Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 2

Prof. Bruno Holanda

Aula 7

Princípio da Casa dos Pombos I

O princípio da casa dos pombos também é conhecido em alguns países (na Rússia, por exemplo) como *Princípio de Dirichlet* pois, foi o matemático Lejeune Dirichlet o primeiro matemático a usa este método para resolver problemas não triviais. Outros matemáticos que se destacaram por usarem essa idéia para resolver diversos problemas foram os húngaros Erdős e Szekeres. Vamos abordar este princípio da seguinte maneira:

"Se em n caixas são postos $n+1$ pombos, então pelo menos uma caixa terá mais de um pombo."

Alguns Exemplos:

i. Em um grupo de três pessoas, pelo menos duas delas são do mesmo sexo.

ii. Em um grupo de 13 pessoas, pelo menos duas delas têm o mesmo signo.

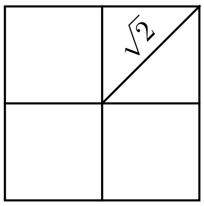
iii. Em um grupo de 5 cartas de baralho, pelo menos duas são do mesmo naipe.

iv. Na cidade de Fortaleza, existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de fios de cabelo.

Agora vamos ver como algo tão simples pode resolver problemas aparentemente difíceis:

Problema 1. Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos dois deste pontos estão em um distância menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução. Divida o quadrado em quatro quadrados menores como na figura ao lado. Como temos cinco pontos e quatro quadrados, teremos pelo menos dois pontos no mesmo quadradinho. Como a maior distância entre dois pontos do mesmo quadradinho não supera a medida de sua diagonal, o resultado segue de imediato. $\square$



Passo de Mágica?

Para o aluno iniciante a solução do problema anterior pode ter parecida um pouco mágica. Vamos mostrar que não é bem assim, que existe um método na solução de alguns problemas simples que usam a idéia da casa dos pombos.

A primeira coisa que devemos aprender a reconhecer é quando um problema se trata de um problema sobre casa dos pombos. Isso pode ser ganho com experiencia, mas vamos dar um empurãozinho para você. Um problema de PCP tem quase sempre a seguinte cara:

- *Dado um conjunto de n* **objetos**, *prove que podemos escolher k deles satisfazendo uma* **propriedade**.

Bem, depois de identificar que o enunciado do problema no traz a idéia de usar PCP, devemos nos concentrar em responder as seguintes perguntas:

(i) **Quem são os pombos?**

(ii) **Quantas são as casas?**

(iii) **Quem são as casas?**

Quase sempre as duas primeiras perguntas são as mais fáceis de serem respondidas. Para responder a terceira pergunta devemos pensar no conceito dual de *espaço amostral*. Por um lado, o espaço amostral é o conjunto das possíveis posições dos pombos. Por outro, é a união de todas as casas.

Para finalizar, devemos separar o espaço amostral no número de casas já descoberto. Nessa hora é importante lembrar que as casas devem fletir a propriedade desejada.

Como acabamos de ver, usar o princípio da casas dos pombos não é difícil. O difícil está em achar o que serão nossos "pombos" e "caixas". O próximo problema é, *a priori*, um problema de teoria dos números. Porém, vamos usar o princípio da casa dos pombos para resolvê-lo.

Problema 2. Prove que dados sete inteiros positivos, existem dois cuja soma ou a diferença é um múltiplo de 10.

Solução. Vamos montar seis caixas $C_0, C_2, ..., C_5$ onde um inteiro está na caixa C_i se é congruente a i ou a $-i$ módulo 10. Sabemos que existirão dois inteiros na mesma caixa. Dessa forma, se eles forem incongruentes módulo 10, basta somá-los. Caso contrário, faça a sua diferença. □

Problema 3. Dados 5 pontos no plano com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos dez pontos médio gerados por eles também possui coordenadas inteiras.

Solução. Podemos separar os pontos de coordenadas inteiras (que é representado por $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$) em quatro grupos G_1, G_2, G_3, G_4 como a seguir.

i) $G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x, y \text{ são ambos pares}\}$.

ii) $G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x, y \text{ são ambos ímpares}\}$.

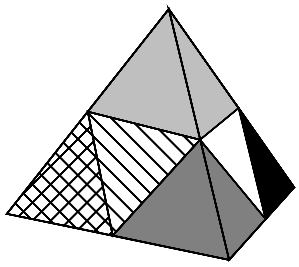
iii) $G_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x \text{ é par e } y \text{ é ímpar}\}$.

iv) $G_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x \text{ é ímpar e } y \text{ é par}\}$.

Observe que pontos que pertencem ao mesmo grupo, possuem pontos médios com coordenadas inteiras. Como temos 5 pontos, o princípio da casa dos pombos nos garante que há pelo menos dois pontos no mesmo grupo. □

Problema 4. Nove pontos são postos sobre a superfície de um tetraedro regular com $1cm$ de aresta. Prove que detre esses pontos é possível acahr dois com distância (espacial) não maior que $0.5cm$.

