Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Teoria dos Números - Nível 2

Samuel Barbosa Feitosa

Aula 1

Divisibilidade I

Teorema 1. *(Algoritmo da Divisão) Para quaisquer inteiros positivos a e b, existe um único par (q, r) de inteiros não negativos tais que $b = aq + r$ e $r < a$. Os números q e r são chamados de quociente e resto, respectivamente, da divisão de b por a.*

Exemplo 2. *Encontre um número natural N que, ao ser dividido por 10, deixa resto 9, ao ser dividido por 9 deixa resto 8, e ao ser dividido por 8 deixa resto 7.*

O que acontece ao somarmos 1 ao nosso número? Ele passa a deixar resto 0 na divisão por $10, 9$ e 8. Assim, um possível valor para N é $10 \cdot 9 \cdot 8 - 1$.

Exemplo 3. *a) Verifique que $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$*

b) Calcule o resto da divisão de 4^{2012} por 3.

Para o item a), usando a distributividade e efetuando os devidos cancelamentos no lado direito, podemos escrever:

$$a^n + a^{n-1} + \ldots + a^2 + a - a^{n-1} - a^{n-2} - \ldots - a - 1 = a^n - 1.$$

Para o item b), veja que $3 = 4 - 1$ e assim é natural substituir os valores dados na expressão do primeiro item:

$$4^{2012} - 1 = 3(4^{2011} + \ldots + 4 + 1).$$

Isso significa que $q = (4^{2011} + \ldots + 4 + 1)$ e que $r = 1$.

Observação 4. *O teorema anterior admite um enunciado mais geral: Para quaisquer inteiros a e b, com $a \neq 0$, existe um único par de inteiros (q, r) tais que $b = aq + r, 0 \leq r < |a|$. Por exemplo, o resto da divisão de -7 por -3 é 2 e o quociente é 3.*

Iremos agora estudar propriedades a respeito das operações com restos.

Teorema 5. *(Teorema dos Restos) Se b_1 e b_2 deixam restos r_1 e r_2 na divisão por a,respectivamente, então:*

$$b_1 + b_2 \text{ deixa o mesmo resto que } r_1 + r_2 \text{ na divisão por } a$$
$$b_1 b_2 \text{ deixa o mesmo resto que } r_1 r_2 \text{ na divisão por } a.$$

Demonstração. Por hipótese, existem q_1, q_2 e q tais que: $b_1 = aq_1 + r_1$, $b_2 = aq_2 + r_2$ e $r_1 + r_2 = aq + r$, logo:

$$b_1 + b_2 = a(q_1 + q_2 + q) + r.$$

Como $0 < r < |a|$, $b_1 + b_2$ deixa resto r quando dividido por a. A demonstração para o produto é deixada ao cargo do leitor. □

Observação 6. *Em alguns casos, é preferível que o professor faça uma demonstração do resultado anterior para $a = 3$ ou $a = 5$ apenas com o intuito de deixar os alunos mais confortáveis a respeito do resultado. É preferível que mais tempo seja gasto resolvendo exemplos e problemas. Na seção de congruências, os alunos terão um contato mais apropriado com o enunciado anterior.*

Exemplo 7. *Qual o resto que o número $1002 \cdot 1003 \cdot 1004$ deixa quando dividido por 7?*

Como 1002 deixa resto 1 por 7, o número acima deixa o mesmo resto que $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ por 7.

Exemplo 8. *Qual o resto que o número 4^{5000} deixa quando dividido por 3?*

Como 4 deixa resto 1 por 3, 4^{5000} deixa o mesmo resto que $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{5000} = 1$ por 3.

