Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2

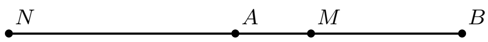
Prof. Rodrigo Pinheiro

Aula 3

Teorema de Tales e Aplicações

Divisão Harmônica

Dizemos que os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento AB quando $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$.

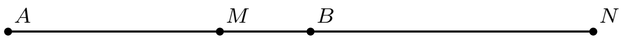


Como $\frac{MA}{MB} = k = \frac{NA}{NB}$, os pontos M e N dividem o segmento AB na mesma razão. Estes pontos são chamados conjugados harmônicos de AB na razão k.

Problema 1. Prove que em uma divisão harmônica com $k > 1$, temos que:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$$

Solução.



$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \Rightarrow \frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AN - AB}$$

$$\Rightarrow AM(AN - AB) = AN(AB - AM) \Rightarrow AM.AN - AM.AB = AN.AB - AM.AN$$

$$\Rightarrow 2.AM.AN = AN.AB + AM.AB \Rightarrow \frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$$

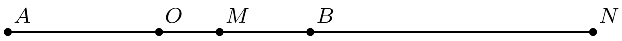
Problema 2. Prove que em uma divisão harmônica com $k < 1$, temos que:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}$$

Problema 3. Sendo O o ponto médio de AB em uma divisão harmônica, prove que:

$$OA^2 = OM.ON$$

Solução.

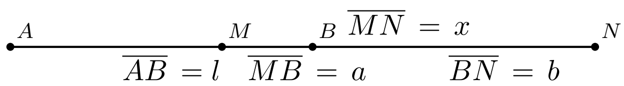


$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \Rightarrow \frac{OM + OA}{OB - OM} = \frac{ON + OA}{ON - OB}$$

Como $OB = OA$, temos que:

$$(OM + OA)(ON - OA) = (ON + OA)(OA - OM) \Rightarrow$$
$$OM.ON - OM.OA + ON.OA - OA^2 = ON.OA - OM.ON + OA^2 - OM.OA \Rightarrow$$
$$OA^2 = OM.ON$$

Problema 4. Sejam M e N conjugados harmônicos na razão $k > 1$ do segmento $AB = l$. Qual é a distância entre os divisores harmônicos de AB?
Solução.



$$\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow \frac{1-a}{a} = k \Rightarrow 1 - a = a.k \Rightarrow a = \frac{1}{k+1}$$
$$\frac{NA}{NB} = k \Rightarrow \frac{1+b}{b} = k \Rightarrow 1 + b = b.k \Rightarrow a = \frac{1}{k-1}$$

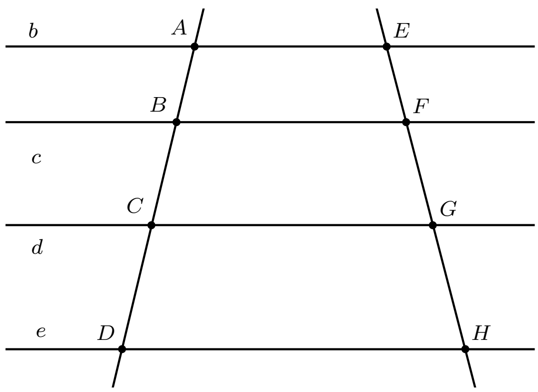
Portanto,

$$x = a + b \Rightarrow x = \frac{2k.l}{k^2 - 1}$$

Problema 5. Sejam M e N conjugados harmônicos na razão $k < 1$ do segmento $AB = l$. Qual é a distância entre os divisores harmônicos de AB?

Teorema de Tales

Teorema 1. Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, r e s, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em r é igual a à razão entre os segmentos correspondentes em s.



