

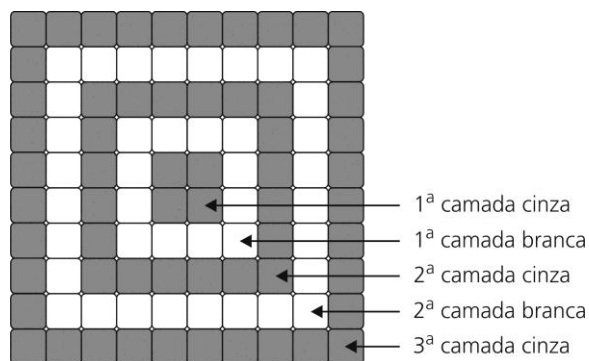
Duodécima lista de exercícios.

Sequências e progressões.

1. Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência (supondo que n começa em 1).
 - a) $a_n = (-3)^{n-1}$
 - b) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
 - c) $a_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)$
 - d) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 - e) $a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi(n-1)$
 - f) $a_n = \frac{n^2+n}{2}$
2. Escreva os quatro primeiros termos de cada sequência e descubra a fórmula do n -ésimo termo em função de n .
 - a) $a_1 = 2, a_i = a_{i-1} + 4$
 - b) $a_1 = 5, a_i = 2a_{i-1}$
 - c) $a_1 = 1, a_i = (-2)a_{i-1}$
3. Calcule os somatórios.
 - a) $\sum_{i=1}^4 \left(\frac{2}{i+2}\right)$
 - b) $\sum_{j=1}^4 (-1)^j \left(\frac{j-1}{j^2+1}\right)$
 - c) $\sum_{k=1}^5 (2^k - k^2)$
 - d) $\sum_{i=1}^{20} \frac{i}{2} [1 + (-1)^i]$
4. Usando as propriedades dos somatórios e os valores conhecidos de $\sum_{k=1}^n 1$ e de $\sum_{k=1}^n k$, calcule as somas.
 - a) $\sum_{i=1}^{100} (2i - 1)$
 - b) $\sum_{i=1}^{100} 2(i - 1)$
 - c) $\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{i}{2} + \frac{2}{5}\right)$
 - d) $\sum_{i=21}^{80} i$
 - e) $\sum_{i=50}^{100} (3i + 1)$
5. O coeficiente de rendimento (CR) dos alunos da UNICAMP é calculado pela fórmula

$$CR = \left(\sum_{i=1}^n N_i C_i \right) / \left(10 \sum_{i=1}^n C_i \right),$$
 em que N_i e C_i são, respectivamente, a nota e o número de créditos relativos à i -ésima disciplina, e n é o número de disciplinas cursadas. Usando as notas que você acredita que terá ao final do semestre, calcule o seu CR.
6. Indique quais das sequências do exercício 1 são progressões aritméticas.
7. Os dois primeiros termos de algumas progressões aritméticas são dados abaixo. Escreva o termo geral e determine o termo indicado.
 - a) 4, 1, ... a_{12} ?
 - b) -12,5; -7; ... a_{10} ?
8. Calcule as somas abaixo.
 - a) Todos os inteiros ímpares entre 1 e 99.
 - b) Os 100 primeiros inteiros positivos pares.
 - c) Os primeiros 20 termos da progressão aritmética 3, 8, ...
9. A ANATEL determina que as emissoras de rádio FM utilizem as frequências de 87,9 a 107,9 MHz, e que haja uma diferença de 0,2MHz entre emissoras com frequências vizinhas.
 - a) Determine quantas emissoras FM podem funcionar em uma mesma região.
 - b) A 1ª e a 86ª frequência são reservadas às rádios comunitárias. Determine a frequência dessas rádios.
10. No mês corrente, uma empresa registrou uma receita de R\$ 600 mil e uma despesa de R\$ 800 mil. Para voltar a ter lucro, a empresa pretende manter constante a receita, e reduzir suas despesas, mensalmente, em exatos R\$ 45 mil. Escreva a expressão do termo geral da progressão aritmética que fornece o valor da despesa em função de n , o número de meses transcorridos, considerando como mês inicial o corrente. Calcule em quantos meses a despesa será menor que a receita.
11. No centro de um mosaico formado apenas por pequenos ladrilhos, um artista colocou 4 ladrilhos cinza. Em torno dos ladrilhos centrais, o artista colocou uma camada de ladrilhos brancos, seguida por uma camada de ladrilhos cinza, e

assim sucessivamente, alternando camadas de ladrilhos brancos e cinza, como ilustra a figura abaixo, que mostra apenas a parte central do mosaico. Determine o número de ladrilhos da 10ª camada cinza.