Exemplo 9. *Qual o resto que o número 2^{2k+1} deixa quando dividido por 3?*

Note que 2^0 deixa resto 1 por 3, 2^1 deixa resto 2 por 3, 2^2 deixa resto 1 por 3, 2^3 deixa resto 2 por 3, 2^4 deixa resto 1 por 3. Precebeu alguma coisa? Como 100 é par, o resto deverá ser 1. Como 2^2 deixa resto 1, então $2^{2k} = \underbrace{2^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^2}_{k}$ deixa o mesmo resto que $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{k} = 1$ e $2^{2k+1} = 2^{2k} \cdot 2$ deixa o mesmo resto que $1 \cdot 2 = 2$ por 3.

Exemplo 10. *Qual o resto de $n^3 + 2n$ na divisão por 3?*

Se o resto de n por 3 é r, o resto de $n^3 + 2n$ é o mesmo de $r^3 + 2r$. Para $r = 0$, esse resto seria 0. Para $r = 1$, seria o mesmo resto de 3 que é 0. Finalmente, para $r = 2$, o resto seria o mesmo de $8 + 4 = 12$ que também é 0. Assim, não importa qual o resto de n por 3, o número $n^3 + 2n$ sempre deixará resto 0. Uma ideia importante nessa solução foi dividí-la em casos. Também poderíamos ter resolvido esse exemplo apelando para alguma fatoração:

$$n^3 + 2n = n^3 - n + 3n = n(n^2 - 1) + 3n = n(n-1)(n+1) + 3n.$$

Como $n-1, n$ e $n+1$ são consecutivos, um deles é múltiplo de 3. Assim, o último termo da igualdade anterior é a soma de dois múltiplos de 3 e consequentemente o resto procurado é 0.

Observação 11. *Fatorações podem ser muito úteis para encontrarmos os valores explícitos de q e r.*

Exemplo 12. *Prove que, para cada n natural,*

$$(n+1)(n+2)\dots(2n)$$

é divisível por 2^n.

Veja que

$$(n+1)(n+2)\dots(2n) = \frac{1\cdot 2\cdots 2n}{1\cdot 2\cdots n}.$$

Para cada número natural k no produto escrito no denominador, temos uma aparição de $2k$ no produto escrito no numerador. Basta efetuarmos os cancelamentos obtendo:

$$(n+1)(n+2)\dots(2n) = 2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1).$$

Exemplo 13. *(Olimpíada de Leningrado 1991) Cada um dos naturais a, b, c e d é divisível por $ab-cd$, que também é um número natural. Prove que $ab-cd=1$.*

Se chamarmos $p = ab-cd$, teremos $a = px, b = py, c = pz$ e $d = pt$ onde x, y, z e t são inteiros. Assim, $p = p^2(xy-zt)$. Consequentemente $1 = p(xy-zt)$ e concluímos que $p = 1$, pois p é natural.

Exemplo 14. *A soma digital $D(n)$ de um inteiro positivo n é definida recursivamente como segue:*

$$D(n) = \begin{cases} n & se\ \ 1\le n\le 9,\\ D(a_0+a_1+\ldots+a_m) & se\ \ n>9,\end{cases}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_m$ são todos os dígitos da expressão decimal de n na base 10, i.e.,

$$n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

Por exemplo, $D(989) = D(26) = D(8) = 8$. Prove que: $D((1234)n) = D(n)$, para $n = 1, 2, 3\ldots$

Como $10^n - 1^n = (10-1)(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+1)$, podemos concluir que 10^n sempre deixa resto 1 na divisão por 9. Assim, $n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, deixa o mesmo resto que $a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0$ na divisão por 9. Desse modo, $D(n)$ nada mais é do que o resto na divisão por 9 do número n. Como 1234 deixa resto 1 por 9, o número $(1234)n$ deixa o mesmo resto que $1\cdot n$ por 9, ou seja, $D((1234)n) = D(n)$.

