Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2015

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Evaluación	:	**Examen**
Profesores	:	**Ana M. Araneda (Sec. 1 y 3), Ricardo Aravena (Sec. 2, 4 y 5) y José Quinlan (Sec. 6)**
Ayudantes	:	**Matías Castro, Fernando Florenzano, Paulina Flores, Daniela Hurtado, M. Constanza Prado, Frane Sazunic**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina, o cualquier tipo de lápiz borrable, renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices, sus cuadernillos y calculadora.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

El objetivo de los disipadores sísmicos es disminuir los daños que producen los terremotos en las estructuras de un edificio. Con el fin de determinar su efectividad, se llevó a cabo un estudio de simulación bajo condiciones controladas, donde un disipador es sometido a 15 evaluaciones, observándose un promedio de 30 mm de disminución en la deformación, con una desviación estándar de 12 mm. Asuma que las disminuciones de las deformaciones corresponden a variables aleatorias *iid.* provenientes de una distribución Normal.

a) ¿Existe evidencia que permita afirmar que la disminución media producida por este disipador es mayor que 25 mm, para un nivel de significancia del 5 %? Utilice punto crítico como regla de decisión. Explicite claramente sus hipótesis, uso de regla de decisión, y conclusión.

Solución: Si μ corresponde a la disminución media producida por el disipador, las hipótesis adecuadas son a $H_0 : \mu = 25$ versus $H_a : \mu > 25$ **[0,3]** (también puede plantear $H_0 : \mu \leq 25$). Por tratarse de variables aleatorias con distribución Normal, con varianza desconocida, utilizamos el estadístico:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad \textbf{[0,5]} \\ &= \frac{30 - 25}{12/\sqrt{15}} = 1,614. \qquad \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

La regla de decisión, en base a punto crítico, corresponde a rechazar H_0 y concluir H_a cuando $t_0 > t_{n-1}^{1-\alpha}$. En este caso, $n = 15$, $\alpha = 0.05$, luego usamos $t_{14}^{0,95} = 1,761$ **[0,3]**. Dado que $t_0 \ngtr t_{14}^{0,95}$ **[0,3]**, con 5 % de significancia, no se tiene evidencia para afirmar que la disminución media producida por el disipador es mayor que 25mm. **[0,1]**

En lo que sigue, asuma que la desviación estándar es conocida e igual a 8 mm.

b) ¿Cuál es ahora la regla de rechazo para las hipótesis planteadas en el apartado anterior? Determine la probabilidad de cometer un error de tipo II si, en realidad, la disminución media es igual a 30 mm.

Solución: Ahora regla de decisión es rechazar H_0 y concluir H_a si:

$$z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 25}{8/\sqrt{15}} > z_{0.95} = 1,645. \qquad \textbf{[0,6]}$$

Por lo tanto, si $\mu = 30$ mm, la probabilidad de cometer un error de tipo II corresponde a:

$$\begin{aligned}
\beta &= P_{\mu=30}\left(\frac{\bar{X}-25}{8/\sqrt{15}} \leq 1,645\right) \qquad \textbf{[0,5]} \\
&= P_{\mu=30}\left(\frac{\bar{X}-30}{8/\sqrt{15}} \leq 1,645 + \frac{25-30}{8/\sqrt{15}}\right) \\
&= P_{\mu=30}\left(\frac{\bar{X}-30}{8/\sqrt{15}} \leq -0,776\right) \qquad \textbf{[0,6]} \\
&= \Phi(-0,776) \\
&= 1 - 0,781 = 0,219. \qquad \textbf{[0,3]}
\end{aligned}$$

c) ¿Tiene evidencia para rebatir el supuesto sobre el valor de la desviación estándar poblacional, $\sigma =$ 8mm? Explicite claramente sus hipótesis, regla de decisión, y conclusión, utilizando $\alpha = 5\,\%$.

