# Verjetnost in statistika - rešene naloge iz Kvizkota

Jernej Vivod

July 23, 2018

# 1 Verjetnost in kombinatorika

## 1.1 00 - Dobrodošli

1. Moževa sestra iz ZDA je sporočila: We are expecting twins. Kateri od naslednjih odgovorov je bolj verjeten? (predpostavi, da ne pričakuje enojajčnih dvojčkov)

   **rešitev:**
   Verjetnost, da je novorojenček fantek oz. punčka je enaka.
   Zapišimo vse možnosti: FF FP PF PP
   Vidimo lahko, da je verjetnost za dva fantka in dve punčki enaka in sicer $P(FF) = P(PP) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
   Verjetnost, da se bo rodil en fantek in ena punčka pa je $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Torej je bolj verjetno, da se bo rodil en fantek in ena punčka.
   Slučajna spremenljivka X, ki predstavlja število rojenih deklic, kot tudi slučajna spremenljvika Y, ki predstavlja število rojenih dečkov, se porazdeljujeta binomsko. ($X \sim B(2, k)$, kjer $k$ označuje število rojenih punčk). Enako velja za slučajno spremenljivko $Y$.

2. Iz kupa 52ih običajnih kart vzamemo 4 ase, 4 dvojke in 4 trojke, nato pa med temi 12imi kartami naključno izberemo 5 kart. Kakšna je verjetnost, da sta med njimi vsaj 2 črni?

   **rešitev:**
   V vsakem izboru štirih asov, dvoj in trojk sta po dve rdeči in po dve črni karti vsakega tipa. Iz tega sledi, da je med temi dvanajstimi kartami 6 črnih in 6 rdečih.
   Verjetnost, da sta med izbranimi petimi kartami manj kot dve črni je enaka $P(A < 2) = \frac{\binom{6}{5}+\binom{6}{4}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{12}{5}} = 0.1212$. Iz tega sledi, da je verjetnost nasprotnega dogodka (da sta bili izbrani vsaj dve črni karti) enaka $1 - 0.1212 = 0.8788$.

## 1.2 01 - Kombinatorika

1. Študent napiše C++ program, ki izpiše vsa možna zaporedja dolžine 3, z uporabo naslednjih črk: A, B, E, T in O. Nato program popravi tako, da ima vsako od tričlenih zaporedij vsaj en samoglasnik in nobenih zaporedoma ponavljajočih se črk.

   Če sta a in b števili različnih tričlenih zaporedij, ki jih je potrebno izpisati z originalnim in s popravljenim programom zaporedoma, kakšen je par (a, b)?

   **rešitev:**
   Če želimo izpisati vsa možna zaporedja dolžine 3 z uporabo 5 črk, je takih zaporedij $5^3 = 125$, saj imamo za vsako mesto 5 možnosti. Če želimo izpisati vsa tričlena zaporedja, ki vsebujejo vsaj en samostalnik in nobenih zaporedoma ponavljajočih črk, potem je takih možnosti $5 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 78$. Leva stran odštevanja nam predstavlja vse možnosti za zaporedja, kjer nimamo dveh zaporednih enakih črk. V tem primeru je za prvo mesto 5 možnosti, za drugo 4 (ne upoštevamo možnosti črke, ki je enaka prvi) ter za zadnjo spet 4 možnost (spet ne upoštevamo možnosti, ki je enaka drugi črki). Od tega odštejemo vse možnosti zaporedij, kjer ni zaporednih črk in kjer nastopajo sami soglasniki.

2. Če imamo tabelo naključnih števk (tj. števil 0,1,..,9) in vsako med njimi podvojimo, ali smo potem dobili dobro tabelo za naključna števila od 0 do 18?

**rešitev:**
Če premislimo lahko vidimo, da pri podvajanju prve tabele ne moremo dobiti nekaterih vrednosti, kot sta npr. 3 in 5. Druga tabela tako zagotovo ne vsebuje nekaterih števil iz intervala $[0, 18]$ in zato ni dobra.

3. Študent ima 3 matematične in 5 računalniških učbenikov. Ob začetku šolskega leta mora kupiti 2 nova učbenika, zato se odloči dva stara prodati. Oba prodana učbenika morata biti iz istega področja, ker s tem pridobi dodatni popust. Na koliko načinov ju lahko izbere?

**rešitev:**
Število načinov je vsota števila načinov da izmed treh matematičnih učbenikov izberemo 2 ter števila načinov, da izmed računalniških učbenikov izberemo 2. Rezultat je torej $\binom{3}{2} + \binom{5}{2} = 13$.

4. Osem vojakov je potrebno poslati na stražo v štiri postojanke (po dva v vsako). Recimo, da želimo vsak dan izbrati drugačno razporeditev. Na koliko načinov lahko to storimo?

**rešitev:**
Za prvo postojanko moramo izmed osmih vojakov izbrati dva. To lahko naredimo na $\binom{8}{2}$ načinov. Za drugo postojanko izbiramo izmed preostalih šestih vnovič dva, torej imamo $\binom{6}{2}$ možnosti in podobno dalje za ostale postojanke. Če ta števila možnosti med sabo zmnožimo dobimo rezultat 2520.

5. Zdravnik preučuje povezavo med krvnim tlakom (visok, normalen, nizek) in srčnim utripom (enakomeren, neenakomeren) svojih bolnikov. Ugotovi, da ima

   (i) 14% visok krvni tlak,

   (ii) 22% nizek krvni tlak,

   (iii) 15% neenakomeren srčni utrip,

   (iv) od tistih z neenakomernim srčnim utripom ima ena tretjina visok krvni tlak,

   (v) od tistih z normalnim krvnim tlakom ima ena osmina neenakomeren srčni utrip.

   Kakšen je delež bolnikov, ki imajo enakomeren srčni utrip in nizek krvni tlak?

**rešitev:**
TODO

6. Učitelj na podružnic ima v razredu samo štiri učence. Zastavi jim tri vprašanja.

   Na koliko načinov lahko razporedi vprašanja med učence, če je pomembno samo to, kolikokrat je odgovarjal posamezen učenec?

**rešitev:** Za vsako vprašanje lahko izberemo enega učenca, lahko tudi večkrat. Možnosti imamo torej $\binom{4+3-1}{3} = 20$ (kombinacije s ponavljanjem).

7. Iz kupa igralnih kart (52) na slepo izberemo eno karto in jo nato vrnemo nazaj. Postopek ponovimo 5-krat.

   Kakšna je verjetnost, da bomo videli dvakrat srce, po enkrat pika, križa in karo?

**rešitev:** Verjetnost, da bomo najprej vlekli srce je $P = 13/52$. Verjetnost, da bomo spet vlekli srce je $P = 13/52$. Verjetnost, da vlečemo nato pika je zopet enaka in enako naprej za križ in karo. Za vlečenje teh kart obstaja več načinov. Teh je natanko $\frac{5!}{2!}$. Število načinov pomnožimo z verjetnostmi ugodnih vlečenj in dobimo rezultat $(\frac{13}{52})^5 \cdot \frac{5!}{2!} = 0.0586$.

8. Iz kraja A v kraj B vodi 5 različnih poti, iz kraja B v kraj C pa 6. Na koliko načinov lahko potujemo iz kraja A v kraj B, če imamo med tema krajema še 7 direktnih povezav?

   **rešitev:** Za vsako pot iz kraja A v kraj B imamo šest možnosti za nadaljno pot iz kraja B v kraj C. Temu prištejemo še 7 možnosti za potovanje z direktnimi povezavami. Vseh možnosti je torej $5 \cdot 6 + 7 = 37$.

9. Koliko je vseh trimestnih števil?

   **rešitev:** Za prvo števko iz leve imamo 9 možnosti, za ostali dve števki pa 10 možnosti. Vseh trimestnih števil je torej $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

10. Koliko je vseh sodih trimestnih števil?

    **rešitev:** Število je sodo, če ima na zadnjem mestu števko 0, 2, 4, 6 ali 8. Za tretjo števko imamo 9 možnosti, za drugo pa 10. Takih števil je torej $9 \cdot 10 \cdot 4 = 450$.

11. Koliko je vseh trimestnih števil s sodo prvo števko?

    **rešitev:** Za sodost prve števke (iz leve) imamo štiri možnosti - 2, 4, 6 ali 8. Za ostali dve števki imamo 10 možnosti. Takih števil je torej $3 \cdot 10 \cdot 10 = 400$.

12. Koliko je vseh trimestnih števil s samimi enakimi števkami?

    **rešitev:** Za prvo števko iz leve imamo 9 možnosti. Ker morajo biti ostali dve števki enaki, je takih števil torej 9.

13. Koliko je vseh trimestnih števil s samimi različnimi števkami?

    **rešitev:** Za prvo števko iz leve imamo 9 možnosti, za drugo imamo 9 možnosti, ki niso enake prvi števki in za tretjo 8 možnosti, ki niso enake ne prvi, ne drugi števki. Takih števk je torej $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$

14. Koliko je vseh trimestnih števil, ki so palindromi?

    **rešitev:** Za prvo števko iz leve imamo 9 možnosti. Zadnja števka se mora z njo ujemati. Za sredno števko pa imamo 10 možnosti. Takih števil je torej $9 \cdot 10 = 90$.

15. Iz škatle s petimi različnimi kroglicami vzamemo dve kroglici.

    - na koliko načinov lahko to storimo, če kroglice vračamo in je vrstni red jemanja pomemben?

      **rešitev:** Za vsako prvo krolico lahko izvlečemo 5 različnih drugih kroglic. Možnosti je torej $5 \cdot 5 = 25$

    - Na koliko načinov lahko to storimo, če kroglic ne vračamo in je vrstni red jemanja pomemben.

      **rešitev:** Za prvo kroglico imamo 5 možnosti, za drugo pa 4, saj smo eno izvlekli v prvem vlečenju. Načinov je torej $5 \cdot 4 = 20$.

    - Na koliko načinov lahko to storimo, če kroglic ne vračamo in vrstni red jemanja ni pomemben?

      **rešitev:** Izmed petih kroglic si izberemo dve. To lahko storimo na $\binom{5}{2} = 10$ načinov.

    - Na koliko načinov lahko to storimo, če kroglice vračamo in vrstni red jemanja ni pomemben?

      **rešitev:**

      Izmed petih kroglic si izberemo dve. Lahko tudi enaki. To lahko storimo na $\binom{5+2-1}{2} = 15$ načinov (kombinacije s ponavljanjem).

16. Na polici razporedimo 3 leposlovne knjige, 4 učbenike in 2 strokovni knjigi.

- Na koliko načinov lahko to storimo, če vse knjige med seboj razlikujemo?

**rešitev:** To je preprosti primer štetja permutacij. To lahko storimo na $9! = 362880$ načinov.

- Na koliko načinov lahko to storimo, če vse knjige med seboj razlikujemo, vendar morajo prve v vrsti stati leposlovne knjige, nato učbeniki in za njimi strokovni knjigi?

**rešitev:** Permutiramo vsako zvrst posebej in množimo števila permutacij. Rezultat je $3! \cdot 4! \cdot 2! = 288$

- Na kliko načinov lahko to storimo, če vse knjige med seboj razlikujemo in knjige iste vrste morajo stati skupaj?

**rešitev:** Rezultat prejšne podnaloge množimo s 3!, kar predstavlja permutiranje postavitev skupkov knjig iste vrste. Rezultat je $288 \cdot 3! = 1728$.

- Na koliko načinov lahko to storimo, če knjig iste vrste ne razlikujemo?

**rešitev:** "Oddelimo" permutacije, kjer ločimo knjige iste vrste. Načinov je torej $\frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = 1260$.

17. V škatli se nahaja 6 belih in 4 modre kroglice. Kroglice med seboj ločimo, vrstni red jemanja pa ni pomemben.

- Na koliko načinov lahko ven vzamemo 3 bele in 3 modre kroglice?

**rešitev:** To lahko storimo na $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{3} = 80$ načinov.

- Na koliko načinov lahko ven vzamemo 4 kroglice, med katerimi je vsaj ena bela in ena modra?

**rešitev:** Najprej izračunamo število načinov, da izvlečemo 4 izključno modre kroglice ter 4 izključno bele kroglice. To lahko storimo na $\binom{6}{4} + \binom{4}{4} = 16$ načinov. To število odštejemo od vseh načinov, da vlečemo 4 kroglice in dobimo rezultat $\binom{10}{4} - 16 = 194$.

18. Na koliko načinov lahko postavimo v vrsto n belih in k modrih kroglic, če zahtevamo, da ni dveh zaporednih belih kroglic?

