Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

Aula 4

## Contagem I

De quantos modos podemos nos vestir? Quantos números menores que 1000 possuem todos os algarismos pares? Contar coisas é algo tão antigo quanto a própria humanidade. Porém, ao longo do tempo as idéias evoluiram e novas técnicas surgiram.

Existem várias formas de contar coisas, a mais simples delas é a contagem caso a caso. Este é o processo que mais usamos em nosso cotidiado. Mas, é uma forma primitiva de resolver os problemas. Vamos aprender uma técnica mais prática pensando no seguinte exemplo:

**Problema 1.** Uma porta só é aberta quando usamos simultaneamente a chave e o cartão corretos. Se você possui duas chaves e três cartões, quantos testes devemos fazer para garantir que a porta irá abrir?

**Solução.** Podemos montar um diagrama (figura 1) para auxilar na solução do problema.

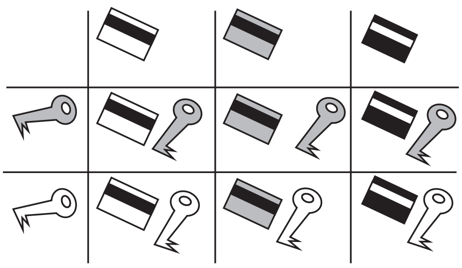


Figura 1: Abrindo uma Porta.

No diagrama acima podemos ver todas as combinações possíveis de uma chave com um cartão. Assim, a solução é visual e igual a 6. Por outro lado, poderíamos ter resolvido o problema da seguinte forma:

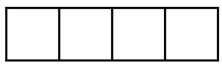
Note que para cada escolha de chave existem três maneiras para escolher o cartão. Como temos duas chaves, o total de combinações é $2 \times 3 = 6$. Nesse caso, seriam necessários 6 testes para achar a combinação correta. $\square$

Assim, se houvesse 30 chaves e 5 cartões não seria necessário fazer um diagrama para contar as combinações uma por uma, o resultado seria simplesmente $30 \times 5 = 150$. O método que acabamos de usar é conhecido como *princípio multiplicativo.* Nos próximos problemas vamos usá-lo de uma forma mais geral.

**Problema 2.** Teddy possui 5 blusas, 3 calções e 2 pares sapatos. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

**Solução.** Vamos primeiro contar o número de maneiras que Teddy pode escolher a blusa e a calça. Bem, para cada calça que Teddy escolhe, ele tem ainda cinco maneiras de escolher a blusa. Como ele possui três calças, o número total de modo de escolher o par (calça e blusa) é $5 \times 3 = 15$. Agora, para cada maneira de escolher esse par, ele ainda tem duas maneiras de escolher os sapatos. Daí, é fácil concluir que Teddy pode se vestir de $5 \times 3 \times 2 = 30$ maneiras diferentes. $\square$

**Problema 3.** De quantos modos podemos pintar um tabuleiro $1 \times 4$ usando apenas três cores, sem pintar casas vizinhas da mesma cor?



**Solução.** Podemos pintar a primeira casa de três maneiras diferentes, a segunda de duas maneiras (não podemos usar a cor da primeira casa), a terceira casa pode ser pintada de duas maneiras (não podemos usar a cor da segunda casa), o mesmo ocorre com a quarta casa. Assim, o total de maneiras de pintar o tabuleiro é $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$. $\square$

Suponha que Carlos, Felipe, Marina e Ana estejam em uma fila. Se trocarmos a posição de alguns deles dizemos que fizemos uma *permutação.* A pergunta é: Quantas permutações podemos ter usando quatro pessoas? Antes de resolver o problema vamos introduzir uma notação muito usada em problemas de contagem por simplificar algumas contas.

**Notação.** Dado um número natural $n$, seja $n!$ (leia n fatorial) o produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

Observe que o conseito de fatorial está fortemente ligado à noção de permutação. Para fixar essa notação, vamos resolver alguns exercícios simples:

1. Calcule 4!, 5! e 6!
2. Calcule $\dfrac{100!}{98!}$ e $\dfrac{47!}{44!3!}$
3. Resolva a equação $(m+2)! = 72 \cdot m!$

4. Prove que

   (a) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$

   (b) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n) = 2^n \cdot n!$

**Problema 4.** De quantas maneiras podemos formar uma fila com Carlos, Felipe, Marina e Ana?

**Solução.** Podemos escolher o primeiro da fila de quatro maneiras, a segunda de três, a terceira de duas e a última de apenas uma maneira (a pessoa que sobrar). Desse modo temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ permutações. □

**Problema 5.** (OBM 2005) Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. O relógio varia das 00:00 às 23:00 horas. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

**Solução.** Note que neste problema existe uma restrição nos dígitos que marcam as horas e no primeiro dítido que marca os minutos. Dessa forma, em vez de pensar em cada dígito separadamente, vamos pensar em três blocos de algarismos. O primeiro, que é formado pelos dois primeiros algarismos, pode assumir 7 valores diferentes $(00, 02, 04, 06, 08, 20$ ou $22)$; o segundo é formado apenas pelo terceiro dígito e pode assumir 3 valores (0,2 ou 4); e o último dígito pode assumir 5 valores (0,2,4,6 ou 8). Logo, o total de vezes em que todos aparecem pares é $7 \times 3 \times 5 = 105$.

