Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2012

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Interrogación	**:**	**1**
Profesor	**:**	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)**
Ayudantes	**:**	**Carlos Cayuman Cofre, Felipe Ossa Monge, Juan Pablo Vigneaux Ariztía y Claudia Reyes Vizcarra**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

Como es sabido, la semana pasada entró en vigencia la llamada "Ley Tolerancia Cero-Alcohol"que modificó los niveles de alcohol en la sangre permitidos a conductores. De manera de fiscalizar que éstos se respeten, la autoridad está utilizando un alcotest muy efectivo que, de hecho, es capaz de detectar al 95 % de los conductores que han bebido alcohol por sobre los niveles permitidos (0,3 gr/l). Sin embargo, este test también indica positivo en un 10 % de las personas cuyo nivel de alcohol se encuentra bajo estos niveles.

Como usted sabe, en caso de que el alcotest le indique positivo, usted es amablemente invitado a una ambulancia, con el objeto de tomar una muestra de sangre que permite realizar la prueba de manera más confiable, ya que ésta detecta al 99 % de los conductores que han bebido alcohol sobre los niveles permitidos. Sin embargo, ésta también arroja positivo a un 5 % de quienes cuyo nivel de alcohol en la sangre se encuentra bajo los niveles permitidos.

Revisando estadísticas globales, aún existe un 30 % de conductores que beben por sobre los niveles permitidos cuando se divierten. Además, la autoridad aplica la multa sólo a quienes indican positivo en el test de sangre (y dependiendo de los gramos de alcohol en la sangre puede inclusive suspender la licencia de por vida).

Usted, consciente de esta nueva ley, decidió divertirse el fin de semana y concurrió a un centro de entretención ubicado en la carretera, sin auto, con la idea de volverse en taxi. Sin embargo, muchas personas pensaron de igual forma por lo que, después de media hora intentando conseguir un taxi, usted decide viajar con un conocido, que se dice amigo, y que ofrece llevarlo. Usted acepta pero, a poco andar, son detenidos por la autoridad para realizar un control al conductor.

(a) **[3.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad que su "amigo" sea multado?

(b) **[3.0 Ptos.]** Si, una vez en la carretera antes de ser controlado, su "amigo" le confió que había consumido un par de "chelas", ¿cuál es la probabilidad de no ser multado?

Respuesta: Sean

B = conductor bebido y $\bar{B}$ = conductor no bebido
A = Alcotest positivo y $\bar{A}$ = Alcotest negativo
S= Test de sangre positivo y $\bar{S}$ = test de sangre negativo.

De los datos, se tiene:

$$\begin{aligned}
P(B) &= 0.3 \\
P(A|B) &= 0.95 \quad \text{y} \quad P(A|\bar{B}) = 0.1 \\
\Longrightarrow P(\bar{A}|B) &= 0.05 \quad \text{y} \quad P(\bar{A}|\bar{B}) = 0.9 \qquad \textbf{[0.5]} \\
P(S|A \cap B) &= 0.99 \quad \text{y} \quad P(S|A \cap \bar{B}) = 0.05 \\
\Longrightarrow P(\bar{S}|A \cap B) &= 0.01 \quad \text{y} \quad P(\bar{S}|A \cap \bar{B}) = 0.95. \qquad [\mathbf{0,5}]
\end{aligned}$$

Nótese que el conductor es multado si y solo si el test de sangre arroja positivo, por lo tanto,

a)

$$P(Multa) = P(S) = \sum_i P(S|E_i)P(E_i),$$

por el Teorema de Probabilidad Total, donde los E_i forman una partición adecuada. Conforme a la información disponible, la partición puede ser conformada a partir de los conjuntos A y B, es decir,

$$E_1 = A \cap B, \quad E_2 = A \cap \bar{B}, \quad E_3 = \bar{A} \cap B, \quad E_4 = \bar{A} \cap \bar{B}. \qquad \textbf{[0,5]}$$

Además, conocemos las probabilidades de ocurrencia de cada uno de ellos:

$$\begin{aligned}
&P(S|E_1) = P(S|A \cap B) = 0.99, \text{ y } P(E_1) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.95 \times 0.3 = 0.285 \\
&P(S|E_2) = P(S|A \cap \bar{B}) = 0.05, \text{ y } P(E_2) = P(A \cap \bar{B}) = P(A|\bar{B})P(\bar{B}) = 0.1 \times 0.7 = 0.07 \\
&P(S|E_3) = P(S|\bar{A} \cap B) = 0,
\end{aligned}$$

ya que si el alcotest es negativo, no se realiza el examen de sangre. De todas formas,

