Geometria Básica

Bruno Holanda*

12 de novembro de 2011

Resumo

Este trabalho representa um conjunto de notas de aulas de um curso inicial em Geometria Euclidiana Plana para alunos do ensino fundamental. A principal tafera dos exercícios aqui apresentados é a formação do rigor matemático necessário em problemas de geometria, porém sem grandes aprofundamentos teóricos. Portanto, nos focaremos em três pontos principais: Teorema de Pitágoras, áreas e ângulos.

1 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos mais antigos e usados teoremas da geometria plana. Também é ele que forma a base da *geometria analítica* de Descartes. Apesar de toda a sua fama, muitos estudiosos da História da Matemática afirmam que Pitágoras não foi o verdadeiro autor desse teorema. E que, muito possívelmente, os alunos da escola pitagórica sejam os reais autores.

Existem muitas provas, a maioria delas usa algum argumento de área. A solução a seguir é uma das mais simples.

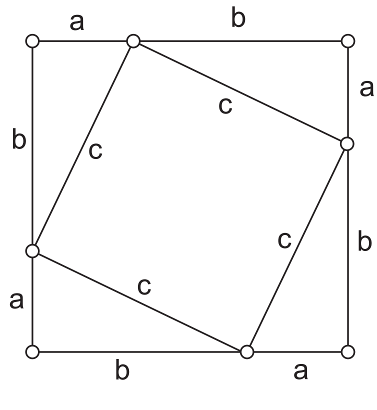


Figura 1: Teorema de Pitágoras

Prova. Na figura 1, temos um quadrado de lado $(a+b)$ particionado em um quadrado de lado c e quatro triângulos retângulos de área $\frac{a \cdot b}{2}$. Daí, por uma equivalência de áreas, temos que

*Outros materiais como este podem ser encontrados em http://brunolholanda.wordpress.com/

$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$, ou seja:

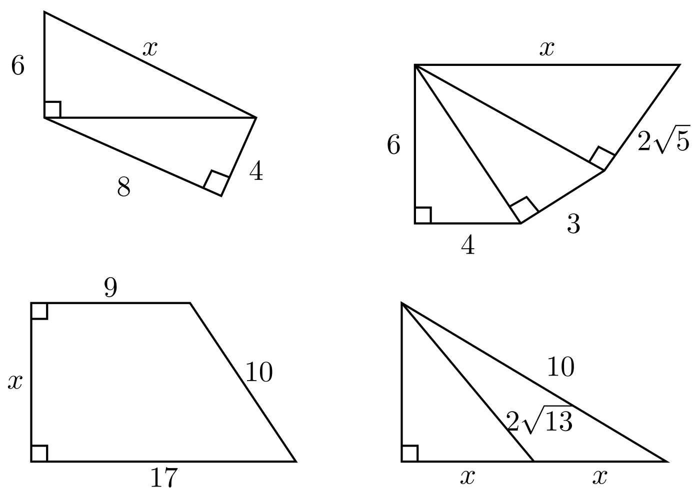
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Problema 1. Prove o Teorema de Pitágoras de duas novas maneiras:

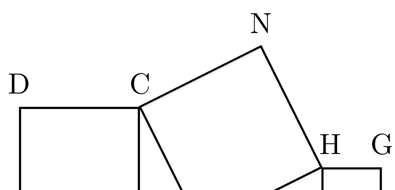
(a) (George Airy) Mostre como cortar dois quadrados em triângulos e quadriláteros e usar os pedaços para formar um único quadrado maior.

(b) (Henry Perigal) Dados dois quadrados, mostre como cortar um deles em quatro partes iguais que, juntas com o outro quadrado, formem um único quadrado maior.

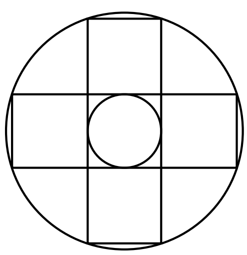
Problema 2. Determine x nas seguintes figuras:



Problema 3. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de área $64cm^2$ e $EFGH$ um quadrado de área $36cm^2$. Determine a área do quadrado $CMHN$.



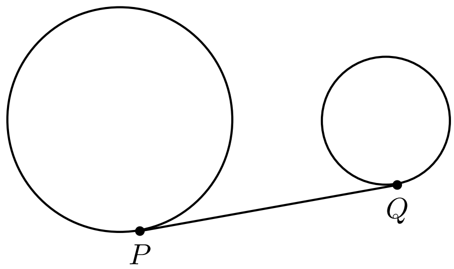
Problema 4. Na figura abaixo os dois círculos são têm o mesmo centro e os cinco quadriláteros são quadrados. Se o círculo menor tem raio igual a $1cm$ determine o raio do círculo maior.



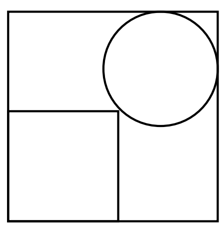
Problema 5. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 28. Seja P um ponto no seu interior e E um ponto no lado CD de modo que $CD \perp PE$ e $AP = BP = PE$. Ache AP.

Problema 6. Suponha que ABC seja um triângulo retâgulo escaleno, e P seja o ponto na hipotenusa AC tal que $\angle ABP = 45°$. Dado que $AP = 1$ e $CP = 2$, calcule a área do triângulo ABC.

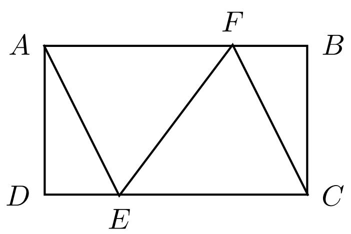
Problema 7. Na figura abaixo temos dois círculos de raios 3 e 2 e cuja distância centro a centro é 10. Ache o comprimento da tangente comum PQ.



Problema 8. (Cone Sul 1989 - adaptado) Na figura abaixo temos dois quadrados, um de lado dois e outro de lado um. Determine o raio do círculo que é tangente aos lados do maior e passa pelo vértice do menor.



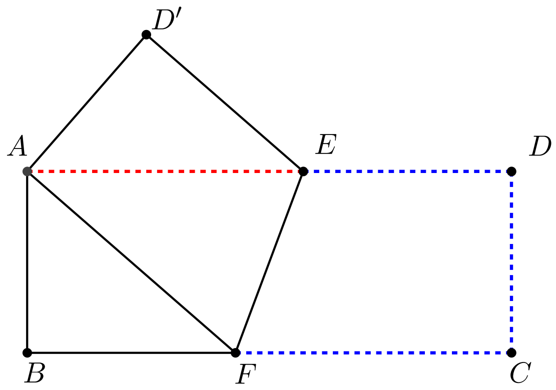
Problema 9. Nos lados AB e DC do retângulo $ABCD$, os pontos F e E são escolhidos de modo que $AFCE$ seja um losango. Se $AB = 16$ e $BC = 12$, ache EF.



Problema 10. P é um ponto no interior do retângulo $ABCD$. Se $PA = 2$; $PB = 3$, e $PC = 10$. Ache PD.

Problema 11. (Maio 2006) Um retângulo de papel $3cm \times 9cm$ é dobrado ao longo de uma reta, fazendo coincidir dois vértices opostos. Deste modo se forma um pentágono. Calcular sua área.

Solução. Seja $ABCD$ o retângulo e $ABEFD'$ o pentágono formado ao dobrar o paple como é mostrado na figura a seguir:



2 Trabalhando com Ângulos

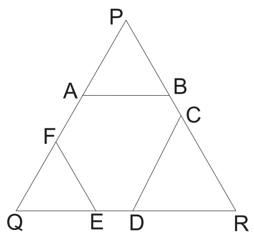
Ao lado da "distância", o "ângulo" é uma unidade de medida fundamental para o estudo da geometria plana. Explicando de uma maneira formal, o ângulo mede a diferença entre as inclinações de duas retas.

Problema 12. (Torneio das Cidades 1994) No triângulo ABC, retângulo em C, os pontos M e N são escolhidos sobre a hipotenusa de modo que $BN = BC$ e $AM = AC$. Ache a medida do ângulo $\angle NCM$.

Problema 13. Seja $ABCDEF$ um hexágono com todos os ângulos internos iguais a $120°$. Mostre que

$$AB - DE = CD - FA = EF - BC$$

Solução.



Sejam $AF \cap BC = P, ED \cap AF = Q, BC \cap ED = R$. Como todos os ângulos internos são $120°$ obtemos que todos os triângulos $\triangle PAB, \triangle QEF, \triangle RCD, \triangle PQR$ são equiláteros. Como $PQ = PR$ temos: $AB + AF + FE = PA + AF + FQ = PB + BC + CR = AB + BC + CD$, então $CD - AF = FE - BC$. A outra igualdade é análoga.

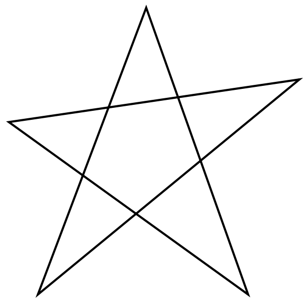
Problema 14. O octógono $ABCDEFGH$ é equiangular. Sabendo que $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DE = 4$, e $EF = FG = 2$, calcule o perimetro do octógono.

Problema 15. Seja $ABCDEF$ um hexágono com todos os ângulos internos iguais a $120°$. Mostre que

$$AB - DE = CD - FA = EF - BC$$

Problema 16. Seja $RSTUV$ pentagono regular. Construa um triangulo eqüilátero PRS com P no interior do pentagono. Ache a medida do ângulo $\angle PTV$.

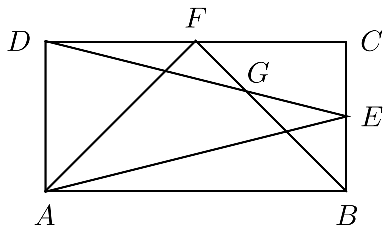
Problema 17. Ache a soma dos ângulos internos de uma estrela



Problema 18. No triângulo isósceles ABC com $AB = AC$, P é o ponto médio do lado AB tal que $AP = PC$. Se a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ corta PC em O de modo que $PO = BO$, ache os ângulo do triângulo.

Problema 19. No trapésio $ABCD$, de bases AB e CD, temos $AD = 39$, $CD = 14$, $\angle ABC = 69°$ e $\angle CDA = 138°$. Ache a medida de AB.

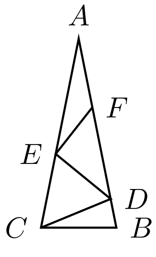
Problema 20. (OBM) No retângulo $ABCD$, E é o ponto médio do lado BC e F é o ponto médio do lado CD. A interseção de DE com FB é G. O ângulo $E\widehat{A}F$ mede $20°$. Quanto vale o ângulo $E\widehat{G}B$?



Problema 21. $DEFG$ é um quadrado no exterior do pentágono regular $ABCDE$. Quanto mede o ângulo $E\widehat{A}F$?

Problema 22. No triângulo ABC, D e E são pontos sobre os lados BC e AC respectivamente. Determine $\angle CDE$ sabendo que $AB = AC$, $AE = AD$ e $\angle BAD = 48°$.

Problema 23. Determine $B\hat{A}C$ na figura abaixo sabendo que $AB = AC$ e $BC = CD = DE = EF = FA$.



Problema 24. No triângulo ABC com $AB = BC$, $\angle ABC = 144°$. Seja K um ponto em AB, L um ponto em BC e M em AC de modo que $KL \parallel AC$, $KM \parallel BC$ e $KL = KM$. A reta LM corta o prolongamento de AB em P. Ache a medida do ângulo $\angle BPL$.

Problema 25. No triângulo ABC com $AB = BC$, P, Q e R são pontos nos lados AC, BC e AB, respectivamente tais que $PQ \parallel AB$, $RP \parallel BC$ e $RB = AP$. Se $\angle AQB = 105°$, ache as medidas dos ângulos do $\triangle ABC$.

Problema 26. BE e AD são as alturas do triângulo ABC, H é o ortocentro e F, G, K são os pontos médios dos segmentos AH, AB, BC, respectivamente. Prove que $\angle FGK$ é reto.

Problema 27. Em um triângulo ABC temos que $\hat{B} = 37°$ e $\hat{C} = 38°$. Sejam P e Q pontos sobre o lado BC tais que $\angle BAP = \angle PAQ = \angle QAC$. Se traça por B uma paralela à AP e por C uma paralela à AQ. O ponto de encontro destas duas retas é D. Calcule $\angle DBC$.

