



DIE  
TI. UNIVERSITÀ<sup>DEGLI</sup> STUDI DI  
NAPOLI FEDERICO II

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA  
E TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE

TESINA DI DINAMICA  
E CONTROLLO NON LINEARE

## SHIP ROLL MOTION

Professore  
Ch.mo.  
Mario Di Bernardo

Candidato  
Ciro Arena  
P38/53

# Indice

<b>1</b>	<b>Contesto</b>	<b>4</b>
1.1	Descrizione del problema . . . . .	4
1.2	Modello matematico . . . . .	5
1.2.1	Rappresentazione implicita i-s-u . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Analisi</b>	<b>8</b>
2.1	Punti di equilibrio . . . . .	8
2.2	Cicli limite . . . . .	11
2.3	Biforcazioni . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Sintesi</b>	<b>14</b>
3.1	Formulazione del problema di controllo . . . . .	14
3.2	Controllo lineare . . . . .	15
3.3	I/O Feedback Linearization . . . . .	20
3.4	Sliding Mode Control . . . . .	23
3.5	Model Reference Adaptive Control . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Analisi di robustezza</b>	<b>35</b>
4.1	Robustezza a disturbi additivi . . . . .	35
4.1.1	Controllo lineare . . . . .	35
4.1.2	I/O Feedback Linearization . . . . .	38
4.1.3	Sliding Mode Control . . . . .	39
4.1.4	MRAC MCS . . . . .	43
4.2	Robustezza a variazioni parametriche . . . . .	47
4.2.1	Controllo lineare . . . . .	47
4.2.2	I/O FBL . . . . .	49
4.2.3	Sliding Mode Control . . . . .	50
4.2.4	MRAC MCS . . . . .	53
4.3	Confronto quantitativo delle prestazioni . . . . .	56
	<b>Bibliografia</b>	<b>59</b>

# Introduzione

In questo elaborato ci porremo come obiettivo quello di applicare tecniche di analisi e sintesi per un sistema fisico che ben descrive il rollio di una nave. A causa della non linearità presenti nel nostro sistema, si ricorrerà alle nozioni e agli strumenti teorici appresi durante il corso di Dinamica e Controllo Non Lineare per analizzare e, successivamente, controllare tale sistema.

L'elaborato è suddiviso in capitoli. Nel primo capitolo verrà fornita una descrizione del problema da affrontare e risolvere. Successivamente sarà introdotto il modello dinamico del sistema in esame, presentandolo dapprima nella sua forma più generale, e poi introducendo una sua versione semplificata che è quella che verrà utilizzata nel resto dell'elaborato per le fasi di analisi e sintesi. Ovviamente il modello scelto verrà descritto dettagliatamente, illustrando le variabili di stato, gli ingressi, le uscite e tutti i parametri di sistema.

Nel secondo capitolo viene condotta un'analisi a ciclo aperto del sistema. Verranno dapprincipio classificati i punti di equilibrio del sistema, determinando ovviamente la loro stabilità, verrà poi verificata la non esistenza di cicli limite nel sistema, e infine un'analisi della stabilità strutturale sarà condotta verificando per quali variazioni dei parametri si hanno fenomeni di biforcazione.

Nel terzo capitolo si passa alla fase di sintesi in cui considereremo il problema di progettare degli algoritmi di controllo per il sistema non lineare descritto nei capitoli precedenti. Faremo dapprima una chiara formulazione del problema di controllo, cioè delle specifiche che dovremo cercare di soddisfare con i diversi controllori progettati, dopodiché passeremo alla fase di progettazione vera e propria illustrando prima un controllo lineare sul modello linearizzato e poi mostreremo i progetti di alcune delle strategie di controllo non lineare apprese durante il corso, nello specifico: Feedback Linearization, Sliding Mode Control e Model Reference Adaptive Control.

Nel quarto ed ultimo capitolo verrà effettuata un'analisi di robustezza, in presenza sia di disturbi che di incertezze parametriche per tutti i controllori progettati, andando a verificare il rispetto delle specifiche di controllo, concludendo poi con un confronto quantitativo tra le prestazioni esibite dai diversi controllori.



**Figura 1:** Rollio di una nave

# Capitolo 1

## Contesto

### 1.1 Descrizione del problema

Il rollio è l'oscillazione di un veicolo terrestre, marino o aereo intorno al proprio asse longitudinale (anche detto, in questo caso asse di rollio). In navi e imbarcazioni il rollio è uno dei moti nave<sup>1</sup> dotato di forze di richiamo naturali e per questo caratterizzato da un andamento di tipo oscillatorio. Da sempre i movimenti oscillatori delle navi sono stati oggetto d'attenzione nella fase di progettazione delle stesse. Per intenderci il fenomeno del rollio è quello che determina il cosiddetto mal di mare. Le soluzioni adottate per limitare l'effetto rollio sono state poi utilizzate in campo militare per migliorare la precisione del tiro delle armi. [7].

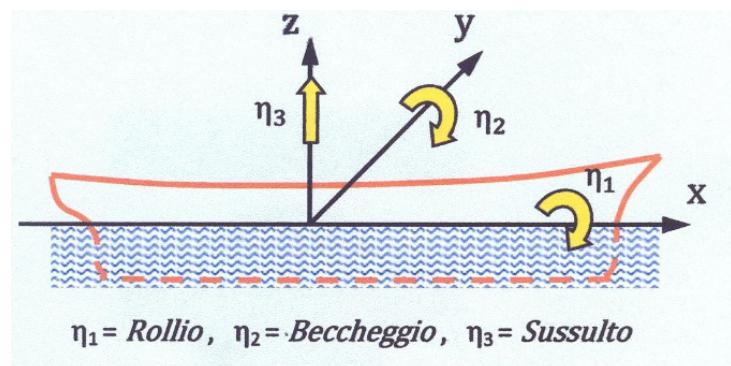


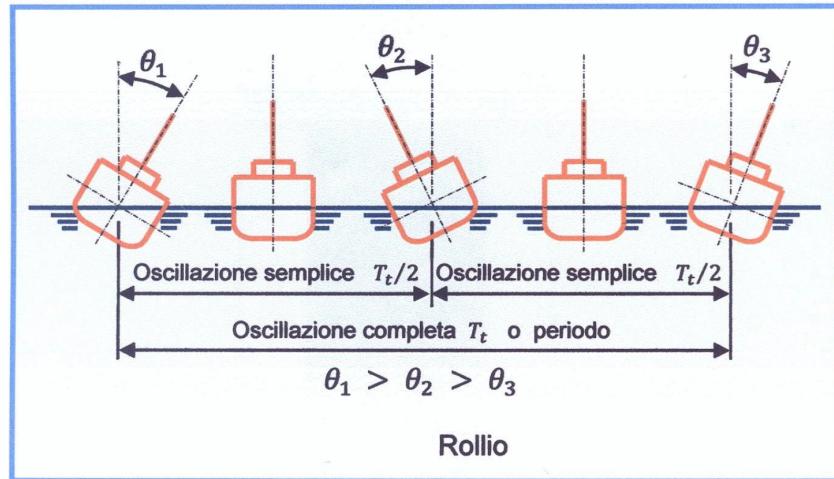
Figura 1.1: I tre principali moti oscillatori di una nave

Il moto di rollio è provocato da diversi fattori: dal movimento ondoso a quello dei venti, dalla presenza di carichi presenti a bordo e ai loro spostamenti oppure anche i movimenti stessi della nave, come una virata, possono innescarlo. Inoltre tale moto oscillatorio può essere anche determinato dall'interazione di tutte le forze esterne dotate di componente trasversale rispetto al piano diametrale, in particolare quelle legate alle necessità di propulsione e governo del mezzo marino. Esso si presenta come il moto oscillatorio tipicamente caratterizzato dalle maggiori ampiezze angolari su un mezzo marino e dunque il più pericoloso per la stabilità e sicurezza.

L'oscillazione però permette alla nave di ritrovare il proprio equilibrio in acqua. Influisce sulla questione l'altezza della nave che per motivi di sicurezza non potrà mai superare certi limiti seguendo un rapporto matematico rispetto alla lunghezza dell'imbarcazione.

<sup>1</sup>Con il nome generale di moti nave sono indicati tutti i possibili atti di moto puri che una nave e più in generale un galleggiante può compiere rispetto al proprio riferimento solidale, detto *riferimento nave*. Per il resto si rimanda a [6]

In aggiunta la progettazione della nave considera tutte le sollecitazioni esterne possibili, in modo da garantire il ritorno della nave in posizione dritta dopo un tot. di oscillazioni. L'oscillazione completa è il movimento massimo che compie la nave quando raggiunge la massima inclinazione sia in un verso che nell'altro, per poi tornare alla posizione di partenza [5]. Inoltre si intende per ampiezza di oscillazione l'angolo compiuto da una nave durante un'oscillazione semplice. La durata del movimento oscillatorio viene chiamata periodo di rollio. Il tutto è ben rappresentato in figura 1.2



**Figura 1.2:** Schematizzazione del rollio di una nave

Ne deduciamo quindi che il movimento di rollio è una caratteristica indesiderabile del comportamento di una nave in mare agitato, perciò è naturale considerare i modi per ridurlo. I dispositivi più comuni per aumentare lo smorzamento del rollio sono le *alette antirollio* o chiglie di sentina. Tuttavia, l'efficacia di tali elementi è limitata e vengono utilizzati casse e pinne antirollio quando è richiesto un maggiore controllo. Inoltre, a differenza delle chiglie, i serbatoi antirollio possono essere utilizzati quando la nave non è in navigazione.

## 1.2 Modello matematico

I movimenti di rollio della nave sono di fondamentale importanza per determinare le condizioni in cui una nave può subire un ribaltamento dinamico. In questa tesina, utilizziamo un sistema di equazioni non autonomo del secondo ordine per modellare i movimenti di rollio della nave, scrivendone dapprima una versione più generale come riportato in [1], per la quale faremo comunque alcune assunzioni semplificative. Assumiamo che la nave non possieda alcuna velocità di avanzamento e che i moti di rollio della nave siano disaccoppiati da altri movimenti, allora potremo scrivere l'equazione in forma ingresso-uscita per moti di rollio in termini dell'angolo di rollio  $\phi$

$$(I + \delta I)\ddot{\phi} + \tilde{D}(\phi, \dot{\phi}) + K(\phi) = B - Is \quad (1.1)$$

dove :

- $s$  è la pendenza dell'onda;
- $I$  è il momento di inerzia rotazionale;
- $\delta I$  è la cosiddetta *added inertia* o momento di inerzia aggiuntivo dovuto al fluido circostante, ed in generale è un momento variabile;

- $B$  è un momento di polarizzazione costante che potrebbe essere dovuto a un vento costante o ad uno squilibrio nel carico a bordo;
- $\tilde{D}(\phi, \dot{\phi})$  rappresenta il termine di smorzamento che può dipendere da molti fattori, come la velocità di avanzamento dell'imbarcazione, il profilo dell'imbarcazione, le pinne antirollio e le chiglie di sentina;
- $K(\phi)$  è il cosiddetto *restoring moment* o momento stabilizzante ed è il momento che agisce per far tornare la nave in posizione verticale e sorge quando l'imbarcazione si inclina di un piccolo angolo.

Come già detto faremo alcune ipotesi semplificative, assumeremo innanzitutto che  $\delta I$  è costante e poi che  $B = 0$ . A questo punto se isoliamo il termine  $\ddot{\phi}$  nella (1.1), ottenendo

$$\ddot{\phi} + \frac{\tilde{D}(\phi, \dot{\phi})}{(I + \delta I)} + \frac{K(\phi)}{(I + \delta I)} = -\frac{I}{(I + \delta I)} \ddot{s} \quad (1.2)$$

possiamo introdurre la seguente approssimazione

$$\frac{K(\phi)}{(I + \delta I)} \simeq \alpha_1 \phi + \alpha_3 \phi^3 + \alpha_5 \phi^5 \quad (1.3)$$

dove i valori dei coefficienti di tale polinomio sono stati stimati nel caso di modello di nave senza bias ( $B = 0$ ) e con basso bordo libero<sup>2</sup>, cioè

$$\alpha_1 = \omega_0^2 \quad \alpha_3 = -1.402\omega_0^2 \quad \alpha_5 = 0.271\omega_0^2 \quad (1.4)$$

con  $\omega_0 = 5.278 \frac{rad}{s}$  che è la frequenza naturale di rollio lineare. Infine sotto l'ipotesi di mari al traverso regolari, cioè di mare che colpisce la nave ad angolo retto rispetto alla sua chiglia, allora la pendenza dell'onda può essere scritta come

$$s(t) = s_m \cos(\Omega t) \quad (1.5)$$

dove  $s_m$  è la massima pendenza dell'onda e  $\Omega$  è la frequenza di incontro.

In conclusione sostituendo la (1.3) e la (1.5), e ponendo  $\frac{\tilde{D}(\phi, \dot{\phi})}{(I + \delta I)} = D(\phi, \dot{\phi})$  avremo

$$\ddot{\phi} + D(\phi, \dot{\phi}) + \alpha_1 \phi + \alpha_3 \phi^3 + \alpha_5 \phi^5 = f \cos(\Omega t) \quad (1.6)$$

dove  $f = \frac{I}{(I + \delta I)} s_m \Omega^2$ .

Adesso l'ultimo step che ci resta da effettuare è capire come modellare il termine di attrito  $D(\phi, \dot{\phi})$ . In base a quanto riportato in [1] un modo per approssimare tale termine di attrito è il seguente

$$D(\phi, \dot{\phi}) \simeq 2\mu_a \dot{\phi} + \mu_b |\dot{\phi}| \dot{\phi} \quad (1.7)$$

ed è spesso usato per modellare la resistenza che subisce un corpo che si muove attraverso un fluido. Nell'architettura navale, questo modello viene utilizzato per modellare la dissipazione dovuta alle chiglie di sentina, alle pinne antirollio e ad altre appendici sullo scafo della nave mentre si muovono nell'acqua. Però, per ragioni spiegate sempre in [1], entro un certo range di variazione di  $\dot{\phi}$ , è possibile considerare un altro tipo di approssimazione equivalente a (1.7) ossia

$$D(\phi, \dot{\phi}) \simeq 2\mu_1 \dot{\phi} + \mu_3 \dot{\phi}^3 \quad (1.8)$$

Pertanto sostituendo quest'ultima approssimazione considerata, in (1.6) avremo

$$\ddot{\phi} + 2\mu_1 \dot{\phi} + \mu_3 \dot{\phi}^3 + \alpha_1 \phi + \alpha_3 \phi^3 + \alpha_5 \phi^5 = f \cos(\Omega t) \quad (1.9)$$

---

<sup>2</sup>Il bordo libero di una nave è la distanza tra il livello del mare ed il ponte stagno più alto (detto ponte di bordo libero).

### 1.2.1 Rappresentazione implicita i-s-u

Il discorso fatto fino a questo momento è servito giusto per capire da dove esce fuori l'equazione (1.9) che governa la dinamica del moto di rollio a cui è soggetta una nave in cui l'unico forzamento che agisce è un disturbo, ossia un ingresso *non controllabile*, che dipende dalla pendenza delle onde e dalla loro frequenza d'incontro, cioè di fatto da quanto il mare è agitato. Noi però vorremmo realizzare degli obiettivi di controllo, e per farlo avremmo bisogno di un ingresso controllabile nel nostro modello. Per questo motivo, d'ora in avanti, faremo riferimento ad un'espressione leggermente diversa dalla (1.9), in cui sostituiamo il disturbo con un ingresso controllabile come proposto in [3], cioè

$$\ddot{\phi} + 2\mu_1\dot{\phi} + \mu_3\dot{\phi}^3 + \alpha_1\phi + \alpha_3\phi^3 + \alpha_5\phi^5 = u \quad (1.10)$$

dove l'ingresso è stato modellato attraverso la generica variabile di controllo  $u$ .

Abbiamo già detto che la (1.10) descrive la dinamica del moto di rollio di una nave in forma ingresso-uscita, ma, come ben sappiamo, per la fase di analisi e di sintesi che affronteremo nei prossimi capitoli, necessitiamo di una rappresentazione implicita ingresso-stato-uscita. Pertanto ponendo come variabili di stato  $[x_1 \ x_2]^T = [\phi \ \dot{\phi}]^T$  e come variabile di uscita  $y$  l'angolo di rollio  $\phi$  si avrà

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\mu_1x_2 - \mu_3x_2^3 - \alpha_1x_1 - \alpha_3x_1^3 - \alpha_5x_1^5 + u \end{cases} \quad (1.11)$$

e come si può notare, tale modello è non lineare, del secondo ordine e SISO. Inoltre il nostro modello può essere anche posto in forma affine (che ci sarà tanto utile per il controllo), ossia nella forma del tipo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.12)$$

dove

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2\mu_1x_2 - \mu_3x_2^3 - \alpha_1x_1 - \alpha_3x_1^3 - \alpha_5x_1^5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad h(\mathbf{x}) = x_1 \quad (1.13)$$

# Capitolo 2

## Analisi

Dopo esserci limitati semplicemente a descrivere il nostro sistema per poter ricavare un modello matematico in forma i-s-u del moto di rollio di una nave, possiamo cominciare ad applicare gli strumenti teorici appresi nel corso di Dinamica e Controllo Non Lineare. Tale capitolo, infatti, sarà dedicato all'analisi a ciclo aperto del nostro sistema in cui andremo a:

- individuare i punti di equilibrio, determinando gli autovalori ad essi associati
- verificare l'esistenza dei cicli limite ed eventualmente determinandone la stabilità
- studiare la stabilità strutturale del sistema e vedere se avvengono fenomeni di biforcazioni al variare dei parametri.

### 2.1 Punti di equilibrio

Dato che per definizione un punto di equilibrio di un sistema dinamico è un punto in corrispondenza del quale l'evoluzione del sistema è stazionaria per un ingresso costante, è chiaro che per poter identificare i punti di equilibrio del sistema bisognerà risolvere il modello (1.11) nelle incognite  $x_1$  e  $x_2$ , ponendo  $\dot{\mathbf{x}} = [0 \ 0]^T$  e  $u = 0$ , cioè

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -2\mu_1 x_2 - \mu_3 x_2^3 - \alpha_1 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_5 x_1^5 \end{cases} \quad (2.1)$$

Dato che il nostro è un sistema planare, ogni punto di equilibrio avrà 2 componenti, e dalla prima equazione del sistema (2.1) possiamo da subito dire che la seconda componente è nulla ( $x_{2e} = 0$ ). Per quanto riguarda la prima componente, basta trovare gli zeri del polinomio che si ottiene sostituendo  $x_2 = 0$  nella seconda equazione di (2.1), ossia

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_1^3 + \alpha_5 x_1^5 = 0$$

adesso se risolviamo questa equazione nell'incognita  $x_1$  con l'ausilio dello script MATLAB `trova_equilibri.m` otterremo le seguenti soluzioni in forma simbolica

$$x_{1e} = 0, \pm \sqrt{\frac{-\alpha_3 \pm \sqrt{\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_5}}{2\alpha_5}} \quad (2.2)$$

Si noti l'indipendenza delle coordinate dei punti di equilibrio dai coefficienti di smorzamento  $\mu_1$  e  $\mu_3$ , ma anche l'indipendenza dal parametro  $\omega_0$  che si semplifica tra numeratore

e denominatore. Sostituendo infine i valori dei parametri specificati in (1.4) otterremo i seguenti punti di equilibrio

$$x_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} -0.924 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_C = \begin{pmatrix} 0.924 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_D = \begin{pmatrix} -2.078 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_E = \begin{pmatrix} 2.078 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Arrivati a questo punto dobbiamo andare a determinare la stabilità dei punti di equilibrio appena trovati, per fare ciò dovremo calcolare la matrice Jacobiana del nostro sistema e valutarla nei punti di equilibrio. Per prima cosa dobbiamo definire le componenti del campo vettoriale del sistema che sono

$$f_1(x_1, x_2) = x_2 \quad f_2(x_1, x_2) = -2\mu_1 x_2 - \mu_3 x_2^3 - \alpha_1 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_5 x_1^5 \quad (2.4)$$

Dopodiché possiamo passare a calcolare lo Jacobiano

$$J(x_1, x_2) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 - 3\alpha_3 x_1^2 - 5\alpha_5 x_1^4 & -2\mu_1 - 3\mu_3 x_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

e determinare così il polinomio caratteristico ad esso associato con la classica formula relativa alle matrici quadrate di dimensione 2, cioè

$$\lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J) = \lambda^2 + (2\mu_1 + 3\mu_3 x_2^2)\lambda + \alpha_1 + 3\alpha_3 x_1^2 + 5\alpha_5 x_1^4 \quad (2.6)$$

Gli zeri di tale polinomio saranno gli autovalori del nostro sistema

$$\lambda_{1,2} = -(\mu_1 + 1.5\mu_3 x_2^2) \pm \sqrt{(\mu_1 + 1.5\mu_3 x_2^2)^2 - \alpha_1 - 3\alpha_3 x_1^2 - 5\alpha_5 x_1^4} \quad (2.7)$$

Sostituendo in (2.7) i valori dei parametri già specificati in (1.4) e le componenti dei punti di equilibrio (2.3) si può calcolare il valore preciso degli autovalori che riporteremo nella tabella 2.1. Si noti la dipendenza degli autovalori dai valori di  $\mu_1$  e  $\omega_0$ . Poiché

**Tabella 2.1:** Punti di equilibrio con autovalori ad essi associati

Punto	$(x_{1,e}, x_{2,e})$	Autovalori	Tipo
$x_A$	$(0, 0)$	$-\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - 27.857}$	Fuoco stabile
$x_B$	$(-0.924, 0)$	$-\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 + 44.663}$	Sella
$x_C$	$(0.924, 0)$	$-\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 + 44.663}$	Sella
$x_D$	$(-2.078, 0)$	$-\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - 225.735}$	Fuoco stabile
$x_E$	$(2.078, 0)$	$-\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - 225.735}$	Fuoco stabile

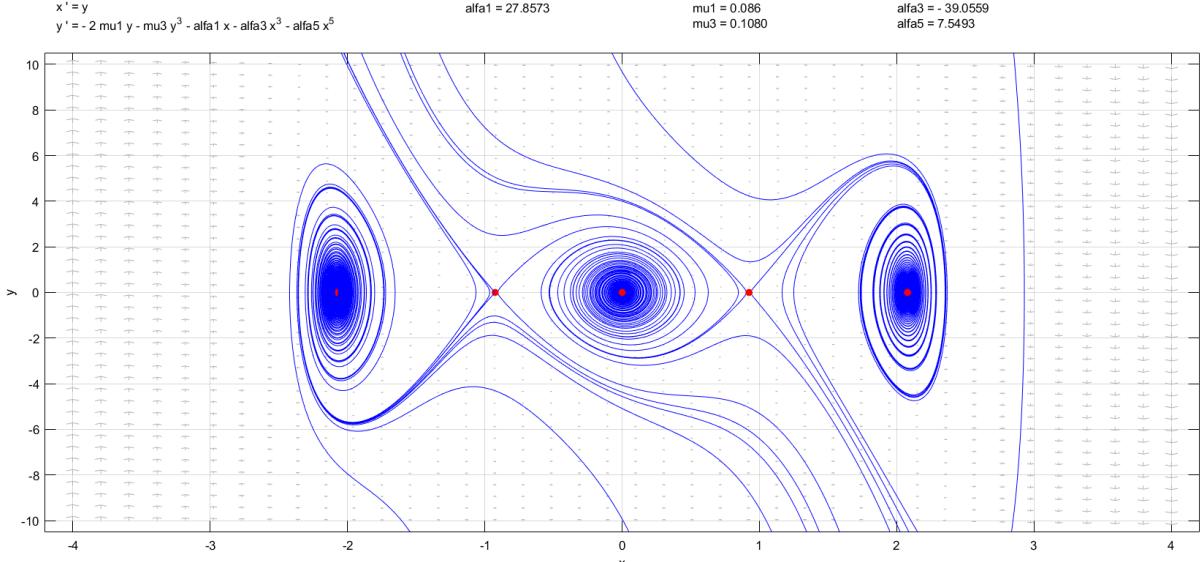
tipicamente  $\mu_1 \ll 1$  allora ai punti di equilibrio  $x_A$ ,  $x_D$  ed  $x_E$  non potranno che essere associati coppie di autovalori complessi coniugati e quindi parleremo per forza di fuochi. Inoltre poiché valori negativi per i coefficienti di smorzamento non hanno alcun significato fisico, allora queste coppie di autovalori complessi coniugati dovranno essere obbligatoriamente a parte reale negativa e quindi tali fuochi saranno sicuramente stabili. Per quanto riguarda i coefficienti di smorzamento verranno assegnati i valori riportati in [1]

$$\mu_1 = 0.086 \quad \mu_3 = 0.1080 \quad (2.8)$$

Come si può intuire abbastanza facilmente, il punto di equilibrio intorno al quale si vuole controllare il sistema è chiaramente l'origine, cioè angolo di rollio nullo e nave che

non è caratterizzata da alcun moto oscillatorio. Mentre invece agli altri 2 fuochi stabili del sistema, cioè  $x_D$  ed  $x_E$ , corrispondono ad angoli di rollio che provocano l'affondamento della nave, e dai quali ci vogliamo tenere lontani.

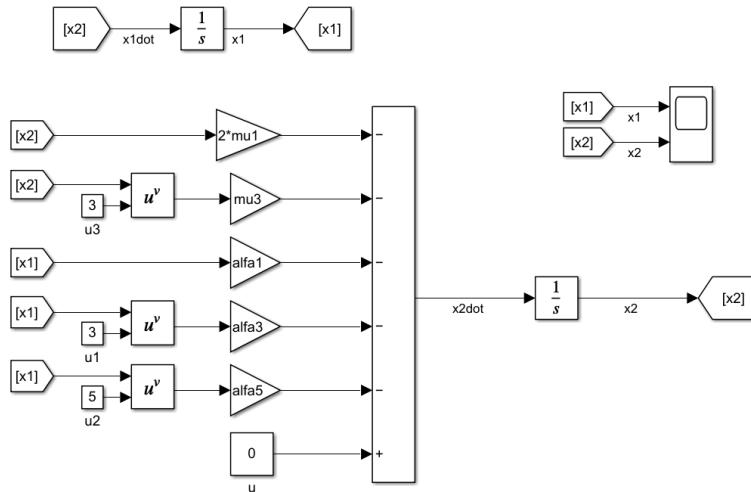
Arrivati a questo punto, visto che il nostro è un sistema planare, possiamo effettuare un analisi nel piano delle fasi avvalendoci di `pplane`. Il risultato è il seguente



**Figura 2.1:** Piano delle fasi tracciato in `pplane`

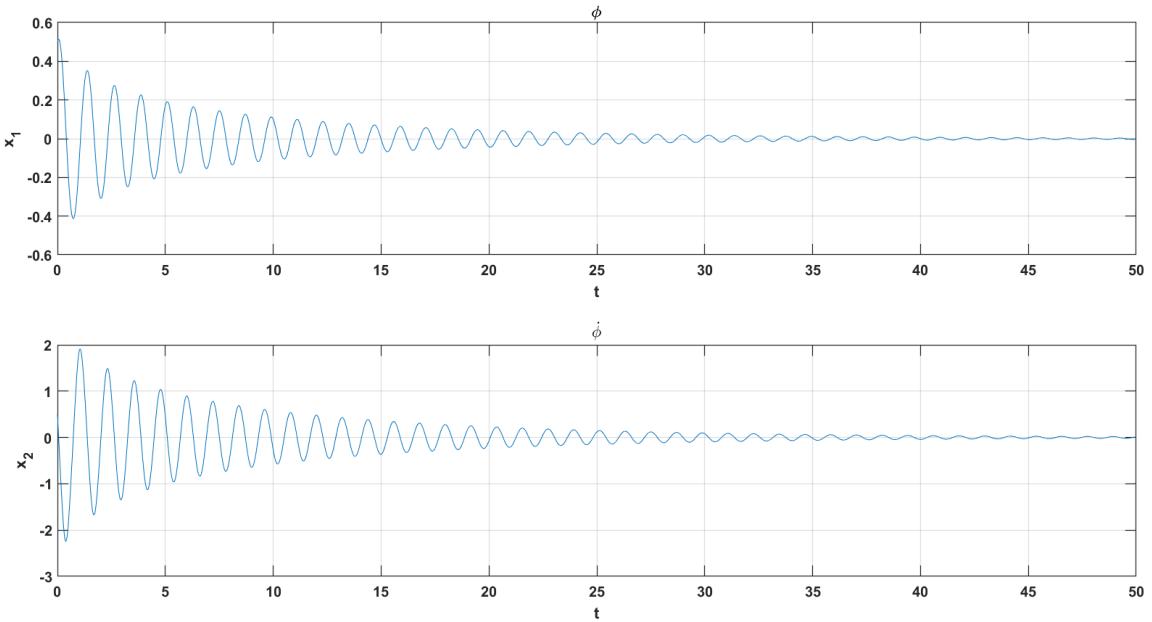
Come si può notare, in figura 2.1 abbiamo evidenziato in rosso i 5 punti di equilibrio del sistema già calcolati. Quello che però va messo in risalto è che, in virtù del teorema di esistenza ed unicità delle traiettorie (per cui 2 traiettorie non possono intersecarsi), possiamo assistere alla connessione delle varietà *instabili* delle due selle con le varietà stabili dei tre fuochi. Inoltre è possibile anche osservare che le varietà *stabili* delle due selle delimitano di fatto un *bacino di attrazione* per l'origine.