**rešitev:** Nalogo si lahko predstavljamo na sledeči način: v vrsto postavimo izmenoma škatlo, belo kroglico, škatlo, belo kroglico,...,škatlo, belo kroglico, škatlo (torej imamo v vrsti n + 1 škatel in n belih kroglic). V škatle med belimi kroglicami damo po eno modro kroglico (za kar porabimo $n - 1$ modrih kroglic) s čimer ravno zadostimo pogojem naloge. Preostalih $k - (n - 1)$ modrih kroglic lahko poljubno porazdelimo po $n + 1$ škatlah. Teh porazdelitev je $\binom{(k-(n-1))+(n+1)-1}{(n+1)-1} = \binom{k+1}{n}$.

19. Na koliko načinov lahko m modrih, r rdečih in z zelenih kroglic razdelimo v s škatel?

**rešitev:** Ker lahko n kroglic porazdelimo v k škatel (če so te lahko tudi prazne) na $\binom{n-1}{k-1}$ načinov, je rešitev $\binom{m+s-1}{s-1} \cdot \binom{r+s-1}{s-1} \cdot \binom{z+s-1}{s-1}$.

20. Avtomobilske tablice na Havajih vsebujejo tri črke, ki jim sledijo še tri števke.

- Koliko je različnih možnih havajskih tablic?

**rešitev:** Za črke imamo $26^3$ možnosti, za števke pa $10^3$ možnosti. Torej je možnih $26^3 \cdot 10^3$ havajskih tablic.

- Ko obiščemo Honolulu, opazimo, da se vse tablice začenjajo z enim E, F, G ali H. Koliko tablic je možnih, če se lahko začnejo le s katero od teh štirih črk?

**rešitev:** Možnih je $4 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10^3 = 2704000$ tablic.

- Recimo, da bi država dovolila uporabo katerihkoli šestih črk ali števk v poljubnem vrstem redu. Koliko različnih tablic bi bilo možnih v tem primeru (dovolimo ponavljanja)?

  **rešitev:** Možnih bi bilo $36^6$ različnih tablic.

### 1.3 02 - Verjetnost

1. Naj bo A poljuben dogodek. Potem dogodek $A$ in njegov nasprotni dogodek $\bar{A}$ sestavljata popoln sistem dogodkov.

   **rešitev:** Nasprotni dogodek $\bar{A}$ je dogodek, ki se zgodi vedno, ko se dogodek $A$ ne zgodi. Popoln sistem dogodkov pa predstavlja neka množica dogodkov, od katerih se pri vsaki ponovitvi zgodi vsaj eden. Torej je odgovor "vedno drži".

2. Pod določenim pogojem je možno, da je vsota verjetnosti vseh vzorcev v vzorčnem prostoru manjša kot 1.

   **rešitev:** V teoriji verjetnosti je vzorčni prostor množica vseh možnih rezultatov nekega poskusa. Torej se ob vsaki ponovitvi zagotovo zgodi vsaj eden. Odgovor je torej "ne drži".

3. Za poljubna dogodka velja $P(A+B) = P(A) + P(B) + P(AB)$.

   **rešitev:** Odgovor je "ne drži", saj namreč velja $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB)$ (glej princip inkluzije in ekskluzije).

4. Denimo da so A, B in C paroma nezdružljivi dogodki, za katere velja $P(A \cup B) = 0.3, \quad P(B \cup C) = 0.4$ in $P(A \cup C) = 0.5$. Koliko je P(A)?

   **rešitev:**
   $P(A) = \frac{P(A \cup B)+P(A \cup X)}{P(B \cup C)} = \frac{0.3+0.5}{0.4} = 0.2$

5. Zapisa $A \cap B \subset A$ in $A \cap B \subset C$ govorita o:

   **rešitev:** Govorita o produktu dogodkov, kar lahko jasno razberemo iz uporabe simbola $\cap$. Zapomnimo si, da je vsota dogodkov dogodek, ki se zgodi, če se zgodi vsaj eden izmed dogodkov v vsoti in produkt dogodek, ki se zgodi, če se zgodijo vsi dogodki, ki nastopajo v produktu.

6. Produkt nezdružljivih dogodkov $A$ in $B$ je:

   **rešitev:** Dogodka sta nezdružljiva, če se ne moreta zgoditi hkrati. Oziroma, če je verjetnost njunega produkta enaka 0. Torej je njun produkt nemogoč dogodek.

7. Poljuben dogodek in njegova negacija sta:

   **rešitev:** Negacija dodogka $A$ je dogodek, ki se zgodi vedno, ko se ne zgodi dogodek $A$. Torej se ne moreta zgoditi hkrati (sta nezdružljiva). Dogodka sta nasprotna, če ko se eden izmed njiju zgodi, se drugi ne zgodi in obratno. Torej sta dogodek in njegova negacija nezdružljiva in nasprotna dogodka.

8. Klasična in statistična verjetnost se razlikujeta po tem, da je ocena za verjetnost dogodkov...

**rešitev:** Pri statistični verjetnosti za definicijo verjetnosti vzamemo razmerje med ugodnimi in neugodnimi izidi, proti kateremu to razmerje konvergira v limiti, ko gre število poskusov proti neskončnosti. Torej je ocena za verjetnost dogodkov dobljena računsko.

Pri klasični definiciji verjetnosti pa za verjetnost uporabimo razmerje med številom ugodnih izidov in številom neugodnih izidov, ki so vsi enako verjetni. Torej je ocena za verjetnost dobljena empirično.

9. Elementarni dogodki, ki jih obravnavamo s klasično definicijo verjetnosti...

**rešitev:** Morajo sestavljati popoln simetrični sistem dogodkov. Simetrični sistem v tem primeru pomeni, da so vsi dogodki enako verjetni. Moramo seveda zajeti vse možne dogodke in iz njih izbrati ugodne. Torej mora biti sistem popoln.

10. Dva moška in pet žensk naključno razporedimo v vrsto. Kakšna je verjetnost, da bosta moška sedela skupaj na začetku in na koncu vrste?

**rešitev:** Permutacij, kjer moška sedita na začetku vrste je $2! \cdot 5!$. Permutacij, kjer moška sedita skupaj na koncu vrste je isto število. Vseh permutacij je $7!$. Verjetnost za ugodni izid je torej $\frac{2 \cdot 2! \cdot 5!}{7!} = \frac{2}{21}$.

11. Hkrati vržemo 3 poštene igralne kocke. Kakšna je verjetnost, da pade ena šestica, hkrati pa vsaka kocka pokaže različno število pik?

**rešitev:** Možnosti za ugodni izzid je $3 \cdot (1 \cdot 5 \cdot 4) = 60$, saj lahko šestica pade na kateri koli od treh kock. Za preostali dve pa imamo 20 možnosti.
Vseh možnih izzidov pa je $6^3$.
Rešitev je torej $\frac{60}{6^3} = \frac{5}{18}$

12. V veslaškem klubu so 3 krmarji in 10 veslačev, od tega 5 članov in 5 mladincev. Trener mora v naglici izbrati posadko za četverec, zato jo sestavi kar na slepo.

Kakšna je verjetnost, da bo izbral najboljšega krmarja, najboljšega člana in najboljšega mladinca?

**rešitev:** Vseh rešitev je $\binom{3}{1} \cdot \binom{10}{4}$.
Ugodnih izzidov pa je $1 \cdot \binom{8}{2}$ (Najboljši krmar ter najboljša veslača ter še dva veslača izmed preostalih osmih).
Verjetnost je torej $\frac{2}{45} = 0.0444$.

13. Problem rešujeta neodvisno drug od drugega dva učenca. Učenec A rešuje probleme tako, da je verjetnost za posamezno rešitev 0.09, učenec B pa z verjetnostjo 0.6.

Kakšna je verjetnost, da bo problem rešen?

**rešitev:** Velja

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Za $P(AB)$ računamo

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Ker sta dogodka $A$ in $B$ neodvisna velja

$$P(AB) = 0.9 \cdot 0.6.$$

Torej velja

$$P(A+B) = 0.9 + 0.6 - 0.9 \cdot 0.6 = 0.96.$$

14. Kakšna je verjetnost, da bo rešil nalogo le učenec A?

**rešitev:** Zanima nas vrednost

$$P(A\bar{B})$$

Računajmo:

$$P(A\bar{B}) = P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$
$$P(A\bar{B}) = 0.9 \cdot 0.4 = 0.36$$
$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A}|B) \cdot P(B)$$
$$P(\bar{A}B) = 0.1 \cdot 0.6 = 0.06$$

Seštejemo dobljeni verjetnosti, da dobimo verjetnost, da se je zgodil natanko eden od dogodkov $A$ in $B$ ter dobimo 0.42.
Verjetnost $P(A\bar{B})$ normaliziramo s to vrednostjo, da dobimo rezultat

$$P(A\bar{B}) = \frac{0.36}{0.42} = 0.857$$

15. Pri poskusu sodelujejo štiri osebe. Vsaka si povsem naključno in neodvisno od drugih izbere neko naravno število, manjše od 100.

    Kakšna je verjetnost, da bo vsaj eno od teh števil deljivo s 3?

**rešitev:** Število je deljivo s 3, ko je vsota števk deljiva s 3. Izračunajmo število ugodnih izidov. Število večkratnikov števila 3 manjših od 100 preštejemo tako, da računamo $\lfloor \frac{100}{3} \rfloor = 33$.
Izračunajmo verjetnost nasprotnega dogodka - nobena od štirih oseb si ne izbere števila, ki je deljivo s 3. Število ugodnih izzidov je:

$$66^4$$

število vseh izzidov je:

$$99^4$$

Verjetnost ugodnega izzida (rešitev naloge) je torej

$$1 - \frac{66^4}{99^4} = \frac{65}{81} = 0.8025$$

16. Študent obvlada 8 izpitnih vprašanj od 12-tih. Na izpitu mora na slepo izbrati 4 vprašanja. Pozitivno oceno doseže, če pravilno odgovori vsaj na 2 vprašanji.

    Kakšna je verjetnost, da bo študent opravil izpit?

**rešitev:** Za študenta neugodnih izzidov izbiranj vprašanj je:

$$\binom{4}{4} + \binom{4}{3} \cdot \binom{8}{1} = 33$$

Vseh možnih izborov vprašanj je

$$\binom{12}{4} = 495$$

Verjetnost, da bo študent opravil izpit je torej

$$1 - \frac{33}{495} = \frac{14}{15}$$

17. V prvi vrečki so 3 bele kroglice, v drugi pa 2 rdeči. Na slepo izberemo eno od obeh vrečk, v njej izberemo kroglico in jo prenesemo v sosednjo vrečko. Naposled še enkrat sežemo na slepo v eno od obeh vrečk in v njej na slepo izberemo kroglico.

    Kakšna je verjetnost, da bo nazadnje izbrana kroglica bele barve?

**rešitev:**
Ker dvakrat izbiramo med dvema vrečkama (tudi veznik ali na to nakazuje) uporabimo operator + pri prvem in pri drugem izboru vrečke. Za vsak primer premestitve upoštevamo število belih kroglic v vsaki vreči.
Rezultat torej izračunamo na naslednji način:

$$\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}) +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}) = \frac{25}{48}$$

18. V športnem oddelku gimnazije, ki ga obiskuje 24 dijakov, se jih 15 ukvarja z nogometom, 15 jih kolesari in 10 šahira. Nogomet in šah igra 6 dijakov. Z nogometom in kolesarjenjem se jih

ukvarja 10, 7 pa jih kolesari in igra šah. Vse tri športe gojijo 3 dijaki. Izračunajte verjetnosti dogodkov:

- da se slučajno izbran dijak ne ukvarja z nobenim športom,

  **rešitev:**

- da slučajno izbran dijak kolesari in šahira, a ne igra nogometa

  **rešitev:**

- da se med dvema slučajno izbranima dijakoma eden ukvarja samo z nogometom, drugi pa samo kolesari

  **rešitev:**

19. continue at previous (q0-21)

### 1.3.1 03 - Pogojna verjetnost

1. Ali drži naslednja trditev? Če za dogodka $A$ in $B$ velja $P(A) = \frac{1}{3}$ in $P(B) = \frac{1}{3}$, potem je $P(AB) = \frac{1}{9}$.

   **rešitev:** Velja
   $$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$$
   Torej bi v našem primeru takšen rezultat dobili samo v primeru, da sta oba dogodka neodvisna, kar pa ni nujno.

2. Ali je naslednja trditev pravilna? Dogodka $A$ in $B$, ki sta nezdružljiva in za katera velja $A \neq N \neq B$, sta lahko tudi neodvisna.

   **rešitev:** Če sta nezdružljiva to pomeni, da če se eden zgodi, se drugi zagotovo ne. Torej iz informacije o tem, da se je eden od dogodkov zgodil lahko razberemo, da se drugi ni in posledično ne moreta biti neodvisna.

3. Igralno kocko vržemo petkrat zapored.

   - Kolikšna je verjetnost, da bo v prvem in zadnjem metu padlo enako število pik?

     **rešitev:** Verjetnost, da bo v zadnjem metu padlo isto število pik kot v prvem je 1/6

   - Kolikšna je verjetnost, da bo padlo pri tem sodo število pik vsaj enkrat?

