Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2014

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I1**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

El mundo de las redes sociales se ha revolucionado con el "Ice Bucket Challenge", que tiene como objetivo ayudar al combate de la esclerosis lateral amiotrófica. El desafío consiste que una persona reta a otras tres o cuatro a donar diez dólares y lanzarse un balde de agua helada encima en menos de 24 horas. Si no acepta el reto, entonces debe donar cien dólares. Suponga que usted fue retado y cumplió con lanzarse el balde de agua fría, y para seguir con la posta, invita a n amigos a participar, pero les dice que solo pueden retar a una persona del grupo. Por otra parte, hay m de los amigos ($m < n$) que prefieren pagar los 100 dólares antes que lanzarse un balde de agua fría y perder la opción de retar a otro. Si todos los retos son por elección al azar, ¿cuál sería la probabilidad que se logren reunir exactamente mil dólares? Suponga que usted puede también ser retado nuevamente y que los 10 dólares iniciales que usted donó son parte de este monto.

Solución

Alternativa 1: Definamos como A al evento que se reúnen mil dólares.

Notemos que para reunir mil dólares, es necesario que solo uno de los m amigos que no están dispuestos a sacrificarse sea seleccionado al final **[1.0 Ptos.]**, y que en las 89 primeras selecciones sea retado uno de los $n - m$ **[1.0 Ptos.]**, con esto se logran 990 dólares, más los 10 dólares iniciales con que usted aporta se logra el objetivo. **[1.0 Ptos.]**

Tenemos que los casos totales están dados por

$$\# S = n^{90}, \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

mientras que los casos favorables

$$\# A = (n - m)^{89} \cdot m \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Por lo tanto

$$P(A) = \frac{\# A}{\# S} = \frac{(n - m)^{89} \cdot m}{n^{90}} \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Alternativa 2: Definamos como X a la variable número de selecciones necesarias hasta que es elegido uno de los m amigos que está dispuesto a donar 100 dólares, pero perder la opción de seguir con la posta, es decir, se termina el desafío con él. **[1.0 Ptos.]**

Como se parte con los 10 dólares que usted aporto, entonces la probabilidad de que se reúnan 1000 dólares es equivalente a que $\{X = 90\}$ **[1.0 Ptos.]**, donde

$$X \sim \text{Geométrica}(p = m/n) \qquad \textbf{[2.0 Ptos.]}$$

Luego

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \qquad P(X = 90) = \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{89} \cdot \left(\frac{m}{n}\right) = \frac{(n - m)^{89} \cdot m}{n^{90}} \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Considere los eventos mutuamente independientes A, B y C. Muestre que los eventos $\overline{A}$, B y C, también son mutuamente independientes.

Solución

Por independencia mutua entre A, B y C tenemos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C), \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Por demostrar que:

i. $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B)$ **[0.4 Ptos.]**

Tenemos que

$$\begin{aligned}
P(\overline{A}) &= P\left(\overline{A} \cap S\right) && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap \left[B \cup \overline{B}\right]\right) && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\left[\overline{A} \cap B\right] \cup \left[\overline{A} \cap \overline{B}\right]\right), \quad \text{por ley distributiva} && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right), \quad \text{por axioma 3} && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(\overline{A \cup B}\right), \quad \text{por De Morgan} && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + 1 - P\left(A \cup B\right), \quad \text{por ley del complemennto} && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + 1 - P\left(A\right) - P\left(B\right) + P\left(A \cap B\right), \quad \text{por ley aditiva general} && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + 1 - P\left(A\right) - P\left(B\right) + P\left(A\right) \cdot P\left(B\right), \quad \text{por independencia entre } A \text{ y } B && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + \left[1 - P\left(A\right)\right] - P\left(B\right) \cdot \left[1 - P\left(A\right)\right] && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
P(\overline{A}) &= P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(\overline{A}\right) - P\left(B\right) \cdot P\left(\overline{A}\right), \quad \text{por ley del complemennto} && \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P\left(B\right) \cdot P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A} \cap B\right) \qquad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Alternativamente basta con demostrar $P(\overline{A} \,|\, B) = P(\overline{A})$, en este caso distribuir equivalentemente los **[2.6 Ptos.]**

ii. $P(\overline{A} \cap C) = P(\overline{A}) \cdot P(C)$. **[0.4 Ptos.]**

La demostración es análoga a lo realizado en (i), basta cambiar B por C. **[0.4 Ptos.]**