Per comprendere ancor di più quanto appena detto, proviamo a fare una simulazione a ciclo aperto del nostro modello. Innanzitutto progettiamo in Simulink il sistema non lineare, presente in `nonlinear_model.slx`, che viene mostrato in figura 2.2



**Figura 2.2:** Schema Simulink del sistema non lineare

Ora se settiamo le condizioni iniziali (cioè le condizioni iniziali dei due integratori) pari a  $(0.5 \quad 0.5)^T$ , allora, come si può notare da figura 2.1, ricadremo all'interno del bacino di attrazione dell'origine e pertanto il nostro sistema evolverà spiralandolo intorno ad esso. Ciò significa che se andiamo a graficare separatamente l'andamento delle due variabili di stato, ci dovremmo aspettare per entrambe un moto oscillatorio smorzato che convergerà a zero. Infatti andando a lanciare la simulazione otterremo il seguente risultato:



**Figura 2.3:** Andamento in evoluzione libera delle variabili di stato partendo dalla condizione iniziale  $(0.5 \quad 0.5)^T$

Si noti come le variabili di stato convergono *praticamente* a zero in circa 50 secondi. Questo accade perché abbiamo settato ad un basso valore il parametro  $\mu_1$  da cui dipende lo smorzamento, fosse stato più alto avremmo assistito ad una convergenza più rapida a zero.

## 2.2 Cicli limite

I punti di equilibrio però non costituiscono l'unica tipologia di soluzione asintotica che possiamo incontrare in un sistema non lineare (al contrario di quelli lineari) infatti ne esiste un'altra categoria che è rappresentata dalle soluzioni periodiche non isolate, dette anche *cicli limite*. Pertanto il passo successivo per questa fase di analisi consiste nel verificare l'esistenza, ed eventualmente la stabilità, di cicli limite nel piano di stato.

Per fare ciò, visto che il nostro è un sistema planare, cioè a due variabili di stato, possiamo sfruttare dei criteri di esistenza e non, appresi nel corso di Dinamica e Controllo Non Lineare. Il primo di tali criteri è il *teorema di Poincaré* che rappresenta una condizione necessaria per l'esistenza di un ciclo limite, ed esso afferma che un ciclo limite, se esiste, allora racchiuderà sempre un numero di punti di equilibri tali che  $N = S + 1$  con  $N$  numero di fuochi, centri, attrattori e repulsori, e con  $S$  numero di selle. Se ne deduce che possiamo sfruttare tale teorema per escludere le regioni di piano in cui non esiste alcun ciclo limite. Nello specifico possiamo escludere categoricamente l'esistenza di cicli limiti in tutte quelle regioni di piano che racchiudono un fuoco e una sella, e poi quelle regioni che racchiudono 2 fuochi e 2 selle.

È chiaro però che si ha bisogno di uno strumento teorico un po' più diretto per accertarsi dell'esistenza o meno di cicli limite, pertanto sfrutteremo un altro risultato teorico rappresentato dal cosiddetto *criterio di Dulac*. Tale teorema costituisce una condizione sufficiente per verificare la non esistenza di cicli limite e afferma che non esistono cicli limite se la divergenza del campo vettoriale non è identicamente nulla e non cambia mai di segno. Di conseguenza proviamo a calcolare la divergenza del campo (2.4) e vediamo cosa esce fuori

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2\mu_1 - 3\mu_3 x_2^2 \quad (2.9)$$

Dato che  $\mu_1$  e  $\mu_3$  sono coefficienti di smorzamento e in quanto tali sono quantità sempre positive, ne consegue che la (2.9) è negativa in tutto  $\mathbb{R}^2$  e dunque in virtù del criterio di Dulac non esiste alcun ciclo limite nel piano di stato.

## 2.3 Biforcazioni

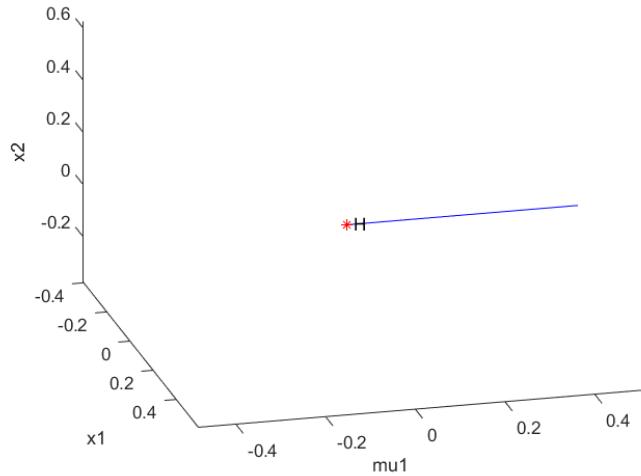
Dopo aver studiato la stabilità dei punti di equilibrio, ed aver verificato che non esistono cicli limite, adesso ci vogliamo occupare di studiare la *stabilità strutturale* del nostro sistema. Sappiamo che in generale un sistema si dice strutturalmente stabile se a fronte di variazioni parametriche, il suo ritratto delle fasi è topologicamente equivalente a quello del sistema nominale. In caso di perdita della stabilità strutturale si verificano dei fenomeni non lineari che prendono il nome di *biforcazioni*, e noi adesso vogliamo verificare se si verificano fenomeni di biforcazione nel nostro sistema. In particolare ci concentreremo sulle biforcazioni che avvengono al variare di un solo parametro, dette anche biforcazioni di *codimENSIONE 1*.

Iniziamo col considerare i coefficienti di smorzamento  $\mu_1$  e  $\mu_3$ , i quali, ricordiamo, non possono assumere valori strettamente negativi, ma a puro scopo di esercizio vedremo i fenomeni di biforcazioni che si generano quando tali coefficienti assumono valori strettamente negativi. Guardando le (2.2) e (2.7) notiamo la totale indipendenza dal parametro  $\mu_3$  dalle coordinate dei punti di equilibrio nel piano di stato e dagli autovalori ad essi associati. Possiamo pertanto dire che il sistema è senz'altro strutturalmente stabile al variare del parametro  $\mu_3$ .

Guardando invece al parametro  $\mu_1$ , possiamo notare anche in questo caso che, se esso varia, la posizione dei punti di equilibrio nel piano delle fasi rimane inalterata, quelli che però possono cambiare stavolta sono gli autovalori ad essi associati. Noi ci interesseremo del caso in cui  $\mu_1$  assume valore nullo (caso di sistema non smorzato) e quando cresce positivamente, poiché come già detto non può assumere valori negativi. Cominciamo a considerare il caso in cui  $\mu_1$  cresce: in questa situazione gli autovalori, da complessi coniugati a parte reale negativa diventano puramente reali negativi, quindi i fuochi stabili diventeranno dei nodi stabili, mentre le selle restano tali. Pertanto non si ha perdita di stabilità strutturale al crescere all'infinito di  $\mu_1$ , cioè non avremo biforcazioni. Se invece  $\mu_1$  decresce fino a diventare nullo, gli autovalori da complessi coniugati a parte reale negativa diventano puramente immaginari. Dunque il sistema nell'intorno dei punti  $x_A$ ,  $x_D$  ed  $x_E$  non esibirà più dei fuochi stabili, ma dei punti di equilibrio *centro*. Nel caso ideale in cui  $\mu_1$  decresce a tal punto da diventare negativo, tali coppie di autovalori complessi coniugati avranno parte reale *positiva*, cioè ad essi corrisponderanno dei fuochi *instabili*. Pertanto ricapitolando, al decrescere del parametro  $\mu_1$ , si ha un attraversamento trasversale di coppie di autovalori complessi coniugati associati ai punti  $x_A$ ,  $x_D$  ed  $x_E$ , che da fuochi stabili ( $\mu_1 > 0$ ), diventano dapprima dei punti di equilibrio centro ( $\mu_1 = 0$ ) e poi dei fuochi instabili ( $\mu_1 < 0$ ). In conclusione, possiamo dedurre che in caso di tale

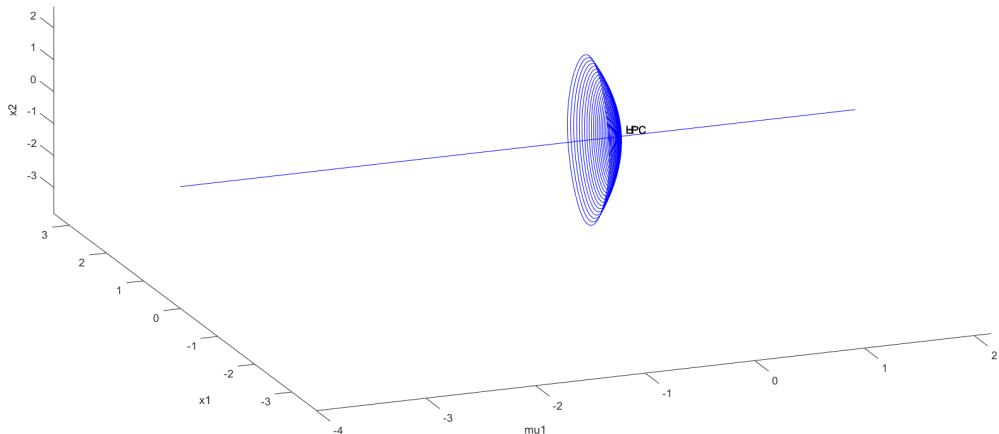
variazione del parametro  $\mu_1$  si sta assistendo ad una biforcazione di Hopf, in particolare detta *supercritica*.

Dopo aver fatto questa analisi in maniera qualitativa, a questo punto andiamo a svolgere l'analisi della stabilità strutturale in maniera più rigorosa sfruttando un software per la continuazione numerica: Matcont. Il risultato che otterremo con tale software è riportato in figura 2.4 e prova che c'è una biforcazione di Hopf supercritica per  $\mu_1 = 0$ .



**Figura 2.4:** Diagramma delle biforazioni per  $\mu_1 \geq 0$

Quando poi  $\mu_1$  diventa negativo si può assistere alla nascita di cicli limite riportati in figura 2.5



**Figura 2.5:** Diagramma delle biforazioni per  $\mu_1 < 0$

Tale diagramma delle biforazioni è stato tracciato per il punto di equilibrio  $x_A = (0, 0)$ , ma avremmo ottenuto gli stessi risultati se avessimo considerato  $x_D$  o  $x_E$ . Si osservi inoltre che la nascita di cicli limite per  $\mu_1 < 0$ , non ci deve stupire più di tanto, perché il risultato (2.9) conseguito con l'applicazione del criterio di Dulac, non vale più per  $\mu_1 < 0$ , e quindi la non esistenza di cicli limite non può essere più accertata.

# Capitolo 3

## Sintesi

Dopo aver condotto un'analisi a ciclo aperto del moto di rollio di una nave, veniamo adesso alla fase di sintesi in cui considereremo il problema di progettare degli algoritmi di controllo *a ciclo chiuso* per il nostro sistema non lineare. Nello specifico andremo a progettare strategie di controllo, sia lineare che non, in maniera tale da soddisfare gli obiettivi di controllo prefissati. Tale capitolo sarà strutturato nel modo seguente:

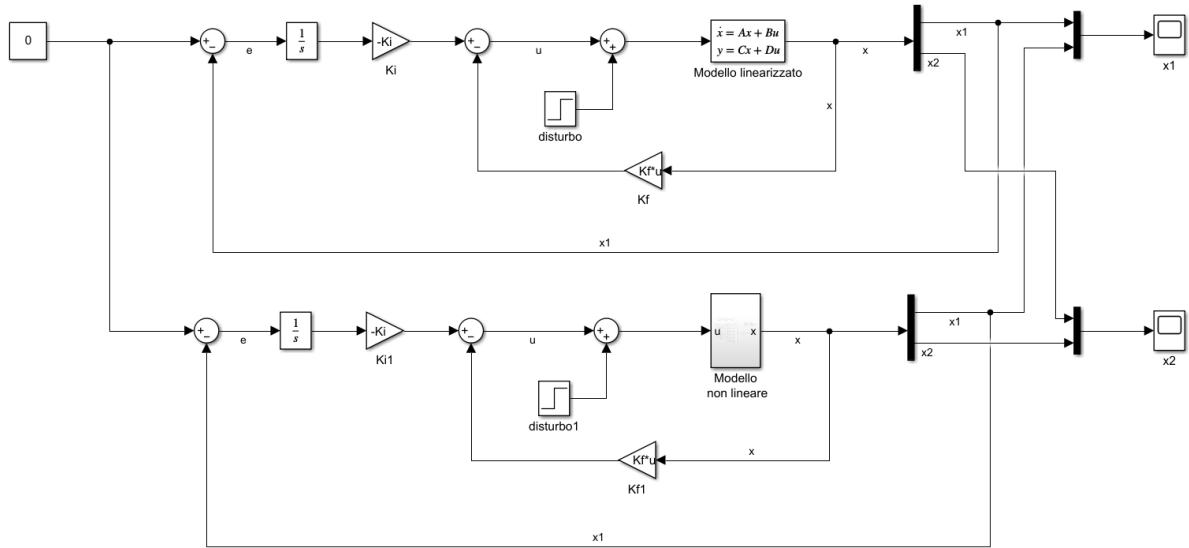
- Si comincerà con la formulazione del problema di controllo, in cui dichiareremo le specifiche di progetto che dovremo soddisfare per i diversi controllori che andremo a progettare;
- Illustreremo poi la sintesi di una strategia di controllo lineare sul modello linearizzato del nostro sistema non lineare nell'intorno di un punto di equilibrio;
- E infine passeremo all'implementazione di alcune tecniche di controllo non lineare studiate durante il corso, come la Feedback Linearization (FBL), lo Sliding Mode Control (SMC) e il Model Reference Adaptive Control Minimal Controller Synthesis (MRAC-MCS)

### 3.1 Formulazione del problema di controllo

Prima di passare alla progettazione di un qualsiasi algoritmo di controllo, è necessario specificare quali devono essere gli obiettivi di controllo in termini di performance, sia statiche che dinamiche, che i nostri controllori devono conseguire.

Abbiamo già detto che il nostro sistema ha 5 punti di equilibrio, di cui 2 selle e 3 fuochi stabili, e il punto di equilibrio intorno al quale vorremmo controllare il nostro sistema è l'origine dello spazio di stato (fuoco stabile) che corrisponde ad una posizione perfettamente verticale costante nel tempo, mentre gli altri 2 fuochi stabili  $x_D$  ed  $x_E$  corrispondono a situazioni in cui la nave è ribaltata o sul fianco sinistro o su quello destro e sta per affondare. Supporremo di partire da delle condizioni iniziali che realisticamente corrispondono ad una nave che sta per ribaltarsi, e il nostro obiettivo sarà quello di effettuare un compito di regolazione a zero dello stato, portando la nave in una posizione perfettamente verticale e senza alcun moto di rollio. Per esempio possiamo supporre che inizialmente la nostra nave ha un'inclinazione rispetto all'asse verticale di  $-70$  che corrisponde a  $\phi_0 = -1.2 \text{ rad}$  e che l'inclinazione sta aumentando di  $10$  ogni secondo, cioè  $\dot{\phi}_0 = -0.18 \text{ rad/s}$

Tale obiettivo di regolazione però, deve essere raggiunto con il soddisfacimento di diverse specifiche. Infatti per la nostra azione di controllo, sarà richiesto



**Figura 3.1:** Schema Simulink del controllo lineare a retroazione di stato con azione integrale

- $e_\infty \leq 0.01$ : prima di tutto, la regolazione a zero, se vogliamo considerarla tale, c'è bisogno che l'errore a regime sia inferiore ad una certa soglia. Scegliendo 0.01 come valore di soglia, ci potremo assicurare al più un moto di rollio talmente basso da poter essere considerato impercettibile;
- $t_{a,1} = 15s$ : a partire da certe condizioni iniziali, è chiaro che tale compito di regolazione dovrà essere effettuato in un certo tempo, verrà pertanto richiesto un tempo di assestamento pari a 15 secondi, dove per  $t_{a,1}$  si intende il tempo necessario affinché il modulo della differenza tra l'uscita e il valore di regime rimanga definitivamente al di sotto del 1%, cioè nell'intervallo  $[-0.01, 0.01]$ ;
- $S\% = 9\%$ : infine, per questa regolazione a zero verrà tollerata una piccola sovraelargazione percentuale pari, e non oltre, al 9%, ossia un picco massimo di 0.09 radianti poiché corrispondono solo ad un angolo di rollio di 5 gradi;

## 3.2 Controllo lineare

Il primo controllore che andremo a implementare sarà uno lineare, progettato chiaramente sul modello *linearizzato* del nostro sistema non lineare nell'intorno del punto di equilibrio desiderato, che abbiamo già specificato essere l'origine  $x_A = (0 \ 0)^T$ , per poi venire applicato al modello non lineare. Come già sappiamo il sistema linearizzato è valido nell'intorno del punto di equilibrio considerato, e approssima bene l'andamento del sistema solo per piccole deviazioni delle variabili rispetto ai valori nominali. Osserviamo che poiché tali valori nominali, cioè dello stato e dell'ingresso di equilibrio, nel nostro caso corrispondono entrambi a valori nulli allora, lo stato del sistema non lineare coincide con quello del linearizzato, e stesso discorso per l'ingresso, cioè  $\mathbf{x} \simeq \delta\mathbf{x}$  e  $u \simeq \delta u$

Ora noi vogliamo arrivare a scrivere e ad implementare il sistema linearizzato

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta u \quad (3.1)$$

Per fare ciò dobbiamo calcolare lo Jacobiano del sistema, cosa che abbiamo già fatto nella (2.5), ma stavolta dobbiamo valutare tale matrice in  $x_A$

$$A = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -2\mu_1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

ottenendo così la matrice dinamica del sistema linearizzato. Andando a calcolare la matrice degli ingressi del linearizzato avremo

$$B = \frac{\partial [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u]}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

mentre infine le matrici  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  saranno  $\mathbf{C} = (1 \ 0)$  e  $D = 0$ , essendo il sistema strettamente proprio.

Arrivati a questo punto dobbiamo decidere quale controllore lineare implementare e la nostra scelta ricadrà su una retroazione di stato con assegnamento degli autovalori o *pole placement* con aggiunta di un'azione integrale. È pratica comune, infatti, combinare l'approccio classico di aggiungere un termine di errore integrale per ottenere un sistema di tipo 1 tale da garantire astatismo dell'errore a regime anche a fronte di disturbi costanti (quindi *robustezza* del sistema a ciclo chiuso), con un metodo di progettazione di controllori in retroazione di stato che rendono il sistema a ciclo chiuso asintoticamente stabile, e facendo in modo che l'andamento a transitorio della risposta abbia caratteristiche da noi desiderate.

Per poter realizzare tale tecnica di controllo il primo step da compiere è verificare che la coppia  $(A, B)$  sia completamente controllabile, ma, essendo il sistema già in forma canonica di controllabilità, come si può vedere dalle (3.2) e (3.3), ciò è automaticamente verificato.

Ora noi abbiamo già detto che l'azione integrale serve per portare a zero l'errore a regime, dove per errore si intende la differenza tra il riferimento e l'uscita. È chiaro quindi che, in generale, per un sistema MIMO con  $m$  ingressi e  $p$  uscite, serviranno  $p$  azioni integrali, una per ogni canale di uscita. A questo punto, una volta che si sono aggiunti  $p$  integratori si deve tenere in considerazione che ognuno di questi porta a dover considerare una variabile di stato aggiuntiva per il nostro modello, pertanto sarà necessario considerare un nuovo sistema, di ordine aumentato rispetto a quello originale, in cui avremo  $n + p$  variabili di stato, dove le  $n$  variabili di stato sono quelle relative al sistema a ciclo aperto, mentre le restanti  $p$  sono quelle relative al blocco di integratori che abbiamo da poco aggiunto. Adesso, dato che noi abbiamo a che fare con un sistema SISO ( $p = 1$ ) e del secondo ordine ( $n = 2$ ) si renderà necessaria giusto una sola azione integrale, e si dovrà considerare il seguente sistema aumentato di ordine 3

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{x}_I = r - Cx \end{cases} \implies \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{A_g} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_g} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \quad (3.4)$$

dove nel nostro caso il riferimento è nullo. Per poter determinare la dinamica di tutte queste variabili di stato, dovremo progettare una legge di controllo a retroazione di stato che stavolta sarà del tipo

$$u(t) = -Kx(t) + K_I x_I(t) = \begin{bmatrix} -K & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

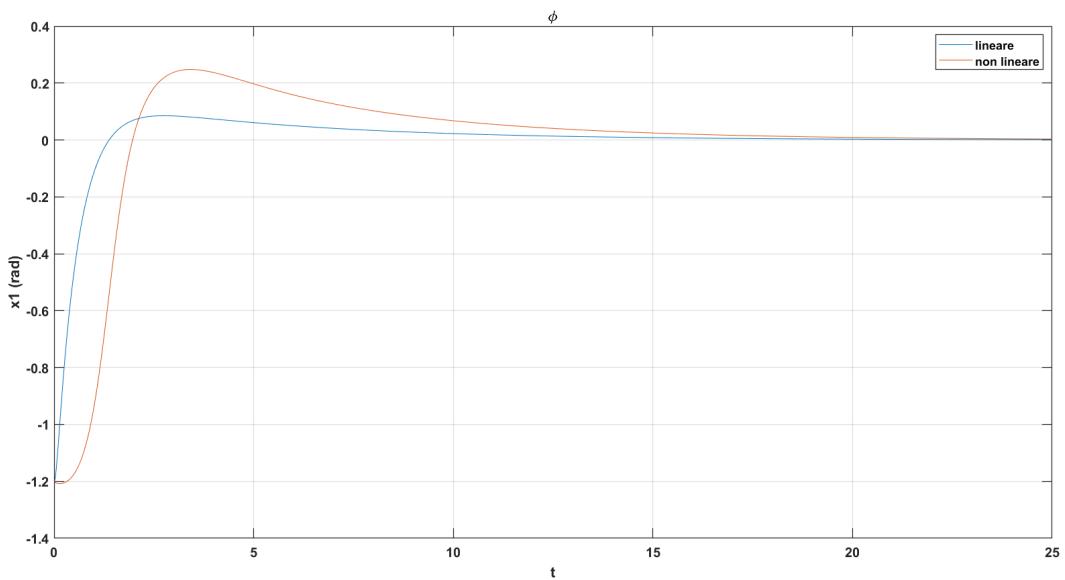
dove questa  $K_I$  è una nuova matrice di guadagno che agisce in uscita degli integratori e che progetteremo assieme alla matrice  $K$  con pole placement sul sistema (3.4).

Infine l'ultimo passo da compiere, prima di progettare il nostro controllore sul sistema aumentato, è provare che la coppia  $(A_g, B_g)$  sia per lo meno *stabilizzabile* cosa di cui ci si può accertare facilmente in MATLAB verificando la completa controllabilità.

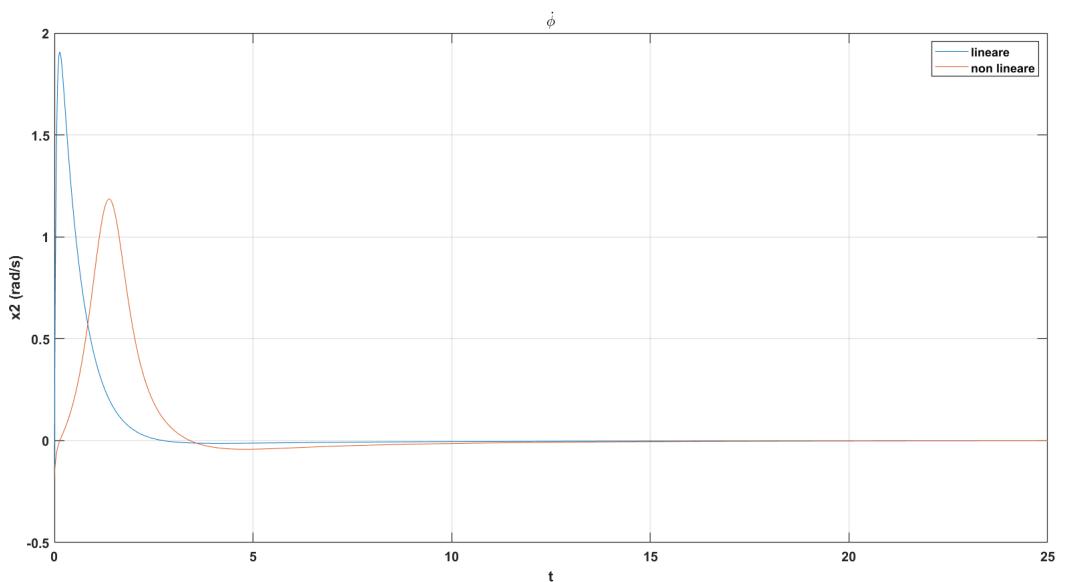
Per realizzare i nostri obiettivi di controllo, gli autovalori che assegneremo a ciclo chiuso sono i seguenti  $\lambda_1 = -0.2$ ,  $\lambda_2 = -1.8$  e  $\lambda_3 = -20$ .

Si tenga conto che dobbiamo assegnare ben 3 autovalori, e non 2 poiché la progettazione delle matrici  $K$  e  $K_I$  la stiamo facendo sul sistema aumentato, che è di ordine 3. Lo script `polePlacement.m`, assegnati gli autovalori, effettua il calcolo delle matrici di guadagno  $K$  e  $K_I$ . In figura 3.1 è riportato lo schema Simulink di tale strategia di controllo applicata sia al modello linearizzato che al modello non lineare (vedi `pole_placement_model.slx`).

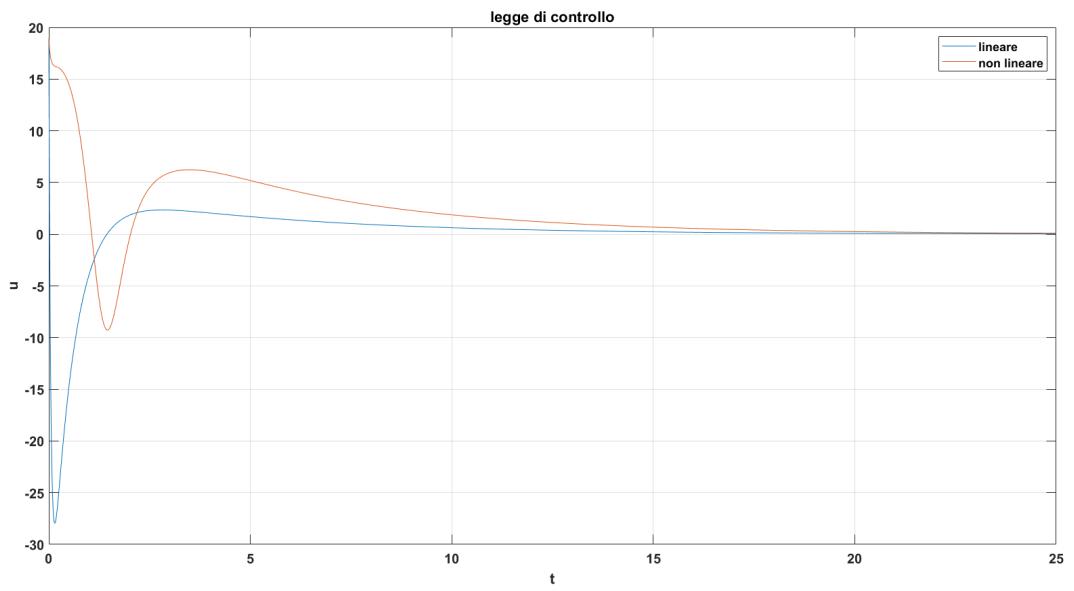
Infine vengono poi messi a confronto, tra sistema lineare e non lineare, gli andamenti delle variabili di stato, della legge di controllo e dell'errore rispettivamente nelle figure 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5.