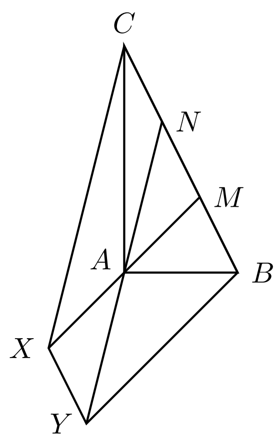
Problema 28. Em um romboide $ABCD$ ($AB = BC$ e $CD = DA$) as diagonais se cortam em um ponto F. Sobre o prolongamento do lado BC se marca um ponto E de modo que $CF = CE$ e $FCED$ também seja um romboide. Se $\angle ABC = 122°$, quanto mede $\angle ADE$?

Problema 29. *(Maio 1996)* Seja $ABCD$ um quadrado e F um ponto qualquer do lado BC. Traça-se por B a perpendicular à reta DF que corta a reta DC em Q. Quanto mede o ângulo $\angle FQC$?

3 Áreas

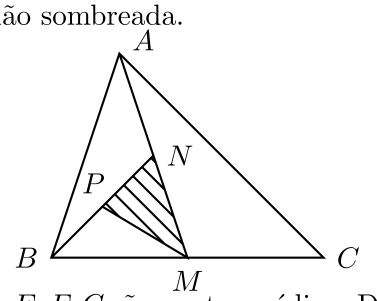
Problema 30. *(OBM 2006)* ABC é um triângulo retângulo e M e N são pontos que trisectam a hipotenuza BC. Sejam X e Y os simétricos de N e M em relação ao ponto A. Determine a área do quadrilátro $XYCB$, sabendo que o triângulo ABC tem área 1 cm^2.

Solução.

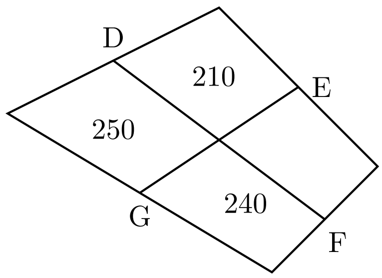


Observe que $\triangle AXY \equiv \triangle ANM$ e $\angle YXA = \angle AMN$. Assim, $XY \parallel MN$ e como $XY = MN = MC = NB$, segue que os quadriláteros $XYCM$ e $XYNB$ são paralelogramos, como A é ponto médio de XM e NY temos que $[AYC] = [BAX] = \frac{2}{3}$. Logo, $[XYCB] = \frac{8}{3}$.

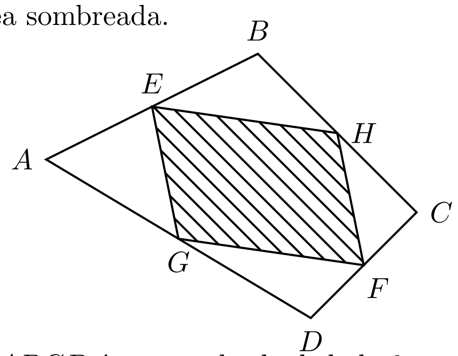
Problema 31. Na figuras abaixo ABC é um triângulo de área $72cm^2$ e M, N, P são pontos médios. Determine a área da região sombreada.



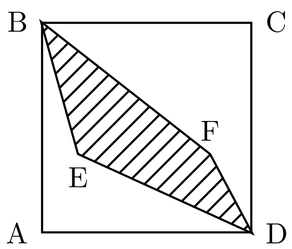
Problema 32. Na figura abaixo D, E, F, G são pontos médios. Determine a área que está faltando.



Problema 33. Na próxima figura $ABCD$ é um quadrilátero de área $200cm^2$ e D, E, F, G são pontos médios. Determine a área sombreada.

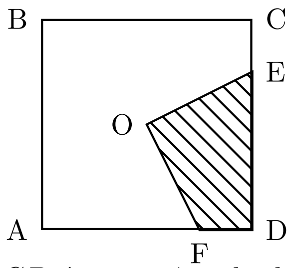


Problema 34. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de lado $6cm$ e EF é um segmento paralelo ao lado AD. Sabendo que a área sombreada é um terço da área do quadrado determine a medida do segmento EF.

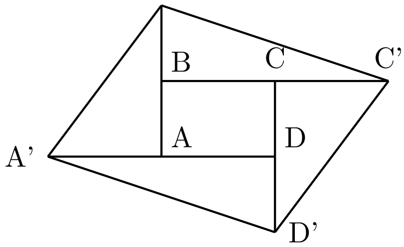


Problema 35. No trapezio $ABCD$, $AD \parallel BC$. $\angle A = \angle D = 45°$, enquanto $\angle B = \angle C = 135°$. Se $AB = 6$ e a área de $ABCD$ é 30, ache BC.

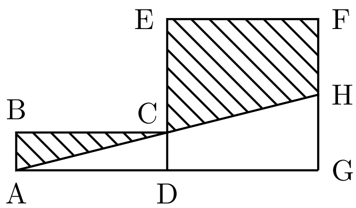
Problema 36. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de lado $4cm$ e O é o seu centro. Determine a área marcada sabendo que o ângulo EOF é reto.



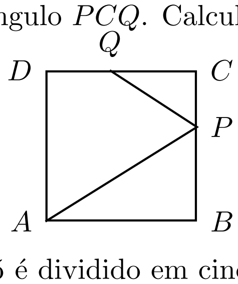
Problema 37. Na figura abaixo $ABCD$ é um retângulo de área $11cm^2$. Sabemos também que $A'A = AD$, $BB' = BA$, $CC' = CB$ e $DD' = DC$. Determine a área do quadrilátero $A'B'C'D'$



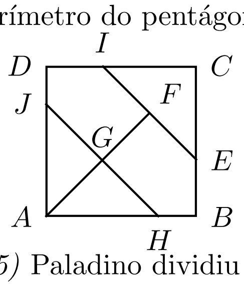
Problema 38. Na figura abaixo $DEFG$ é um quadrado de lado $4cm$ e $ABCD$ um retângulo cujos lados têm medidas $1cm$ e $4cm$. O encontro da reta AC com a reta FG é o ponto H. Determine a área marcada.



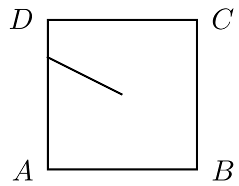
Problema 39. O quadrado $ABCD$ abaixo tem lado $10cm$. Sabe-se que $PC = QD$ e que a área do triângulo ABP é $\frac{7}{3}$ da área do triângulo PCQ. Calcule o perímetro do quadrilátero $APQD$.



Problema 40. Um quadrado de lado 5 é dividido em cinco partes de áreas iguais usando cortes paralelos às suas diagonais. Ache o perímetro do pentágono $BEFGH$.

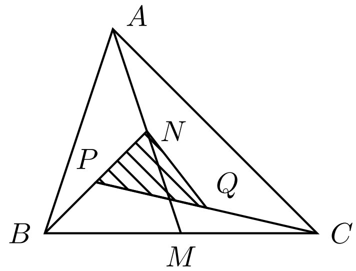


Problema 41. *(Teste Rioplatense 2005)* Paladino dividiu uma folha de papel quadrada, com 20 cm de lado, em 5 pedaços de mesma área. O primeiro corte teve início no centro do quadrado e prolongou-se até a fronteira do papel a 7 cm de um canto, como indicado na figura seguinte.



Sabendo que o João fez todos os cortes em linha recta a partir do centro do quadrado, de que forma cortou o papel?

Problema 42. Na figuras abaixo ABC é um triângulo de área $72cm^2$ e M, N, P, Q são pontos médios. Determine a área da região sombreada.



Problema 43. Sejam $ABCD$ um quadrado de lado $12cm$, E o ponto médio de DA e F o ponto médio de BC. Traçamos os segmentos EF, AC e BE, que dividem o quadrado em seis regiões. Calcular a área de cada uma dessas regiões.

Problema 44. Seja $ABCD$ um retângulo com área 1, e E um ponto sobre CD. Qual é a área do triângulo formado pelos baricentros dos triângulos ABE, BCE, e ADE?

Problema 45. Em um parapelogramo $ABCD$ de área igual a 1, seja E o ponto médio do lado DC, K o ponto de encontro das diagonais BD e AC e L o ponto de encontro de BD com AE. Ache a área do quadrilátero $ELKC$.

Problema 46. No triângulo ABC sabe-se que $\hat{C} = 90°$, $AC = 20$ e $AB = 101$. Seja D o ponto médio de BC. Ache a área do triângulo ADB.

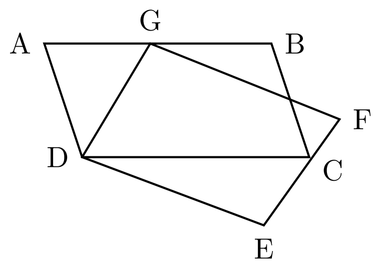
Problema 47. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de área $1cm^2$. Determine a área do triângulo ABC.

Problema 48. Suponha que $ABCDE$ seja um pentágono convexo (não necessariamente regular) tal que as áreas dos triângulos ABC, BCD, CDE, DEA e EAB saõ iguais a 1. Qual a área do pentágono?

Problema 49. No triângulo ABC, D é o ponto médio de BC, E o ponto médio de AD, F o ponto médio de BE e G o ponto médio de FC. Calcule a relação entre as áreas dos triângulo ABC e EFG.

Problema 50. *(Maio 1996)* Um terreno ($ABCD$) tem forma de trapézio retangular. O ângulo em $\hat{A}$ mede 90° e o ângulo em $\hat{D}$ mede 90°. AB mede 30m; AD mede 20m e DC mede 45m. Este terreno tem que ser dividido em dois terrenos de área iguais traçando uma paralela ao lado AD. A que distância de D deve-se traçar a paralela?

Problema 51. Na figura abaixo $ABCD$ e $DEFG$ são paralelogramos. Além disso, F, C e G são colineares. Prove que ambos têm a mesma área.



Problema 52. *(Maio 2006)* Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD. Seja O o ponto de interseção de suas diagonais AC e BD. Se a área do triângulo ABC é 150 e a área do triângulo ACD é 120, calcular a área do triângulo BOC.

Problema 53. *(Maio 2006)* Um retângulo de papel $3cm \times 9cm$ é dobrado ao longo de uma reta, fazendo coincidir dois vértices opostos. Deste modo se forma um pentágono. Calcular sua área.

Problema 54. *(Torneio das Cidades 1981)* O quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito em um círculo de centro O e possui suas diagonais perpendiculares. Prove que a linha quebrada AOC divide o quadrilátero em duas regiões de mesma área.

Problema 55. *(Banco IMO)* Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo e M e N os pontos médios dos lados BC e DA, respectivamente. Prove que $[DFA] + [CNB] = [ABCD]$.

Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 2 Aula 0

Prof. Armando Barbosa

Respostas e Soluções

1 Teorema de Pitágoras

Problema 1. *(a) Consideremos dois quadrados $ABCD$ (de lado a) e $DEFG$ (de lado b), de forma que o ponto D fica entre os pontos A e G. Seja H o ponto pertencente ao segmento $\overline{AG}$ tal que $\overline{GH}$ tem comprimento a. Conectemos os segmentos $\overline{BH}$ e $\overline{GH}$. Façamos os recortes e colagens a seguir, sem rotacionar as figuras:*

- *Recortemos o triângulo AHB e colemos ele no lado $\overline{EF}$ de forma que os lados $\overline{AH}$ e $\overline{EF}$ coincidam;*
- *Recortemos o triângulo HGF e colemos ele no lado $\overline{BC}$ de forma que os lados $\overline{HG}$ e $\overline{BC}$ coincidam.*

Notemos que a figura obtida é um novo quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados são a e b. Daí, como a área inicial dos dois quadrados ($a^2 + b^2$) é igual à área final, fica demonstrado o teorema de Pitágoras.