Observação 15. *O exemplo anterior contém o critério de divisibilidade por 9, i.e., n deixa o mesmo resto que $D(n)$ na divisão por 9. O critério de divisibilidade por 3 é análogo pois 10^n também sempre deixa resto 1 por 3.*

Exemplo 16. *Encontre todos os pares de inteiros positivos a e b tais que $79 = ab + 2a + 3b$.*

Fatoremos a expressão anterior. Somando 6 aos dois lados da equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 85 &= 6 + ab + 2a + 3b \\ &= (3+a)(2+b) \end{aligned}$$

Assim, $(3+a)$ e $(2+b)$ são divisores positivos de 85 maiores que 1. Os únicos divisores positivos de 85 são $1, 5, 19, 85$. Logo, os possíveis pares de valores para $(3+a, 2+b)$ são $(5, 19)$ ou $(19, 5)$ que produzem as soluções $(a, b) = (2, 17)$ e $(16, 3)$.

Problema 17. *(Olimpíada Russa) Prove que se* $\dfrac{2^n - 2}{n}$ *é um inteiro, então* $\dfrac{2^{2^n-1} - 2}{2^n - 1}$ *também é um inteiro.*

Se $k = \dfrac{2^n - 2}{n}$, então

$$\begin{aligned} \frac{2^{2^n-1} - 2}{2^n - 1} &= \frac{2(2^{2^n-2} - 1)}{2^n - 1} \\ &= 2\left(\frac{2^{nk} - 1}{2^n - 1}\right) \\ &= 2\left(\frac{(2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 2^n + 1)}{2^n - 1}\right) \\ &= 2(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 2^n + 1), \end{aligned}$$

é um número inteiro.

Problemas Propostos

Problema 18. *Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.*

Problema 19. *Determinar os números que divididos por 17 dão um resto igual ao quadrado do quociente correspondente.*

Problema 20. *(OCM 1985) Encontre o quociente da divisão de* $a^{128} - b^{128}$ *por*

$$(a^{64} + b^{64})(a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)$$

Problema 21. *(OCM 1994) Seja* $A = 777\ldots77$ *um número onde o dígito "7"aparece 1001 vezes. Determinar o quociente e o resto da divisão de* A *por 1001.*

Problema 22. *Encontre um inteiro que deixa resto* 4 *na divisão por* 5 *e resto* 7 *na divisão por* 13

Problema 23. *Encontre o menor inteiro que, dividido por 29 deixa resto 5, e dividido por 31 dá resto 28.*

Problema 24. *Prove que, para todo inteiro positivo* n *o número* $n^5 - 5n^3 + 4n$ *é divisível por* 120.

Problema 25. *(Fatorações Importantes)*

a) Seja $S = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}$. *Veja que* $S + z^n = 1 + zS$ *então* $S(z-1) = z^n - 1$. *Conclua que, para quaisquer* x *e* y *vale:*

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

b) Mostre que se n *é ímpar vale:*

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Problema 26. *Prove que, o número* $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$ *é múltiplo de* 5.

Problema 27. *Mostre que o número* $1^n + 8^n - 3^n - 6^n$ *é multiplo de 10 para todo natural* n.

Problema 28. *Encontre o resto da divisão* $37^{10} - 1$ *por 11.*

Problema 29. *Prove que* $2222^{5555} + 5555^{2222}$ *é divisível por 7.*

Problema 30. *Encontre o último dígito do número* 1989^{1989}.

Problema 31. *Mostre que se* n *divide* a *então* $2^n - 1$ *divide* $2^a - 1$.

Problema 32. *(Cone Sul 1996) Provar que o número*

$$\frac{1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1}{1996^2}$$

é um inteiro.

Problema 33. *Mostre que para* n *ímpar,* n *divide* $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$

Problema 34. *Existe um natural* n *tal que* $n^n + (n+1)^n$ *é divisível por 2011?*

Problema 35. *Quantos números inteiros positivos* n *existem tais que* $n+3$ *divide* $n^2 + 7$*?*

Problema 36. *Encontre o número de inteiros* n *tais que*

1. $1000 < n < 8000$.
2. $n^{n+1} + (n+1)^n$ *é divisível por 3.*

Problema 37. *Sejam* m *e* n *naturais tais que* $mn + 1$ *é múltiplo de* 24, *mostre que* $m + n$ *também é múltiplo de* 24.