Agora vamos nos preocupar com alguns problemas mais "clássicos". Apesar de serem problemas bem conhecidos por todos, vamos abordá-los aqui, pois empregam idéias que são constantemente usadas em vários problemas.

**Problema 6.** (Quantidade de Subconjuntos) Quantos subconjuntos possui o conjunto $M = \{1, 2, 3, ..., 10\}$?

**Solução.** A cada subconjunto de $M$ vamos associar uma seqüência de 10 dígitos que podem ser 0 ou 1. Essa associação será dada através da seguinte regra: O primeiro termo dessa seqüência será 1 se o elemento 1 estiver no subconjunto e 0 caso contrário; O segundo termo dessa seqüência será 1 se o elemento 2 estiver no subconjunto e 0 caso contrário; O terceiro termo dessa seqüência será 1 se o elemento 3 estiver no subconjunto e 0 caso contrário; e assim por diante.

Por exemplo, o subconjunto $\{1, 2, 5, 8, 10\}$ está associado à seqüência 1100100101, o subconjunto $\{2, 3, 5, 8\}$ está associado à seqüência 0110100100, enquanto o subconjuto vazio $\varnothing$ é representado por 0000000000. Note que a quantidade de subconjuntos de $M$ é igual à quantidade destas seqüências. Por outro lado, podemos escolher cada dígito de duas formas e, conseqüêntimente, temos $2^{10}$ seqüências (que é a mesma quantidade de subconjuntos). □

**Problema 7.** (Quantidade de Divisores) Seja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ um número natural na sua forma fatorada. Então, $n$ possui exatamente

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

divisores inteiros positivos. Incluindo 1 e $n$.

**Solução.** Note que cada divisor positivo de $n$ é da forma $n = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, onde cada expoente $\beta_i$ é um número entre 0 e $\alpha_i$ (inclusive). Dessa forma, temos $(\alpha_1 + 1)$ maneiras de escolher o expoente de $p_1$; $(\alpha_2 + 1)$ maneiras de escolher o expoente de $p_2$; assim por diante. Logo, segue o resultado do princípio multiplicativo. $\square$

## Problemas Propostos

**Problema 8.** Numa sala existem 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal?

**Problema 9.** Cada casa de um tabuleiro $2 \times 2$ pode ser pintado de verde ou amarelo. De quantas maneiras podemos pintar o tabuleiro todo?

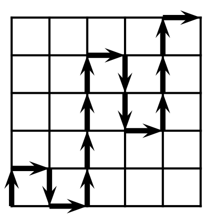
**Problema 10.** (OBM 2004) De quantos modos diferentes podemos pintar (usando apenas uma cor) as casas de um tabuleiro $4 \times 4$ de modo que cada linha e cada coluna possua exatamente uma casa pintada?

**Problema 11.** Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

**Problema 12.** De quantos modos podemos por três torres de três cores diferentes em um tabuleiro $8 \times 8$ de modo que nenhuma delas ataque outra?

**Problema 13.** Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e um apenas do lado esquerdo. Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens.
*Obs* : A ordem dos homens deve ser considerada.

**Problema 14.** De quantas maneiras podemos ir de $A$ até $B$ sobre a seguinte grade sem passar duas vezes pelo mesmo local e sem mover-se para esquerda? A figura abaixo mostra um caminho possível.



**Problema 15.** Ache a quantidade númemos de quatro dígitos tais que toda seqüência de três algarismos consecutivos é formada por elementos distintos.

**Problema 16.** (OBM 2005) Num tabuleiro quadrado $5 \times 5$, serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo. De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do tabuleiro?

**Problema 17.** Dizemos que a palavra *algoritmo* é um anagrama da palavra *logaritmo* pois é uma permutação da letras de logaritmo. Sabendo disso, calcule a quantidade de anagramas da palavra *vetor*.

**Problema 18.** Quantos anagramas da palavra *vetor* termina em uma vogal?

**Problema 19.** De quantas maneiras é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de biologia, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

**Problema 20.** Quantos anagramas da palavra *vetor* possuem as vogais separadas?

**Problema 21.** De quantas formas podemos colocar 4 bolas verdes e 4 bolas amarelas em um tabuleiro $4 \times 4$ de modo que cada coluna e cada linha possua exatamente uma bola de cada cor.

**Problema 22.** Responda os itens a seguir:
a) Ache a quantidade de divisores positivos de 3600.
b) Quantos desses divisores são pares?
c) Quantos são quadrados perfeitos?

**Problema 23.** (Maio 2006) Um calendário digital exibe a data: dia, mês e ano, com 2 dígitos para o dia, 2 dígitos para o mês e 2 dígitos para o ano. Por exemplo, 01-01-01 corresponde a primeiro de janairo de 2001 e 25-05-23 corresponde a 25 de maio de 2023. Em frente ao calendário há um espelho. Os dígitos do calendário são como os da figura abaixo.


Se 0, 1, 2, 5 e 8 se reflentem, respectivamente, em 0, 1, 5, 2 e 8, e os outros dígitos perdem sentido ao se refletirem, determine quantos dias do século, ao se refletirem no espelho, correspondem também a uma data.

**Problema 24.** (Rússia) Um número natural $n$ é dito *elegante* se pode ser escrito como soma de cubo com um quadrado ($n = a^3 + b^2$, onde $a, b \in \mathbb{N}$). Entre 1 e 1000000 existem mais números que são elegantes ou que não são?

