Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2017

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I1**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

Una fabrica de cerámicas y porcelanatos envía una partida de piezas a un edificio en construcción, durante la instalación por parte de los trabajadores de la constructora, cada pieza puede quedar de manera independiente: (1) instalada correctamente, (2) instalada con observaciones, pero dentro de la tolerancia y (3) instalada con observaciones, fuera de los márgenes de tolerancia, con probabilidades 0.3, 0.4 y 0.3 respectivamente. Durante la entrega de los departamentos, uno de los nuevo dueños tenía dudas sobre la calidad de las terminaciones, y para tranquilizarlo, el encargado de postventa le indica que tome una muestra aleatoria y si más del 20 % está instalada con observaciones fuera de los márgenes o un 30 % o más se instala con observaciones dentro de los márgenes de tolerancia, la empresa realizará el cambio total de las piezas y pedirá que una empresa externa especializada en este tipo de instalación realice el trabajo. Por otra parte un 5 % de las piezas viene con fallas desde fabrica y aunque queden correctamente instaladas, el cliente la considerará como pieza instalada fuera de los márgenes de tolerancia. ¿Cuál sería la probabilidad que la empresa deba instalar todo nuevamente, si la muestra es de tamaño diez? Utilice cinco decimales para sus cálculos.

Solución

Definamos los siguientes eventos

- D: La empresa no instalara nada nuevamente. Esto ocurre si el 20 % o menos de la muestra tienen palmetas con observaciones fuera de los márgenes y menos del 30 % instalada con observaciones, pero dentro de la tolerancia.
- A: Palmeta instalada con observaciones, fuera de los márgenes de tolerancia.
- B: Palmeta instalada con observaciones, pero dentro de la tolerancia.
- C: Palmeta instalada correctamente.

Del enunciado

$$p_C = 0.30 \cdot 0.95 = 0.285 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$
$$p_B = 0.40 \cdot 0.95 = 0.380 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$
$$p_A = 1 - 0.285 - 0.380 = 0.335 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

El evento D ocurre en las siguientes situaciones, cuyas probabilidades de ocurrencia dada la independencia **[0.5 Ptos.]** en la instalación están dadas por:

- $AABBCCCCCC$: **[0.2 Ptos.]** $\dfrac{10!}{2!\,2!\,6!}\,p_A^2\,p_B^2\,p_C^6 = 1260 \cdot 0.11223 \cdot 0.14440 \cdot 0.00054 = 0.01260.$ **[0.2 Ptos.]**
- $AABCCCCCCC$: **[0.2 Ptos.]** $\dfrac{10!}{2!\,1!\,7!}\,p_A^2\,p_B^1\,p_C^7 = 360 \cdot 0.11223 \cdot 0.38000 \cdot 0.00015 = 0.00360.$ **[0.2 Ptos.]**
- $AACCCCCCCC$: **[0.2 Ptos.]** $\dfrac{10!}{2!\,0!\,8!}\,p_A^2\,p_B^0\,p_C^8 = 45 \cdot 0.11223 \cdot 1.00000 \cdot 0.00004 = 0.00000.$ **[0.2 Ptos.]**
- $ABBCCCCCCC$: **[0.2 Ptos.]** $\dfrac{10!}{1!\,2!\,7!}\,p_A^1\,p_B^2\,p_C^7 = 360 \cdot 0.33500 \cdot 0.14440 \cdot 0.00015 = 0.00360.$ **[0.2 Ptos.]**

- $ABCCCCCCCC$: **[0.2 Ptos.]** $\dfrac{10!}{1!\,1!\,8!}\,p_A^1\,p_B^1\,p_C^8 = 90\cdot 0.33500\cdot 0.38000\cdot 0.00004 = 0.00090.$ **[0.2 Ptos.]**
- $ACCCCCCCCC$: **[0.2 Ptos.]** $\dfrac{10!}{1!\,0!\,9!}\,p_A^1\,p_B^0\,p_C^9 = 10\cdot 0.33500\cdot 1.00000\cdot 0.00001 = 0.00000.$ **[0.2 Ptos.]**
- $BBCCCCCCCC$: **[0.2 Ptos.]** $\dfrac{10!}{0!\,2!\,8!}\,p_A^0\,p_B^2\,p_C^8 = 45\cdot 1.00000\cdot 0.14440\cdot 0.00004 = 0.00045.$ **[0.2 Ptos.]**
- $BCCCCCCCCC$: **[0.2 Ptos.]** $\dfrac{10!}{0!\,1!\,9!}\,p_A^0\,p_B^1\,p_C^9 = 10\cdot 1.00000\cdot 0.38000\cdot 0.00001 = 0.00000.$ **[0.2 Ptos.]**
- $CCCCCCCCCC$: **[0.2 Ptos.]** $\dfrac{10!}{0!\,0!\,10!}\,p_A^0\,p_B^0\,p_C^{10} = 1\cdot 1.00000\cdot 1.00000\cdot 0.00000 = 0.00000.$ **[0.2 Ptos.]**

Como los nueve eventos descritos anteriormente son eventos disjuntos, aplicando el axioma 3 (suma) se tiene que

[0.2 Ptos.] $P(D) = 0.02115 \to P(\overline{D}) = 0.97885$ **[0.2 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 2

Con las nuevas líneas de metro en Santiago (línea 3 y línea 6) se han revalorizado los terrenos eriazos ubicados en torno a las futuras estaciones.

