Sexta lista de exercícios.
Polinômios. Equações e inequações quadráticas. Função quadrática.

1. Efetue os produtos indicados.
   (a) $(x-4)(x+4)$.
   (b) $3x^2(4x-1)$.
   (c) $(x^2-2)(2x+5)$.
   (d) $(x^2+3)(x^2-2x+4)$.
   (e) $(x-4y)(5y-2x)$.
   (f) $(x^2+2y)(3x-2xy-y)$.
   (g) $(2x^2-\frac{1}{2})(x^2+3)$.
   (h) $(x^3+1)(x^4-3x^2+2)$.
   (i) $(x+1)(x-4)(x+2)$.
   (j) $(2w-3)(w-1)(3w+2)$.
   (k) $(x^2+3)(x^2-2)(2x^2-5)$.
   (l) $(a+2b)(3a-b)(2a+3b)$.

2. Expanda as expressões.
   (a) $(x+2)^2$.
   (b) $(x-3)^2$.
   (c) $(3x-1)^2$.
   (d) $(2w+5)^2$.
   (e) $(3-2y)^2$.
   (f) $(-2-x)^2$.
   (g) $(x+\sqrt{3})^2$.
   (h) $(\frac{x}{2}+2)^2$.
   (i) $(\frac{2}{x}+1)^2$.
   (j) $(\sqrt{2}x+1)^2$.
   (k) $(\sqrt{x}-2)^2$.
   (l) $(4-x^2)^2$.
   (m) $(x^2-x)^2$.
   (n) $(2x^2-y)^2$.
   (o) $(x^2+\sqrt{x})^2$.
   (p) $(x-2)^2(3-x)^2$.
   (q) $\left(\frac{x+3}{1-x}\right)^2$.

3. Expanda as expressões.
   (a) $(z-1)(z+1)$.
   (b) $(3x-2)(3x+2)$.
   (c) $(\frac{3x}{2}-\frac{1}{3})(\frac{3x}{2}+\frac{1}{3})$.
   (d) $(x-\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})$.
   (e) $(2-x)(x+2)$.
   (f) $(y^2-4)(y^2+4)$.
   (g) $(xy-z)(xy+z)$.
   (h) $(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})$.
   (i) $(2\sqrt{x}-\sqrt{5})(2\sqrt{x}+\sqrt{5})$.

4. Fatore as expressões.
   (a) $3x-6$.
   (b) $-4x-10$.
   (c) $5x^2+20x$.
   (d) $3x^2-9x$.
   (e) x^5-3x^3.
   (f) $xy-2x^2$.
   (g) $xy+x^2y^2$.
   (h) $xyz+2xy+3x$.
   (i) $4xy+8yz-12w^2y$.
   (j) $xy^2+y^5+3zy^3$.
   (k) $3(x-2)-4(x-2)$.
   (l) $y(x-2)+2(x-2)$.

5. Fatore o numerador e o denominador. Em seguida, simplifique as expressões.
   (a) $\frac{3y-12}{6y-18}$.
   (b) $\frac{2x-4}{3x-6}$.
   (c) $\frac{x^2y-xy^2}{xy}$.
   (d) $\frac{x^2y-xy^2}{x-y}$.

6. Fatore as expressões.
   (a) x^2-9.
   (b) x^2-25.
   (c) $4x^2-1$.
   (d) $36x^2-100$.
   (e) $16-49x^2$.
   (f) x^2-4y^2.

(g) $x^4 - x^2$.
(h) $x^2 - y^2$.
(i) $\frac{x^2}{25} - \frac{1}{4}$.
(j) $\frac{9x^2}{4} - \frac{1}{9}$.
(k) $x^2 - 3$.
(l) $x - 16$.

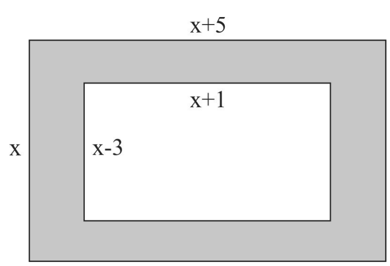
7. Fatore as expressões.

(a) $x^2 + 2x + 1$.
(b) $x^2 + 6x + 9$.
(c) $x^2 - 2xy + y^2$.
(d) $x^2 - 8x + 16$.
(e) $4x^2 - 4x + 1$.
(f) $9x^2 - 12x + 4$.