12. Suponha que o mosaico do exercício 9 tenha exatamente 10 camadas de cada cor. Calcule o número de ladrilhos brancos e o número de ladrilhos cinza empregados na sua construção.
13. Um *site* de relacionamento tem 2200 membros e planeja aumentar o número de integrantes usando uma estratégia agressiva de propaganda. O *site* espera que 100 novos membros entrem na primeira semana após a propaganda, 200 entrem na segunda semana, 300 entrem na terceira semana, etc. Caso essa estratégia dê certo, determine em quantas semanas o site terá 10000 membros.
14. Para cada item abaixo, escreva os quatro primeiros termos e o termo geral da progressão geométrica cujo primeiro termo e cuja razão são dados.
 - a) $a_1 = 3, r = 4$
 - b) $a_1 = 2, r = -3$
 - c) $a_1 = -1, r = 1/2$
 - d) $a_1 = 3, r = \sqrt{2}$
15. Indique quais sequências abaixo são progressões geométricas. Para as que forem progressões geométricas, encontre a razão.
 - a) 3, 9, 27, 81, ...
 - b) 3, 6, 12, 24, 48, ...
 - c) a, a^2, a^3, a^4, \dots
 - d) $a^2, a^4, a^8, a^{16}, \dots$
 - e) $-2a, 2a^3, -2a^5, 2a^7, \dots$
 - f) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \dots$
16. Em cada item abaixo, são dados dois termos de uma progressão geométrica. Escreva o termo geral e determine o termo indicado.
 - a) $a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{15}{2}, \dots, a_7?$
 - b) $a_1 = 2, a_2 = -2, \dots, a_{100}?$
 - c) $a_1 = 10, a_4 = 5, \dots, a_{10}?$
17. Calcule a soma dos primeiros 6 termos das progressões geométricas da questão 16.
18. Calcule a soma dos primeiros 10 e dos primeiros 20 termos da sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. O que você acha que acontecerá se somarmos um número cada vez maior de termos dessa progressão?
19. Neste mês, uma empresa registrou uma receita de R\$ 600 mil. Suponha que a receita aumentará 10% a cada mês. Encontre o termo geral da progressão geométrica que representa a receita a cada mês. Determine qual será a receita acumulada em 10 meses. Se necessário, use $1,1^2 = 1,21$; $1,1^3 \cong 1,33$ e $1,1^5 \cong 1,61$.
20. Por norma, uma folha de papel A4 deve ter 210mm x 297mm. Considere que uma folha A4 com 0,1mm de espessura é seguidamente dobrada ao meio, de forma que a dobra é sempre perpendicular à sua maior dimensão.
 - a) Escreva a expressão do termo geral da progressão geométrica que representa a espessura do papel dobrado em função do número, k , de dobras feitas.
 - b) Considere que, idealmente, o papel dobrado tem o formato de um paralelepípedo. Nesse caso, após dobrar o papel seis vezes, quais serão as dimensões do paralelepípedo?
21. Um capital de R\$ 5.000,00 é investido em uma aplicação financeira que rende 8,1% ao ano, Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, determine o número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital aplicado seja maior que o dobro do capital inicial.
22. Um auditório tem poltronas organizadas em fileiras. A terceira fileira tem 28 poltronas e a quarta tem 32 poltronas. Sabendo que o número de poltronas aumenta de forma constante entre fileiras sucessivas, e que o auditório tem 30 fileiras de poltronas

- a) Determine o número de poltronas da 1ª fileira.
- b) Determine o número de poltronas da n -ésima fileira, em que n é um número natural qualquer.
- c) Determine o número total de poltronas do auditório.

23. Uma empresa está contratando funcionários da área de informática, pagando um salário inicial de R\$ 40.000,00 por ano (incluindo os pagamentos mensais, o décimo terceiro salário e o adicional de férias). Além disso, a empresa prometeu aumentar em 3% o salário de seus funcionários a cada ano de trabalho.

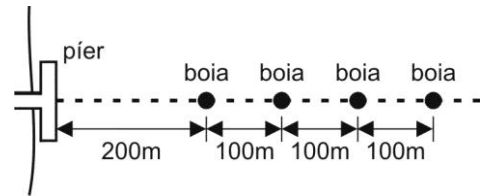
- a) Determine o salário anual do funcionário em cada um dos seus primeiros três anos na empresa.
- b) Escreva a fórmula de a_n , o termo geral da progressão que fornece o salário anual que o funcionário receberá no seu n -ésimo ano na empresa.
- c) Determine o montante total que o funcionário receberá nos primeiros 10 anos de trabalho.

