Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2015

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Interrogación	**:**	**1**
Profesores	**:**	**Ana M. Araneda (Sec. 1 y 3), Ricardo Aravena (Sec. 2, 4 y 5) y José Quinlan (Sec. 6)**
Ayudantes	**:**	**Matías Castro, Fernando Florenzano, Paulina Flores, Daniela Hurtado, M. Constanza Prado, Frane Sazunic**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina, o cualquier tipo de lápiz borrable, renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices, sus cuadernillos y calculadora.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

a) Sean los eventos $A_1, \ldots, A_n$ y A, subconjuntos de un espacio muestral S. Demostrar que si

$$\cap_{j=1}^{n} A_j \subseteq A,$$

entonces

$$P(A) \geq \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - (n-1).$$

Solución: Dado que $\cap_{j=1}^{n} A_j \subseteq A$, entonces

$$P(A) \geq P(\cap_{j=1}^{n} A_j). \qquad \mathbf{[1,0]}$$

Luego, por regla del complemento:

$$P(A) \geq 1 - P(\overline{\cap_{j=1}^{n} A_j}), \qquad \mathbf{[0,2]}$$

y por la ley de De Morgan:

$$P(A) \geq 1 - P(\cup_{j=1}^{n} \overline{A}_j). \qquad \mathbf{[0,4]}$$

Por otra parte $P(\cup_{j=1}^{n} \overline{A}_j) \leq \sum_{j=1}^{n} P(\overline{A}_j)$ **[1,0]**. Luego,

$$\begin{aligned} P(A) &\geq 1 - \sum_{j=1}^{n} P(\overline{A}_j) \qquad \mathbf{[0,2]} \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{n} (1 - P(A_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - (n-1), \qquad \mathbf{[0,2]} \end{aligned}$$

que es lo que se pide demostrar.

b) En un tour de 90 personas, estas deben distribuirse en 3 buses cuyas capacidades individuales se encuentran en razón 1:2:3. Si la capacidad conjunta de los buses es 90 asientos, y los pasajeros son distribuidos en los buses de manera aleatoria de manera que todos los pasajeros tienen la misma probabilidad de ser asignados a un asiento dado, determine la probabilidad de que 10 amigos que viajan juntos queden todos en el mismo bus. Puede dejar sus resultados expresados.

Solución: Dado que los buses en conjunto tienen 90 asientos, y sus capacidades individuales están en razon 1:2:3, las capacidades deben ser 15, 30 y 45 asientos. Definamos los eventos:

$$A_i : \text{“los 10 amigos quedan en el bus } i, \;\; i = 1, 2, 3\text{”},$$

donde, sin pérdida de generalidad, los buses han sido ordenados de menor a mayor capacidad. Sea el evento

$$A : \text{“los 10 amigos quedan juntos ”}.$$

Por Axioma 3:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Para obtener las probabilidades en la suma, utilizaremos el principio multiplicativo. Para obtener la cardinalidad del espacio muestral:

- Para llenar el primer bus, de capacidad 15 pasajeros, elegimos 15 entre los 90: $\binom{90}{15}$ formas.
- Para llenar el segundo bus, de capacidad 30 pasajeros, elegimos 30 entre los 75 restantes: $\binom{75}{30}$ formas.

Dado que solo queda una forma de llenar el tercer bus (solo quedan 45 personas por asignar), la cardinalidad del espacio muestral es:

$$\#S = \binom{90}{15}\binom{75}{30}.$$

Para que A_1 ocurra, los 10 amigos deben ir en el primer bus y quedan 80 pasajeros por repartir.

- Para completar el primer bus, elegimos 5 entre los 80 restantes: $\binom{80}{5}$ formas.
- Para llenar el segundo bus, elegimos 30 entre los 75 restantes: $\binom{75}{30}$ formas.

Solo queda una forma de llenar el tercer bus (solo quedan 45 personas), luego, la cardinalidad de A_1 es:

$$\#A_1 = \binom{80}{5}\binom{75}{30}.$$

Para que A_2 ocurra, los 10 amigos deben ir en el segundo bus y quedan 80 pasajeros por repartir.