8. Fatore as expressões, colocando algum termo em evidência.

(a) $3x^2 + 6x + 3$.
(b) $2x^2 - 8x + 8$.
(c) $x^3 + 2x^2 + x$.
(d) $x^3 - 4x^2 + 4x$.

9. Calcule a área da região destacada na figura abaixo, lembrando que a área de um retângulo de lados b e h é bh.



10. Determine as raízes das equações.

(a) $x^2 - 4x = 0$.
(b) $5x^2 + x = 0$.
(c) $x^2 = 3x$.
(d) $2x^2 - 3x = 0$.
(e) $-3x^2 - \frac{x}{2} = 0$.
(f) $(x-2)^2 = 4^2$.
(g) $(2x-1)^2 = 25$.
(h) $(x+3)^2 = \frac{1}{9}$.
(i) $(\frac{x}{2}+1)^2 = \frac{9}{4}$.

11. Usando a fórmula de Bháskara, determine, quando possível, as raízes reais das equações.

(a) $x^2 - 6x + 8 = 0$.
(b) $x^2 - 2x - 15 = 0$.
(c) $x^2 + 4 = 0$.
(d) $x^2 + 6x + 9 = 0$.
(e) $x^2 + 8x + 12 = 0$.
(f) $2x^2 + 8x - 10 = 0$.
(g) $x^2 - 6x + 10 = 0$.
(h) $2x^2 - 7x - 4 = 0$.
(i) $6x^2 - 5x + 1 = 0$.
(j) $x^2 - 4x + 13 = 0$.
(k) $25x^2 - 20x + 4 = 0$.
(l) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$.
(m) $2x^2 - 2\sqrt{2}x - 24 = 0$.
(n) $3x^2 - 0,3x - 0,36 = 0$.
(o) $x^2 - 2,4x + 1,44 = 0$.
(p) $x^2 + 2x + 5 = 0$.

12. Dada a função $f(x) = x^2 - 3x$,

(a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;
(b) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = -2$;
(c) esboçe o gráfico da função no plano coordenado, indicando os pontos que você obteve no item (b);
(d) determine graficamente as soluções da inequação $f(x) \geq -2$.

13. Dada a função $f(x) = 5x - x^2$,

(a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;
(b) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 4$;
(c) esboçe o gráfico da função no plano coordenado, indique os pontos que você obteve no item (b);
(d) determine graficamente as soluções da inequação $f(x) \geq 4$.

14. Resolva as desigualdades abaixo.

(a) $x^2 + 2x > 3$.
(b) $x^2 \leq 9$.

(c) $-x^2 \leq -5$.

(d) $x^2 + x \leq 12$.

(e) $2x^2 \geq 20 - 6x$.

(f) $x^2 + 9x + 18 \leq 0$.

(g) $-3x^2 + 16x - 5 \leq 0$.

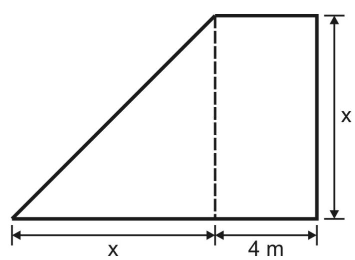
15. Identifique, no plano coordenado, as regiões definidas pelas desigualdades abaixo.

    (a) $y \geq x^2$.

    (b) $y = x^2 - 4$.

    (c) $y \leq 4 - x^2$.

16. Um terreno com $64m^2$ de área tem o formato mostrado na figura abaixo. Determine o valor de x. (Lembre-se que a área de um triângulo com base b e altura h é igual a $bh/2$ e a área de um retângulo de base b e altura h é igual a bh.)



17. Quando um paciente ingere comprimidos de um certo remédio, a concentração da droga na corrente sanguínea (em mg/l), após t minutos do momento da ingestão, é aproximada por $C(t) = 0,06t - 0,0002t^2$, em que $0 \leq t \leq 240$. Determine o instante em que a concentração é máxima e o valor dessa concentração (Stewart).

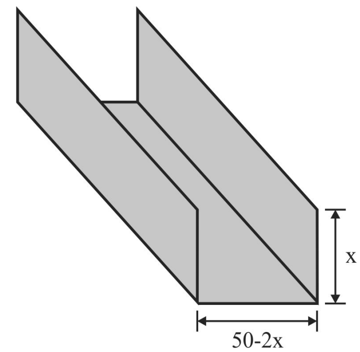
18. Durante um torneio paraolímpico de arremesso de peso, a altura (em metros) do peso lançado por um atleta seguiu a função $y(x) = -0,1x^2 + x + 1,1$, em que x é a distância horizontal percorrida pelo peso.

