Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2013

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Examen	:	
Profesor	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)**
Ayudantes	:	**Daniela Castro, Fabián Fuentealba, Genaro Olave, Claudia Reyes.**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

Una compañía productoria de codos de alumninio, interesada en estudiar la duración de sus máquinas, toma una muestra aleatoria de n de ellas, registrando los tiempos hasta la primera falla de cada una. Sea p la probabilidad de que una de estas máquinas falle en un día cualquiera. Asuma que los tiempos de falla de las máquinas en la muestra, medidos en días, son independientes, todos con distribución Exponencial de parámetro λ.

a) [3 pts] Encuentre el estimador máximo verosímil de p y entregue su varianza aproximada para un número n suficientemente grande de observaciones. No es necesario que muestre que punto crítico es máximo.

b) [3 pts] Encuentre el estimador máximo verosímil del tiempo de falla esperado de cualquier máquina, y determine si su varianza alcanza la cota de Cramer-Rao.

Solución:

a) Si X_i corresponde al tiempo de falla de una máquina, medido en días, la probabilidad de que ésta falle en un día cualquiera corresponde a:

$$p = P(X_i \leq 1) = 1 - e^{-\lambda}. \qquad \textbf{[0,3pt]}$$

Para encontrar su estimador máximo verosímil, podemos encontrar el estimador máximo verosímil de λ y luego utilizar la propiedad de invarianza. La función de verosimilitud corresponde a:

$$\begin{aligned} L(\lambda, x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} \\ &= \lambda^n \, e^{-\lambda \sum x_i}. \qquad \textbf{[0,3pt]} \end{aligned}$$

Luego, la log-verosimilitud es:

$$\log L(\lambda, x_1, \ldots, x_n) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad \textbf{[0,3pt]}$$

Para encontrar el máximo de esta función:

$$\frac{d \log L(\lambda, x_1, \ldots, x_n)}{d\lambda} = -\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \qquad \textbf{[0,3pt]}$$

de donde se obtiene que el estimador máximo verosímil de λ corresponde a:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}. \qquad \textbf{[0,3pt]}$$

Luego, el estimador máximo verosímil de p corresponde a:

$$\hat{p} = 1 - e^{-1/\bar{X}}. \qquad \textbf{[0,3pt]}$$

Para encontrar su varianza aproximada, encontramos primero $I_n(\lambda)$.

$$\begin{aligned} I_n(\lambda) &= -E\left(\frac{d^2 \log L}{d\lambda^2}\right) \\ &= -E\left(-\frac{n}{\lambda^2}\right) \\ &= \frac{n}{\lambda^2}. \qquad \textbf{[0,6pt]} \end{aligned}$$

Por otra parte, consideremos la función $g(u) = 1 - e^{-u}$, que relaciona λ con p. Entonces:

$$\frac{dg(u)}{du} = e^{-u}. \qquad \textbf{[0,3pt]}$$

De este modo, la varianza aproximada de $\hat{p}$, para un tamaño de muestra suficientemente grande corresponde a:

$$\frac{e^{-2\lambda}}{n/\lambda^2} = \frac{\lambda^2 e^{-2\lambda}}{n}. \qquad \textbf{[0,3pt]}$$

b) El tiempo de falla esperado de una máquina cualquiera corresponde a:

$$\mu = E(X_i) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \textbf{[0,6pt]}$$

luego, su estimador máximo verosímil corresponde a:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{\hat{\lambda}} \qquad \textbf{[0,6pt]} \\ &= \bar{X}. \end{aligned}$$

Su varianza corresponde a:

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}) &= Var(\bar{X}) \\ &= \frac{1}{n} Var(X_i) \\ &= \frac{1}{n\lambda^2} \qquad \textbf{[0,6pt]} \end{aligned}$$

Para obtener la cota de Cramer-Rao, definamos la función $h(u) = 1/u$, que relaciona λ con μ, cuya primera derivada corresponde a:

$$\frac{dg(u)}{du} = -\frac{1}{u^2}. \qquad \textbf{[0,6pt]}$$

Luego, la cota de Cramer-Rao indica que la mínima varianza de un estimador insesgado para μ es:

$$\begin{aligned} \frac{(dg(\lambda)/d\lambda)^2}{I_n(\lambda)} &= \frac{1/\lambda^4}{n/\lambda^2} \\ &= \frac{1}{n\lambda^2}, \qquad \textbf{[0,6pt]} \end{aligned}$$

la que es exactamente la varianza del estimador máximo verosímil de μ.