Problema 38. *(Irlanda 1997) Encontre todos os pares de inteiros* (x, y) *tais que* $1+1996x+1998y = xy$.

Dicas e Soluções

18. Os números são $\{0, 8, 16, 24, \ldots, 8 \cdot 7\}$.

18. Escreva $n = 17q + q^2$ e note que $0 \leq q^2 < 17$. Assim, $q = 0, 1, 2, 3, 4$.

19. Use a diferença de quadrados sucessivas vezes para obter $(a - b)$ como quociente.

21. O número do problema é igual a $\frac{7(10^{1001}-1)}{9}$. Além disso, $\frac{10^{999}+1}{10^3+1}$ é inteiro e $\frac{10^{1001}-1}{10^3+1} = 100 \cdot \frac{10^{999}+1}{10^3+1} - \frac{100}{10^3+1}$.

22. Os números que satisfazem essa propriedade são os números da forma $65k + 59$.

24. Basta mostrar que $n^5 - 5n^3 + 4n$ é múltiplo de $3, 8$ e 5. Na divisão por 5, temos quatro restos possíveis: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Assim, o número $n^5 - 5n^3 + 4n$ possui o mesmo resto na divisão por 5 que um dos cinco números: $\{0^5 - 5 \cdot 0^3 + 40, 1^5 - 5 \cdot 1^3 + 4, 2^5 - 5 \cdot 2^3 + 8, 3^5 - 5 \cdot 3^3 + 12, 4^5 - 5 \cdot 4^3 + 16\}$. Como todos esses números são múltiplos de 5, segue que $n^5 - 5n^3 + 4n$ é múltiplo de 5 para todo n inteiro. O procedimento com 3 e 8 é semelhante.

25. Para o item a), troque z por $\frac{x}{y}$. Para o item b), substitua y por $-y$ no item anterior.

26. Pelo problema anterior, como 99 é ímpar temos: $1^{99} + 4^{99} = (1 + 4)(1^{98} + 1^{97} \cdot 4 + \ldots + 1 \cdot 4^{97} + 4^{98})$. Daí, segue que $1^{99} + 4^{99}$ é múltiplo de 5. Analogamente podemos mostrar que $2^{99} + 3^{99}$ é múltiplo de 5.

27. O número em questão é mútiplo de 2 pois é a soma de dois ímpares e dois pares. Para ver que também é múltiplo de 5, basta notar que 5 divide $1^n - 6^n$ e $8^n - 3^n$. Isso pode ser facilmente mostrado usando a fatoração do exercício 25.

31. Se $a = nk$, temos $(2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 2^n + 1) = 2^{nk} - 1$.

32. Veja que $1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1 = 1995 \cdot (1997^{1996} - 1) - 1996 \cdot (1997^{1995} - 1)$. Pela fatoração de $x^n - y^n$,

$$\frac{1996 \cdot (1997^{1995} - 1)}{1996^2} = (1997^{1994} + 1997^{1993} + \ldots + 1),$$

é inteiro. Além disso, pela mesma fatoração,

$$\frac{1995 \cdot (1997^{1996} - 1)}{1996^2} = 1995 \cdot \left(\frac{1997^{1995} - 1}{1996} + \frac{1997^{1994} - 1}{1996} + \ldots + \frac{1997 - 1}{1996} + \frac{1996}{1996} \right),$$

é uma soma de números inteiros.

33. Como n é impar,

$$(n-i)^n + i^n = ((n-i)+i)((n-i)^{n-1} - (n-i)^{n-2}i + \ldots - (n-i)i^{n-2} + i^{n-1}).$$

34. Faça $n = 1005$ e use a fatoração de $x^n + y^n$.

37. Fatore a expressão como:

$$(x-1998)(y-1996) = xy - 1998y - 1996x + 1998 \cdot 1996 = 1997^2.$$

Os divisores de 1997^2 são $\{\pm 1, \pm 1997, \pm 1997^2\}$. Resolvendo os sistemas correspondentes à essas possibilidades, temos: $(x,y) = (1999, 1997^2 + 1996), (1997, -1997^2 + 1996), (3995, 3993), (1, -1), (1997^2 + 1998, 1997), (-1997^2 + 1998, 1995)$.