    (a) Determine de que altura o peso foi lançado.

    (b) Determine a altura máxima do peso e a que distância isso ocorreu.

    (c) Calcule a distância horizontal percorrida pelo peso.

19. Para produzir calhas, um fabricante dobra uma folha de metal com 50 cm de largura, como mostra a figura.



    (a) Determine a função $A(x)$ que fornece a área da seção transversal da calha em relação a x.

    (b) Determine o valor de x que maximiza a área da seção transversal.

20. Um promotor de eventos consegue vender 5.000 ingressos para o show da banda Reset se cada ingresso custar R$ 20,00. A cada R$ 1,00 de aumento no preço do ingresso, há uma redução de 100 pagantes. Responda às perguntas abaixo, supondo que x é a quantia, em reais, a ser acrescida ao valor do ingresso.

    (a) Exprima o preço do ingresso em função de x.

    (b) Exprima a quantidade de ingressos vendidos em função de x.

    (c) Determine a função $R(x)$ que fornece a receita do show, em relação a x. Lembre-se de que a receita é o produto do preço pela quantidade de ingressos vendidos.

    (d) Determine o valor do ingresso que maximiza a receita do show. Calcule a receita nesse caso.

    (e) Determine para quais valores de x a receita é maior ou igual a R$ 100.000,00.

21. Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a R$ 15,00 o quilograma. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada real de aumento no preço do quilo, o restaurante deixa de vender o equivalente a 5 kg de comida. Responda às perguntas abaixo, supondo que x é a quantia, em reais, a ser

acrescida ao valor atualmente cobrado pelo quilo da refeição, e definindo a receita do restaurante como o produto do preço pela quantidade de comida vendida.

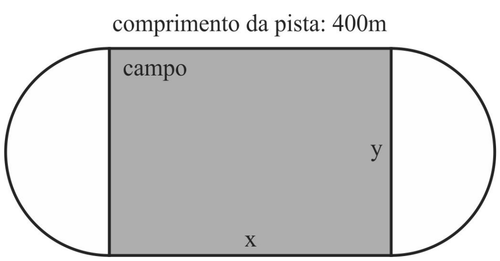
(a) Exprima o preço do quilo de comida, em função de x.

(b) Exprima a quantidade de comida vendida, em função de x.

(c) Escreva a função $R(x)$ que fornece a receita do restaurante em relação a x.

(d) Determine o valor de x que maximiza a receita do restaurante.

22. Uma pista de atletismo tem $400m$ de comprimento, e é formada por duas semicircunferências de raio $y/2$, ligadas por dois trechos retos de comprimento x. Como se observa na figura, no interior da pista há um campo retangular de dimensões x e y. Responda aos itens abaixo, lembrando que o comprimento da semicircunferência de raio r é dado por πr e que a área de um retângulo de lados x e y é xy.



(a) Usando o comprimento da pista, escreva x em função de y.

(b) Determine a função $A(y)$ que fornece a área do campo retangular, em relação a y.

(c) Determine analiticamente o valor de y que faz com que a área do campo seja a maior possível. Determine, também, a área para esse valor de y.

(d) Esboce o gráfico de $A(y)$, exibindo os pontos em que $A(y)$ cruza o eixo-x e o ponto de máximo.

23. Um artesão tem um arame com $8cm$ de comprimento, e pretende cortá-lo em duas partes, para formar dois quadrados (não necessariamente iguais). Suponha que um dos pedaços tenha comprimento x. Lembre-se que o perímetro de um quadrado de lado y é $4y$ e que sua área é y^2.

(a) Determine o comprimento do outro pedaço de arame, em relação a x.

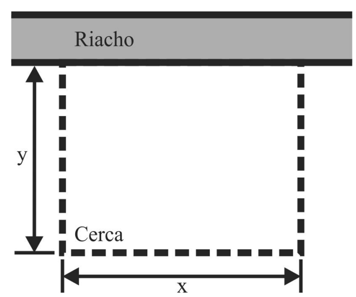
(b) Escreva uma função $A(x)$ que forneça a soma das áreas dos quadrados formados pelos dois pedaços de arame, em relação ao comprimento x.

(c) Determine o menor e o maior valor possível para x.

(d) Trace um gráfico da função $A(x)$ para x entre os valores que você encontrou no item (c) e determine em que intervalos ela é crescente e em quais é decrescente.