     **rešitev:** Računajmo verjetnost nasprotnega dogodka. Verjetnost, da ne bo nikoli padlo sodo število pik je $(\frac{3}{6})^5 = 1/32$
     Iz tega sledi, da je verjetnost nasprotnega dogodka, da je vsaj enkrat padlo sodo število pik enaka $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$.

   - Kolikšna je verjetnost, da bo šele v tretjem metu prvič padlo manj kakor tri pike?

     **rešitev:** Računajmo verjetnost, da bo v prvih dveh metih padlo več kot tri pike, v tretjem poskusu pa manj kot tri pike.
     $$(\frac{4}{6})^2 \cdot \frac{2}{6}$$

- Kolikšna je verjetnost, da bo padlo v vsakem naslednjem metu več pik kakor v prejšnem?

  **rešitev:** Ugodni izzidi so:

  1 2 3 4 5 1 2 3 4 6 1 2 3 5 6 1 2 4 5 6 1 3 4 5 6 2 3 4 5 6

  Ugodnih izzidov je torej 5.

  Verjetnost je torej:

  $$\frac{6}{6^5} = \frac{1}{1296}$$

4. Ali je naslednja trditev resnična? Če sta dogodka $A$ in $B$ neodvisna, sta njuni pogojni verjetnosti $P(B|A)$ in $P(A|B)$ lahko različni.

   **rešitev:** Če sta dogodka $A$ in $B$ neodvisna, je po definiciji nedovisnosti $P(A|B) = P(A)$ in $P(B|A) = P(B)$. Dogodka pa seveda nista nujno enako verjetna, torej je odgovor drži.

5. continue at i2-52

#### 1.3.2 Slučajne spremenljivke

1. Po definiciji je vrednost slučajne spremenljivke naključno število.

   **rešitev:** Ne drži vedno, saj je domena lahko omejena ter vrednost ni nujno število.

2. Naj bo $p(x) = (6 - |x - 7|)/36$ za $x = 2, 3, ..., 12$ verjetnostna funkcija. Koliko je P(6)?

   **rešitev:**

   $$p(6) = (6 - |6 - 7|)/36 = \frac{5}{36}$$

3. V povprečju pride na postajo 5 potnikov na minuto. Predpostavimo, da je število potnikov porazdeljeno po Poissonovi porazdelitvi. Kolikšna je verjetnost, da bodo prišli v naslednji minuti trije potniki?

   **rešitev:** Verjetnostna funkcija Poissonove porazdelitve je podana z enačbo:

   $$p_k(\lambda) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

   za $\lambda$ vstavimo 5, za $k$ pa 3 in izračunamo desno stran enačbe, da dobimo verjetnost.

4. V povprečju pride na postajo 5 potnikov na minuto. Predpostavimo, da je število potnikov porazdeljeno po Poissonovi porazdelitvi. Kako je porazdeljena časovna razlika dveh zaporednih potnikov?

   **rešitev:** Porazdelitev, ki dobro opisuje časovno razliko med dvema dogodkoma v Poissonovem procesu je eksponentna porazdelitev.

5. Ali drži naslednja trditev? Če v kocki s stranico 1 enakomerno izbiramo slučajne točke, njihove koordinate pa spremlja slučajni vektor $(X, Y, Z)$, potem slučajne spremenljivke $(X, Y, Z)$ niso porazdeljene enakomerno, so pa neodvisne.

   **rešitev:** zbiranje točk si lahko predstavljamo kot neodvisno izbiranje točk na treh daljicah dolžine 1. Ker ima vsaka točka na vsaki daljici enako možnost, da je izbrana, je porazdelitev vseh spremenljivk enakomerna. Spremenljivke so pa med seboj tudi neodvisne.

6. Naj bosta slučajni spremenljivki $XinY$ standardno normalno porazdeljeni in neodvisni

   Ali drži, da so zadnje tri trditve pravilne, ostale pa niso pravilne?

   - $X+Y$ je porazdeljena $N(0,1)$.
   - $X+Y$ je neodvisna od $X$.
   - $X^2+Y^2=1$.
   - $X-Y$ je normalno porazdeljena.
   - $P(X>Y)=P(Y>Y)$.
   - $P(X>0,Y>0)=\frac{1}{4}$.

   **rešitev:** Za neodvisni, normalno porazdeljeni slučajni spremenljivki velja:

   $$Z \sim N(\mu_X+\mu_Y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$$

   Torej je v našem primeru $X+Y$ porazdeljena kot $N(0,\sqrt{2})$.
   Druga trditev iz očitnih razlogov ne velja.
   Vsota kvadratov normalnih spremenljivk je porazdeljena po hi-kvadrat porazdelitvi z dvema stopnjama prostosti. Ta porezdelitev pa ni vedno enaka 1.
   Če sta s.s. spremenljivki $X$ in $Y$ neodvisni, potem je njuna razlika porazdeljena kot

   $$Z \sim N(\mu_X-\mu_Y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$$

   Torej je porazdeljena normalno.
   Verjetnost, da bo s.s. $X$ zavzela večjo vrednost kot s.s. $Y$ je enaka varjetnosti, da bo $Y$ zavzela večjo vrednost kot $X$, saj imata obe isto porazdelitev.
   Verjetnost, da bosta obe s.s. zavzeli vrednost večjo od 0 je enaka produktu verjetnosti, da posamezna s.s. zavzame vrednost večjo od 0. Torej trditev drži.

7. Koliko je enaka ploščina desno od $z=2.1$ standardni normalni porazdelitvi.

   **rešitev:**
   Iz tabele odčitamo, koliko je ploščina levo od te točke in to število odštejemo od 1.
   Rezultat je 0.01786 (napaka v rešitvah).

8. Vržemo pošteno kocko. Naj bo A dogodek, da na kocki pade 6 pik, in naj bo $X$ število pik, ki je padko na kocki.

   Kateri od naštetih zapisov nima smisla?

   **rešitev:**
   Zapis $P(X)>0$ ni smiselen, saj moramo za zapis verjetnosti zapisati, pri kateri prednosti s.s. $X$ to velja.

9. Ali naslednja trditev drži? Če je slučajna spremenljivka $X$ porazdeljena standardno normalno $N(0,1)$, potem za vsako realno število $x$ velja

   $$P(X<x)=1-P(X>x)$$

**rešitev:**

Trditev drži, saj je ploščina pod krivuljo enaka 1. Torej predstavlja ploščina za navpično črto skozi $x$ nek delež ploščine, ki se skupaj z deležem ploščine nad to črto sešteje v 1.

10. Ali je naslednja trditev vedno pravilna? Če je slučajna spremenljivka $X$ porazdeljena Binomsko $B(n, p)$, potem za vsako celo število k velja:

$$P(X < k) = 1 - P(X > k)$$

**rešitev:**

Preberimo, kaj ta zapis pomeni. Verjetnost, da bo število ugodnih dogodkov manj kot k je enaka 1 - verjetnost, da bo ugodnih izzidov več kot k. Binomska porazdelitev je diskretna, torej bi morali upoštevati, da X zavzame lahko tudi vrednost k. Trditev torej ne drži vedno.

11. Naj bo slučajna spremenljivka $X$ porazdeljena geometrijsko s parametrom p. Če je $P(X = 4) = \frac{8}{81}$, potem je $p$ enak koliko?

**rešitev:** Rešujmo enačbo:

$$(1-p)^3 p = \frac{8}{81}$$

Rešimo za p in dobimo rezultat $\frac{1}{3}$.

12. Slučajne spremenljivke

- Kaj je to slučajna spremenljivka in kaj moramo vedeti o njej, da lahko rečemo, da jo poznamo?
- Navedi osnovne lastnosti porazdelitvenih funkcij.
- Kako delimo slučajne spremenljivke (naštej po tri najbolj pomembne predstavnike vsake vrste) in pojasni, zakaj je razlikovanje pomembno?
- Naj bo X število dvojk, ki padejo v dvanajstih neodvisnih metih standardne kocke. Zapišite in poimenujte porazdelitev te slučajne spremenljivke.
- Študent dobi na izpitu pozitivno oceno z verjetnostjo $\frac{1}{4}$. Na izpit hodi, dokler ga prvič ne opravi. Naj X označuje število opravljanj izpita. Zapišite in poimenujte porazdelitev te slučajne spremenljivke.
- Koliko je verjetnost, da bo študent šel na vsaj 8 izpitov?
- Kolikokrat bo v povprečju moral na izpit?
- Definiraj slučajni vektor ter robno porazdelitveno funkcijo in pojasni, kdaj so slučajne spremenljivke med seboj neodvisne. Podaj kakšen primer.

13. Slučajne spremenljivke in neodvisnost

- Kaj moramo vedeti o slučajni spremenljivki, da lahko rečemo, da jo poznamo (bodite bolj konkretni v primeru diskretne in zvezne slučajne spremenljivke)?
- Definiraj slučajni vektor, njegovo porazdelitveno funkcijo in jo opiši v primeru diskretne dvorazsežne porazdelitve.

- Opiši, kdaj lahko rečemo, da je slučajni vektor zvezno porazdeljen. Kako v tem primeru z gostoto verjetnosti opišemo njegovo porazdelitveno funkcijo in obratno, kako iz porazdelitvene funkcije dobimo gostoto (lahko se omejite na dvorazsežni primer)?
- V primeru zvezne porazdelitve definiraj robno porazdelitveno funkcijo in robno verjetnostno gostoto ter pojasni kdaj so slučajne spremenljivke med seboj neodvisne.
- Ali se da iz verjetnostne funkcije diskretnega dvorazsežnega slučajnega vektorja ugotoviti neodvisnost njegovih komponent (pojasni kako oziroma zakaj ne)?
- Pri diskretni dvorazsežni porazdelitvi definiraj $P(X = x_k|Y = y_k)$. Razloži s pomočjo verjetnostne tabele, kaj si (v tem primeru) predstavljamo pod pogojno porazdelitvijo (glede na pogoj $Y = y_h$.

14. Normalna porazdelitev

    - Definiraj standardni odklon in pričakovano vrednost slučajne spremenljivke.
    - Opiši postopek za standardizacijo slučajne spremenljivke in izračunaj njeno pričakovano vrednost ter njen odklon.
    - Opiši normalno porazdelitev in razloži, zakaj je pomembna.
    - Naj bo $X$ normalna slučajna spremenljivka s parametroma $\mu = 19$ in $\sigma^2 = 9$. Izračunaj naslednje verjetnosti: $P(X > 21)$ in $P(X \leq 20)$.
    - Opiši večrazsežno normalno porazdelitev.

15. Neodvisno vržemo dva kovanca in standardno kocko. Za vsako piko dobimo 1 evro, za vsako cifro, ki pade, pa 2 evra. Slučajna spremenljivka $S$ naj predstavlja skupni znesek v evrih, ki ga dobimo.

    Zapiši porazdelitev slučajne spremenljivke $S$ in izračunaj $E(S)$.

    **rešitev:**
    TODO

16. Za neko stavo je treba plačati $a$ evrov. Vržemo kovanec in če pade cifra, dobimo 4 evre.

    Koliko naj bo $a$, da bo pričakovan dobiček 1 EUR na igro.

    **rešitev:**
    TODO

17. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki nam pove, kolikokrat je v štirih neodvisnih metih standardne kocke padlo liho mnogo pik.

    Zapiši porazdelitev te slučajne spremenljivke in izračunaj $E(X)$.

    **rešitev:**

18. Med 12 kartami so štirje piki. Na slepo in brez vračanja izvlečemo tri karte. Naj bo $X$ število pikov med njimi.

    Zapiši in poimenuj porazdelitev s.s. $X$ in izračunaj E(X).

    **rešitev:**
    TODO

19. Cesto pred vrtcem v povprečju prevozi 100 avtomobilov na uro.

   - Kolikšna je verjetnst, da bosta v treh minutah cesto prevozila manj kot 2 avtomobila?

     **rešitev:**

     TODO

   - Kolikšna je verjetnost, da v treh minutah cesto prevozijo več kot trije avtomobili?

     **rešitev:**

     TODO

   - Skupina iz vrtca potrebuje 1 minuto, da prečka cesto. Kolikšna je verjetnost, da v času, ko ta skupina prečka cesto, mimo ne pripelje noben avto?

     **rešitev:**

     TODO

20. Na prvem tradicionalnem FRI teku sodeluje 10 žensk in 15 moških. Pred štartom študentka izbere 3 tekmovalce za intervju.

   - Kolikšna je verjetnost, da bo izbranih več žensk kot moških?
   - Koliko žensk pričakujemo, da bo izbranih za intervju?
   - Kolikšna je verjetnost, da se dejansko število žensk od pričakovanega razlikuje za kvečjemu 1?

21. Slučajna spremenljivka $X$ ima zalogo vrednosti $1, 2, ..., 10$. Verjetnost, da $X$ zavzame vrednost k, je enaka $c \cdot k$.