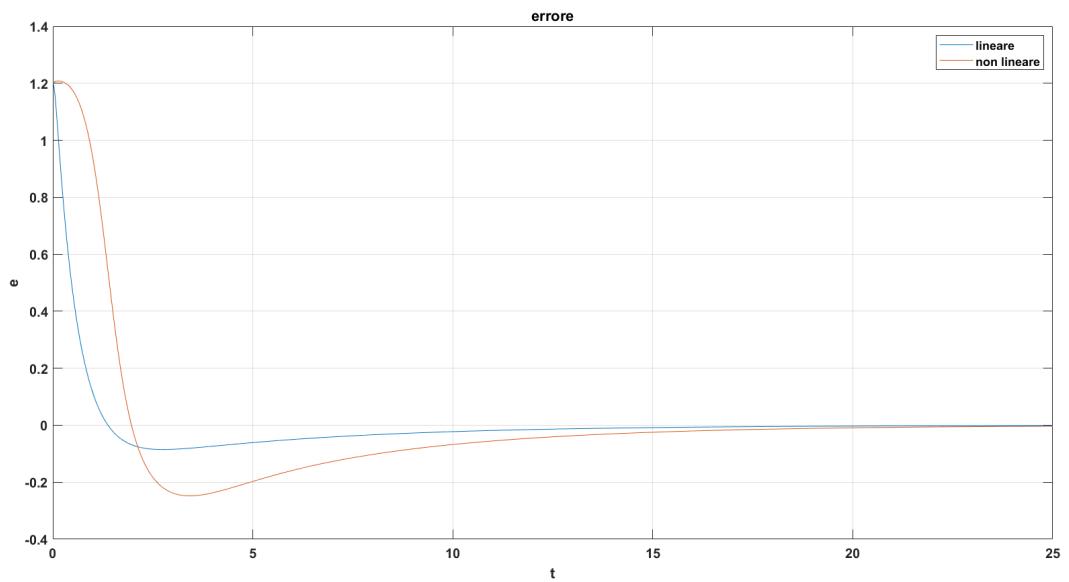
**Figura 3.2:** Confronto dell'andamento di  $x_1$  tra modello linearizzato e non lineare



**Figura 3.3:** Confronto dell'andamento di  $x_2$  tra modello linearizzato e non lineare

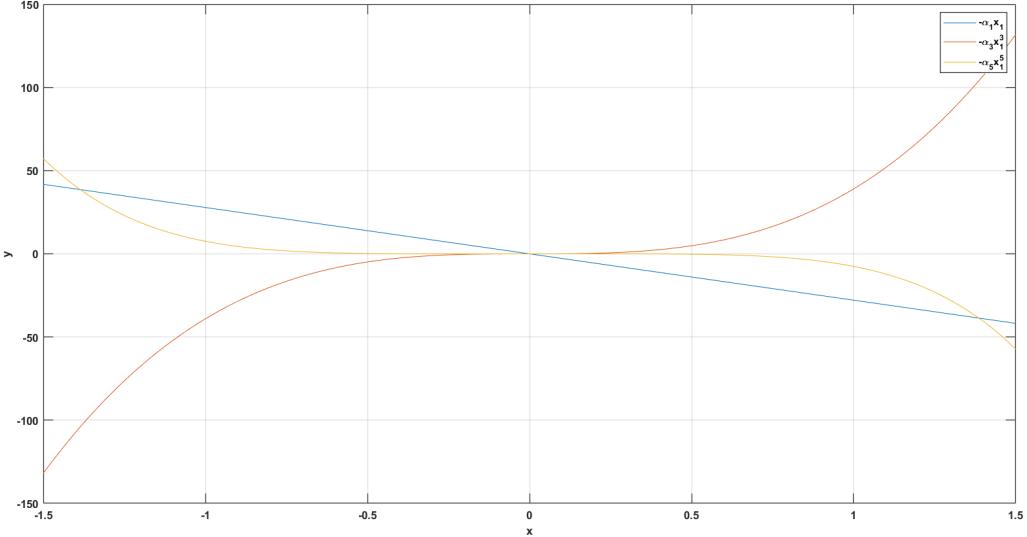


**Figura 3.4:** Confronto dell’andamento della legge di controllo tra modello linearizzato e non lineare

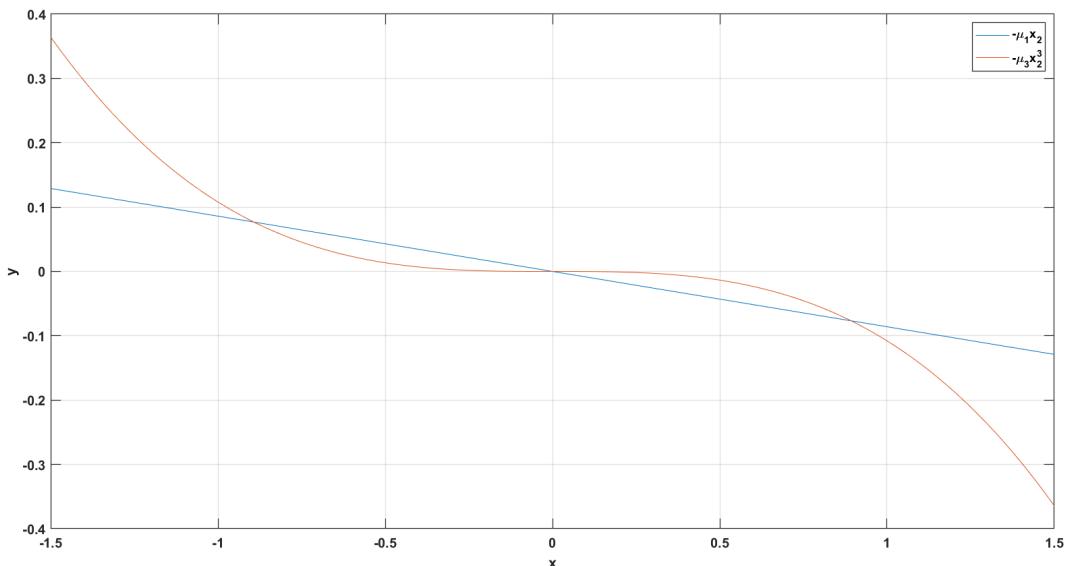


**Figura 3.5:** Confronto dell’andamento dell’errore tra modello linearizzato e non lineare

Come possiamo notare da queste immagini, i grafici delle variabili in gioco relative al modello linearizzato non coincidono perfettamente con quelle del modello non lineare e ciò non ci deve assolutamente stupire. Infatti se proviamo a graficare i termini lineari e non lineari presenti nelle equazioni del modello (1.11), separatamente per  $x_1$  e  $x_2$  otterremo i seguenti risultati:



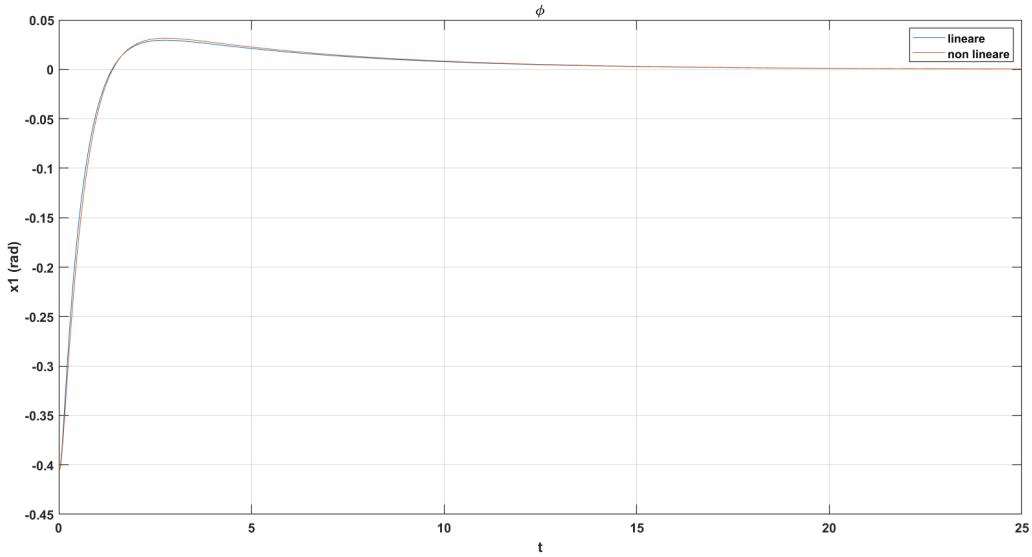
**Figura 3.6:** Grafico dei termini lineari e non in  $x_1$  presenti nel modello (1.11)



**Figura 3.7:** Grafico dei termini lineari e non in  $x_2$  presenti nel modello (1.11)

Quello che possiamo vedere in queste figure è che per certi valori della  $x$ , i termini non lineari, rispetto a quelli lineari, sono poca roba e pertanto possono essere trascurati. Nello specifico, se guardiamo con più attenzione le figure 3.6 e 3.7, possiamo vedere che per valori della  $x \in [-0.5, 0.5]$ , si ha predominanza dei termini lineari sia in  $x_1$  che in  $x_2$ . Questo significa di fatto che se partiamo da delle condizioni iniziali comprese in tale range, allora il controllo lineare, applicato sia al modello linearizzato che a quello non lineare, dovrebbe generare grafici quasi perfettamente sovrapposti. Infatti supponendo di partire

da condizioni iniziali  $(-0.4, -0.4)$ , per esempio, potremo ottenere il seguente andamento per  $x_1$



**Figura 3.8:** Confronto dell’andamento di  $x_1$  tra modello linearizzato e non lineare partendo dalle condizioni iniziali  $(-0.4, -0.4)$

### 3.3 I/O Feedback Linearization

Veniamo adesso all’implementazione dei controllori non lineari, di cui vedremo per prima l’input-output feedback linearization. In generale la Feedback Linearization (FBL) appartiene alla categoria del controllo geometrico in quanto sfrutta la geometria differenziale del campo. Proprio per quest’ultimo motivo non gode di particolare robustezza, in quanto richiede la conoscenza esatta dei campi  $f(x)$  e  $g(x)$ . Tuttavia esso ha come peculiarità importante il superamento dei limiti della linearizzazione classica, andando a linearizzare il sistema non lineare globalmente e non più solo nell’intorno di un punto di equilibrio. Se il sistema lineare che otterremo è nella forma ingresso-uscita allora si parlerà di I/O FBL.

Partiremo dal sistema non lineare nella forma affine (1.12), che è un sistema SISO di ordine  $n = 2$  con legge di controllo  $u$ , e dovremo passare ad un sistema lineare nella forma i-u del tipo

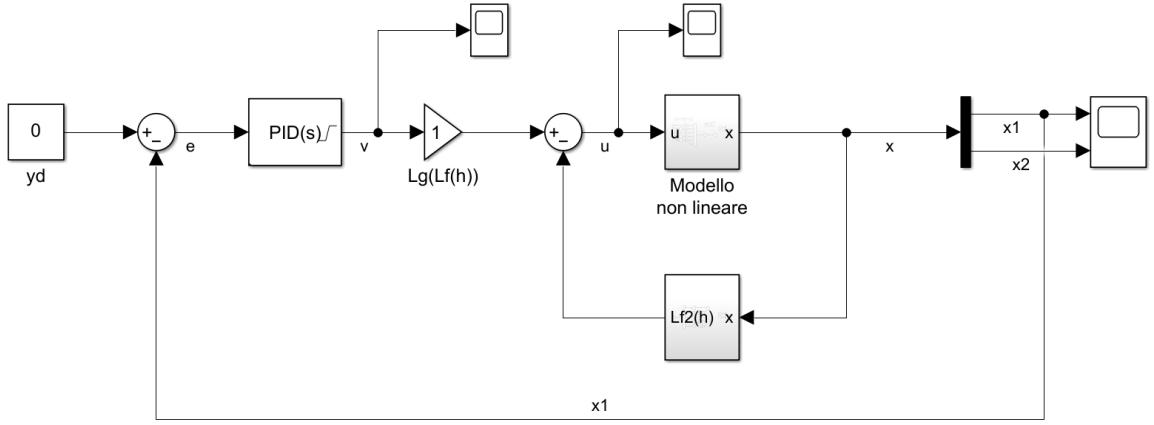
$$y^{(r)} + a_{r-1}y^{(r-1)} + a_0y = v \quad (3.6)$$

dove  $r \neq n$  è il grado del sistema lineare, e  $v$  la sua legge di controllo. Per poter fare ciò dovremo derivare l’uscita della (1.12) tante volte quante sono necessarie per ottenere una dipendenza diretta da  $u$ :

$$\dot{y} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \dot{x} = \nabla h \cdot [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u] = \mathcal{L}_f(h) + \mathcal{L}_g(h)u \quad (3.7)$$

A questo punto procediamo a calcolare le seguenti derivate di Lie sfruttando le espressioni dei campi vettoriali (1.13)

$$\mathcal{L}_f(h) = \nabla h \cdot f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -2\mu_1x_2 - \mu_3x_2^3 - \alpha_1x_1 - \alpha_3x_1^3 - \alpha_5x_1^5 \end{bmatrix} = x_2$$



**Figura 3.9:** Schema Simulink dell’I/O FBL con PID

$$\mathcal{L}_g(h) = \nabla h \cdot g(\mathbf{x}) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Notiamo che, dato che  $\mathcal{L}_g(h) = 0$ , allora nella (3.7) c’è indipendenza della  $\dot{y}$  dalla  $u$ , e possiamo con certezza affermare che il sistema lineare i-u ha grado relativo  $r > 1$ . Pertanto adesso dobbiamo procedere a derivare l’uscita una seconda volta e vedere cosa si ottiene

$$\ddot{y} = \frac{\partial \mathcal{L}_f(h)}{\partial x} \dot{x} = \nabla \mathcal{L}_f(h) \cdot [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u] = \mathcal{L}_f^2(h) + \mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(h))u \quad (3.8)$$

calcolando le derivate di Lie

$$\mathcal{L}_f^2(h) = \nabla \mathcal{L}_f(h) \cdot f(\mathbf{x}) = \nabla x_2 \cdot f(\mathbf{x}) = [0 \ 1] \cdot f(\mathbf{x}) = -2\mu_1 x_2 - \mu_3 x_2^3 - \alpha_1 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_5 x_1^5$$

$$\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(h)) = \nabla \mathcal{L}_f(h) \cdot g(\mathbf{x}) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Ne deduciamo quindi, visto che  $\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(h)) \neq 0$  che il sistema (3.6) ha grado relativo  $r = 2 = n$ , e quindi il sistema che otterremo non ha *dinamiche interne*. A questo punto possiamo progettare la nostra legge di controllo linearizzante

$$u = \frac{1}{\mathcal{L}_f(\mathcal{L}_g(h))}(v - \mathcal{L}_f^2(h)) = v + 2\mu_1 x_2 + \mu_3 x_2^3 + \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_1^3 + \alpha_5 x_1^5 \quad (3.9)$$

che se sostituita nella (3.8) ci permetterà di ottenere il seguente sistema lineare in forma i-u

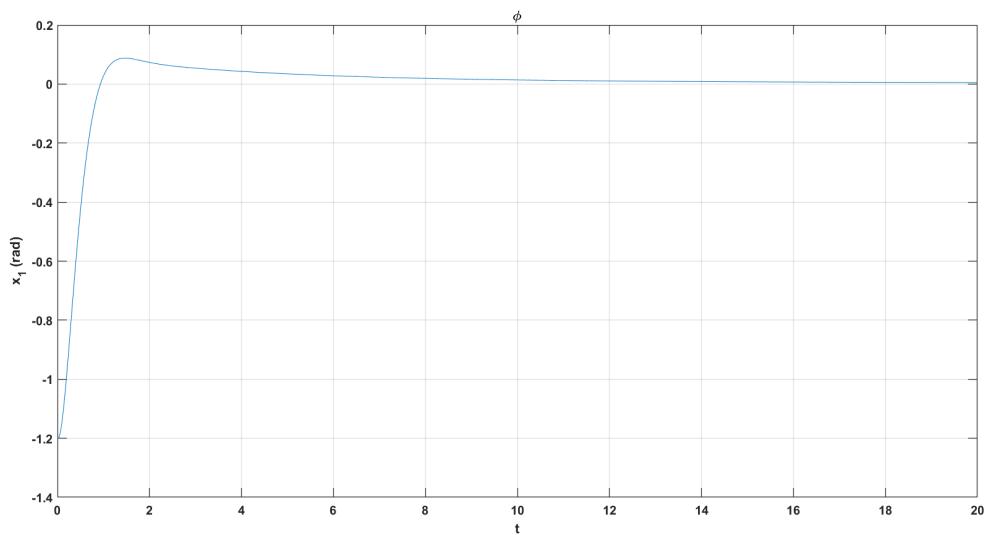
$$\ddot{y} = v \quad (3.10)$$

Adesso lo step successivo è progettare la legge di controllo ausiliario  $v$ , e la nostra scelta è ricaduta su un classico PID i cui guadagni sono

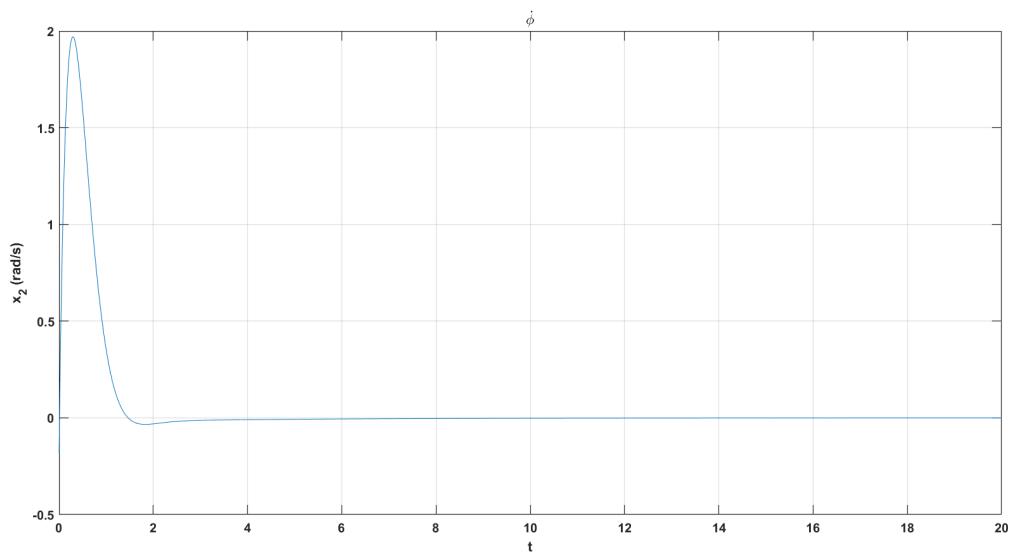
$$K_P = 0.7 \quad K_I = 0.03 \quad K_D = 2.3 \quad N = 6.5 \quad (3.11)$$

Pertanto, in definitiva lo schema Simulink che realizza l’Input-Output FBL è rappresentato in figura 3.9 ed è presente in `I_O_FBL.slx`.

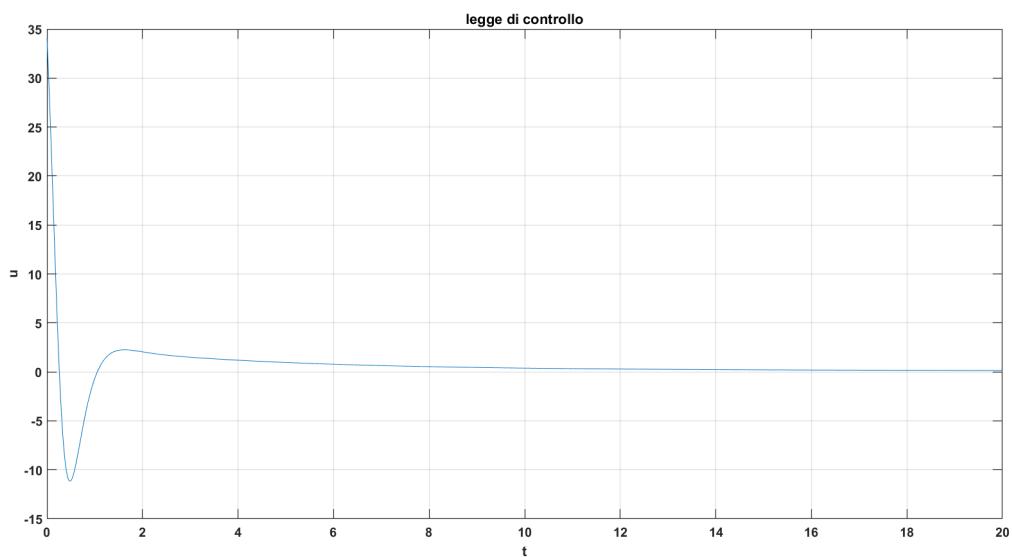
Lanciando la simulazione, di seguito vengono riportati gli andamenti delle variabili di interesse.



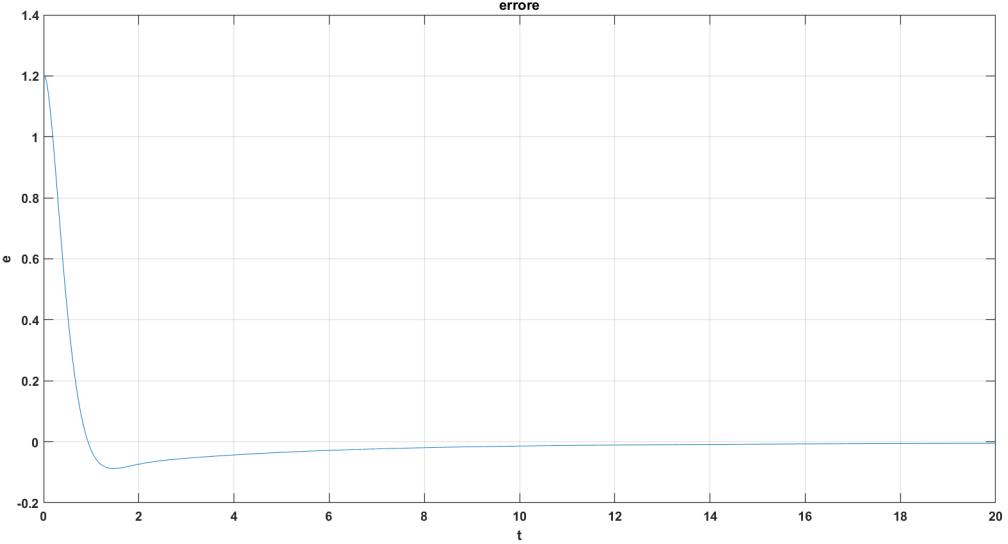
**Figura 3.10:** Andamento di  $x_1$  nell'I/O FBL



**Figura 3.11:** Andamento di  $x_2$  nell'I/O FBL



**Figura 3.12:** Andamento della legge di controllo nell'I/O FBL



**Figura 3.13:** Andamento dell'errore nell'I/O FBL

### 3.4 Sliding Mode Control

Noi siamo a conoscenza del fatto che affinché una strategia di controllo geometrico, quale è la FBL, funzioni correttamente, bisognerebbe conoscere perfettamente i campi vettoriali del modello, condizione che però quasi mai è soddisfatta nella pratica, poiché come sappiamo, il modello è solo una cattiva rappresentazione della realtà. Ecco allora che adesso ci poniamo come obiettivo quello di progettare un controllore stabilizzante che tenga conto delle incertezze del modello. Infatti nel nostro caso la robustezza di un controllore è di particolare interesse poiché è praticamente impossibile sviluppare modelli accurati per i movimenti della nave.

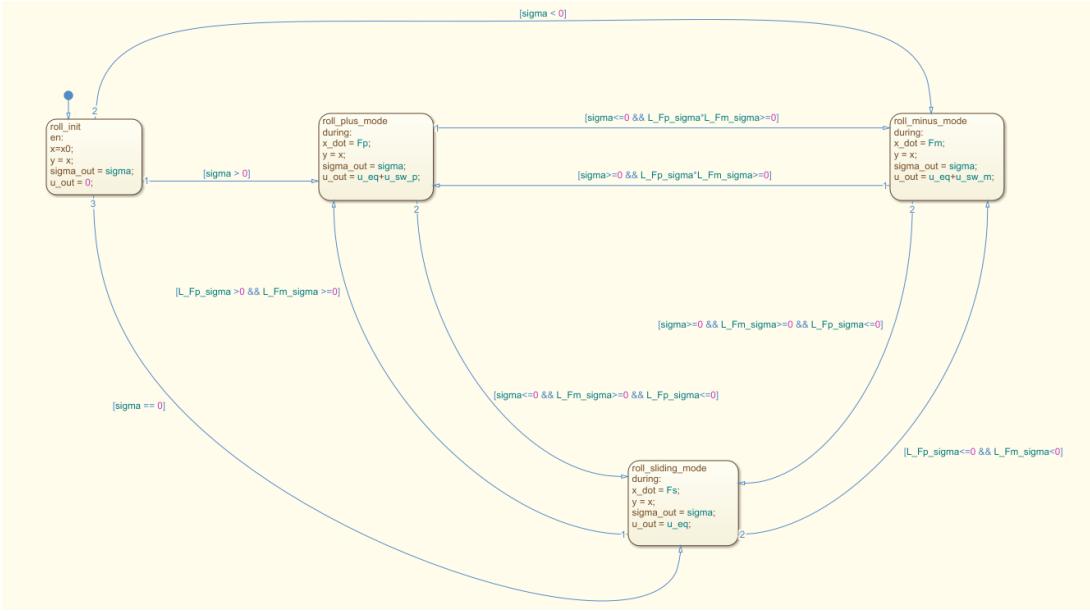
A questo punto quindi, una tecnica di controllo che permette di conseguire tale obiettivo e che andremo ad implementare è lo Sliding Mode Control (SMC). Lo SMC è una strategia di controllo a commutazione nello stato che garantisce robustezza ai cosiddetti *matched disturbances*. Essa consiste nel prendere un classico sistema di controllo, che a ciclo aperto è continuo e differenziabile, e applicargli una legge di controllo a commutazione rendendo il sistema a ciclo chiuso discontinuo. Questo lo si fa perché in tal modo è possibile garantire una soluzione tipica solo dei sistemi discontinui, detta soluzione di *sliding*, in cui le traiettorie finiscono per *scivolare* (appunto, sliding) lungo una superficie di discontinuità dello spazio di stato, detta *switching manifold*.

Pertanto il primo step da compiere per sintetizzare un controllore di tipo sliding è scegliere l'iperpiano di commutazione  $\Sigma$ , ovvero il luogo di punti in cui una certa funzione scalare dello stato  $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  assume valore nullo, cioè

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^2 : \sigma(x) = 0\}$$

Dobbiamo quindi scegliere una funzione  $\sigma(x)$  e ricordandoci che il nostro obiettivo di controllo è effettuare una regolazione a  $(0, 0)^T$ , pertanto la  $\sigma(x)$  va scelta in modo che passi per l'origine dello spazio di stato, cioè che  $\sigma(0) = 0$ . Teniamo presente che il nostro modello nella (1.11) è nella cosiddetta *forma canonica di Brunovsky*, pertanto una scelta tipica della funzione  $\sigma(x)$  è la seguente

$$\sigma(x) = P^T \mathbf{x} = [p_1 \ p_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad (3.12)$$



**Figura 3.14:** Schematizzazione dello SMC in Stateflow usando i grafi.

dove  $p_1$  e  $p_2$  sono due coefficienti scelti da noi. Dopodiché, prima di progettare la legge di controllo a commutazione, dobbiamo accertarci che la  $\sigma(x)$  sia idonea, ovvero dobbiamo verificare che la condizione di trasversalità  $\mathcal{L}_g(\sigma) \neq 0$  sia rispettata, altrimenti la legge di controllo a commutazione che progetteremo, qualunque essa sia, non potrà mai rendere il campo vettoriale del sistema controllato trasversale a  $\Sigma$ , quindi

$$\mathcal{L}_g(\sigma) = \nabla\sigma \cdot g = [p_1 \ p_2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = p_2 \quad (3.13)$$

dunque la condizione di trasversalità è rispettata fintantoché sceglieremo  $p_2 \neq 0$ .

A questo punto possiamo passare a progettare una legge di controllo a commutazione nello stato tra 2 valori a seconda del segno assunto da  $\sigma(x)$  cioè

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & \sigma(x) > 0 \\ u^-(x), & \sigma(x) < 0 \end{cases}$$

in modo tale che il sistema a ciclo chiuso garantisca il soddisfacimento di 2 risultati:

- a) le traiettorie del sistema devono essere attratte dalla regione di sliding  $\hat{\Sigma} \subseteq \Sigma$
- b) deve essere indotto un nuovo campo vettoriale, detto di sliding, che risulti essere tangente in ogni punto a  $\hat{\Sigma}$ , in modo che, una volta finiti su  $\hat{\Sigma}$ , le traiettorie ci restino per tutto il tempo  $t$  scivolando fino all'attrattore.

Per conseguire ambo gli obiettivi, la nostra legge di controllo dovrà essere data dalla somma di due contributi

$$u = u_{eq} + u_{sw}$$

dove  $u_{eq}$  è la legge di controllo equivalente che soddisfa il punto b) poiché garantisce che

$$\dot{\sigma}(x) = \nabla\sigma \cdot \dot{x} = \nabla\sigma \cdot (f(x) + g(x)u) = \mathcal{L}_f(\sigma) + \mathcal{L}_g(\sigma)u = 0$$

ovvero la  $u_{eq}$  è la legge di controllo che induce un campo vettoriale di sliding ortogonale in ogni punto a  $\nabla\sigma$ , ossia tangente in ogni punto a  $\Sigma$ . Essa quindi la calcoleremo come

$$u_{eq} = -\frac{\mathcal{L}_f(\sigma)}{\mathcal{L}_g(\sigma)} = -\frac{P^T f(x)}{P^T g(x)} = -\frac{p_1 f_1 + p_2 f_2}{p_2} = -\frac{p_1}{p_2} x_2 + 2\mu_1 x_2 + \mu_3 x_2^3 + \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_1^3 + \alpha_5 x_1^5 \quad (3.14)$$

A questo punto, una volta ottenuta la  $u_{eq}$ , approfittiamone per calcolare la dinamica di sliding. Possiamo fare ciò molto semplicemente sostituendo la (3.14) nella (1.11), ottenendo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{p_1}{p_2}x_2 \end{cases} \quad (3.15)$$

Quello che però notiamo è che la dinamica di sliding ottenuta è *bidimensionale*, mentre noi ci aspettavamo che fosse monodimensionale in quanto l'evoluzione è su una retta. Ciò avviene perché non abbiamo tenuto conto del vincolo  $\sigma(x) = 0$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{p_1}{p_2}x_1 \quad (3.16)$$

Sostituendo tale espressione nella prima equazione della (3.15) avremo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{p_1}{p_2}x_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{p_1}{p_2}x_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Ne deduciamo quindi che sia  $x_1$  che  $x_2$  sono in evoluzione libera, e se sceglieremo  $p_1$  e  $p_2$  di segno concorde, cioè tali che  $p_1p_2 > 0$ , allora entrambe le variabili di stato tenderanno a zero, che è proprio quello che volevamo, in un tempo che dipenderà dalle scelte di  $p_1$  e  $p_2$ . Pertanto l'origine sarà un punto di *pseudo-equilibrio*.