Solução. Vamos particionar a superfície do tetraedro em 16 triângulos eqüiláteros congruentes, dividindo cada face em quatro partes usando suas bases médias. Agora vamos criar 8 regiões pitando esses triângulos de acordo com a seguinte regra: os triângulos que possuem um mesmo vértice do tetraedro serão pintados da mesma cor; dessa forma já usamos quatro cores diferentes para 12 triângulos e os outros quatro vamos pintar usando as demais cores. De acordo com o Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos dois dos nove pontos estarão na mesma região. Fica apenas faltando que a distância máxima entre dois pontos da mesma região é no máximo $0.5cm$. □



Problemas Propostos

Problema 5. Cinquenta e um pontos são postos no interior de um quadrado de lado 1 metro. Prove que existe um conjunto de três desses pontos podem ser cobertos por um quadrado de lado 20 centímetros.

Problema 6. Em cada casa de um tabuleiro 3×3 é colocado um dos números $-1, 0, 1$. Prove que, dentre as oito somas ao longo de uma mesma linha, coluna ou diagonal, existem duas iguais.

Problema 7. Prove que de qualquer conjunto de dez inteiros podemos escolher um subconjunto cuja soma é um múltiplo de 10.

Problema 8. Prove que existe uma potência de 3 terminada nos dígitos 001 (na base decimal).

Problema 9. Mostre que um triângulo eqüilátero não pode ser totalmente coberto por outros dois triângulos eqüiláteros menores.

Problema 10. (Longlist IMO 1977 - Romênia) Dados 37 pontos no espaço com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos triângulos formado por três destes pontos possui o baricentro com coordenadas inteiras.

Problema 11. (Bielorussia 1996) Em um grupo de 29 hobbits existem alguns deles que falam a verdade e os outros que sempre mentem. Em um certo dia de primavera, todos eles se sentaram ao redor de uma mesa, e cada um deles falou que seus dois vizinhos eram mentirosos.
a) Prove que pelo menos 10 hobbtis falavam a verdade.
b) É possível que exatamente 10 deles falem a verdade?

Problema 12. Em cada casa de um tabuleiro 10×10 é posto um inteiro de modo que a diferença positiva entre os inteiros de duas casas vizinhas (lado em comum) é no máximo 5. Prove que dois destes inteiros devem ser iguais.

Problema 13. Trinta e três torres são postas em um tabuleiro 8×8. Prove que podemos escolher cinco delas sem que nenhuma ataque a outra.

Problema 14. (Longlist IMO 1979 - Bulgária) Colocamos $4n + 1$ reis em um tabuleiro infinito. Prove que podemos escolher $n + 1$ deles de modo que não existam dois que se ataquem.

Problema 15. Prove que de qualquer subconjunto de $n+1$ elementos do conjunto $\{1, 2, ..., 2n\}$ é possível escolher dois que sejam primos entre si.

Problema 16. (IMO 1972) Prove que, de qualquer conjunto de dez números distintos de dois dígitos, podemos escolher dois subconjuntos A e B (disjuntos) cuja a soma dos elementos é a mesma em ambos.

Problema 17. Quarenta estudantes participaram de uma olimpíada de matemática. A prova consistia de cinco problemas ao todo. Sabe-se que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 23 participantes. Prove que deve existir dois participantes tais que todo problema foi resolvido por pelo menos um deles dois.

Problema 18. Prove que em qualquer grupo de 17 números escolhidos do conjunto

$$M = \{1, 2, 3, ..., 24, 25\}$$

é possível escolher dois cujo produto é um quadrado perfeito.

Dicas e Soluções

5. Imite aa solução do problema 1.

6. A soma de três números varia no conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ como são 8 somas, pelo menos uma será usada mais de uma vez.

7. Se $a_1, a_2, ..., a_{10}$ são os números, considere as somas

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}.$$

Se uma delas for um múltiplo de 10, teremos encontrado a solução do problema. Caso contrário, como há 9 restos possíveis (dintintos de zero) na divisão por 10, pelo PCP, existirão duas destas somas que serão congruentes módulo 10. Se $S_i \equiv S_j \pmod{10}$, então

$$S_i - S_j \equiv a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j \equiv 0 \pmod{10}.$$

Isso conclui a solução.

8. Use PCP para demonstrar que existem duas potências de 3 com o mesmo resto na divisão por 1000.

9. Observe o que acontece nos vértices do triângulo maior.

10. Adapte a solução do problema 3

13. Pinte o tabuleiro usando 8 cores como no diagrama a seguir

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Pelo PCP existirão pelo menos 5 torres em casas de mesma cor. Observe que torres em casas de mesma cor não se atacam.