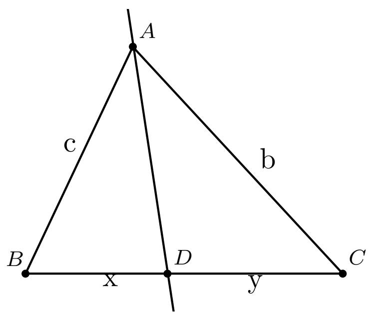
Se b, c, d e e são retas paralelas cortadas pelas transversais r e s, então:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{EG} = \frac{BD}{FH} = \frac{AD}{EH}$$

Teorema da bissetriz interna

Teorema 2. A bissetriz interna de um ângulo interno de um triângulo determina sobre o lado oposto ao ângulo dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

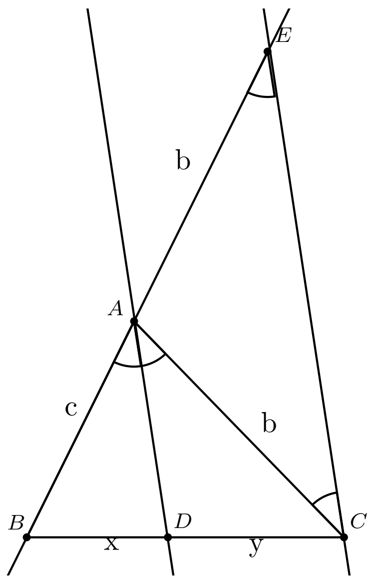
Assim, por exemplo, a bissetriz interna do ângulo A do triângulo ABC divide o lado BC em dois segmentos x e y tais que:



$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

Demonstração. Traçamos por C um reta paralela a bissetriz interna AD, e seja E a interseção dessa paralela com o prolongamento da reta AB. Pela propriedade de paralelismo, temos que $\angle BAD = \angle BEC$ e $\angle DAC = \angle ACE$, como AD é bissetriz, concluímos que $\angle ACE = \angle AEC$, portanto $\triangle ACE$ é isósceles, com $AE = AC = b$. Sendo assim, pelo teorema de tales, temos que:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

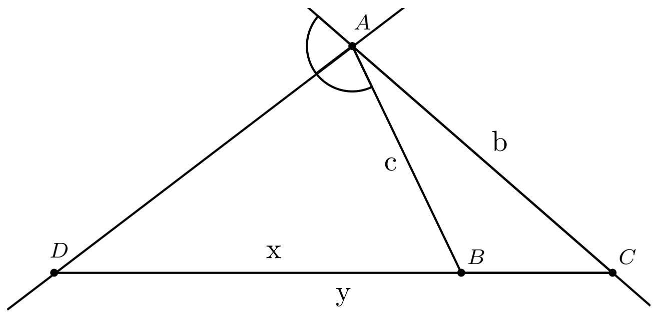


Teorema da bissetriz externa

Teorema 3. A bissetriz externa de um ângulo de um triângulo determina sobre o lado oposto ao ângulo dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Assim, por exemplo, a bissetriz externa do ângulo A do triângulo ABC determina sobre o lado BC dois segmentos x e y tais que:

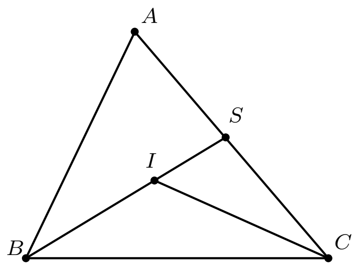
$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$



Demonstração. Analogo ao teorema da bissetriz interna.

Problema 6. Seja ABC um triângulo tal que $AB = 6$, $AC = 7$ e $BC = 8$. Tome $S \in AC$ onde BS é bissetriz do ângulo B e tome $I \in BS$ tal que CI é bissetriz do ângulo C, determine a razão $\frac{BI}{IS}$.

Solução.



Seja $SC = x$. Temos então que $AS = 7 - x$. Pelo teorema da bissetriz interna no triângulo ABC temos que:

$$\frac{6}{8} = \frac{AS}{SC} = \frac{7-x}{x} \Rightarrow 6x = 56 - 8x \Rightarrow x = 4$$