Referências

[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[2] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.

[3] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

[4] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.

[5] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.

[6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.

Divisibilidade II

Definição 1. *Dados dois inteiros a e b, com $a \neq 0$, dizemos que a divide b ou que a é um divisor de b ou ainda que b é um múltiplo de a e escrevemos $a \mid b$ se o r obtido pelo algoritmo de divisão aplicado à a e b é 0, ou seja, se $b = aq$ para algum inteiro q.*

Lema 2. *Sejam a, b, c, d inteiros. Temos*

i) ("d divide") Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid ax + by$ para quaisquer x e y inteiros.

ii) ("Limitação") Se $d \mid a$, então $a = 0$ ou $|d| \leq |a|$.

iii) (Transitividade) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

Em particular, segue da propriedade *i*) que $d \mid a + b$ e $d \mid a - b$.

Exemplo 3. *(Olimpíada de Maio 2006) Encontre todos os naturais a e b tais que $a|b + 1$ e $b|a + 1$.*

Pela propriedade da Limitação, temos $a \leq b + 1$ e $b \leq a + 1$. Daí, $a - 1 \leq b \leq a + 1$. Vejamos os casos:

(i) $a = b$. Como $a|b + 1$ e $a \mid b$(pois $b = a$) temos que $a \mid [(b + 1) - b] = 1$. Assim, $a = 1$ Nesse caso, só temos a solução $(a, b) = (1, 1)$

(ii) $a = b + 1$. Como $b|a + 1$ e $b|a - 1$(pois $b = a - 1$) temos que $b|[(a + 1) - (a - 1)] = 2$. Assim, $b = 1$ ou $b = 2$ e nesse caso, só temos as soluções $(3, 2)$ e $(2, 1)$.

(iii) $a = b - 1$. Esse caso é análogo ao anterior e as soluções para (a, b) são $(1, 2)$ e $(2, 3)$.

Exemplo 4. *(Critério de Divisibilidade por 7) Existem alguns métodos práticos para decidirmos se um número é múltiplo de outro. Certamente o leitor já deve ter se deparado com algum critério de divisibilidade. Existe um critério por 7 bastante popular: Para saber se um inteiro é multiplo de 7, basta apagar seu último dígito, multiplicá-lo por 2 e o subtrair do número que restou. Se o resultado é múltiplo de 7, então o número original também é múltiplo de 7.*

Podemos aplicar esse algoritmo sucessivas vezes até que o resultado obtido seja facilmente verificável como um múltiplo de 7. Por exemplo, para o número 561421 podemos escrever:

$$\begin{aligned} 56142 - 2 &= 56140 \\ 5614 - 0 &= 5614 \\ 561 - 8 &= 553 \\ 55 - 6 &= 49 \end{aligned}$$

Como 49 é múltiplo de 7, nosso número original também é. Por que esse processo funciona? Se o nosso número original está escrito na forma $10a + b$, então o número obtido após a operação descrita é $a - 2b$. Basta mostrarmos que se $7 \mid a - 2b$, então $7 \mid 10a + b$. Se $7 \mid a - 2b$, pela propriedade (i) do lema, concluímos que $7 \mid 10a - 20b$. Como $7 \mid 21b$, também temos que $7 \mid [(10a - 20b) + 21b] = 10a + b$.

Exemplo 5. *Mostre que se* $7 \mid 3a + 2b$ *então* $7 \mid 4a - 2b$.