Infine non ci resta che garantire l'attrattività di  $\Sigma$ , e per fare ciò basta soddisfare la condizione  $\sigma\dot{\sigma} < 0$ . È possibile dimostrare che per fare questo basta progettare  $u_{sw}$  come

$$u_{sw} = -\frac{1}{P^T g} \mu \cdot sign(\sigma) = -\frac{\mu}{p_2} sign(\sigma) \quad (3.18)$$

dove  $\mu > 0$  è un altro parametro di controllo.

Dunque l'ultima cosa che manca prima di passare all'implementazione in Simulink del nostro controllore sliding è la scelta dei valori per i parametri di controllo. Dalla teoria sappiamo che le traiettorie di stato convergono su  $\Sigma$  in un tempo finito  $\bar{t}$  pari a

$$\bar{t} = \frac{\sigma_0}{\mu}, \quad \sigma_0 = \sigma(x_0) \quad (3.19)$$

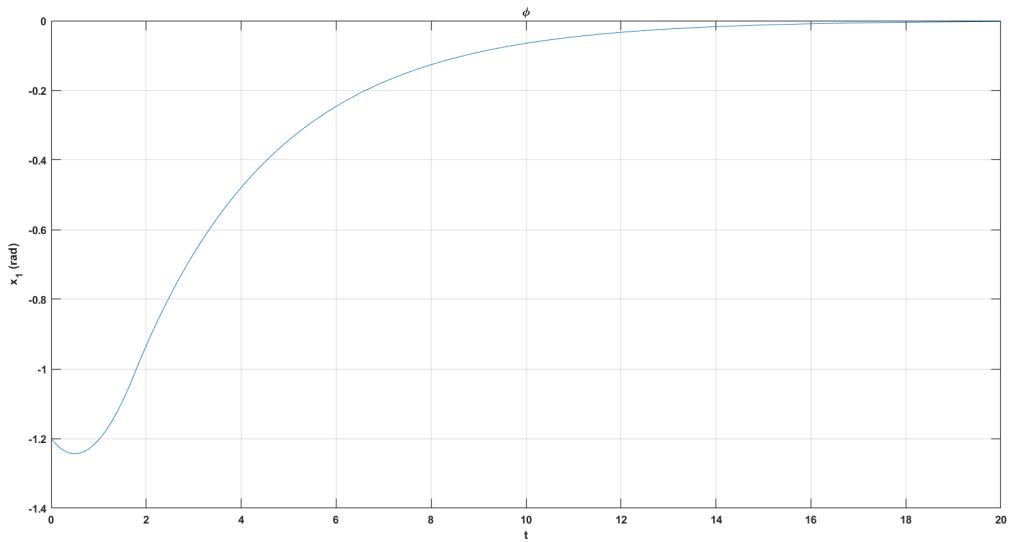
Di conseguenza ci accorgiamo che se vogliamo diminuire il tempo con il quale le traiettorie giungono su  $\Sigma$ , dobbiamo aumentare  $\mu$ . Al contempo però, aumentando  $\mu$ , aumenta lo sforzo di controllo.

Si tenga conto però che variando  $\mu$  varia solo il tempo con cui le traiettorie arrivano su  $\Sigma$ , ma non il tempo con cui la traiettoria scivola su  $\Sigma$  verso l'attrattore. Per quello dovremo pensare a variare gli altri guadagni  $p_1$  e  $p_2$ . Nello specifico più grande è il rapporto  $\frac{p_1}{p_2}$  più piccolo è il tempo di convergenza verso l'equilibrio, ma al contempo sarà più grande  $\sigma_0$  e quindi  $\bar{t}$ .

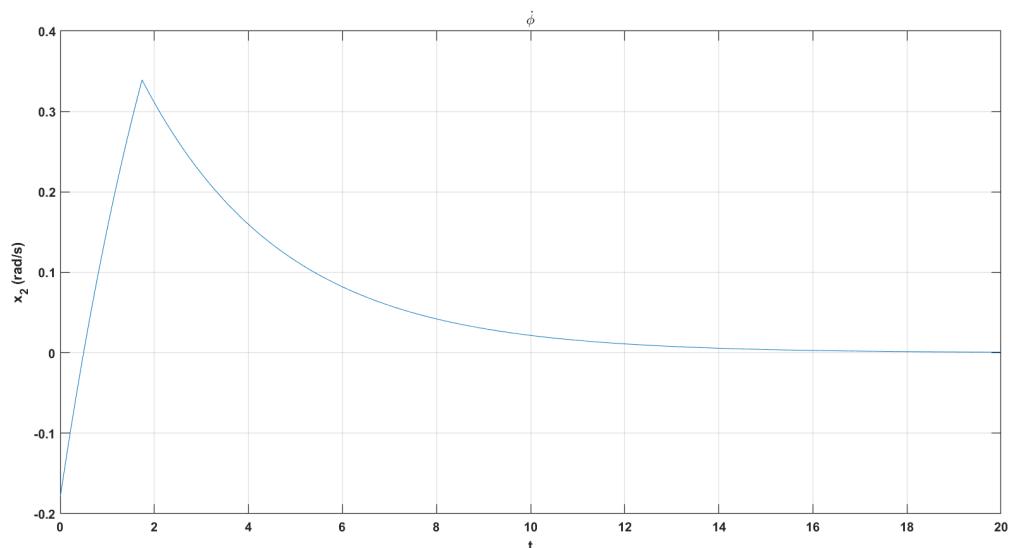
I parametri di controllo che alla fine abbiamo scelto sono i seguenti

$$\mu = 1 \quad p_1 = 1 \quad p_2 = 3 \quad (3.20)$$

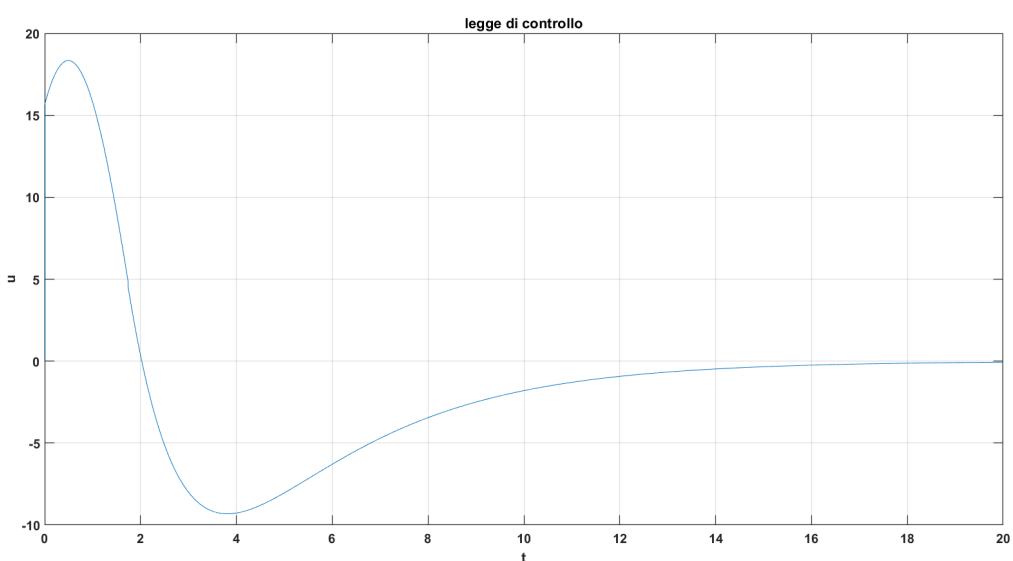
Passiamo adesso a mostrare l'implementazione dello schema di controllo in Simulink. Una prima implementazione dello SMC è stata fatta impiegando il toolbox di MATLAB *Stateflow* (presente nel file `SMC_stateflow_model.slx`), che permette di simulare sistemi discontinui sfruttando la teoria dei grafi. Il risultato è mostrato in figura 3.14. Invece di seguito saranno mostrati gli andamenti di tutte le grandezze di interesse:



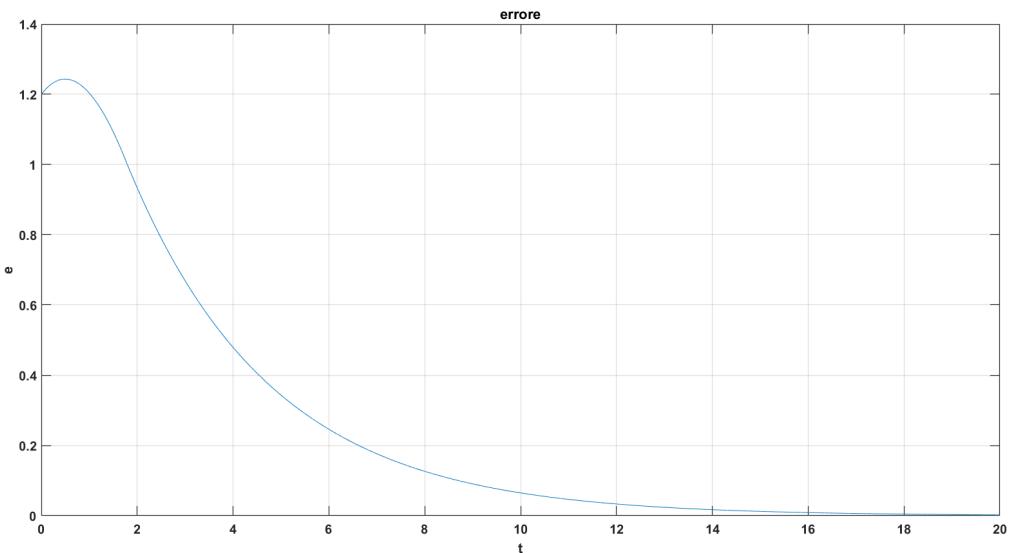
**Figura 3.15:** Andamento di  $x_1$



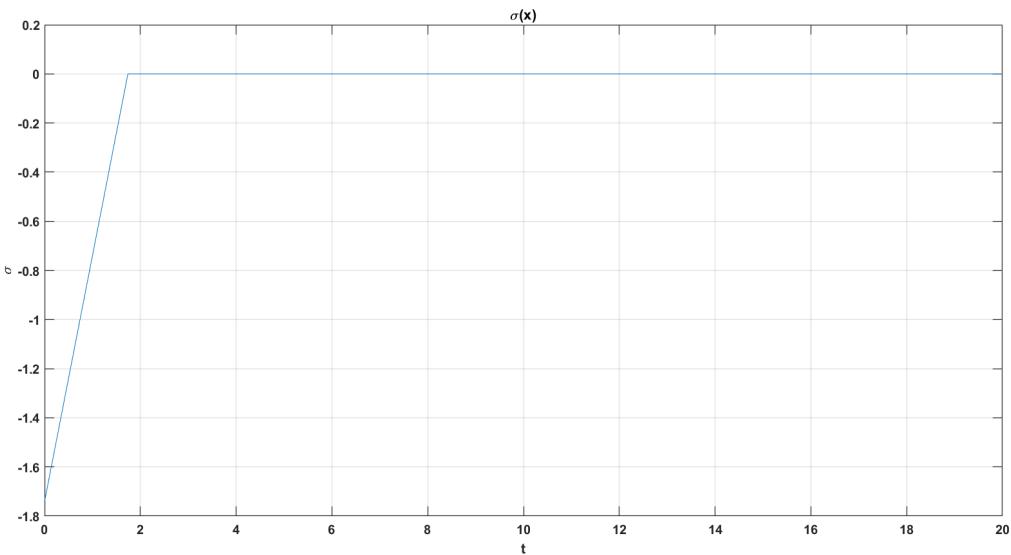
**Figura 3.16:** Andamento di  $x_2$



**Figura 3.17:** Andamento della legge di controllo



**Figura 3.18:** Andamento dell'errore



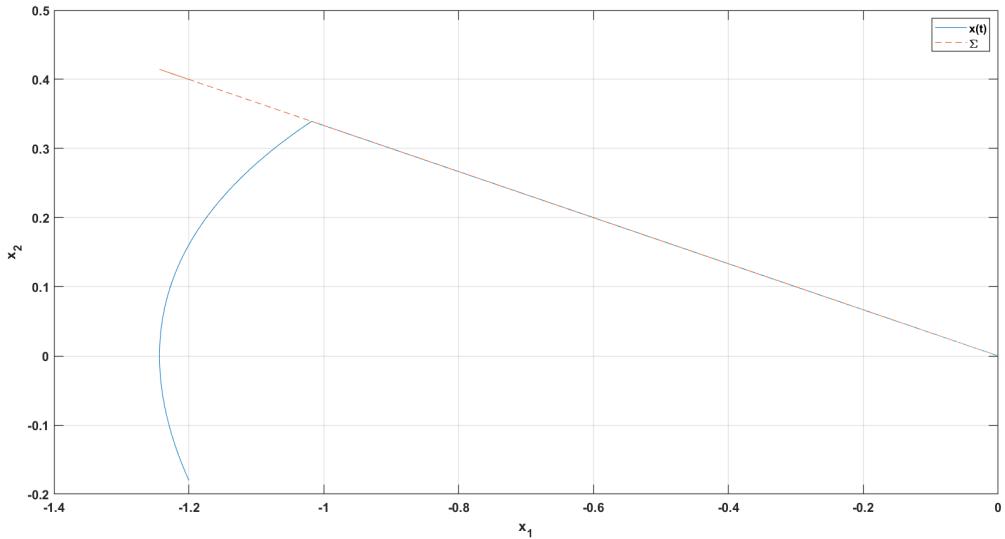
**Figura 3.19:** Andamento di  $\sigma(x)$ .

Inoltre è possibile graficare anche l'evoluzione della nostra traiettoria  $x(t)$  che converge su  $\Sigma$  e scivola verso l'attrattore. Per fare ciò basta graficare l'evoluzione delle traiettorie di stato e della (3.16) nel piano  $x_1-x_2$ . Il risultato è raffigurato in figura 3.20.

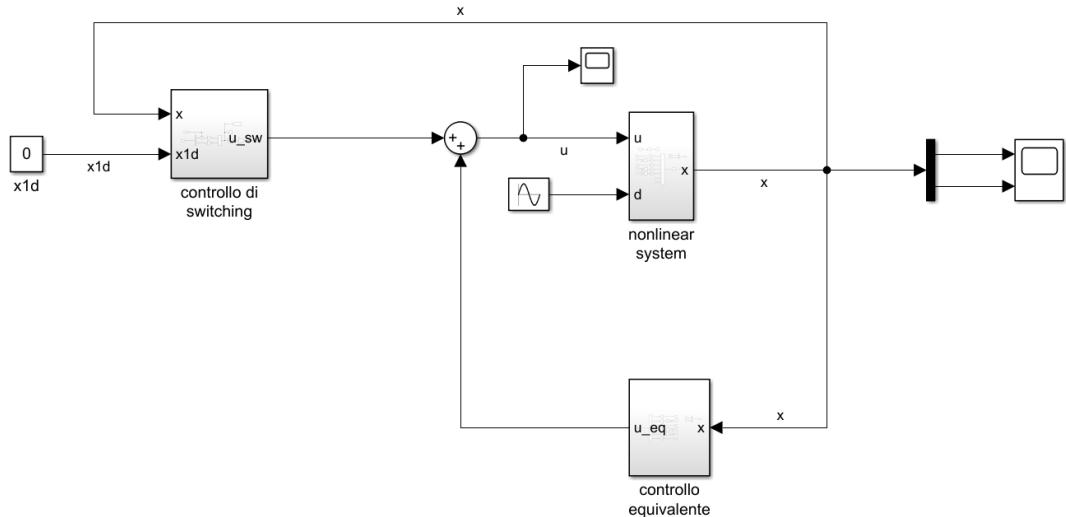
Una seconda implementazione, invece, dello SMC è stata fatta impiegando i classici blocchetti di Simulink, il cui schema è mostrato in figura 3.21 e presente nel file `SMC_simulink_model`. I risultati della simulazione di tale schema producono andamenti delle variabili di interesse perfettamente identici a quelli ottenuti nelle figure 3.15, 3.16, 3.18, 3.19 e 3.20, con la sola differenza sulla legge di controllo dove stavolta è evidenziato il fenomeno del *chattering*, mostrato in figura 3.22, dovuto alla commutazione idealmente infinita degli attuatori per far scivolare la traiettoria su  $\Sigma$ .

Per risolvere questo problema, una soluzione comunemente adottata è quella di fissare un *boundary layer* attorno a  $\Sigma$  di una certa ampiezza  $\varepsilon$ . Questo può essere fatto sostituendo alla funzione  $sign(\sigma)$ , la funzione saturatore

$$sat\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right) = \begin{cases} sign(\sigma) & \text{se } |\sigma| > \varepsilon \\ \frac{\sigma}{\epsilon} & \text{se } |\sigma| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (3.21)$$



**Figura 3.20:** Evoluzione della traiettoria nel piano di stato che scivola sulla superficie di sliding e converge verso l'attrattore.



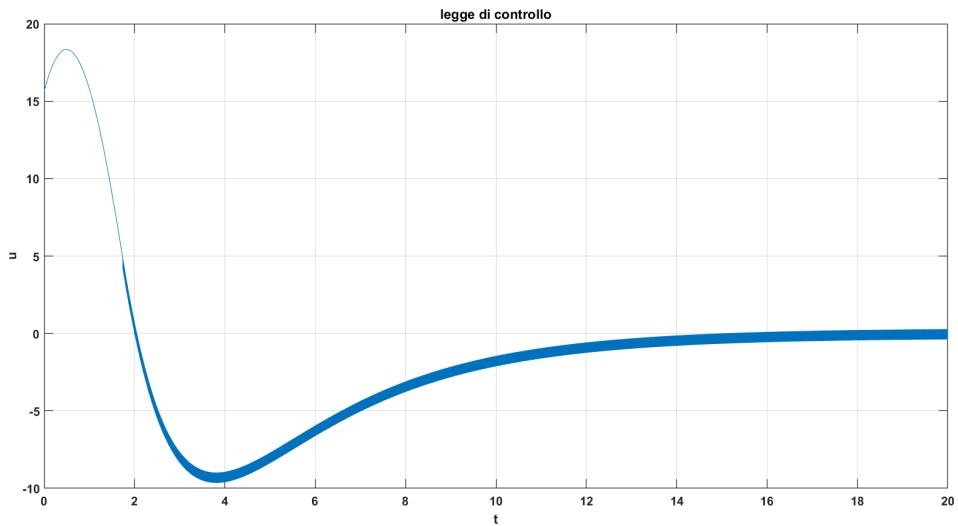
**Figura 3.21:** Schema Simulink dello SMC

Ovvero in pratica, nell'intervallo  $\sigma \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  al posto di considerare la legge di switching (3.18), avremo

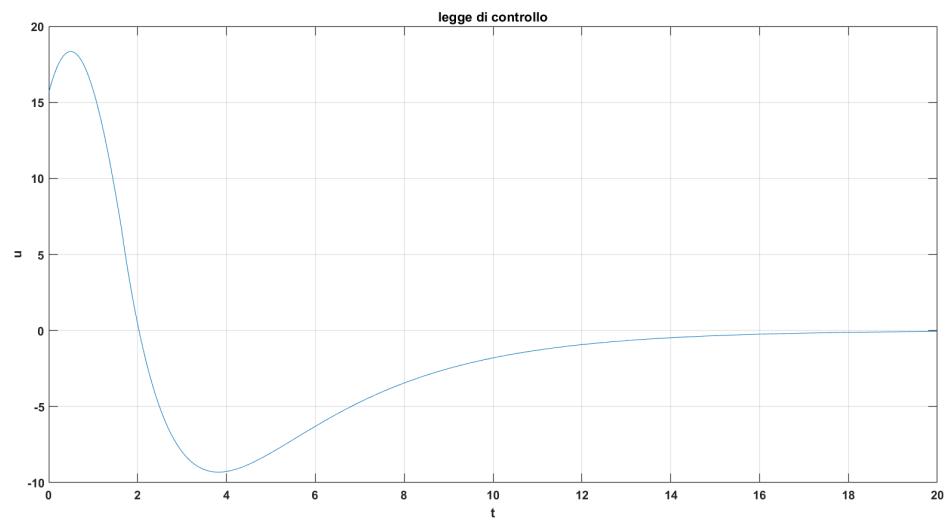
$$u_{sw} = -\frac{\mu}{p_2} \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (3.22)$$

Facendo così alla fine riusciamo ad eliminare il chattering, riuscendo al contempo ad ottenere anche le stesse performance, come mostrato in figure 3.23 e 3.24.

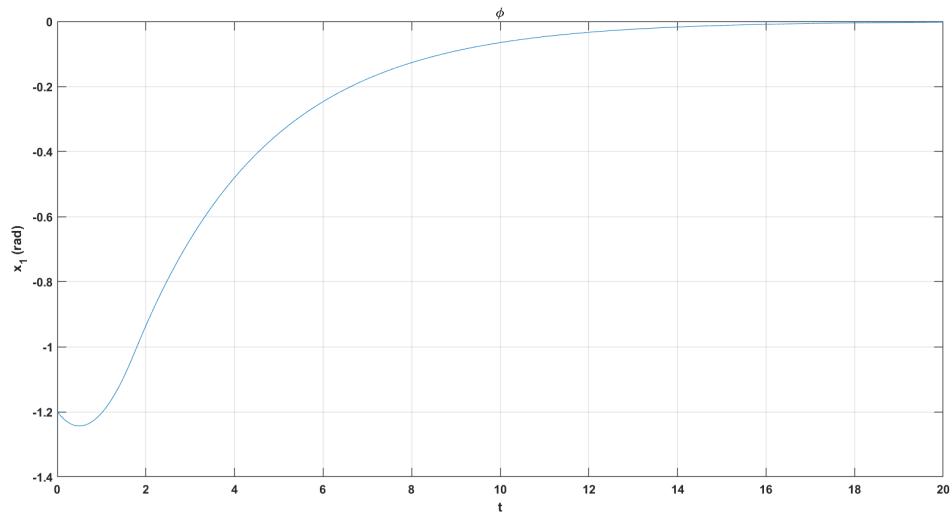
Infine evidenziamo anche come cambiano gli andamenti di alcune variabili quando viene introdotto il boundary layer. Nello specifico nelle figure 3.25, 3.26 e 3.27 sono riportati rispettivamente gli andamenti nel tempo della variabile di stato  $x_2$ , della funzione  $\sigma(x)$  e dell'evoluzione della traiettoria nello spazio di stato. Stavolta, rispetto alle figure 3.16, 3.19 e 3.20 in cui sono riportati gli andamenti di queste stesse grandezze ma prima dell'introduzione del boundary layer, potremo notare un andamento più *smooth*. Infatti per esempio in figura 3.27 stavolta la traiettoria di stato anziché andare a "sbattere" sulla switching manifold, ci va più dolcemente. Stessa cosa per  $\sigma(x)$  quando tende a zero in figura 3.26.



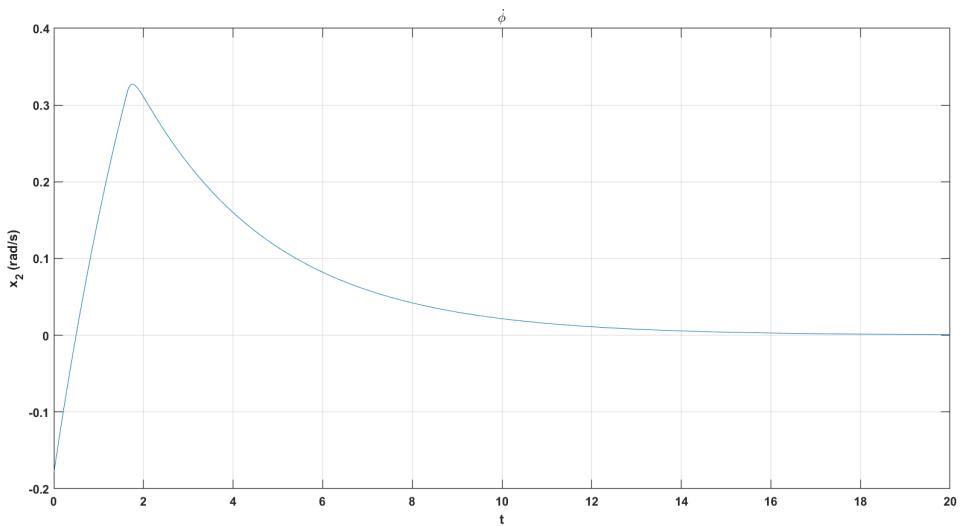
**Figura 3.22:** Andamento della legge di controllo quando viene evidenziato *chattering*



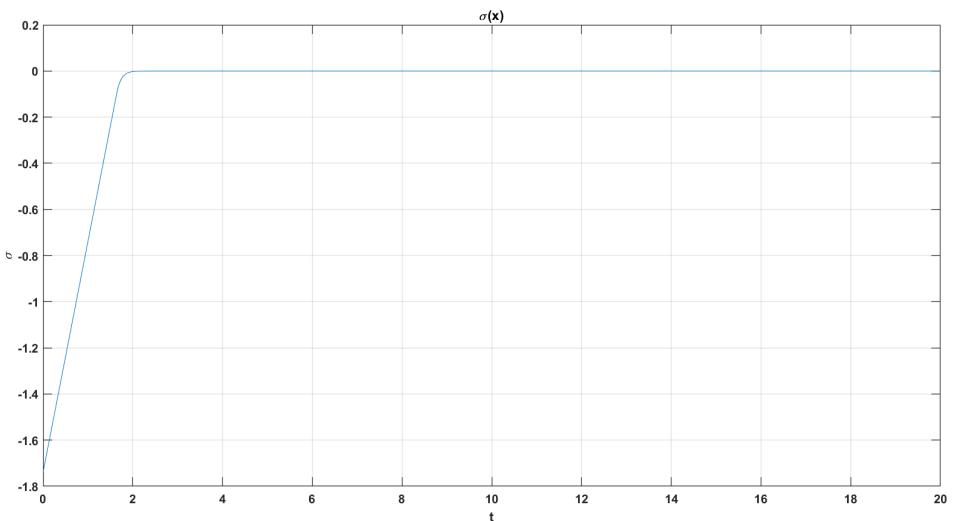
**Figura 3.23:** Andamento della legge di controllo nel caso in cui si fissa un boundary layer attorno a  $\Sigma$



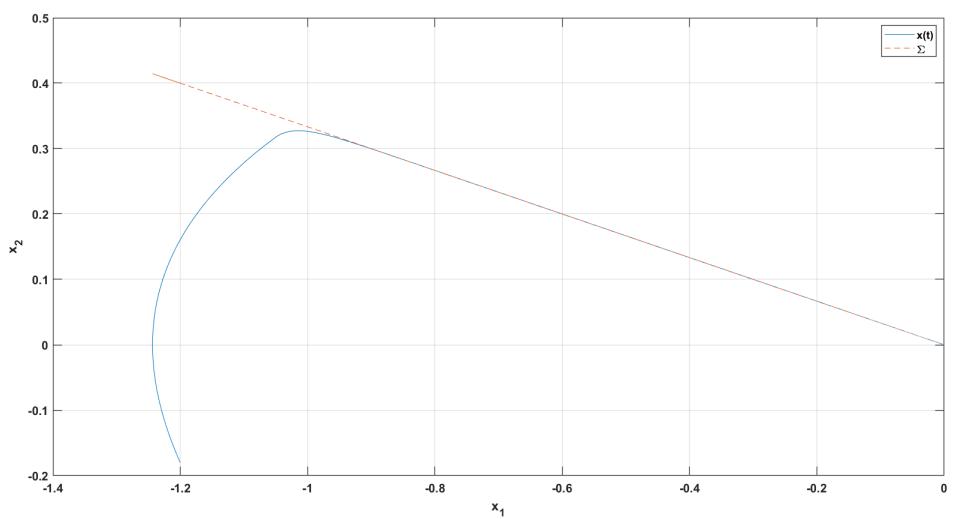
**Figura 3.24:** Andamento della  $x_1$  nel caso in cui si fissa un boundary layer attorno a  $\Sigma$



**Figura 3.25:** Andamento della  $x_2$  nel caso in cui si fissa un boundary layer attorno a  $\Sigma$



**Figura 3.26:** Andamento della  $\sigma(x)$  nel caso in cui si fissa un boundary layer attorno a  $\Sigma$



**Figura 3.27:** Evoluzione della traiettoria nel piano di stato nel caso in cui si fissa un boundary layer attorno a  $\Sigma$

### 3.5 Model Reference Adaptive Control

Gli schemi di controllo presentati fino ad ora per ridurre il moto di rollio di una nave, sono basati su una conoscenza esatta dei parametri e della struttura del sistema. Purtroppo però in situazioni pratiche, alcuni o tutti i parametri del sistema sono ignoti. Inoltre questi parametri cambiano nel tempo. Pertanto la derivazione di un controllore adattativo per il controllo del moto di rollio di una nave in presenza di parametri del sistema ignoti è un importante problema.