(e) Determine quanto devem medir os dois pedaços de arame para que a soma das áreas por eles cercadas seja a mínima possível.

24. Um fazendeiro pretende usar 500 m de cerca para proteger um bosque retangular às margens de um riacho, como mostra a figura abaixo. Repare que apenas três dos lados da região do bosque precisam ser cercados.



(a) Usando o comprimento da cerca, escreva o valor de y em função de x.

(b) Com base na expressão que você encontrou no item (a), escreva a função $A(x)$ que fornece a área cercada, com relação a x.

(c) Determine o valor de x que maximiza a área cercada. Determine também o valor de y e a área máxima.

(d) Trace o gráfico de $A(x)$.

25. Uma empresa fabricante de aparelhos que tocam músicas no formato MP3 pretende lançar um novo modelo de aparelho. Após uma pesquisa de mercado, ela descobriu que

o número de aparelhos a serem vendidos anualmente e o preço do novo modelo estão relacionados pela expressão $n = 115 - 0,25p$, em que n é o número de aparelhos (em milhares) e p é o preço de cada aparelho (em reais).

(a) Escreva uma função $R(p)$ que forneça a renda bruta obtida com a venda dos aparelhos, em relação ao preço p.

(b) Determine qual deve ser o preço do aparelho para que sejam vendidas, no mínimo, 80 mil unidades desse modelo.

(c) Determine o valor de p que maximiza a receita bruta da empresa.

26. Jogando em seu estádio, um clube de futebol consegue vender 10.000 ingressos por partida, se cobra R$ 10,00 por ingresso. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada real de redução do preço do ingresso, o clube ganha 2.000 novos espectadores em uma partida. Responda às perguntas abaixo, supondo que x é a quantia, em reais, a ser reduzida do valor atualmente cobrado pelo ingresso.

(a) Determine a função $R(x)$ que fornece a receita de uma partida, em relação a x. Lembre-se de que a receita é o produto do preço pela quantidade de ingressos vendidos.

(b) Determine o valor de x que maximiza a receita do clube em um jogo. Determine também o valor ótimo para o ingresso.

27. O Índice de Massa Corporal (IMC) é um indicador (um tanto discutível) da magreza ou obesidade de uma pessoa. O IMC é definido pela fórmula $IMC = p/a^2$ em que p é o peso (em kg) e a é a altura (em metros) da pessoa. A tabela abaixo fornece os intervalos de cada categoria do IMC. Observe que, seguindo a tradição, usamos "peso"em lugar do termo correto, que é "massa".

Classe	IMC
Subnutrido	$(0; 18,5)$
Saudável	$[18,5; 25)$
Acima do peso	$[25; 30)$
Obeso	$[30; 35)$
Severamente obeso	$[35; 40)$
Morbidamente obeso	$[40, \infty)$

(a) Determine as funções $p_1(a)$ e $p_2(a)$ que definem o peso em relação à altura, a, para um IMC de 18,5 e um IMC de 25, respectivamente. Observe que esses são os limites para uma pessoa ser considerada saudável.

(b) Trace em um gráfico as funções que você obteve no item (a), para $a \in [0;\ 2,2]$.

(c) Determine, analítica e graficamente, o intervalo de peso para que uma pessoa de 1,80 m de altura seja considerada saudável.

Respostas

1. a. $x^2 - 16$;
   b. $-3x^2 + 12x^3$;
   c. $-10 - 4x + 5x^2 + 2x^3$;
   d. $12 - 6x + 7x^2 - 2x^3 + x^4$;
   e. $-2x^2 + 13xy - 20y^2$;
   f. $3x^3 + 6xy - x^2y - 2x^3y - 2y^2 - 4xy^2$;
   g. $-\frac{3}{2} + \frac{11x^2}{2} + 2x^4$;
   h. $2 - 3x^2 + 2x^3 + x^4 - 3x^5 + x^7$;
   i. $-8 - 10x - x^2 + x^3$;
   j. $6 - w - 11w^2 + 6w^3$;
   k. $30 - 17x^2 - 3x^4 + 2x^6$;
   l. $6a^3 + 19a^2b + 11ab^2 - 6b^3$.