Pelo teorema da bissetriz interna no triângulo BSC, temos que:

$$\frac{BI}{IS} = \frac{8}{x} = 2$$

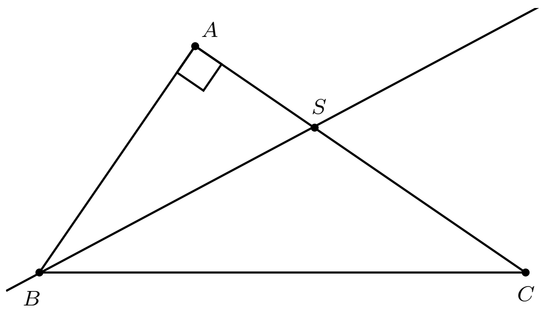
Problema 7. Seja ABC um triângulo retângulo em A, com hipotenusa $BC = 30$ e $AC - AB = 6$. Calcule o comprimento da bissetriz BS.
Solução. Seja $AC = x$ e $AB = y$, então temos que: $x - y = 6$ e $x^2 + y^2 = 900$ pelo teorema de pitágoras. Isolando x na primeira equação e substituindo na segunda, teremos que:

$$(y+6)^2 + y^2 = 900 \Rightarrow y^2 + 6y - 432 = 0$$

onde teremos as raízes 18 e -24, portanto, $y = 18$, assim $x = 24$, como BS é bissetriz, pelo teorema da bissetriz interna, teremos que:

$$\frac{18}{30} = \frac{AS}{24 - AS} \Rightarrow AS = 9$$

Pelo teorema de pitágoras, teremos que: $BS^2 = 18^2 + 9^2 \Rightarrow BS = 9.\sqrt{5}$.



Problema 8. Sendo AS e AP bissetrizes dos ângulos internos e externos em A, determine o valor de CP, sabendo que $BS = 8$ e $CS = 6$.

Problema 9. Seja ABC um triângulo de lados a, b, c opostos aos vértices A, B, C, respectivamente. Se $D \in BC$ tal que AD é bissetriz interna, mostre que $BD = \frac{ac}{b+c}$ e $CD = \frac{ab}{b+c}$.

Problema 10. O incentro do triângulo ABC divide a bissetriz interna do ângulo A na razão $AI : ID = 2 : 1$. Mostre que os lados do triângulo estão em progressão aritmética.

Problema 11. (Círculo de Apolonius) Seja k um número real positivo, $k \neq 1$. Mostre que o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $PA : PB = k$ é uma circunferência cujo centro pertence à reta AB.

Problema 12. Em um triângulo ABC, $BC = 7$, $\frac{AB}{BC} = 3$. Calcule o valor da altura relativa ao lado a sabendo que ela é máxima.

Problema 13. Em um triângulo ABC, $BC = 16$ e a altura relativa ao lado BC é 8. Calcule a razão $\frac{AB}{AC}$ sabendo que ela é máxima.

Problema 14. Os comprimentos dos lados de um triângulo são os inteiros $x - 1$, x e $x + 1$ e seu maior ângulo é o dobro do menor. Determine o valor de x.

Problema 15. Em um triângulo ABC, de lados $AB = 12$, $AC = 8$ e $BC = 10$, encontre o maior segmento que a bissetriz interna de A determina sobre BC.

Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2

Prof. Rodrigo Pinheiro

Aula 4

Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais. Sendo k a razão entre os lados homólogos, k é chamado de razão de semelhança. Observe que se $k = 1$, então os triângulos são congruentes. Igualmente a congruência de triângulos, temos os casos de semelhança.

1° **Caso:** Se dois triângulos têm congruentes dois a dois os três ângulos internos, então esses dois triângulos são semelhantes.

2° **Caso:** Se dois triângulos têm dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.

3° **Caso:** Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

Teorema 1. Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo, então o triângulo que ele determina é semelhante ao primeiro.

Demonstração. Basta ver que eles têm os mesmo ângulos por paralelismo.

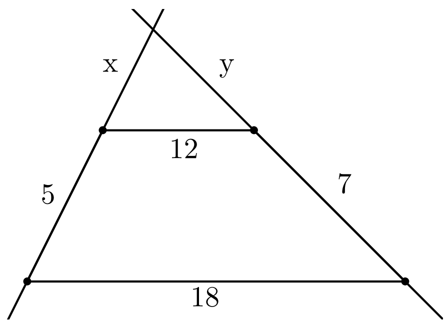
Observação 1: Se dois triângulos são semelhantes na razão k, então também é igual a k:

- a razão entre as alturas
- a razão entre as medianas
- a razão entre as bissetrizes, etc.