**Problema 25.** Quantos são os números de cinco dígitos que são múltiplos de 3 e possuem 6 como um de seus dígitos?

# Dicas e Soluções

10. Em cada coluna devemos escolher exatamente uma casa para pintar. Temos 4 possibilidades de escolher a da primeira coluna, 3 para a segunda, 2 para a terceira, e 1 para última. Dessa forma, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de pintar o tabuleiro.

11. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (não podemos escolher o zero), para o segundo temos 9 possibilidades (pois deve ser diferente do primeiro) e o terceiro de 8 modos (deve ser diferente dos outros dois). Desse modo, a quantidade de números é $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

12. Temos 64 maneiras de escolher a posição da primeira torre, 49 para a segundo e 36 para a terceira. Total de maneiras é $64 \cdot 49 \cdot 36 = 112896$.

13. $4 \times 3 \times 4 \times 5! = 5760$

14. A formiga deve ir para direita extamente 5 vezes. Ao escolhermos esses movimentos, o resto do caminho estará bem definido. Como podemos escolher cada um destes cinco movimentos de seis maneiras, o total de caminhos será $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$.

17. Considere os três blocos formados por livros da mesma matéria. Podemos organizar esses blocos de 3! maneiras. Agora, em cada bloco ainda podemos permutar seus livros. Assim, o número correto de maneiras é $5! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3!$.

18. A palavra vetor possui $5! = 120$ anagramas. Usando a mesma idéia do problema 17 (separar em blocos), podemos achar que a quantidade destes anagramas com vogais juntas é $2 \times 4! = 48$. Logo, temos $120 - 48 = 72$ anagramas com as vogais separadas.

19. Existem 4! maneiras de colocar as bolas verdes. Depois disso, escolha uma das bolas verdes. Ponha uma bola amerela na sua linha e uma na sua coluna. Note que, ao fazermos isto, as posições das outras duas bolas amarelas estará bem definida. Dessa maneira, temos um total de $4! \cdot 3 \cdot 3 = 216$ configurações.

21. Como não podemos usar os dígitos $3, 4, 6, 7, 9$ para formar uma data, os únicos valores possíveis para os dois primeiros dígitos (os que marcam o dia) são: 01, 02, 05, 08, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 21, 22, 25, 28. Para os dois próximos dígitos temos as seguintes possibilidades: 01, 02, 05, 08, 10, 11, 12. Por outro lado, apenas os pares 01, 10 e 11 também correspondem a um mês quando são refletidos. Para os dois últimos as possibilidades são: 10, 20, 50, 80, 01, 11, 21, 51, 81, 02, 12, 22, 52, 82. Pois seus reflexos devem corresponder a um dia. Logo, o total de datas pedidas é $14 \times 3 \times 14 = 588$.

# Combinatória 04 - Contagem I

**Problema** $8$. Numa sala existem $3$ homens e $4$ mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal?

**Solução.** São $3 \times 4 = 12$ maneiras de selecionar um casal.

**Problema** $9$. Cada casa de um tabuleiro $2 \times 2$ pode ser pintado de verde ou amarelo. De quantas maneiras podemos pintar o tabuleiro todo?

**Solução.** O tabuleiro tem $4$ casas ao todo e cada uma pode ser pintada de duas maneiras. O número de maneiras de pintar é $2^4 = 16$.
Obs.: Se considerarmos as rotações do tabuleiro a resposta é $4$.

**Problema** $10$. (OBM $2004$) De quantos modos diferentes podemos pintar (usando apenas uma cor) as casas de um tabuleiro $4 \times 4$ de modo que cada linha e cada coluna possua exatamente uma casa pintada?

**Solução.** Para a primeira linha temos $4$ casas disponíveis, no segunda linha só temos $3$ já que não podemos ocupar a mesma coluna da casa pintada anteriormente. Para a $3^{\underline{a}}$ linha temos $2$ possibilidades e para a $4^{\underline{a}}$ linha só há $1$ possibilidade. Logo, a resposta é $4! = 24$.

**Problema** $11$. Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

**Solução.** Seja $abc$ esse número. Então $a$ pode ser $1, 2, \ldots, 9$ e $b$, $c$ podem ser $0, 1, \ldots, 9$. Inicalmente escolhendo $a$ temos $9$ opções. Para $b$ também temos $9$ já que ele nao pode ser igual a $a$ mas pode ser $0$. Para $c$ temos $8$ possibilidades.
A resposta é $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

**Problema** $12$. De quantos modos podemos por três torres de três cores diferentes em um tabuleiro $8 \times 8$ de modo que nenhuma delas ataque outra?

**Solução.** Temos $64$ maneiras de escolher a posição da primeira torre, $49$ para a segunda e $36$ para a terceira. Total de maneiras é $64 \cdot 49 \cdot 36 = 112896$.

**Problema** $13$. Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e um apenas do lado esquerdo. Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens.

Obs : A ordem dos homens deve ser considerada.

**Solução.** Do lado direito já estão definidos $2$ homens e do lado esquerdo já está definido $1$ homem.
Sobraram $5$ homens. Desses, devemos escolher $2$ para o lado direito e o resto vai para o esquerdo.
Temos $\dfrac{5 \cdot 4}{2!} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!}$ maneiras de escolher esses homens sem se preocupar, por enquanto, com a ordem (dividimos por $2!$ para retirar a ordenação).
Uma vez definido quem vai ficar do lado direito e esquerdo, temos $4!$ maneiras de permuta-los em cada lado. Portanto a resposta é $\dfrac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 4! \cdot 4! = 5! \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 5760$.