(b) Em primeiro lugar, lembremos que o ponto de encontro das diagonais de um quadrado é o centro do mesmo.
Voltando à demonstração, consideremos um triângulo retângulo com catetos a e b e hipotenusa c. Considere, sem perda de generalidade, que $a \geqslant b$.
Desenhemos um quadrado de lado a, fazendo um dos lados desse quadrado ser o cateto a, externamente ao triângulo retângulo.
Façamos, também, um quadrado de lado b externamente ao cateto b de forma análoga.
Em cada um desses quadrados, tracemos, pelo centro (ponto de encontro das diagonais), uma reta paralela e uma reta perpendicular a hipotenusa.
Para facilitar o entendimento, demos nomes aos pontos. Consideremos:

- *o triângulo retângulo ABC, retângulo em C, de forma que os catetos a e b são $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente;*
- *o quadrado externo $BCDE$ de centro O;*
- *as retas $\overline{FG}$ e $\overline{HI}$, sendo as retas paralela e perpendicular a $\overline{AB}$ passando por O, respectivamente.*

Seja x tal que

$$x = \overline{BI} = \overline{CG} = \overline{DH} = \overline{EF}$$

Como $ABFG$ é paralelogramo, então temos que:

$$a - x = b + x$$

Além disso, podemos concluir que $\overline{AB} = \overline{FG} = \overline{HI}$.
Desenhemos o quadrado $ABKJ$ externo à hipotenusa.
Recortemos os quadriláteros $BFOI$, $CIOG$, $DGOH$ e $EHOF$ e colemos eles dentro do quadrado $ABKJ$ fazendo O coincidir com cada um dos vértices A, B, K e J. Observemos que essa colagem interna é possível sem interseção entre esses quadriláteros, já que $\overline{OF} = \overline{OG} = \overline{OH} = \overline{OI} = c/2$.
Notemos que a figura que sobra no quadrado $ABKJ$ após essa colagem, possui 4 ângulos retos e cada lado tem tamanho igual a:

$$(a - x) - x = a - 2x = b$$

Portanto, a figura que sobra é um quadrado de lado b.
Analisando o quadrado $ABKJ$, segue a demonstração do teorema de Pitágoras, pois tal quadrado de área c^2 foi dividido em um quadrado de lado b^2 mais quatro quadriláteros cuja soma das áreas é igual a a^2.

Problema 2. *(a) Analisando o lado em comum dos dois triângulos, temos que:*

$$\begin{aligned} x^2 - 6^2 &= 8^2 + 4^2 \\ x &= 2\sqrt{29} \end{aligned}$$

(b) Indo da esquerda para a direita, temos que:

$$\begin{aligned} \left(6^2 + 4^2\right) + 3^2 &= x^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2 \\ 61 &= x^2 - 20 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

(c) Traçando a altura a partir da extremidade da base menor, temos que:

$$\begin{aligned} x^2 + (17 - 9)^2 &= 10^2 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

(d) Olhando o cateto em comum dos dois triângulos, temos que:

$$\begin{aligned} 10^2 - (2x)^2 &= \left(2\sqrt{13}\right)^2 - x^2 \\ 48 &= 3x^2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Problema 3. *Marcando ângulos, podemos concluir que:*

$$\begin{aligned} \angle BCM &= 90^\circ - \angle BMC \\ &= 90^\circ - (180^\circ - 90^\circ - \angle HME) \\ \angle BCM &= \angle HME \end{aligned}$$

Como $\angle CBM = \angle MEH = 90^\circ$ *e* $\overline{CM} = \overline{MH} =$ *lado do quadrado* $CMHN$*, então, por ângulo-lado-ângulo oposto, temos que:* $\triangle CBM \equiv \triangle MEH$.
Sejam x, y, z *os lados dos quadrados* $ABCD$, $EFGH$, $CMHN$*, respectivamente. Daí, podemos concluir que:* $x^2 = 64cm^2$ *e* $y^2 = 36cm^2$.
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle CBM$*, temos que:*

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + \left(\overline{BM}\right)^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= 64cm^2 + 36cm^2 \\ z^2 &= 100cm^2 \end{aligned}$$

Portanto, a área do quadrado $CMHN$ *é igual a* $100cm^2$.

Problema 4. *Notemos que, se o círculo do centro tem raio igual a* $1cm$*, então o lado de cada um dos quadrados tem lado igual a* $2cm$*.*
Liguemos o centro dos círculos:

- *para o vértice de um quadrado que pertença também a circunferência maior (pode ser, por exemplo, o quadrado mais à esquerda);*
- *ao ponto médio do lado que possui o vértice do passo anterior, de forma que esse segmento passe pelo ponto que pertence a circunferência menor e ao quadrado, ao mesmo tempo.*

Daí, notemos que foi gerado um triângulo retângulo cujos:

- *os catetos são:*
  - ⋆ $1cm$ *(metade do lado do quadrado maior);*
  - ⋆ $1cm + 2cm = 3cm$ *(raio da circunferência menor + lado do quadrado).*
- *a hipotenusa é* R *(raio da circunferência maior).*

Portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$\begin{aligned} R^2 &= (1cm)^2 + (3cm)^2 \\ &= 10cm^2 \\ R &= \sqrt{10}cm \end{aligned}$$

Problema 5. *Seja* F *um ponto em* $\overline{AB}$*, tal que* $\overline{PF} \perp \overline{AB}$*. Traçando o segmento* $\overline{PF}$*, notemos que* $\overline{AP} = \overline{BP}$ *implica em* $\triangle APF \equiv \triangle BPF$*, pois ambos são retângulos e possuem hipotenusa e um dos catetos iguais, o que implica, pelo teorema de Pitágoras, que o outro cateto também é igual.*
Como consequência, podemos concluir que F *é ponto médio de* $\overline{AB}$*. Portanto:*

$$\overline{AF} = \overline{BF} = 14$$

Percebamos, então, que como $\overline{CD} \perp \overline{PE}$*, então* $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$*. Com isso, podemos concluir que* E *é ponto médio de* $\overline{CD}$*.*
Seja x *tal que* $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{PE} = x$*. Daí, temos que*

$$\overline{PF} = 28 - x$$

.
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle APF$*, podemos conclur que:*

$$\begin{aligned} \left(\overline{AP}\right)^2 &= \left(\overline{PF}\right)^2 + \left(\overline{AF}\right)^2 \\ x^2 &= (28-x)^2 + 14^2 \\ x^2 &= 28^2 - 2 \cdot 28 \cdot x + x^2 + 14^2 \\ 56 \cdot x &= 784 + 196 \\ x &= \frac{35}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{AP} = x = \dfrac{35}{2}$*.*

Problema 6. *Notemos que* $\overline{BP}$ *é bissetriz, ou seja, que* $\angle ABP = \angle CBP = 45°$*.*
Considere os catetos $\overline{AB} = x$ *e* $\overline{BC} = y$*. Façamos duas soluções:*

Solução usando teorema da bissetriz interna
Pelo teorema da bissetriz interna, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} &= \frac{\overline{CB}}{\overline{CP}} \\ \frac{x}{1} &= \frac{y}{2} \\ y &= 2x \end{aligned}$$

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ABC*, podemos concluir que:*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (1+2)^2 \\ x^2 + 4x^2 &= 9 \\ x^2 &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

Portanto, temos que área do triângulo ABC *é igual a:*

$$\frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot 2 \cdot x}{2} = x^2 = \frac{9}{5}$$

.

Solução usando apenas teorema de Tales

Seja Q o ponto pertencente a $\overline{BC}$ tal que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$. Seja $\overline{PQ} = z$. Note que o triângulo BPQ é isósceles, pois $\angle PBQ = \angle BPQ = 45°$.

Pelo teorema de Tales, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{3}{2} \\ z &= \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

Pelo teorema de Tales, também temos que:

$$\begin{aligned} \frac{y}{y-z} &= \frac{3}{2} \\ 2y &= 3y - 3z \\ y &= 3z \end{aligned}$$

Dos dois últimos resultados encontrados, podemos concluir que: $y = 2x$.

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ABC, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (1+2)^2 \\ x^2 + 4x^2 &= 9 \\ x^2 &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

Portanto, temos que área do triângulo ABC é igual a:

$$\frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot 2 \cdot x}{2} = x^2 = \frac{9}{5}$$

.

Problema 7. *Consideremos os pontos:*

- *O_1 e O_2 os centros da maior e menor circunferências, respectivamente;*
- *R o ponto do segmento $\overline{O_1P}$, tal que $\overline{RO_2} \parallel \overline{PQ}$.*

Liguemos os segmentos $\overline{O_1O_2}$, $\overline{O_1P}$ e $\overline{O_2Q}$.

Notemos que PQO_2R é retângulo. Com isso podemos concluir que: $\overline{RO_2} = \overline{PQ}$ e $\overline{PR} = 2$.

Daí, temos que:

$$\overline{RO_1} = 3 - 2 = 1$$

Aplicanto teorema de Pitágoras no triângulo RO_1O_2, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \left(\overline{RO_2}\right)^2 + \left(\overline{RO_1}\right)^2 &= \left(\overline{O_1O_2}\right)^2 \\ \left(\overline{PQ}\right)^2 + 1^2 &= 10^2 \\ \overline{PQ} &= \sqrt{99} \end{aligned}$$

Problema 8. *Sejam:*

- *r o raio e O o centro do círculo da figura;*
- *$ABCD$ o quadrado de lado 1, mais ao alto e à direita, com C sendo também o centro do quadrado de lado 2;*
- *M e N os pontos de tangência da circunferência com os lados do quadrado.*

Como $\overline{AN} = \overline{AM}$ e $\angle NAM = 90°$, segue que $AMON$ é um quadrado e, pelo teorema de Pitágoras no triângulo OMA temos que:

$$\begin{aligned}
\left(\overline{AO}\right)^2 &= \left(\overline{OM}\right)^2 + \left(\overline{MA}\right)^2 \\
\overline{AO} &= \sqrt{r^2 + r^2} \\
\overline{AO} &= r\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Aplicando novamente o teorema de Pitágoras, podemos concluir que:

$$\overline{AC} = \sqrt{2}$$

Além disso, como $\angle OAB = \angle CAB$, então temos que C, O e A são colineares. Com isso, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\overline{AC} &= \overline{AO} + \overline{OC} \\
\sqrt{2} &= r \cdot \sqrt{2} + r \\
r &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \\
r &= 2 - \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Problema 9. *Seja x tal que $\overline{AF} = \overline{FC} = \overline{CE} = \overline{EA} = x$. Daí, temos que: $\overline{BF} = 16 - x$. Aplicando teorema de Pitágoras no triângulo FBC, podemos concluir que:*

$$\begin{aligned}
(16 - x)^2 + 12^2 &= x^2 \\
16^2 - 2 \cdot 16 \cdot x + x^2 + 12^2 &= x^2 \\
256 + 144 &= 32 \cdot x \\
x &= \frac{25}{2}
\end{aligned}$$

Seja G o pé da altura do ponto F no triângulo EFC. Então, temos que:

$$\overline{FG} = \overline{BC} = 12$$

Além disso, podemos concluir que: $\overline{GC} = \overline{BF} = 16 - \dfrac{25}{2} = \dfrac{7}{2}$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned}
\overline{EG} &= \overline{EC} - \overline{GC} \\
&= \frac{25}{2} - \frac{7}{2} \\
\overline{EG} &= 9
\end{aligned}$$

Aplicando teorema de Pitágoras no triângulo EFG, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}\left(\overline{EF}\right)^2 &= \left(\overline{FG}\right)^2 + \left(\overline{EG}\right)^2\\ \left(\overline{EF}\right)^2 &= 12^2 + 9^2\\ \overline{EF} &= 15\end{aligned}$$

Problema 10. *Tracemos perpendiculares do ponto P para cada um dos lados do retângulo. Sejam $\overline{PE} = x$, $\overline{PF} = y$, $\overline{PG} = z$ e $\overline{PH} = w$ essas perpendiculares de forma que E, F, G e H estão nos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente.*
Aplicando teorema de Pitágoras em alguns triângulos, temos que:

1. $\triangle AEP$: $x^2 + w^2 = 2^2 = 4$;
2. $\triangle BFP$: $x^2 + y^2 = 3^2 = 9$;
3. $\triangle CGP$: $y^2 + z^2 = 10^2 = 100$;
4. $\triangle DHP$: $z^2 + w^2 = \left(\overline{PD}\right)^2$.