   - Izračunaj konstanto c.

     **rešitev:**

     TODO

   - Izračunaj $P(X \leq 5)$.

     **rešitev:**

     TODO

   - Izračunaj matematično upanje slučajne spremenljivke $X$.

     **rešitev:**

     TODO

   - Izračunaj disperzijo D(X).

     **rešitev:**

     TODO

   - Izračunaj standardni odklon $\sigma(X)$

     **rešitev:**

     TODO

22. Dana je slučajna spremenljivka X:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 & 10 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

   - Izračunaj E(X)

- Izračunaj D(X)
- Izračunaj E(4X + 2)
- Izračunaj D(4X + 2)

23. V galaksiji kot je naša je v povprečju 5 supernov na stoletje. Zadnjo, za katero obstajajo zgodovinski dokazi, je leta 1604 opazoval Kepler.

    - Kolikšna je verjetnost, da od Keplerjevega opažanja dalje v Rimski cesti res ni bilo nobene supernove?

      **rešitev:**
      TODO

    - Kolikšna je verjetnost, da bomo pojav supernove znotraj Rimske ceste dočakali v naslednjih 30 letih?

      **rešitev:**
      TODO

24. V ribniku plava 10 rib. Ribič prvi dan ulovi 2 ribi, ju označi in vrne nazaj v ribnik. Drugi dan se ribič zopet poda na lov, vendar tokrat ulovi 5 rib. Naj bo $X$ število označenih med njimi.

    - Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $X$?

      **rešitev:**
      TODO

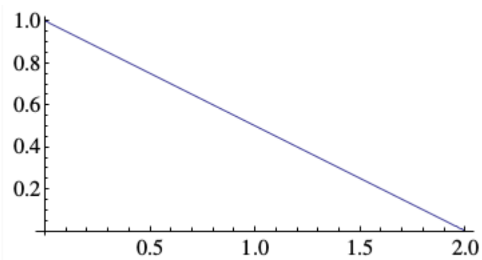
    - Koliko označenih rib lahko pričakujemo v ulovu drugega dne?

      **rešitev:**
      TODO

    - Kolikšna je verjetnost, da jih bo več kot pričakovano?

      **rešitev:**
      TODO

25. Naj bo $X$ zvezna slučajna spremenljivka, ki zavzame vrednosti med 0 in 2, njena gostota verjetnosti pa je spodnja funkcija.

    Izračunaj mediano m in ugotovi, kje glede nanjo se nahaja pričakovana vrednost $\mu$.

    **rešitev:**
    TODO

26. ???

27. Tarča je sestavljena iz črnega kroga v belem kvadratu. Strelec trikrat ustreli proti tarči. Naj bo $X$ število zadetkov tarče in $Y$ število zadetkov v črno. Ali sta spremenljivki $X$ in $Y$ neodvisni?

**rešitev:**

TODO

28. Ali za $X \sim \chi^2(25)$ velja

$$P(X > 38.5) \in [0.05, 0.1]?$$

**rešitev:**

TODO

29. Kovanec mečemo, dokler trikrat ne pade grb. Katera ocena za verjetnost, da bomo kovanec vrgli vsaj sedemkrat, je najboljša?

**rešitev:**

TODO

30. Pet vstopnic za rock koncert moramo razdeliti med 25 razgrajaških članov našega kluba. Označimo člane s številkami 1 do 25. Naključno izberi 5 srečnežev, ki bodo dobili vstopnice.

    - Izkaže se, da je med 25 člani kluba 10 žensk, ki jim pripadajo števila od 1 do 10. Dvajsetkrat naključno izberi vzorec s pet enotami po zgornjem postopku. Zabeleži število žensk v vsakem od vzorcev. Nariši histogram, ki predstavi dobljene rezultate. Izračunaj povprečno število žensk v teh 20 vzorcih.

      **rešitev:**

      TODO

    - Ali meniš, da bi morali člani kluba posumiti, da gre za diskriminacijo, če nobene od vstopnic ne bi dobila ženska? (Naj slučajna spremenljivka X označuje število žensk v vzorcu. Kako je X porazdeljena? Kolikšna je verjetnost, da v izbranem vzorcu ni žensk? Kolikšno je pričakovano število žensk v vzorcu?)

      **rešitev:**

      TODO

31. Naključna števila lahko uporabimo za simulacijo rezultatov slučajnega vzorčenja. Recimo, da izberemo enostavni slučajni vzorec velikosti 25 iz velikega števila srednješolcev in da si 20 ne poišče dela med poletnimi počitnicami. Da simuliramo ta enostavni slučajni vzorec, generiramo v programu R 25 naključnih števil med 0 in 9 z ukazom sample(0:9,25,TRUE). Števili 0 in 1 naj pomenita nezaposlene dijake, ostale števke pa tiste z zaposlitvijo. To je točna imitacija enostavnega slučajnega vzorca, ker 0 in 1 predstavljata ravno 20 izmed 10 enako verjetnih števk.

    Simuliraj rezultate petdesetih vzorcev tako, da prešteješ ničle in enice med 25 števkami v vsakem od 50 naključno generiranih seznamov. Nariši histogram, ki prikaže dobljene rezultate. Ali je resnično stanje populacije (20 nezaposlenih, tj. 5 v vzorcu 25) blizu sredine tega histograma? Kaj sta največje in najmanjše dobljeno število nezaposlenih dijakov med temi 50 vzorci? Kolikšen odstotek vzorcev je imel med 4 in 6 nezaposlenih? Rezultat vpiši v odstotkih, pri tem pa ga zaokroži na celo število.

    **rešitev:**

    TODO

32. Nek mladi par si želi tri otroke. Skupaj je 8 možnih razporeditev dečkov in deklic. Dogovorimo se, da oznaka ŽŽM pomeni, da sta prva dva otroka deklici in tretji deček, ter podobno za ostale možnosti. Vseh 8 razporeditev je (približno) enako verjetnih.

    - Napravi seznam vseh razporeditev. Kolikšna je verjetnost vsake izmed njih?

      **rešitev:**
      TODO

    - Na podlagi tega verjetnostnega modela napiši porazdelitev slučajne spremenljivke $X$, ki šteje število deklic med tremi otroki.

      **rešitev:**
      TODO

    - Uporabi model iz prejšnega vpračanja in izračunaj verjetnost, da sta med otroki vsaj dve deklici.

      **rešitev:**
      TODO

    - Vrnimo se k modelu iz prvega vprašanja. Uporabi ta model za izračun verjetnosti, da sta med tremi otroki vsaj dve deklici. Primerjaj rezultat s tistim iz prejšne točke.

      **rešitev:**
      TODO

## 1.4 06 - Binomska in normalna porazdelitev

1. V tovarni pakirajo sladkor v 5kg vreče. Količina sladkorja varira po normalni porazdelitvi in ima pričakovano vrednost 5kg ter standardni odklon 0.05 kg.

   Ali naslednja trditev drži?

   Za računanje verjetnosti dogodkov o težah posameznih vreč bomo uporabili spremenljivko $Z = (X - 5.0)/0.05$, medtem ko bomo za računanje verjetnosti dogodkov o težah vzorčnih povprečij za velikosti n = 25 uporabili spremenljivko $\bar{Z} = (\bar{X} - 5.0)/0.01$.

   **rešitev:** Trditev je pravilna. Da naravno porazdeljeno slučajno spremenljivko standardiziramo, od nje odštejemo njeno povprečje in jo normaliziramo z njeno standardno deviacijo. Vzorčno povprečje pa iz populacijskega povprečja ocenimo z $\bar{Z} = \frac{\bar{X}-5.0}{0.01}$. Torej normaliziramo z kvocientom standardne deviacije deljenim z korenom velikosti vzorca, saj velja

   $$\sigma_{\bar{X}} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

2. V nekem podjetju so bile plače zaposlenih porazdeljene normalno s povprečjem 1000 EUR in standardnim odklonom 200 EUR. Ker je bilo podjetje uspešno, se je direktor odločil, da vsem zaposlenim zviša plače za 100 EUR. Ali se je s tem standardni odklon plač zmanjšal?

   $Nedri.espremenimovrednostvsemenotampopulacijezaenakovrednost, sespremenilepovprejeinnestandardnioc$

3. Za binomsko porazdelitev $B(200, 0.25)$ izračunaj pričakovano vrednost.

**rešitev:**

Pričakovano vrednost $X \sim B(n, p)$ izračunamo s formulo $np$.

Rezultat je torej 50.

4. Naprava izdeluje dele, od katerih je 2% defektnih. Če izbrani naključni vzore petih delov vsebuje dva ali več defektnih delov, je potrebno napravo zaustaviti in poklicati serviserja. Izračunaj verjetnost, da bo potrebno zaustaviti napravo na osnovi omenjenega načrta.

**rešitev:** Slučajna spremenljivka, ki meri število defektnih delov v naključnem vzorcu petih delov je porazdeljena binomsko. Verjetnost, da bosta v vzorcu dva ali več defektna dela izračunamo kot:

$$P(X > 2) = 1 - \binom{5}{1} \cdot 0.02^1 \cdot 0.98^4 - \binom{5}{0} \cdot 0.02^0 \cdot 0.98^5 = 0.004$$

5. Ploščina pod standardizirano normalno krivuljo med $z = 0.0$ in $z = 2.0$ je

**rešitev:** Odčitamo od tabele ploščino od $-\infty$ do 2.0 in od te vrednosti odštejemo 0.5. Rezultat je 0.4772.

6. Ali naslednja trditev drži? Bernoullijevi poskusi predstavljajo zaporedje neodvisnih poskusov z dvema rezultatoma, ki ju pogosto poimenujemo uspeh in neuspeh, pri čemer je verjetnost uspeha enaka za vsak poskus.

**rešitev:**

Trditev drži. Primer je npr. metanje kovanca, kjer je uspeh, da npr. pade cifra.

7. Ali naslednja trditev vedno drži? Naj za dogodek A velja $p(A) = \frac{1}{10}$. Potem se bo v 10 poskusih dogodek A zgodil natanko 1-krat.

**rešitev:**

Trditev ne drži vedno, saj se razmerje med uspehi in neuspehi temu razmerju močno približa šele po velikem številu poskusov (zakon velikih števil).

8. Pošteni kovanec vržemo 5-krat.

- Izračunaj verjetnost, da bo pri vseh 5-ih metih padla cifra.

  **rešitev:**

  $P(X = 5) = \binom{5}{5} 0.5^5 = 0.0312$

- Izračunaj verjetnost, da bo padla cifra natanko 2-krat.

  **rešitev:**

  $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^3 = 0.3125$

- Izračunaj verjetnost, da bo padla cifra več kot 3-krat.

  **rešitev:**

  $P(X > 3) = \binom{5}{4} 0.5^4 \cdot 0.5^1 + \binom{5}{5} 0.5^5 \cdot 0.5^0 = 0.1875$

- Izračunaj verjetnost, da bo padla cifra manj kot 2-krat.

  **rešitev:**

  $P(X > 3) = \binom{5}{0} 0.5^0 \cdot 0.5^5 + \binom{5}{1} 0.5^1 \cdot 0.5^4 = 0.1875$

- Če slučajna spremenljivka spremlja število cifer, koliko je pričakovana vrednost njene porazdelitve?

  **rešitev:**

  Pričakovana vrednost binomske porazdelitve je $E(X) = np = 5 \cdot 0.5 = 2.5$.

- Če slučajna spremenljivka spremnlja število cifer, koliko je standardni odklon njene porazdelitve?

  **rešitev:**
  Standardni odklon binomske porazdelitve je $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 0.25}$

9. Binomska porazdelitev ima 8 poskusov z verjetnostjo uspeha 0.25 pri vsakem poskusu.

   - Izračunaj verjetnost natanko dveh uspehov.

     **rešitev:**
     $$\binom{8}{2} 0.25^2 \cdot 0.75^6 = 0.311$$

   - Izračunaj verjetnost vsaj enega uspeha.

     **rešitev:**
     $$P(X > 1) = 1 - \binom{8}{0} \cdot 0.75^8 = 0.9$$

   - Izračunaj verjetnost več kot 5-ih uspehov.

     **rešitev:**
     Seštej verjetnosti za $P(X = 6), P(X = 7), P(X = 8)$. (MATLAB: binocdf)
     Rezultat je 0.0042.

   - Izračunaj verjetnost največ dveh uspehov.

     **rešitev:**
     binocdf(2, 8, 0.25)
     rezultat je 0.6785.

   - Izračunaj pričakovano vrednost te porazdelitve.

     **rešitev:**
     Pričakovano vrednost binomske porazdelitve dobimo kot
     $$E(X) = np = 8 \cdot 0.25 = 2$$

   - Izračunaj standardni odklon te porazdelitve.