**Problema 14**. (IMG) De quantas maneiras podemos ir de $A$ até $B$ sobre a seguinte grade sem passar duas vezes pelo mesmo local e sem mover-se para esquerda? A figura abaixo mostra um caminho possível.

**Solução.** A formiga deve ir para direita extamente $5$ vezes. Ao escolhermos esses movimentos, o resto do caminho estará bem definido. Como podemos escolher cada um destes cinco movimentos de seis maneiras, o total de caminhos será $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$.

**Problema 15**. Ache a quantidade números de quatro dígitos tais que toda sequência de três algarismos consecutivos é formada por elementos distintos.

**Solução.** Considere o número com representação decimal $abcd$. As única sequêcias de algarismo consecutivos são $(a, b, c)$ e $(b, c, d)$.
Como $a$ não pode ser $0$ temos para ele $9$ possíveis valores.
Para $b$ temos também $9$ possíveis valores, já que pode ser igual a $0$ mas não a $a$.
Para $c$ temos $8$ possiveis valores, pois nao pode ser igual a $b$ nem $a$.
Agora, $d$ não pode ser igual nem a $c$ nem a $b$. Portanto tem $8$ possíveis valores.
A quantidade de números é $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8 = 5184$.

**Problema 16**. (OBM $2005$) Num tabuleiro quadrado $5 \times 5$, serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo. De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do tabuleiro?

**Solução.** Vamos primeiramente escolher o vértice oposto a hipotenusa do triângulo. Temos $25$ maneiras de fazer isso. Escolhido o primeiro vértice devemos escolher uma casa na mesma coluna e outra na mesma linha, determinando o triângulo. Podemos fazer isso de $4 \times 4 = 16$ maneiras.
Logo, o número de triângulos é $25 \times 16 = 400$.

**Problema 17**. Dizemos que a palavra $algoritmo$ é um anagrama da palavra $logaritmo$ pois é uma permutação da letras de $logaritmo$. Sabendo disso, calcule a quantidade de anagramas da palavra $vetor$.

**Solução.** Como não há letras repetidas, o número de anagramas é o número de permutações das letras. Logo, é $5! = 120$.

**Problema 18**. Quantos anagramas da palavra $vetor$ termina em uma vogal?

**Solução.** Imagine que o anagrama seja da forma $ABCDE$, então só podemos ter $E$ igual a $e$ ou $o$. Além disso, todas as letras são diferentes.
Temos $2$ escolhas para $E$, sobram $4$ escolhas para $D$, $3$ para $C$, $2$ para $B$ e $A$ fica determinado. A resposta é $2 \times 4! = 48$.

**Problema 19**. De quantas maneiras é possível colocar em uma prateleira $5$ livros de matemática, $3$ de física e $2$ de biologia, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

**Solução.** Considere os três blocos formados por livros da mesma matéria. Podemos organizar esses blocos de $3!$ maneiras. Agora, em cada bloco ainda podemos permutar seus livros. Assim, o número correto de maneiras é $5! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3!$.

**Problema 20**. Quantos anagramas da palavra $vetor$ possuem as vogais separadas?

**Solução.** A palavra vetor possui $5! = 120$ anagramas. Usando a mesma idéia do problema $19$ (separar em blocos), podemos achar que a quantidade destes anagramas com vogais juntas é $2 \times 4! = 48$. Logo, temos $120?48 = 72$ anagramas com as vogais separadas.

**Problema 21**. De quantas formas podemos colocar $4$ bolas verdes e $4$ bolas amarelas em um tabuleiro $4 \times 4$ de modo que cada coluna e cada linha possua exatamente uma bola de cada cor.

**Solução.** Existem $4!$ maneiras de colocar as bolas verdes. Depois disso, escolha uma das bolas verdes. Ponha uma bola amerela na sua linha e uma na sua coluna. Note que, ao fazermos isto, as posições das outras duas bolas amarelas estará bem definida. Dessa maneira, temos um total de $4! \cdot 3 \cdot 3 = 216$ configurações.

**Problema 22**. Responda os itens a seguir:

a) Ache a quantidade de divisores positivos de $3600$.

b) Quantos desses divisores são pares?

c) Quantos são quadrados perfeitos?

**Solução.**

a) Veja que $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Seus divisores são da forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, onde $a = 0, 1, 2, 3, 4$, $b = 0, 1, 2$ e $c = 0, 1, 2$. Logo, temos $5$ valores para $a$ e $3$ para $b$ e $c$. Portanto, o número de divisores deve ser $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$.

b) Para que um divisor seja par não pode ocorrer $a = 0$. O número de possibilidades para $a$ se reduz a $4$. O número de divisores pares é $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

c) Para que um divisor seja quadrado perfeito, $a$, $b$ e $c$ devem ser pares. Logo, só poderão assumir os valores $\{0, 2, 4\}$ para $a$ e $\{0, 2\}$ para $b$ e $c$. O número de divisores satisfazendo isso é $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

**Problema 23**. (IMG) (Maio $2006$) Um calendário digital exibe a data: dia, mês e ano, com $2$ dígitos para o dia, $2$ dígitos para o mês e $2$ dígitos para o ano. Por exemplo, $01$-$01$-$01$ corresponde a primeiro de janeiro de $2001$ e $25$-$05$-$23$ corresponde a $25$ de maio de $2023$. Em frente ao calendário há um espelho. Os dígitos do calendário são como os da figura abaixo.