24. Uma indústria usa uma máquina nova por 1024 dias. Após esse período, a máquina é reformada e reutilizada. Entretanto, após cada reforma, a máquina só é usada por metade do tempo de uso anterior. Ou seja, antes da primeira reforma, ele é usada por 1024 dias. Antes da segunda reforma, ela é usada por 512 dias. Antes da terceira reforma seu tempo de uso cai para 256 dias, e assim por diante.

- a) Escreva o termo geral a_n da progressão que fornece o tempo de uso da máquina antes de cada reforma.
- b) A máquina é descartada sempre que o tempo de uso após uma reforma é menor ou igual a 32 dias. Usando a resposta do item (a), determine quantas reformas ela sofrerá até deixar de ser usada.

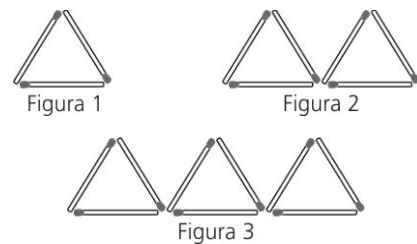
25. Um barco será usado para recolher 20 boias que foram colocadas em linha reta, como mostra a figura abaixo. A primeira boia está a 200 m do píer de onde partirá o barco, e cada uma das demais boias está a uma distância de 100 m da anterior. Como o barco é muito pequeno, só é possível transportar uma boia por vez. Desse

modo, o barqueiro pegará a primeira boia e retornará ao píer. Em seguida, ele buscará a segunda boia, retornando novamente ao píer. Esse processo será repetido até que todas as boias tenham sido recolhidas.



- a) Determine a distância percorrida pelo barco (ida e volta) para buscar cada uma das quatro primeiras boias.
- b) Escreva a fórmula do termo geral a_n da progressão que fornece a distância percorrida pelo barco (ida e volta) para resgatar apenas a n -ésima boia.
- c) Determine a distância total percorrida pelo barco para recolher todas as boias.

26. Considere as figuras apresentadas a seguir, que representam os três primeiros termos de uma sucessão de figuras formadas por palitos de fósforo.



- a) Suponha que F_1 , F_2 e F_3 indiquem, respectivamente, o número de palitos usados para produzir as Figuras 1, 2 e 3. Escreva a expressão geral de F_i (o número de fósforos usados para formar a Figura i) e calcule F_{10} .
- b) Suponha que você deseje exibir concomitantemente as figuras dessa sucessão, começando pela primeira. Quantas figuras é possível exibir com 360 fósforos?

27. A progressista cidade de Chopotó da Serra conta hoje com 15000 habitantes. Previsões estatísticas indicam que a população da cidade crescerá a uma taxa de 3% ao ano nos próximos anos.

- a) Escreva a expressão do termo geral da progressão que fornece o número de habitantes da cidade em relação a n , o número de anos decorridos a partir de hoje.

- b) Sem calcular a população ano a ano, determine a população daqui a 10 anos.
- c) Sem calcular a população ano a ano, determine em quantos anos a população da cidade será 50% maior que a atual.

28. Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência (supondo que n começa em 1).

- a) $a_n = \sqrt{2^n}$
 b) $a_n = 2(-1)^n + 2$
 c) $a_n = 4 \cdot 2^{-bn}$

29. A sequência de Fibonacci é formada partindo-se de $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$ e definindo-se o n -ésimo termo como a soma dos dois termos imediatamente anteriores, ou seja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Determine os dez primeiros termos dessa famosa sequência.

30. Os três primeiros termos de algumas progressões (aritméticas e geométricas) são dados abaixo. Determine o termo geral e determine o termo indicado.

- a) $-\frac{3}{2}, 1, \frac{7}{2}, \dots, a_{20}?$
 b) $\frac{3}{2}; -1; \frac{2}{3} \dots a_8?$

31. Calcule a soma dos 8 primeiros termos de cada sequência do exercício anterior.

32. Considere a sucessão de figuras apresentada a seguir. Observe que cada figura é formada por um conjunto de palitos de fósforo.