Observação 2: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes (na razão k) é igual a k^2.

Problema 1. As bases de um trapézio medem $12m$ e $18m$ e os lados oblíquos às bases medem $5m$ e $7m$. Determine o perímetro do triângulo menor que obtemos ao prolongar os lados oblíquos às bases.

Solução.



Como as bases do trapézio são paralelas, teremos que os dois triângulos são semelhantes, portanto:

$$\frac{x}{x+5} = \frac{12}{18} = \frac{y}{7+y} \Rightarrow$$

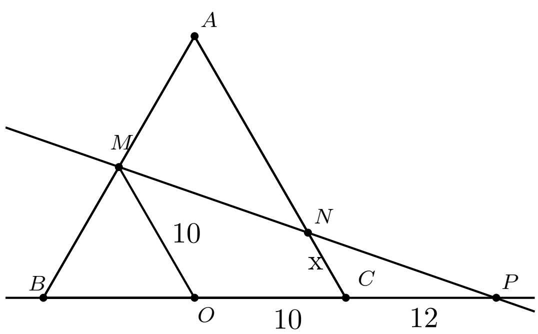
$18x = 12x + 90$ e $18y = 12y + 84$, então: $x = 15$ e $y = 14$, assim, o perímetro será $15 + 12 + 14 = 41$

Problema 2. Num triângulo ABC, os lados medem $AB = 4cm$, $BC = 5cm$ e $AC = 6cm$. Calcule os lados de um triângulo semelhante a ABC cujo perímetro mede $20cm$.
Solução. Sejam x, y e z os lados do triângulo. Como os dois triângulos são semelhantes, então:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{4+5+6} = \frac{20}{15} \Rightarrow$$

$x = 16/3$, $y = 20/3$ e $z = 8$.

Problema 3. Seja ABC um triângulo eqüilátero de lado 20. Uma reta passando pelo ponto médio M do lado AB corta o lado AC no ponto N e o prolongamento do lado BC no ponto P, de tal modo que $CP = 12$. Determine o comprimento de CN e NA.
Solução.



Tomemos O como sendo o ponto médio de BC. Como MO é base média, temos que $MO = 10$ e MO é paralelo a AC, assim o triângulo NCP é semelhante a MOP, então:

$$\frac{x}{10} = \frac{12}{22} \Rightarrow x = \frac{60}{11}$$

.

Problema 4. Sejam D e E pontos sobre os lados AB e AC do triângulo ABC. Sendo $BC = 22cm$, $AD = 8cm$, $DB = 3cm$, $AE = 5cm$ e $\angle ABE = \angle ACD$, calcule o comprimento de DE.

Problema 5. Considere a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Seja AE um diâmetro dessa circunferência e AD a altura do triângulo. Sendo $AB = 6cm$, $AC = 10cm$ e $AE = 30cm$, calcule AD.

Problema 6. Calcule o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC sabendo que $AB = 4$, $AC = 6$ e a altura AH relativa ao lado BC é igual a 3.

Problema 7. (Base média de um triângulo) Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos lados AB e AC do triângulo ABC. O segmento MN é chamado de base média, relativa ao lado BC. Mostre que MN é paralela a BC e que $MN = \frac{BC}{2}$.

Problema 8. Sejam $ABCD$ um trapézio com AB paralelo a CD, M e N os pontos médios dos lados oblíquos AD e BC. Use o exercício anterior para concluir que $MN = \frac{AB+CD}{2}$.

Problema 9. No triângulo ABC, a bissetriz interna do ângulo $\angle A$ encontra BC em D. A reta por B, perpendicular a AD, encontra AD em E. Seja M o ponto médio do lado BC. Se $AB = 26$, $BC = 28$ e $AC = 30$, ache os comprimentos de DM e ME.

Problema 10. No triângulo ABC, Z é um ponto sobre o lado AB. Uma reta por A e paralela a CZ, encontra BC em X; uma reta por B e paralela a CZ encontra AC em Y. Mostre que $\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} = \frac{1}{CZ}$.

Problema 11. Seja P um ponto no interior do triângulo eqüilátero ABC. Por P traçamos três retas paralelas aos lados de ABC, determinando três triângulos menores, de áreas 4, 9 e 49. Determine a área do triângulo ABC.