14. Pinte o tabuleiro usando 4 cores como no diagrama a seguir

1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3

    Repita o argumento anterior.

15. Separe o conjunto em n pares de elementos consecutivos.

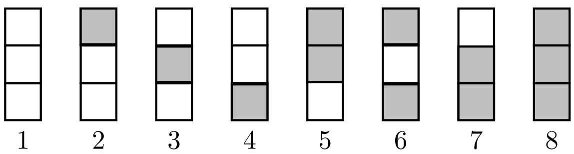
Prof. Bruno Holanda

Princípio da Casa dos Pombos II

Nesta aula vamos continuar praticando as ideias da aula anterior, aplicando o princípio da casa dos pontos em problemas mais sofisticados e em alguns tipos de problemas que chamaremos de problemas de coloração.

Problema 1. Cada casa de um tabuleiro 3×7 é pintado de preto ou branco. Mostre que é possível achar um retângulo (com lados paralelos aos do tabuleiro) cujas quatro pontos são da mesma cor.

Solução. Cada coluna deste tabuleiro pode ser pintado de uma das seguintes formas:



Observe que se a pintura 1 for escolhida, bastaria uma coluna do tipo 2, 3 ou 4 para formar um retângulo. Com isso, nos restariam apenas mais quatro outras pinturas porém, temos sete colunas. Daí, pelo principio da casa dos pombos teríamos duas colunas iguais. O mesmo ocorre com a coluna do tipo 8.

Agora suponha que nenhuma das colunas for do tipo 1 ou 8. Dessa forma, restaria apenas 6 tipos de pinturas. Assim, pelo princípio da casas dos pombos, duas delas seriam iguais. □

Problema 2. (Belarus 2007 - adaptado) Os pontos de um plano são pointados usando três cores. Prove que existe um triângulo isósceles monocromático.

Solução. Suponha que exista uma forma de pintar o plano de forma que não exista um triângulo isóceles monocromático. Assuma que as cores sejam verde, azul e vermelho. Construa um suponha sem perda de generalidade que o seu centro O seja verde. Dessa forma, pode haver no máximo um único ponto verde dentre os pontos dos círculo. Assim é possível construir um pentágono regular $A_1A_2A_3A_4A_5$ cujos vértices são todos azuis ou vermelhos.

Daí, pelo princípio da casa dos pombos, existirão três vértices do pentágono que serão da mesma cor. E como quaisquer três vértices de um pentágono regular formam um triângulo isósceles, existirá um triângulo isósceles monocromático. □

Problema 3. (Leningrado) Considere 70 inteiros positivos distintos menores ou iguais a 200. Prove que existem dois deles cuja diferença é 4, 5 ou 9.

Solução. Sejam $a_1, a_2, ..., a_{70}$ esses inteiros positivos. Considere as seguintes listas:

$$\{a_1, a_2, ..., a_{70}\};$$

$$\{a_1 + 4, a_2 + 4, ..., a_{70} + 4\};$$

$$\{a_1 + 9, a_2 + 9, ..., a_{70} + 9\}.$$

Temos um total de 210 números que estão compreendidos entre 1 e 209 (inclusive). Portanto, pelo princípio da casa dos pombos, existirão dois iguais. Como números na mesma lista são sempre diferentes, será possível encontrar dois números em listas diferentes que são iguais. Estes dois números irão satisfazer à condição do problema. □

Problema 4. (Torneio das Cidades 1998) Em um tabuleiro 8×8, 17 casas são marcadas. Prove que é possível escolher duas dessas casas marcadas de modo que um cavalo de xadrez leve pelo menos três movimentos para ir de uma a outra.

Solução. Pinte as casas do tabuleiro usando 16 cores conforme a figura a seguir.

10	12	14	16	2	4	6	8
10	12	14	16	2	4	6	8
9	11	13	15	1	3	5	7
9	11	13	15	1	3	5	7
2	4	6	8	10	12	14	16
2	4	6	8	10	12	14	16
1	3	5	7	9	11	13	15
1	3	5	7	9	11	13	15

Observe que para se deslocar entre duas casas de mesma cor o cavalo necessita de pelo menos três movimentos. Portanto, pelo princípio da casa dos pontos, dentre 17 casas marcadas, sempre haverá pelo menos duas da mesma cor. □

Problema 5. (Teste Cone Sul) Os inteiros $1, 2, \ldots, 200$ são divididos em 50 conjuntos. Mostre que pelo menos um desses 50 conjuntos contém três números distintos que podem ser medidas dos lados de um mesmo triângulo.

