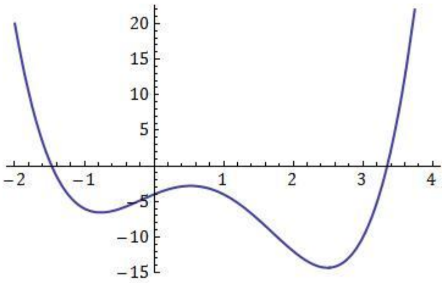
Sétima lista de exercícios.
Funções polinomiais. Equações e inequações polinomiais.

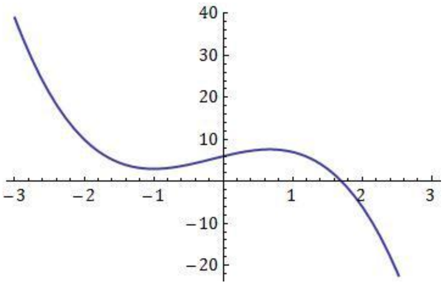
1. Considerando apenas o comportamento extremo das funções abaixo, relacione-as aos gráficos apresentados.

   a) $f(x) = x^3 - 5x + 1$.
   b) $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 6$.
   c) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - 4$.
   d) $f(x) = 1 - 4x^2 - 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 - x^6$.

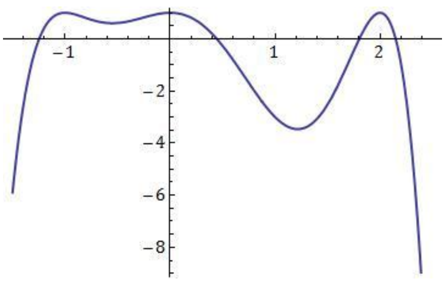
   I)



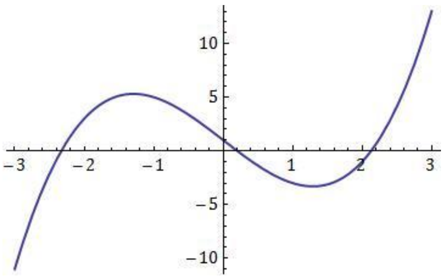
   II)



   III)



   IV)



2. Verifique se os valores abaixo correspondem a raízes das equações.

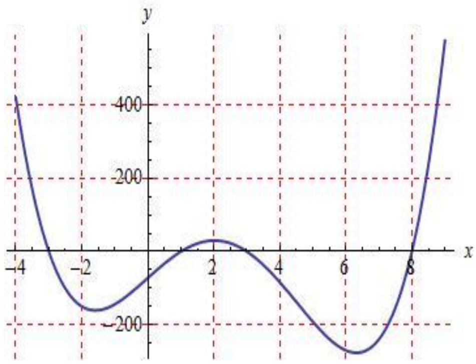
   a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$. $x_1 = 2;\ x_2 = -2$.
   b) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$. $x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = -2$.
   c) $f(x) = 4x + x^2$. $x_1 = -4;\ x_2 = 0$.
   d) $f(x) = -x^2 - 4$. $x_1 = 2;\ x_2 = -2$.

3. Esboce o gráfico e determine os mínimos e máximos locais de cada função.

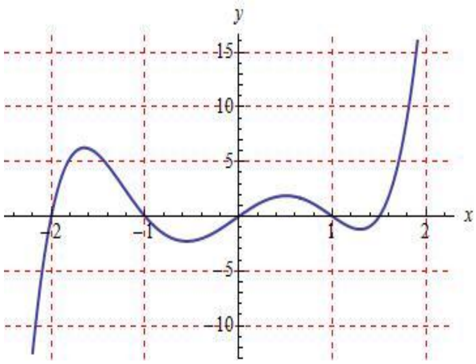
   a) $f(x) = (x - 1)(x + 2)$.
   b) $f(x) = (-3 - x)(x + 3)$.
   c) $f(x) = x^2 - 3x + 4$.
   d) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.
   e) $f(x) = 4x + x^2$.
   f) $f(x) = -x^2 - 4$.
   g) $f(x) = (x - 4)(x + 1)$.

4. Os gráficos algumas funções polinomiais foram desenhados abaixo, com o auxílio de um programa matemático. Determine aproximadamente os pontos de mínimo e máximo local e os valores correspondentes de cada função.