Veja que $7 \mid 7a$ e $7 \mid 3a + 2b$, então $7 \mid [7a - (3a + 2b)] = 4a - 2b$. Na prática, o que fizemos foi multiplicar o número $3a + 2b$ por algum inteiro para posteriormente subtraímos um múltiplo de 7 conveniente e obtermos o número $4a - 2b$. Existem outras formas de fazermos isso. Observe os números $3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6$. O número $3 \cdot 6$ deixa o mesmo resto que 4 por 7, pois $3 \cdot 6 = 7 \cdot 2 + 4$. Como $7 | 3a + 2b$ podemos concluir que $7 | (18a + 12b)$ e consequentemente $7 \mid [18a + 12b - 14a)] = 4a + 12b$. Mas $7 \mid 14b$, então $7 \mid [4a + 12b - 14b] = 4a - 2b$.

Para o proximo exemplo, o leitor precisará lembrar dos critérios de divisibilidade por 9 e 3 vistos na aula passada.

Exemplo 6. *Usando os dígitos* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, *construímos vários números de sete dígitos distintos. Existem dois deles, distintos, tais que um divide o outro?*

Não. Suponha, por absurdo, que $m < n$ sejam dois desses números, com $m \mid n$. Claramente $m \mid n - m$ e $9 \mid n - m$, pois n e m possuem a mesma soma dos dígitos e consequentemente possuem o mesmo resto na divisão por 9. Por outro lado, sabemos a soma dos dígitos de m: $1 + 2 + \cdots + 7 = 3 \cdot 9 + 1$. Daí, m não possui fator 9 e podemos garantir que $9m \mid n - m$. Mas então $9m \leq n - m \Rightarrow 10m \leq n \Rightarrow n$ tem pelo menos oito dígitos, uma contradição.

Exemplo 7. *(Leningrado 1989) Seja A um número natural maior que 1, e seja B um número natural que é um divisor de $A^2 + 1$. Prove que se $B - A > 0$, então $B - A > \sqrt{A}$.*

Seja $B - A = q$. Assim, $A + q \mid A^2 + 1$. Como $(A - q)(A + q) = A^2 - q^2$ é divisível por $A + q$, podemos concluir que $A + q \mid [(A^2 + 1) - (A^2 - q^2)] = q^2 + 1$. Pela propriedade de limitação, $A + q \leq q^2 + 1$. Nessa desigualdade, não podemos ter $q = 1$ pois $A > 1$. Usando então que $q > 1$, temos $A \leq q^2 - q + 1 < q^2$, ou seja, $\sqrt{A} < q$.

Problema 8. *(AIME 1986) Qual é o maior inteiro n para o qual $n^3 + 100$ é divisível por $n + 10$?*

Para achar explicitamente o quociente de n^3+100 por $n+10$ podemos fazer uso de alguma fatoração. Utilizaremos a soma dos cubos $n^3+10^3=(n+10)(n^2-10n+100)$. Como,

$$n^3+100=(n+10)(n^2-10n+100)-900,$$

podemos concluir que o número 900 deve ser múltiplo de $n+10$. O maior inteiro n para o qual $n+10$ divide 900 é 890. Veja que se $n=890$, o quociente da divisão de n^3+100 por $n+10$ é $n^2-10n+100-1=890^2-10\cdot 890+99$.

Exemplo 9. *(Extraído de [1]) Encontre todos os inteiros positivos n tais que $2n^2+1 \mid n^3+9n-17$.*

Utilizando o "$2n^2+1$ divide" para reduzir o grau de $n^3+9n-17$, temos que

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2n^2+1 \mid n^3+9n-17 \\ 2n^2+1 \mid 2n^2+1 \end{cases} \\ \Longrightarrow\ & 2n^2+1 \mid (n^3+9n-17)\cdot 2+(2n^2+1)\cdot(-n) \\ \Longleftrightarrow\ & 2n^2+1 \mid 17n-34 \end{aligned}$$

Como o grau de $17n-34$ é menor do que o de $2n^2+1$, podemos utilizar a "limitação" para obter uma lista finita de candidatos a n. Temos $17n-34=0 \iff n=2$ ou $|2n^2+1|\le|17n-34| \iff n=1,4$ ou 5. Destes candidatos, apenas $n=2$ e $n=5$ são soluções.