Solución: Las hipótesis adecuadas corresponden a $H_0 : \sigma = 8$ versus $\sigma \neq 8$ **[0,3]**. Por tratarse de variables con distribución Normal, utilizamos el estadístico:

$$\begin{aligned}
X_0^2 &= (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \qquad \textbf{[0,5]} \\
&= (15-1)\frac{12^2}{8^2} = 31,5. \qquad \textbf{[0,5]}
\end{aligned}$$

En base a punto crítico, la regla de decisión es rechazar H_0 y concluir H_a cuando $X_0^2 < \mathcal{X}^2_{n-1,\alpha/2}$, o si $X_0^2 > \mathcal{X}^2_{n-1,1-\alpha/2}$. En este caso, $\mathcal{X}^2_{14,0,025} = 5,63$ **[0,1]**y $\mathcal{X}^2_{14,0,975} = 26,12$ **[0,1]**. Dado que $X_0^2 > 26,12$, **[0,3]** con 5 % de significancia, podemos afirmar que la desviación estándar poblacional es diferente de 8 mm. **[0,2]**

[1,0] punto base

Problema 2
Al interior de la universidad, se desea llevar a cabo una encuesta para estudiar el porcentaje de alumnos descontentos con la asignación grupo - horario realizada para tomar cursos a través del sistema Banner. Las autoridades creen que este porcentaje es menor a un 20 %.

a) Tomando en cuenta la creencia actual de las autoridades, ¿cuál debiese ser el tamaño de muestra necesario para conocer la proporción de alumnos descontentos, con un error no mayor al 4 %, y con 90 % de confianza?

Solución: El error corresponde a:

$$z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Debido a que no podemos anticipar el valor de $\hat{p}$, utilizamos la creencia de que $p < 0,2$. Dado que la función $p(1-p)$ es creciente en el intervalo (0, 0.2), siendo conservadores, tomamos $p = 0,2$ **[0,5]**. Luego, con $\alpha = 10\,\%$, $z_{1-\alpha/2} = z_{0,95} = 1,645$ **[0,5]**, y planteamos:

$$1,645\sqrt{\frac{0,2\,(1-0,2)}{n}} \leq 0,04, \qquad \textbf{[0,4]}$$

de donde se obtiene que

$$n \geq \left(\frac{1,645\,\sqrt{0,2\times 0,8}}{0,04}\right)^2 = 270,6. \qquad \textbf{[0,4]}$$

Luego, se debe tomar $n \geq 271$. **[0,2]** (Si utiliza que $z_{0,95} = 1,64$ llegará a que $n \geq 269$).

Sin considerar el resultado en el apartado anterior, se efectúa un estudio con 140 casos, donde 20 alumnos indican estar descontentos con el grupo - horario asignado.

b) ¿Permite esta información afirmar que la creencia de las autoridades es correcta? Explicite claramente sus hipótesis, uso de regla de decisión y conclusión. Utilice $\alpha = 5\,\%$.

Solución: Las hipótesis adecuadas corresponden a $H_0 : p = 0,2$ versus $H_a : p < 0,2$ **[0,3]** (también puede usar $H_0 : p \geq 0,2$). Por tratarse de una muestra suficientemente grande, utilizamos el estadístico:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \qquad \textbf{[0,5]} \\ &= \frac{20/140-0,2}{\sqrt{\frac{0,2\times 0,8}{140}}} = -1.69. \qquad \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

Alternativa 1: La regla de decisión, en base a punto crítico, corresponde a rechazar H_0 y concluir H_a cuando $z_0 < z_\alpha$. En este caso, $\alpha = 0,05$, luego usamos $z_{0,05} = -1,645$ **[0,3]**. Dado que $z_0 < z_{0.95}$, **[0,3]** con 5 % de significancia, se tiene evidencia para afirmar que la proporción de alumnos descontentos es menor a 0,2. **[0,1]**

Alternativa 2: La regla de decisión, en base a valor-p, corresponde a rechazar H_0 y concluir H_a cuando valor-p $< \alpha$. En este caso,

$$\begin{aligned} \text{valor-p} &= \Phi(z_0) = \Phi(-1,69) \qquad \textbf{[0,2]} \\ &= 1-\Phi(1,69) = 1-0,9545 = 0,0455. \qquad \textbf{[0,2]} \end{aligned}$$

Dado que valor-p $< \alpha = 0,05$ **[0,2]**, con 5 % de significancia se tiene evidencia para afirmar que la proporción de alumnos descontentos es menor a 0,2. **[0,1]**

c) ¿Cuál será el error de estimación de la proporción de alumnos que están descontentos con el grupo - horario asignado, si se utiliza la muestra de 140 observaciones, y un 98 % de confianza?