     **rešitev:**
     Standardni odklon binomsko porazdeljene slučajne spremenljivke izračunamo kot:
     $$\sqrt{\sigma} = \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = 1.2247$$

10. Ali naslednja trditev drži? Pri binomski porazdelitvi parameter p predstavlja verjetnost, da se bo dogodek zgodil enkrat pri $n$ ponovitvah.

    **rešitev:** Ne drži. p predstavlja verjetnost, da se pri posamezni ponovitvi poskusa dogodek zgodi.

11. Ali naslednja trditev drži? Za binomsko porazdelitev s fiksno vrednostjo p postaja z naraščanjem velikosti n binomska porazdelitev vse bolj podobna normalni.

    **rešitev:** Drži. To je ena od ključnih značilnosti binomske porazdelitve, ki je uporabna tudi pri računanju.

12. Centralni limitni izrek pravi, da je pričakovana vrednost porazdelitve vzorčnih povprečij blizu povprečju populacije, če je vzorec velik.

**rešitev:** Ne drži. CLI pravi le, da je porazdelitev standardiziranega vzorčnega povprečja lahko dobro aproksimirana z $N(0,1)$ za npr. $n > 30$.

13. Slučajna spremenljivka $X$ je porazdeljena binomsko: $B(4,p)$, tj. n = 4. Uporabi zgornjo sliko za določitev verjetnosti p:

**rešitev:** Iz slike lahko vidimo, da velja $\binom{5}{0}(1-p)^5 = 0.4096$
Iz tega izračunamo $p$, ki je enak 0.2.

14. Naj bo $X \sim B(50, 0.5)$. Predpostavimo, da bomo uporabili normalno aproksimacijo, da bi poiskali $p_{30}$. Potem je smiselno, da bi približek izračunali s čim?

**rešitev:** Normalna porazdelitev je lahko uporabljena kot aproksimacija za normalno porazdelitev pod nekaterimi pogoji, in sicer če je $n$ velik in je $p$ blizu $\frac{1}{2}$. V tem primeru velja $X \sim N(np, npq)$
Računali bi $P(29.5 < X < 30.5)$

15. Naj bo $X$ slučajna spremenljivka, ki je porazdeljena $N(0,1)$. Kolikšna je verjetnost $P(X^2 < 1)$?

**rešitev:** $X^2$ je porazdeljena po hi-kvadrat porazdelitvi z eno stopnjo prostosti. Verjetnost $P(X^2 < 1)$ odčitamo iz tabele in dobimo rezultat 0.6827.
Matlab ukaz: chi2cdf(1, 1)

16. Kolikšna je verjetnost, da v desetih metih poštenega kovanca pade grb manj kot trikrat?

**rešitev:** Verjetnost, da v desetih metih poštenega kovanca pade grb manj kot trikrat lahko izračunamo tako, da izračunamo rezultat vsote $P(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$. Lahko uporabimo MATLAB ukaz *binocdf(2, 10, 0.5)*. Rezultat je 0.0547.

17. Ana se igra z bratcem Binetom. Najprej Ana brcne žogo proti Binetu, potem pa jo Bine brcne nazaj. Razdalja, ki jo prepotuje žoga, ko jo brcne Ana, je porazdeljena kot $N(10,1)$, ko jo brcne Bine pa $N(5,1)$. Kako je porazdeljena razdalja med začetno in končno lego žoge?

**rešitev:** Naj je s.s. $Z$ slučajna spremenljivka, ki beleži dolžino med začetno in končno lego žoge. Velja $Z = X - Y$. Velja torej $Z \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X + \sigma_Y)$.

$$Z \sim (5, \sqrt{2})$$

18. V nekem podjetju so bile plače porazdeljene normalno s povprečjem 1000 evrov in standardnim odklonom 200 evrov. Ker je bilo podjetje uspešno, se je direktor odločil, da vsem zviša plače za 10%. Kako so porazdeljene po zvišanju?

**rešitev:** Če parameter vseh enot v populaciji povečamo za nek delež, se za ta isti delež poveča standardni odklon in povprečje. Velja torej, da so plače po zvišanju porazdeljene kot $N(1100, 220)$.

19. Neko ničelno domnevo želimo testirati s petimi neodvisnimi testi na različnih vzorcih. Približno koliko naj bo stopnja značilnosti pri testih, da bomo z verjetnostjo 0.4 vsaj enkrat zavrnili ničelno domnevo, če je le-ta pravilna?

**rešitev:** TODO

20. Neko domnevo želimo testirati s tremi neodvisnimi testi na različnih vzorcih. Signifikantnost testa naj bo 0.8. Približno kolikšna je verjetnost, da bomo vsaj enkrat zavrnili ničelno domnevo, če je le-ta pravilna?

**rešitev:** TODO

21. Vzorce velikosti 25 izbiramo iz populacije s povprečjem 40 in standardnim odklonom 7.5. Koliko sta potem sta pričakovana vrednost in standardni odklon vzorčnih povprečij enaka?

**rešitev:** TODO

22. Ali drži naslednja trditev? Centralni limitni izrek pravi, da je porazdelitev vzorčnih povprečij približno normalna, kadar je velikost vzorca n dovolj velika.

**rešitev:** Da, če je naključni vzorec velikosti $n$ izbran iz populacije s končno pričakovano vrednostjo $\mu$ in končno varianco $\sigma$. (Na vprašanju je odgovor ne).

23. Šestnajstsedežno letalo je preobremenjeno, če nosi težo večjo od 1440 kg. Vemo, da je teža enega potnika skupaj z njegovo prtljago porazdeljena normalno z upanjem 85 kg in standardnim odklonom 15 kg.

    Kolikšen del letal bo preobremenjenih, če potnike izberemo naključno (in so vsi sedeži zasedeni).

**rešitev:** TODO

24. Če je slučajna spremenljivka $X$ porazdeljena standardno normalno $N(0, 1)$, potem za vsako realno število x velja

$$P(X < x) = 1 - P(X > x)$$

**rešitev:** Vedno drži, saj meja x razdvaja krivuljo na dva dela, katerih vsota ploščin je enaka 1.

25. Ali je naslednja trditev resnična? Če je slučajna spremenljivka X porazdeljena binomsko $B(n, p)$, potem za vsako celo število k velja:

$$P(X < k) = 1 - P(X > k)$$

**rešitev:** Ne drži. Morali bi tudi upoštevati možnost, da je X = k.

26. Ali je nasldnja trditev resnična? Zaloga vrednosti standardizirane normalne porazdelitve je $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$.

**rešitev:** To je zaloga vrednosti gostote porazdelitve standardizirane normalne porazdelitve, zaloga vrednosti slučajne spremenljivke, ki je porazdeljena normalno pa so v vsakem primeru vsa realna števila. Trditev torej ni resnična.

27. Slučajna spremenljivka $X$ je normalno porazdeljena. Vemo, da je $X + Y \sim N(4, 5)$.

    Kjer je $Y \sim N(3, 4)$ neodvisna od $X$. Kako je porazdeljena spremenljivka $X$?

**rešitev:** Vemo, da velja $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$
Torej rešujemo enačbo $16 + x^2 = 25$, da dobimo $\sigma_X^2$. Rešitev je torej $X \sim N(1, 3)$

28. 300-krat vržemo pošten kovanec, meti so neodvisni. Kakšen je najboljši približek za verjetnost, da pade natanko 150 grbov?

**rešitev:**

29. Za normalno slučajno spremenljivko $X \sim N(\mu, \sigma)$ je $P(X < 3)$ približno 0.16. Kakšne so vrednosti $\mu$ in $\sigma$?

**rešitev:** TODO

30. Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov

    - Definiraj zaporedje neodvisnih poskusov.

      **rešitev:** TODO

    - Kaj je to Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov?

      **rešitev:** TODO

    - Kaj so to kombinacije in kako izračunamo njihovo število?

      **rešitev:** TODO

    - Izpelji Bernoullijev obrazec in predstavi dva načina/metodi za njegovo računanje.

      **rešitev:** TODO

    - Podaj Bernoullijev zakov velikih števil

      **rešitev:** TODO

31. Ali je naslednja trditev pravilna? Šestnajstsedežno letalo je preobremenjeno, če nosi težo večjo od 1440 kg. Vemo, da je teža enega potnika skupaj z njegovo prtljago porazdeljena normalno z upanjem 85 kg in standardnim odklonom 15 kg. Če potnike izberemo naključno in so vsi sedeži zasedeni, je delež letal, ki so preobremenjena, enak 0.9082.

**rešitev:** TODO

32. Ali drži naslednja trditev? Zaloga vrednosti normalne porazdelitve $X \sim N(0, 1)$ (in ne njene gostote) je $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$.

**rešitev:** TODO

33. Kovanec mečemo, dokler trikrat ne pade grb. Katera ocena za verjetnost, da bomo kovanec vrgli vsaj sedemkrat, je najboljša?

**rešitev:** TODO

34. Približno kakšen je 20. percentil (0.2-kvartil) standardne normalne porazdelitve?

**rešitev:** TODO

35. Porazdelitev višin odraslih slovenskih moških je približno normalna s srednjo vrednostjo 175 cm in standardnim odklonom 6 cm. Nariši normalno krivuljo, na kateri sta pravilno označena srednja vrednost in standardni odklon.

**rešitev:** TODO

36. Porazdelitev višin odraslih ameriških moških je približno normalna s srednjo vrednostjo 175 cm in standardnim odklonom 6 cm. Z uporabo pravila 68 - 95 - 99.7 odgovori na naslednja vprašanja o višinah odraslih američanov.

- Med katerima dvema višinama leži srednjih 95 višin?

**rešitev:** TODO

- Kolikšen delež moških je višji od 190 cm?

**rešitev:** TODO

- Kolikšen delež moških je nižjih od 170 cm?

**rešitev:** TODO

37. Porazdelitev višin odraslih ameriških moških je približno normalna s srednjo vrednostjo 175 cm in standardnim odklonom 6 cm.

    Kje so kvartili porazdelitve?

    **rešitev:** TODO

38. Rezultati standardnega inteligenčnega testa *Wechsler Adult Intelligence Scale* za skupino med 20. in 34. letom starosti so porazdeljeni približno normalno z $\mu = 110$ in $\sigma = 25$.

    - Kolikšen delež ljudi iz te skupine doseže rezultate nad 110?

    **rešitev:** TODO

    - Kolikšen delež teh ljudi ima rezultat višji od 160?

    **rešitev:** TODO

    - Poišči kvartila te porazdelitve. S preprostimi besedami razloži, kaj nam povesta ti dve števili.

    **rešitev:** TODO

39. Vojska poroča, da je porazdelitev obsega glav vojakov približno normalna s srednjo vrednostjo 58 cm in standardnim odklonom 3 cm.

    - Kolikšen delež vojakov ima obseg glave večji od 60 cm?
    - Vojska želi čelade pripraviti vnaprej in hoče, da bi se prilegale sredinskim 95 vojakom. Preostalim vojakom bodo izdelali čelade posebej. Kateri obsegi so še dovolj majhni ali pa dovolj veliki, da si bodo "prislužili" čelade po naročilu?

    **rešitev:** TODO

40. Rezultati sprejemnih izpitov SAT so približno normalno razporejeni s srednjo vrednostjo $\mu = 500$ in standardnim odklonom $\sigma = 100$.

    - Naključno izberi enega kandidata. Kolikšna je verjetnost, da je rezultat izbranega kandidata večji od 500? Večji od 600?

    **rešitev:** TODO

    - Izberi enostavni slučajni vzorec velikosti 4. Kolikšna je verjetnost, da je povprečje njihovih rezultatov večje od 500? Večje od 600?

    **rešitev:** TODO

41. Juan v kemijskem laboratoriju izvede nekaj meritev in o rezultatih poroča v svojem laboratorijskem poročilu. Standardni odklon meritev, ki so jih dobili študenti, je $\sigma = 10mg$. Juan ponovi meritve triktrat in izračuna povprečje $\bar{x}$ vseh treh rezultatov.

   - Kolikšen je standardni odklon povprečja, ki ga je izračunal Juan? (Se pravi, če bi Juan nadaljeval z izvajanjem meritev in računal povprečja treh zaporednih rezultatov, kolikšen bi bil standardni odklon vseh tako oddaljenih $\bar{x}$?

     **rešitev:** TODO

   - Kolikokrat mora Juan ponoviti meritve, da bi zmanjšal standardni odklon vrednosti $\bar{X}$ na 5? Razloži nekomu, ki ne zna statistike, zakaj je bolje poznati povprečje večih meritev kot pa rezultate ene same.

     **rešitev:** TODO

42. Študentska organizacija namerava vprašati vzorec 50 študentov, če so opazili nove izobraževalne brošure o AIDSu. Zabeležili si bodo delež pozitivnih odgovorov. Njihov svetovalec za statistiko pravi, da bo standardni odklon tega deleža približno 7. Kolikšen bi bil standardni odklon, če bi vzorec vseboval 100 študentov in ne 50?