Alternativamente basta con demostrar $P(\overline{A} \,|\, C) = P(\overline{A})$, en este caso distribuir equivalentemente los **[0.8 Ptos.]**

iii. $P(\overline{A} \cap B \cap C) = P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(C)$ **[0.4 Ptos.]**

Tenemos que

$$\begin{aligned}
P(\overline{A}) &= P\left(\overline{A} \cap S\right) && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap \left[\{B \cap C\} \cup \overline{\{B \cap C\}}\right]\right) && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\left[\overline{A} \cap B \cap C\right] \cup \left[\overline{A} \cap \overline{\{B \cap C\}}\right]\right), \quad \text{por ley distributiva} && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + P\left(\overline{A} \cap \overline{\{B \cap C\}}\right), \quad \text{por axioma 3} && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + P\left(\overline{A \cup \{B \cap C\}}\right), \quad \text{por De Morgan} && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + 1 - P\left(\left[A \cup \{B \cap C\}\right]\right), \quad \text{por ley del complemennto} && \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + 1 - P\left(A\right) - P\left(B \cap C\right) + P\left(A \cap B \cap C\right), \quad \text{por ley aditiva general} && \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + 1 - P(A) - P(B) \cdot P(C) +$$
$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C), \quad \text{por independencia mutua entre } A,\ B \text{ y } C$$ **[0.2 Ptos.]**

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + [1 - P(A)] - P(B) \cdot P(C) \cdot [1 - P(A)]$$ **[0.2 Ptos.]**

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + P\left(\overline{A}\right) - P(B) \cdot P(C) \cdot P\left(\overline{A}\right), \quad \text{por ley del complemennto}$$ **[0.2 Ptos.]**

$$\Rightarrow P(B) \cdot P(C) \cdot P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$$ **[0.2 Ptos.]**

Alternativamente basta con demostrar $P(\overline{A} \mid B \cap C) = P(\overline{A})$, en este caso distribuir equivalentemente los **[2.6 Ptos.]**

Por lo tanto, los eventos $\overline{A}$, B y C son mutuamente independientes.

+ 1 Punto Base

Problema 3

Como es sabido el Metro (y cualquier otro sistema de transporte) está sujeto a sufrir fallas asociadas a múltiples razones. Al analizar las causas, la más crítica es la fatiga de material. Las otras causas son muy variadas (desde humanas - negligencias, hasta externas, por ej: energía, lluvia, sismos, etc). Día a día, el Metro de Santiago efectúa pruebas con objeto de detectar fallas tempranamente y realizar acciones paliativas. Así, se ha podido detectar el 90 % de las fallas atribuidas a fatiga de material y solo el 20 % de las otras. A su vez, no siempre es posible evitar el efecto sobre los pasajeros (desde suspensión del servicio, puertas inhabilitadas o retrasos en los tiempos). Afortunadamente, el 80 % de las veces las acciones paliativas han hecho que las fallas pasen inadvertidas para los usuarios. Mientras que al no realizar actividades paliativas, el 50 % de las veces los pasajeros han sufrido algún efecto. Si la causa fatiga de material está en relación 1:3 respecto a las otras causas, determine, dado que hay una falla, la probabilidad que:

(a) Los usuarios se vean afectados.