Problema 12. Duas circunferências c_1 e c_2 interceptam-se em dois pontos A e B. Construa um segmento PQ pelo ponto B com uma extremidade sobre c_1 e a outra sobre c_2 de modo que PQ seja o maior possível.

Problema 13. Os lados de um triângulo ABC medem $AB = 6$, $AC = 9$ e $BC = 11$. Se J é o ponto de tangência do círculo ex-inscrito relativo ao lado AB. Sabendo que JL é paralelo a BC (com L sobre o lado AC), determine o comprimento do segmento AL.

Problema 14. Seja C_1 a circunferência inscrita num triângulo ABC cujo perímetro mede $18cm$. Uma tangente a C_1 é paralela a um dos lados do triângulo e mede $2cm$. Quais os possíveis valores do lado ao qual esta tangente é paralela?

Polos Olímpicos de Treinamento

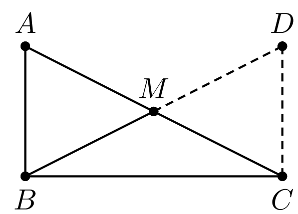
Curso de Geometria - Nível 2

Prof. Cícero Thiago

Aula 5

Algumas propriedades importantes de triângulos

Propriedade 1. Num triângulo retângulo ABC, a mediana BM relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa AC.



Demonstração. Seja D o ponto sobre o prolongamento da mediana BM tal que $BM = MD$. Os triângulos AMB e CMD são congruentes, pelo caso LAL. Daí, $AB = CD$ e $\angle BAM = \angle DCM$, ou seja, AB e CD são segmentos iguais e paralelos e portanto

$$\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ.$$

Assim, os triângulos ABC e DCB são congruentes, pelo caso LAL, e portanto

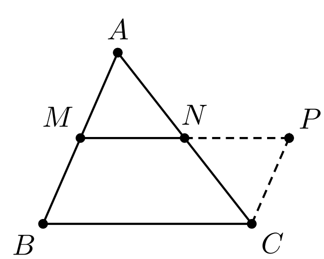
$$BD = AC \implies 2 \cdot BM = AC \implies BM = \frac{AC}{2} \cdot$$

Afirmação. Uma base média de um triângulo é um segmento que une os pontos médios de dois de seus lados.

Assim, todo triângulo possui exatamente três bases médias.

Propriedade 2. Sejam ABC um triângulo e M, N os pontos médios dos lados AB, AC, respectivamente. Então

$$MN \parallel BC \quad \text{e} \quad MN = \frac{BC}{2} \cdot$$



Demonstração. Inicialmente, prolonguemos a base média MN até um ponto P tal que $MN = NP$. Em seguida, construímos o triângulo CNP. Note que os triângulos ANM e CNP são congruentes, pelo caso LAL. Daí, $CP = AM$ e $\angle MAN = \angle PCN$ e portanto

$$CP \parallel AM \quad \Longrightarrow \quad CP \parallel BM.$$

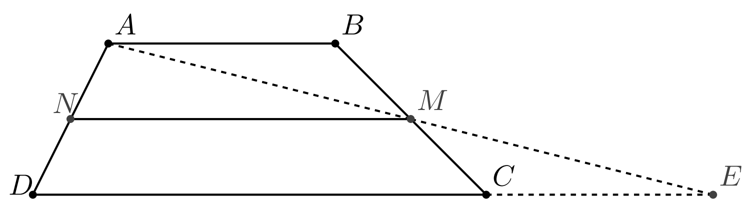
Assim, $MBCP$ é um paralelogramo, pois CP e BM são segmentos paralelos e iguais. Mas então $MP \parallel BC$ e

$$MP = BC \quad \Longrightarrow \quad 2MN = BC \quad \Longrightarrow \quad MN = \frac{BC}{2}\cdot$$

Afirmação. A base média de um trapézio é o segmento que une os pontos médios de seus lados não paralelos.