Parlando in generale, il controllo adattativo è uno schema di controllo a guadagni variabili che variano online nel tempo seguendo delle leggi di adattamento basate sui segnali provenienti dal sistema come lo stato  $x$  o l'uscita  $y$ . Il tipo di controllo adattativo su cui noi ci concentreremo è detto *diretto*, in cui la stima dei parametri, che cambiano, e il conseguente adattamento dei guadagni del controllo vengono fatti contemporaneamente.

L'idea alla base di tale approccio è quella di portare l'uscita o lo stato dell'impianto da controllare ad inseguire quella di un modello di riferimento, che è un modello virtuale che codifica le specifiche. Ecco perché si parla anche di *Model Reference Adaptive Control*. E il controllo adattativo riesce a conseguire tale obiettivo con un controllo a retroazione i cui guadagni possono cambiare nel tempo secondo una legge di adattamento integrodifferenziale.

Nello specifico quella che implementeremo in questo elaborato è una recente estensione del MRAC, chiamata Minimal Control Synthesis Algorithm (MCS) dove i guadagni del controllore possono partire anche da condizioni iniziali nulle. Essa è una strategia MRAC passivity-based, ovvero dove la stabilità a ciclo chiuso è stata provata grazie alla teoria della passività, e opportuna per tutti quegli impianti ignoti e/o tempo varianti. Però per poter applicare tale strategia, garantendo la convergenza a zero dell'errore a regime, vanno però soddisfatte alcune ipotesi.

Innanzitutto l'impianto che si desidera controllare deve essere nella forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bbu(t) + Bd(t) \quad (3.23)$$

dove la coppia  $(A, B)$  è in forma canonica di controllabilità, il parametro  $b$  è non noto e si conosce solo il segno, e infine  $d(t)$  rappresenta disturbi esterni non noti, termini non modellati e/o non linearità dell'impianto. Ora se noi guardiamo le equazioni del nostro modello nella (1.10), ci possiamo effettivamente rendere conto che tali equazioni possono essere ricondotte alla forma 3.23, dove

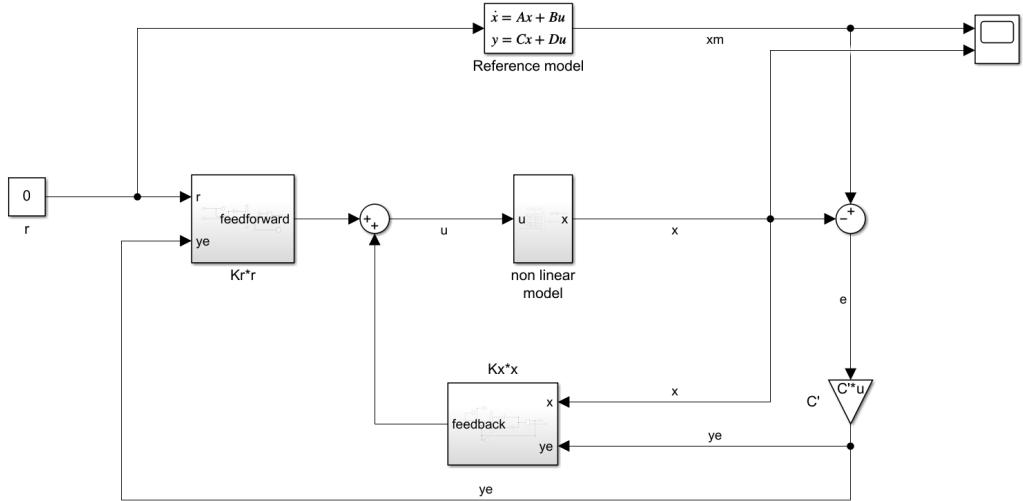
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -2\mu_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d(t) = -\mu_3 x_2^3 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_5 x_1^5$$

Come possiamo notare le non linearità del modello sono state modellate come disturbi ma ciò non rappresenta minimamente un problema perché il MRAC-MCS oltre ad essere robusto a parametri non noti dell'impianto e lente variazioni parametriche, è anche robusto a disturbi ed incertezze *matched* di modello.

Il secondo requisito da soddisfare è che il modello di riferimento scelto, che deve codificare le specifiche che vogliamo soddisfare, deve essere anch'esso in forma canonica di controllabilità e deve avere le stesse dimensioni dell'impianto. Esso è stato scelto come

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + b_m B_m r(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2452 & -0.6140 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2452 \end{bmatrix} r(t) \quad (3.24)$$

Tale modello di riferimento è stato scelto come un sistema lineare SISO del secondo ordine con autovalori complessi coniugati caratterizzati da uno smorzamento  $\zeta$  e pulsazione naturale  $\omega_n$  che codificano le specifiche. Per ulteriori dettagli vedi [2, cap.5].



**Figura 3.28:** Schema Simulink del MRAC-MCS

Essendo ora Hurwitz la matrice  $A_m$ , allora esiste ed è unica la matrice  $P$  simmetrica e definita positiva che risolve l'equazione di Lyapunov

$$PA_m + A_m^T P = -Q \quad \text{con } Q > 0$$

A questo punto, se implementiamo la legge di controllo

$$u(t) = K_x^T(t)x(t) + K_r(t)r(t), \quad K_x(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, K_r(t) \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

con i guadagni che variano secondo queste leggi di adattamento

$$K_x(t) = K_{xI} + \beta y(t)x(t), \quad \text{con } \dot{K}_{xI} = \alpha y(t)x(t), \quad K_{xI}(0) = 0, \quad (3.26)$$

$$K_r(t) = K_{rI} + \beta y(t)r(t), \quad \text{con } \dot{K}_{rI} = \alpha y(t)r(t), \quad K_{rI}(0) = 0, \quad (3.27)$$

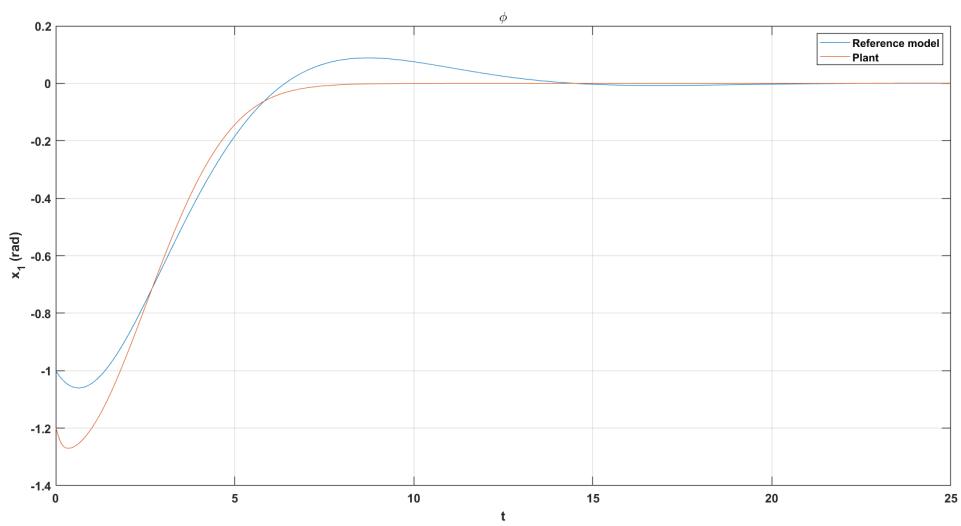
e dove

$$y(t) = C^T[x_m(t) - x(t)], \quad \text{con } C = PB$$

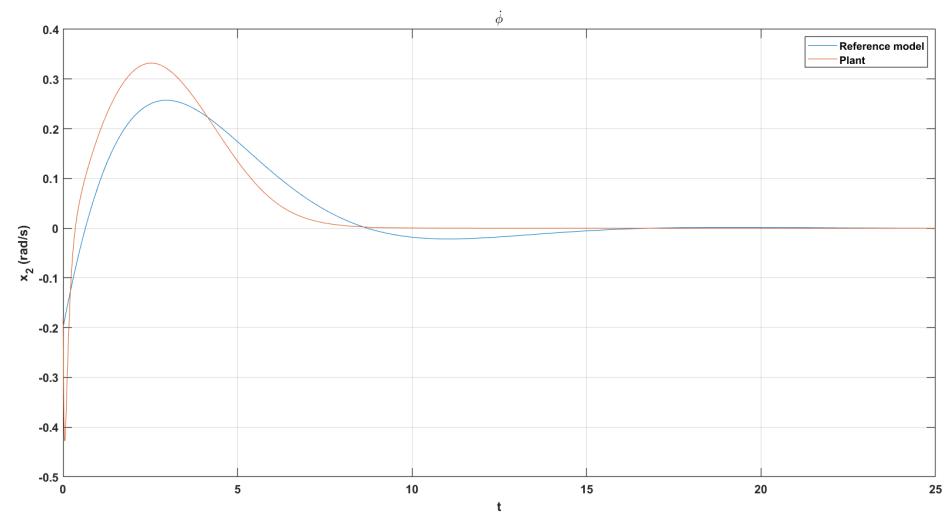
e con i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  scelti come

$$\alpha = 10\beta \quad \beta = 5$$

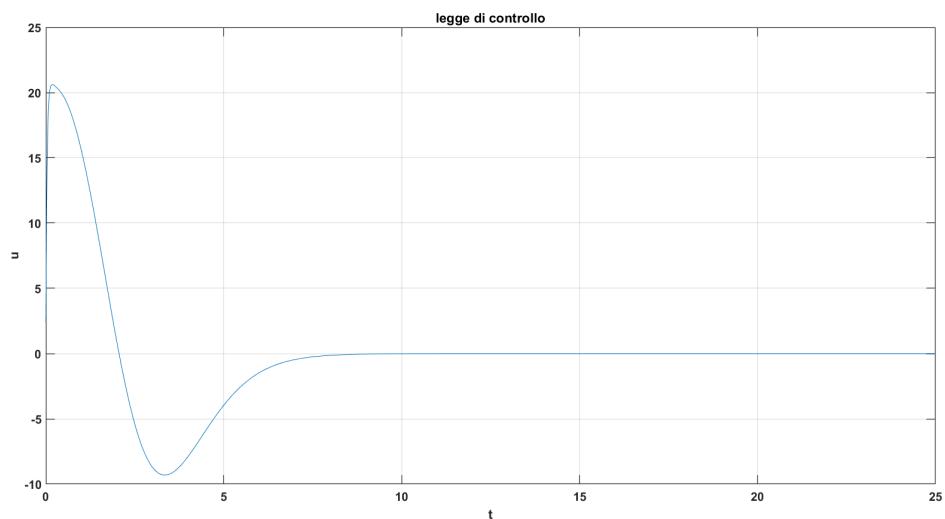
Lo schema MRAC-MCS realizzato in Simulink è riportato in figura 3.28 ed è presente nel file `MRAC_MCS_model.slx`. Settando a condizioni iniziali  $(-1, -0.2)$  il modello di riferimento, quindi vicine ma non agganciate a quelle dell'impianto non lineare, se proviamo ad effettuare la simulazione otterremo i seguenti risultati:



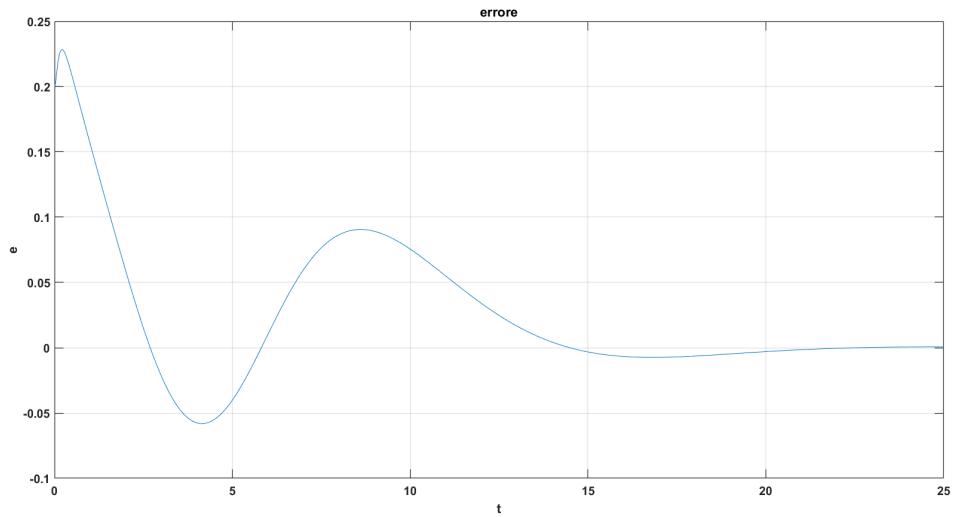
**Figura 3.29:** Andamento di  $x_1$  del modello di riferimento e dell'impianto non lineare nel MRAC MCS



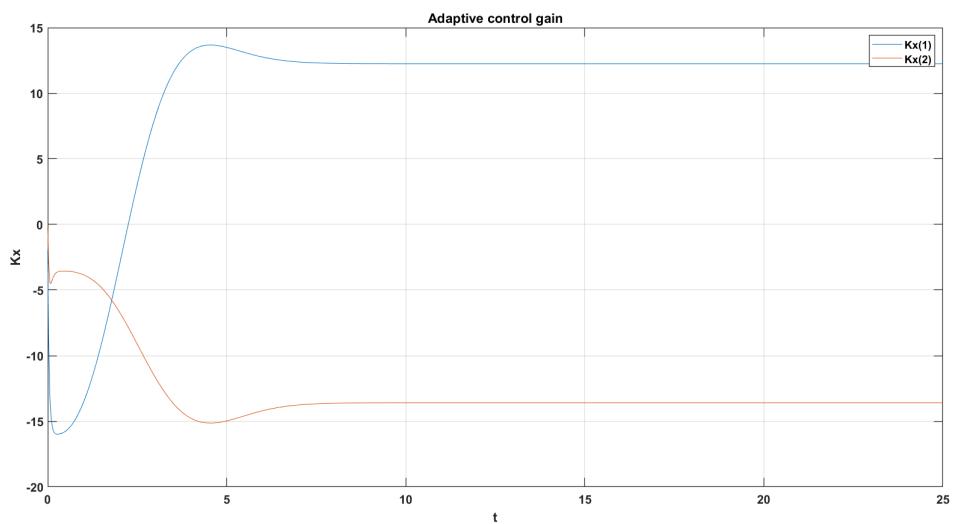
**Figura 3.30:** Andamento di  $x_2$  del modello di riferimento e dell'impianto non lineare nel MRAC MCS



**Figura 3.31:** Andamento della legge di controllo nel MRAC MCS



**Figura 3.32:** Andamento dell'errore nel MRAC MCS



**Figura 3.33:** Andamento dei guadagni nel MRAC MCS

Si noti come abbiamo riportato solo le componenti del guadagno  $K_x$  e non invece di  $K_r$ . Questo perché  $K_r$  risulterà identicamente nulla in quanto abbiamo un riferimento nullo.

# Capitolo 4

## Analisi di robustezza

In questo ultimo capitolo andremo ad effettuare un'analisi della robustezza di tutti i controllori, lineare e non, progettati nel precedente capitolo, valutando le prestazioni esibite da ciascuno di essi e il rispetto delle specifiche di controllo a fronte di:

- disturbi cosiddetti *matched*
- Variazioni dei parametri del modello

Per ogni controllore verranno riportati i grafici più significativi, confrontandoli poi con quelli degli altri per apprezzarne le differenze.

### 4.1 Robustezza a disturbi additivi

Iniziamo quindi col testare la robustezza ai cosiddetti *matched disturbances* andando a considerare il seguente modello nello spazio di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\mu_1 x_2 - \mu_3 x_2^3 - \alpha_1 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_5 x_1^5 + d + u \end{cases} \quad (4.1)$$

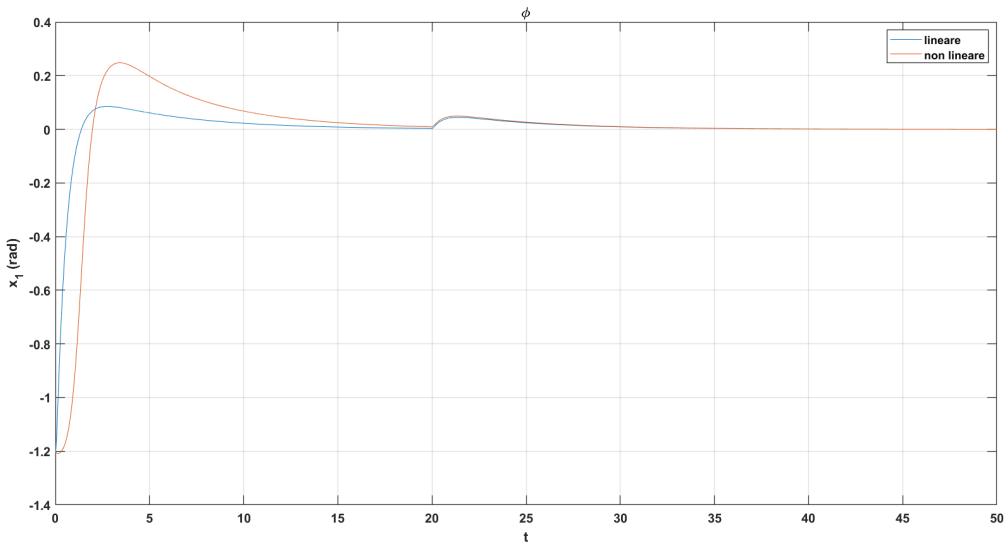
dove notiamo che l'unica differenza rispetto alla (1.11) è la presenza del disturbo nella seconda equazione di stato, sommato all'ingresso di controllo. L'unica cosa da fare pertanto è introdurre il disturbo negli schemi Simulink progettati in precedenza. Assumeremo che tale disturbo sarà

$$d(t) = 5 \sin(2t) \quad (4.2)$$

#### 4.1.1 Controllo lineare

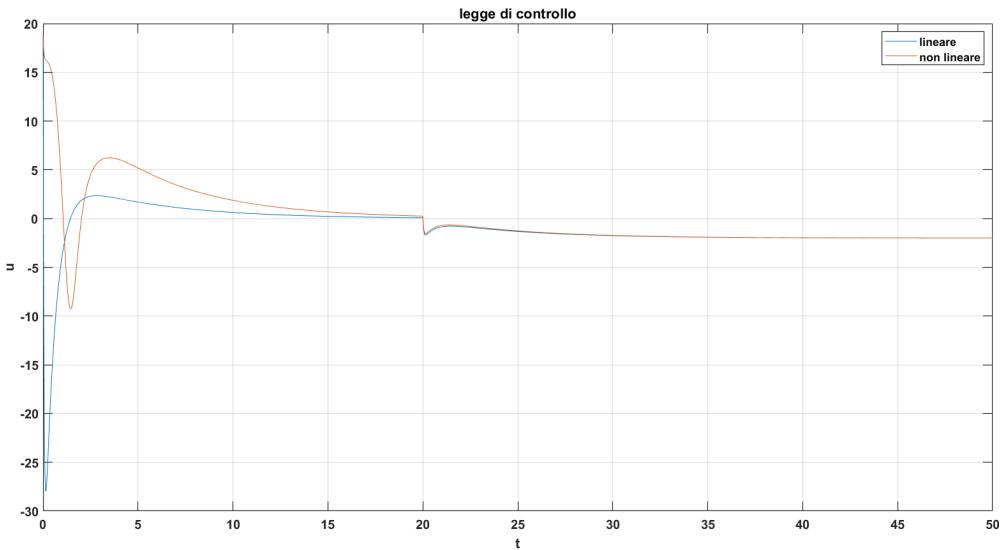
Iniziamo col considerare il controllore lineare progettato con pole placement. Come possiamo ricordare, per tale strategia di controllo a retroazione di stato è stata aggiunta l'azione integrale, non solo per garantire errore a regime ma anche reiezione a disturbi *costanti*. Introduciamo pertanto un disturbo costante sul canale di ingresso del nostro controllore, sia per quello progettato sul sistema lineare che non lineare, e modelliamo tale disturbo costante attraverso una step function che sarà nulla all'inizio e poi all'istante  $t = 20s$  diventa pari a 2. Adesso andiamo a vedere i risultati prodotti dalla simulazione quando tale disturbo viene introdotto. In figura 4.1 sono mostrati gli andamenti della variabile di uscita, che altro non è che la variabile di stato  $x_1$  sia per il controllo lineare progettato sul sistema linearizzato che il non lineare. Quello che possiamo notare è che il disturbo agente all'istante  $t = 20s$  viene perfettamente respinto grazie all'azione integrale e alla

fine la specifica di regime è soddisfatta. Per quanto riguarda la legge di controllo, come possiamo notare dalla figura 4.2, essa si dovrà adeguare all'azione del disturbo costante portandosi al valore di regime  $u = -d = -2$ .



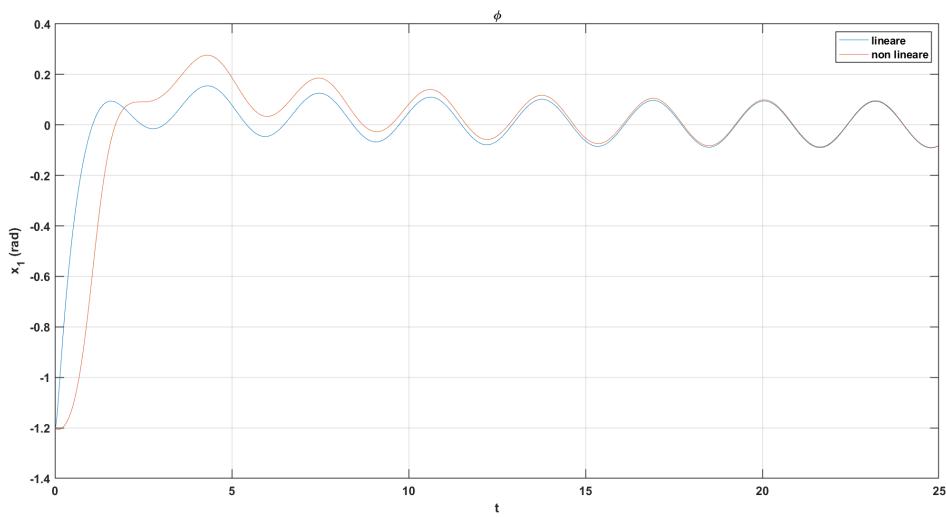
**Figura 4.1:** Andamenti della variabile di stato  $x_1$  per il sistema non lineare e quello linearizzato quando agisce un disturbo costante

Adesso andiamo a vedere cosa succede quando il disturbo che viene introdotto non è più costante, bensì sinusoidale.

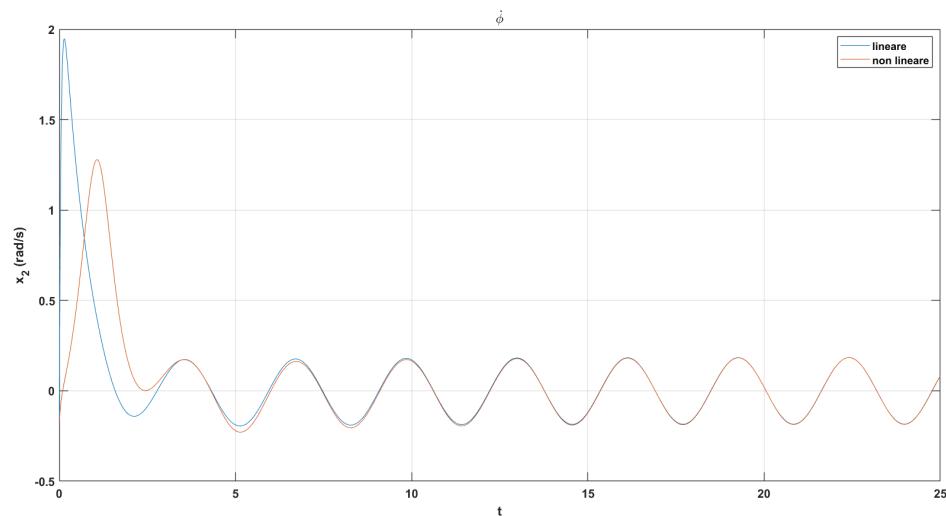


**Figura 4.2:** Andamenti della legge di controllo per il sistema non lineare e quello linearizzato quando agisce un disturbo costante

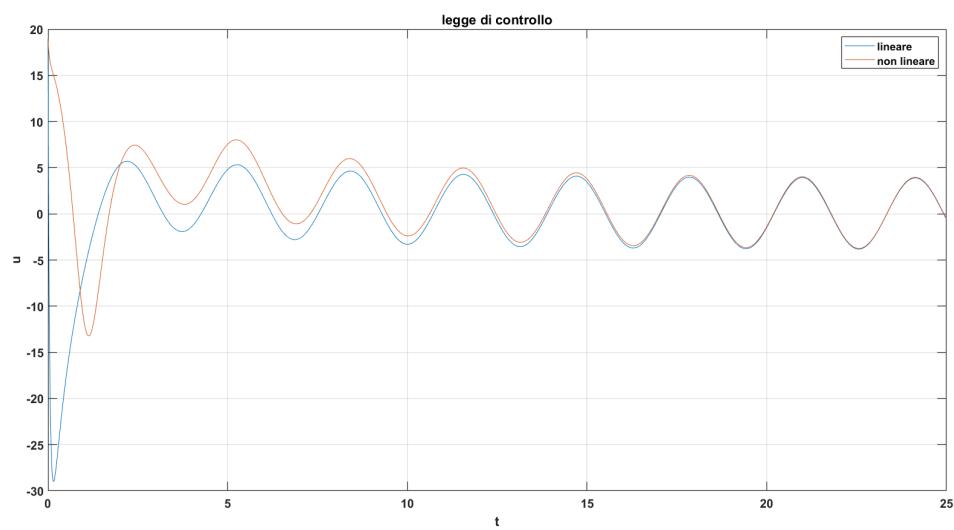
In tal caso quello che potremo notare dai risultati della simulazione è che stavolta il nostro controllore lineare non è più in grado di rigettare il disturbo in questione, e infatti le nostre variabili di interesse saranno caratterizzate da un andamento sinusoidale, vedasi figure 4.3, 4.4 e 4.5.



**Figura 4.3:** Andamenti della variabile di stato  $x_1$  per il sistema non lineare e quello linearizzato quando agisce un disturbo sinusoidale



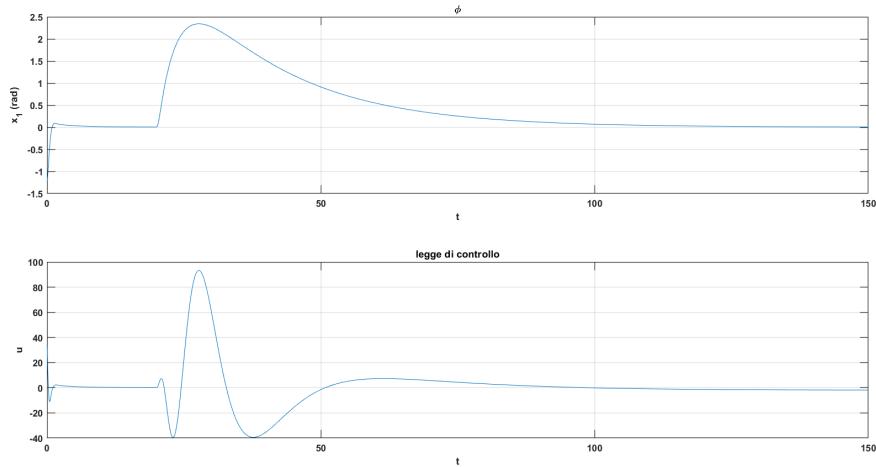
**Figura 4.4:** Andamenti della variabile di stato  $x_2$  per il sistema non lineare e quello linearizzato quando agisce un disturbo sinusoidale



**Figura 4.5:** Andamenti della legge di controllo per il sistema non lineare e quello linearizzato quando agisce un disturbo sinusoidale

### 4.1.2 I/O Feedback Linearization

Adesso andiamo ad effettuare l'analisi di robustezza del primo controllo non lineare progettato, ossia l'I/O FBL con legge di controllo ausiliare PID. Anche in questo caso, grazie alla presenza di un'azione integrale, si può assistere ad una reiezione a disturbi costanti. Considerando lo stesso disturbo di ampiezza 2 all'istante  $t = 20s$  avremo i seguenti risultati.