- Para llenar el primer bus, elegimos 15 entre los 80 restantes: $\binom{80}{15}$ formas.
- Para completar el segundo bus (recordemos que ya hay 10 de 30 asientos ocupados), elegimos 20 entre los 65 restantes: $\binom{65}{20}$ formas.

Solo queda una forma de llenar el tercer bus, por lo que la cardinalidad de A_2 es:

$$\#A_2 = \binom{80}{15}\binom{65}{20}.$$

Para que A_3 ocurra, los 10 amigos deben ir en el tercer bus y quedan 80 pasajeros por repartir.

- Para llenar el primer bus, elegimos 15 entre los 80 restantes: $\begin{pmatrix} 80 \\ 15 \end{pmatrix}$ formas.
- Para llenar el segundo bus, elegimos 30 entre los 65 restantes: $\begin{pmatrix} 65 \\ 30 \end{pmatrix}$ formas.

Quedan 35 pasajeros para el tercer bus los que, junto a los 10 amigos, completarán su capacidad. Luego, la cardinalidad de A_3 es:

$$\#A_3 = \begin{pmatrix} 80 \\ 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 65 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la probabilidad pedida corresponde a:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\#A_1}{\#S} + \frac{\#A_2}{\#S} + \frac{\#A_3}{\#S} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 80 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 75 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 65 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 65 \\ 30 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 90 \\ 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 75 \\ 30 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

[2,1] por numerador (0,7 cada término), **[0,9] por denominador**.

Nota: El resultado también puede expresarse a través de coeficientes multinomiales de la forma:

$$P(A) = \frac{\begin{pmatrix} & 80 & \\ 5 & 30 & 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & 80 & \\ 15 & 20 & 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & 80 & \\ 15 & 30 & 35 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} & 90 & \\ 15 & 30 & 45 \end{pmatrix}}.$$

La asignación de puntajes es la misma.

[1,0] punto base

Problema 2
En un episodio $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, "Daffy Duck"(Pato Lucas, caricatura muy querida por televidentes de todas las edades) puede estar alegre (A_n), iracundo (I_n) o triste (T_n). Los fanáticos de este peculiar personaje desean modelar la evolución de su errático humor, motivo de incontables carcajadas. Luego de varias conversaciones, acordaron que su estado de ánimo en el capítulo $n+1$ sólo depende de cómo se sintió en el capítulo inmeditamente anterior n. A continuación se muestra una tabla con las transiciones de humor en términos probabilísticos:

$n \to n+1$	A_{n+1}	I_{n+1}	T_{n+1}
A_n	0.7	0.2	0.1
I_n	0.4	0.3	0.3
T_n	0.2	0.4	0.4

Por ejemplo, $0.7 = P(A_{n+1}|A_n)$ quiere decir que su alegría característica en el episodio n se hereda al capítulo $n+1$ con probabilidad 0.7. Lamentablemente, el primer capítulo ($n = 1$) nadie lo ha visto. Los fieles seguidores creen que la probabilidad de A_1 es dos veces la de I_1, mientras que la de I_1 es 4 veces la de T_1.

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad del estado de ánimo para "Duffy Duck" en el primer capítulo?.

Solución: Se nos dice que:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 2P(I_1) \\ P(I_1) &= 4P(T_1). \qquad \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

Dado que, en un mismo capítulo, "Daffy Duck"está en uno y solo uno de estos tres estados:

$$\begin{aligned} 1 &= P(A_1) + P(I_1) + P(T_1) \qquad \textbf{[1,0]} \\ &= 2P(I_1) + P(I_1) + \frac{1}{4}P(I_1), \end{aligned}$$

de donde,

$$P(A_1) = \frac{8}{13}, \qquad P(I_1) = \frac{4}{13}, \qquad P(T_1) = \frac{1}{13}. \qquad \textbf{[0,5]}$$

b) ¿Con qué probabilidad "Daffy Duck" mantendrá su estado de ánimo durante los primeros 3 días? (a veces le cuesta olvidar). Puede dejar sus resultados expresados.