Solución: El error viene dado por:

$$z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}. \qquad \textbf{[0,5]}$$

En este caso, $\alpha = 0.02$, luego tomamos $z_{0,99} = 2,33$ **[0,4]**, $\hat{p} = 20/140 = 0,143$ **[0,4]**, $n = 140$ **[0,2]**, con lo que se obtiene

$$2,33\sqrt{\frac{0,143\times 0,857}{140}} = 0,07 = 7\,\%. \qquad \textbf{[0,5]}$$

Observación: Si no indica un valor por separado, sino que lo utiliza directamente y de manera correcta en una fórmula, lleva puntaje completo.

[1,0] punto base

Problema 3
En el Problema 1 se asumió que las disminuciones de las deformaciones siguen una distribución Normal. Sin embargo, estudios más recientes plantean que ellas siguen una distribución Lognormal. Para evaluar el ajuste de estas distribuciones, se recolectó 90 mediciones, en las que se obtuvo un promedio de 25mm de disminución de la deformación, con una desviación estándar de 12mm. La siguiente tabla entrega además la distribución de las observaciones en las categorías indicadas:

Disminución de la deformación(mm)	Frecuencia observada
< 10	6
10 - 20	28
20 - 40	45
≥ 40	11

En lo que sigue, utilice en sus cálculos aproximaciones a la centésima (dos decimales).

a) Plantee las hipótesis que le permitan evaluar el ajuste de las observaciones a un modelo Normal. Lleve a cabo el test correspondiente, y concluya utilizando una significancia del 5 %.

Solución: Si $X_1, \ldots, X_{90}$ corresponden a las disminuciones en las deformaciones en las 90 pruebas, las hipótesis corresponden a:

$$H_0 : X_1, \ldots, X_{90} \overset{iid}{\sim} \text{Normal}(\mu, \sigma), \quad vs. \quad H_a : X_1, \ldots, X_{90} \overset{iid}{\nsim} \text{Normal}(\mu, \sigma). \qquad \textbf{[0,2]}$$

Dado que μ y σ no han sido especificados en la hipótesis nula, debemos estimarlos por máxima verosimilitud. Sabemos que $\hat{\mu} = \bar{X}$ y $\hat{\sigma} = S$, luego, en este caso, $\hat{\mu} = 25$ **[0,1]** y $\hat{\sigma} = 12$ **[0,1]**. Bajo este modelo, obtenemos:

$$\begin{aligned} P(X_i < 10) &= \Phi\left(\frac{10-25}{12}\right) = \Phi(-1,25) = 0,11 \qquad \textbf{[0,1]} \\ P(X_i < 20) &= \Phi\left(\frac{20-25}{12}\right) = \Phi(-0,42) = 0,34 \qquad \textbf{[0,1]} \\ P(X_i < 40) &= \Phi\left(\frac{40-25}{12}\right) = \Phi(1,25) = 0,89. \qquad \textbf{[0,1]} \end{aligned}$$

Con esto:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0,11 \qquad \textbf{[0,2]} \\ p_2 &= 0,34 - 0,11 = 0,23 \qquad \textbf{[0,2]} \\ p_3 &= 0,89 - 0,34 = 0,55 \qquad \textbf{[0,2]} \\ p_4 &= 1 - 0,89 = 0.11. \qquad \textbf{[0,2]} \end{aligned}$$

Tomando $E_i = 90\, p_i$:

Disminución de la deformación(mm)	O_i	p_i	E_i	$(O_i - E_i)^2/E_i$
< 10	6	0,11	9,9	1,54
10 - 20	28	0,23	20,7	2,57
20 - 40	45	0,55	49,5	0,41
≥ 40	11	0,11	9,9	0,12

[0,1] por cada E_i Con esto,

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 4,64. \qquad \textbf{[0,4]}$$

Dado que se estimaron dos parámetros, los grados de libertad corresponden a: (4 - 1 - 2) = 1. **[0,2]** De tabla obtenemos $\mathcal{X}^2_{1,0.95} = 3,84$ **[0,2]**. Dado que $X_0^2 > 3,84$, **[0,1]** con significancia 5 % rechazamos la hipótesis nula y concluimos que las observacionbes no provienen de una distribución Normal. **[0,2]**

b) Plantee las hipótesis que le permitan evaluar el ajuste de las observaciones a un modelo Lognormal de parámetros $\lambda = 3$ y $\zeta = 0,5$. Lleve a cabo el test correspondiente, y concluya utilizando una significancia del 5 %.