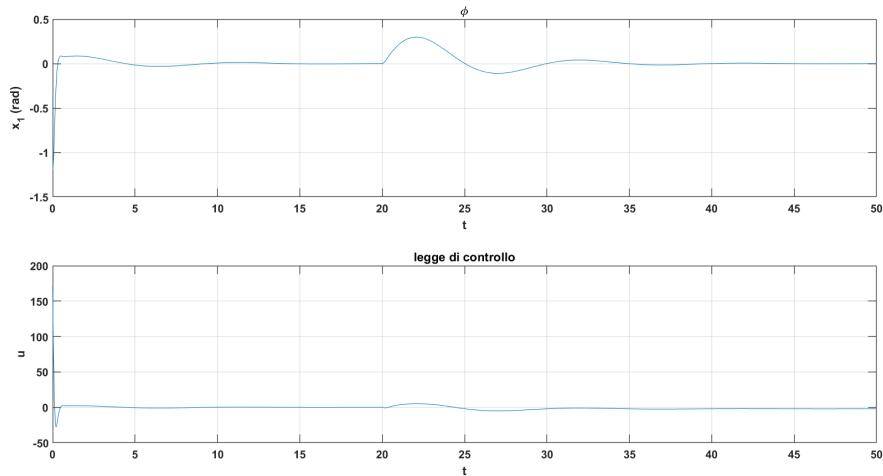


**Figura 4.6:** Andamento di  $x_1$  ed  $u$  del controllore I/O FBL con guadagni PID (3.11) quando agisce un disturbo costante

Come possiamo notare dalla figura 4.6 anche in questo caso è garantito errore nullo a regime e la legge di controllo a regime si porta a -2, con la differenza però che stavolta la reiezione al disturbo è molto meno efficace a causa del fatto che il guadagno dell'azione integrale è molto basso ( $K_I = 0.03$ ), ed inoltre la legge di controllo risulta essere più grande in ampiezza rispetto al caso del controllore lineare. A questo proposito, per risolvere tale problematica possiamo decidere di cambiare i guadagni del PID, cioè

$$K_P = 3 \quad K_I = 3 \quad K_D = 7 \quad N = 18 \quad (4.3)$$

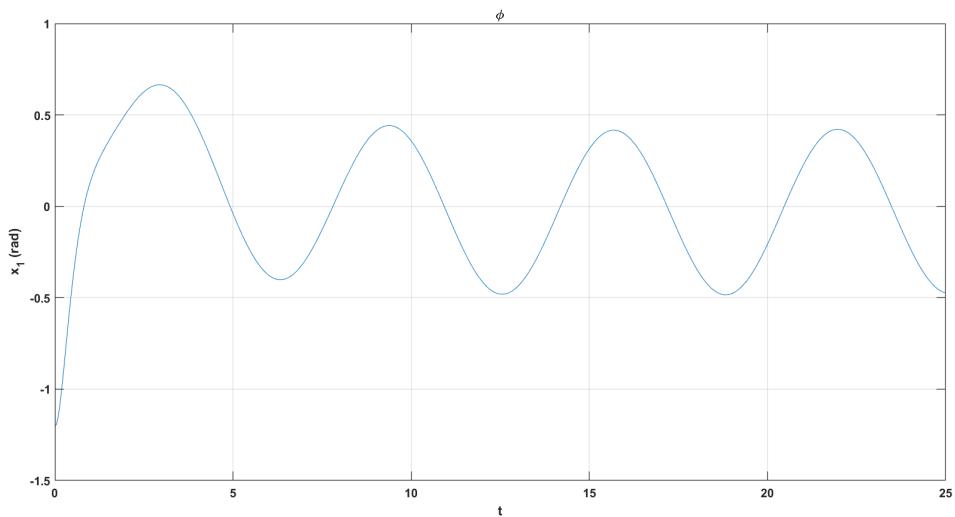
I risultati della simulazione saranno i seguenti:



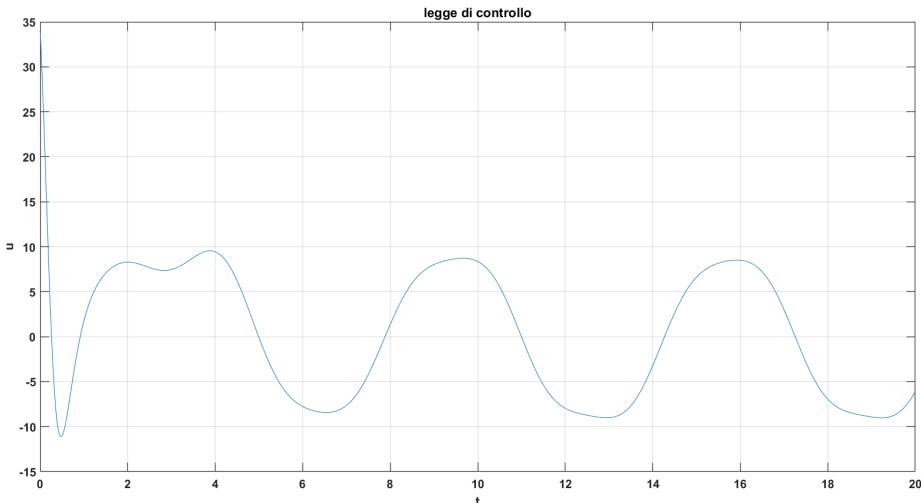
**Figura 4.7:** Andamento di  $x_1$  ed  $u$  del controllore I/O FBL con guadagni PID (4.3) quando agisce un disturbo costante

Come si può notare dalla figura 4.7, con i valori (4.3) si può garantire sempre il soddisfacimento delle specifiche di controllo ma offrendo al contempo una reiezione migliore ai disturbi. L'unico difetto è che stavolta la legge di controllo ha un picco iniziale molto elevato.

Andiamo adesso ad inserire il disturbo sinusoidale rispetto al quale si vuole effettuare l'analisi di robustezza del nostro controllore. I seguenti risultati verranno ottenuti:



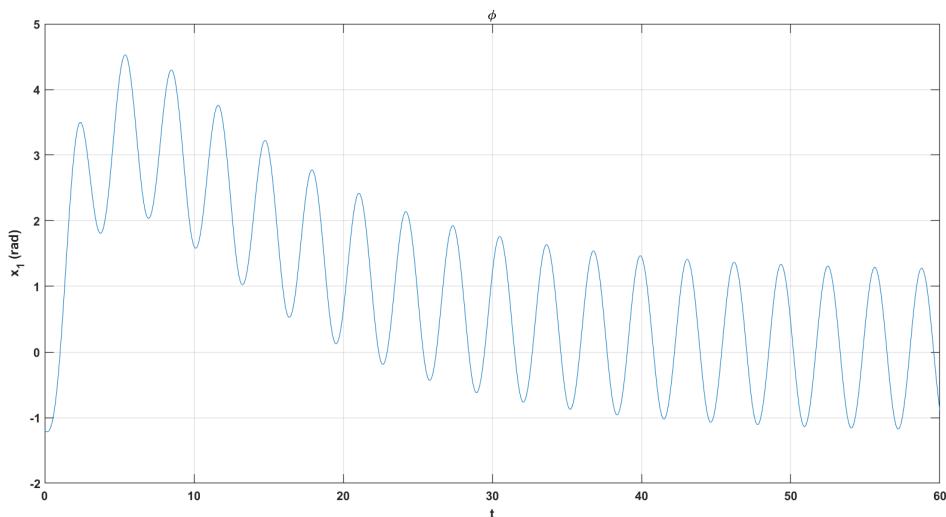
**Figura 4.8:** Andamenti di  $x_1$  per il controllore I/O FBL con guadagni del PID (3.11) quando agisce un disturbo sinusoidale



**Figura 4.9:** Andamento della legge di controllo per il controllore I/O FBL con guadagni del PID (3.11) quando agisce un disturbo sinusoidale

### 4.1.3 Sliding Mode Control

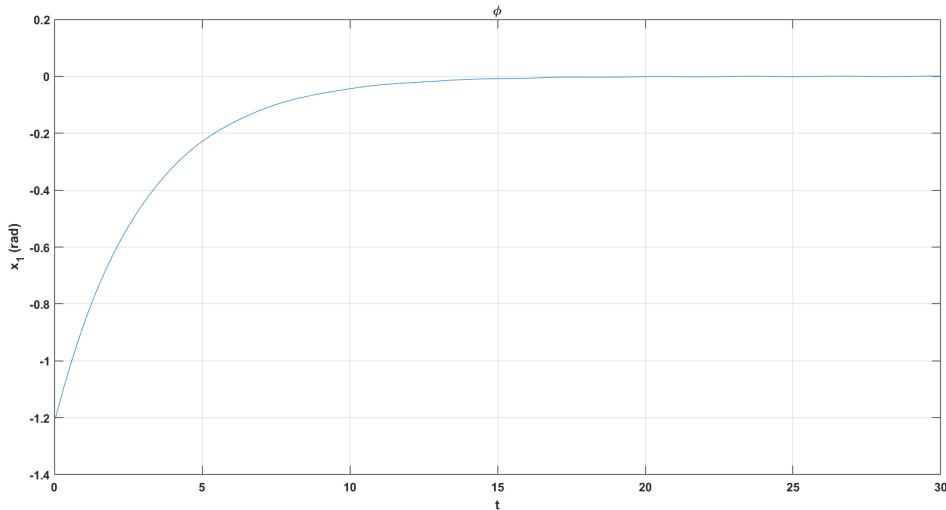
Fino ad ora abbiamo effettuato l'analisi di robustezza a disturbi sinusoidali per controllori che sono noti per essere sensibili ai disturbi, quindi non abbiamo fatto altro che evidenziare la loro "sensibilità". Adesso invece vediamo come lo SMC mostra una buona reiezione a disturbi di qualsiasi tipo, e quindi anche sinusoidali. Provando ad introdurre il solito disturbo nello schema, e lasciando i guadagni inalterati si otterrà il risultato mostrato in



**Figura 4.10:** Andamento della  $x_1$  nello SMC quando agisce un disturbo sinusoidale con  $\mu = 1$

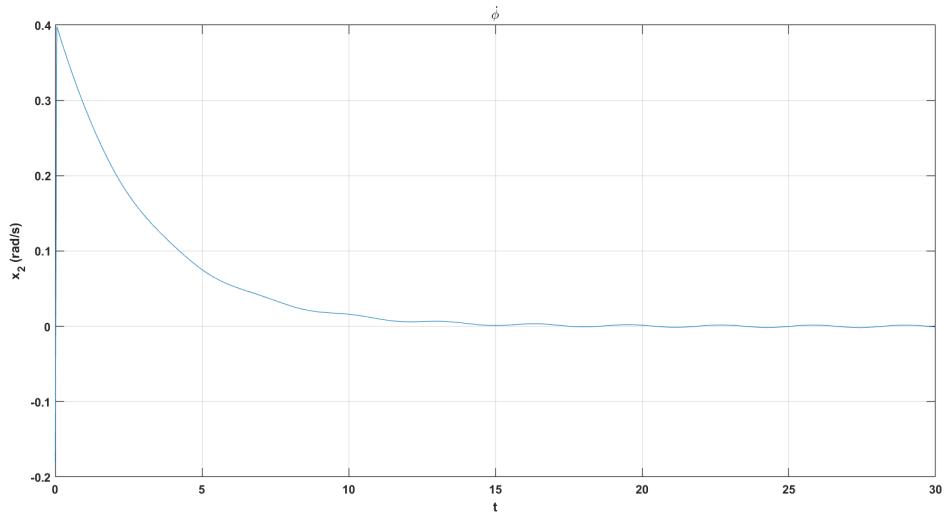
figura 4.10. Vediamo quindi che con gli attuali guadagni impostati, il nostro controllore non è robusto ai disturbi. Decidiamo perciò a questo punto di aumentare l'azione di controllo per reiettare meglio il nostro disturbo sinusoidale, scegliendo un guadagno più alto, per esempio  $\mu = 30$ .

Quello che ci aspetteremmo da un guadagno così alto è sicuramente una migliore reiezione ai disturbi, ma anche, in virtù della (3.19), una convergenza della traiettoria su  $\Sigma$  estremamente rapida. Tale analisi appena fatta è avvalorata dai risultati mostrati nelle figure 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15

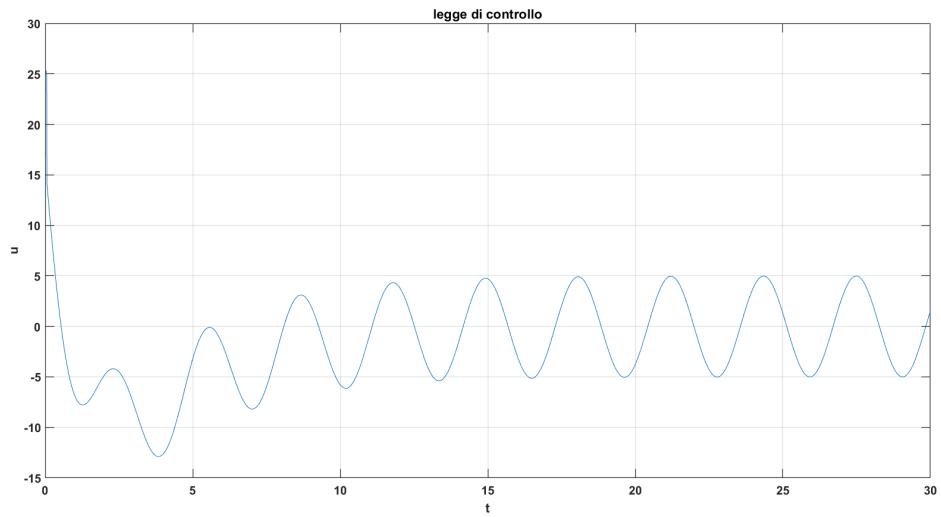


**Figura 4.11:** Andamento della  $x_1$  nello SMC quando agisce un disturbo sinusoidale con  $\mu = 30$

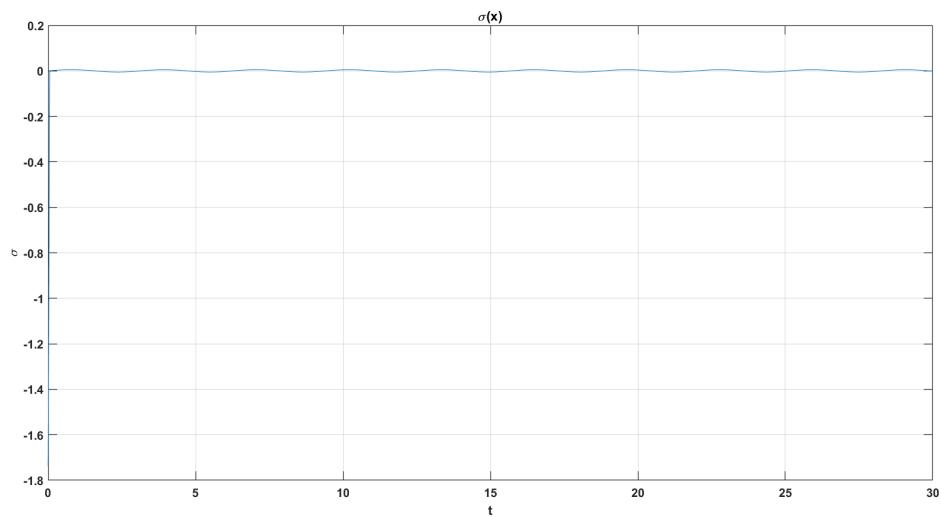
Quello che però possiamo notare zoomando gli andamenti a regime delle variabili di stato o della  $\sigma(x)$ , è che purtroppo a regime si continuano ad avere delle piccole oscillazioni sinusoidali, vedasi per esempio figura 4.16. Se si volessero attenuare ancora di più queste oscillazioni, una soluzione potrebbe essere quella di aumentare  $\mu$ . Mettendo per esempio  $\mu = 50$  si ottiene il risultato riportato in figura 4.17. Come si può vedere, effettivamente le oscillazioni si sono ridotte, se però andiamo a graficare l'andamento della legge di controllo, potremo notare la presenza di chattering, vedasi figura 4.18.



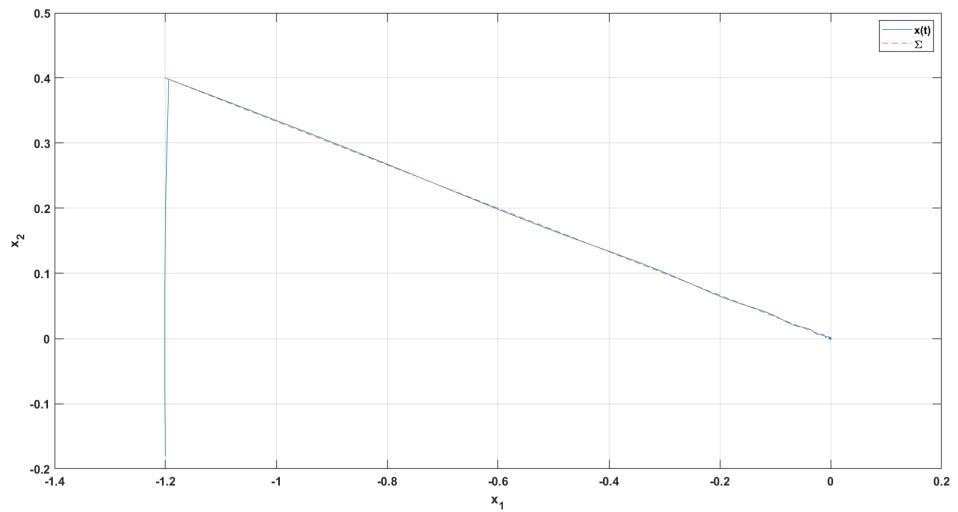
**Figura 4.12:** Andamento della  $x_2$  nello SMC quando agisce un disturbo sinusoidale con  $\mu = 30$



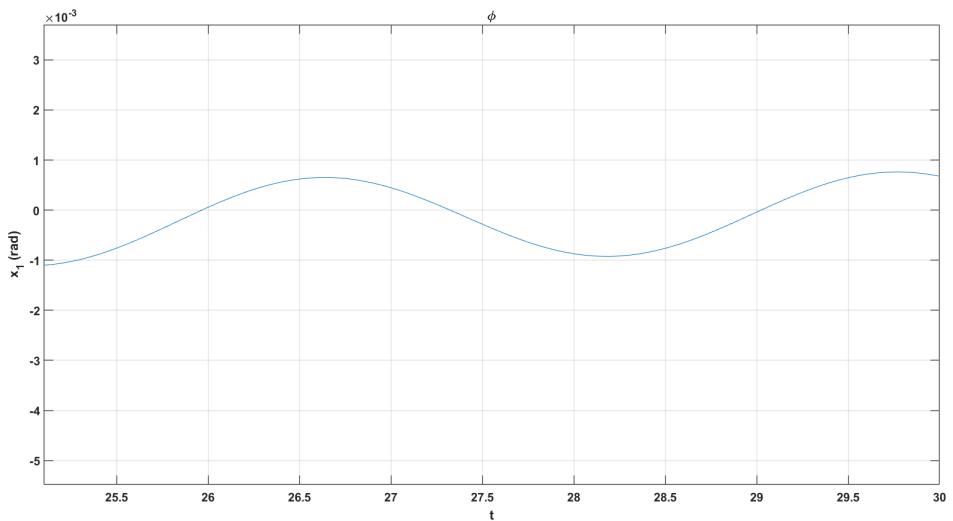
**Figura 4.13:** Andamento della legge di controllo nello SMC quando agisce un disturbo sinusoidale con  $\mu = 30$



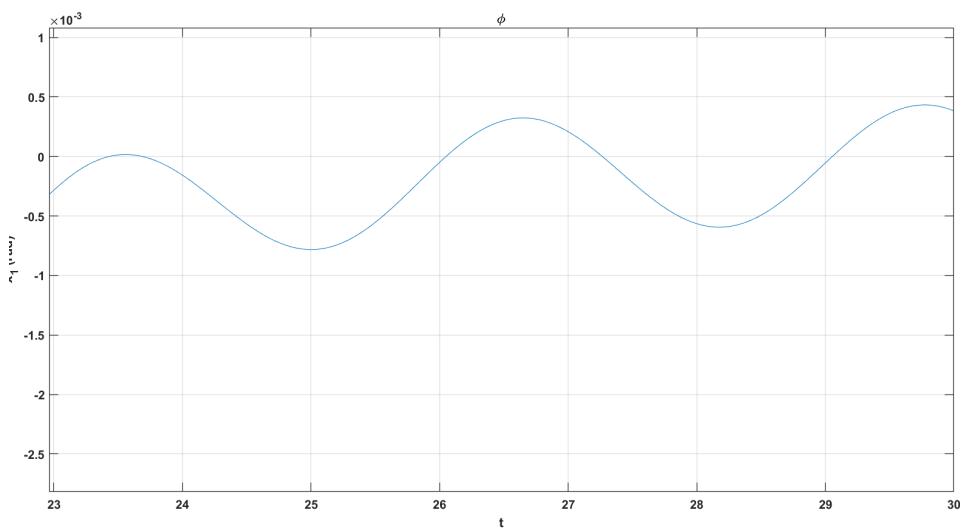
**Figura 4.14:** Andamento della  $\sigma$  nello SMC quando agisce un disturbo sinusoidale con  $\mu = 30$



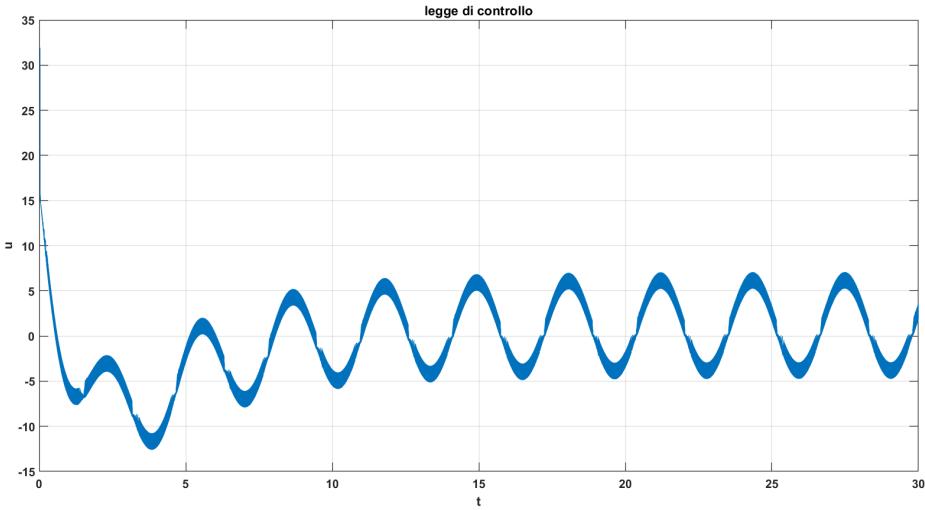
**Figura 4.15:** Andamento della traiettoria nel piano di stato nello SMC quando agisce un disturbo sinusoidale con  $\mu = 30$



**Figura 4.16:** Zoom a regime della figura 4.11



**Figura 4.17:** Zoom del regime dell'andamento della  $x_1$  nello SMC quando agisce un disturbo sinusoidale con  $\mu = 50$

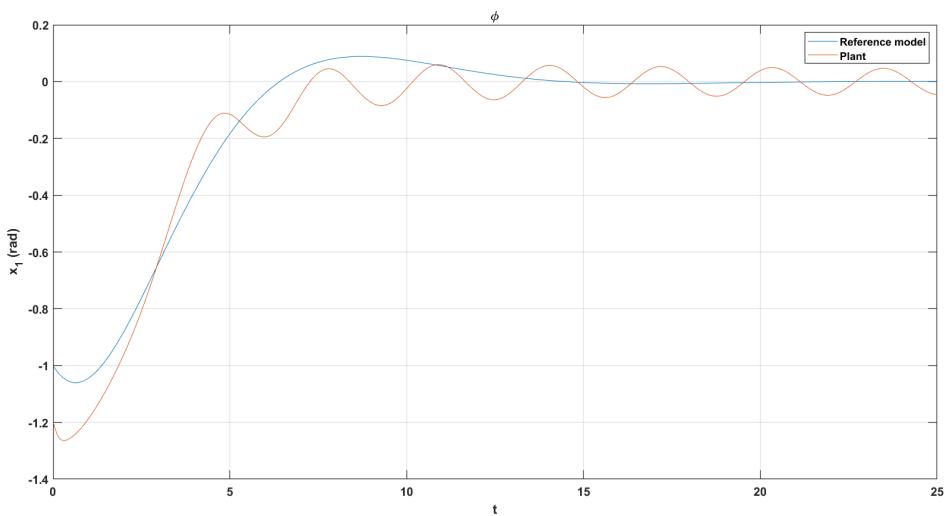


**Figura 4.18:** Andamento della legge di controllo nello SMC quando agisce un disturbo sinusoidale con  $\mu = 50$

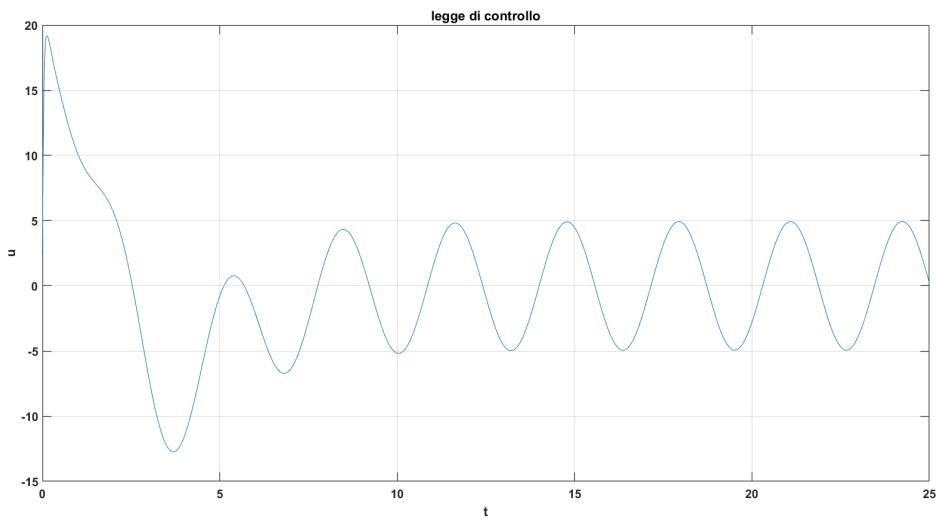
In conclusione possiamo dunque dire che è bene aumentare  $\mu$  per migliorare la reiezione ai disturbi, ma senza esagerare perché altrimenti si presenterà chattering e per evitare tale fenomeno dovremo allargare nuovamente il boundary layer diminuendo  $\varepsilon$ , ottenendo poi di nuovo scarsa precisione a regime.

#### 4.1.4 MRAC MCS

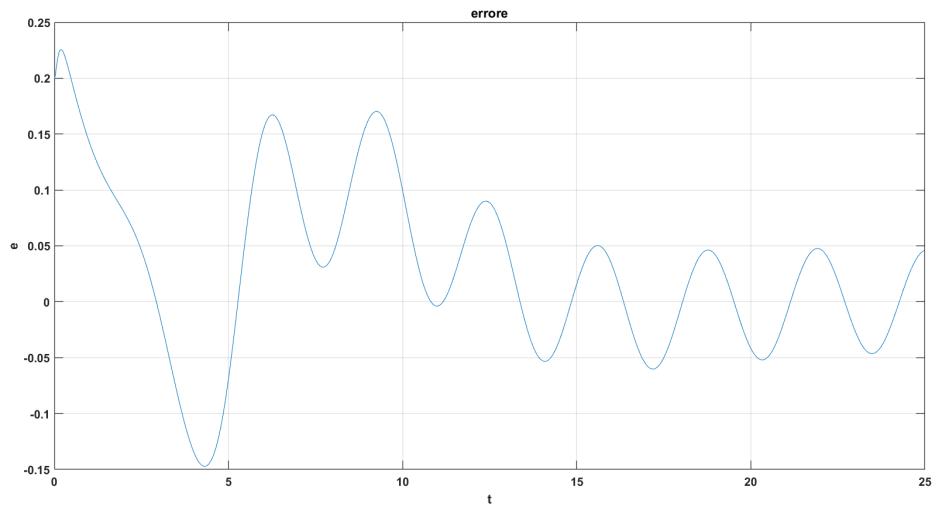
L'ultimo controllore che ci resta, su cui effettuare questa analisi di robustezza, è il MRAC MCS. Abbiamo già detto che il MRAC MCS è un controllore robusto ai matched disturbances, e infatti applicando tale strategia di controllo al nostro modello (1.11), vedendo i termini non lineari come disturbi matched, abbiamo dimostrato che essa funziona perfettamente. Provando però adesso ad introdurre il nostro solito disturbo sinusoidale, otterremo i seguenti grafici:



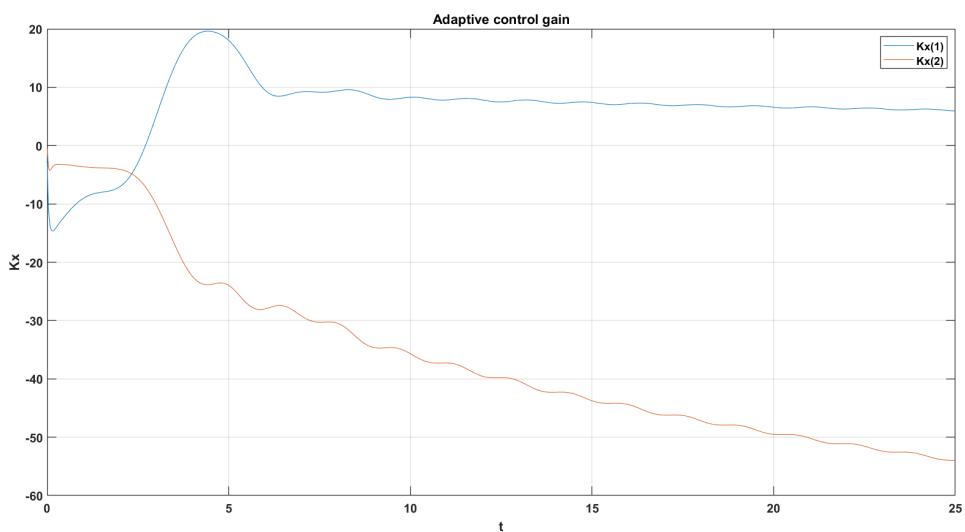
**Figura 4.19:** Andamento di  $x_1$  del modello di riferimento e dell'impianto non lineare nel MRAC MCS quando agisce un disturbo sinusoidale



**Figura 4.20:** Andamento della legge di controllo nel MRAC MCS quando agisce un disturbo sinusoidale



**Figura 4.21:** Andamento dell'errore di controllo nel MRAC MCS quando agisce un disturbo sinusoidale



**Figura 4.22:** Andamento dei guadagni di controllo nel MRAC MCS quando agisce un disturbo sinusoidale

Come possiamo notare dalla figura 4.22, viene evidenziato un problema comune dei controllori adattivi, cioè che in presenza di disturbi persistenti, i guadagni di controllo possono crescere in maniera illimitata o non stabilizzarsi mai.

