

Décima lista de exercícios.**Funções inversas.**

1. Determine se as funções são injetoras.
 - a) $f(x) = 4 - 2x$.
 - b) $f(x) = \sqrt{x}$.
 - c) $f(x) = 1 - x^2$.
 - d) $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. Determine as funções inversas, bem como o domínio e a imagem dessas funções.
 - a) $f(x) = 3x - 2$.
 - b) $f(x) = \sqrt{9 - x}$.
 - c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$.
 - d) $f(x) = \sqrt[3]{x + 4}$.
 - e) $f(x) = 1/x^2$, para $x > 0$.
 - f) $f(x) = \frac{x-5}{3}$.
 - g) $f(x) = \frac{5}{x+1}$.
 - h) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.
 - i) $f(x) = 1 + x^2$, para $x \geq 0$.
3. Uma piscina com 10 m de comprimento, 5 m de largura e 2 m de profundidade contém apenas 10 m^3 de água. Uma bomba com vazão de $2,5 \text{ m}^3/\text{h}$ é usada para encher a piscina.
 - a) Escreva a função $v(h)$ que fornece o volume da piscina (em m^3), em relação à altura do nível d'água (em m). Lembre-se que o volume de um prisma retangular reto com dimensões x, y e z é dado por xyz .
 - b) Escreva a inversa da função do item (a), ou seja, a função $h(v)$ que fornece a altura do nível d'água em relação ao volume de água da piscina, v (em m^3).
 - c) Escreva a função $v(t)$ que fornece o volume da piscina em relação ao tempo, em horas, contado a partir do momento em que a bomba é ligada.
 - d) Escreva a função $h(t)$ que fornece o nível d'água da piscina em relação ao tempo.
 - e) Determine o instante em que a piscina estará suficientemente cheia, o que ocorrerá quando seu nível d'água atingir 1,8 m.
4. Uma loja de automóveis criou uma promoção, válida apenas nessa semana. Todos os carros da loja estão com 10% de desconto sobre o preço de tabela do fabricante. Além disso, depois de calculado o desconto, o cliente ainda tem uma redução de R\$ 900,00 sobre o preço do carro.
 - a) Escreva uma função $P(x)$ que forneça o valor que o cliente pagará pelo carro, nessa semana, em relação ao preço de tabela, x .
 - b) Determine a função inversa de $P(x)$ e indique o que essa função representa.
 - c) Esboce o gráfico da função inversa de $P(x)$.
 - d) Se você tem exatamente R\$ 27.000,00, determine o preço de tabela do carro mais caro que você consegue comprar à vista.
5. Para converter uma temperatura dada em graus Fahrenheit (F) para graus Celsius (C), usamos a fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.
 - a) Escreva uma função $F(C)$ que converta para Fahrenheit, uma temperatura C dada em graus Celsius.
 - b) Trace o gráfico de $C(F)$ para F entre -50 e 250 .
 - c) No mesmo plano coordenado usado no item (b), trace o gráfico de $F(C)$ para C entre -50 e 120 .
 - d) Determine em que temperatura a medida em Celsius e Fahrenheit é a mesma. (Dica: determine o valor C tal que $F(C) = C$.)
 - e) Mostre esse ponto no gráfico de $F(C)$.
6. Como empregado de uma loja de roupas, você ganha R\$ 50,00 por dia, além de uma comissão de cinco centavos para cada real que consegue vender. Assim, seu rendimento diário é dado pela função $f(x) = 50 + 0,05x$.
 - a) Determine a inversa de f e descreva o que a inversa representa.

- b) Determine quantos reais você deve vender em um único dia para receber R\$ 80,00 de remuneração pelo trabalho desse dia.

7. Dada a tabela abaixo, esboce o gráfico da inversa de $f(x)$.

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	1,5	4	6,5	9	11,5

8. Para cada função abaixo, restrinja o domínio de modo que a função seja injetora. Determine, então a inversa da função para o domínio escolhido.

a) $f(x) = (x - 2)^2$.

b) $f(x) = |x|$.

9. Use a propriedade das funções inversas para mostrar que g é a inversa de f e vice-versa.

a) $f(x) = \frac{3x-1}{5}$ e $g(y) = \frac{5y+1}{3}$.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(y) = y^3$.

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(y) = \frac{1}{y}$.

d) $f(x) = 2 - x^5$ e $g(y) = \sqrt[5]{2 - y}$.

10. Pelo aluguel de um determinado modelo de carro, uma locadora de automóveis cobra R\$ 50,00 por dia, além de R\$ 0,50 por quilômetro rodado.

- a) Escreva a função $C(x)$ que fornece o custo diário do aluguel para quem pretende percorrer x km em um dia.
- b) Determine a função inversa de $C(x)$. O que essa função representa?
- c) Usando a função inversa, determine quantos quilômetros é possível rodar em um mesmo dia com R\$ 175,00 e com R\$ 350,00.

11. Dada a função $z(x) = \frac{400-25x}{80-2x}$

- a) Determine para que valores de x temos $z(x) \leq 0$.
- b) Determine a função inversa de $z(x)$.
- c) Determine o domínio de $z(x)$ e o de sua inversa.