(b) Sea por Fatiga de material, puesto que los usuarios no se ven afectados

Solución

Definamos los siguientes eventos:

A: Falla por fatiga material
B: Falla detectada
C: Usuarios sufren efectos por falla

Del enunciado se tiene que

$$\begin{aligned}
P(A) = 0.25 &\to P(\overline{A}) = 0.75 \\
P(B \,|\, A) = 0.90 &\to P(\overline{B} \,|\, A) = 0.10 \\
P(B \,|\, \overline{A}) = 0.20 &\to P(\overline{B} \,|\, \overline{A}) = 0.80 \\
P(C \,|\, A \cap B) = 0.20 &\to P(\overline{C} \,|\, A \cap B) = 0.80 \\
P(C \,|\, A \cap \overline{B}) = 0.50 &\to P(\overline{C} \,|\, A \cap \overline{B}) = 0.50 \\
P(C \,|\, \overline{A} \cap B) = 0.20 &\to P(\overline{C} \,|\, \overline{A} \cap B) = 0.80 \\
P(C \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) = 0.50 &\to P(\overline{C} \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) = 0.50
\end{aligned}$$

(a) Por teorema de probabilidades totales, se tiene que

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= P(C \,|\, A \cap B) \cdot P(B \,|\, A) \cdot P(A) + P(C \,|\, A \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{B} \,|\, A) \cdot P(A) + \\
&\quad P(C \,|\, \overline{A} \cap B) \cdot P(B \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A}) + P(C \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) \cdot P(\overline{B} \,|\, \overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= 0.20 \times 0.90 \times 0.25 + 0.50 \times 0.10 \times 0.25 + 0.20 \times 0.20 \times 0.75 + 0.50 \times 0.80 \times 0.75 \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= 0.3875 \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide

$$
\begin{aligned}
P(A\,|\,\overline{C}) &= \frac{P(A\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}, \quad \text{por definición de probabilidad condicional} \qquad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
&= \frac{P(A\cap\overline{C}\cap S)}{1-P(C)}, \quad \text{por ley del complemento} \qquad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
&= \frac{P(A\cap\overline{C}\cap[B\cup\overline{B}])}{1-P(C)} \qquad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
&= \frac{P\left([A\cap\overline{C}\cap B]\cup[A\cap\overline{C}\cap\overline{B}]\right)}{1-P(C)}, \quad \text{por ley distributiva} \qquad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \frac{P\left(A\cap\overline{C}\cap B\right)+P\left(A\cap\overline{C}\cap\overline{B}\right)}{1-P(C)}, \quad \text{por axioma 3} \qquad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
&= \frac{P\left(\overline{C}\,|\,A\cap B\right)\cdot P(B\,|\,A)\cdot P(A)+P\left(\overline{C}\,|\,A\cap\overline{B}\right)\cdot P(\overline{B}\,|\,A)\cdot P(A)}{1-P(C)} \qquad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \frac{0.80\times 0.90\times 0.25+0.50\times 0.10\times 0.25}{1-0.3875} \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}\\
&= \frac{0.1925}{0.6125} \qquad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= 0.3142857 \qquad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

La extensión X de una grieta por fatiga puede ser modelada por la distribución Birnbaum-Saunders(β, θ) cuya función de distribución de probabilidad acumulada está dada por:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\frac{x}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right]\right), \quad x \geq 0, \quad \beta > 0, \quad \theta > 0$$

donde $\Phi(\cdot)$ corresponde a la función de probabilidad acumulada de una Normal$(0, 1)$.

(a) Calcule la mediana de X.

(b) Obtenga la función de densidad de X.