Un modo per risolvere tale problematica è adottare una delle tante estensioni dell'algoritmo MRAC MCS, chiamata MRAC Extended MCS (EMCS) riportata in [4]. Tale variante consiste in sostanza nel rafforzare la legge di controllo con un'azione di switching la cui ampiezza è stimata in modo adattativo, ovvero usare, in luogo della (3.25), la seguente legge di controllo

$$u(t) = K_x^T(t)x(t) + K_r(t)r(t) + K_E(t)\operatorname{sgn}[y(t)], \quad K_E(t) \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

dove

$$K_E(t) = \gamma \int_0^t |y(\tau)| d\tau \quad (4.5)$$

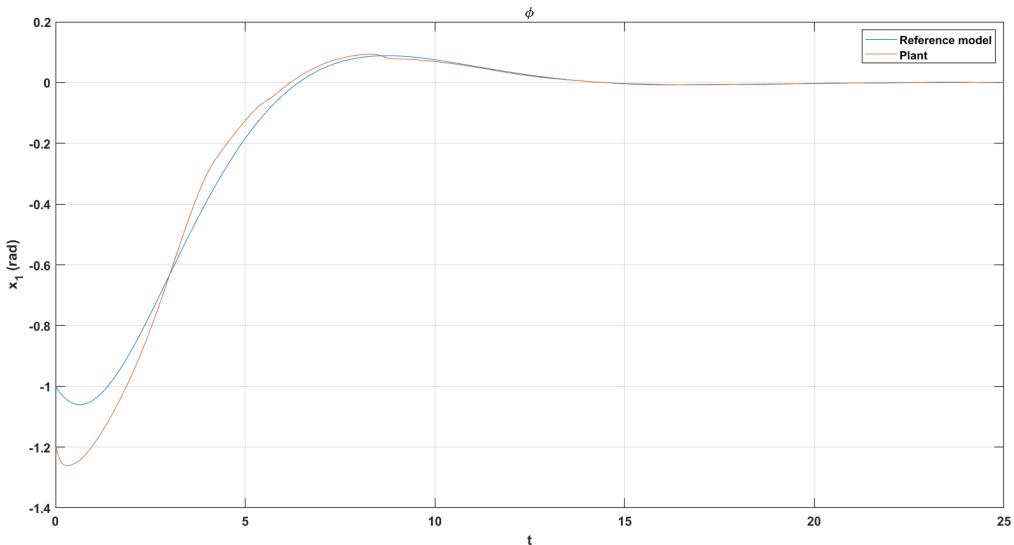
con  $\gamma$  parametro scelto da noi. Ed è possibile dimostrare che  $K_E$  non va all'infinito se il disturbo applicato all'impianto è limitato.

Come al solito la presenza della funzione  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  causa chattering nella legge di controllo, pertanto come già fatto per lo SMC, sostituiremo la funzione  $\operatorname{sgn}(y)$  con la funzione  $\operatorname{sat}(y/\varepsilon)$ , con  $\varepsilon$  sempre scelto noi.

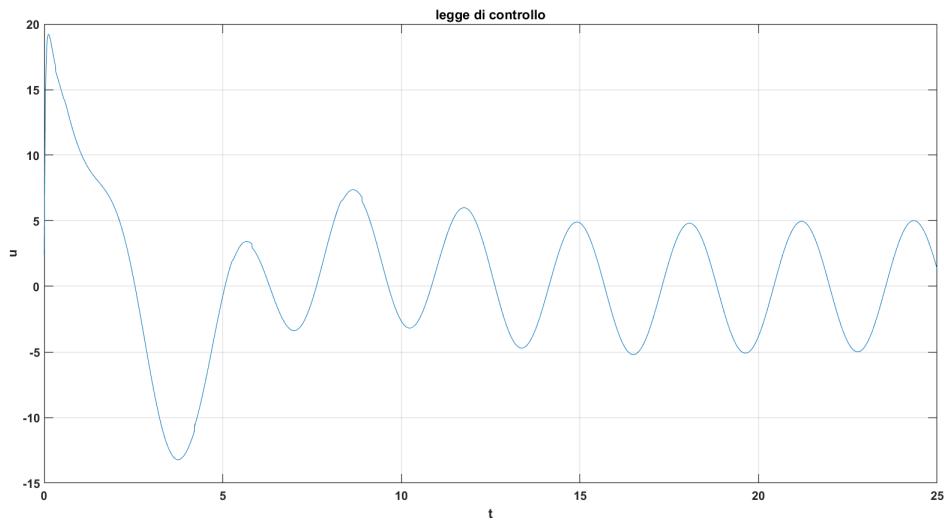
Effettuiamo nuovamente la simulazione aggiungendo però stavolta questa azione di switching e ponendo

$$\gamma = 5 \quad \varepsilon = 0.01$$

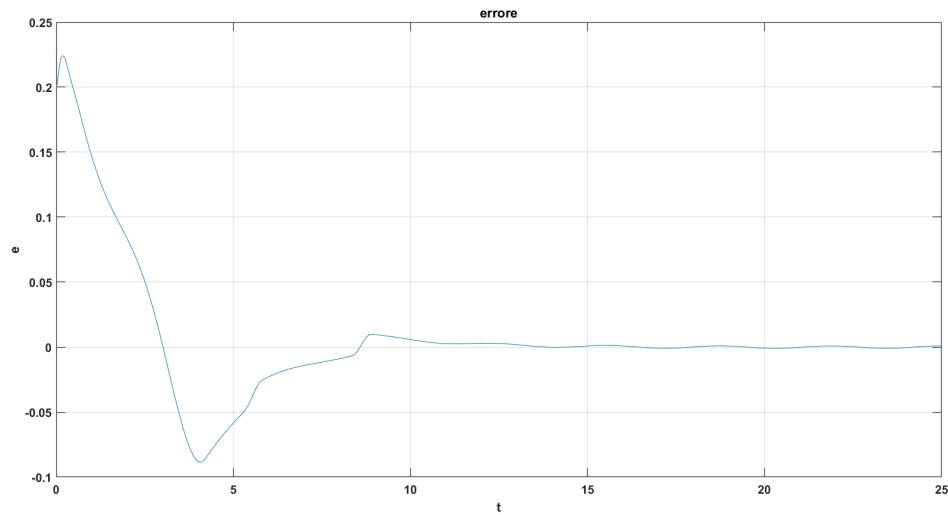
I seguenti risultati verranno ottenuti:



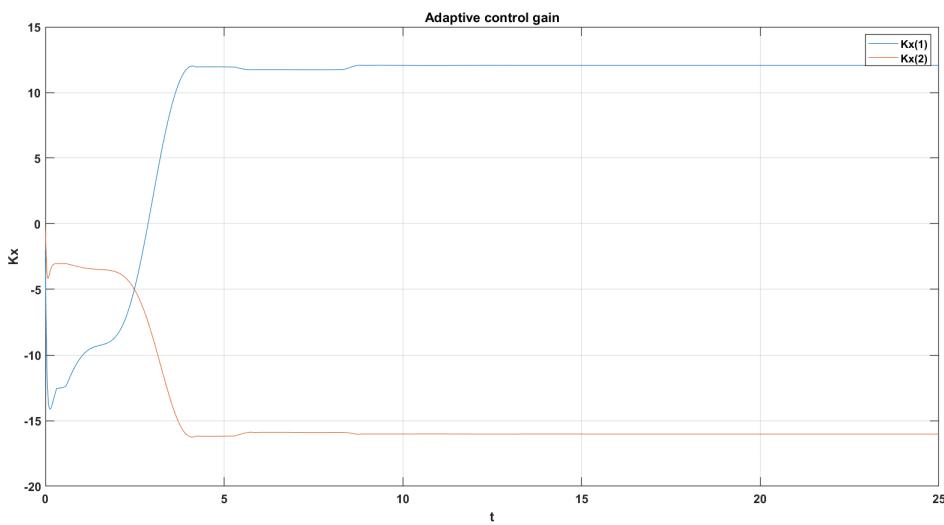
**Figura 4.23:** Andamento di  $x_1$  del modello di riferimento e dell'impianto non lineare nel MRAC EMCS quando agisce un disturbo sinusoidale



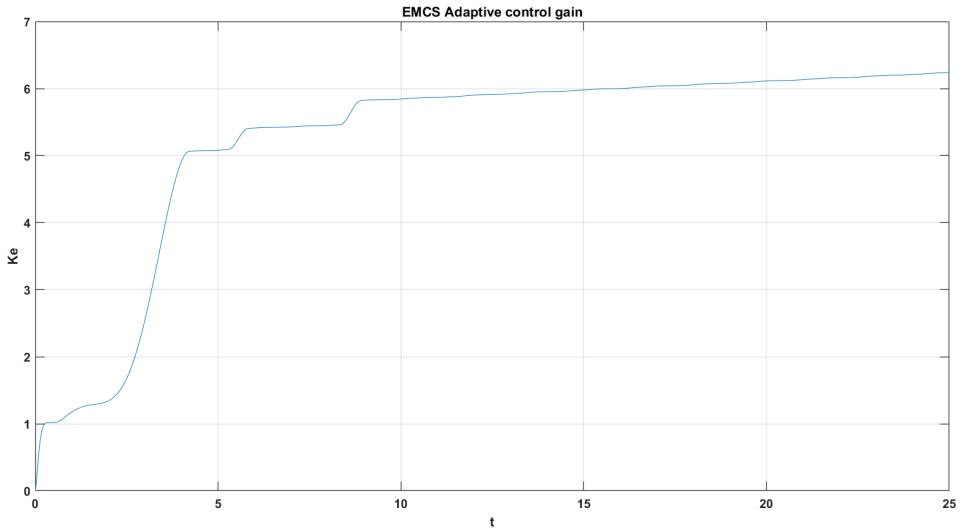
**Figura 4.24:** Andamento della legge di controllo nel MRAC EMCS quando agisce un disturbo sinusoidale



**Figura 4.25:** Andamento dell'errore nel MRAC EMCS quando agisce un disturbo sinusoidale



**Figura 4.26:** Andamento dei guadagni di controllo  $K_x$  nel MRAC EMCS quando agisce un disturbo sinusoidale



**Figura 4.27:** Andamento del guadagno  $K_E$  nel MRAC EMCS quando agisce un disturbo sinusoidale

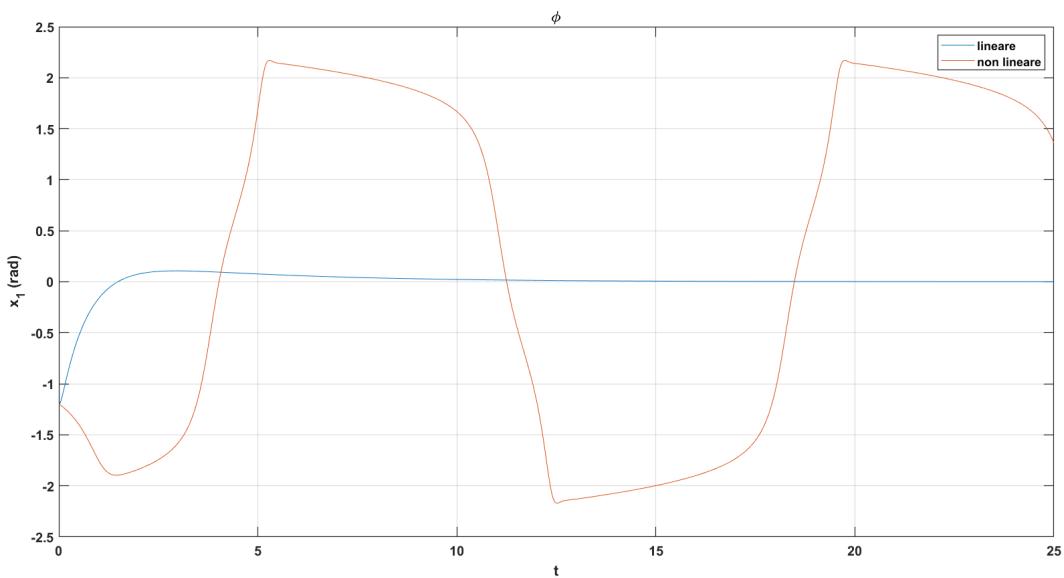
## 4.2 Robustezza a variazioni parametriche

Concludiamo adesso la nostra analisi di robustezza testando i controllori progettati nel caso in cui alcuni parametri dell'impianto variano. In particolare assumiamo una variazione del 20% sul parametro  $\alpha_1$ , ovvero in luogo di  $\alpha_1$  considereremo nell'impianto non lineare il parametro

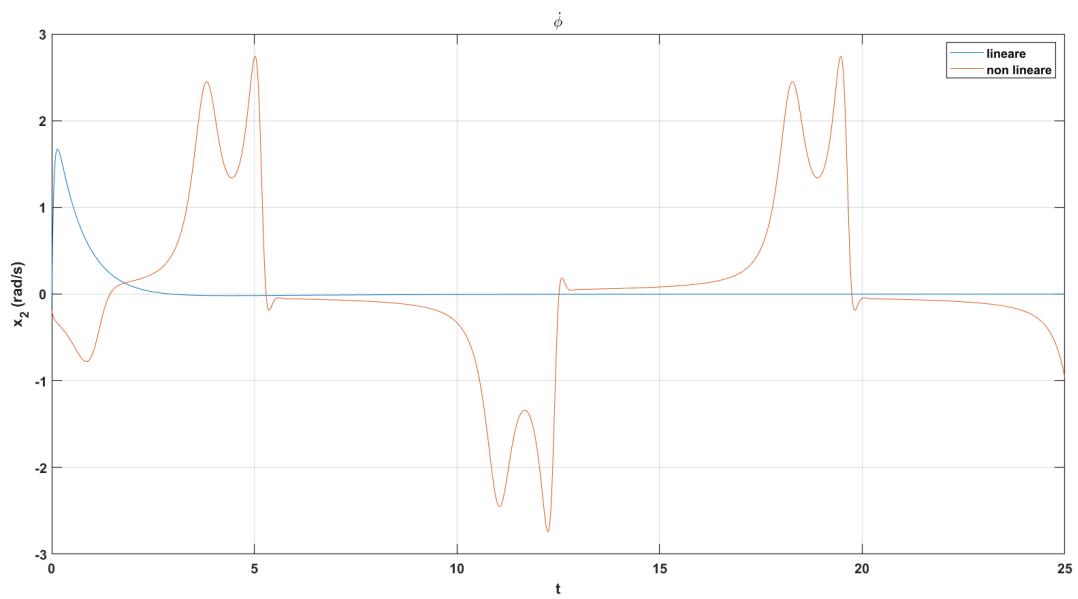
$$\hat{\alpha}_1 = 0.8\omega_0^2 \quad (4.6)$$

### 4.2.1 Controllo lineare

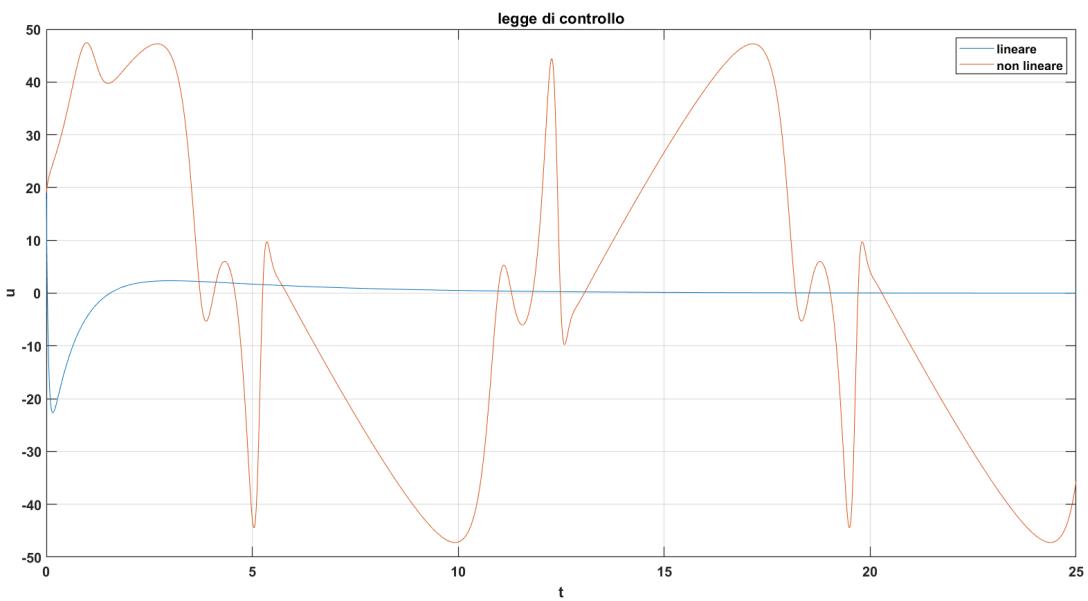
Di seguito riportiamo i grafici per il controllo lineare nel caso in cui avvenga una variazione parametrica del tipo 4.6.



**Figura 4.28:** Confronto dell'andamento di  $x_1$  tra modello linearizzato e non lineare nel caso in cui si considera il parametro 4.6



**Figura 4.29:** Confronto dell’andamento di  $x_2$  tra modello linearizzato e non lineare nel caso in cui si considera il parametro 4.6

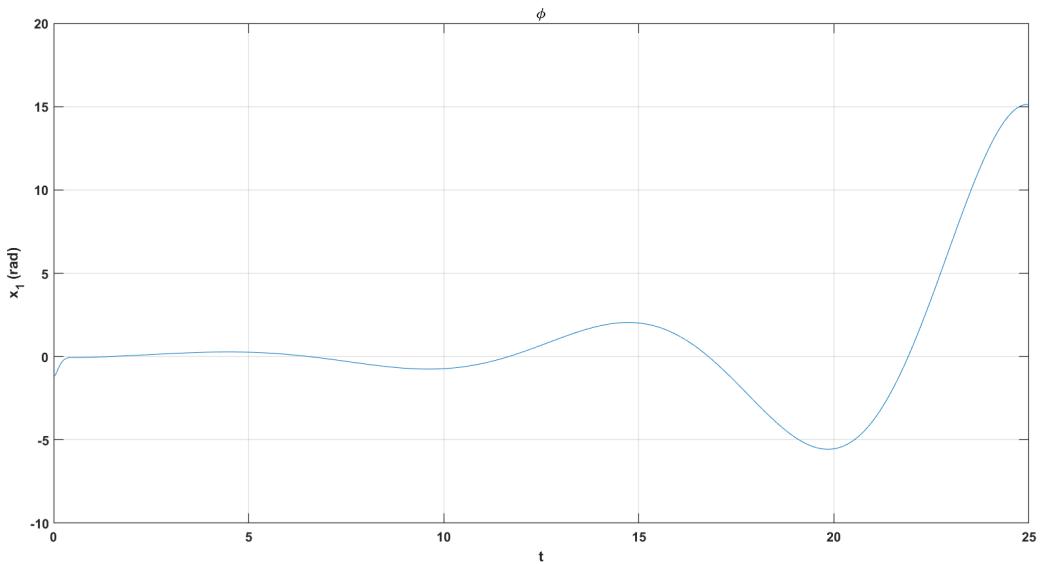


**Figura 4.30:** Confronto dell’andamento della legge di controllo tra modello linearizzato e non lineare nel caso in cui si considera il parametro 4.6

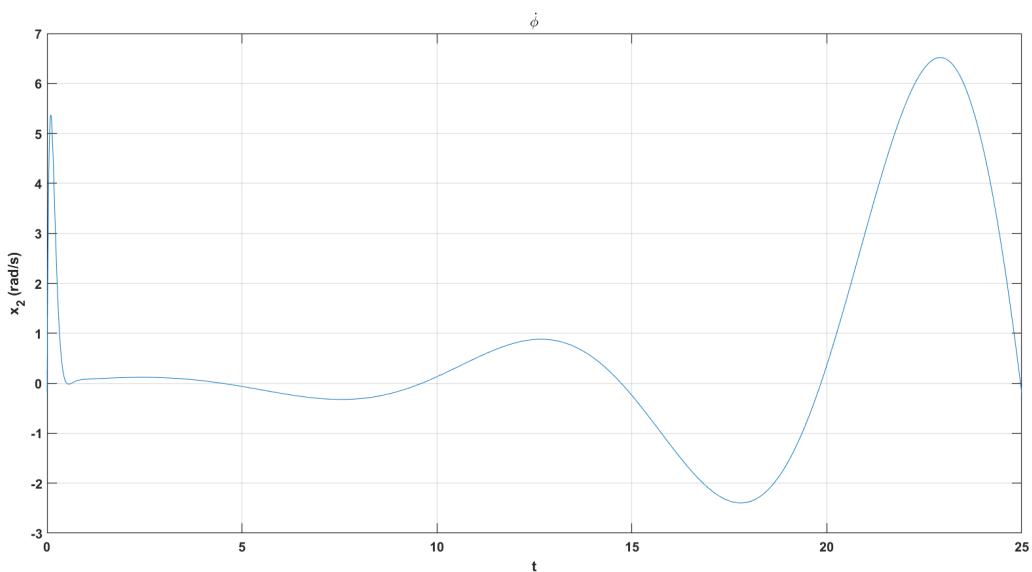
Come possiamo notare il controllore lineare progettato con retroazione di stato smette di funzionare nel momento in cui l'impianto non lineare è affetto da variazione parametrica.

#### 4.2.2 I/O FBL

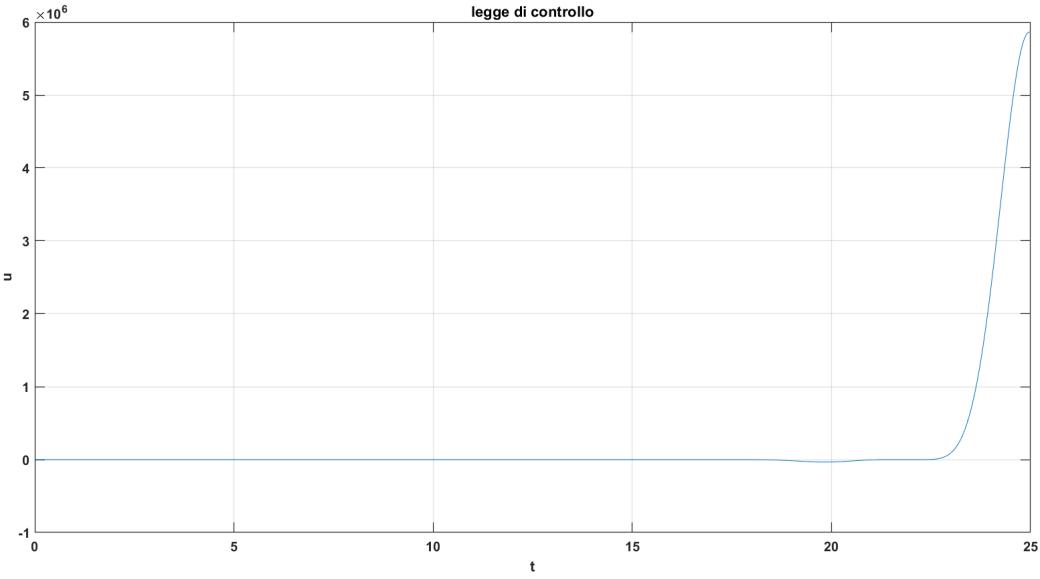
Abbiamo già accennato al fatto che la FBL, come qualsiasi altro controllo geometrico, per funzionare correttamente si deve assumere una perfetta conoscenza dei campi vettoriali. Ciò comporta ovviamente che anche questo controllore sia sensibile a variazioni parametriche, perché il campo vettoriale viene modificato. Nel paragrafo precedente abbiamo inoltre scoperto che a parità di performance i guadagni 4.3 garantiscono maggiore robustezza al caso in cui sono usati i guadagni 3.11, effettuiamo perciò la simulazione nel caso in cui sono usati i 4.3 col parametro 4.6. I seguenti risultati saranno ottenuti:



**Figura 4.31:** Andamento di  $x_1$  nell'I/O FBL nel caso in cui si considera il parametro 4.6



**Figura 4.32:** Andamento di  $x_2$  nell'I/O FBL nel caso in cui si considera il parametro 4.6



**Figura 4.33:** Andamento della legge di controllo nell’I/O FBL nel caso in cui si considera il parametro 4.6

Come possiamo notare con tale controllore, a ciclo chiuso non abbiamo più la stabilità.

### 4.2.3 Sliding Mode Control

Passiamo adesso a testare la robustezza rispetto a variazioni parametriche per controllori che sono noti per essere robusti a tali variazioni. Iniziamo con l’analizzare lo SMC. Come ben sappiamo dalla teoria, quando si ha una variazione parametriche nell’impianto, il campo vettoriale dell’impianto  $\hat{f}$  è diverso da quello presente nella legge di controllo equivalente  $f$  e quando questo succede, abbiamo che  $\sigma\dot{\sigma}$  non è più minore di zero qualsiasi sia il valore del parametro  $\mu$ , infatti

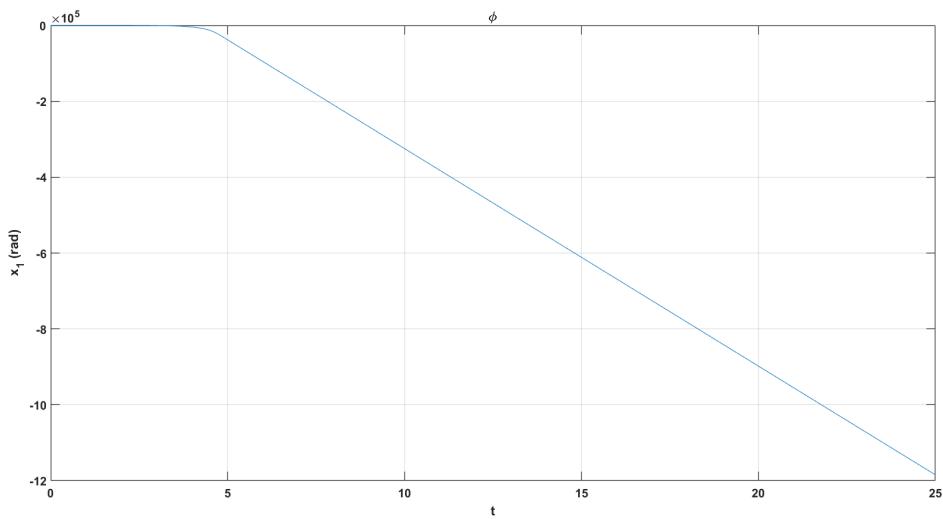
$$\sigma\dot{\sigma} = \sigma\nabla\sigma \cdot \dot{x} = \sigma P^T(\hat{f}(x) + g(x)u) =$$

Sostituendo la 3.14 e la 3.18 nell’ultima espressione, avremo:

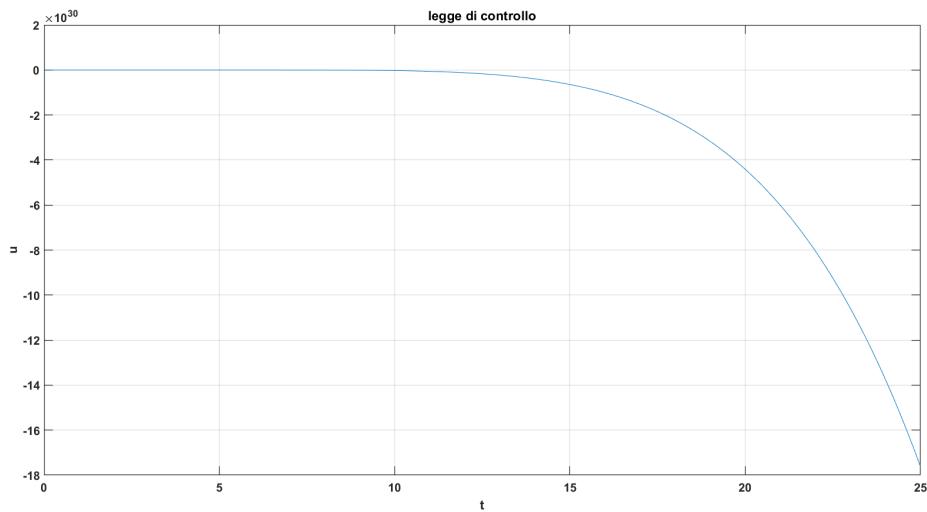
$$= \sigma(P^T\hat{f} + -P^Tg\frac{P^Tf}{P^Tg} - P^T\frac{g\mu}{P^Tg}\text{sgn}(\sigma)) = \sigma P^T(\hat{f} - f) - \mu|\sigma|$$

Come è possibile notare stavolta possiamo correre il rischio di avere una  $\sigma\dot{\sigma}$  non strettamente negativa a causa del mismatch tra il campo vettoriale del modello e di quello nella legge di controllo, cioè in pratica corriamo il rischio di perdere la proprietà di attrattività della superficie  $\Sigma$  se il parametro  $\mu$  non assume un valore sufficientemente alto. Per chiarire questa questione, proviamo a lanciare il nostro sistema per valori dei guadagni come fatto originariamente, cioè per  $\mu = 1$ , e riportiamo solo alcuni grafici più significativi.