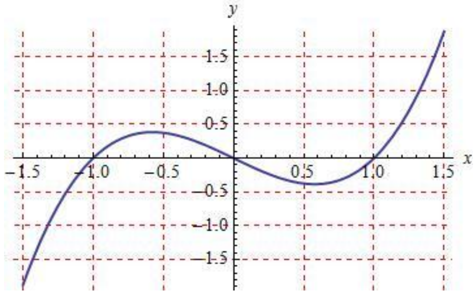
   a)



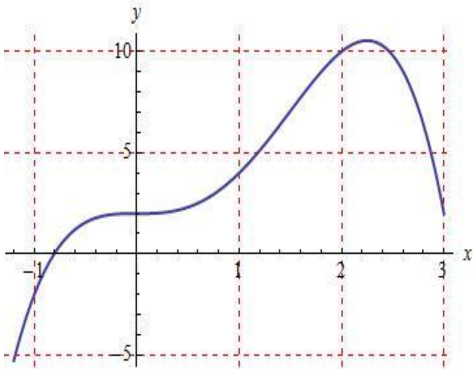
   b)



c)



d)

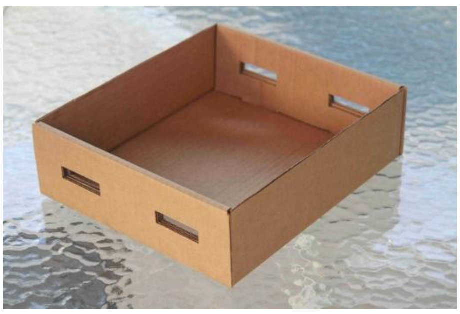


5. Determine o número de mínimos e máximos locais das funções abaixo. Indique um intervalo que contém a coordenada x de cada mínimo ou máximo. (Dica: não é necessário calcular os pontos extremos, basta analisar o sinal de f.)

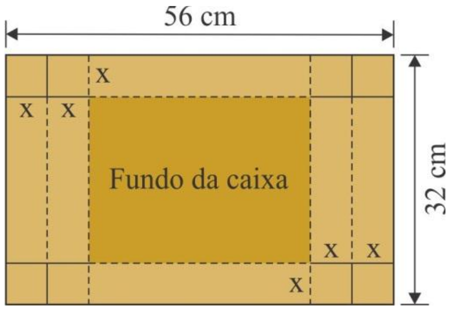
   a) $f(x) = (x-3)(x-4)$.
   b) $f(x) = (\sqrt{5}-x)(x+1/4)$.
   c) $f(x) = 3x(x-2)(x+3)$.
   d) $f(x) = (x+5)(2-x)(x+3)$.
   e) $f(x) = (x-1)^2(x+1/2)$.
   f) $f(x) = x(x-3)(x+2)(x-\sqrt{2})$.

6. Quarenta pessoas em excursão pernoitam em um hotel. Somados, os homens despendem R$ 2400,00. O grupo de mulheres gasta a mesma quantia, embora cada uma tenha pago R$ 64,00 a menos que cada homem. Supondo que x denota o número de homens do grupo, determine esse valor.

7. Você precisa usar uma folha de papelão com 56 x 32 cm, para fabricar uma caixa sem tampa como a que é mostrada na figura abaixo.



Para obter a caixa, a folha deverá ser cortada nas linhas contínuas e dobrada nas linhas tracejadas indicadas na figura a seguir. Observe que a base da caixa dobrada corresponde ao retângulo interno da figura e que sua altura é x. Responda às perguntas abaixo, lembrando que o volume de um prisma retangular de lados x, y e z é igual a xyz.



   a) Exprima cada uma das dimensões da base da caixa dobrada em função de x.
   b) Determine uma função $V(x)$ que forneça o volume da caixa em relação a x.
   c) Determine o domínio de $V(x)$. (Dica: considere que os lados da caixa não podem ser negativos).
   d) Esboce o gráfico de $V(x)$.
   e) A partir do gráfico de $V(x)$, determine o valor de x que maximiza o volume da caixa, bem como o volume correspondente.

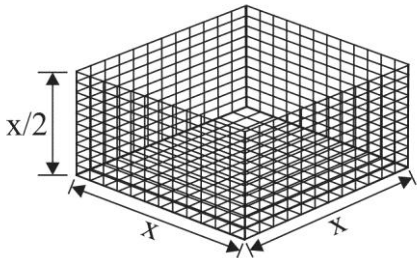
8. Um tanque de gás tem o formato mostrado na figura abaixo, que corresponde a um cilindro ao qual se acoplou duas semiesferas. Observe que a altura do cilindro corresponde a 5 vezes o raio de sua base

Responda às perguntas abaixo, lembrando que o volume de uma semiesfera de raio r é $\frac{2}{3}\pi r^3$, e que o volume de um cilindro com altura h e raio da base r é dado por $\pi r^2 h$.

   a) Exprima o volume do cilindro e de cada semiesfera em função de r.
   b) Escreva uma função $V(r)$ que forneça o volume do tanque em relação a r.

c) Determine o valor de r que permite que o tanque armazene 25 m³ de gás.