    **rešitev:** TODO

43. Študentska organizacija namerava vprašati vzorec 50 študentov, če so opazili nove izobraževalne brošure o AIDSu. Zabeležili si bodo delež pozitivnih odgovorov. Njihov svetovalec za statistiko pravi, da bo standardni odklon tega deleža približno 7.

    Kako velik vzorec bi morali izbrati, da bi zmanjšali standardni odklon deleža pozitivnih odgovorov iz 7 na 3.5? Pojasni nekomu, ki ne zna statistike, zakaj so večji vzorci pri raziskavah mnenja boljši kot manjši.

44. Koncentracija aktivne sestavine v kapsulah je porazdeljena normalno z $\mu = 10$ in $\sigma = 0.2$.

   - Kolikšna je povprečna koncentracija?

     **rešitev:** TODO

   - Na katerem intervalu se nahaja srednjih 95 vseh koncentracij?

     **rešitev:** TODO

   - Na katerem intervalu se nahajajo koncentracije srednje polovice vseh kapsul?

     **rešitev:** TODO

45. Dolžina nosečnosti pri človeku se spreminja po porazdelitvi, ki je približno normalna s srednjo vrednostjo 266 dni in standardnim odklonom 16 dni.

   - Med kateri vrednosti pade srednjih 95 vseh nosečnosti?

     **rešitev:** TODO

   - Kako dolgih je najkrajših 2.5 nosečnosti?

     **rešitev:** TODO

46. Decila porazelitve sta točki, pod katerima leži 10 (spodnji decil) oziroma 90 (zgornji decil) vseh vrednosti. Med spodnjim in zgornjim decilom leži 80 vseh podatkov. Pri normalnih porazdelitvah se nahajata na razdalji 1.28 standardnega odklona od srednje vrednosti.

    Koliko točk mora doseči študent, da sodi med zgornjih 10 porazdelitve rezultatov SAT (ki je normalna s srednjo vrednostjo 500 in standardnim odklonom 100)?

    | **rešitev:** TODO |
    |---|

47. Dolžina nosečnosti pri človeku se spreminja po porazdelitvi, ki je približno normalna s srednjo vrednostjo 266 dni in standardnim odklonom 16 dni.

    Kako dolgih je najkrajših 10 nosečnosti?

    | **rešitev:** TODO |
    |---|

# 2 Statistika

## 2.1 11 - Vzorčna statistika

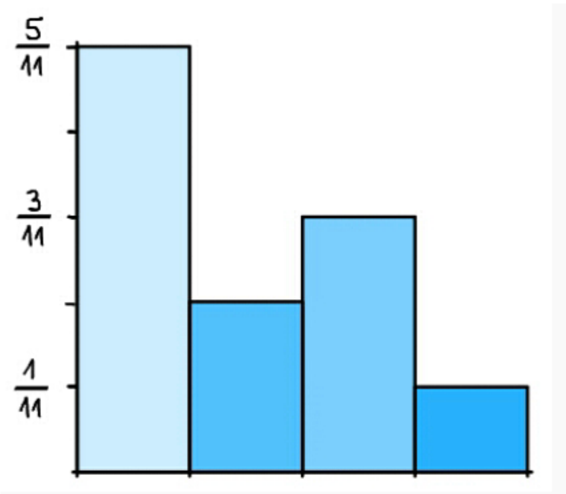
1. Med kakšne spremenljivke uvrščamo slučajne spremenljivko, ki lahko zavzame vrednosti moški in ženska?

    | **rešitev:** Uvrščamo jo med opisne-imenske. |
    |---|

2. Ali je slučajna spremenljivka, ki lahko zavzame vrednosti odličen, pravdober, dober, zadosten in nezadosten je opisno-urejenostna?

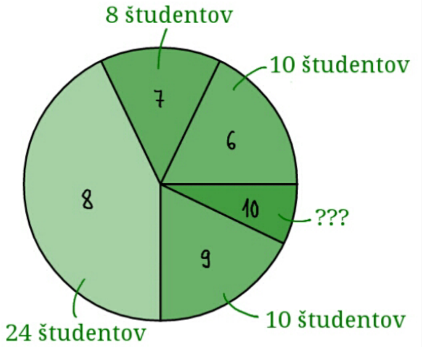
    | **rešitev:** Drži. Imamo 5 opisnih vrednosti, ki jih lahko uredimo po velikosti. |
    |---|

3. Histogram prikazuje, koliko odstotkov vseh točk je v povprečju študent nabral pri vsaki od štirih nalog na 1. kolokviju ViS. Če veš, da so študentje pri zadnji nalogi zbrali 5 točk, koliko točk so v povprečju dosegli na 1. kolokviju na vseh nalogah skupaj?

    | **rešitev:** Vidimo, da so v povprečju študentje pri zadnji nalogi dosegli $\frac{1}{11}$ točk, kar znese 5 točk. Iz tega lahko poračunamo, da je povprečno število točk, ki so jih študentje dosegli 55 ($\frac{1}{11} \cdot x = 5$, reši za x). |
    |---|

4. Kolač na sliki prikazuje porazdelitev pozitivnih ocen pri nekem predmetu. Koliko študentov je dobilo oceno 10?




| |
|---|
| **rešitev:** Iz grafa vidimo, da 28 študentov predstavlja $\frac{1}{2}$ diagrama. Torej je bilo vseh študentov 56. Vidimo, da delež študentov z oceno 10 predstavlja $\frac{1}{12}$ ploščine tortnega diagrama. Torej je bilo takih študentov $56 \cdot \frac{1}{12} = 4$. |

5. Slučajna spremenljivka $X$ je porazdeljena z $N(75, 15.0)$. Za to porazdelitev je 23. centil enak koliko?

| |
|---|
| **rešitev:** Za standardizirano normalno porazdeljeno s.s. v tabeli pogledamo, pri kateri vrednosti je meja, kjer je verjetnsot, da se nahaja vrednost s.s. nižje že 23%. To se zgodi pri vrednosti $-0.74$. Porazdelitev "denormaliziramo" kot $x = \mu + \sigma \cdot z$ in računamo $x = 75 + (-0.74 \cdot 15) = 63.9$. |

6. Kako imenujemo značilnosti populacije kot celote?

| |
|---|
| **rešitev:** Imenujemo jih statistični parametri. Oceniti jih skušamo iz značilnosti vzorca, ki jih imenujemo statistike. |

7. Kaj nam pove število frekvenca?

| |
|---|
| **rešitev:** Frekvenca je število pojavitev vrednosti slučajne spremenljivke. Na primer, če deset študentov dobi pri statistiki 80 točk, potem ima vrednost slučajne spremenljivke 80 frekvenco 10. |

8. Kakšen prikaz je frekvenčna distribucija?

| |
|---|
| **rešitev:** Frekvenčna distribuija je prikaz vrednosti v ustrezni tabeli. |

9. Frekvenca posameznega razreda je enaka:

| |
|---|
| **rešitev:** Številu vrednost številske spremenljivke, ki spada v tisti razred. Torej moč tega razreda. |

10. Širina razreda je enaka:

| |
|---|
| **rešitev:** Razliki med zgornjo in spodnjo mejo razreda. Torej kolikšen razmah je med spodnjo in zgornjo mejo. Ta vrednost ni vezana na dejanske vrednosti, ki jih razred zavzema. |

### 2.1.1 05 - Sredine

1. Za slučajno spremenljivko $X$, ki je binomsko porazdeljena z $n = 20$ in $p = 0.3$, izračunaj $\sum_{k=0}^{n} k^2 p_k$.

**rešitev:**

Rešimo nalogo z MATLAB.

*k = [1:20];*

*p = 0.3;*

*n = 20;*

*probabilities = binopdf(k, n, p);*

*K_ sqr = k.^2;*

*res = k_ sqr * probabilities';*

V spremenljivki se nahaja vrednost 40.2, ki je tudi rešitev naloge.

2. Vsaka srečka stane 2 EUR. Prodanih je bilo 400 srečk, med njimi ena dobi 500 EUR, dve drugi pa vsaka po 50 EUR.

   Kakšen je povprečen dobiček, ki ga pričakuješ z nakupomene srečke?

**rešitev:** Računajmo pričakovano vrednost spremenljivke X, ki beleži količino, ki smo jo zadeli.

$$E(X) = 500 \cdot \frac{1}{400} + 2 \cdot 50 \cdot \frac{2}{400} = 1.75$$

Povprečen dobiček je torej 1.75 EUR.

3. Momenti so vzorčne statistike, kar pomeni, da so simetrične funkcije in zato z njimi ne moremo izmeriti asimetrije.

**rešitev:** Ne drži.

4. ??

5. Mediana za slučajno spremenljivko, ki je zvezno porazdeljena, je točka, na realni osi, ki je enaka oddaljena od najmanjšega in od največjega števila iz zaloge vrednosti te slučajne spremenljivke.

**rešitev:** Ne drži. Pri zveznih porazdelitvah imamo lahko tudi opravka z neskončnimi domenami slučajne spremenljivke. V tem primeru niti ne moremo govoriti o najmanjši oziroma največji vrednosti oziroma o sredini med njima.

6. Ali je pričakovana vrednost poljubne simetrične porazdelitve vedno enaka mediani?

**rešitev:** Da. Mediana loči zgornjo polovico podatkov oz. domene slučajne spremenljivke od spodnje. Pri simetričnih porazdelitvah se bodo mediana, povprečna vrednost in pričakovana vrednost ujemale.

7. Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke deluje linearno, tj. če jo uporabimo na neki linearni kombinaciji slučajnih spremenljivk, je enaka linearni kombinaciji pričakovanih vrednosti posameznih slučajnih spremenljivk z enakimi koeficienti.

**rešitev:** To drži. Pomembna lastnost pričakovane vrednosti je:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(y).$$

8. Ali disperzija deluje linearno, kadar so slučajne spremenljivke med seboj neodvisne?

**rešitev:** To ne drži, saj za disperzijo velja že na primer $D(aX) = a^2 D(X)$. Torej ni homogen operator in posledično tudi ne linearen.

9. Vsak kolokvij pri nadaljevalnem predmetu iz statistike je vreden 100 točk. Po treh kolokvijih ima študent povprečje 88 točk in odklon 3. Koliko mora pisati četrti in peti kolokvij, da bo njegovo povprečje 90 točk, odklon pa bo ostal enak?

**rešitev:** Nastavimo enačbi.

$$9 = \frac{9 + (x_1 - 90)^2 + (x_2 - 90)^2}{5}$$

in

$$90 = \frac{88 * 3 + x_1 + x_2}{5}$$

Enačbi rešimo. Najlaže s pomočjo ustrezne programske opreme (R, MATLAB)

10. Za neko binomsko porazdeljeno slučajno spremenljivko B(n, p) je pričakovana vrednost $\mu = 4$ in standardni odklon $\sigma = \sqrt{3}$. Določi vrednost $p$.

**rešitev:** Nastavimo sistem enačb:

$$E(X) = np = 4$$

in

$$SE(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{3}$$

Rešujmo

$$p = \frac{4}{n}$$
$$n(\frac{4}{n})(1 - \frac{4}{n}) = 3n = 16 \Rightarrow p = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

11. Slučajni vektor $(X, Y)$ je porazdeljen diskretno z naslednjo verjetnostno tabelo.

| $Y \setminus X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $-1$ | 0 | 1/4 | 0 |
| 0 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| 1 | 1/4 | 0 | 0 |

Izračunaj K(X, Y).

**rešitev:** Kovarianco iz verjetnostje tabele izračunamo z uporabo formule

$$E(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Za $E(X)$ in $E(Y)$ dobimo vrednosti 1 in 0.

Za $E(XY)$ dobimo rezultat $-\frac{1}{4}$.

Rezultat je torej

$$E(X, Y) = -\frac{1}{4} - 1 \cdot 0 = -\frac{1}{4}.$$

12. Slučajni spremenljivki $X$ in $Y$ sta porazdeljeni enakomerno na intervalu $(0, 1)$. (Ni se težko prepričati, da je $D(X) = \frac{1}{12}$).

Če velja $K(X, Y) = \frac{1}{24}$, koliko je potem $D(X + 2Y)$?

**rešitev:**

TODO

13. Naj bosta $X$ in $Y$ enako porazdeljeni slučajni spremenljivki.

    Čemu je izraz K(X, Y) - D(X) vedno enak?

    **rešitev:** TODO

14. Naj bosta $X$ in $Y$ neodvisni slučajni spremenljivki.

    Čemu je izraz $K(X,Y) - D(X)$ vedno enak?

    **rešitev:** TODO

15. Katera porazdelitev ima mediano manjšo od pričakovane vrednosti (matematičnega upanja)?

    **rešitev:** Geometrijska porazdelitev $G(2/3)$ ima mediano manjšo od pričakovane vrednosti, saj je ta lastnost neujemanja mediane in pričakovane vrednosti značilna za nesimetrične porazdelitve, kot je geometrijska porazdelitev.
    (Naredi si skice verjetnostnih funkcij tipičnih porazdelitev)

16. Vsak test na tečaju statistike je vreden 100 točk. Po štirih testih ima študent povprečje 85.0. Njegov rezultat na petem testu pa je 95.0.