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}|B)P(B) = 0.05 \times 0.3 = 0,015.$$

Finalmente,

$$P(S|E_4) = P(S|\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,$$

ya que el alcotest es negativo. De todas formas,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}|\bar{B})P(\bar{B}) = 0.9 \times 0.7 = 0.63, \qquad \textbf{[0.5]}$$

Luego,

$$P(Multa) = 0.99 \times 0.285 + 0.05 \times 0.07 = 0.28565. \qquad \textbf{[1.0]}$$

b) No solamente nos piden una probabilidad condicional, $P(\bar{S}|B) = P(B \cap \bar{S})/P(B)$, ya que debemos incluir la posibilidad de tener un alcotest negativo (en cuyo caso no es multado). En este caso, no se realiza el examen de sangre. Es decir, en estricto rigor nos piden:

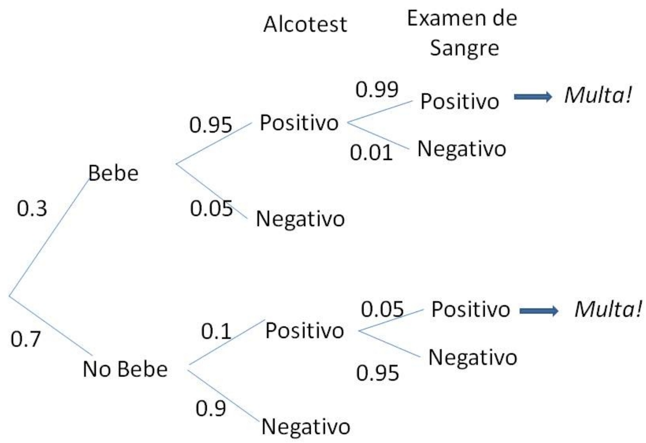
$$P(\bar{S}|B) + P(\bar{A}|B) = P(\bar{S} \cap B)/P(B) + P(\bar{A} \cap B)/P(B). \qquad [\ \mathbf{1.0}]$$

Sabemos que $P(B) = 0.3$, y la primera parte del numerador lo calculamos extendiendo al resultado del alcotest. $P(B \cap \bar{S}) = P(B \cap \bar{S} \cap (A \cup \bar{A})) = P(A \cap B \cap \bar{S}) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{S})$ **[1.0]**

El último término es cero, ya que si el alcotest es negativo no se realiza el test de sangre. Por tanto,

$$\begin{aligned}
P(pedida) &= P(\bar{S}|B) + P(\bar{A}|B) = \frac{1}{P(B)}\{P(A \cap B \cap \bar{S}) + P(\bar{A} \cap B)\} \\
&= \frac{1}{0.3} \times \{0.01 \times 0.95 \times 0.3 + 0.05 \times 0.3\} = 0.0595, \qquad \textbf{[1.0]}
\end{aligned}$$

Más punto base



Método Alternativo: a través de árboles, leyendo las probabilidades correspondientes:

a) $P(Multa) = 0.99 \times 0.95 \times 0.3 + 0.05 \times 0.10 \times 0.7 = 0.28565$

b) Mirando la parte alta del árbol se tiene

$$P(NoMulta|Bebe) = \frac{0.01 \times 0.95 \times 0.3 + 0.05 \times 0.3}{0.3} = 0.0595.$$

Puntaje: [**3.0**] por árbol. En cada letra, [**1.0**] por elegir las ramas apropiadas y [**0.5**] por el cálculo correcto de la probabilidad.
Más punto base

Problema 2

Durante el último mes, la Región de Aysén se ha visto afectada por múltiples expresiones de descontento de los ayseninos. Debido esto, la ruta que une Balmaceda con Coyhaique (ver mapa) presenta ocho puntos claves (cruces, puentes, etc) en los cuales se han puesto barricadas. Suponga que usted ha decidido ir de Balmaceda a Coyhaique y que, en este momento, los estados de las manifestaciones en cada uno de los ocho puntos pueden ser cuatro: barricadas encendidas y personas, sólo barricadas encendidas, restos de barricadas y despejado. Si cada una de estas situaciones es igualmente probable, encuentre:

(a) **[2.0 Ptos.]** La probabilidad de que, al viajar, nunca encuentre dos puntos claves seguidos en el mismo estado.