Un estudio relativo al potencial de los sitios eriazos en Santiago en el radio de influencia de las futuras líneas determinó que el 35 % de ellos se encontraba a menos de 500 mts de una futura estación del metro, lo que implica un mayor potencial. Sin embargo, la normativa existente en el plano regulador respecto a las alturas, barrios residenciales y otras, en algunos casos disminuyen ese potencial. Revisando las estadísticas usted determina que:

- De los terrenos ubicados a menos de 500 mts, 7 de cada 10 cumplen con las especificaciones apropiadas para construir torres de departamentos (12 o más pisos), mientras que los restantes son aptos para edificios entre 5 y 11 pisos. No es rentable (por el valor de terreno y por tanto no es evaluable) la construcción de casas o condominios.
- En cambio, en los terrenos ubicados a más de 500 metros, un 20 % de ellos son apropiados para casas o condominios y los restantes para edificios de 5 o 11 pisos; esta ubicación no es apropiada para la construcción de torres.

Por otra parte, un estudio de marketing muestra que la probabilidad de venta exitosa (casas son vendidas dentro del 1er año, mientras que los edificios de departamentos dentro de los primeros 18 meses; si la venta demora más, las ganancias empiezan a disminuir a medida que pasa el tiempo sin lograr venderlos) difieren según ubicación y tipología de la vivienda. De acuerdo a este estudio la probabilidad de venta exitosa de un torre de departamentos cercano a una estación de metro es del 70 %, disminuyendo a un 10 % cuando se encuentra lejos de la estación. En cambio, la probabilidad de éxito de un edificio (de 5 a 11 pisos) lejos de una estación es de un 40 %, duplicando la probabilidad de éxito si se encuentra a menos de 500 mts de la estación. Por último, las casas o condominios cercanos a una estación del metro tienen una probabilidad de venta exitosa del 90 %, disminuyendo un 30 % si se encuentra más lejos.

(a) **[2.0 Puntos]** Usted dispone de un terreno eriazo, ¿cuál es la probabilidad que al construir un edificio de 5 a 11 pisos, logre una venta exitosa?

(b) **[2.0 Puntos]**¿Cuál es la probabilidad de una venta exitosa?

(c) **[2.0 Puntos]** Si la venta fue exitosa, ¿cual es la probabilidad que su sitio se encontrase a menos de 500 mts?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A: terreno eriazo a menos de 500 mts de una estación.

B_1: Terreno apto para casas o condominios.

B_2: Terreno apto para edificio (5 a 11 pisos).

B_3: Terreno apto para torres de departamentos (12 o más pisos).

C: Venta exitosa según empresa de marketing.

(a) Se pide $P(C \mid B_2)$. **[0.3 Ptos.]**

$$\begin{aligned} P(C \mid B_2) &= \frac{P(C \cap B_2)}{P(B_2)} \\ &= \frac{P(C \cap B_2 \cap A) + P(C \cap B_2 \cap \overline{A})}{P(B_2 \cap A) + P(B_2 \cap \overline{A})} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P(C \,|\, B_2 \cap A)P(B_2 \,|\, A)P(A) + P(C \,|\, B_2 \cap \overline{A})P(B_2 \,|\, \overline{A})P(\overline{A})}{P(B_2 \,|\, A)P(A) + P(B_2 \,|\, \overline{A})P(\overline{A})} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= \frac{0.80 \times 0.30 \times 0.35 + 0.40 \times 0.80 \times 0.65}{0.30 \times 0.35 + 0.80 \times 0.65} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= 0.4672 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

(b) Se pide $P(C)$, para lo cual aplicamos el teorema de probabilidades totales **[0.3 Ptos.]**

$$
\begin{aligned}
P(C) &= P(C \cap B_1 \cap A) + P(C \cap B_2 \cap A) + P(C \cap B_3 \cap A) + \\
&\quad P(C \cap B_1 \cap \overline{A}) + P(C \cap B_2 \cap \overline{A}) + P(C \cap B_3 \cap \overline{A}) \\
&= P(C \,|\, B_1 \cap A)P(B_1 \,|\, A)P(A) + P(C \,|\, B_2 \cap A)P(B_2 \,|\, A)P(A) + P(C \,|\, B_3 \cap A)P(B_3 \,|\, A)P(A) + \\
&\quad P(C \,|\, B_1 \cap \overline{A})P(B_1 \,|\, \overline{A})P(\overline{A}) + P(C \,|\, B_2 \cap \overline{A})P(B_2 \,|\, \overline{A})P(\overline{A}) + P(C \,|\, B_3 \cap \overline{A})P(B_3 \,|\, \overline{A})P(\overline{A}) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= 0.90 \times 0.00 \times 0.35 + 0.80 \times 0.30 \times 0.35 + 0.70 \times 0.70 \times 0.35 + \\
&\quad 0.63 \times 0.20 \times 0.65 + 0.40 \times 0.80 \times 0.65 + 0.10 \times 0.00 \times 0.65 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= 0.5454 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

(c) Se pide $P(A \,|\, C)$. **[0.3 Ptos.]**

$$
\begin{aligned}
P(A \,|\, C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{P(A \cap B_1 \cap C) + P(A \cap B_2 \cap C) + P(A \cap B_3 \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{P(C \,|\, B_1 \cap A)P(B_1 \,|\, A)P(A) + P(C \,|\, B_2 \cap A)P(B_2 \,|\, A)P(A) + P(C \,|\, B_3 \cap A)P(B_3 \,|\, A)P(A)}{P(C)} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= \frac{0.90 \times 0.00 \times 0.35 + 0.80 \times 0.30 \times 0.35 + 0.70 \times 0.70 \times 0.35}{0.5454} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= 0.4684635 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base