12. Uma loja possui um programa de recompensa para clientes fiéis. A cada real gasto em compras, o cliente ganha 10 pontos do programa de fidelidade. Depois de juntar muitos pontos, é possível trocá-los por

mercadorias da própria loja. Suponha que Marta já tenha 2000 pontos.

- a) Escreva uma função $B(x)$ que forneça o número de pontos de Marta, em relação ao valor x , seu gasto na loja a partir de hoje.
- b) Determine a função inversa de $B(x)$. indique o que essa função representa.
- c) Determine quanto Marta ainda precisa gastar na loja para poder levar uma calça que vale 10000 pontos.

Respostas.

1.a. Sim; b. Sim; c. Não; d. Sim.

2.a. $f^{-1}(y) = \frac{2+y}{3}$; $D: \mathbb{R}$; $Im: \mathbb{R}$;

2.b. $f^{-1}(y) = 9 - y^2$; $D: \{y|y \geq 0\}$; $Im: \{x|x \leq 9\}$.

2.c. $f^{-1}(y) = y^2 - 1$; $D: \{y|y \geq 0\}$; $Im: \{x|x \geq -1\}$.

2.d. $f^{-1}(y) = y^3 - 4$; $D: \mathbb{R}$; $Im: \mathbb{R}$.

2.e. $f^{-1}(y) = 1/\sqrt{y}$; $D: \{y|y > 0\}$; $Im: \{x|x > 0\}$.

2.f. $f^{-1}(y) = 5 + 3y$; $D: \mathbb{R}$; $Im: \mathbb{R}$.

2.g. $f^{-1}(y) = \frac{5-y}{y}$; $D: \{y|y \neq 0\}$; $Im: \{x|x \neq -1\}$.

2.h. $f^{-1}(y) = \frac{1+2y}{y-1}$; $D: \{y|y \neq 1\}$; $Im: \{x|x \neq 2\}$.

2.i. $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$; $D: \{y|y \geq 1\}$; $Im: \{x|x \geq 0\}$.

3.a. $v(h) = 50h$; b. $h(v) = v/50$;

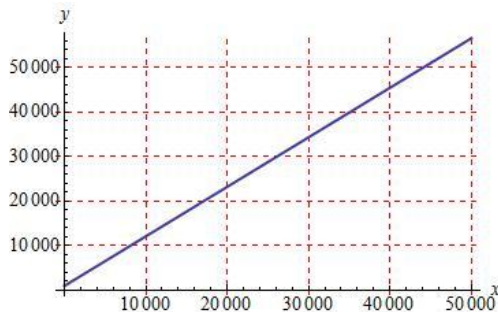
3.c. $v(t) = 10 + 2,5t$; d. $h(t) = h(v(t)) = \frac{10+2,5t}{50}$;

3.e. 32 horas.

4.a. $P(x) = 0,9x - 900$; b. $P^{-1}(y) = \frac{y+900}{0,9}$;

A inversa fornece o custo original do carro que se pode comprar, nessa semana, com y reais.

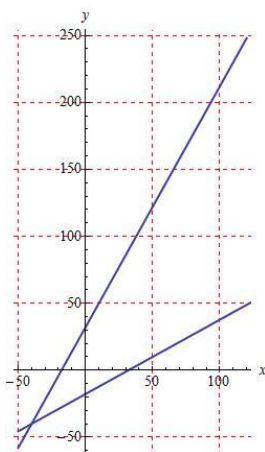
4.c.



4.d. R\$ 31.000,00

5.a. $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$;

5.b,c.

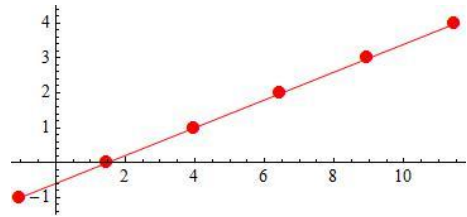


5.d. $-40^\circ\text{C} = -40^\circ\text{F}$.

6.a. $f^{-1}(y) = 20y - 1000$. Essa função fornece o quanto você deve vender por dia (em reais) para que seu rendimento diário seja igual a y.

6.b. R\$ 600,00.

7.



8.a. $D(f) = \{x|x \geq 2\}$; b. $D(f) = \{x|x \geq 0\}$

9. ...

10.a. $C(x) = 50 + 0,5x$;

10.b. $C^{-1}(y) = 2y - 100$. Essa função fornece a distância que se pode percorrer, por dia, com y reais.

10.c. $C^{-1}(175) = 250$; $C^{-1}(300) = 500$.

11.a. $16 \leq x \leq 40$.

11.b. $z^{-1}(y) = \frac{80y-400}{2y-25}$.

11.c. $D(z) = \{x|x \neq 40\}$; $D(z^{-1}) = \{y|y \neq \frac{25}{2}\}$.

12.a. $B(x) = 2000 + 10x$.

12.b. $B^{-1}(y) = \frac{y}{10} - 200$. A função fornece o quanto Marta deve gastar na loja para conseguir y pontos do programa de fidelidade.

12.c. $B^{-1}(10000) = 800$ reais.