2. a. $4 + 4x + x^2$;
   b. $9 - 6x + x^2$;
   c. $1 - 6x + 9x^2$;
   d. $25 + 20w + 4w^2$;
   e. $9 - 12y + 4y^2$;
   f. $4 + 4x + x^2$;
   g. $3 + 2\sqrt{3}x + x^2$;
   h. $4 + 2x + x^2/4$;
   i. $1 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}$;
   j. $1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2$;
   k. $4 - 4\sqrt{x} + x$;
   l. $16 - 8x^2 + x^4$;
   m. $x^2 - 2x^3 + x^4$;
   n. $4x^4 - 4x^2y + y^2$;

o. $x + 2x^(5/2) + x^4$;
p. $36 - 60x + 37x^2 - 10x^3 + x^4$;
q. $\frac{3}{1-x} + \frac{x}{1-x}$.

3. a. $-1 + z^2$; b. $-4 + 9x^2$;
c. $-\frac{1}{9} + \frac{9x^2}{4}$; d. $-\frac{1}{x^2} + x^2$;
e. $4 - x^2$; f. $-16 + y^4$;
g. $x^2y^2 - z^2$; h. $-3 + z^2$;
i. $-5 + 4x$.

4. a. $3(x-2)$;
b. $-2(5+2x)$;
c. $5x(x+4)$;
d. $3x(x-3)$;
e. $x^3(x^2-3)$;
f. $-x(2x-y)$;
g. $xy(1+xy)$;
h. $x(3+2y+yz)$;
i. $-4y(3w^2-x-2z)$;
j. $y^2(x+y^3+3yz)$;
k. $2-x$;
l. $(x-2)(2+y)$.

5. a. $\frac{y-4}{2(y-3)}$; b. $\frac{2}{3}$;
c. $x-y$; d. xy.

6. a. $(x-3)(x+3)$;
b. $(x-5)(x+5)$;
c. $(2x-1)(2x+1)$;
d. $4(3x-5)(3x+5)$;
e. $(4-7x)(4+7x)$;
f. $(x-2y)(x+2y)$;
g. $(x-1)x^2(x+1)$;
h. $(x-y)(x+y)$;
i. $\frac{1}{100}(2x-5)(2x+5)$;
j. $\frac{1}{36}(9x-2)(9x+2)$;
k. $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$;
l. $(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)$.

7. a. $(x+1)^2$; b. $(x+3)^2$;
c. $(x-y)^2$; d. $(x-4)^2$;
e. $(2x-1)^2$; f. $(3x-2)^2$.

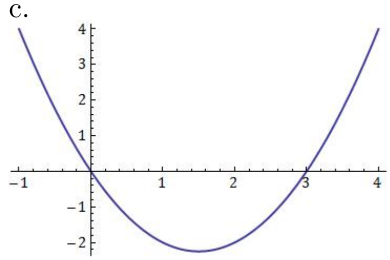
8. a. $3(x+1)^2$; b. $2(x-2)^2$;
c. $x(x+1)^2$; d. $x(x-2)^2$.

9. $3 + 7x$.

10. a. $x = 0$ e $x = 4$;
b. $x = 0$ e $x = -1/5$;
c. $x = 0$ e $x = 3$;
d. $x = 0$ e $x = 3/2$;
e. $x = 0$ e $x = -1/6$;
f. $x = -2$ e $x = 6$;
g. $x = -2$ e $x = 3$;
h. $x = -10/3$ e $x = -8/3$;
i. $x = -5$ e $x = 1$.

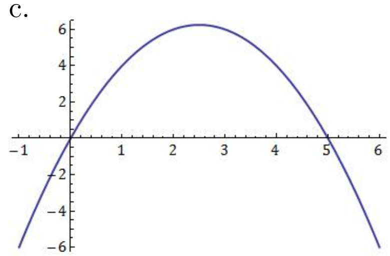
11. a. $x = 2$ e $x = 4$;
b. $x = -3$ e $x = 5$;
c. Não há solução real;
d. $x = -3$;
e. $x = -2$ e $x = -6$;
f. $x = -5$ e $x = 1$;
g. Não há solução real;
h. $x = -1/2$ e $x = 4$;
i. $x = 1/2$ e $x = 1/3$;
j. Não há solução real;
k. $x = 2/5$;
l. $x = \sqrt{5}$;
m. $x = -2\sqrt{2}$ e $x = 3\sqrt{2}$;
n. $x = -0,3$ e $x = 0,4$;
o. $x = 1,2$;
p. Não há solução real.

12. a. $x = 0$ e $x = 3$;
b. $x = 1$ e $x = 2$;
c.



d. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$.

13. a. $x = 0$ e $x = 5$;
b. $x = 1$ e $x = 4$;
c.