Pelo Princípio da Casa dos Pombos, dentre os 101 inteiros $100, 101, \ldots, 200$, pelo menos três deles estão em um mesmo conjunto. Sendo $a < b < c$ tais inteiros, temos

$$a + b \geq 100 + 101 = 201 > 200 \geq c \Rightarrow a + b > c,$$

e portanto a, b, c podem ser medidas dos lados de um mesmo triângulo. $\square$

Problemas Propostos

Problema 6. Mostre que para todo $n > 1$ de qualquer subconjunto de $n + 2$ elementos do conjunto $1, 2, ..., 3n$ podemos escolher dois cuja a diferença é maior que n e menor que $2n$.

Problema 7. Em uma sapataria existem 200 botas de tamanho 41, 200 botas de tamanho 42, e 200 botas de tamanho 43. Dessas 600 botas, 300 são para o pé esquerdo e 300 para o direito. Prove que existem pelo menos 100 pares de botas usáveis.

Problema 8. Onze estudantes formaram cinco grupos de estudo. Prove que existem dois alunos A e B, tais que em todo grupo que inclui A também inclui B.

Problema 9. Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então um deles será múltiplo de outro. Isso pode ser evitado com n números?

Problema 10. (Torneio das Cidades 1994) Existem 20 alunos em uma escola. Quaisquer dois deles possui um avó em comum. Prove que pelo menos 14 deles possui um avó em comum.

Problema 11. (Rússia 1997) Uma sala de aula possui 33 alunos. Cada aluno tem uma música e um cantor favorito. Certo dia, cada um deles perguntou aos demais suas músicas e catores favoritos. Em seguida, cada um falou dois números, o primeiro era a quantidades de alunos que gostavam da mesma música e o segundo, a quantidade de alunos que tinham o mesmo cantor favorito. Sabe-se que cada um dos números de 0 a 10 apareceu entre as respostas. Mostre que existem dois alunos que gostam do mesmo cantor e da mesma música.

Problema 12. Suponha que para algum inteiro $k \geq 1$ a soma de $2k + 1$ inteiros positivos distintos é menor que $(k + 1)(3k + 1)$. Mostre que existem dois deles cuja soma é $2k + 1$.

Problema 13. Existe algum conjunto A formado por sete inteiros positivos, nenhum dos quais maior que 24, tal que as somas dos elementos de cada um dos seus 127 subconjuntos não-vazios sejam distintas duas a duas?

Problema 14. (USAMO 1985) Em uma festa há n pessoas. Prove que existem duas pessoas tais que, das $n-2$ pessoas restantes é possível achar $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ onde cada uma delas conhece ou não conhecem ambas.

Problema 15. O plano é pintado usando duas cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Problema 16. (Putnam) O plano é pintado usando três cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Problema 17. O plano é totalmente pintado usando duas cores. Prove que existe um retângulo cujos vértices são todos da mesma cor.

Problema 18. (IMO 1983) Cada ponto do perímetro de um triângulo eqüilátero é pintado de uma de duas cores. Mostre que é possível escolher três pontos da mesma cor formando um triângulo retângulo.

Problema 19. Nove pontos de um icoságono regular são pintados de vermelho. Prove que podemos encontrar três deles formando um triângulo isósceles.

Problema 20. (Rússia 2004) Cada ponto de coordenadas inteiras é pintado de uma de três cores, sendo cada cor usada pelo menos uma vez. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo cujos vértices são de cores distintas.

Problema 21. O plano é pintado usando três cores. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo isósceles com os três vértices da mesma cor.

Dicas e Soluções

9. Dado um inteiro positivo m, podemos escrevê-lo de modo único na forma $m = 2^a b$, em que $a \geq 0$ e b é ímpar. Chamaremos b de parte ímpar do número m.

   No conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ só podem existir n possíveis partes ímpares, a saber: $1, 3, \ldots, 2n-1$. Se escolhermos mais do que n números, pelo princípio da casa dos pombos, existem dois números m e n que têm a mesma parte ímpar, ou seja, $a = 2^r b$ e $c = 2^s b$. Mas então, supondo sem perda de generalidade que $r \leq s$, concluímos que $a|c$.

   O resultado pode ser evitado com exatamente n números. Um exemplo é escolhermos os números $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

13. Não. Por absurdo, suponha $A = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_7\}$ satisfazendo a condição do enunciado. Note que

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_7 < 24 + 23 + 22 + 20 + 19 + 18 + x_1 = 126 + x_1.$$

   De fato, $24, 23, 22, 21$ não podem estar simultaneamente em A (pois $24+21 = 23+22$), bem como $24, 23, 19, 18$ também não (pois $24 + 18 = 19 + 23$). Como a soma mínima dos elementos de um subconjunto é x_1 e a soma máxima é menor que $126+x_1$, existem no máximo 126 valores para a soma dos elementos de cada subconjunto. O Princípio da Casa dos Pombos garante portanto que existem dois subconjuntos não-vazios de A com a mesma soma, absurdo.