zagotavlja, da bo v primeru, da so podatki konstantni (ali pa linearna funkcija (i,j)) tudi f povsod konstantna (oz. linearna), kar je tudi najbolj smiselno. Utemeljite zadnjo trditev!
- Izračunajte vrednosti funkcije f iz (4) in njenih parcialnih odvodov v ogliščih. Dovolj je pokazati, kaj dobimo za eno oglišče.
- Pokažite tudi, da so vrednosti funkcije f in njenih odvodov na dani stranici kvadrata K odvisne samo od podatkov, ki se nanašajo na oglišči te stranice. Tudi tu je dovolj to pokazati za eno stranico.

4. naloga: (5 točk) Napišite funkcijo `interpolation(V,len)`, ki kot na slikah 1 in 2 izriše podatke iz matrike `V` (z ukazom `surf` ali `mesh`) in nato še sliko interpolacijske ploskve, ki jo dobimo z lepljenjem funkcij iz (4) za posamezne kvadrate mreže. Tu je `len` enak kot pri funkciji `interpolationFunction`, torej število delilinih točk v x in y smeri pri izračunu za posamezen kvadrat (na sliki 2 je npr. `len=10`). Pri tem je pri klicih funkcije `interpolationFunction` potrebno smiselno izbrati vrednosti odvodov v ogliščih kvadratov. Bistveno je, da se argumenti pri klicu funkcije, ki nanašajo na oglišči stranice posameznega kvadrata, ujemajo z argumenti za to isto stranico pri klicu funkcije za sosednji kvadrat. Naravna izbira za parcialni odvod funkcije v danem oglišču v določeni smeri je odvod linearne funkcije skozi sosednji oglišči v tisti smeri. Na primer za odvod funkcije f v x smeri v točki (i,j) lahko vzamemo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(i,j) = \frac{1}{2}\left(f(i+1,j) - f(i-1,j)\right)$$

(za točke (i,j) na robu se je treba seveda znajti drugače).

Oddaja naloge

Na spletno učilnico oddajte naslednje:

1. datoteki `interpolationFunction.m` in `interpolation.m`, ki naj vsebujeta kodo in komentarje,

2. datoteko (poročilo) **solution.pdf**, ki vsebuje izpeljavo rešitve in ilustracijo uporabe programa na izbranih primerih. Primeri naj bodo tudi grafično predstavljeni.