UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL

NOTAS DE JUBILADO NA DISCIPLINA IMD1001 – MATEMÁTICA ELEMENTAR

12 de janeiro de 2023

MATERIAL NÃO OFICIAL

Em hipótese nenhuma utilize-o como fonte principal em seu estudo.

Depois não diga que eu não avisei...

José Manoel Freitas da Silva

`GitHub: JosManoel`

Considerações iniciais

Inicialmente as notas de jubilado foram idealizadas como uma forma de exercitar a escrita em LaTeX do autor e, simultaneamente, estudar a matemática discreta, utilizando a metodologia "Learn In Public", uma modalidade de estudo onde ocorre a produção ativa de conteúdo, ao invés do simples consumo passivo e desesperado de todo e qualquer material disponível na esperança de absorver um tostão de conteúdo.

Este projeto também visa responder algumas perguntas recorrentes em círculos de conversa dos recém-iniciados no fantástico mundo do BTI, como "pra quê estou estudando isso?"ou "cadê o código?". Sendo assim, a cada capítulo também existirá um tópico referente a uma aplicação do tema na ciência da computação.

É importante lembrar que, assim como você, caro leitor curioso, o autor também se encontra no estado de "estudante lascado". Por isso, o desenvolvimento do material seguirá o insano ritmo de aprendizado de um universitário brasileiro.

Mais uma vez, vale ressaltar que o presente material não foi construído por professores ou qualquer outro indivíduo dotado de um título no campo da matemática, sendo unicamente uma paródia das notas de aula oficiais da disciplina de Matemática Elementar (IMD1001). O principal intuito desse documento é descontrair durante os estudos. Em hipótese nenhuma utilize esse artigo como única fonte de conhecimento.

Sumário

1 Conjuntos **1**

1.1 Introdução 1

1.2 Pertinência 1

1.3 Inclusão 2

1.4 Operações com Conjuntos 4

1.5 Bibliografia 6

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Introdução

Inicialmente, um *conjunto* pode ser considerado como uma coleção de elementos quaisquer. Dessa forma, um conjunto é definido unicamente por seus membros, que podem ser de qualquer tipo, incluindo outros conjuntos.

Temos ainda a definição trazida por Kenneth H. Rosen, em seu livro "Matemática Discreta e Suas Aplicações", que sugere o *conjunto* como uma coleção não ordenada de objetos onde os objetos nele contidos não são chamados de "membros do conjunto"e sim "elementos pertencentes ao conjunto", ressaltando a característica de pertencimento [11, pp. 111–112].

Em notação matemática, um *conjunto* pode ser representado por uma lista de elementos entre chaves, como, por exemplo, o conjunto $A = \{1, 2, 4\}$, formado pelos números inteiros 1, 2 e 4. Outro método que pode ser utilizado é a definição por sua lei de formação, como o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x = |x|\}$, que pode ser entendido como o conjunto de todos os elementos x's tal que x é igual ao módulo de x.

Um conjunto pode ainda ser descrito verbalmente por sentenças que definem seus elementos. Para esse caso podemos definir um conjunto A como *o conjunto dos números pares menores que 10*, compostos pelos números 2, 4, 6 e 8.

Nesta seção, além de definir suas propriedades, também estudaremos as operações e aplicações diretas que os *conjuntos* podem possuir na computação.

1.2 Pertinência

Quanto a teoria dos conjuntos, assunto abordado nesse capítulo, temos que a *pertinência* pode ser entendida como uma relação estabelecida entre um *objeto* e outro *conjunto*. Desde modo, a *pertinência* pode ser entendida como *"fazer parte de"*.

Para representar a pertinência, a notação matemática dispoe de dois simbolos, sendo o "$\in$" utilizado quando tratamos de uma relação de pertencimento e "$\notin$" quando temos o caso oposto.

Exemplo 1.1. Se x é um elemento e A é um conjunto, podemos dizer que "o número 2 pertence ao conjunto dos números pares" ou escrever $2 \in \{2, 4, 6, 8, ...\}$, para indicar que o número 2 faz parte do conjunto dos números pares.

Exemplo 1.2. Se x é um elemento e A é um conjunto, podemos dizer que "o número 3 não pertence ao conjunto dos números pares" ou escrever $3 \notin \{2, 4, 6, 8, ...\}$, para indicar que o número 3 não faz parte do conjunto dos números pares.