Propriedade 3. Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD, e sejam M e N os pontos médios dos lados BC e AD, respectivamente. Então,

$$MN \parallel AB,\ MN \parallel CD \quad \text{e} \quad MN = \frac{AB + CD}{2}.$$



Demonstração. Inicialmente, prolonguemos AM até encontrar DC no ponto E. É fácil ver que

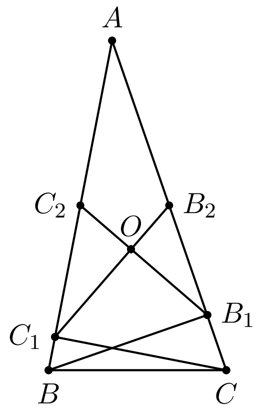
$$\Delta ABM \equiv \Delta CME\ (ALA) \Rightarrow AB = CE.$$

Portanto, MN é base média do triângulo ADE. Assim,

$$MN \parallel BE \Rightarrow MN \parallel DC \Rightarrow MN = \frac{DE}{2}.$$

Finalmente, $MN = \dfrac{DC + CE}{2} = \dfrac{DC + AB}{2}$.

Problema 1. (OBM) Considere um triângulo acutângulo ABC com $\angle BAC = 30°$. Sejam B_1, C_1 os pés das alturas relativas aos lados AC, AB, respectivamente, e B_2, C_2 os pontos médios dos lados AC, AB, respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.



Solução.
Seja O a interseção entre B_1C_2 e B_2C_1. O segmento B_1C_2 é uma mediana do triângulo retângulo AB_1B e portanto

$$AC_2 = B_1C_2 \quad \text{e} \quad \angle C_2B_1A = \angle BAB_1 = 30^\circ.$$

Analogamente, $AC_1B_2 = 30^\circ$. Daí,

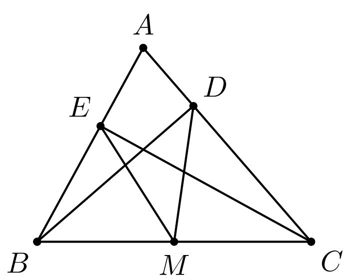
$$\angle BC_2B_1 = \angle C_2B_1A + \angle BAB_1 = 60^\circ$$

e portanto

$$\angle C_1OC_2 = 180^\circ - \angle BC_2B_1 - \angle AC_1B_2 = 90^\circ.$$

Problema 2. Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio do lado BC. Se D, E são os pés das alturas relativas aos lados AC, AB, respectivamente, prove que $ME = MD$.

Solução.



Note que ME é mediana relativa à hipotenusa do triângulo BEC. Daí,

$$ME = BM = CM$$

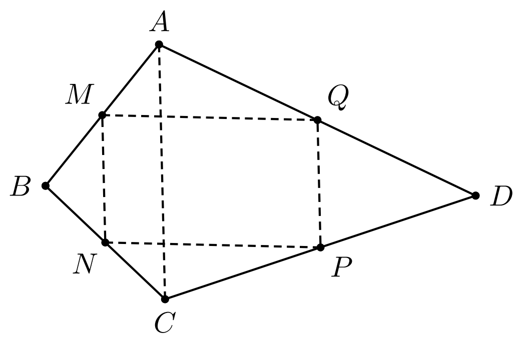
e, analogamente,

$$MD = BM = CM.$$

Assim, $ME = MD$.

Problema 3. Dado um quadrilátero $ABCD$, prove que os pontos médios M, N, P, Q dos lados AB, BC, CD, DA formam um paralelogramo.

Solução.



Temos

- Triângulo ABC: $MN \parallel AC$ e $MN = AC/2$.
- Triângulo DAC: $PQ \parallel AC$ e $PQ = AC/2$.

Assim, $MN \parallel PQ$ e $MN = PQ$, isto é, $MNPQ$ é paralelogramo.

Problema 4. Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio de BC. Se $AM = BM = CM$, prove que $\angle BAC = 90°$.

Problema 5. (Torneio das Cidades) Sejam $ABCD$ um paralelogramo, M o ponto médio de CD e H o pé da perpendicular baixada de B a AM. Prove que BCH é um triângulo isósceles.