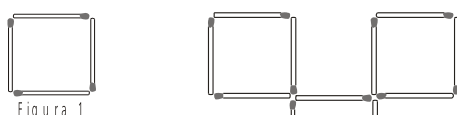


Figura 1

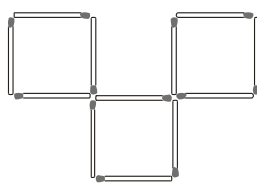


Figura 2

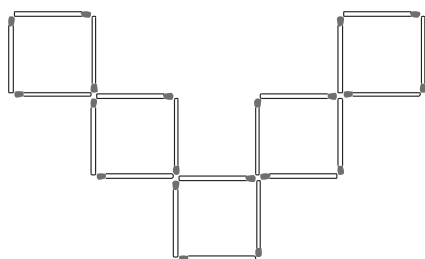


Figura 3

- a) Suponha que essas figuras representem os três primeiros termos de uma sucessão de figuras que seguem a mesma lei de formação. Suponha também que F_1 , F_2 e F_3 indiquem, respectivamente, o número de palitos usados

para produzir as figuras 1, 2 e 3. Escreva a expressão geral de F_n (o número de fósforos utilizados para formar a figura n) e calcule F_{10} .

- b) Determine o número de fósforos necessários para que seja possível exibir concomitantemente todas as primeiras 50 figuras.

33. Uma pilha de toras de madeira tem 30 troncos na camada inferior, 29 troncos na segunda camada, 28 na terceira, e assim sucessivamente, até a última camada, que tem 12 toras. Calcule o número total de toras da pilha.

34. Recém contratado, João recebe um salário mensal de R\$ 3000,00. Na empresa de João, todo empregado ganha um aumento de 5% a cada 5 anos de trabalho. Se João permanecer no mesmo posto nessa empresa, qual deverá ser seu salário daqui a 30 anos, desprezando a inflação?

35. O valor presente, V_p , de uma parcela de um financiamento, a ser paga daqui a n meses é dado pela fórmula abaixo, em que r é o percentual mensal de juros ($0 \leq r \leq 100$) e p é o valor da parcela.

$$V_p = \frac{p}{\left[1 + \frac{r}{100}\right]^n}$$

- a) Suponha que uma mercadoria seja vendida em duas parcelas iguais de R\$ 200,00, uma a ser paga à vista, e outra a ser paga em 30 dias (ou seja, 1 mês). Calcule o valor presente da mercadoria, V_p , supondo uma taxa de juros de 1% ao mês.
- b) Imagine que outra mercadoria, de preço $2p$, seja vendida em duas parcelas iguais a p , sem entrada, com o primeiro pagamento em 30 dias (ou seja, 1 mês) e o segundo em 60 dias (ou 2 meses). Supondo, novamente, que a taxa mensal de juros seja igual a 1%, determine o valor presente da mercadoria, V_p , e o percentual mínimo de desconto que a loja deve dar para que seja vantajoso, para o cliente, comprar à vista.

36. Você recebeu uma propaganda indicando que é possível comprar uma moto pagando R\$ 2000,00 no ato da compra e financiando o resto em 36 meses. A propaganda diz que as parcelas mensais

são de R\$ 150,00 e que a loja cobra mensalmente 2% de juros (e outras despesas). Calcule o preço à vista da moto. Calcule o total cobrado pelos juros. Dica: some ao valor pago no ato da compra o valor presente do restante do pagamento.

37. Mariana vai passar dois anos poupando R\$ 200,00 por mês para fazer a viagem de seus sonhos. Supondo que Mariana aplicará seu dinheiro em um fundo de investimento que rende 1,1% ao mês, quanto dinheiro ela terá daqui a 2 anos?
38. A partir de hoje, você pretende passar um ano poupando R\$ 90,00 por mês para comprar uma TV. Se sua aplicação financeira favorita rende 1,2% ao mês, quanto dinheiro você terá ao final dos doze meses?
39. Imagine que a TV do exercício anterior custe R\$ 1.400,00 (mais do que você imaginava). Para poder comprá-la em um ano, quanto você deve depositar mensalmente na sua aplicação que rende 1,2% ao mês?
40. Uma loja oferece dois planos de pagamento de uma geladeira: ou o cliente paga R\$ 1000,00 à vista ou 11 prestações de R\$ 100,00, com o primeiro pagamento no ato da compra. Se sua aplicação financeira favorita rende 1,2% ao mês, qual é a opção mais vantajosa?
41. Uma loja de computadores vende um *notebook* em 10 prestações de R\$250,00, sem entrada. Supondo que nesse preço esteja embutida uma taxa de juros de 2%, determine o valor máximo que você deve pagar se quiser comprar o computador à vista.

Respostas.