Solución

(a) Si x es la mediana, entonces

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\frac{x}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right]\right) = \frac{1}{2} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \quad \rightarrow \frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\frac{x}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right] = 0 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

$$\rightarrow \left[\sqrt{\frac{x}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right] = 0 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{x}{\theta}} = \sqrt{\frac{\theta}{x}} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

$$\rightarrow x = \theta \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

(b) Se pide

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx}F_X(x) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\ &= \phi\left(\frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\frac{x}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right]\right) \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x\,\theta}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta}{x^3}}\right) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\beta\,x} \cdot \phi\left(\dfrac{1}{\beta}\left[\sqrt{\dfrac{x}{\theta}} - \sqrt{\dfrac{\theta}{x}}\right]\right) \cdot \left(\sqrt{\dfrac{x}{\theta}} + \sqrt{\dfrac{\theta}{x}}\right) & , \quad x \geq 0, \quad \beta > 0, \quad \theta > 0 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \end{aligned}$$

con $\phi(\cdot)$ igual a la función de densidad de una Normal$(0, 1)$.

+ 1 Punto Base

Problema 5

Los tiempos de viaje en el metro en hora punta pueden ser modelados por una distribución Log-Normal. Datos históricos, muestran que el tiempo de viaje entre dos estaciones, digamos A y B, tienen una media de 24 minutos y una desviación estándar de 2 minutos.

(a) Determine el tiempo mínimo de viaje para el 30 % de los pasajeros que más demora.

(b) Suponga que fuera de punta, el tiempo medio se reduce en un 20 %, mientras que la desviación estándar en un 40 %. ¿cuál sería el tiempo máximo de viaje para el 30 % de los pasajeros que demoran menos en el traslado?

Solución

(a) Definamos como T al tiempo de viaje en hora punta en el metro, el cual se comporta como una variable aleatoria Log-Normal(λ, ζ).

Del enunciado tenemos que

$$\textbf{[0.2 Ptos.]} \qquad \mu_T = 24 \qquad \text{y} \qquad \sigma_T = 2 \qquad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Por otra parte, del formulario tenemos que

$$\zeta = \sqrt{\ln(1+\delta_T^2)} = \sqrt{\ln\left(1+\frac{\sigma_T^2}{\mu_T^2}\right)} = 0.0831892 \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]} \qquad \zeta \approx \delta_T = \frac{\sigma_T}{\mu_T} = 0.0833333$$

y

$$\lambda = \ln(\mu_T) - \frac{\zeta^2}{2} = 3.174594 \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Se pide un valor de t tal que $P(T > t) = 0.30$. **[0.4 Ptos.]**

Tenemos que

$$\textbf{[0.4 Ptos.]} \qquad P(T > t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(t)-\lambda}{\zeta}\right) = 0.30 \to \frac{\ln(t)-\lambda}{\zeta} \approx 0.525 \qquad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Por lo tanto

$$t \approx \exp(\lambda + 0.525 \cdot \zeta) = \exp(3.218268) = 24.98481 \qquad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

(b) Definamos como X al tiempo de viaje en hora fuera de punta en el metro, el cual se comporta como una variable aleatoria Log-Normal(λ, ζ).

Del enunciado tenemos que

$$\textbf{[0.2 Ptos.]} \qquad \mu_X = 19.2 \qquad \text{y} \qquad \sigma_X = 1.2 \qquad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Por otra parte, del formulario tenemos que

$$\zeta = \sqrt{\ln(1+\delta_X^2)} = \sqrt{\ln\left(1+\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2}\right)} = 0.06243909 \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]} \qquad \zeta \approx \delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = 0.0625$$

y

$$\lambda = \ln(\mu_X) - \frac{\zeta^2}{2} = 2.952961 \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Se pide un valor de x tal que $P(X \leq x) = 0.30$. **[0.4 Ptos.]**

Tenemos que

$$\textbf{[0.4 Ptos.]} \qquad P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\zeta}\right) = 0.30 \to \frac{\ln(x) - \lambda}{\zeta} \approx -0.525 \qquad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

Por lo tanto

$$x \approx \exp(\lambda - 0.525 \cdot \zeta) = \exp(2.92018) = 18.54463 \qquad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 6

Es común que en el transporte público se presenten problemas cardíacos en algunos pasajeros. Por lo anterior el metro está evaluando instalar desfibriladores en las estaciones más concurridas. De hecho, se estima en 0.15 la probabilidad de requerir desfibrilador al menos una vez en un día cualquiera. Suponga que para una estación concurrida se ha instalado un desfibrilador a partir de este lunes 01 de septiembre.