Dos itens 1 e 3, concluímos que:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 104$$

Dos itens 2 e 4, concluímos que:

$$\begin{aligned}9 + \left(\overline{PD}\right)^2 &= 104\\ \overline{PD} = \sqrt{95}\end{aligned}$$

Problema 11. *Seja x tal que $\overline{CF} = x$. Daí, temos que: $\overline{FA} = x$ e $\overline{BF} = 9 - x$. Lembrando que $\overline{AB} = 3$, podemos aplicar teorema de Pitágoras no $\triangle ABF$ para concluir que:*

$$\begin{aligned}x^2 &= (9-x)^2 + 3^2\\ x^2 &= 9^2 - 2\cdot 9\cdot x + x^2 + 3^2\\ 18\cdot x &= 90\\ x &= 5\end{aligned}$$

Seja y tal que $\overline{ED} = y$. Daí, temos que: $\overline{D'E} = y$ e $\overline{AE} = 9 - y$. Lembrando que $\overline{D'A} = \overline{DC} = 3$, podemos aplicar teorema de Pitágoras no $\triangle AD'E$ para concluir que:

$$\begin{aligned}(9-y)^2 &= 3^2 + y^2\\ 9^2 - 2\cdot 9\cdot y + y^2 &= 9 + y^2\\ 72 &= 18\cdot y\\ y &= 4\end{aligned}$$

Podemos calcular a área do pentágono $ABEFD'$ somando a área do trapézio $BFEA$ mais a área do triângulo EAD'. Calculemos cada uma dessas áreas:

- *área do trapézio $BFEA$:*

$$[BFEA] = \frac{(4+5)\cdot 3}{2} = \frac{27}{2}$$

- *área do triângulo EAD':*

$$[EAD'] = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$$

Portanto, a área do pentágono $ABEFD'$ é igual a:

$$\frac{27}{2} + 6 = \frac{39}{2}$$

2 Trabalhando com ângulos

Problema 12. *Seja x tal que $\angle CAM = x$. Como o triângulo CAM é isósceles em A, portanto podemos concluir que:*

$$\angle CMA = \angle CMN = x$$

Seja y tal que $\angle CBN = y$. Como o triângulo CBN é isósceles em B, portanto podemos concluir que:

$$\angle CNB = \angle CNM = y$$

Analisando o triângulo CNM, temos que:

$$\angle NCM = 180^\circ - \angle CMN - \angle CNM = 180^\circ - (x+y)$$

Como o triângulo ACB é retângulo em C, temos que:

$$x + y = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Usando os dois últimos resultados encontrados, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \angle NCM &= 180^\circ - 90^\circ \\ \angle NCM &= 90^\circ \end{aligned}$$

Problema 13. *Resolvido no próprio material.*

Problema 14. *Sejam x, y tais que $\overline{GH} = x$ e $\overline{HA} = y$. Considere os seguintes pontos:*

- *M o ponto de interseção dos prolongamentos de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$;*
- *N o ponto de interseção dos prolongamentos de $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$;*
- *O o ponto de interseção dos prolongamentos de $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$;*
- *P o ponto de interseção dos prolongamentos de $\overline{GH}$ e $\overline{AB}$.*

Como o octógono $ABCDEFGH$ é equiangular, podemos concluir que cada ângulo interno é igual a:

$$\frac{180^\circ \cdot (8-2)}{8} = 135^\circ$$

Note que o $\triangle BCM$ é retângulo e isósceles, pois:

$$\begin{aligned} \angle CBM = \angle BCM &= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ \\ \angle BMC &= 90^\circ \end{aligned}$$

Lembrando que o lado $\overline{BC} = 2$, então podemos aplicar o teorema de Pitágoras no $\triangle BCM$ para concluir que:

$$\overline{BM} = \overline{CM} = \sqrt{2}$$

De forma análoga, temos que:

- *$\triangle DEN$ é retângulo e isósceles implica em: $\overline{DN} = \overline{EN} = 2 \cdot \sqrt{2}$;*
- *$\triangle FGO$ é retângulo e isósceles implica em: $\overline{FO} = \overline{GO} = \sqrt{2}$;*
- *$\triangle AHP$ é retângulo e isósceles implica em: $\overline{HP} = \overline{AP} = \dfrac{y \cdot \sqrt{2}}{2}$.*

Note que o quadrilátero $MNOP$ é retângulo, pois possui quatro ângulos retos. Daí, podemos calcular y e x:

- *valor de y:*

$$\begin{aligned} \overline{MP} &= \overline{NO} \\ \frac{y \cdot \sqrt{2}}{2} + 1 + \sqrt{2} &= \sqrt{2} + 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \\ y &= 4 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

- *valor de x:*

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{MN} \\ \sqrt{2} + x + \frac{y \cdot \sqrt{2}}{2} &= \sqrt{2} + 3 + 2 \cdot \sqrt{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Daí, temos que o perímetro p do octógono $ABCDEFGH$ é igual a:

$$\begin{aligned} p &= 1 + 2 + 3 + 4 + 2 + 2 + x + y \\ &= 14 + 2 + \left(4 + \sqrt{2}\right) \\ p &= 20 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Problema 15. *Solucionado na questão 13 do próprio material.*

Problema 16. *Além do triângulo* PRS*, tracemos os segmentos* $\overline{PV}$ *e* $\overline{PT}$*.*
Como o pentágono $RSTUV$ *é regular, então temos que cada ângulo interno desse pentágono é igual a:*

$$\frac{180^\circ \cdot (5-2)}{8} = 108^\circ$$

Como o triângulo PRS *é equilátero, então temos que cada ângulo interno desse triângulo é igual a:*

$$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \angle VRP &= \angle VRS - \angle PRS = 108^\circ - 60^\circ \\ \angle VRP &= 48^\circ \end{aligned}$$

Sabendo que o triângulo PRV *é isósceles em* R*, pois* $\overline{RS} = \overline{RP} = \overline{RV}$*, então, analisando o* $\triangle PRV$*, temos que:*

$$\begin{aligned} \angle VPR = \angle PVR &= \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} \\ \angle VPR &= 66^\circ \end{aligned}$$

Analogamente, podemos concluir que: $\angle SPT = 66^\circ$*.*
Analisando o ponto P*, temos que:*

$$\begin{aligned} \angle VPT &= 360^\circ - \angle VPR - \angle RPS - \angle SPT \\ &= 360^\circ - 192^\circ \\ \angle VPT &= 168^\circ \end{aligned}$$

Note que $\triangle VRP \equiv \triangle TSP$ *pelo caso lado-ângulo-lado, pois:*

- $\overline{RV} = \overline{RP} = \overline{SP} = \overline{ST}$*;*
- $\angle VRP = \angle TSP = 48^\circ$

Com isso, podemos concluir que $\overline{VP} = \overline{TP}$ *e, consequentemente, que* $\triangle VPT$ *é isósceles em* P*.*
Das nossas últimas duas conclusões, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \angle PVT = \angle PTV &= \frac{180^\circ - 168^\circ}{2} \\ \angle PTV &= 6^\circ \end{aligned}$$

Problema 17. *Considere os pontos da estrela* A*,* B*,* C*,* D *e* E *e os respectivos ângulos internos:* a*,* b*,* c*,* d *e* e*.*
Considere os pontos do pentágono interno P*,* Q*,* R*,* S *e* T *de tal forma que:*

- A*,* P*,* Q *e* C *são colineares;*

- *B, Q, R e D são colineares;*
- *C, R, S e E são colineares;*
- *D, S, T e A são colineares;*
- *E, T, P e B são colineares.*

Analisando o triângulo ASC, temos que:

$$\angle ASC = \angle RST = 180 - a - c$$

De forma análoga, podemos analisar alguns outros triângulos e encontrar valores de ângulos:

- *$\triangle BTD$: $\angle BTD = \angle STP = 180° - b - d$;*
- *$\triangle CPE$: $\angle CPE = \angle TPQ = 180° - c - e$;*
- *$\triangle DQA$: $\angle DQA = \angle PQR = 180° - d - a$;*
- *$\triangle ERB$: $\angle ERB = \angle QRS = 180° - e - b$.*

Analisando a soma dos ângulos internos do pentágono $PQRST$, temos que:

$$\begin{aligned} 180° \cdot (5-2) &= \angle RST + \angle STP + \angle TPQ + \angle PQR + \angle QRS \\ 540° &= 900° - 2 \cdot (a+b+c+d+e) \\ a+b+c+d+e &= 180° \end{aligned}$$

Problema 18. *Obs.: O enunciado está errado, pois, com as informações dele, podemos concluir que os ângulos C e B são iguais a $90°$.*
Retiremos, então, a informação de que o triângulo ABC é isósceles e mantemos o restante do enunciado.
Seja x e y tais que $\angle BAC = x$ e $\angle ABC = y$. Analisando alguns triângulos, temos que:

- *$\triangle APC$ é isósceles em P implica em $\angle PAC = \angle PCA = x$;*
- *$\triangle BPC$ é isósceles em P implica em $\angle PBC = \angle PCB = y$;*
- *$\triangle ABC$: soma dos ângulos internos:*

$$\begin{aligned} x + x + y + y &= 180° \\ x + y = \angle ACB &= 90° \end{aligned}$$

Como a bissetriz do $\angle ABC$ corta $\overline{PC}$ em O de forma que $\overline{PO} = \overline{BO}$, podemos concluir que:

- *$\overline{BO}$ é bissetriz de $\angle PBC$ implica em:*

$$\angle PBO = \angle OBC = \frac{y}{2}$$

- *$\triangle PBO$ é isósceles em O implica em:*

$$\angle BPO = \angle PBO = \frac{y}{2}$$

- *$\triangle PBC$: soma dos ângulos internos:*

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} + y + y &= 180^\circ \\ y = \angle ABC &= 72^\circ \end{aligned}$$

Por último, temos que:

$$\begin{aligned} x + y &= 90^\circ \\ x = \angle BAC &= 18^\circ \end{aligned}$$

Problema 19. *Seja E o ponto de encontro da bissetriz do ângulo $\angle ADC$ com o segmento $\overline{AB}$.*
Daí, temos que $\triangle DAE$ é isósceles em A, pois:

- $\angle ADE = \angle EDC = \dfrac{138^\circ}{2} = 69^\circ$;

- $\angle AED = 69^\circ$, *uma vez que* $\overline{AE} \parallel \overline{DC}$.

Consequentemente, podemos concluir que:

$$\overline{AD} = \overline{AE} = 39$$

.
Além disso, temos que o quadrilátero $CDEB$ é paralelogramo, pois $\overline{EB} \parallel \overline{DC}$ e $\angle ABC = \angle AED = 69^\circ$ implica em $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$.
Com isso, podemos concluir que:

$$\overline{DC} = \overline{EB} = 14$$

.
Usando as duas últimas conclusões, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AE} + \overline{EB} \\ \overline{AB} &= 53 \end{aligned}$$

Problema 20. *Seja x tal que $\angle BAE = x$.*
Como E é ponto médio de $\overline{BC}$, então podemos concluir que $\triangle ABE \equiv \triangle DCE$ pelo caso lado-ângulo-lado, pois:

- $\overline{AB} = \overline{DC}$;

- $\angle ABE = \angle DCE = 90^\circ$;

- $\overline{BE} = \overline{EC}$

Daí, temos que: $\angle BAE = \angle CDE = x$.
Lembrando que F *é ponto médio do lado* $\overline{CD}$*, podemos aplicar teorema de Pitágoras nos triângulos* ADF *e* BCF *para concluir que:* $\overline{AF} = \overline{FB}$*. Com isso, temos que o triângulo* AFB *é isósceles em* F *e, consequentemente, como* $\angle EAF = 20°$*, então temos que:*

$$\angle FAB = \angle FBA = 20° + x$$

Como $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$*, então podemos concluir que:* $\angle FBA = \angle BFC = 20° + x$*. Dai, temos que:*

$$\angle GFD = 180° - (20° + x) = 160° - x$$

Analisando a soma dos ângulos internos do triângulo DFG*, podemos concluir que:*

$$\begin{aligned} \angle DGF + (160° - x) + x &= 180° \\ \angle DGF &= 20° \end{aligned}$$

Observando dois ângulos opostos pelo vértice no ponto G*, temos que:*

$$\angle DGF = \angle EGB = 20°$$

.

Problema 21. *Como* $DEFG$ *é quadrado, então podemos concluir que:* $\angle DEF = 90°$.
Como o pentágono $ABCDE$ *é regular, então temos que:*

$$\angle DEA = \frac{180° \cdot (5-2)}{5} = 108°$$

Analisando a soma dos ângulos ao redor do ponto E*, temos que:*

$$\angle AEF = 360° - 108° - 90° = 162°$$

Além disso, notemos que o triângulo AEF *é isósceles em* E*, pois* $\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{EF}$.
Com isso, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \angle EAF = \angle EFA &= \frac{180° - 162°}{2} \\ \angle EAF &= 9° \end{aligned}$$

Problema 22. *Sejam* x, y *tais que* $\angle CDE = x$ *e* $\angle DAE = y$.
Como $\overline{AE} = \overline{AD}$*, então temos que* $\triangle ADE$ *é isósceles em* A*. Portanto, como* $\angle DAE = y$*, podemos concluir que:*

$$\angle AED = \angle ADE = \frac{180° - y}{2} = 90° - \frac{y}{2}$$

Como $\overline{AB} = \overline{AC}$, então temos que $\triangle ABC$ é isósceles em A. Portanto, como $\angle CAB = y + 48°$, podemos concluir que:

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180° - (y + 48°)}{2} = 66° - \frac{y}{2}$$

Somando os ângulos internos do $\triangle CDA$ temos que:

$$\begin{aligned} y + 66° - \frac{y}{2} + x + 90° - \frac{y}{2} &= 180° \\ x = \angle CDE &= 24° \end{aligned}$$

Problema 23. *Seja x tal que $\angle BAC = x$.*
Analisando alguns triângulos isósceles e alguns ângulos suplementares ("ângulos que somam 180°), podemos calcular alguns ângulos:

- *$\triangle FAE$ é isósceles em F implica em:*
  - ⋆ $\angle FAE = \angle FEA = x$;
  - ⋆ $\angle AFE = 180° - 2x$ e $\angle EFD = 2x$.
- *$\triangle EFD$ é isósceles em E implica em:*
  - ⋆ $\angle EFD = \angle EDF = 2x$;
  - ⋆ $\angle FED = 180° - 4x$ e $\angle DEC = 3x$.
- *$\triangle DEC$ é isósceles em D implica em:*
  - ⋆ $\angle DEC = \angle DCE = 3x$;
  - ⋆ $\angle EDC = 180° - 6x$ e $\angle CDB = 4x$.
- *$\triangle CDB$ é isósceles em C implica em:*
  - ⋆ $\angle CDB = \angle CBD = 4x$.
- *$\triangle ABC$ é isósceles em A implica em:*
  - ⋆ $\angle ABC = \angle ACB = 4x$.