    Kakšno je povprečje in standardni odklon za njegovih prvih pet testov?

    **rešitev:** Povprečje po petih testih izračunamo kot

    $$\frac{85 \cdot 4 + 95}{5} = 87$$

    Za izračuna standardnega odklona pa nimamo dovolj podatkov. Potrebovali bi rezultate vseh testov.

17. Diskretne slučajne spremenljivke

    - Definiraj slučajno spremenljivko in pojasni, kdaj je le-ta diskretna. Kako lahko podaš/predstaviš diskretno slučajno spremenljivko?

      **rešitev:** Slučajna spremenljivka je spremenljika, katere možne vrednosti so izzidi slučajnih pojavov. Diskretna je, ko ima števno domeno. Podamo jo lahko z verjetnostno tabelo, kjer se v stolpcu nahajata vrednost spremenljivke in verjetnost, da zavzame to vrednost.

    - Kaj je porazdelitvena funkcija in kako izgleda v primeru diskretne slučajne spremenljivke?

      **rešitev:** Zbirna funkcija verjetnosti ali porazdelitvena funkcija (oznaka cdf iz cumulative distribution function) je v verjetnostnem računu funkcija, ki opisuje verjetnostno porazdelitev realne slučajne spremenljivke $X$. Označuje se jo z $F(X)$.
      Meri verjetnost, da slučajna spremenljivka zavzame vrednost manjšo ali enako x. V primeru diskretne s.s. ima stopničasto obliko.

    - Naštej dva primera diskretnih slučajnih spremenljivk, ter pri vsaki opiši tudi njeno verjetnostno tabelo in zgled uporabe.

      **rešitev:** Primera diskretne slučajne spremenljivke sta spremenljivka porazdeljena po binomski porazdelitvi in spremeljivka porazdeljena po enakomerni diskretni porazdelitvi. Binomsko porazdeljena slučajna spremenljivka meri, koliko poskusov, pri katerih se lahko zgodita dva medsebojno disjunktna dogodka, je bilo uspešnih izmed vseh. Enakomerno porazdeljena s. s. pa lahko z enako verjetnostjo zavzame eno od n vrednosti. Primer je slučajna spremenljivka, ki beleži koliko pik je padlo na kocki.

- Kaj je to slučajni vektor in kako opišemo v primeru diskretne dvorazsežne porazdelitve njegovo verjetnostno funkcijo? Ali se da iz nje ugotoviti kdaj sta njegovi komponenti neodvisni (pojasni kako oziroma zakaj ne)?

  **rešitev:** Verjetnostni vektor ali stohastični vektor je vektor z nenegativnimi vrednostmi, ki se seštejejo v 1. Predstavlja nam verjetnosti, da slučajna spremenljivka zavzame določeno vrednost iz domene. Slučajni vektor je lahko tudi n-terica slučajnih spremenljivk $X = (X_1, ..., X_n)$. Tudi za slučajni vektor opišemo porazdelitveni zakon s porazdelitveno funkcijo ($x_i \in R$).

- Razloži, kaj si predstavljamo pod pogojno porazdelitvijo (lahko se omejiš na diskretni primer) in kaj je to pogojna verjetnostna funkcija

  **rešitev:** Pogojna porazdelitev je porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y, kjer predstavimo verjetnosti vseh možnih kombinacij vrednosti teh dveh slučajnih spremenljivk. Pogojna verjetnostna funkcija s. s. $X$ je funkcija, ki vrednostim iz domene s.s. X dodeli verjetnosti, če vemo, kakšno vrednost je zavzela slučajna spremenljivka Y.

- Definiraj pogojno pričakovano vrednost in izračunaj pričakovano vrednost slučajne spremenljivke E(X|Y).

  **rešitev:** Pogojna pričakovana vrednost je povprečna vrednost spremenljivke v limiti, ko gre število poskusov proti neskončnosti, če vemo, kakšno vrednost je zavzela neka druga spremenljivka $Y$. $E(X|Y)$ izračunamo kot:

  $$E(X|Y) = \mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \mu_y)$$

18. Zvezne slučajne spremenljivke

- Definiraj slučajno spremenljivko in pojasni kdaj je le-ta zvezna. Kako z gostoto porazdelitve predstaviš verjetnostno porazdelitev zvezne slučajne spremenljivke?

  **rešitev:** Slučajna spremenljivka je spremenljivka, katere možne vrednosti so rezultati nekega naključnega pojava. Zvezna je, ko lahko zavzame neštevno mnogo vrednosti. Njena verjetnostna funkcija je zvezna. Gostota verjetnosti je enaka seštevku verjetnosti vseh možnih vrednosti manjših od $x$, ki jih s.s. lahko zavzame. Torej je enaka določenemu integralu $\int_{-\infty}^{x} p(t)dt$.

- Napiši vsaj tri lastnosti porazdelitvene funkcije. Kako izgleda le-ta v primeru diskretne slučajne spremenljivke (lahko poveš tudi samo, kako izgleda graf le-te)?

  **rešitev:** Porazdelitvena funkcija v primeru diskretne slučajne spremenljivke ima stopničasto obliko. Nekaj lastnosti:

  - Je nenegativna.
  - Je desno zvezna.
  - V limiti, ko x narašča proti neskončnosti, se približuje 1.

- Naštej dva primera zveznih slučajnih spremenljivk, ter pri vsaki podaj tudi njeno gostoto verjetnosti.

**rešitev:** Primera sta slučajna spremenljivka, porazdeljena s Poissonovo porazdelitvijo ter slučajna spremenlivka, porazdeljena z enakomerno zvezno porazdelitvijo.
Poissonova porazdelitev : $p_k(n) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}$ Enakomerna zvezna porazdelitev:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & sicer \end{cases}$$

- Kaj je to slučajni vektor? Kako z gostoto verjetnosti opišemo v primeru zvezne dvorazsežne porazdelitve njegovo verjetnostno funkcijo? Kakšnemu pogoju mora ustrezati verjetnostna funkcija, da so komponente slučajnega vektorja neodvisne?

**rešitev:** Definicija slučajnega vektorja - glej nekaj vprašanj nazaj.
V primeru zmezne dvorazsežne porazdelitve je porazdelitvena funkcija dvojni integral, ki meri prostornino pod funkcijo. Ta prostornina se v limiti akumulira do 1. Da so komponente slučajnega vektorja neodvisne, mora za gostoto verjetnosti veljati:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

- Pri dvorazsežni diskretni slučajni spremenljivki definiraj $P(X = x_k | Y = y_h)$. Razloži s pomočjo verjetnostne tabele, kaj si (v tem primeru) predstavljamo pod pogojno porazdelitvijo (glede na pogoj $Y = y_h$).

**rešitev:** Ta vrednost funkcije nam predstavlja relativno verjetnost, da s.s. $X$ zavzame vrednost x, če je s.s. $Y$ zavzela vrednost y. Pri verjetnostni tabeli, kjer vsak stoplec predstavlja vrednost, ki jo lahko zavzame s.s. X in vsaka vrstica vrednost, ki jo lahko zavzame Y, gledamo stolpec označen z $x_k$ in vrstico označeno z $y_k$. Vrednost, ki se nahaja v celici pri teh indeksih, je pogojna verjetnost, ki nas zanima.

- Definiraj pogojno pričakovano vrednost in izračunaj pričakovano vrednost slučajne spremenljivke $E(X|Y)$, tj. $E(E(X|Y))$ izrazi z $E(X)$.

**rešitev:** Pogojna pričakovana vrednost je dolgoročno povprečje vrednosti, ki jih zavzame slučajna spremenljivka $X$, če vemo katero vrednost je zavzela slučajna spremenljivka $Y$.

$$E(E(X|Y)) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k E(X|y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{ik} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = E(X)$$

19. Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke

- Definiraj pričakovano vrednost (tj. matematično upanje) slučajne spremenljvike.

**rešitev:** Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke je dolgoročna povprečna vrednost slučajne spremenljivke v limiti, ko gre število poskusov proti neskončnosti.

- Vsaka srečka stane 2 EUR. Prodanih je bilo 400 srečk, med njimi pa ena dobi 250 EUR, dve drugi pa vsaka po 25 EUR. Izračunaj, kakšen povprečen izkupiček lahko pričakuješ z eno srečko!

**rešitev:** Najprej izračunajmo verjetnosti za dobitke.
Verjetnost, da smo zadeli 250 EUR je $\frac{1}{400}$. Verjetnost, da smo zadeli 25 EUR pa je $\frac{2}{400}$.
Pričakovana vrednost dobitka je torej $E(X) = \frac{1}{400} \cdot 250 + \frac{2}{400} \cdot 25 = 0.75$ EUR.
Ker srečka stane 2 EUR, je pričakovana vrednost izkupička enaka $-2 + 0.75 = -1.25$.

- Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki. Izpelji koliko je pričakovana vrednost spremenljivke $aX + bY$, kjer sta $a$ in $b$ realni števili.

**rešitev:**

$$E(aX + bY) = E(aX) + E(bY) = aE(X) + bE(Y)$$

- Izračunaj pričakovano vrednost slučajne spremenljivke $W$, ki je porazdeljena normalno $N(3, 14)$.

**rešitev:** Normalna porazdelitev je simetrična. Torej se pričakovana vrednost (povprečna vrednost) ter mediana ujemata. Pričakovana vrednost (oziroma povprečje) je ena od lastnosti, ki opisujejo normalno porazdelitev, zato jo lahko iz notacije kar razberemo. Enaka je $E(X) = \mu = 3$.

- Izračunaj pričakovano vrednost slučajne spremenljivke $W$, ki je porazdeljena binomsko $B(100, 0.25)$.

**rešitev:** pričakovano vrednost binomsko porazdeljene slučajne spremenljivke dobimo s formulo $E(X) = np$.
Torej velja:

$$E(X) = 100 \cdot 0.25 = 25$$

- Naj bo spremenljivka X porazdeljena po shemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & ? \end{pmatrix}$$

določi pričakovano vrednost $E(X)$

**rešitev:** Pričakovano vrednost lahko dobimo kot skalarni produkt vektorja, ki vsebuje verjetnosti z vektorjem, ki na enakem mestu vsebuje vrednost slučajne spremenljivke, ki ima to verjetnost.
Neznan parameter mora biti seveda tak, da se verjetnosti seštejejo v 1. Torej je verjetnost, da s.s. zavzame vrednost 4 enaka 4/10.
Rešitev (MATLAB sintaksa)

$$x * p' = 3$$

- Spremenljivka $Y$ ima gostoto verjetnosti $f(y) = cy(1 - y)$ za $0 < y < 1$. Določi pričakovano vrednost E(Y).

**rešitev:** Množimo vrednosti s.s. z verjetnostmi po celi domeni:

$$E(Y) = \int_0^1 cy^2(1 - y)dy = ... = c(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$$

- Vzorčno povprečje je

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Kjer je $\{X_i\}$ množica, ki predstavlja slučajen vzorec slučajne spremenljivke $X$. Izračunaj $E(\bar{X})$, če veš, da je $E(X) = \mu$.

**rešitev:** Pričakovana vrednost vzorčnega povprečja lahko ocenimo kot

$$\mu_{\bar{X}} \approx \mu$$

In ker vemo, da je $E(X) = \mu$, potem je tudi $E(\bar{X}) = \mu$.

20. Disperzija slučajne spremenljvike

- Definiraj oziroma pojasni kaj je razpršenost (disperzija) slučajne spremenljivke.

**rešitev:** Disperzija je raztegnjenost oziroma skrčenost porazdelitve. Pogoste mere za disperzijo so varianca, standardna deviacija in medkvartilni razpon.

- Vržemo kovanec za 20 centov. Kar pade je slučajna spremenljivka $X$ (če pokaže 20, je njena vrednost 20 sicer pa 0). Koliko je disperzija od X?

**rešitev:**
Uporabimo formulo:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Računamo:

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 400 = 200$$
$$E(X)^2 = (\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 20)^2 = 100$$

Velja torej:

$$D(X) = 200 - 100 = 100.$$

- Naj bodo $X$, $Y$ in $Z$ slučajne spremenljivke. Koliko je disperzija od $aX$, kjer je a realno število in koliko je disperzija od $Y + Z$, če sta slučajni spremenljivki $Y$ in $Z$ neodvisni?

**rešitev:** Iz lastnosti disperzije se spomnimo, da velja:

$$D(aX) = a^2 D(X).$$

Če sta spremenljivki Y in Z neodvisni, je njuna kovarianca enaka 0. Torej velja aditivno pravilo:

$$D(Y, Z) = D(Y) + D(Z)$$

21. Na spletni strežnik pride v povprečju 100 zahtev na uro, ki so porazdeljene Poissonovo. Ali je časovni razmik (v minutah) med dvema zaporednima zahtevama tudi porazdeljen Poissonovo?