9. Em um sistema de piscicultura superintensiva, uma grande quantidade de peixes é cultivada em tanques-rede colocados em açudes, com alta densidade populacional e alimentação à base de ração. Os tanques-rede têm a forma de um paralelepípedo e são revestidos com uma rede que impede a fuga dos peixes, mas permite a passagem da água (vide figura).



Para uma determinada espécie, a densidade máxima de um tanque-rede é de 400 peixes adultos por metro cúbico. Suponha que um tanque possua largura igual ao comprimento e altura igual à metade da largura. Quais devem ser as dimensões mínimas do tanque para que ele comporte 7200 peixes adultos da espécie considerada? Lembre-se que o volume de um paralelepípedo de lados x, y e z é xyz.

10. Para cada expressão na forma $\frac{p(x)}{d(x)}$ abaixo, calcule o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$. Expresse $\frac{p(x)}{d(x)}$ na forma $q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$.

a) $\frac{2x^3-3x^2+6}{x^2-2}$.
b) $\frac{6x^2-4x-3}{3x-5}$.
c) $\frac{x^4+2x-12}{x+2}$.
d) $\frac{4x^3+2x^2+11x}{2x^2+3}$.
e) $\frac{6x^4+5x^3-2x}{3x-2}$.
f) $\frac{3x^2+2x-5}{x-2}$.
g) $\frac{4x^4+6x^3-8x^2+22x-24}{x+3}$.
h) $\frac{4x^3+6x-10}{2x-4}$.

11. Em cada caso abaixo, escreva na forma expandida um polinômio que tenha o grau e as raízes indicadas. Observe que há infinitos polinômios que satisfazem cada condição apresentada.

a) Polinômio de grau 2 com raízes –4 e 0.
b) Polinômio de grau 2 com raízes 1/2 e 2, com concavidade para baixo.
c) Polinômio de grau 3 com raízes 0, 1 e 3.
d) Polinômio de grau 3 com raízes –2 e 1 (com multiplicidade 2).
e) Polinômio de grau 4 com raízes –3, –2, 0 e 5.
f) Polinômio de grau 4 com raízes –1, 4 e 2 (com multiplicidade 2).

12. Sabendo que $x = -1$ é uma raiz da equação $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$,

a) Calcule o quociente de $\frac{x^3+x^2-2x-2}{x+1}$
b) Determine as demais raízes da equação.

13. Determine as raízes das equações e escreva os polinômios na forma fatorada.

a) $-3x(x^2 - 2x - 3) = 0$.
b) $x^4 - x^3 - 20x^2 = 0$.
c) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$, sabendo que $x = -1$ é uma raiz.
d) $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$, sabendo que $x = 2$ é uma raiz.
e) $x^4 - 9x^3 - x^2 + 81x - 72 = 0$, sabendo que $x = 8$ e $x = 3$ são raízes.
f) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, sabendo que $x = 4$ é uma raiz.

14. Resolva as desigualdades abaixo:

a) $(x - 2)(x - 4) \geq 0$.
b) $(x + 1)(x - 3) \leq 0$.
c) $(2x - 1)x \geq 0$.
d) $2x(x - 1/4) \leq 0$.
e) $(x - 2)(x + 4) \geq 0$.
f) $(x + 2)(x - 3) < 0$.
g) $(3 - 5x)(x + 3) \leq 0$.
h) $x^2 + 6x \leq 0$.
i) $3x^2 - 5x \geq 0$.
j) $(x - 1)(x + 2)(x - 4) \leq 0$.
k) $(x + 1)(x - 2)x \geq 0$.
l) $x^3 - 2x \geq 0$.
m) $2x^3 - 18x \leq 0$.

15. Fazendo a mudança de variável $w = x^2$, determine as raízes reais das equações.

a) $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$.
b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
c) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.

Respostas.

1.a. IV; b. II; c. I; d. III.

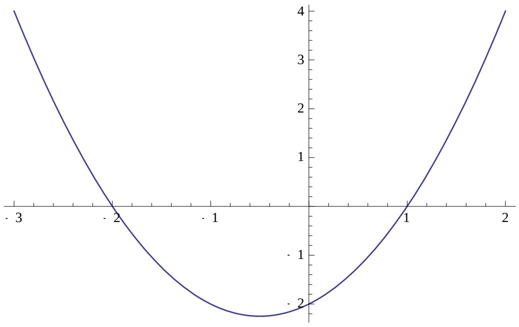
2.a. Nenhum valor é raiz.