Somando os ângulos internos do $\triangle ABC$ temos que:

$$\begin{aligned} x + 4x + 4x &= 180° \\ 9x &= 180° \\ x = \angle BAC &= 20° \end{aligned}$$

Problema 24. *Como o triângulo ABC é isósceles em B, então temos que:*

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{180° - 144°}{2} = 18°$$

Como $\overline{KL} \parallel \overline{AC}$, *então podemos concluir que:* $\angle BKL = \angle BAC = 18°$ *e* $\angle BLK = \angle BCA = 18°$.
Sabendo que $\overline{KM} \parallel \overline{BC}$, *ou seja,* $\overline{KM} \parallel \overline{BL}$ *e* $\angle BLK = 18°$, *então temos que:* $\angle LKM = \angle BLK = 18°$.
Como o triângulo KLM *é isósceles em* K, *então podemos concluir que:*

$$\angle KLM = \angle KML = \frac{180° - 18°}{2} = 81°$$

Somando os ângulos internos do $\triangle KPM$, *temos que:*

$$\begin{aligned} \angle KPM + \angle PMK + \angle MKP &= 180° \\ \angle BPL &= 180° - 81° - 36° \\ \angle BPL &= 63° \end{aligned}$$

Problema 25. *Seja* x *tal que* $\angle BAC = x$. *Como o triângulo* ABC *é isósceles em* B, *então temos que:* $\angle BCA = x$ *e* $\angle ABC = 180° - 2x$.
Como $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$, *então podemos concluir que:* $\angle PQC = \angle ABC = 180° - 2x$ *e, consequentemente,* $\angle PQB = 2x$. *Sabendo que* $\angle AQB = 105°$, *então temos que:*

$$\angle AQP = 2x - 105°$$

Também, a relação $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ *implica em:* $\angle BAQ = \angle AQP = 2x - 105°$. *Como* $\angle BAC = x$, *então podemos concluir que:*

$$\angle QAP = x - (2x - 105°) = 105° - x$$

Notemos que $\triangle ABC \sim \triangle PQC$ *pois* $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$. *Daí, seja* m *tal que* $\overline{PQ} = \overline{QC} = m$.
Percebamos que o quadrilátero $BQPR$ *é paralelogramo. Portanto, temos que:* $\overline{RB} = \overline{PQ} = m$. *Pelo enunciado, temos que* $\overline{RB} = \overline{AP} = m$.
Com isso, podemos concluir que o triângulo APQ *é isósceles em* P, *pois* $\overline{AP} = \overline{PQ} = m$. *Portanto, temos que:*

$$\begin{aligned} \angle PQA &= \angle PAQ \\ 2x - 105° &= 105° - x \\ x &= 70° \end{aligned}$$

Logo, os ângulos do triângulo ABC *são:* $x = \angle BAC = \angle BCA = 70°$ *e* $180° - 2x = \angle ABC = 40°$.

Problema 26. *Seja* A *o valor do ângulo* $\angle BAC$.
Pelo triângulo retângulo ABE, *temos que:* $\angle ABE = 90° - A$. *Como* G *e* F *são pontos médios dos segmentos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AH}$, *respectivamente, então podemos concluir que* $\overline{GF}$ *é base média no triângulo* ABH. *Portanto, temos que* $\overline{GF} \parallel \overline{BH}$ *e, consequentemente,*

$$\angle AGF = \angle ABH = 90° - A$$

(Obs.: outra forma de achar que as retas $\overline{GF}$ e $\overline{BH}$ são paralelas é a aplicação direta do teorema de Tales levando em consideração os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AH}$.)
De forma análoga à conclusão anterior, podemos concluir que $\overline{GK}$ é base média do triângulo BAC e, consequentemente,

$$\angle BGK = \angle BAC = A$$

Considerando o ponto G no segmento $\overline{AB}$, temos que:

$$\begin{aligned} \angle AGF + \angle FGK + \angle KGB &= 180^\circ \\ \angle FGK &= 180^\circ - A - (90^\circ - A) \\ \angle FGK &= 90^\circ \end{aligned}$$

Problema 27. *Somando os ângulos internos do $\triangle ABC$, temos que:*

$$\begin{aligned} \angle BAC + \angle ACB + \angle CBA &= 180^\circ \\ \angle BAC &= 180^\circ - 37^\circ - 38^\circ \\ \angle BAC &= 105^\circ \end{aligned}$$

Daí, podemos concluir que:

$$\angle BAP = \angle PAQ = \angle QAC = \frac{105^\circ}{3} = 35^\circ$$

Note que $\overline{BD} \parallel \overline{AP}$ implica em $\angle DBA = \angle BAP = 35^\circ$. Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} \angle DBC &= \angle DBA + \angle ABC \\ &= 35^\circ + 37^\circ \\ \angle DBC &= 72^\circ \end{aligned}$$

<u>Obs.:</u> Com as informações do enunciado, podemos achar os demais ângulos do triângulo DBC:

- *Analogamente ao cálculo do ângulo $\angle DBC$, podemos concluir que: $\overline{CD} \parallel \overline{AQ}$ implica em $\angle ACP = 35^\circ$ e, consequentemente, temos que:*

$$\begin{aligned} \angle DCB &= 35^\circ + 38^\circ \\ \angle DCB &= 73^\circ \end{aligned}$$

- *Somando os ângulos internos do $\triangle DBC$, temos que:*

$$\begin{aligned} \angle BDC + \angle DBC + \angle DCB &= 180^\circ \\ \angle BDC &= 35^\circ \end{aligned}$$

Problema 28. *Percebamos que $\triangle BAD \equiv \triangle BCD$ pelo caso lado-lado-lado (LLL), pois os três lados dos dois triângulos são iguais. Logo, temos que: $\angle ABF = \angle CBF$.*

Com essa igualdade de ângulos, podemos concluir que: $\triangle ABF \equiv \triangle CBF$ *pelo caso lado-ângulo-lado. Daí, temos que:* $\angle AFB = \angle CFB$.
Como a soma desses ângulos é igual a $180°$*, então temos que:*

$$\angle AFB = \angle CFB = 90°$$

e, consequentemente, podemos concluir que:

$$\angle AFD = \angle CFD = 90°$$

Notemos que o triângulo ABC *é isósceles em* B*. Portanto, temos que:*

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{180° - 122°}{2} = 29°$$

Por consequência, podemos concluir que: $\angle FCE = 180° - 29° = 151°$.
Percebamos que $\triangle CFD \equiv \triangle CED$ *pelo caso lado-lado-lado (LLL), pois os três lados dos dois triângulos são iguais. Daí, temos que:*

$$\angle CFD = \angle CED = 90°$$

Somando os ângulos internos do quadrilátero $FCED$*, podemos concluir que:*

$$\begin{aligned} \angle FDE + \angle DEC + \angle ECF + \angle CFD &= 360° \\ \angle FDE = \angle BDE &= 29° \end{aligned}$$

Como $\triangle CFD \equiv \triangle CED$*, então temos que:*

$$\angle CDE = \angle CDF = \frac{29°}{2}$$

Como $\triangle BAD \equiv \triangle BCD$*, então podemos concluir que:*

$$\angle CDB = \angle ADB = \frac{29°}{2}$$

Finalmente, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \angle ADE &= \angle ADB + \angle BDE \\ &= \frac{29°}{2} + 29° \\ \angle ADE &= \frac{87°}{2} \end{aligned}$$

Problema 29. *Seja* α *tal que* $\angle CDF = \alpha$*. Seja* P *o ponto de encontro dos segmentos* $\overline{DF}$ *e* $\overline{BQ}$.
Analisando o triângulo retângulo DPQ*, temos que:* $\angle PQD = 90° - \alpha$.
Analisando o triângulo retângulo BCQ*, podemos concluir que:* $\angle CBQ = \alpha$.
Então, temos que: $\triangle DCF \equiv \triangle BCQ$ *pelo caso ângulo-lado-ângulo oposto, pois*

- *$\angle CDF = \angle CBQ = \alpha$;*
- *$\overline{DC} = \overline{BC}$ = lado do quadrado;*
- *$\angle DCF = \angle BCQ = 90°$*

Com isso, podemos concluir que $\overline{CF} = \overline{CQ}$.
Dessa forma, temos que o triângulo FCQ é isósceles em C, além de ser retângulo. Daí, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \angle QFC = \angle FQC &= \frac{180° - 90°}{2} \\ \angle FQC &= 45° \end{aligned}$$

3 Áreas

Problema 30. *A solução do material apresenta erros. Segue a versão corrigida da solução.* *Observe que $\triangle AXY \equiv \triangle AMN$ e $\angle YXA = \angle AMN$. Assim, $\overline{XY} \parallel \overline{MN}$ e como:*

$$\overline{XY} = \overline{MN} = \overline{MB} = \overline{NC}$$

segue que os quadriláteros $XYCN$ e $XYNB$ são paralelogramos.
Como A é ponto médio do segmento $\overline{XM}$, temos que:

$$[AXC] = [AMC] = \frac{2}{3}$$

Analogamente, como A é ponto médio do segmento $\overline{NY}$, podemos concluir que:

$$[ABY] = [ABN] = \frac{2}{3}$$

Lembrando que $[AXY] = [AMN] = \frac{1}{3}$, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} [XYBC] &= [AYX] + [AXC] + [ACB] + [ABY] \\ [XYBC] &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} \\ [XYBC] &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Problema 31. *Notemos que os dois triângulos gerados, quando traçamos uma mediana, possuem a mesma área, pois possuem bases de comprimentos iguais (pela própria definição de ponto médio) e a mesma altura. Daí, temos que:*

- *M é ponto médio de $\overline{BC}$ implica em:*

$$[AMB] = [AMC] = \frac{72cm^2}{2} = 36cm^2$$

- *N é ponto médio de $\overline{AM}$ implica em:*

$$[ANB] = [MNB] = \frac{36cm^2}{2} = 18cm^2$$

- *P é ponto médio de $\overline{BN}$ implica em:*

$$[BPM] = [NPM] = \frac{18cm^2}{2} = 9cm^2$$

Problema 32. *Sejam M, N, O e P os pontos do quadrilátero maior de forma que D, E, F e G são os pontos médios dos segmentos $\overline{MN}$, $\overline{NO}$, $\overline{OP}$ e $\overline{PM}$, respectivamente.*
Seja Q o ponto de encontro dos segmentos $\overline{DF}$ e $\overline{EG}$. Conectemos os segmentos $\overline{MQ}$, $\overline{NQ}$, $\overline{OQ}$ e $\overline{PQ}$.
Lembrando que os dois triângulos gerados a partir da construção de uma mediana possuem a mesma área, podemos fazer as seguintes considerações:

- *Seja x tal que $[MDQ] = [NDQ] = x$;*
- *Seja y tal que $[NEQ] = [OEQ] = y$;*
- *Seja z tal que $[OFQ] = [PFQ] = z$;*
- *Seja w tal que $[PGQ] = [MGQ] = w$.*

Daí, temos que:

$$[DNEQ] + [FPGQ] = x + y + z + w = 210 + 240 = 450$$

Usando o resultado anterior, podemos concluir que a área que está faltando ($[EOFQ]$) pode ser calculada pelo desenvolvimento a seguir:

$$\begin{aligned} [EOFQ] + [DMGQ] &= x + w + y + z \\ [EOFQ] &= 450 - 250 \\ [EOFQ] &= 200 \end{aligned}$$

Problema 33. *Pelo fato conhecido de mediana e altura, traçando o segmento $\overline{AH}$, podemos concluir que:*

- $[ABH] = [ACH] = \dfrac{[ABC]}{2}$*;*
- $[BEH] = [AEH] = \dfrac{[ABH]}{2}$ *implica em:*

$$[BEH] = \frac{[ABC]}{4}$$

De forma análoga, temos que:

- $[CHF] = \dfrac{[BCD]}{4}$;
- $[DFG] = \dfrac{[CDA]}{4}$;
- $[AGE] = \dfrac{[DAB]}{4}$.