(b) **[2.0 Ptos.]** La probabilidad de que sólo encuentre restos de barricadas o despejado, en igual número?

(c) **[2.0 Ptos.]** La probabilidad de que sólo encuentre dos de los estados, en relación 3:1?

Respuesta: En los tres casos requerimos del número total de casos, $\#S = 4 \times 4 \times \ldots \times 4 = 4^8 = 65536$.

a) Para el primer punto tenemos 4 alternativas, para la siguiente solo 3 sin repetir el anterior, a la siguiente volvemos a tener 3 sin repetir el anterior, etc.

$$\#A = 4 \times 3 \times 3 \ldots \times 3 = 4 \times 3^7. \qquad \textbf{[1.0]}$$

Por tanto,

$$P(A) = \left(\frac{3}{4}\right)^7 = 0.1335. \qquad \textbf{[1.0]}$$

b) Solo dos estados alternativos, por tanto

$$\#A = \frac{8!}{4! \times 4!} = 70. \qquad \textbf{[1.0]}$$

Luego,

$$P(A) = \frac{70}{65536} = 0,00107. \qquad \textbf{[1.0]}$$

Explicación: tenemos solo dos estados - 4 de cada uno - para poner en 8 lugares.

c) Dos alternativas en relación 3:1 (6 y 2). Por tanto,

$$\#A = \frac{8!}{6! \times 2!} \times (4-2) \times (2-1) = 336. \qquad \textbf{[1.0]}$$

Así,

$$P(A) = \frac{336}{65536} = 0.00513. \qquad \textbf{[1.0]}$$

Explicación: la misma idea de b), pero ahora tenemos que elegir las dos alternativas de un total de 4 y, por último, tenemos que elegir entre éstas la que aparece 6 veces.

Más punto base

Problema 3

En una pequeña empresa productora de tornillos, el gerente ha contratado 3 operarios, A, B y C. Sin embargo, el gerente tiene favoritismos, de modo que perjudica al operario A en favor del operario B. De hecho, el 60 % de los trabajos son encargados a A y solo el 10 % a B. Los trabajos restantes son encargados al operario C.

Del mismo modo, es más probable que al operario A le sea asignada una máquina antigua que una nueva, que es más eficiente y fácil de operar: solo un 50 % de las veces es asignado a una máquina nueva, mientras que a B siempre le es asignada una maquina nueva. Al operario C le es asignada indistintamente una máquina nueva o antigua, las que están en proporción 9 a 1 en la empresa (asuma infinitas máquinas nuevas y antiguas).

Sin embargo, el operario A realiza mejor su trabajo, y siempre es capaz de terminarlo exitosamente si le toca una máquina nueva, bajando sólo a un 90 % de las veces, si le toca una máquina antigua. Por su parte B, aún con una máquina nueva, puede no terminar el trabajo exitosamente un 15 % de las veces. C, operario promedio, es capaz de terminar su trabajo exitosamente un 95 % de las veces si la maquina es nueva, y un 50 % de las veces si la máquina es antigua.

Obtenga:

(a) **[3.0 Ptos.]** La probabilidad de que un trabajo sea terminado de manera exitosa.

(b) **[3.0 Ptos.]** La probabilidad de que, si un trabajo fue terminado de manera exitosa, ésto haya ocurrido en una máquina antigua.

Respuesta: Definamos los eventos:

A: la tarea es asignada al operario A.
B: la tarea es asignada al operario B.
C: la tarea es asignada al operario C.
N: la máquina asignada es nueva.
E: el trabajo es terminado de manera exitosa.

Del enunciado se lee que:

$$\begin{array}{llll} P(A) = 0.6, & P(B) = 0.1 & P(C) = 0.3 & \\ P(N|A) = 0.5, & P(N|B) = 1, & P(N|C) = 0.9 & \mathbf{0.6pt} \end{array}$$

y que

$$\begin{array}{ll} P(E|A\cap N) = 1 & \\ P(E|A\cap \bar{N}) = 0.9 & \\ P(E|B\cap N) = 0.85 & \\ P(E|C\cap N) = 0.95 & \\ P(E|C\cap \bar{N}) = 0.5. & \mathbf{0.5pt} \end{array}$$

a) Se pide $P(E)$. Por Teorema de Probabilidad Total,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|A\cap N)P(A\cap N) + P(E|A\cap \bar{N})P(A\cap \bar{N}) \\ &\quad + P(E|B\cap N)P(B\cap N) + P(E|B\cap \bar{N})P(B\cap \bar{N}) \\ &\quad + P(E|C\cap N)P(C\cap N) + P(E|C\cap \bar{N})P(C\cap \bar{N}). \end{aligned}$$