Problema 6. Em um triângulo ABC, retângulo em A e isósceles, sejam D um ponto no lado AC ($A \neq D \neq C$) e E o ponto no prolongamento de BA tal que o triângulo ADE é isósceles. Se P é o ponto médio de BD, R o ponto médio de CE e Q a interseção entre ED e BC, prove que o quadrilátero $ARQP$ é um quadrado.

Problema 7. Seja ABC um triângulo acutângulo tal que $\angle B = 2\angle C$, AD é perpendicular a BC, com D sobre BC, e E o ponto médio de BC. Prove que $AB = 2DE$.

Problema 8. (China) Seja $ABCD$ um trapézio, $AD//BC$, $\angle B = 30^o$, $\angle C = 60^o$, $E,\ M,\ F,\ N$ os pontos médios de $AB,\ BC,\ CD,\ DA$ respectivamente. Se $BC = 7,\ MN = 3$, determine a medida de EF.

Problema 9. (China) Seja $ABCD$ um trapézio, $AB//CD$, $\angle DAB = \angle ADC = 90^o$, e o triângulo ABC é equilátero. Se a base média do trapézio $EF = \dfrac{3}{4}a$, determine o comprimento da menor base AB, em função de a.

Problema 10. (Moscou) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e O um ponto em seu interior tal que $\angle AOB = \angle COD = 120^o$, $AO = OB$, $CO = OD$. Sejam $K,\ L,\ M$ os pontos médios de $AB,\ BC,\ CD$ respectivamente, prove que ΔKLM é equilátero.

Problema 11. (OBM) Num quadrilátero convexo, a reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos forma ângulos iguais com ambas as diagonais. Mostre que as duas diagonais têm o mesmo comprimento.

Problema 12. Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, prove que esta extremidade é ponto médio do terceiro lado.

Problema 13. (OBM) No triângulo ABC, D é ponto médio de AB e E ponto sobre o lado BC tal que $BE = 2 \cdot EC$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, calcule o valor de $\angle BAC$.

Problema 14. (Austrália) Sejam ABC um triângulo e P um ponto em seu interior de modo que $\angle PAC = \angle PBC$. Se L, M são os pés das perpendiculares por P aos lados BC, AC, respectivamente, e D é o ponto médio de AB, prove que $DL = DM$.

Problema 15. (Romênia) Sejam ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$, D o ponto médio de BC, M o ponto médio de AD e N a projeção de D sobre BM. Prove que $\angle ANC = 90^\circ$.

Problema 16. (Eslovênia) Seja $ABCD$ um trapézio, com AB paralelo a CD. Sabendo que a distância entre os pontos médios das bases é igual à distância entre os pontos médios das diagonais, prove que $\angle DAC$ e $\angle DBC$ são ângulos obtusos.

Problema 17. Em um triângulo isósceles ABC, com $AB = BC$, sejam K, L pontos sobre AB, BC, respectivamente, tais que $AK + LC = KL$. A reta paralela a BC passando pelo ponto médio M de KL intersecta AC em N. Ache a medida de $\angle KNL$.

Problema 18. Sejam ABC um triângulo e D, E, F os pontos médios de BC, CA, AB, respectivamente. Prove que

$$\angle DAC = \angle ABE \iff \angle AFC = \angle ADB.$$

Problema 19. Seja $ABCD$ um trapézio com bases $AB = a$ e $CD = b$. Sejam também M, N os pontos médios dos lados AB, CD, respectivamente. Sabendo que $\angle DAB + \angle ABC = 90^\circ$, determine o comprimento de MN.

Problema 20. (Cone Sul) Seja ABC um triângulo acutângulo e sejam AN, BM e CP as alturas relativas aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Sejam R, S as projeções de N sobre os lados AB, CA, respectivamente, e Q, W as projeções de N sobre as alturas BM, CP, respectivamente.

(a) Mostre que R, Q, W, S são colineares.

(b) Mostre que $MP = RS - QW$.

Problema 21. (TST Brasil) Sejam Q o ponto médio do lado AB de um quadrilátero inscritível $ABCD$ e S a interseção das diagonais AC e BD. Sejam P, R as projeções ortogonais de S sobre AD, BC, respectivamente. Prove que $PQ = QR$.

Bibliografia

Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses
For Junior Section, vol. 1
Xu Jiagu