Daí, podemos concluir que a área sombreada ($[EFGH]$) pode ser calculada pelo desenvolvimento seguinte:

$$\begin{aligned}
[EFGH] &= [ABCD] - [BEH] - [CHF] - [DFG] - [AGE] \\
&= [ABCD] - \left(\frac{[ABC]}{4} + \frac{[BCD]}{4} + \frac{[CDA]}{4} + \frac{[DAB]}{4}\right) \\
&= [ABCD] - \frac{[ABC] + [CDA] + [BCD] + [DAB]}{4} \\
&= [ABCD] - \frac{2 \cdot [ABCD]}{4} \\
&= \frac{[ABCD]}{2} \\
[EFGH] &= 100cm^2
\end{aligned}$$

Problema 34. *Seja h a distância entre os segmentos paralelos $\overline{EF}$ e $\overline{AD}$.*
Como o lado do quadrado é igual a 6, então temos que a distância entre os segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{BC}$ é igual a $(6-h)$.
Com isso, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
[BEDF] &= [BEF] + [DEF] \\
&= \frac{\overline{EF} \cdot h}{2} + \frac{\overline{EF} \cdot (6-h)}{2} \\
&= \frac{\overline{EF} \cdot 6}{2} \\
[BEDF] &= 3 \cdot \overline{EF}
\end{aligned}$$

Sabendo que a área sombreada ($[BEDF]$) é um terço da área do quadrado, então temos que:

$$\begin{aligned}
3 \cdot \overline{EF} &= \frac{1}{3} \cdot 6^2 \\
\overline{EF} &= 4
\end{aligned}$$

Problema 35. *Consideremos*

- *h a altura do trapézio;*
- *E o ponto de encontro da altura do trapézio que passa pelo ponto B e o lado $\overline{AD}$.*

Daí, temos que o triângulo ABE é:

- *retângulo, pela própria definição de altura;*
- *isósceles, pois $\angle A = 45^\circ$ implica em $\angle ABE = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$*

Portanto, podemos concluir que: $\overline{AE} = \overline{BE} = h$.
Aplicando teorema de Pitágoras no $\triangle ABE$, temos que:

$$\begin{aligned} h^2 + h^2 &= 6^2 \\ h &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Sejam x e y tais que $\overline{AD} = x$ e $\overline{BC} = y$.
Como a área do trapézio é igual a 30, então podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)\cdot h}{2} &= 30 \\ x + y &= 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

Seja F o ponto de encontro da altura do trapézio que passa pelo ponto C e o lado $\overline{AD}$. Notemos que o quadrilátero $BCFE$ é um retângulo, pois possui os quatro ângulos retos. Portanto, temos que: $\overline{BC} = \overline{EF} = y$.
De forma análoga ao que foi feito no $\triangle ABE$, podemos concluir que: $\overline{FD} = h = 3\sqrt{2}$. Com isso, temos que:

$$\overline{AD} = x = y + 6\sqrt{2}$$

Aplicando esse resultado ao valor de $(x+y)$ encontrado anteriormente, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} x + y &= 10\sqrt{2} \\ \left(y + 6\sqrt{2}\right) + y &= 10\sqrt{2} \\ \overline{BC} = y &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Problema 36. *Prolonguemos $\overline{EO}$ até o lado $\overline{AB}$. Seja G o ponto de encontro desses dois segmentos.*
Vamos mostrar que $\overline{EO} = \overline{OG}$. Para isso, tracemos uma reta paralela ao lado $\overline{AD}$ passando pelo ponto O. Sejam M e N os pontos de encontro dessa reta paralela com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.
Notemos que os triângulos EON e GOM são congruentes pelo caso ângulo-lado-ângulo oposto, pois:

- *$\angle ENO = \angle GMO = 90^\circ$;*
- *$\overline{ON} = \overline{OM}$;*
- *$\angle OEN = \angle OGM$, pois $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{EG}$ corta essas retas paralelas.*

Daí, podemos concluir que: $\overline{EO} = \overline{OG}$.
Observemos que os triângulos retângulos EOF *e* GOF *são congruentes pelo caso lado-ângulo-lado, pois:*

- $\overline{OF}$ *é lado comum;*
- $\angle EOF = \angle GOF = 90°$*;*
- $\overline{EO} = \overline{OG}$.

Portanto, temos que: $\overline{EF} = \overline{FG}$ *e* $[EOF] = [FOG]$.
Analogamente, sendo G *o ponto de encontro do prolongamento do segmento* $\overline{FO}$ *com o lado* $\overline{BC}$*, podemos chegar às seguintes conclusões:*

$$\overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = \overline{EF}$$
$$[FOG] = [GOH] = [HOE] = [EOF] = \frac{[EFGH]}{4}$$

Sejam x *e* y *tais que* $\overline{EN} = x$ *e* $\overline{FD} = y$.
Notemos que $\overline{ED} = 2 + x$ *e* $\overline{EN} = x$ *implica em* $\overline{GM} = x$ *e* $\overline{AG} = 2 - x$.
Percebamos, também, que $\overline{FD} = y$ *implica em* $\overline{AF} = 4 - y$.
Aplicando teorema de Pitágoras nos triângulos EDF *e* FAG*, temos que:*

$$\begin{aligned} \left(\overline{EF}\right)^2 &= \left(\overline{FG}\right)^2 \\ (2+x)^2 + y^2 &= (4-y)^2 + (2-x)^2 \\ 4 + 4 \cdot x &= 16 - 8 \cdot y + 4 - 4 \cdot x \\ y &= 2 - x \end{aligned}$$

Portanto, os triângulos EDF *e* FAG *são congruentes, pois ambos são retângulos e possuem um cateto e hipotenusa iguais. Logo, temos que:* $[EDF] = [FAG]$.
De forma análoga, poderemos concluir que: $[FAG] = [GBH] = [HCE] = [EDF]$*. Como a soma das 4 áreas citadas é igual a* $([ABCD] - [EFGH])$*, então temos que:*

$$[EDF] = \frac{[ABCD] - [EFGH]}{4}$$

Portanto, a área marcada é igual a:

$$\begin{aligned} [EOF] + [EDF] &= \frac{[EFGH]}{4} + \frac{[ABCD] - [EFGH]}{4} \\ &= \frac{[ABCD]}{4} \\ [EOF] + [EDF] &= 4cm^2 \end{aligned}$$

<u>Obs.:</u> Alguns resultados dessa solução podem ser mais rapidamente obtidos usando um assunto que será tratado em aulas futuras: Quadriláteros inscrítiveis. Por exemplo, sabendo que o quadrilátero $EOFD$ *é inscrítivel, poderíamos facilmente perceber que* $\angle OEF = \angle OFE = 45°$.

Problema 37. *Sejam x e y tais que $\overline{AB} = \overline{CD} = x$ e $\overline{BC} = \overline{DA} = y$.*
Notemos que $[ABCD] = 11cm^2$ implica em $x \cdot y = 11$.
Percebamos, também, que:

$$\begin{aligned}
[A'AB'] &= \frac{\overline{A'A} \cdot \overline{AB'}}{2} \\
&= \frac{y \cdot 2x}{2} \\
[A'AB'] = x \cdot y &= 11cm^2
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos concluir que: $[B'BC'] = [C'CD'] = [D'DA'] = 11cm^2$.
Portanto, temos que:

$$\begin{aligned}
[A'B'C'D'] &= [ABCD] + [A'AB'] + [B'BC'] + [C'CD'] + [D'DA'] \\
[A'B'C'D'] &= 55cm^2
\end{aligned}$$

Problema 38. *Aplicando teorema de Tales, temos que:*

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{HG}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{GA}}{\overline{DA}} \\
&= \frac{8}{4} \\
\overline{HG} &= 2cm
\end{aligned}$$

Calculando a área marcada, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
[ABC] + [CEFH] &= [ABCD] + [DEFG] - [AHG] \\
&= 1 \cdot 4 + 4 \cdot 4 - \frac{2 \cdot 8}{2} \\
[ABC] + [CEFH] &= 12cm^2
\end{aligned}$$

Problema 39. *Seja x tal que $\overline{DQ} = \overline{CP} = x$. Daí, temos que: $\overline{QC} = \overline{PB} = 10 - x$.*
Pela relação de áreas dada no enunciado, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
[ABP] &= \frac{7}{3} \cdot [PCQ] \\
\frac{10 \cdot (10 - x)}{2} &= \frac{7}{3} \cdot \frac{x \cdot (10 - x)}{2} \\
x &= \frac{30}{7} cm
\end{aligned}$$

Aplicando teorema de Pitágoras em dois triângulos, temos que:

- $\triangle APB$: $\left(\overline{AP}\right)^2 = 10^2 + \left(10 - \frac{30}{7}\right)^2$ *implica em:*

$$\overline{AP} = \frac{10\sqrt{65}}{7} cm$$

- $\triangle PCQ$: $\left(\overline{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{30}{7}\right)^2 + \left(10 - \dfrac{30}{7}\right)^2$ *implica em:*

$$\overline{PQ} = \frac{50}{7}cm$$

Portanto, podemos concluir que o perímetro do quadrilátero APQD é igual a:

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QD} + \overline{DA} &= \frac{10\sqrt{65}}{7} + \frac{50}{7} + \frac{30}{7} + 10 \\ \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QD} + \overline{DA} &= \frac{10\sqrt{65} + 150}{7}cm\end{aligned}$$

Problema 40. *Seja x tal que $\overline{AJ} = x$. Como $\overline{JH} \parallel \overline{DB}$, então temos que:*

- $\angle AJH = \angle ADB = 45°$;
- $\angle AHJ = \angle ABD = 45°$;
- $\triangle AJH$ *é isósceles implica em:* $\overline{AJ} = \overline{AH} = x$.

Sabendo que $[AJH] = \dfrac{2}{5} \cdot [ABCD]$, *então podemos concluir que:* $x^2 = 10$, *ou seja:*

$$x = \sqrt{10}$$

Analogamente, sendo y tal que $\overline{IC} = y$ e sabendo que $[ICE] = \dfrac{1}{5} \cdot [ABCD]$, então temos que:

$$y = \sqrt{5}$$

Lembremos que já sabemos o comprimento de dois segmentos:

- $\overline{HB} = 5 - x = 5 - \sqrt{10}$
- $\overline{BE} = 5 - y = 5 - \sqrt{5}$

Faltam os demais comprimentos.
Percebamos que $\overline{AG}$ é um segmento de reta pertencente à diagonal $\overline{AC}$. Dessa forma, temos que $\angle GAH = 45°$. Como $\angle AHG = 45°$, então podemos concluir que: $\triangle AGH$ é isósceles e retângulo. Daí, temos que:

$$\overline{GH} = \overline{AG}$$

Tracando o segmento $\overline{FC}$, então, de forma totalmente análoga ao passo anterior, podemos concluir que:

$$\overline{EF} = \overline{FC}$$

Notemos, também, que

$$\begin{aligned}\overline{AG} + \overline{GF} + \overline{FC} &= \overline{AC} \\ \overline{FG} &= \overline{AC} - \overline{AG} - \overline{FC}\end{aligned}$$

Pelo teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos que $\left(\overline{AC}\right)^2 = 5^2 + 5^2$. Daí, podemos concluir que:

$$\overline{AC} = 5\sqrt{2}$$

Juntando todos os resultados obtidos, podemos, finalmente, calcular o perímetro do pentágono $BEFGH$:

$$\begin{aligned}\overline{BE}+\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HB} &= \left(5-\sqrt{5}\right)+\overline{FC}+\left(5\sqrt{2}-\overline{AG}-\overline{FC}\right)+\overline{AG}+\left(5-\sqrt{10}\right)\\ &= 10+5\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}\end{aligned}$$

Obs.: Uma forma simplificada de expressar a mesma resposta é a expressão: $5+\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)$.