Solución: Se darán soluciones a través de expresiones analíticas y a través de una representación de árbol.

Alternativa 1 (analítica): Sea A el evento "Daffy Duck mantiene su estado de ánimo durante los primeros tres días ". Entonces, por Axioma 3 **[0,05]**

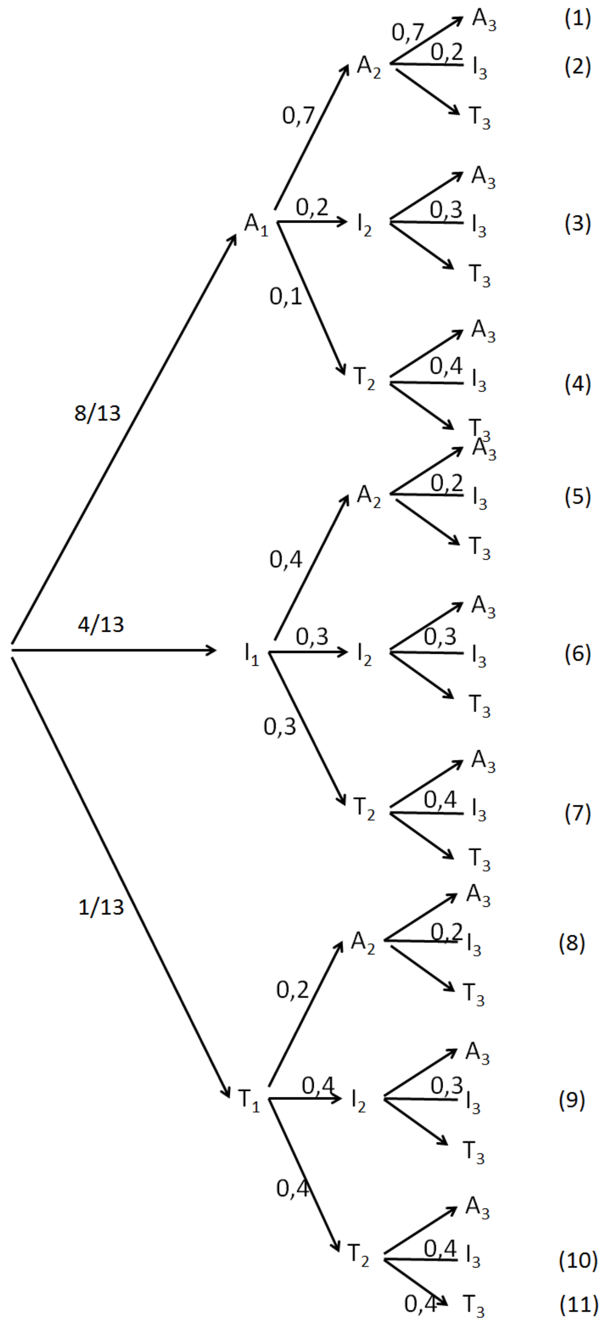
$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(I_1 \cap I_2 \cap I_3) + P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) \qquad \textbf{[0,9]} \text{ ([0,3] por cada término)}$$

Por regla multiplicativa **[0,05]**, y luego aplicando que el estado de ánimo en un capítulo solo depende del estado de ánimo del capítulo inmediatamente anterior:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) + P(I_1)\, P(I_2|I_1)\, P(I_3|I_1 \cap I_2) \\ &\quad + P(T_1)\, P(T_2|T_1)\, P(T_3|T_1 \cap T_2) \qquad \textbf{[0,45] por expresión completa} \\ &= P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_2) + P(I_1)\, P(I_2|I_1)\, P(I_3|I_2) + P(T_1)\, P(T_2|T_1)\, P(T_3|T_2) \quad (1) \\ &\qquad \textbf{[0,45] por expresión completa} \\ &= \frac{8}{13} \times 0,7^2 + \frac{4}{13} \times 0,3^2 + \frac{1}{13} \times 0,4^2. \qquad \textbf{[0,1]} \end{aligned}$$

Nota: Si omite el desarrollo hasta (1), pero el resultado es correcto, asignar **[0,8]**.