Exemplo 10. *(Leningrado 1990) Sejam a e b números naturais tais que b^2+ba+1 divide a^2+ab+1. Prove que $a=b$.*

Pela propriedade de limitação, $b^2+ba+1\le a^2+ab+1$ e daí $b\le a$. Além disso, $b^2+ab+1>a-b$. A igualdade $b(a^2+ab+1)-a(b^2+ba+1)=b-a$ implica que $a-b$ é divisível por b^2+ba+1. Se $a-b\neq 0$, então $b^2+ab+1\le a-b$. Mas isso é um absurdo, logo $a-b=0$.

Problemas Propostos

Problema 11. *Mostre que se $3 \mid a+7b$ então $3 \mid a+b$.*

Problema 12. *Mostre que se $7 \mid a+3b$ então $\mid 13a+11b$*

Problema 13. *Mostre que se $19 \mid 3x+7y$ então $19 \mid 43x+75y$*

Problema 14. *Mostre que se $17 \mid 3a+2b$ então $17 \mid 10a+b$*

Problema 15. *Encontre todos os inteiros positivos n tais que $n+2009$ divide n^2+2009 e $n+2010$ divide n^2+2010.*

Problema 16. *Seja $n>1$ e k um inteiro positivo qualquer. Prove que $(n-1)^2|(n^k-1)$ se, e somente se , $(n-1)|k$.*

Problema 17. *(OBM 2005) Prove que a soma $1^k + 2^k + \ldots + n^k$, onde n é um inteiro e k é ímpar, é divisível por $1 + 2 + \ldots + n$.*

Problema 18. *O número de seis dígitos $X = \overline{abcdef}$ satisfaz a propriedade de que $\overline{abc} - \overline{def}$ é divisível por 7. Prove que X também é divisível por 7.*

Problema 19. *(Bielorússia 1996) Inteiros m e n, satisfazem a igualdade*

$$(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}.$$

a) Prove que $m+n$ é um quadrado perfeito.

b) Encontre todos os pares (m, n) satisfazendo a equação acima.

Problema 20. *(Olimpíada de Leningrado) Os números naturais a,b e c têm a propriedade que a^3 é divisível por b, b^3 é divisível por c e c^3 é divisível por a. Prove que $(a+b+c)^{13}$ é divisível por abc.*

Problema 21. *(OBM 2000) É possível encontrar duas potências de 2, distintas e com o mesmo número de algarismos, tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra? (Dica: Lembre-se do critério de divisibilidade por 9)*

Problema 22. *(IMO 1998) Determine todos os pares de inteiros positivos (x, y) tais que $xy^2 + y + 7$ divide $x^2y + x + y$.*

Dicas e Soluções

11. Como $3 \mid 6b$, segue que $3 \mid [(a+7b) - 6b] = a + b$.

12. Como $7 \mid a + 3b$, segue que $7 \mid 13a + 39b = (13a + 11b) + 28b$. Mas $7 \mid 28b$, portanto $7 \mid [(13a + 11b) + 28b - 28b] = 13a + 11b$.

13. Como $19 \mid 3x + 7y$, segue que $19 \mid 27(3x + 7y) = (43x + 75y) + (38x + 114y)$. Mas $19 \mid 19(2x + 6y)$, portanto $19 \mid [(43x + 75y) + (38x + 114y) - 19(2x + 6y)] = 43x + 75y$.

14. Como $17 \mid 3a + 2b$, segue que $17 \mid 27a + 18b = (10a + b) + 17(a + b)$.

16. Veja que

$$\frac{n^k - 1}{(n-1)^2} = \left(\frac{n^{k-1} - 1}{n-1} + \frac{n^{k-2} - 1}{n-1} + \ldots + \frac{n-1}{n-1} + \frac{k}{n-1}\right).$$

Como os números $\frac{n^l - 1}{n-1}$ sempre são inteiros, o número do lado esquerdo da equação será inteiro se, e somente se, o número $\frac{k}{n-1}$ for inteiro.