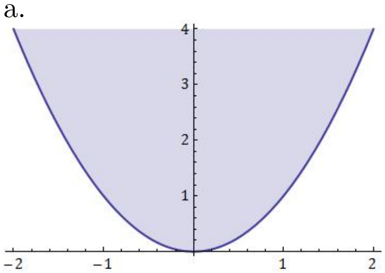


d. $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$.

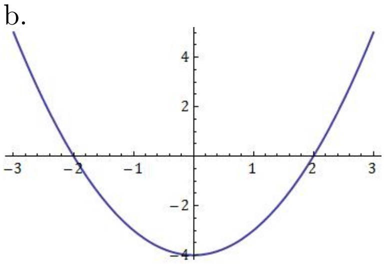
14. a. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 1\}$.
b. $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$.
c. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{5} \text{ ou } x \geq \sqrt{5}\}$.
d. $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 3\}$.
e. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x \geq 2\}$.

f. $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq -3\}$.
g. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1/3 \text{ ou } x \geq 5\}$.

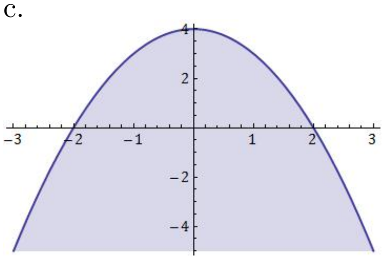
15. a.



b.



c.



16. $x = 8$.

17. $t = 150$ min. $C(150) = 4,5$ mg/l.

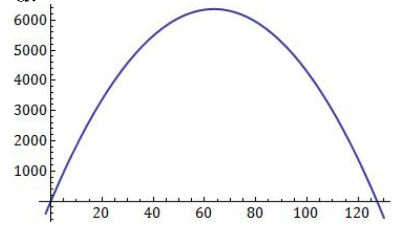
18. a. 1,1 m. b. 5 m. c. 11 m.

19. a. $A(x) = x(50 - 2x)$; b. 12,5 cm.

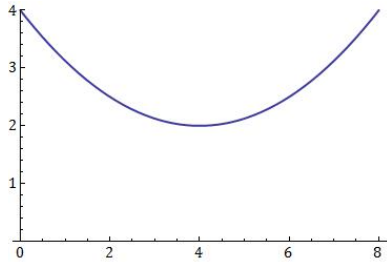
20. a. $20 + x$;
b. $5000 - 100x$;
c. $R(x) = (20 + x)(5000 - 100x)$;
d. R\$ 35,00. Receita: R\$ 122.500,00;
e. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 30\}$.

21. a. $P(x) = 15 + x$;
b. $Q(x) = 100 - 5x$;
c. $R(x) = (15 + x)(100 - 5x)$;
d. R\$ 17,50.

22. a. $x = 200 - \pi y/2$;
b. $A(y) = 200y - \pi y^2/2$;
c. $200/\pi\ m$. Área: $20.000/\pi\ m^2$.
d.

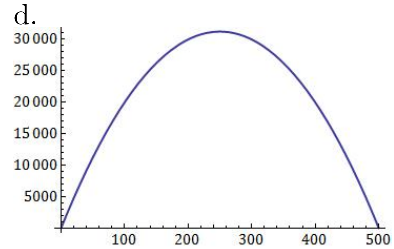


23. a. $8 - x$;
b. $A(x) = x^2/8 - x + 4$;
c. $0 \leq x \leq 8$;
d.



e. A área é mínima quando os dois pedaços medem 4 cm.

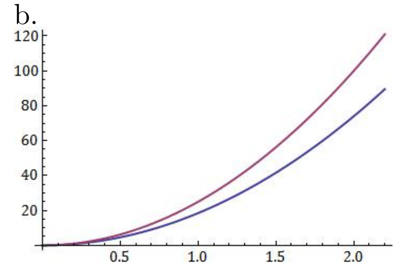
24. a. $y = (500 - x)/2$;
b. $A(x) = -1/2x^2 + 250x$;
c. $x = 250m$, $y = 125m$, $A(250) = 31250m^2$.
d.



25. a. $R(p) = 115p - 0,25p^2$;
b. $p \leq 140$ reais;
c. R\$ 230,00.

26. a. $R(x) = -2000x^2 + 10000x + 100000$;
b. $x = 2,5$. Valor do ingresso R\$ 7,50.

27. a. $p_1(a) = 18,5a$; $p_2(a) = 25a$;
b.



c. $59,94$ kg $\leq p \leq 81$ kg.