Se $0$, $1$, $2$, $5$ e $8$ se reflentem, respectivamente, em $0$, $1$, $5$, $2$ e $8$, e os outros dígitos perdem sentido ao se refletirem, determine quantos dias do século, ao se refletirem no espelho, correspondem também a uma data.

**Solução.** Como não podemos usar os dígitos $3$, $4$, $6$, $7$, $9$ para formar uma data, os únicos valores possíveis para os dois primeiros dígitos (os que marcam o dia) são: $01$, $02$, $05$, $08$, $10$, $11$, $12$, $15$, $18$, $20$, $21$, $22$, $25$, $28$. Para os dois próximos dígitos temos as seguintes possibilidades: $01$, $02$, $05$, $08$, $10$, $11$, $12$. Por outro lado, apenas os pares $01$, $10$ e $11$ também correspondem a um mês quando são refletidos. Para os dois últimos as possibilidades são: $10$, $20$, $50$, $80$, $01$, $11$, $21$, $51$, $81$, $02$, $12$, $22$, $52$, $82$. Pois seus reflexos devem corresponder a um dia. Logo, o total de datas pedidas é $14 \times 3 \times 14 = 588$.

**Problema 24**. (Rússia) Um número natural $n$ é dito elegante se pode ser escrito como soma de cubo com um quadrado ($n = a^3 + b^2$, onde $a$, $b \in \mathbb{N}$). Entre $1$ e $1000000$ existem mais números que são elegantes ou que não são?

**Solução.** A quantidade de números elegantes deve ser menor ou igual ao número de soluções da inequação $a^3 + b^2 \leq 10^6$. Note que $0 \leq a \leq 10^2$ e $0 \leq b \leq 10^3$.
O número de soluções é menor do que $(10^2 + 1)(10^3 + 1) = 101101 < 5 \cdot 10^5$.
Logo, a quantidade de números elegantes é menor do que a metade da quantidade de números entre $1$ e $1000000$. Isto é, existem mais números que não são elegantes.

**Problema 25**. Quantos são os números de cinco dígitos que são múltiplos de $3$ e possuem $6$ como um de seus dígitos?

**Solução.**

# Contagem II

Neste material vamos aprender novas técnicas relacionadas a problemas de contagem.

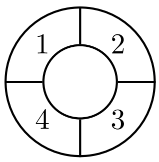
## 1. Separando em casos

Quando encontramos dificuldades em resolver um problema, uma estratégia útil é separá-lo em casos menores em que essas dificuldades diminuam. Essa ideia é tão significativa que os especialistas da ciência da computação nomearam-na de *divide and conquer algorithm*, em analogia às estratégias político-militares.

**Problema 1.** O alfabeto da Tanzunlândia é formado por apenas três letras: $A, B$ e $C$. Uma palavra na Tanzunlândia é uma seqüência com no máximo 4 letras. Quantas palavras existem neste país?

**Solução.** Existem 3 palavras com uma letra, $3^2$ com duas letras, $3^3$ com três letras, e $3^4$ com quatro letras. Logo, o total de palavras é $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$. □

**Problema 2.** De quantos modos podemos pintar (usando uma de quatro cores) as casas da figura a baixo de modo que as casas vizinhas tenham cores diferentes?




**Solução.** Vamos separar o problema em dois casos:

i. Se as casas 1 e 3 tiverem a mesma cor, temos quatro maneiras de escolher essa cor. Podemos escolher a cor da casa 2 de três maneiras (basta não ser a cor usadas nas casas 1 e 3), o mesmo vale para casa 4. Logo, temos $4 \times 3 \times 3 = 36$ maneiras de pintar dessa forma.

ii. Agora se 1 e 3 têm cores diferentes, podemos escolher a cor da casa 1 de quatro maneiras, da casa 3 de três maneiras e, das casas 2 e 4, podemos escolher de duas maneiras cada. Assim, temos $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ maneiras de pintar desta outra forma.

Desse modo, podemos concluir que existem $36 + 48 = 84$ maneiras de pintar a rosquinha.

□

**Problema 3.** Quantos são os números de quatro dígitos que não possuem dois algarismos consecutivos com a mesma paridade?

**Solução.** Vamos separar o problema em dois casos:

i. Quando o primeiro algarismo for par, temos 4 possibilidades para o primeiro dígito, 5 para o segundo, 5 para o terceiro e 5 para o último. Totalizando $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$ números.

ii. Quando o primeiro algarismo for ímpar, temos 5 possibilidades para cada um dos dígitos. Logo, a quantidade de números dessa forma é $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$.

Portanto, temos um total de $625 + 500 = 1125$ números de quatro dígitos que não possuem dois algarismos consecutivos com a mesma paridade. □

## 2. Contagens Múltiplas

Os problemas que abordamos até agora tinham algo em comum: o papel da ordenação na diferenciação das possibilidades. Porém, há casos em que a ordem dos elementos não é relevante para a contagem. Isso fica claro quando analisamos as seguintes situações:

**Situação 1.** De um grupo de 7 pessoas, devemos escolher 3 delas para formar um pódio (primeiro, segundo e terceiro lugares). De quantas formas podemos fazer isso?