Alternativa 2 (árbol): Gráficamente, podemos representar la situación como (solo se indican las probabilidades relevantes para responder los apartados b) y c)):



[1,0] por árbol

La probabilidad pedida corresponde a la suma de las probabilidades de las ramas marcadas como (1), (6) y (11):

$$P(A) \quad = \quad \frac{8}{13} \times 0,7^2 + \frac{4}{13} \times 0,3^2 + \frac{1}{13} \times 0,4^2.$$

[1,2] ([0,4] por cada término)

c) Calcule la probabilidad de que "Daffy Duck" esté iracundo en el tercer capítulo (gracias al astuto plan de "Bugs Bunny" para esconder su comida). Puede dejar sus resultados expresados.

Solución:

Alternativa 1 (analítica): Utilizando el Teorema de Probabilidad Total **[0,1]**:

$$\begin{aligned} P(I_3) &= P(I_3|A_1\cap A_2)\ P(A_1\cap A_2)+P(I_3|A_1\cap I_2)\ P(A_1\cap I_2)+P(I_3|A_1\cap T_2)\ P(A_1\cap T_2)\\ &\quad +P(I_3|I_1\cap A_2)\ P(I_1\cap A_2)+P(I_3|I_1\cap I_2)\ P(I_1\cap I_2)+P(I_3|I_1\cap T_2)\ P(I_1\cap T_2)\\ &\quad +P(I_3|T_1\cap A_2)\ P(T_1\cap A_2)+P(I_3|T_1\cap I_2)\ P(T_1\cap I_2)+P(I_3|T_1\cap T_2)\ P(T_1\cap T_2). \end{aligned}$$

[0,7] por expresión completa

Utilizando la ley multiplicativa **[0,2]** para encontrar las probabilidades de las intersecciones, y que el estado de ánimo en un capítulo solo depende del estado de ánimo del capítulo inmediatamente anterior:

$$\begin{aligned} P(I_3) &= P(I_3|A_2)\ P(A_2|A_1)\ P(A_1)+P(I_3|I_2)\ P(I_2|A_1)\ P(A_1)+P(I_3|T_2)P(T_2|A_1)\ P(A_1)\\ &\quad +P(I_3|A_2)\ P(A_2|I_1)\ P(I_1)+P(I_3|I_2)\ P(I_2|I_1)\ P(I_1)+P(I_3|T_2)P(T_2|I_1)\ P(I_1)\\ &\quad +P(I_3|A_2)\ P(A_2|T_1)\ P(T_1)+P(I_3|I_2)\ P(I_2|T_1)\ P(T_1)+P(I_3|T_2)P(T_2|T_1)\ P(T_1). \end{aligned}$$

[0,9] ([0,1] por cada término de la sumatoria).

Finalmente, utilizando los resultados en a) y en la tabla:

$$\begin{aligned} P(I_3) &= 0,2\times 0,7\times\frac{8}{13}+0,3\times 0,2\times\frac{8}{13}+0,4\times 0,1\times\frac{8}{13}\\ &\quad +0,2\times 0,4\times\frac{4}{13}+0,3\times 0,3\times\frac{4}{13}+0,4\times 0,3\times\frac{4}{13}\\ &\quad +0,2\times 0,2\times\frac{1}{13}+0,3\times 0,4\times\frac{1}{13}+0,4\times 0,4\times\frac{1}{13}. \qquad \mathbf{[0,1]} \end{aligned}$$

Alternativa 2 (árbol): La probabilidad pedida corresponde a la suma de las probabilidades de las ramas marcadas desde (2) a (10), ambas ramas inclusive:

$$\begin{aligned} P(I_3) &= 0,2\times 0,7\times\frac{8}{13}+0,3\times 0,2\times\frac{8}{13}+0,4\times 0,1\times\frac{8}{13}\\ &\quad +0,2\times 0,4\times\frac{4}{13}+0,3\times 0,3\times\frac{4}{13}+0,4\times 0,3\times\frac{4}{13}\\ &\quad +0,2\times 0,2\times\frac{1}{13}+0,3\times 0,4\times\frac{1}{13}+0,4\times 0,4\times\frac{1}{13}. \end{aligned}$$