2.b. Só x_1 é raiz.

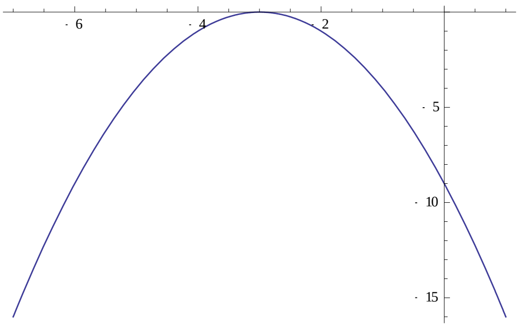
2.c. x_1 e x_2 são raízes.

2.d. Nenhum valor é raiz.

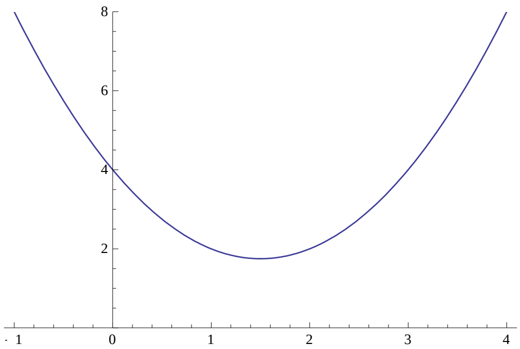
3.a. Mínimo em $x = -1/2$. Gráfico:



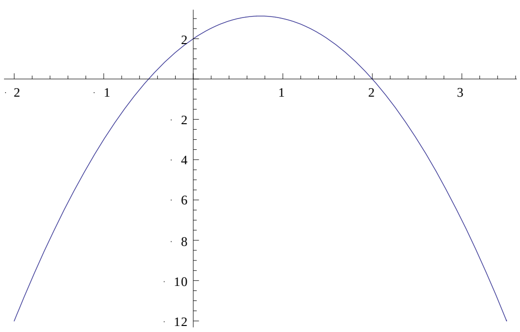
3.b. Máximo em $x = -3$. Gráfico:



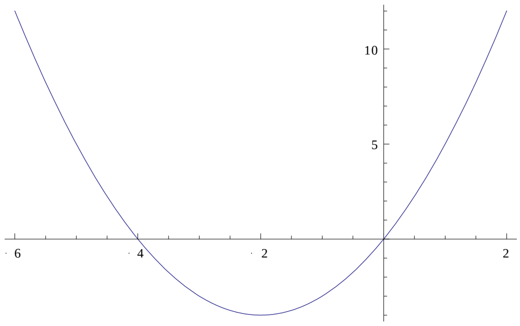
3.c. Mínimo em $x = 1{,}5$. Gráfico:



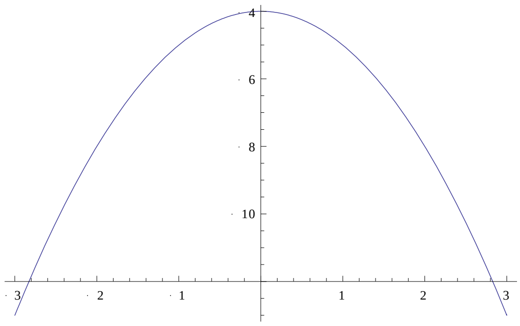
3.d. Máximo em $x = 3/4$.Gráfico:



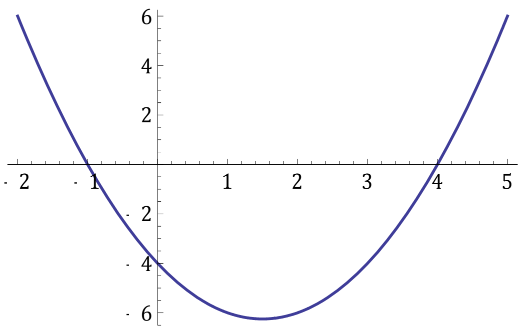
3.e. Mínimo em $x = -2$. Gráfico:



3.f. Máximo em $x = 0$. Gráfico:



3.g. Máximo em $x = 3/2$. Gráfico:



4.a. Mínimos locais: $x = 1{,}8$ e $x = 6{,}2$.

Máximo local: $x = 2$.

4.b. Mínimos locais: $x = -0{,}5$ e $x = 1{,}3$.

Máximo local: $x = -1{,}6$ e $x = 0{,}5$.