**rešitev:** Odgovor je Ne. Za opisovanje razmika med dvema dogodkoma, če poznamo povprečno vrednost, kolikokrat na časovno enoto se dogodek zgodi, opisuje eksponentna porazdelitev.

22. Ali obstajata taki slučajni spremenljivki $X$ in $Y$, da je

$$2K(X, Y) - D(Y) - D(X) = 0?$$

**rešitev:** Drži. Spomnimo se, da velja:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + K(X, Y)$$

Izraz na desni strani je v bistvu enak $-D(X - Y)$, ker je enako 0, ko je $X - Y$ konstanta.

23. Momenti so vzorčne statistike, kar pomeni, da so simetrične funkcije in zato z njimi ne moremo izmeriti asimetrije.

**rešitev:** To ne drži. TODO

24. ??

25. Ali je pričakovana vrednost poljubne simetrične porazdelitve enaka mediani?

| |
|---|
| **rešitev:** Pričakovana vrednost (oz. povprečje) ni nujno enaka mediani. Neeakost lahko opazimo pri asimetrični porazdelitvi, na primer porazdelitvi plač v neki državi. |

26. Vzorce velikosti 25 izbiramo iz populacije s povprečjem 40 in standardnim odklonom 7.5. Potem sta pričakovana vrednost in standardni odklon vzorčnih povprečij enaka kateri vrednosti?

| |
|---|
| **rešitev:** Pričakovano vrednost vzorcev ocenimo iz pričakovane vrednosti populacije, standardni odklon vzorčnih povprečij pa ocenimo iz standardnega odklona populacije, ki ga delimo s kvadratnim korenom velikosti vzorca. |

27. Naj bosta $X$ in $Y$ neodvisni slučajni spremenljivki. Med naslednjimi trditvami samo (c), (f) in (g) niso vedno pravilne:

    (a) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

    (b) $E(XY) = E(X)E(Y)$

    (c) $D(XY) = D(X)D(Y)$

    (d) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

    (e) $K(X,Y) = 0$

    (f) $\sigma(XY) = 0$

    (g) $\sigma(X+Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$

    (h) $\rho(X,Y) = 0$

| |
|---|
| **rešitev:** Drži. Spomnimo se ustreznih lastnosti iz te snovi. |

28. Vržemo pošteno kocko. Izračunaj pričakovano vrednost števila pik.

| |
|---|
| **rešitev:** Pričakovano vrednosti izračunamo kot skalarni produkt vektorja, ki vsebuje vse možne vrednosti, ki jih lahko zavzame s.s. z vektorjem, ki na istoležnih mestih vsebuje verjetnosti, da s.s. zavzame to vrednost.<br>V MATLAB sintaksi:<br>$$e = x * p'$$<br>Pričakovana vrednost je torej enaka 3.5. |

29. Nek mladi par si želi 3 otroke. Skupaj je 8 možnih razporeditev deklic in dečkov. Dogovorimo se, da oznaka ŽŽM pomeni, da sta prva dva odtroka deklici in tretji deček, ter podobno za ostale možnosti. Vseh 8 razporeditev je približno enako verjetnih.

    Izračunaj povprečno število deklic med temi otroki.

| |
|---|
| **rešitev:** Povprečno število deklic dobimo iz pričakovane vrednosti binomske porazdelitve.<br>$$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1.5$$ |

30. Profesor ekonomije ocenjuje svoje študente z ocenami od 0 do 4. Porazdelitev ocen je naslednja:

| Razred | Verjetnost |
|---|---|
| 0 | 0.1 |
| 1 | 0.15 |
| 2 | 0.3 |
| 3 | 0.3 |
| 4 | 0.15 |

Poišči povprečje (se pravi, sredno vrednost) ocene pri tem predmetu. Izdelaj verjetnostni histogram za porazdelitev ocen in na njem označi srednjo vrednost.

**rešitev:** Srednjo vrednost dobimo tako, da izračunamo pričakovano vrednost po znanem postopku. Dobimo rezultat 2.25.

31. Ameriška državna loterija je predstavila igro izberi 3, pri kateri ponujajo igralcu več možnih stav. Igralci izberejo trimestno število in stavijo 1$. Loterija vsak večer oznani zmagovalno trimestno število, ki ga izbere slučajno. Če igralec ugane vsa tri števila v poljubnem vrstnem redu, dobi 83.33 $, sicer pa izgubi vplačani dolar.

Poišči povprečni dobitek. (Predpostavi, da igralec izbere število s tremi različnimi števkami.)

**rešitev:** Vseh možnih kombinacij števk je $\binom{10+3-1}{3}$. Torej je verjetnost, da uganemo števke enaka $\frac{1}{220}$. Pričakovana vrednost izkupička je torej $-1 + \frac{1}{220} \cdot 83.33 = -0.6212\$$.

32. V večini velikih ameriških mest je organizirana nekakšna ilegalna oblika lota, ki deluje na naslednji način: igralec izbere eno od 1000 trimestnih števil med 000 in 999 in plača posredniku en dolar, da lahko stavi na to število. Vsak dan slučajno izberejo eno trimestno število in če je igralec število uganil, dobi 600$, sicer pa izgubi vplačani dolar.

- Kolikšen je povprečni dobitek?

  **rešitev:** Verjetnost dobitka je $\frac{1}{10^3}$.
  Torej je povprečni dobitek $-1 + \frac{1}{1000} \cdot 600 = -0.4$

- Janez že veliko let vsak dan stavi na eno število. Kaj pravi zakov velikih števil o Janezovem dobičku, medtem ko Janez nadaljuje s stavami?

**rešitev:** Zakon pravi, da bo s časom Janezov povprečni izkupiček konvergiral k pričakovani vredosti. Torej bo Janez na dolgi rok vedno izgubljal denar.

33. Ameriška ruleta ima 38 žepkov, označenih z 0, 00 in s števili od 1 do 36. Ko zavrtimo kolo, kroglica z enako verjetnostjo pristane v kateremkoli žepku. Oznake žepkov so razporejene tudi po mizi, na kateri igralci postavljajo svoje stave. Eden od stolpcev vsebuje večkratnike števila 3, torej števila 3, 6,...,36. Igralec položi 1 EUR na stolpec in prejme 3 EUR, če se kroglica ustavi na kateremkoli od teh števil.

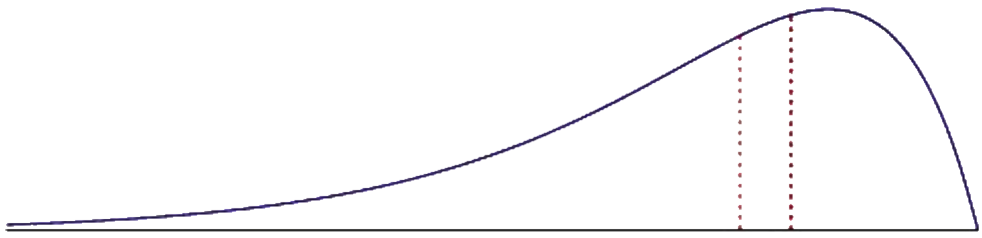
- Kolikšna je verjetnost, da zmaga?

  **rešitev:** Žepkov označenih z večkratniki števila 3 je 12. Vseh možnosti je 38. Torej je verjetnost zmage $\frac{12}{38}$.

- Kolikšen je povprečni dobitek ene igre (na dve decimalki), če upoštevamo, da vsaka igra stane 1 EUR?

  **rešitev:** Povprečni dobitek je $-1 + \frac{12}{38} \cdot 3 = -0.0526$.

34. Na sliki je prikazana nesimetrična verjetnostna porazdelitev. Srednja vrednost in mediana ne sovpadata. Katera od označenih črt je pričakovana vrednost in katera mediana? Odgovor utemelji.




**rešitev:** Porazdelitev je levo asimetrična. Torej je B mediana in A povprečna vrednost. PAZI v rešitvah je napaka!

35. Pri neki študiji smo izbrali vzorec učencev petega razreda in si zapisali, koliko let šolanja so sčasoma dokončali. Na osnovi te študije lahko podamo naslednji verjetnostni model za leta šolanja, ki jih bo s časoma končal slučajno izbrani petošolec.

| Razred | Verjetnost |
|---|---|
| 4 | 0.010 |
| 5 | 0.007 |
| 6 | 0.007 |
| 7 | 0.013 |
| 8 | 0.032 |
| 9 | 0.068 |
| 10 | 0.070 |
| 11 | 0.041 |
| 12 | 0.752 |

- Prepričaj se, da ta verjetnostni model zadošča pravilom.

  **rešitev:** V MATLAB vnesemo podatke in nad vektorjem verjetnosti kličemo funkcijo cumsum. Verjetnosti se seštejejo v 1, torej model zadošča pravilom.

- Kateri izidi sestavljajo dogodek "učenec je končal vsaj eno leto srednje šole"? (Srednja šola se začne z devetim letom šolanja.) Kolikšna je verjetnost tega dogodka?

  **rešitev:** Dogodek sestavlja seštevek verjetnosti, da je s.s. zavzela vrednost večjo od 10.

- Izračunaj povprečno število dokončanih let šolanja na dve decimalki natančno.

  **rešitev:** Povprečno število let nam poda pričakovana vrednost, ki jo izračunamo po znanem postopku. Rezultat je 11.25.

36. V igralnicah je zelo popularna igra, imenovana Keno. Kroglice, označene s števili med 1 in 80, premešamo v posebni napravi, medtem ko lahko igralci stavijo tako, da označijo številke na kartici. Nato naključno izberemo 20 kroglic. Spodaj sta dva primera stav. Za vsakega napravi verjetnostni model izidov ter poišči srednjo vrednost in standardni odklon dobitkov.

   - Pri stavi 1 EUR na "Označi eno!" dobimo 3 EUR, če je označeno število med 20 izbranimi, sicer pa izgubimo vloženi evro.

     **rešitev:** Verjetnost, da bo označeno število med dvajsetimi izbranimi je $\frac{2}{8}$. Torej je pričakovana vrednost $-1 + \frac{2}{8} \cdot 3 = -0.25$

   - Pri stavi 1 EUR na "Označi dve!" dobimo 12 EUR, če sta obe označeni števili med 20 izbranimi. Verjetnost tega dogodka je približno 0.06.

     **rešitev:** Pričakovana vrednost je torej $-1 + 0.06 \cdot 12 = -0.28$

   - Ali je bolje igrati "Označi eno!" ali "Označi dve!"?

     **rešitev:** Na dolgi rok je izguba manjša pri "Označi eno!"

37. Obstaja preprost način za izdelavo verjetnostnega modela z dano srednjo vrednostjo $\mu$ in standardnim odklonom $\sigma$: izida sta samo dva, in sicer $\mu - \sigma$ ter $\mu + \sigma$, vsak pa se pojavi z verjetnostjo 0.5.

    S pomočjo definicij srednje vrednosti in variance verjetnostnega modela pokaći, da je res srednja vrednost takega modela enaka $\mu$ in standardni odklon $\sigma$.

    **rešitev:** Velja

$$E(X) = \frac{\mu - \sigma}{2} + \frac{\mu + \sigma}{2} = \mu s(X) = \sqrt{E(X-\mu)^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}} = \sigma$$

## 2.2 11 - Vzorčne statistike

1. Če sta pričakovana vrednost in standardni odklon za neko populacijo zaporedoma enaka 25 in 5, in izbiramo vzorce velikosti $n = 100$, izračunaj standardni odklon za vzorčno povprečje.

   **rešitev:** Standardni odklon vzorčnega povprečja ocenimo iz standardnega odklona povprečja populacije kot $\sigma_{\bar{X}} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
   Torej velja $\frac{5}{\sqrt{100}} = 0.5$.

2. ???

3. Kaj pomeni vzorčna spremenljivost?

   **rešitev:** Vzorčna spremenljivost pomeni, da se lahko vzorčna statistika spreminja, glede na to kateri vzorec izberemo. Ko imamo veliko vzorcev, nam centralni limitni izrek zagotavlja, da se bodo vzorčna povprečja porazdeljevala normalno. Iz pričakovanih vrednosti vzorčnih povprečij pa lahko nato sklepamo na parametre populacije.

4. Kaj najbolje opiše točkovno cenilko?

   **rešitev:** Točkovno cenilko najbolje opiše vzorčna statistika, ki jo uporabimo za oceno parametra.

5. ???

6. Preverjali smo ničelno domnevo $H_0$ napram alternativni $H_a$ s stopnjo tveganja $\alpha = 0.05$. Dobili smo, da je $P$-vrednost testne statistike enaka 0.01. Kakšen je rezultat testa?

   | |
   |---|
   | **rešitev:** TODO |