Solución: Las hipótesis corresponden a:

$$H_0 : X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \text{Lognormal}(3, 0.5), \quad vs. \quad H_a : X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\nsim} \text{Lognormal}(3, 0.5). \quad \textbf{[0,2]}$$

Bajo el modelo en H_0 obtenemos:

$$\begin{aligned}
P(X_i < 10) &= \Phi\left(\frac{\log(10) - 3}{0,5}\right) = \Phi(-1,39) = 0,08 \qquad \textbf{[0,2]}\\
P(X_i < 20) &= \Phi\left(\frac{\log(20) - 3}{0,5}\right) = \Phi(-0,01) = 0,50 \qquad \textbf{[0,2]}\\
P(X_i < 40) &= \Phi\left(\frac{\log(40) - 3}{0,5}\right) = \Phi(1,38) = 0,92. \qquad \textbf{[0,2]}
\end{aligned}$$

Con esto:

$$\begin{aligned}
p_1 &= 0,08 \qquad \textbf{[0,2]}\\
p_2 &= 0,50 - 0,08 = 0,42 \qquad \textbf{[0,2]}\\
p_3 &= 0,92 - 0,50 = 0,42 \qquad \textbf{[0,2]}\\
p_4 &= 1 - 0,92 = 0,08. \qquad \textbf{[0,2]}
\end{aligned}$$

Tomando $E_i = 90\, p_i$:

Disminución de la deformación(mm)	O_i	p_i	E_i	$(O_i - E_i)^2/E_i$
< 10	6	0,08	7,2	0,20
10 - 20	28	0,42	37,8	2,54
20 - 40	45	0,42	37,8	1,37
≥ 40	11	0,08	7,2	2,00

[0,1] por cada E_i

Con esto

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 6,11. \qquad \textbf{[0,4]}$$

Dado que no se estimaron parámetros, los grados de libertad corresponden a: (4 - 1) = 3. **[0,2]** De tabla obtenemos $\mathcal{X}^2_{3,0.95} = 7,81$ **[0,2]**. Dado que $X_0^2 < 7,81$ **[0,1]**, con significancia 5 % no podemos rechazar la hipótesis de que las observaciones provienen de una distribución Lognormal(3, 0.5). **[0,1]**

[1,0] punto base

Problema 4
Suponga que se dispone de n observaciones independientes provenientes de una distribución Exponencial(λ), en base a la que se desea construir un test para las hipótesis $H_0 : \lambda = \lambda_0$ versus $H_a : \lambda > \lambda_0$.

a) Muestre que el estimador máximo verosímil para λ es:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n} : \qquad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

y que, para un tamaño de muestra $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, se cumple:

$$\hat{\lambda} \overset{aprox}{\sim} \text{Normal}(\lambda, \lambda/\sqrt{n}).$$

Solución: La función de verosimilitud corresponde a:

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda \exp\{-\lambda x_i\} = \lambda^n \exp\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\}. \qquad \textbf{[0,3]}$$

Luego,

$$\log L(\boldsymbol{x}, \lambda) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad \textbf{[0,2]}$$

Para encontrar punto crítico,

$$\frac{d \log L(\boldsymbol{x}, \lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \qquad \textbf{[0,2]} \Longleftrightarrow \lambda^* = \frac{1}{\bar{x}_n}. \qquad \textbf{[0,2]}$$

Para verificar si el punto crítico corresponde a un máximo:

$$\frac{d^2 \log L(\boldsymbol{x}, \lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0, \qquad n \geq 1. \qquad \textbf{[0,3]}$$

Luego, el punto crítico buscado corresponde a un máximo y, con ello, el estimador máximo verosímil de λ corresponde a:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n}. \qquad \textbf{[0,3]}$$