Problema 41. *Sejam os seguintes pontos:*

- *O o centro do quadrado;*
- *E, F, G, H e I os pontos que reprensentam os primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto cortes, respectivamente.*

Consideremos que $\overline{OE}$ é o primeiro corte de forma que $\overline{DE} = 7cm$ e $\overline{EA} = 13cm$. Lembremos que a área de cada pedaço é igual a:

$$\frac{20^2}{5} = 80cm^2$$

Note que:

$$[AEO] = \frac{13\cdot 10}{2} = 65cm^2 < 80cm^2$$

Portanto, F não está no segmento $\overline{DA}$. Como só faltam $15cm^2$ para $[AEO]$ atingir $80cm^2$, então podemos concluir que F pertence ao segmento $\overline{AB}$ de forma que:

$$\begin{aligned}[AFO] = \frac{\overline{AF}\cdot 10}{2} &= 15cm^2\\ \overline{AF} &= 3cm\end{aligned}$$

Analogamente, podemos encontrar os demais pontos:

- *o ponto G pertence ao segmento $\overline{AB}$ de forma que $\overline{FG} = 16cm$ e $\overline{GB} = 1cm$;*
- *o ponto H pertence ao segmento $\overline{BC}$ de forma que $\overline{BH} = 15cm$ e $\overline{HC} = 5cm$;*
- *o ponto I pertence ao segmento $\overline{CD}$ de forma que $\overline{CI} = 11cm$ e $\overline{ID} = 9cm$.*

Problema 42. *Como M é ponto médio, então temos que $\overline{BM}$ e $\overline{MC}$. Como a altura dos triângulos ABM e ACM também é igual, logo podemos concluir que:*

$$[ABM] = [ACM] = \frac{72}{2} = 36cm^2$$

Analogamente, temos que:

- *N é ponto médio de $\overline{AM}$ implica em:*
  - $\star$ $[ABN] = [MBN] = \dfrac{36}{2} = 18cm^2$;
  - $\star$ $[ACN] = [MCN] = \dfrac{36}{2} = 18cm^2$;
- $[BNC] = [MBN] + [MCN] = 36cm^2$;
- *P é ponto médio de $\overline{BN}$ implica em:* $[BPC] = [NPC] = \dfrac{36}{2} = 18cm^2$;
- *Q é ponto médio de $\overline{PC}$ implica em:*

$$\begin{aligned} [CQN] = [PQN] &= \frac{18}{2} \\ [PQN] &= 9cm^2 \end{aligned}$$

Problema 43. *Seja O o centro do quadrado. Notemos que O é o ponto de encontro de $\overline{EF}$ com $\overline{AC}$, pois pertence a ambas as retas. Percebamos, também, que $\overline{EO} = \overline{OF} = 6cm$.*
Seja P o ponto de encontro entre $\overline{AC}$ e $\overline{BE}$.
Calculemos, então, as duas primeiras áreas:

- *$BEOC$ é trapézio. Daí, temos que:*

$$\begin{aligned} [BEOC] &= \frac{(12+6)\cdot 6}{2} \\ [BEOC] &= 54cm^2 \end{aligned}$$

- *COF é triângulo retângulo em F. Com isso, podemos concluir que:*

$$\begin{aligned} [COF] &= \frac{6\cdot 6}{2} \\ [COF] &= 18cm^2 \end{aligned}$$

Sejam S_1, S_2 tais que $S_1 = [BPA]$ e $S_2 = [APE]$. Como o triângulo EAB é retângulo em A, então temos que:

$$\begin{aligned} [EAB] &= \frac{12\cdot 6}{2} \\ S_1 + S_2 &= 36cm^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Observando que $\overline{EO} \parallel \overline{BA}$, podemos notar que $\triangle BPA \sim \triangle EPO$, pois todos os ângulos dos dois triângulos são iguais. Daí, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BP}}{\overline{EP}} &= \frac{\overline{BA}}{\overline{EO}} \\ &= \frac{12}{6} \\ \frac{\overline{BP}}{\overline{EP}} &= 2 \end{aligned}$$

Analisando os triângulos BPA e APE, temos que, em relação as bases $\overline{BP}$ e $\overline{PE}$, os dois triângulos possuem a mesma altura. Seja h essa altura. Daí, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{S_2}=\frac{[BPA]}{[APE]} &= \frac{\frac{\overline{BP}\cdot h}{2}}{\frac{\overline{EP}\cdot h}{2}}\\ &= \frac{\overline{BP}}{\overline{EP}}\\ S_1 &= 2\cdot S_2\end{aligned}$$

Aplicando esse resultado ao resultado (1), temos que:

- $S_2 = [APE] = 12cm^2$;
- $S_1 = [BPA] = 24cm^2$.

Seja S_3 tal que $S_3 = [EPO]$. Como o triângulo AEO é retângulo em O, então podemos concluir que:

$$[AEO] = S_2 + S_3 = 18cm^2$$

Lembrando que já sabemos o valor de S_2, então temos que:

$$S_3 = [EPO] = 6cm^2$$

Como o triângulo EFB é retângulo em F, então podemos concluir que:

$$\begin{aligned}[EPO]+[OPBF] &= \frac{12\cdot 6}{2}\\ [EPO]+[OPBF] &= 36cm^2\end{aligned}$$

Aplicando o resultado anterior, temos que $[EPO] = 6cm^2$ implica em:

$$[OPBF] = 30cm^2$$

<u>Obs.:</u> A ideia de encontrar proporção entre áreas de dois triângulos, com mesma altura, a partir da razão entre suas bases é conhecida como <u>metódo k</u>.

Problema 44. *Vamos usar um fato bastante conhecido:* ***Sendo G o baricentro de um triângulo XYZ e M ponto médio do lado $\overline{YZ}$ então temos que:***

$$\overline{XG} = 2\cdot\overline{GM}$$

<u>Obs.:</u> ***A demonstração desse fato está no fim desse material (seção fatos que ajudam).***
Voltando à solução do problema, sejam k e j tais que:

- $\overline{AB} = k$ *e, consequentemente,* $\overline{AD} = \dfrac{1}{k}$;

- *$\overline{DE} = j$ e, consequentemente, $\overline{EC} = k - j$.*

Consideremos os seguintes pontos:

- *N, P e Q os baricentros dos triângulos ADE, EBC e ABE, respectivamente;*
- *R e S as projeções de N e P sobre o lado $\overline{DC}$, respectivamente. Em outras palavras, R é o ponto no lado $\overline{DC}$ tal que $\angle NRC = 90°$. Definição análoga para o ponto S;*
- *T a projeção de N sobre o lado $\overline{AD}$;*
- *U a projeção de P sobre o lado $\overline{BC}$.*

Sendo L o ponto médio do lado $\overline{DE}$, aplicando o fato conhecido citado no começo da solução e o teorema de Tales no $\triangle LDA$, podemos calcular alguns segmentos:

- *segmento $\overline{NR}$:*

$$\begin{aligned}\frac{\overline{NR}}{\overline{AD}} &= \frac{\overline{NL}}{\overline{AL}}\\ \frac{\overline{NR}}{\frac{1}{k}} &= \frac{\overline{NL}}{\overline{NL}+2\cdot\overline{NL}}\\ \overline{NR} &= \frac{1}{3k}\end{aligned}$$

- *segmento $\overline{NT}$:*

$$\begin{aligned}\frac{\overline{NT}}{\overline{LD}} &= \frac{\overline{NA}}{\overline{LA}}\\ \frac{\overline{NT}}{\frac{j}{2}} &= \frac{2\cdot\overline{NL}}{2\cdot\overline{NL}+\overline{NL}}\\ \overline{NT} &= \frac{j}{3}\end{aligned}$$

Analogamente, considerando o ponto médio do lado $\overline{EC}$, o fato conhecido citado e o teorema de Tales, podemos calcular outros segmentos:

- *segmento $\overline{PS}$:*

$$\overline{PS} = \frac{1}{3k}$$

- *segmento $\overline{PU}$:*

$$\overline{PU} = \frac{k-j}{3}$$

Por último, sejam:

- *V e W as projeções de Q e E sobre o lado $\overline{AB}$, respectivamente;*

- *I o ponto médio do lado $\overline{AB}$.*

Aplicando o fato conhecido e o teorema de Tales no $\triangle IEW$ de forma análoga ao já feito duas vezes nessa solução, temos que:

$$\overline{QV} = \frac{1}{3k}$$

Com isso, temos todas as informações para calcular $[NPQ]$:

- *base:*

$$\begin{aligned} \overline{NP} &= \overline{TU} - \overline{TN} - \overline{PU} \\ &= k - \left(\frac{j}{3}\right) - \left(\frac{k-j}{3}\right) \\ \overline{NP} &= \frac{2k}{3} \end{aligned}$$

- *altura h:*

$$\begin{aligned} h &= \overline{BC} - \overline{QV} - \overline{NR} \\ &= \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{3k}\right) - \left(\frac{1}{3k}\right) \\ h &= \frac{1}{3k} \end{aligned}$$

Portanto, a área procurada é igual a:

$$\begin{aligned} [NPQ] &= \frac{\frac{2k}{3} \cdot \frac{1}{3k}}{2} \\ [NPQ] &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Problema 45. *Primeiramente, como $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, então temos que:*

$$[ABC] = [ADC] = \frac{1}{2}$$

Como K é o encontro das diagonais do paralelogramo $ABCD$, então podemos concluir que K é ponto médio do lado $\overline{AC}$. Portanto, L é baricentro do $\triangle ADC$, isto é, L é o encontro das três medianas de tal triângulo.
Seja M o ponto médio do lado $\overline{AD}$. Aplicando o lema conhecido, cuja demonstração encontra-se no fim desse material (seção fatos que ajudam), no $\triangle ADC$, temos que:

$$\begin{aligned} [ELKC] &= \frac{2}{6} \cdot [ADC] \\ [ELKC] &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Problema 46. *Aplicando teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos que:*

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \sqrt{(101^2 - 20^2)}\\ &= \sqrt{(101+20)\cdot(101-20)}\\ \overline{BC} &= 99\end{aligned}$$

Sabendo que o triângulo ADB tem base $\overline{DB}$ e altura $\overline{AC}$, então podemos concluir que:

$$[ADB] = \frac{\frac{99}{2}\cdot 20}{2} = 495$$

Problema 47. *Seja O o centro do hexágono. Liguemos os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EA}$, $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OE}$.*
Notemos que os triângulos ABC, CDE e EFA possuem a mesma área, pois são congruentes pelo caso lado-ângulo-lado. Como o triângulo ABC é isósceles em B, temos que:

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

Percebamos, também, que os triângulos OAC, OCE e OEA possuem a mesma área, pois são congruentes pelo caso lado-lado-lado. Como

$$\angle AOC = \angle COE = \angle EOA = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

e o triângulo AOC é isósceles em O, então podemos concluir que

$$\angle OAC = \angle OCA = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

Com isso, temos que $\triangle ABC \equiv \triangle AOC$ pelo caso ângulo-lado-ângulo oposto, pois ambos possuem o lado $\overline{AC}$ e os três ângulos iguais. Portanto, tais triângulos têm a mesma área. Dessa forma, podemos notar que os 6 segmentos desenhados dividiram o hexágono em 6 triângulos congruentes e, consequentemente, com mesma área. Daí, como a área do hexágono é igual a $1cm^2$, podemos concluir que:

$$[ABC] = \frac{1}{6}cm^2$$

Problema 48. *Sejam P, Q, R, S e T os pontos de interseção das diagonais do pentágono $ABCDE$ de forma que:*

- *P é o encontro das diagonais $\overline{BE}$ e $\overline{AC}$;*
- *Q é o encontro das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$;*
- *R é o encontro das diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$;*
- *S é o encontro das diagonais $\overline{CE}$ e $\overline{AD}$;*

- *T é o encontro das diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$.*

Sejam h_1 e h_2 as alturas relacionadas aos pontos C e E em relação ao lado $\overline{AB}$ nos triângulos ABC e EAB, respectivamente. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} [ABC] &= [EAB] \\ \frac{\overline{AB} \cdot h_1}{2} &= \frac{\overline{AB} \cdot h_2}{2} \\ h_1 &= h_2 \end{aligned}$$

Com isso, podemos perceber que os pontos C e E estão "igualmente distantes" da reta que contém o segmento $\overline{AB}$. Portanto, podemos concluir que:

$$\overline{CE} \parallel \overline{AB}$$

Analogamente, temos que:

- $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$;
- $\overline{CD} \parallel \overline{EB}$;
- $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$;
- $\overline{EA} \parallel \overline{BD}$.

Sejam x, y, z, w e k tais que: $[APB] = x$, $[BQC] = y$, $[CRD] = z$, $[DSE] = w$ e $[ATE] = k$. Como $[ABC] = [BCD] = [CDE] = [DEA] = [EAB] = 1$, então podemos concluir que:

- $[BPQ] = 1 - x - y$;
- $[CQR] = 1 - y - z$;
- $[DRS] = 1 - z - w$;
- $[EST] = 1 - w - k$;
- $[ATP] = 1 - k - x$.

Pelas relações de paralelismo encontradas acima, temos que: $ABRE$ é paralelogramo. Como $\overline{BE}$ é diagonal desse paralelogramo, temos que:

- $1 = [ABE] = [RBE]$; *(analogamente, $[EPC] = 1$)*
- $[ABRE] = 2$;
- $[ABCDRE] = [ABRE] + [BCD] = 3$;
- $[ABCDE] = [ABCDRE] + [DRE] = 3 + (1 - z) = 4 - z$.