Observação. Note que não é correto afirmar que um elemento x que pertence a um conjunto A está "contido" ou é "parte" dele, uma vez que essa afirmação implica que o elemento x e o conjunto A são coisas distintas, indo contra a definição de *pertinência* (*"fazer parte de"*), já que um objeto que faz parte de um todo não pode diferir do seu conjunto.

A *pertinência* também está relacionada ao "nível" em que ocorre a interação. Desde modo, quando possuímos um conjunto A tal que $A = \{B, C\}$ não é correto afirmar que os elementos pertencentes aos conjuntos B e C também são pertencentes ao conjunto A, visto que o conjunto é estritamente formado apenas pelos conjuntos B e C. Essa característica pode ser melhor representada no exemplo a seguir:

Exemplo 1.3. Considere o conjunto $A = \{\{1, 2\}, \{2\}, 1\}$. Note que:

i) $\{1, 2\} \in A$

ii) $\{2\} \in A$

iii) $1 \in A$

iv) $2 \notin A$

Definição 1.4 (O Conjunto Vazio)**.** O conjunto vazio é um conjunto que contém nenhum elemento, representado em notação matemática por $\emptyset$ ou $\{\}$ em notação convencional. Podemos tomar o conjunto vazio como o conjunto base, uma vez que todos os conjuntos podem ser obtidos através dele. Posteriormente também veremos que ele está incluindo em todos os conjuntos.

1.3 Inclusão

A *inclusão* inicialmente estabelece uma relação de **subconjunto**, indicando quando um conjunto B está ou não incluído no conjunto A, utilizando "$\subset$" quando queremos dizer que B está *contido* em A. Também podemos utilizar a notação $B \supset A$ para situações onde o conjunto A está *contido* em B.

Em relações onde um conjunto A possui pelo menos um elemento que não está *incluído* em B, dizemos que $B \not\supset A$ ou $A \not\subset B$. Em outras palavras, existe um elemento x tal que $x \in A$ mas $x \notin B$.

Desse modo, podemos dizer que um conjunto A está incluído em B quando **todos** os elementos de A também são elementos de B.

Exemplo 1.5. Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$. Dada a afirmação anterior, podemos concluir que:

i) $\{a, b\} \subset A$

ii) $\{c, d\} \subset A$

iii) $\{e, c, f\} \not\subset A$

iv) $\{a, b, c, d\} \subset A$

O último item ainda traz uma segunda aplicação da relação de *inclusão*, denominada **igualdade**. Segundo a definição 3 do livro "Matemática Discreta e Suas Aplicações", escrito por Kenneth H. Rosen, dois conjuntos são iguais **se e somente se** possuem os mesmo elementos [11, pp. 113]. Desde modo, como o conjunto $\{a, b, c, d\}$ e A possuem estritamente os mesmos elementos, podemos concluir que $\{a, b, c, d\} = A$.

A relação de *inclusão* possui ainda outras propriedades, descritas a seguir:

Definição 1.6 (Propriedades da inclusão)**.** Para quaisquer conjuntos A, B e C, são válidas as propriedades a seguir:

i) *Reflexividade*: $A \subset A$;

ii) *Antissimetria*: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;

iii) *Transitividade*: Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Definição 1.7 (Inclusão Própria)**.** Dados A e B conjuntos, dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B quando $A \subset B$ mas $A \neq B$. Quando isso ocorre, utilizamos a notação $A \subsetneq B$.

Observação. Todas essas definições estão descritas nas notas de aulas com uma definição detalhada. A leitura do material original é fortemente encorajada.

Além dessas propriedades ainda possuímos a *inclusão universal do* $\emptyset$, uma relação de inclusão onde o conjunto vazio é incluído em todos os conjuntos. Essa relação de inclusão se aplica a todos os conjuntos, sem exceção. Logo, temos que o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto, independentemente de seus elementos.

Proposição 1.8 (Inclusão universal do $\emptyset$)**.** Para todo conjunto A, tem-se que o conjunto $\emptyset$ é subconjunto de A (em símbolos: $\emptyset \subset A$).

A *inclusão universal do* $\emptyset$ pode ser melhor explicada pelo *conjunto das partes*, formado por todos os **subconjuntos** de um determinado conjunto.