**Situação 2.** De um grupo de 7 pessoas, devemos escolher 3 delas para formar um comitê (sem hierarquias). De quantas formas podemos fazer isso?

Perceba que, apesar de serem semelhantes, são problemas diferentes, com respostas também diferentes. O primeiro sabemos resolver. A resposta é $7 \times 6 \times 5 = 210$. Agora, sabendo a essa resposta podemos dar uma solução para o segundo problema.

Note que, para cada comitê formado, podemos montar $3 \times 2 \times 1 = 6$ pódios distintos. Logo, o número de pódios é seis vezes o número de comitês. Portanto, a resposta para o segundo problema é $\frac{210}{6} = 35$. □

Podemos usar essa estratégia para resolver problemas de anagramas em que as palavras possuem letras repetidas.

**Problema 4.** Quantos anagramas possui a palavra *matematica* (desconsidere o acento)?

**Solução.** Se imaginarmos por um momento uma palavra de 10 letras diferentes:

$$m_1 a_1 t_1 e m_2 a_2 t_2 i c a_3,$$

o número total de anagramas será 10!. Porém, ao trocarmos letras que na realidade são iguais (como $a_1$ e $a_3$) o anagrama continua o mesmo. Dessa forma, cada anagrama foi contado $2 \times 2 \times 3!$ vezes. Portanto, a resposta é $\dfrac{10!}{2 \times 2 \times 3!}$. □

**Problema 5.** De quantas formas podemos por oito pessoas em uma fila se Alice e Bob devem estar juntos, e Carol deve estar em algum lugar atrás de Daniel?

**Solução.** Vamos imaginar Alice e Bob como uma única pessoa. Existirão $7! = 5040$ possibilidades. Alice pode estar na frente de Bob ou vice versa. Então devemos multiplicar o número de possibilidades por 2. Por outro lado, Carol está atrás de Daniel em exatamente metade dessas permutações, então a resposta é apenas 5040. □

## Problemas Propostos

**Problema 6.** Escrevem-se todos os inteiros de 1 a 9999. Quantos números têm pelo menos um zero?

**Problema 7.** Quantos números de três dígitos possuem todos os seus algarismos com a mesma paridade?

**Problema 8.** Quantos são os números de quatro algarismos que possui pelo menos um dígito repetido?

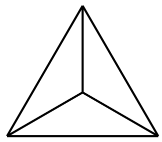
**Problema 9.** Quantos são os números de quatro dígitos distintos que não possuem dois algarismos consecutivos com a mesma paridade?

**Problema 10.** De quantas maneiras podemos colocar um rei preto e um rei branco em um tabuleiro de xadrez ($8 \times 8$) sem que nenhum deles ataque o outro?

**Problema 11.** Quantos são os naturais pares que se escrevem com três algarismos distintos?

**Problema 12.** Na cidade Gótica as placas das motos consistem de três letras. A primeira letra deve estar no conjunto $\{C, H, L, P, R\}$, a segunda letra no conjunto $\{A, I, O\}$, e a terceira letra no conjunto $\{D, M, N, T\}$. Certo dia, decidiu-se aumentar o número de placas usando duas novas letras $J$ e $K$. O intendente dos transportes ordenou que as novas letras fossem postas em conjuntos diferentes. Determine com qual opção podemos obter o maior número de placas.

**Problema 13.** (Maio 1998) Cada um dos seis segmentos da figura abaixo deve ser pintado de uma de quatro cores de modo que segmentos vizinhos não tenham a mesma cor. De quantas maneiras podemos fazer isso?



**Problema 14.** Em uma festa havia 6 homens e 4 mulheres. De quantos modos podemos formar 3 pares como essas pessoas?

**Problema 15.** De quantas maneiras podemos por três torres de mesma cor em um tabuleiro $8 \times 8$ de modo que nenhuma delas ataque a outra?

**Problema 16.** (AIME 1996) Duas casas de um tabuleiro $7 \times 7$ são pintadas de amarelo e as outras são pintadas de verde. Duas pinturas são ditas *equivalentes* se uma é obtida a partir de uma rotação aplicada no plano do tabuleiro. Quantas pinturas inequivalentes existem?

**Problema 17.** Em uma sala de aula existem $a$ meninas e $b$ meninos. De quantas formas eles podem ficar em uma fila, se as meninas devem ficar em ordem crescente de peso, e os meninos também? (Suponha que 2 pessoas quaisquer não tenham o mesmo peso.)

**Problema 18.** Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas maneiras esta primeira rodada pode ser realizada?

**Problema 19.** Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para salvar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

## Dicas e Soluções

6. Ache a quantidade de números de 0 a 9999 sem nenhum dígito zero. Faça essa contagem separando em quatro casos (de acordo com a quantidade de algarismos).

7. Separe em dois casos: 1) quando todos os dígitos são pares; 2) quando todos os dígitos são ímpares. Não se esqueça que zero não pode ser o primeiro dígito!

10. Podemos dividir o tabuleiro em três regiões: A primeira é formada pelas quatro casas nos cantos do tabuleiro; a segunda pelas 24 casas da borda (que não estão nos cantos); e a terceira pelo tabuleiro $6 \times 6$ no interior do tabuleiro. Se o primeiro rei for posto na primeira região, temos 60 maneiras de colocar o segundo rei; se ele for posto na segunda, temos 58 maneiras; e se for posto na terceira, temos 55 maneiras. Logo, temos um total de $4 \times 60 + 24 \times 58 + 36 \times 55 = 3612$ modos diferentes de colocar os dois reis.