[1,8] ([0,2] por cada término)

[1,0] punto base

Problema 3

El próximo año se efectuarán elecciones de alcalde y concejos municipales, donde es elegido alcalde el candidato que obtiene el mayor número de votos válidamente emitidos en la comuna y el concejo se asigna de acuerdo a un sistema proporcional de 6, 8 ó 10 integrantes, según el tamaño de la comuna.

Usted es asesor probabilístico de un conglomerado y desea determinar ciertas probabilidades, basándose en la siguiente información: 3 de cada 4 de los alcaldes de este conglomerado postulan a la reelección; la probabilidad de que más de la mitad de los miembros del concejo elegido sean de este conglomerado (lo que se conoce como *tener un concejo favorable*) es de un 90 % si su alcalde postula a la reelección, probabilidad que baja a un 20 % cuando éste no lo hace. Por otra parte, cuando el concejo elegido es favorable, la probabilidad de que el alcalde de este conglomerado sea reelecto es un 80 %, mientras que es un verdadero cara/sello si no se dispone de un concejo favorable. Por otra parte, si un alcalde de este conglomerado no postula a la reelección, la elección del candidato de este conglomerado es, nuevamente, un cara/sello si el concejo electo es favorable, mientras que solo en una de cada cinco ocasiones ganará este candidato, si el concejo es desfavorable. Determine:

a) La probabilidad de que gane el candidato de su conglomerado. Puede dejar sus resultados expresados.

Solución: Se darán soluciones a través de expresiones analíticas y a través de una representación de árbol. Se define los eventos:

$$\begin{aligned} R &: \text{el actual alcalde postula a reelección} \\ F &: \text{el concejo elegido es favorable} \\ E &: \text{gana el candidato de su conglomerado.} \end{aligned}$$

Se pide $P(E)$.

Alternativa 1 (analítica): A través del Teorema de Probabilidad Total **[0,1]**:

$$P(E) = P(E|R\cap F)P(R\cap F) + P(E|\overline{R}\cap F)P(\overline{R}\cap F) + P(E|R\cap \overline{F})P(R\cap \overline{F}) + P(E|\overline{R}\cap \overline{F})P(\overline{R}\cap \overline{F}).$$

[0,8] (0,2 por cada término de la sumatoria)

Utilizando la regla multiplicativa **[0,1]** para obtener la probabilidad de las intersecciones:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|R\cap F)P(F|R)P(R) + P(E|\overline{R}\cap F)P(F|\overline{R})P(\overline{R}) \\ &\quad + P(E|R\cap \overline{F})P(\overline{F}|R)P(R) + P(E|\overline{R}\cap \overline{F})P(\overline{F}|\overline{R})P(\overline{R}). \end{aligned}$$

[0,8] (0,2 por cada término de la sumatoria)

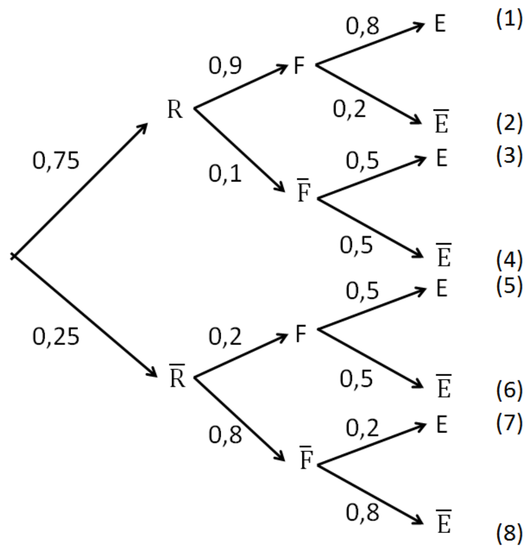
Del enunciado se tiene:

$$\begin{array}{lll} P(R) = 0,75\textbf{[0,1]} & P(F|R) = 0,9\textbf{[0,1]} & P(F|\overline{R}) = 0,2\textbf{[0,1]} \\ P(E|R\cap F) = 0,8\textbf{[0,2]} & P(E|R\cap \overline{F}) = 0,5\textbf{[0,2]} & \\ P(E|\overline{R}\cap F) = 0,5\textbf{[0,2]} & P(E|\overline{R}\cap \overline{F}) = 0,2.\textbf{[0,2]} & \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(E) &= 0,8\times 0,9\times 0,75 + 0,5\times 0,2\times 0,25 \\ &\quad + 0,5\times 0,1\times 0,75 + 0,2\times 0,8\times 0,25 \qquad \textbf{[0,1]} \\ &= 0,6425. \end{aligned}$$

Alternativa 2 (árbol): Gráficamente, podemos representar la situación como:



[2,0] por árbol

La probabilidad pedida corresponde a la suma de las probabilidades de las ramas marcadas como (1), (3), (5) y (7):

$$P(E) \quad = \quad 0,8 \times 0,9 \times 0,75 + 0,5 \times 0,1 \times 0,75 + 0,5 \times 0,2 \times 0,25 + 0,2 \times 0,8 \times 0,25 = 0,6425.$$

[2,0] (0,5 por cada término)

b) La probabilidad de que el alcalde de su conglomerado haya postulado a la reelección, si se sabe que el alcalde electo no pertenece a su conglomerado. Puede dejar sus resultados expresados.

Solución: Se pide $P(R|\overline{E})$.

Alternativa 1 (analítica):

$$\begin{aligned} P(R|\overline{E}) &= \frac{P(R\cap\overline{E})}{P(\overline{E})} \qquad \textbf{[0,4]} \\ &= \frac{P(R\cap\overline{E}\cap F)+P(R\cap\overline{E}\cap\overline{F})}{1-P(E)}. \end{aligned}$$

[1,0] por numerador, [0,3] por denominador
Por ley multiplicativa **[0,1]**:

$$P(R|\overline{E}) \quad = \quad \frac{P(R)P(F|R)P(\overline{E}|F\cap R)+P(R)P(\overline{F}|R)P(\overline{E}|\overline{F}\cap R)}{1-P(E)}. \qquad \textbf{[1,0]}$$

Del apartado a) tenemos que $P(E) = 0,6425$, y utilizando la información dada, obtenemos que:

$$\begin{aligned} P(R|\overline{E}) &= \frac{0,75\times 0,9\times 0,2+0,75\times 0,1\times 0,5}{1-0,6425} \\ &\qquad \textbf{[0,1] por numerador, [0,1] por denominador} \\ &= \frac{0,1725}{0,3575} = 0,483. \end{aligned}$$

Alternativa 2 (árbol): Dado que se sabe que el candidato electo no pertenece al conglomerado, el resultado observado corresponde a una de las ramas (2), (4), (6) u (8). Entre ellas, los eventos favorables a la ocurrencia de R corresponden a las ramas (2) y (4). Luego, (con abuso de notación):

$$P(R|\overline{E}) = \frac{P((2)) + P((4))}{P((2)) + P((4)) + P((6)) + P((8))}.$$

El numerador corresponde a:

$$\begin{aligned} P((2)) + P((4)) &= 0,2 \times 0,9 \times 0,75 + 0,5 \times 0,1 \times 0,75 \qquad \textbf{[1,0]} \\ &= 0,1725. \end{aligned}$$

El denominador corresponde a:

$$\begin{aligned} P((2)) + P((4)) + P((6)) + P((8)) &= 0,2 \times 0,9 \times 0,75 + 0,5 \times 0,1 \times 0,75 + 0,5 \times 0,2 \times 0,25 + 0,8 \times 0,8 \times 0,25\textbf{[1,0]} \\ &= 0,3575. \end{aligned}$$