Sabemos que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$\hat{\lambda} \overset{aprox}{\sim} \text{Normal}\left(\lambda, \sqrt{\frac{1}{I_n(\lambda)}}\right).$$

En este caso,

$$I_n(\lambda) = -E\left(\frac{d^2 \log L(\boldsymbol{x}, \lambda)}{d\lambda^2}\right) = -E\left(-\frac{n}{\lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda^2}. \qquad \textbf{[0,6]}$$

Luego, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$\hat{\lambda} \overset{aprox}{\sim} \text{Normal}(\lambda, \lambda/\sqrt{n}).$$

[0,2] por Normalidad
[0,3] por media
[0,6] por desviación estándar

b) Se establece una región de rechazo de la hipótesis nula dada por $\{\hat{\lambda} > k\}$ para algún valor adecuado de $k \in \mathbb{R}$. Encuentre el valor de k de modo que la probabilidad de cometer un error de tipo I sea aproximadamente α. *(Ayuda: utilice la distribución aproximada que se da en el apartado anterior).*

Solución: Se quiere:

$$P_{\lambda=\lambda_0}\left(\hat{\lambda} > k\right) \approx \alpha. \quad \textbf{[0,6]}$$

Utilizando el resultado en a):

$$\begin{aligned} P_{\lambda=\lambda_0}\left(\hat{\lambda} > k\right) &= P_{\lambda=\lambda_0}\left(\frac{\hat{\lambda}-\lambda_0}{\lambda_0/\sqrt{n}} > \frac{k-\lambda_0}{\lambda_0/\sqrt{n}}\right) \quad \textbf{[0,6]} \\ &= 1-\Phi\left(\frac{k-\lambda_0}{\lambda_0/\sqrt{n}}\right) \approx \alpha. \quad \textbf{[0,6]} \end{aligned}$$

Luego, tomamos:

$$\frac{k-\lambda_0}{\lambda_0/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha}, \quad \textbf{[1,0]}$$

de donde se obtiene,

$$k = \lambda_0 + z_{1-\alpha}\frac{\lambda_0}{\sqrt{n}}. \quad \textbf{[0,2]}$$

[1,0] punto base

Formulario

Estimador Máximo Verosímil

Sean $X_1,\ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de probabilidad p_X o de densidad f_X, determinada por un parámetro θ univariado. Si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil del parámetro θ, entonces:

- $\mathrm{E}(\hat{\theta}) \to \theta$, cuando $n \to \infty$.
- Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \approx \dfrac{1}{I_n(\theta)}$, con $I_n(\theta) = -\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}\ln L(\theta)\right]$.
- Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $\hat{\theta} \overset{aprox}{\sim} \text{Normal}\left(\theta,\, \sqrt{\dfrac{1}{I_n(\theta)}}\right)$.
- El estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$, cuya varianza, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, puede ser aproximada por $\mathrm{Var}[g(\hat{\theta})] \approx \dfrac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}$.

Distribuciones Muestrales

Sean $X_1,\ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Normal(μ, σ), entonces

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,1), \qquad \frac{\overline{X}_n - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim \text{t-student}(n-1), \qquad \frac{s^2\,(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

con $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

Si $X_1,\ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución no Normal, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se cumple que:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{aprox}{\sim} \text{Normal}(0,1)$$

Bondad de Ajuste

Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{aprox}{\sim} \chi^2(k-1-\nu)$$

con ν igual al número de parámetros estimados en el modelo ajustado.

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\, p$ $\sigma_X^2 = n\, p\, (1-p)$ $M(t) = [p\, e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\, (1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\, e^t/[1-(1-p)\, e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\, (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\, (1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\, e^t/[1-(1-p)\, e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\, t$ $\sigma_X^2 = \nu\, t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\, \left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\, t + \sigma^2\, t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\, x)}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\, x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\, \left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\, M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\, b} - e^{t\, a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\, \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\, r\, (b-a)^2}{(q+r)^2\, (q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\, \frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\, n\, \frac{m}{N}\, \left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
∞	1.282	1.645	1.960	2.326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$

ν	$c_{0.025}$	$c_{0.05}$	$c_{0.10}$	$c_{0.90}$	$c_{0.95}$	$c_{0.975}$	$c_{0.99}$	$c_{0.995}$
1	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93