4.c. Mínimo local: $x = 0{,}6$. Máximo local: $x = -0{,}6$.

4.d. Mínimo local: não há. Máximo local: $x = 2{,}2$.

5.a. Um mínimo local no intervalo $(3, 4)$.

5.b. Um máximo local em $(-1/4, \sqrt{5})$

5.c. Um mínimo em $(0, 2)$ e um máximo em $(-3, 0)$.

5.d. Um mínimo em $(-5, -3)$ e um máximo em $(-3, 2)$.

5.e. Um mínimo em $x = 1$ e um máximo em $(-1/2, 1)$.

5.f. Mínimos nos intervalos $(-2, 0)$ e $(\sqrt{2}, 3)$, e um máximo em $(0, \sqrt{2})$.

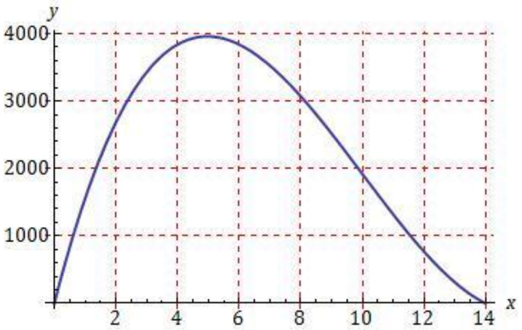
6. O grupo tem 15 homens e 25 mulheres.

7.a. Lados da base: $56-4x$ e $32-2x$.

7.b. $V(x)=(56-4x)(32-2x)x$.

7.c. $0\le x\le 14$.

7.d.



7.e. $x\approx 5$ cm. $V(5)=3960$ cm^3.

8.a. $V_C(r)=5\pi r^3$. $V_{SE}(r)=\frac{2}{3}\pi r^3$.

8.b. $V(r)=\frac{19}{3}\pi r^3$.

8.c. r = 3,69 m.

9. Aproximadamente 3,3 x 3,3 x 1,65 m.

10.a. Quociente: $2x-3$. Resto: $4x$.

10.b. Quociente: $2x+2$. Resto: 7.

10.c. Quociente: x^3-2x^2+4x-6. Resto: 0.

10.d. Quociente: $2x+1$. Resto: $5x-3$.

10.e. Quociente: $2x^3+3x^2+2x+2/3$. Resto: $4/3$.

10.f. Quociente: $3x+8$. Resto: 11.

10.g. Quociente: $4x^3-6x^2+10x-8$. Resto: 0.

10.h. Quociente: $2x^2+4x+11$. Resto: 34.

11.a. x^2+4x .

11.b. $-x^2+\frac{5}{2}x-1$.

11.c. x^3-4x^2+3x.

11.d. x^3-3x+2.

11.e. x^4-19x^2-30x.

11.f. $x^4-7x^3+12x^2+4x-16$.

12.a. x^2-2.

12.b. $x=-1$, $x=-\sqrt{2}$ e $x=\sqrt{2}$.

13.a. Polinômio: $-3x(x-3)(x+1)$.
Raízes: 0, 3 e -1.

13.b. Polinômio: $x^2(x-5)(x+4)$.
Raízes: 5, -4 e 0 (com multiplicidade 2).

13.c. Polinômio: $(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.
Raízes: -1, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

13.d. Polinômio: $(x-1)(x-2)(x-8)$.
Raízes: 1, 2 e 8.

13.e. Polinômio: $(x+3)(x-1)(x-3)(x-8)$.
Raízes: -3, 1, 3 e 8.

13.f. Polinômio: $(x+3)(x-2)(x-4)$.
Raízes: -3, 2 e 4.

14.a. $x\le 2$ ou $x\ge 4$.

14.b. $-1\le x\le 3$.

14.c. $x\le 0$ ou $x\ge 1/2$.

14.d. $0\le x\le 1/4$.

14.e. $-4\le x\le 2$.

14.f. $x<-2$ ou $x>3$.

14.g. $x\le -3$ ou $x\ge 3/5$.

14.h. $-6\le x\le 0$.

14.i. $x\le 0$ ou $x\ge 5/3$.

14.j. $x\le -2$ ou $1\le x\le 4$.

14.k. $-1\le x\le 0$ ou $x\ge 2$.

14.l. $-\sqrt{2}\le x\le 0$ ou $x\ge 2$.

14.m. $x\le -3$ ou $0\le x\le 3$.

15.a. $x=-5$ e $x=5$.
15.b. $x=-3$, $x=3$, $x=-2$ e $x=2$.
15.c. $x=-1$ e $x=1$.