Definição 1.9 (Conjunto das Partes)**.** Dado um conjunto A, chamamos de *conjunto das partes* de A o conjunto formado por **todos** os seus subconjuntos, e denotamo-lo $\mathcal{P}(A)$. Em símbolos:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \; ; \; X \subset A\} .$$

Desse modo, como o conjunto $\emptyset$ é, por definição, o conjunto formado por **nenhum elemento**, ele também está inserido nos subconjutos de A.

Exemplo 1.10. Dado $A = \{1, 2, 3\}$, temos que o conjunto das partas de A é formado por **todos** os subconjuntos de A, logo, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, A\}$.

1.4 Operações com Conjuntos

Assim como na aritmética, também possuímos operações entre conjuntos, como a **união**, **interseção**, **diferença** e **complemento**. Na teoria dos conjuntos, cada operação resulta em um novo conjunto a partir dos conjuntos anteriores.

1.4.1 União

A *união* de dois ou mais conjuntos pode ser descrita como o **conjunto** formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos cojuntos. Matematicamente, a união é representada pelo símbolo "$\cup$". Desse modo, se temos um conjunto A e um outro B, a união pode ser dada por:

$$A \cup B = \{x \; ; \; x \in A \text{ ou } x \in B\} .$$

Observação. Note que x é elemento de $A \cup B$ apenas se $x \in A$ ou se $x \in B$.

1.4.2 Interseção

Chama-se *interseção* a operação que retorna um conjunto formado pelos elementos que estão simultaneamente presentes em ambos os conjuntos A e B. Em notação matemática a interseção é representada por "$\cap$" e também pode ser definido por:

$$A \cap B = \{x \; ; \; x \in A \text{ e } x \in B\} .$$

Observação. Diferente a *união*, aqui temos a necessidade de o x esteja presente em ambos os conjuntos A e B.

1.4.3 diferença

Chama-se *interseção* a operação que retorna um conjunto formado pelos elementos que estão simultaneamente presentes em ambos os conjuntos A e B. Em notação matemática a interseção é representada por "$\cap$" e também pode ser definido por:

Dado dois conjunto A e B, a *diferença* é o conjunto que contém os elementos de A que não estão contidos em B. Kenneth H. Rosen ainda define a *diferença* como *o complemento de B em relação a A* [11, pp. 123]. Posteriormente abordaremos a definição de complemento de um conjunto.

$$A \setminus B = \{x \; ; \; x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

1.4.4 Propriedades da união e interseção

As operações descritas anteriormente possui algumas propriedades que incluem o *conjunto universo*, denotado por $\mathcal{U}$. O *conjunto universo* pode ser definido como conjunto que contém todos os elementos relevantes para um determinado contexto ou problema. O conjunto universo geralmente é especificado antes de se definir outros conjuntos, utilizado como referência para os elementos que podem ser incluídos nos conjuntos relacionados.

Desde modo, para quaisquer conjuntos A, B e C, dado um *conjunto universo* $\mathcal{U}$, tem-se que:

i) *a)* $A \subset A \cup B$;
   b) $A \cap B \subset A$.

ii) União/interseção com o conjunto universo:
   a) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$;
   b) $A \cap \mathcal{U} = A$.

iii) União/interseção com o conjunto vazio:
   a) $A \cup \emptyset = A$;
   b) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

iv) *Comutatividade*:
   a) $A \cup B = B \cup A$;
   b) $A \cap B = B \cap A$.

v) *Associatividade*:
   a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

vi) *Distributividade*, de uma em relação à outra:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Observação. A demonstração de cada propriedade está disponível nas Notas de Aula da disciplina de Matemática Elementar[1, pp. 7 - 8].

1.5 Bibliografia

[1] Josenaldo A. da Silva Júnior Antonio I. S. de Oliveira Rafaela H. S. R. Soares e Giordano V. de O. F. Rodrigues. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6ª ed. AMGH Editora Ltda., 2010.

[5] Elon L. Lima. *Números e Funções Reais*. 1ª ed. SBM, 2013.

[6] Elon L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1*. 9ª ed. SBM, 2006.

[10] Krerley I. M. Oliveira e Adan J. C. Fernandez. *Iniciação em Matemática: um Curso com Problemas e Soluções*. 2ª ed. SBM, 2010.

[11] Kenneth H. Rosen. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6ª ed. AMGH Editora Ltda., 2010.