De forma análoga, podemos concluir que:

$$[ABCDE] = 4 - x = 4 - y = 4 - z = 4 - w = 4 - k$$

Com isso, temos que:

$$x = y = z = w = k$$

Falta apenas encontrar o valor de x*.*
Analisando triângulos com mesma altura para comparar áreas através da razão entre bases, observando a razão entre os segmentos $\overline{AP}$ *e* $\overline{PC}$*, podemos concluir que:*

- *olhando os triângulos* APB *e* BPC*:*

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} &= \frac{[APB]}{[BPC]}\\ \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} &= \frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

- *olhando os triângulos* APE *e* EPC*:*

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} &= \frac{[APE]}{[EPC]}\\ \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} &= \frac{1-x}{1}\end{aligned}$$

Daí, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x} &= \frac{1-x}{1}\\ x &= (1-x)^2\\ x^2 - 3x + 1 &= 0\end{aligned}$$

Como $x < 1$*, então temos que:*

$$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}[ABCDE] &= 4 - x\\ &= 4 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\\ [ABCDE] &= \frac{5+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Problema 49. *Essa questão é totalmente análoga à questão 42. Resposta:*

$$\frac{[ABC]}{[EFG]} = 8$$

Problema 50. *Seja $\overline{EF}$ a tal reta paralela que vai dividir o trapézio em duas retas sendo que E e F pertencem oas segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.*
Seja x tal que $\overline{AE} = x$.
Pela igualdade de áreas, temos que:

$$\begin{aligned} [AEFD] &= [EBCF] \\ 20 \cdot x &= \frac{(75-2x)\cdot 20}{2} \\ 4 \cdot x &= 75 \\ x &= \frac{75}{4} m \end{aligned}$$

Problema 51. *Obs.: A questão apresenta um pequeno erro de enunciado: Os pontos colineares são F, C e E (e não G).*
Seja P o ponto de interseção das retas $\overline{BC}$ e $\overline{FG}$.
Consideremos as seguintes áreas:

- $[ADG] = a$;
- $[GCP] = b$;
- $[GPB] = c$;
- $[PFC] = d$;
- $[DCE] = e$;
- $[GCD] = f$.

Sejam x e h o comprimento dos lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ e a distância entre eles, respectivamente. Considerando y o comprimento de $\overline{GB}$, podemos encontrar algumas relações entre áreas:

- $a + b + c$:

$$\begin{aligned} a + (b+c) &= \frac{(x-y)\cdot h}{2} + \frac{y \cdot h}{2} \\ a + (b+c) &= \frac{x \cdot h}{2} \end{aligned}$$

- f:

$$f = \frac{x \cdot h}{2}$$

Portanto, podemos concluir que: $a + (b+c) = f$. Daí, temos que:

$$[ABCD] = 2 \cdot f$$

De forma totalmente análoga, a partir do paralelogramo $DEFG$, pdemos concluir que: $(b+d) + e = f$. Com isso, temos que:

$$[DEFG] = 2 \cdot f$$

Pelas últimas duas equações encontradas, podemos concluir que:

$$2 \cdot f = [ABCD] = [DEFG]$$

Problema 52. *Consideremos as seguintes áreas:*

- $[AOB] = x$;
- $[BOC] = y$;
- $[COD] = z$;
- $[DOA] = w$.

Nossa estratégia será encontrar equações que relacionam as outras áreas (x, z e w) com y. Em primeiro lugar, notemos que: $[ABC] = 150$ implica em:

$$x = 150 - y$$

Em segundo lugar, percebamos que os triângulos ACD e BCD possuem a mesma base $\overline{CD}$ e altura igual. Dessa forma, temos que: $[ACD] = [BCD]$ implica em:

$$w = y$$

Além disso, podemos concluir que: $[ACD] = 120$ implica em:

$$z = 120 - y$$

Em terceiro lugar, podemos analisar a relação entre os segmentos $\overline{DO}$ e $\overline{OB}$ para encontrar relação entre áreas de alguns triângulos (em outras palavras, método k). Daí, temos que:

- *triângulos DOC e COB:*
$$\frac{\overline{DO}}{\overline{OB}} = \frac{z}{y}$$
pois esses triângulos possuem mesma altura e, com isso, a relação entre as áreas deles é igual a relação entre suas respectivas bases;

- *triângulos DOA e AOB:*
$$\frac{\overline{DO}}{\overline{OB}} = \frac{w}{x} = \frac{y}{x}$$
pois esses triângulos possuem mesma altura e, com isso, a relação entre as áreas deles é igual a relação entre suas respectivas bases.

Com as últimas equações encontradas, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{DO}}{\overline{OB}} = \frac{z}{y} &= \frac{y}{x} \\ y^2 &= x \cdot z \end{aligned}$$

Usando as relações que encontramos no começo dessa solução, temos que:

$$\begin{aligned} y^2 &= (150-y)\cdot(120-y) \\ (150+120)\cdot y &= 150\cdot 120 \\ y=[BOC] &= \frac{200}{3} \end{aligned}$$

Problema 53. *Essa questão é igual à questão 11. Resposta:* $\frac{39}{2}$.

Problema 54. *Inicialmente, façamos um bom desenho, começando pela circunferência e, em seguida, colocando os quatro pontos A, B, C e D de forma que $\overline{AC}\perp\overline{BD}$. Consideremos:*

- *h a altura do triângulo AOC em relação à base $\overline{AC}$;*
- *P o ponto de interseção entre as retas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.*

Como as diagonais do quadrilátero $ABCD$ são perpendiculares, então temos que:

$$\begin{aligned} [ABCD] &= [ABC]+[BCD] \\ &= \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BP}}{2}+\frac{\overline{AC}\cdot\overline{PD}}{2} \\ [ABCD] &= \frac{\overline{AC}\cdot\left(\overline{BP}+\overline{PD}\right)}{2} \end{aligned}$$

Além disso, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} [ABCO] &= [ABC]+[AOC] \\ [ABCO] &= \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BP}}{2}+\frac{\overline{AC}\cdot h}{2} \end{aligned}$$

Portanto, podemos dizer que a linha quebrada AOC dividir $ABCD$ em duas regiões de mesma área é o mesmo que

$$[ABCO]=\frac{[ABCD]}{2}$$

Pelas equações encontradas anteriormente, isso ocorrerá se

$$h=\frac{\overline{PD}-\overline{BP}}{2}$$

Tentemos então encontrar essa relação.
Sejam os pontos:

- *E o ponto de encontro resultante da interseção entre o prolongamento do segmento $\overline{AO}$ por O e a circunferência;*
- *X a projeção ortogonal de E no segmento $\overline{BD}$, ou seja, seja X o ponto do segmento $\overline{BD}$ tal que $\angle EXD=90^\circ$.*

Notemos que $\overline{AE}$ *é diâmetro da circunferência. Portanto, temos que* $\angle ACE = 90°$. *Percebamos que o triângulo* AOC *é isósceles em* O. *Logo, a altura* h *é também mediana. Como* $h \parallel \overline{CE}$, *então podemos aplicar teorema de Tales para concluir que:*

$$\overline{CE} = 2 \cdot h$$

Como $\angle CPD = 90°$, *então temos que* $PCEX$ *é retângulo, pois possui os quatro ângulos retos. Daí, temos que:*

$$\overline{CE} = \overline{PX} = 2h$$

Com esse resultado, notemos que só falta provar que: $\overline{BP} = \overline{XD}$.
Para provar o que falta, basta perceber o seguinte fato: $\overline{BD} \parallel \overline{CD}$ *implica em* $\angle CBP = \angle XDE$, *pois* $\angle CBP = \angle XDE$ *implica em* $\triangle BPC \equiv \triangle DXE$.
Essa última implicação é consequência dos dois triângulos, BPC *e* DXE *possuirem os três ângulos iguais, inclusive um ângulo reto, e um cateto igual* $\left(\overline{PC} = \overline{XD}\right)$, *pois* $PCXD$ *é retângulo. Provemos tal fato numa observação após o término da solução.*
Com todos os resultados encontrados, fica provado a solução, pois "invertendo" a ordem dos resultados que encontramos, temos que:

- $\overline{BP} = \overline{XD}$, *uma vez que:*

$$\overline{BD} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \angle CBP = \angle XDE \Rightarrow \triangle BPC \equiv \triangle DXE \Rightarrow \overline{BP} = \overline{XD}$$

- $\overline{PD} = 2h + \overline{BP}$, *pois:*

$$\overline{CE} = \overline{PX} = 2h \Rightarrow \overline{PD} = \overline{PX} + \overline{XD} = 2h + \overline{BP}$$

- $[ABCO] = \dfrac{[ABCD]}{2}$:

$$\overline{PD} = 2h + \overline{BP} \Rightarrow h = \frac{\overline{PD} - \overline{BP}}{2} \Rightarrow [ABCO] = \frac{[ABCD]}{2}$$

Obs.: Provemos que $\overline{BD} \parallel \overline{CD}$ *implica em:* $\angle CBP = \angle XDE$.
Para isso, sejam α *e* β *tais que* $\angle BDC = \alpha$ *e* $\angle CDE = \beta$. *Com isso, temos que:*

$$\angle XDE = \alpha + \beta$$

Liguemos o segmento $\overline{CE}$.
Notemos que

$$\angle CDE = \angle CBE = \beta$$

pois ambos olham para o mesmo arco (CE). *Analogamente, podemos concluir que:* $\angle BDC = \angle BEC = \alpha$.
Como $\overline{CE} \parallel \overline{BD}$, *então temos que:*

$$\angle EBD = \angle BEC = \alpha$$

Portanto, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}\angle CBP = \angle CBD &= \angle CBE + \angle EBD \\ &= \beta + \alpha \\ \angle CBP &= \angle XDE\end{aligned}$$

Problema 55. *Obs.: A questão apresenta um pequeno erro de enunciado: A relação a ser provada é:* $[DMA] + [CNB] = [ABCD]$.
Consideremos:

- *comprimentos* x *e* y *tais que* $\overline{AN} = \overline{ND} = x$ *e* $\overline{BM} = \overline{MC} = y$;
- *alturas* h_B, h_C *e* h_M *as distâncias dos pontos* B, C *e* M *ao segmento* $\overline{AD}$, *respectivamente;*
- *ponto* P *a interseção dos segmentos* $\overline{AD}$ *e* $\overline{BC}$;
- *comprimento* z *tal que* $\overline{BP} = z$.

Aplicando o teorema de Tales, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{PB}}{h_B} = \frac{\overline{PM}}{h_M} &= \frac{\overline{PC}}{h_C} \\ \frac{z}{h_B} = \frac{z+y}{h_M} &= \frac{z+2y}{h_C}\end{aligned}$$

Aplicando a propriedade bem conhecida de "soma de numerador com numerador e denominador com denominador não altera a razão na proporção", podemos concluir que:

$$\begin{aligned}\frac{z+y}{h_M} &= \frac{z+(z+2y)}{h_B+h_C} \\ 2 \cdot h_M &= h_B + h_C\end{aligned}$$

Daí, temos que:

$$\begin{aligned}[ABCD] &= [DCN] + [CNB] + [NBA] \\ &= \frac{x \cdot h_C}{2} + [CNB] + \frac{x \cdot h_B}{2} \\ &= \frac{x \cdot (2 \cdot h_M)}{2} + [CNB] \\ [ABCD] &= [DMA] + [CNB]\end{aligned}$$

4 Fatos que ajudam

Lema: Os 6 triângulos resultantes das construções das 3 medianas de um triângulo possuem a mesma área.
Prova: Consideremos o triângulo ABC e os pontos médios M, N e P dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Seja G o baricentro do $\triangle ABC$.
Consideremos as seguintes áreas:

- $X_1 = [AGM]$;
- $X_2 = [MGB]$;
- $X_3 = [BGN]$;
- $X_4 = [NGC]$;
- $X_5 = [CGP]$;
- $X_6 = [PGA]$.

Comparando bases iguais e mesma altura, temos que:

- $[ABN] = [ACN]$ implica em:
$$X_1 + X_2 + X_3 = X_4 + X_5 + X_6$$
- $[ABP] = [CBP]$ implica em:
$$X_1 + X_2 + X_6 = X_4 + X_5 + X_3$$
- subtraindo as duas equações encontradas, podemos concluir que: $X_3 - X_6 = X_6 - X_3$. Daí, temos que:
$$X_3 = X_6$$

Analogamente, usando que $[AMC] = [BMC]$, podemos concluir que $X_1 = X_4$ e $X_2 = X_5$. Para concluir o lema, basta perceber que $X_1 = X_2$, $X_3 = X_4$ e $X_5 = X_6$, pois tais triângulos possuem bases iguais e mesma altura.