Necesitamos:

$$\begin{aligned}
P(A\cap N) &= P(A)P(N|A) = 0.6\times 0.5 = 0.3.\\
P(A\cap \bar{N}) &= P(A)P(\bar{N}|A) = 0.6\times (1-0.5) = 0.3.\\
P(B\cap N) &= P(B)P(N|B) = 0.1\times 1 = 0.1.\\
P(B\cap \bar{N}) &= 0\\
P(C\cap N) &= P(C)P(N|C) = 0.3\times 0.9 = 0.27.\\
P(C\cap \bar{N}) &= P(C)P(\bar{N}|C) = 0.3\times (1-0.9) = 0.03. \qquad \textbf{1.2pt}
\end{aligned}$$

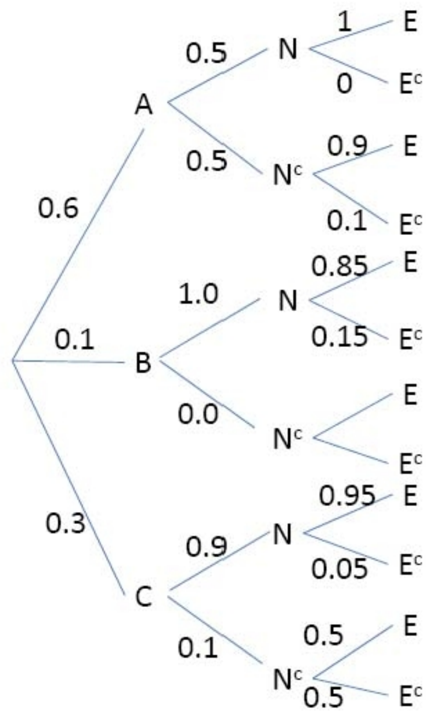
De este modo:

$$\begin{aligned}
P(E) &= 1\times 0.3 + 0.9\times 0.3 + 0.85\times 0.1 + 0.95\times 0.27 + 0.5\times 0.03\\
&= 0.9265. \qquad \textbf{0.7pt}
\end{aligned}$$

b) Se pide

$$\begin{aligned}
P(\bar{N}|E) &= 1 - P(N|E)\\
&= 1 - \frac{P(N\cap E)}{P(E)} \qquad \textbf{1pt}\\
&= 1 - \frac{1}{P(E)}(P(N\cap E\cap A) + P(N\cap E\cap B) + P(N\cap E\cap C))\\
&= 1 - \frac{1}{P(E)}\left(P(N\cap A)P(E|N\cap A) + P(N\cap B)P(E|N\cap B) + P(N\cap C)P(E|N\cap C)\right) \qquad \textbf{1pt}\\
&= 1 - \frac{1}{0.9265}(0.3\times 1 + 0.1\times 0.85 + 0.27\times 0.95)\\
&= 0.3076. \qquad \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

Más punto base.



Solución alternativa utilizando árboles:
2pt por árbol

a)

$$\begin{aligned} P(E) &= 0.6 \times 0.5 \times 1 + 0.6 \times 0.5 \times 0.9 + 0.1 \times 1 \times 0.85 + 0.3 \times 0.9 \times 0.95 + 0.3 \times 0.1 \times 0.5 \\ &= 0.9265. \qquad \textbf{1pt} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(\bar{N}|E) &= \frac{0.6 \times 0.5 \times 0.9 + 0.3 \times 0.1 \times 0.5}{0.9265} \qquad \textbf{1.5pt} \\ &= 0.3076. \qquad \textbf{1.5pt} \end{aligned}$$

Más punto base.

Problema 4
Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos mutuamente independientes. Muestre que, para todo $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$, conjuntos disjuntos de subíndices $j = 1, \ldots, n$,

a) **[2.0 Ptos.]** Si $i \notin \mathcal{S}$, $\cap_{j\in S} A_j$ es independiente de A_i.

b) **[2.0 Ptos.]** Si $i \notin \mathcal{S}$, $\cup_{j\in S} \bar{A}_j$ es independiente de A_i.

c) **[2.0 Ptos.]** $\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j$ es independiente de $\cap_{l\in\mathcal{S}'} A_l$.

Justifique cada uno de sus pasos.