17. Comece dividindo o problema quando em dois casos: n é par ou n é ímpar. Sabemos que $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Para n ímpar, basta mostrar que o número em questão é divisível por n e $\frac{n+1}{2}$. O próximo passo é lembrar do problema 33 da aula 1. Pela fatoração de $x^n + y^n$, temos que $i^k + (n-i)^k$ é divisível por n. Faça outros tipos de pares para mostrar a divisibilidade por $\frac{n}{2}$. O caso quando n é par é análogo.

18. Veja que $X = 10^3 \cdot \overline{abc} + \overline{def} = 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{def})$. Como 1001 é multiplo de 7, concluímos que X é a soma de dois múltiplos de 7.

19. Somando $4mn$ em ambos os lados, obtemos:

$$\begin{aligned}(m+n)^2 &= \frac{4mn}{m+n-1} + 4mn \\ &= \frac{4mn(m+n)}{m+n-1} \Rightarrow \\ (m+n) &= \frac{4mn}{m+n-1} \\ &= (m-n)^2.\end{aligned}$$

Assim, $m+n$ é o quadrado de um inteiro. Se $m-n=t$, então $m+n=t^2$ e $(m,n) = (\frac{t^2+t}{2}, \frac{t^2-t}{2})$. É fácil verificar que para qualquer t inteiro esse par é solução do problema.

20. Analise a expansão pelo binômio de Newton.

21. Não. Suponha, por absurdo, que existam duas potências de 2, $2^m < 2^n$, satisfazendo o enunciado. Como 2^n é um múltiplo de 2^m, podemos ter: $2^n = 2\cdot 2^m, 4\cdot 2^m, 8\cdot 2^m, \ldots$. Além disso, como ambos possuem a mesma quantidade de dígitos, temos $1 < \frac{2^n}{2^m} < 10$. Assim, as únicas possibilidade são $2^n = 2\cdot 2^m, 4\cdot 2^m, 8\cdot 2^m$. Pelo critério de divisibilidade por 9, como 2^m e 2^n possuem os mesmos dígitos, podemos concluir que $2^n - 2^m$ é um múltiplo de 9. Entretanto, nenhuma das possibilidade anteriores satisfaz essa condição e chegamos em um absurdo.

22. Começaremos usando a ideia do exemplo 10. A igualdade $y(x^2y+x+y) - x(xy^2+y+7) = y^2 - 7x$ implica que $y^2 - 7x$ é divisível por xy^2+y+7. Se $y^2-7x \geq 0$, como $y^2 - 7x < xy^2+y+7$, segue que $y^2 - 7x = 0$. Assim, $(x,y) = (7t^2, 7t)$ para algum $t \in \mathbb{N}$. É fácil checar que esses pares são realmente soluções. Se $y^2 - 7x < 0$, então $7x - y^2 > 0$ é divisível por xy^2+y+7. Daí, $xy^2+y+7 \leq 7x - y^2 < 7x$, que nos permite concluir que $y \leq 2$. Para $y=1$, temos $x+8 \mid 7x-1$ e consequentemente $x+8 \mid 7(x+8) - (7x-1) = 57$. Então as únicas possibilidades são $x = 11$ e $x = 49$, cujos pares correspondentes são $(11,1), (49,1)$. Para $y=2$, temos $4x+9 \mid 7x-4$ e consequentemente $7(4x+9) - 4(7x-4) = 79$ é divisível por $4x+9$. Nesse caso, não obtemos nenhuma solução nova. Todas as soluções para (x,y) são: $(7t^2, 7t)(t \in \mathbb{N}), (11,1)$ e $(49,1)$.

Referências

[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[2] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.

[3] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

[4] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.

[5] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.

[6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.