12. Inicialmente temos $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ placas. De acordo com o problema, temos as seguintes opções para o novo número de placas: $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$, $5 \cdot 4 \cdot 5 = 100$ e $6 \cdot 3 \cdot 5 = 90$. Logo, o número máximo é 100.

14. $\dfrac{(6 \times 5 \times 4) \times (4 \times 3 \times 2)}{3!}$.

15. $\dfrac{64 \times 49 \times 36}{3!}$.

16. Separe o problema em dois casos. Quando as casas amarelas são simetricas em relação ao centro do tabuleiro e quando não são. Conte o número de pinturas equivalentes em casa caso.

17. Temos $(a + b)!$ maneiras de permutar todas as crianças. Porém apenas uma das $a!$ permutações das meninas está na ordem correta e apenas $b!$ das permutações dos meninos está correta. Logo, a resposta é $\dfrac{(a + b)!}{a!b!}$.

# Combinatória 04 - Contagem I

**Problema 6**. Escrevem-se todos os inteiros de $1$ a $9999$. Quantos números têm pelo menos um zero?

**Solução.** Vamos contar quantos não tem nenhum dígito zero. De $1$ a $9$ temos $9$ algarismo sem nenhum dígito $0$. De $10$ a $99$, temos $9 \times 9 = 81$ números sem nenhum zero.
De $100$ a $999$ temos $9 \times 9 \times 9 = 729$ números sem nenhum $0$.
De $1000$ a $9999$ temos $9^4 = 6561$ números sem nenhum zero.
Logo, entre $1$ e $9999$ temos $9 + 81 + 729 + 6561 = 7380$ números sem nenhum zero.
Portanto, há $9999 - 7380 = 2619$ números com pelo menos um zero.

**Problema 7**. Quantos números de três dígitos possuem todos os seus algarismos com a mesma paridade?

**Solução.** Se todos os dígitos forem pares temos $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ números, lembre-se que o primeiro dígito não pode ser zero.
Se todos os dígitos forem ímpares temos $5^3 = 125$ números.
Logo, o total é $100 + 125 = 225$.

**Problema 8**. Quantos são os números de quatro algarismos que possuem pelo menos um dígito repetido?

**Solução.** Existem $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ números de quatro dígitos com todos os algarismos distintos. Como são ao todo $9000$ números de quatro dígitos, temos $9000 - 4536 = 4464$ números com pelo menos um dígito repetido.

**Problema 9**. Quantos são os números de quatro dígitos distintos que não possuem dois algarismos consecutivos com a mesma paridade?

**Solução.** Considere o número de representação decimal $abcd$. Então, inicialmente temos $9$ opções para $a$. Escolhido $a$, sabemos que $b$ deve ter paridade diferente e então tem $5$ opções.
O dígito $c$ deve ter a mesma paridade que $a$ e nao pode ser igual a ele, portanto só temos $4$ opções para ele. Já o digito $d$ deve ter a mesma paridade que $c$ e deve ser diferente dele, portanto temos $4$ opções para ele.
A quantidade total de números satisfazendo as condições do enunciado é $9 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 720$.

**Problema 10**. De quantas maneiras podemos colocar um rei preto e um rei branco em um tabuleiro de xadrez $(8 \times 8)$ sem que nenhum deles ataque o outro?

**Solução.** Podemos dividir o tabuleiro em três regiões: A primeira é formada pelas quatro casas nos cantos do tabuleiro; a segunda pelas $24$ casas da borda (que não estão nos cantos); e a terceira pelo tabuleiro $6 \times 6$ no interior do tabuleiro. Se o primeiro rei for posto na primeira região, temos $60$ maneiras de colocar o segundo rei; se ele for posto na segunda, temos $58$ maneiras; e se for posto na terceira, temos $55$ maneiras. Logo, temos um total de $4 \times 60 + 24 \times 58 + 36 \times 55 = 3612$ modos diferentes de colocar os dois reis.

**Problema 11**. Quantos são os naturais pares que se escrevem com três algarismos distintos?

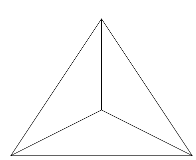
**Solução.** Considere o número $abc$. Vamos separar o problema em $3$ casos.
- $c = 0$: $a$ pode assumir $9$ valores e $b$ somente $8$, pois não pode ser igual a nenhum outro;
- $b = 0$: $c$ pode assumir $4$ valores, pois é par, e assim $a$ poderá assumir $8$ valores;
- $b, c \neq 0$: $c$ pode assumir $4$ valores, consequentemente $a$ poderá ter $8$ valores e assim $b$ poderá assumir $7$ valores.

Logo, ao todo temos $9 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 8 \cdot 7 = 328$ números.

**Problema 12**. Na cidade Gótica as placas das motos consistem de três letras. A primeira letra deve estar no conjunto $\{C, H, L, P, R\}$, a segunda letra no conjunto $\{A, I, O\}$, e a terceira letra no conjunto $\{D, M, N, T\}$. Certo dia, decidiu-se aumentar o número de placas usando duas novas letras $J$ e $K$. O intendente dos transportes ordenou que as novas letras fossem postas em conjuntos diferentes.
Determine com qual opção podemos obter o maior número de placas.