(a) Determine la probabilidad de requerir usar al menos una vez el desfibrilador, durante un día de la semana comprendida entre el lunes 01/sept y domingo 07/sept.

(b) ¿Cuál es la probabilidad que se requiera utilizar al menos una vez el desfibrilador el domingo 07/sept, si finalizado el jueves 04/sept este no se ha requerido?

Solución

(a) Definamos como X al número de días en una semana en que se utiliza al menos una vez el desfibrilador. **[0.5 Ptos.]**

Suponiendo independencia entre días tenemos que

$$X \sim \text{Binomial}(n = 7,\, p = 0.15) \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Se pide

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \qquad p_X(1) = \binom{7}{1} \cdot 0.15^1 \cdot 0.85^6 = 0.396007 \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

(b) **Alternativa 1**: Definamos como Y al número de días transcurridos hasta que por primera en un día se utiliza al menos una vez desfibrilador **[0.5 Ptos.]**, es decir,

$$Y \sim \text{Geométrica}(p = 0.15) \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
P(Y = 7 \,|\, Y > 4) &= \frac{P(\{Y = 7\} \cap \{Y > 4\})}{P(Y > 4)} && \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{P(Y = 7)}{1 - P(Y \leq 4)} && \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{p \cdot (1-p)^6}{1 - [1 - (1-p)^4]} && \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{p \cdot (1-p)^6}{(1-p)^4} && \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= p \cdot (1-p)^2 && \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 0.15 \cdot 0.85^2 && \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 0.108375 && \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Alternativa 2: Una interpretación al enunciado es que se pide la probabilidad que se utilice el desfibrilador el día domingo (Evento A) dado que hasta el jueves no ha sido utilizado (Evento B), es decir,

$$\begin{aligned}
P(A \,|\, B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \textbf{[0.7 Ptos.]} \\
&= \frac{(1-p)^4 \cdot (1-p)^2 \cdot p + (1-p)^4 \cdot (1-p) \cdot p \cdot p + (1-p)^4 \cdot p \cdot (1-p) \cdot p + (1-p)^4 \cdot p^2 \cdot p}{(1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p)} \qquad \textbf{[0.7 Ptos.]} \\
&= (1-p)^2 \cdot p + 2 \cdot (1-p) \cdot p^2 + p^3 \qquad \textbf{[0.6 Ptos.]} \\
&= 0.15 \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Alternativa 3: Una interpretación al enunciado es que se pide la probabilidad que se utilice el desfibrilador el día domingo dado que hasta el jueves no ha sido utilizado, pero como son eventos independientes lo que se pide es la probabilidad que sea utilizado el domingo **[2.0 Ptos.]**, la cual es según enunciado 0.15. **[1.0 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Formulario

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales $n_1, \ldots, n_k$, entonces

$$S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = \texttt{nPr}$

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} = \texttt{nCr}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1, \ldots, n_k$, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1 \, n_2 \, \cdots \, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

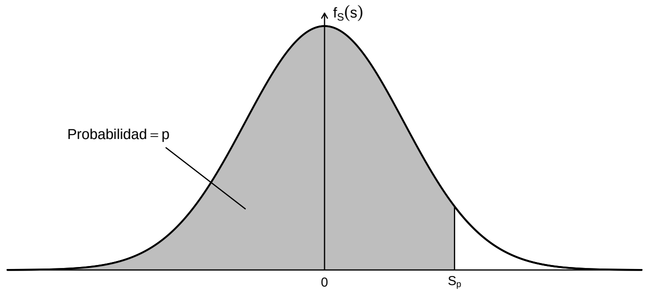
$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!} \, x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$

Igualdades

$$\sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu-t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Tabla Normal Estándar



Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998