- 1.a. $1, -3, 9, -27, 81$.
- 1.b. $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$.
- 1.c. $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}$.
- 1.d. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$.
- 1.e. $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \frac{17\pi}{2}$.
- 1.f. $1, 3, 6, 10, 15$.
- 2.a. $a_n = 2 + 4(n - 1)$.
- 2.b. $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$.
- 2.c. $a_n = (-2)^{n-1}$.
- 3.a. $19/10$.
- 3.b. $3/17$.
- 3.c. 7 .
- 3.d. 110 .
- 4.a. 10000 .
- 4.b. 9900 .
- 4.c. 2565 .
- 4.d. 3030 .
- 4.e. 11375 .
5. ...
6. Somente a sequência (e).
- 7.a. $a_n = 4 - 3(n - 1)$. $a_{12} = -29$.
- 7.b. $a_n = -12,5 + 5,5(n - 1)$. $a_{10} = 37$.
- 8.a. 2500 .
- 8.b. 10100 .
- 8.c. 1010 .
- 9.a. 101 emissoras.
- 9.b. $104,9$ MHz.
10. A despesa será menor que a receita no sexto mês, ou seja, daqui a cinco meses.
11. 148 .
12. 760 ladrilhos cinza e 840 ladrilhos brancos.
13. O site terá 10000 membros em 12 semanas.
- 14.a. $3, 12, 48, 192$
- 14.b. $2, -6, 18, -54$
- 14.c. $-1, -1/2, -1/4, -1/8$
- 14.d. $3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}$
- 15.a. É uma p.g. de razão 3.
- 15.b. É uma p.g. de razão 2.
- 15.c. É uma p.g. de razão a .
- 15.d. Não é uma p.g.
- 15.e. É uma p.g. de razão $-a^2$.
- 15.f. Não é uma p.g.
- 16.a. $a_n = \frac{3}{2} \cdot 5^{n-1}$, $a_7 = \frac{46875}{2}$

- 16.b. $a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}$, $a_{100} = -2$
- 16.c. $a_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_{10} = \frac{10}{1024} = \frac{5}{512}$
- 17.a. $S_6 = 5859$
- 17.b. $S_6 = 0$
- 17.c. $S_6 = \frac{315}{16} = 19,6875$
18. $S_{10} = 1,9980469$, $S_{10} = 1,9999981$
19. Cerca de R\$ 9.540.000,00.
- 20.a. $a_n = 0,1 \cdot 2^n$
- 20.b. 37,125 mm, 26,25 mm e 6,4 mm.
21. 9 anos
- 22.a. 20 poltronas.
- 22.b. $a_n = 16 + 4n$.
- 22.c. 2340 poltronas.
- 23.a. R\$ 40000,00, R\$ 41200,00 e R\$ 42436,00.
- 23.b. $a_n = 40000 \times 1,03^n$
- 23.c. R\$ 458.555,00.
- 24.a. $a_n = 1024 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- 24.b. 5 reformas.
- 25.a. 400 m, 600 m, 800 m e 1000 m.
- 25.b. $a_n = 200n + 200$.
- 25.c. $S_{20} = 46$ km.
- 26.a. $F_i = 3i$. $F_{10} = 30$.
- 26.b. 15 figuras.
- 27.a. $a_n = 15000 \cdot 1,03^n$.
- 27.b. $a_{10} = 20159$ habitantes.
- 27.c. Em pouco mais de 13 anos.
- 28.a. $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}$
- 28.b. 0, 4, 0, 4, 0
- 28.c. $2^{2-b}, 2^{2-2b}, 2^{2-3b}, 2^{2-4b}, 2^{2-5b}$
29. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
- 30.a. $a_n = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}(i-1)$, $a_{20} = 46$
- 30.b. $a_n = \frac{3}{2} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $a_8 = -\frac{64}{729}$
- 31.a. 58.
- 31.b. 1261/1458
- 32.a. $F_n = 4 + 8(n-1)$. $F_{10} = 76$
- 32.b. 10000 fósforos.
33. 399 toras.
34. R\$ 4020,29
- 35.a. R\$ 398,02.
- 35.b. O desconto não deve ser inferior a 1,5%.
36. Preço à vista: R\$ 5823,33. Juros: R\$ 1576,67.
37. R\$ 5519,19
38. R\$ 1168,06.
39. R\$ 107,87.

40. Comprar à vista é mais vantajoso, pois se você aplicasse seu dinheiro e pagasse as 11 parcelas, mês a mês, desembolsaria, em valores atuais, R\$ 1037,05.
41. R\$ 2245,65.