**Solução.** Inicialmente temos $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ placas. De acordo com o problema, temos as seguintes opções para o novo número de placas: $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$, $5 \cdot 4 \cdot 5 = 100$ e $6 \cdot 3 \cdot 5 = 90$.
Logo, o número máximo é $100$ e ocorre quando as novas opções são adicionadas à segunda e terceira letras.

**Problema 13**. (Maio $1998$) Cada um dos seis segmentos da figura abaixo deve ser pintado de uma de quatro cores de modo que segmentos vizinhos não tenham a mesma cor. De quantas maneiras podemos fazer isso?



**Solução.** Temos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneiras de pintar o triângulo externo. Note que a quarta cor (a que não foi usada no triângulo) deve aparecer nenhuma ou uma vez nos três segmentos internos. Se ela aparecer mais de uma vez teremos dois segmentos vizinhos com a mesma cor. Temos, portanto, dois casos:

Se o quarta cor não aparece nenhuma vez, então só há uma maneira de se pintar os segmentos internos. Com cada segmento tendo a mesma cor que o lado oposto do triângulo maior.

Se a quarta cor aparece uma vez, ela pode aparecer em qualquer um dos três segmentos internos. Veja que, uma vez escolhido o segmento que terá a quarta cor, as outras cores ficam definidas. Temos assim, $3$ pinturas diferentes.

O número de maneiras de pintar a figura é $24 \cdot (1 + 3) = 96$.
Se considerarmos as rotações da figura temos apenas $\frac{96}{3} = 32$ pinturas diferentes.

**Problema 14**. Em uma festa havia $6$ homens e $4$ mulheres. De quantos modos podemos formar $3$ pares com essas pessoas?

**Solução.** Temos $6 \cdot 4$ maneiras de escolher o primeiro par. Para o segundo temos $5 \cdot 3$ e para o terceiro par $4 \cdot 4$. Porém, a ordem em que escolhemos os casais não importa. Devemos portanto, dividir o resultado por $3!$.
Dessa forma, a resposta é $\frac{(6 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 2)}{3!} = 480$.

**Problema 15**. De quantas maneiras podemos por três torres de mesma cor em um tabuleiro $8 \times 8$ de modo que nenhuma delas ataque a outra?

**Solução.** Para a primeira torre temos $64$ casas disponíveis, para a segunda temos $49$ casas e para a segunda temos $36$ casas. Porém, como a ordem de colocação das torres não importa, devemos dividir por $3!$.
O resultado é $\frac{64 \cdot 49 \cdot 36}{3!} = 18816$.

**Problema 16**. (AIME $1996$) Duas casas de um tabuleiro $7 \times 7$ são pintadas de amarelo e as outras são pintadas de verde. Duas pinturas são ditas equivalentes se uma é obtida a partir de uma rotação aplicada no plano do tabuleiro. Quantas pinturas inequivalentes existem?

**Solução.** Vamos dividir o problema em dois casos.
No primeiro vamos supor que as duas casas amarelas são simétricas em relação ao centro. Escolhendo uma casa a outra fica definida. Temos $48$ maneiras de escolher a primeira casa (não pode ser a casa central) e $1$ de escolher a segunda. Como a ordem de escolha das casas não importa, devemos dividir o resultado por $2!$. Porém, como as casas são simétricas em relação ao centro, rotacionando o tabuleiro obteremos $2$ configurações não idênticas. Dessa forma, devemos novamente dividir o resultado por $2$. O número de pinturas inequivalentes nesse caso é $\frac{48}{2! \cdot 2} = 12$.

Agora, vamos supor que as duas casas não são simétricas em relação ao centro e nenhuma das duas é a casa central. Temos $48$ maneiras de escolher a primeira casa e $46$ maneiras de escolher a segunda casa (não pode ser igual à primeira ou sua simétrica e nem ao centro). Como a ordem de escolha das casas não importa e a rotação gera $4$ configuração diferentes, devemos dividir o resultado por $2! \cdot 4$.

Logo, o número de pinturas inequivalentes aqui é $\dfrac{48 \cdot 46}{2! \cdot 4} = 276$.

Aqui supomos que uma das casas está no centro. O número de maneiras de se obter isso é $48$. Rotacionando o tabuleiro obtemos $4$ configurações distintas. Portanto o número de pinturas inequivalentes nesse caso é $\dfrac{48}{4} = 12$.

O número total de pinturas inequivalentes é $12 + 276 + 12 = 300$.

**Problema 17**. Em uma sala de aula existem $a$ meninas e $b$ meninos. De quantas formas eles podem ficar em uma fila, se as meninas devem ficar em ordem crescente de peso, e os meninos também? (Suponha que $2$ pessoas quaisquer não tenham o mesmo peso.)

**Solução.** Temos $(a+b)!$ maneiras de permutar todas as crianças. Porém apenas uma das $a!$ permutações das meninas está na ordem correta e apenas $b!$ das permutações dos meninos está correta. Logo, a resposta é $\dfrac{(a+b)!}{a!b!}$.

**Problema 18**. Considere um torneio de xadrez com $10$ participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há $5$ jogos realizados simultaneamente.
De quantas maneiras esta primeira rodada pode ser realizada?

**Solução.**

**Problema 19**. Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos $12$ cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de $5$ cavaleiros para salvar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

**Solução.**