Luego,

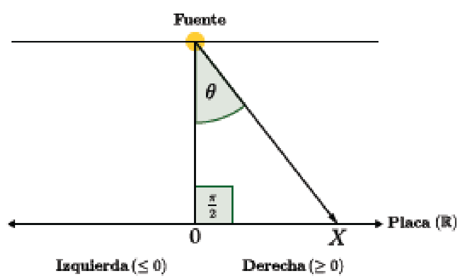
$$P(R|\overline{E}) = \frac{0,1725}{0,3575} = 0,483.$$

[1,0] punto base

Problema 4
Un objeto emite un haz de luz que colisiona sobre una placa (unidimensional), dejando una marca en la posición de impacto X (ver figura). Por motivos físicos, el ángulo de desviación θ se distribuye de manera uniforme en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Considerando la naturaleza estocástica de θ, X es una variable aleatoria. Se puede demostrar (asumir por el momento) que X tiene densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} : x \in \mathbb{R}.$$

Esta distribución de probabilidad, utilizada en espectroscopía, se denomina "Cauchy" (o "Lorentz").



a) Encuentre el intervalo $[-L, L]$ ($L \geq 0$) de manera que la colisión se registre en ese rango con probabilidad 0.9. Puede utilizar el hecho de que la función de probabilidad acumulada para X corresponde a:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x : x \in \mathbb{R}.$$

Solución: Se pide:

$$\begin{aligned} 0,9 &= P(-L \leq X \leq L) \qquad \textbf{[0,5]} \\ &= P(-L < X \leq L) \\ &= F_X(L) - F_X(-L) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(L)\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(-L)\right). \qquad \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

La función arctan es impar, es decir, $\arctan(-L) = -\arctan(L)$ **[0,5]** , luego,

$$0,9 = \frac{2}{\pi}\arctan(L). \qquad \textbf{[0,5]}$$

Considerando que la función arctan corresponde a una biyección continua de $\mathbb{R}$ sobre $(-\pi/2, \pi/2)$, lo que justifica la existencia y unicidad del valor L, se obtiene:

$$L = \tan\left(0,9\,\frac{\pi}{2}\right), \qquad \textbf{[1,0]}$$

el que determina el intervalo pedido.

b) ¿Es cierto que la probabilidad de observar una marca X situada a la izquierda de 0 (ver figura) es equivalente a obtener una cara en el lanzamiento de una moneda honesta? Justifique.

Solución: Verificaremos que $P(X < 0) = 0.5$. **[1,0]**

Alternativa 1:

$$\begin{aligned} P(X < 0) &= P(X \leq 0) = F_X(0) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan 0. \qquad \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

Dado que $\arctan 0 = 0$ **[0,5]** se tiene:

$$P(X < 0) = \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[1,0]}$$

que es lo que se quería verificar.

Alternativa 2:

Notamos que la función de densidad es simétrica con respecto al cero:

$$f_X(-x) = \frac{1}{\pi(1 + (-x)^2)} = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} = f_X(x), \qquad \textbf{[1,0]}$$

Dado que la probabilidad de interés, $P(X < 0)$, corresponde al área bajo la curva que representa a f_X, a la izquierda del cero, y que el área total bajo dicha curva es 1, $P(X < 0) = 0,5$, que es lo que se quería verificar. **[1,0]**

Alternativa 3: El evento de interés $\{X < 0\}$ ocurre sí y solo sí ocurre el evento $\{-\pi/2 < \theta < 0\}$, por lo que

$$P(X < 0) = P(-\pi/2 < \theta < 0). \qquad \textbf{[1,0]}$$

Dado que la variable aleatoria θ sigue una distribución uniforme en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, y que el largo del intervalo de interés, $(-\pi/2, 0)$, corresponde a la mitad del largo total de este intervalo, la probabilidad pedida corresponde a $1/2$, que es lo que se quería verificar. **[1,0]**

[1,0] punto base

Formulario

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales $n_1, \ldots, n_k$, entonces

$$S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$.

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1, \ldots, n_k$, con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1 \, n_2 \, \cdots \, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$