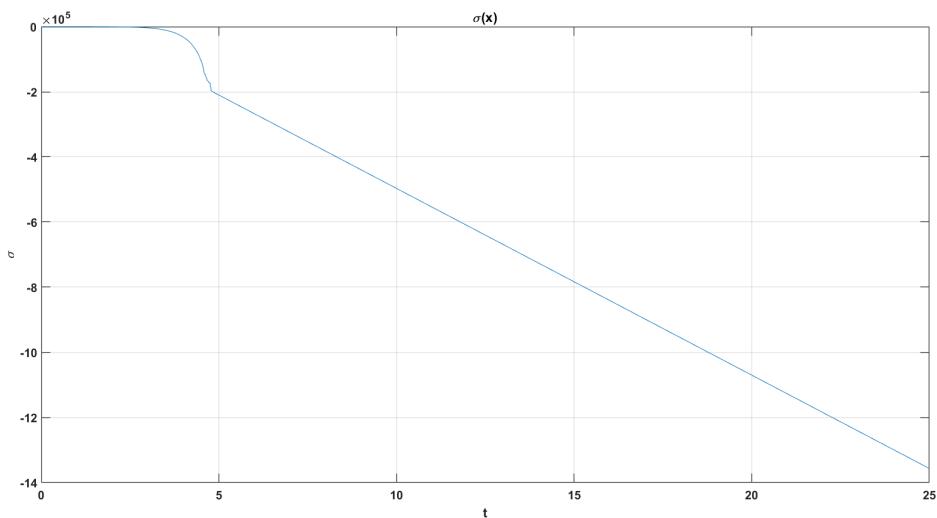
Nelle figure 4.34, 4.35 e 4.36 si capisce abbastanza bene che per tale valore di  $\mu$  l’attrattività viene persa. Simuliamo perciò nuovamente il sistema con un valore più grande  $\mu$ , per esempio  $\mu = 30$ . Guardando le figure dalla 4.37 alla 4.41 possiamo concludere che lo SMC, per valori di  $\mu$  sufficientemente alti è robusto a variazioni parametriche. Anche in questo caso se aumentiamo troppo  $\mu$  rischiamo che si presenti chattering e dovremo abbassare  $\varepsilon$ .



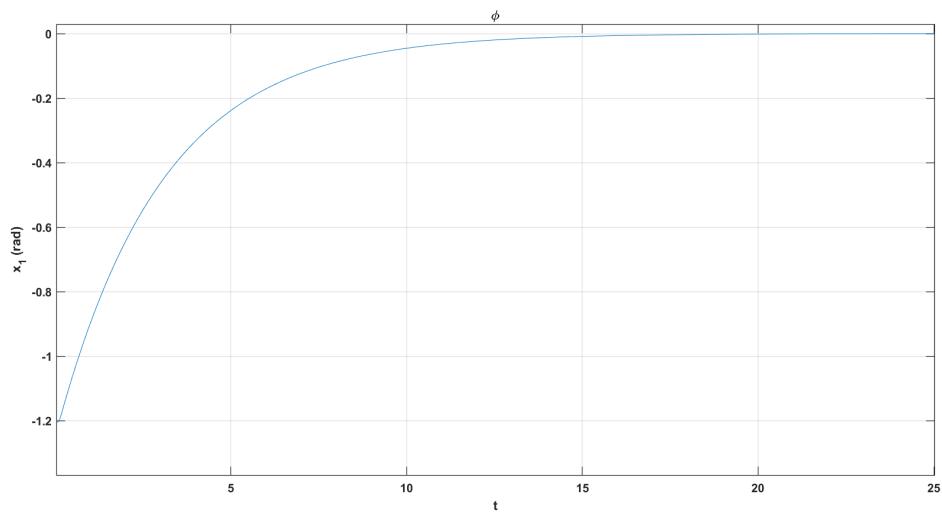
**Figura 4.34:** Andamento della  $x_1$  nello SMC nel caso in cui si considera il parametro 4.6 con  $\mu = 1$



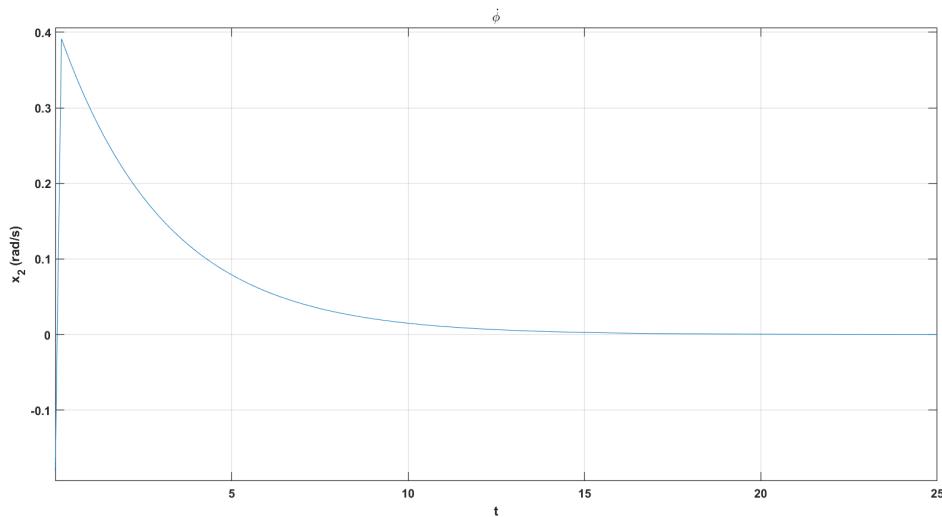
**Figura 4.35:** Andamento della legge di controllo nello SMC nel caso in cui si considera il parametro 4.6 con  $\mu = 1$



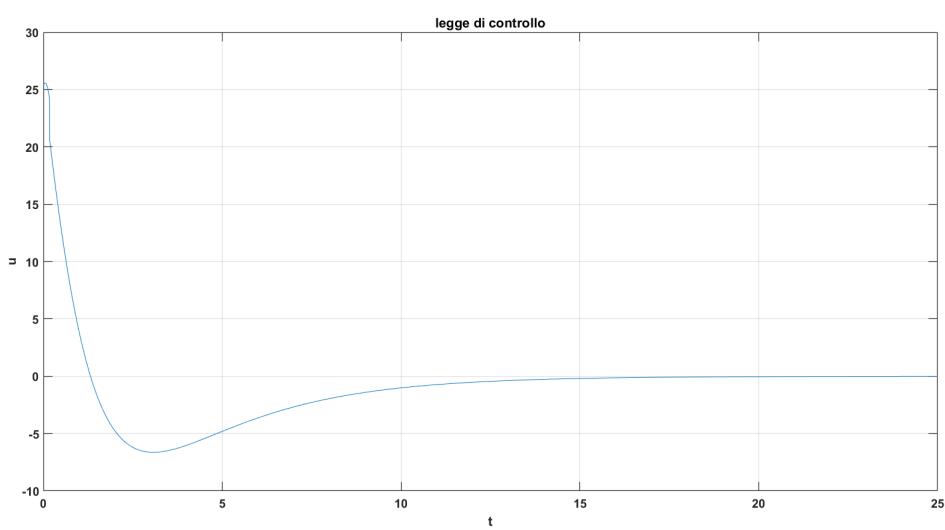
**Figura 4.36:** Andamento della  $\sigma(x)$  nello SMC nel caso in cui si considera il parametro 4.6 con  $\mu = 1$



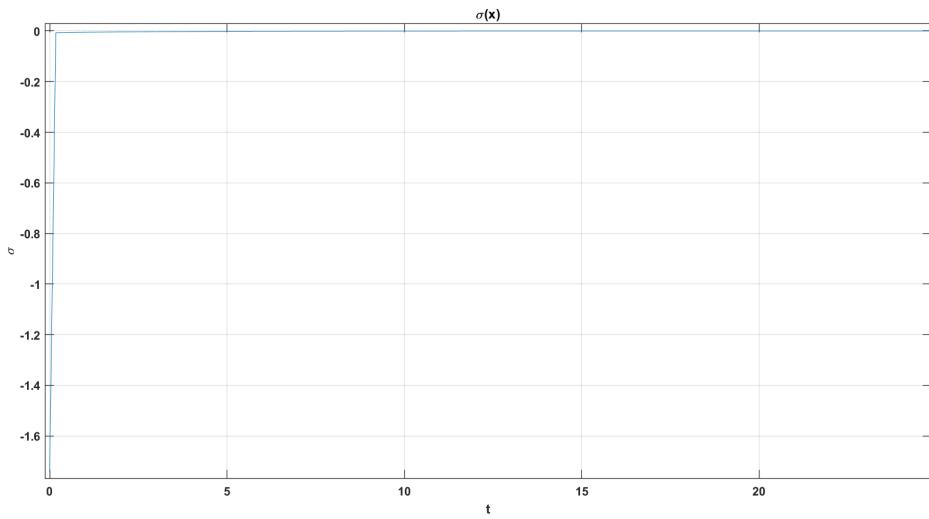
**Figura 4.37:** Andamento della  $x_1$  nello SMC nel caso in cui si considera il parametro 4.6 con  $\mu = 30$



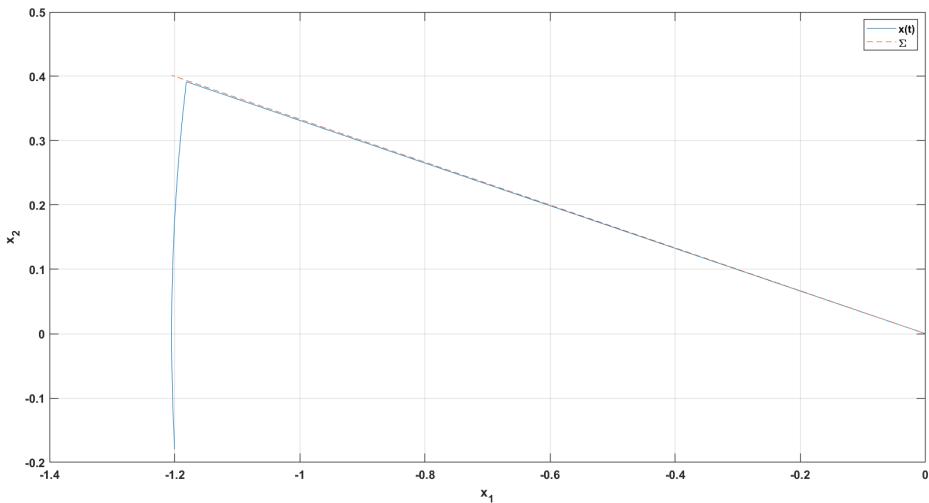
**Figura 4.38:** Andamento della  $x_2$  nello SMC nel caso in cui si considera il parametro 4.6 con  $\mu = 30$



**Figura 4.39:** Andamento della legge di controllo nello SMC nel caso in cui si considera il parametro 4.6 con  $\mu = 30$



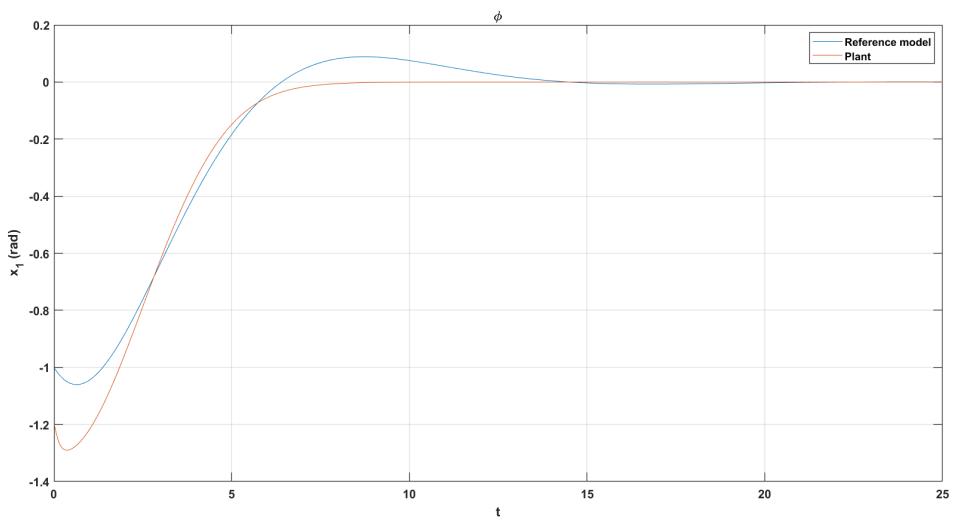
**Figura 4.40:** Andamento della  $\sigma(x)$  nello SMC nel caso in cui si considera il parametro 4.6 con  $\mu = 30$



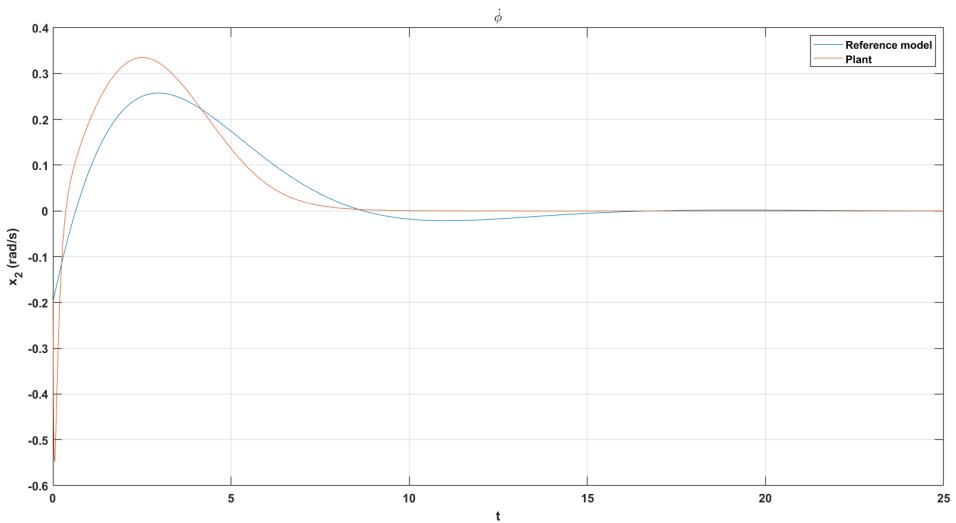
**Figura 4.41:** Andamento della traiettoria nel piano di stato nello SMC nel caso in cui si considera il parametro 4.6 con  $\mu = 30$

#### 4.2.4 MRAC MCS

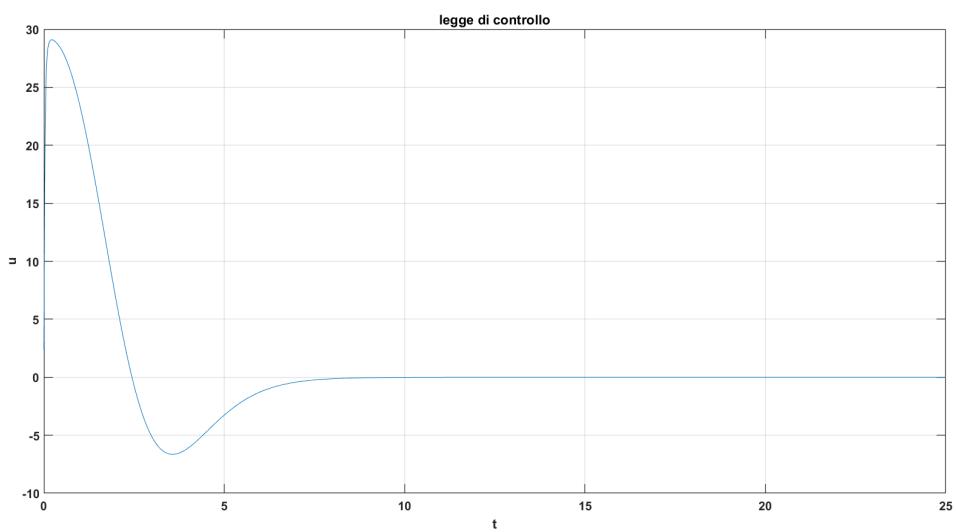
Infine, per quanto riguarda il MRAC MCS, abbiamo già detto che la sua più grande peculiarità è che può essere applicato ad impianti non noti, ed adatterà i guadagni e quindi la legge di controllo a seconda dei valori dei parametri in maniera tale da portare l'errore a regime nullo. Infatti lanciando la simulazione con  $\hat{\alpha}_1$  otterremo gli stessi risultati ma con valori differenti dei guadagni.



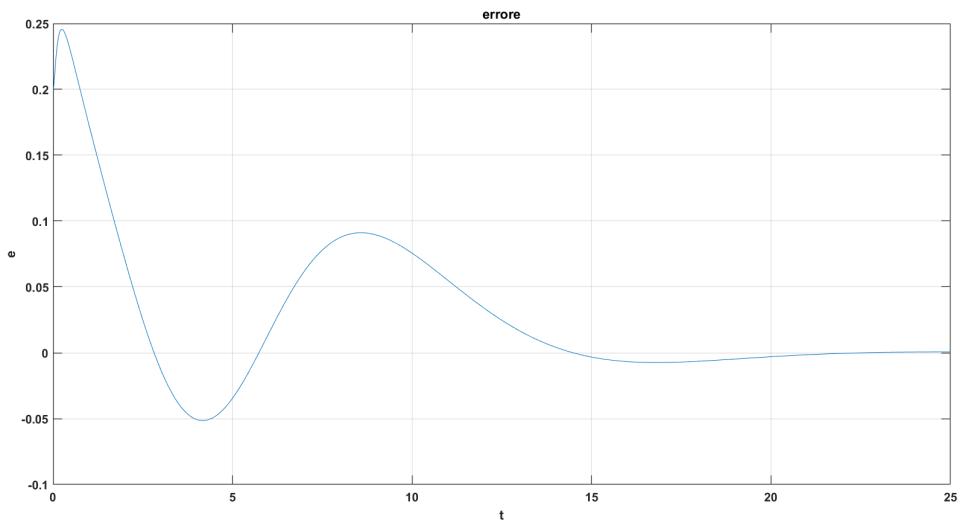
**Figura 4.42:** Andamento di  $x_1$  del modello di riferimento e dell'impianto non lineare nel MRAC MCS nel caso in cui si considera il parametro 4.6



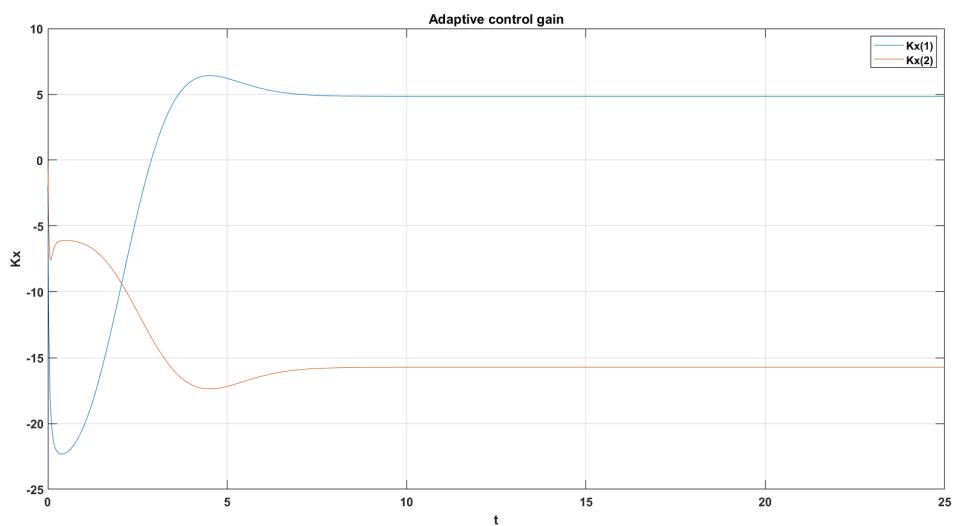
**Figura 4.43:** Andamento di  $x_2$  del modello di riferimento e dell'impianto non lineare nel MRAC MCS nel caso in cui si considera il parametro 4.6



**Figura 4.44:** Andamento della legge di controllo nel MRAC MCS nel caso in cui si considera il parametro 4.6



**Figura 4.45:** Andamento dell'errore nel MRAC MCS nel caso in cui si considera il parametro 4.6



**Figura 4.46:** Andamento dei guadagni nel MRAC MCS nel caso in cui si considera il parametro 4.6

## 4.3 Confronto quantitativo delle prestazioni

Arriviamo a questo punto che abbiamo presentato diverse strategie di controllo, sia lineare che non lineare, ed effettuato per ognuno di esse un'analisi di robustezza. Ci rendiamo perciò conto che alla fine ogni controllore proposto presenta caratteristiche particolari che gli permettono di essere migliore di un altro sotto uno specifico punto di vista. Pertanto, a conclusione di questo elaborato, dopo che sono state presentate diverse tecniche di controllo, andiamo ad effettuare un confronto quantitativo tra di essi, sottolineando le differenze tra di essi in termini sia di performance che robustezza. Rispetto al modello trattato in questo elaborato, dall'analisi dei grafici è possibile formulare le seguenti considerazioni:

- Il controllore lineare con retroazione di stato progettato con pole placement è caratterizzato da una relativa facilità di progetto, con la leggera complicazione dovuta all'aggiunta dell'azione integrale che però garantisce reiezione a disturbi costanti. Gli autovalori assegnati permettono il soddisfacimento delle specifiche sul sistema linearizzato dove  $S\% = 8.5$  e  $t_{a,1} = 14s$ . Stessa cosa non si può dire per il sistema non lineare che esibisce prestazioni peggiori in quanto le condizioni iniziali da cui partiamo sono al di fuori del range in cui sistema non lineare e lineare coincidono. Per quanto riguarda lo sforzo di controllo presenta un picco iniziale di  $-25$  sul sistema non lineare. In entrambi casi in presenza di disturbo sinusoidale nel canale di ingresso questo si ripresenta con la stessa frequenza sul canale di uscita, mentre invece a variazioni parametriche il controllore lineare smette totalmente di funzionare sul sistema non lineare;
- Il controllore geometrico, ossia l'I/O Feedback Linearization, è caratterizzato, come si è potuto notare, da una grande facilità di progetto sia in termini di legge linearizzante che di legge di controllo ausiliare avendo usato un PID. Sia usando i guadagni 3.11 che con 4.3 è garantito il soddisfacimento delle specifiche, con i primi si ha  $S\% = 8.8$  e  $t_{a,1} = 13s$ , mentre con i secondi si ha  $S\% = 8.6$  e  $t_{a,1} = 12s$ . Ovviamente nel secondo caso si ha un picco iniziale di sforzo di controllo 5 volte più grande rispetto al primo. Prendendo in considerazione solo il caso dei guadagni 4.3 il sistema garantisce reiezione rispetto a disturbi costanti, anche se di meno in confronto al controllore lineare, e come nel caso del controllore lineare, in presenza di disturbi sinusoidali questi si ripresentano in uscita con la stessa frequenza e al più leggermente attenuati, e per variazioni parametriche tale controllore diventa instabile;
- Il controllo Sliding Mode è un controllore ben più complicato da progettare rispetto ai primi 2 ma esso fornisce prestazioni anche sicuramente migliori. Prima di tutto con i guadagni 3.20 sono garantiti  $S\% = 0$  e  $t_{a,1} = 15s$ , mentre lo sforzo di controllo è sicuramente più basso rispetto ai primi 2 controllori progettati. Il controllore Sliding è una categoria di controllore robusto che pertanto garantisce robustezza sia a disturbi sinusoidali che a variazioni parametriche semplicemente agendo sul guadagno  $\mu$ . Un difetto di tale strategia di controllo è che può verificarsi chattering, cioè commutazione degli attuatori idealmente infinita se non si adotta un boundary layer oppure se si usa un  $\mu$  troppo grande;
- Il MRAC-MCS è un altro controllore caratterizzato da un'elevata difficoltà di progetto poiché ora si tratta di dover applicare delle leggi di controllo integro-differenziale, ed inoltre si ha una garanzia di funzionamento solo se tale controllore è applicato a sistemi non lineari il cui modello lo si può ricondurre ad una forma canonica di controllabilità per sistemi lineari vedendo i termini non lineari come disturbo. D'altra

parte però questo controllore fornisce i risultati migliori sia in termini di prestazioni che di robustezza. Innanzitutto nonostante si è scelto un modello di riferimento che codifichi le specifiche, la risposta fornita dall’impianto è addirittura migliore con  $S\% = 0$  e  $t_{a,1} = 7.5s$  e una legge di controllo che si mantiene a valori contenuti e di poco superiori a quelli che si avevano nel caso dello sliding. Tale controllore non garantisce una robustezza a disturbi additivi sinusoidali a meno che non venga adottata un’estensione del MRAC MCS, chiamata appunto Extended EMCS in cui stavolta l’uscita dell’impianto segue perfettamente quella del modello di riferimento. Caratteristica peculiare di tale controllore è che esso riesce ad adattare online i propri guadagni a variazioni parametriche dell’impianto, risultando così perfettamente robusto a tali variazioni.

# Conclusioni e sviluppi futuri

Nell'elaborato appena discusso è stata affrontata l'analisi ed il controllo di un sistema non lineare, ossia la dinamica di moto di rollio di una nave.

Dopo aver fornito una descrizione del problema del moto di rollio e aver descritto la dinamica di tale moto, ci siamo dedicati dapprima alla parte di analisi in cui sono stati utilizzati differenti strumenti che si sono rivelati molto utili per determinare importanti proprietà del sistema. Nello specifico siamo andati ad effettuare uno studio nel piano delle fasi per capire i possibili modi in cui può evolvere il nostro sistema a seconda delle condizioni iniziali da cui si parte, abbiamo attestato la non esistenza di cicli limite, e infine abbiamo verificato la stabilità strutturale del sistema per alcuni parametri. Uno sviluppo futuro a cui ci si potrà dedicare è lo studio della stabilità strutturale del sistema a fronte di variazioni di 2 o più parametri.

Di seguito poi siamo passati alla sintesi dei controllori, partendo da una strategia di controllo lineare, continuando poi con quelle non lineari. Per ognuna di esse abbiamo riportato il procedimento di progettazione e risultati della simulazione. Tali risultati sono stati poi riportati anche nel caso di presenza di disturbi additivi e variazioni dei parametri del modello, permettendoci così di fare un confronto tra i vari algoritmi di controllo progettati sia in termini di performance che di robustezza. Abbiamo scoperto come in sostanza il controllore lineare progettato con pole placement e l'I/O FBL con legge di controllo ausiliare PID funzionano peggio rispetto ai controllori SMC e MRAC, specialmente in termini di robustezza a disturbi additivi e variazioni dei parametri. Pertanto uno sviluppo futuro in questo caso può essere rappresentato dall'impiegare un'altra strategia di controllo lineare, o progettare una legge di controllo ausiliario robusto invece di usare un PID nell'I/O FBL.

# Bibliografia

- [1] M Bikdash, B Balachandran e A Navfeh. «Melnikov analysis for a ship with a general roll-damping model». In: *Nonlinear Dynamics* 6.1 (1994), pp. 101–124.
- [2] Paolo Giuseppe Emilio Bolzern, Riccardo Scattolini e Nicola Luigi Schiavoni. *Fondamenti di controlli automatici*. McGraw-Hill, 2008.
- [3] Elham Amini Boroujeni, Abdolkarim Daryabor e Hamid Reza Momeni. «Designing robust pole placement control for Roll Motions of Ships via LMIs». In: *2008 International Conference on Control, Automation and Systems*. IEEE. 2008, pp. 114–117.
- [4] M Di Bernardo e DP Stoten. «A new extended minimal control synthesis algorithm with an application to the control of chaotic systems». In: *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 2. IEEE. 1997, pp. 1902–1907.
- [5] PressMare. *I movimenti oscillatori delle navi: il fenomeno del rollio*. 2019. URL: <https://www.pressmare.it/it/blogger/angelo-sinisi/2019-11-22/movimenti-oscillatori-delle-navi-prima-parte-24229>.
- [6] *Moti Nave su Wikipedia*. 2022. URL: [https://it.wikipedia.org/wiki/Moti\\_nave](https://it.wikipedia.org/wiki/Moti_nave).
- [7] *Rollio su Wikipedia*. 2021. URL: <https://it.wikipedia.org/wiki/Rollio>.