Respuesta:

a) Se debe demostrar que

$$P\left(A_i \mid \cap_{j\in\mathcal{S}} A_j\right) = P(A_i), . \tag{1}$$

o, alternativamente,

$$\begin{array}{rrcl} & P\left(\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j | A_i\right) & = & P(\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j) \\ \text{o} & P(\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j \cap A_i) & = & P(\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j) P(A_i). \end{array}$$

Tomando el lado izquierdo en (1):

$$\begin{aligned} P\left(A_i \mid \cap_{j\in\mathcal{S}} A_j\right) &= \frac{P(\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j \cap A_i)}{P(\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j)}, \qquad \text{por definición de probabilidad condicional} \qquad \textbf{0.7pt} \\ &= \frac{\prod_{j\in\mathcal{S}} P(A_j) \times P(A_i)}{\prod_{j\in\mathcal{S}} P(A_j)}, \qquad \text{por independencia mutua} \qquad \textbf{0.7pt} \\ &= P(A_i). \qquad \textbf{0.6pt} \end{aligned}$$

b) Se debe demostrar que

$$P\left(\cup_{j\in\mathcal{S}} \bar{A}_j | A_i\right) = P(\cup_{j\in\mathcal{S}} \bar{A}_j), \tag{2}$$

o, alternativamente:

$$\begin{array}{rrcl} & P\left(A_i \mid \cup_{j\in\mathcal{S}} \bar{A}_j\right) & = & P(A_i), \\ \text{o} & P(\cup_{j\in\mathcal{S}} \bar{A}_j \cap A_i) & = & P(\cup_{j\in\mathcal{S}} \bar{A}_j) P(A_i). \end{array}$$

Tomando el lado izquierdo en (2):

$$\begin{aligned} P\left(\cup_{j\in\mathcal{S}} \bar{A}_j | A_i\right) &= 1 - P\left(\overline{\cup_{j\in\mathcal{S}} \bar{A}_j} | A_i\right) \qquad \text{por complemento} \\ &= 1 - P\left(\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j | A_i\right) \qquad \text{por de Morgan} \qquad \textbf{0.7pt} \\ &= 1 - P(\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j), \qquad \text{por a)} \qquad \textbf{0.7pt} \\ &= P(\overline{\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j}) \qquad \text{por complemento} \\ &= P(\cup_{j\in\mathcal{S}} \bar{A}_j) \qquad \text{por de Morgan.} \qquad \textbf{0.6pt} \end{aligned}$$

c) Se debe demostrar que

$$P\left(\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j \mid \cap_{l\in\mathcal{S}'} A_l\right) = P(\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j), \tag{3}$$

o, alternativamente,

$$\begin{array}{rrcl} & P\left(\cap_{l\in\mathcal{S}'} A_l \mid \cap_{j\in\mathcal{S}} A_j\right) & = & P(\cap_{l\in\mathcal{S}'} A_l), \\ \text{o} & P(\cap_{l\in\mathcal{S}'} A_l \cap_{j\in\mathcal{S}} A_j) & = & P(\cap_{j\in\mathcal{S}} A_j) P(\cap_{l\in\mathcal{S}'} A_l) \end{array}$$

Tomando el lado izquierdo en (3):

$$
\begin{aligned}
P\left(\cap_{j\in\mathcal{S}}A_j \,|\, \cap_{l\in\mathcal{S}'}A_l\right) &= \frac{P(\cap_{j\in\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}A_j)}{P(\cap_{l\in\mathcal{S}'}A_l)} \qquad \text{por definición de probabilidad condicional} \qquad \mathbf{0.7pt}\\
&= \frac{\prod_{j\in\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}P(A_j)}{\prod_{l\in\mathcal{S}'}P(A_l)} \qquad \text{por independencia mutua} \qquad \mathbf{0.7pt}\\
&= \frac{\prod_{j\in\mathcal{S}}P(A_j)\times\prod_{l\in\mathcal{S}'}P(A_l)}{\prod_{l\in\mathcal{S}'}P(A_l)}\\
&= \prod_{j\in\mathcal{S}}P(A_j) = P(\cap_{j\in\mathcal{S}}A_j) \qquad \text{por independencia mutua.} \qquad \mathbf{0.6pt}
\end{aligned}
$$

Más punto base.

Tiempo: 2 Horas

Formulario

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales $n_1,\ldots,n_k$, entonces

$$S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$.

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1,\ldots, n_k$, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1\, n_2\, \cdots\, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}\, x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$

Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$