[1.0pt] base

Problema 2

Estudios han determinado que el número de automóviles que atraviesan una intersección dada, en la ciudad de Santiago, se comporta según un proceso de Poisson de tasa ν, expresada en automóviles por minuto. Sin embargo, el valor de esta tasa es desconocido y se pide estimarlo en base a una muestra aleatoria de n observaciones, $X_1, \ldots, X_n$, donde cada X_i representa el número de automóviles observados en dicha intersección en un intervalo de tiempo de largo $t_i, i = 1, \ldots, n$, todos expresados en minutos. Asuma que todos los intervalos de tiempo observados son disjuntos.

a) [3 pts] Determine el estimador máximo verosímil de la tasa ν. No es necesario que muestre que punto crítico es máximo.

b) [3 pts] Se ha determinado que una proporción p de automóviles que cruzan dicha intersección sufre un accidente de tránsito. Para estimar esta proporción se obtienen n observaciones $Y_1, \ldots Y_n$, donde cada Y_i corresponde al número de accidentes de tránsito observados en dicha intersección durante los mismos intervalos de tiempo de largo $t_1, \ldots, t_n$ en que se observó los X_i. Encuentre los estimadores máximo verosímiles de ν y p basados en la muestra conjunta $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$. (Ayuda: Puede utilizar que
$$Y_i | X_i = k \;\sim\; \text{Binomial}(k, p)).$$
No es necesario que muestre que punto crítico es máximo.

Solución:

a) Cada X_i tiene distribución de Poisson de parámetro νt_i, luego, la función de verosimilitud corresponde a:
$$\begin{aligned} L(\nu, x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\nu t_i}(\nu t_i)^{x_i}}{x_i!} && \textbf{[0.6pt]} \\ &= e^{-\nu \sum t_i} \nu^{\sum x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i^{x_i}}{x_i!} && \textbf{[0.6pt]} \end{aligned}$$
Luego, la log-verosimilitud es:
$$\log L(\nu, x_1, \ldots, x_n) = -\nu \sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \log \nu + \sum_{i=1}^{n} \{x_i \log t_i - \log x_i!\}. \qquad \textbf{[0.6pt]}$$
Para encontrar el máximo de esta función:
$$\frac{d \log L(\nu, x_1, \ldots, x_n)}{d\nu} = -\sum_{i=1}^{n} t_i + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\nu} = 0, \qquad \textbf{[0.6pt]}$$
de donde se obtiene que el estimador máximo verosímil de ν corresponde a:
$$\hat{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i}. \qquad \textbf{[0.6pt]}$$

b) Necesitamos la función de probabilidad conjunta de $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$. Para ello:
$$\begin{aligned} L(\nu, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i, Y_i = y_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) P(Y_i = y_i | X_i = x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\nu t_i}(\nu t_i)^{x_i}}{x_i!} \binom{x_i}{y_i} p^{y_i}(1-p)^{x_i - y_i} && \textbf{[0.5pt]} \\ &= e^{-\nu \sum t_i} \nu^{\sum x_i} p^{\sum y_i} (1-p)^{\sum x_i - \sum y_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i^{x_i}}{x_i!} \binom{x_i}{y_i}. \end{aligned}$$

Luego, la log-verosimilitud es:

$$
\begin{aligned}
\log L(\nu, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \quad &= \quad -\nu \sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \log \nu + \sum_{i=1}^{n} y_i \log p + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \right) \log(1-p) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_i \log t_i - \log x_i! + \log \binom{x_i}{y_i} \right\} \qquad \textbf{[0.5pt]}
\end{aligned}
$$

Para encontrar el máximo de esta función:

$$
\frac{d \log L(\nu, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)}{d\nu} \quad = \quad -\sum_{i=1}^{n} t_i + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\nu} = 0 \qquad \textbf{[0.5pt]} \tag{1}
$$

$$
\frac{d \log L(\nu, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)}{dp} \quad = \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{1-p} = 0 \qquad \textbf{[0.5pt]} \tag{2}
$$

De (1) obtenemos que el estimador máximo verosímil de ν es

$$
\hat{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i}, \qquad \textbf{[0.5pt]}
$$

y de (2) obtenemos que el estimador máximo verosímil de p es:

$$
\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}. \qquad \textbf{[0.5pt]}
$$

[1.0pt] base

Problema 3

Recientemente se llevó a cabo la elección presidencial, y uno de los temores era la baja participación de los jóvenes. Usted, interesado en determinar la validez de ciertas hipótesis (letras a), b) y c)) decide hacer una encuesta entre alumnos de la UC, a través de las siguientes preguntas:

¿Votaste? ___ (SI) ___ (NO)

Si votaste, ¿cuánto tiempo te tomó el proceso, una vez que accediste a la mesa? ____ minutos

Los resultados son:

- De los 104 alumnos entrevistados, 27 votaron.
- El tiempo promedio de estos alumnos fue de 2,5 minutos, con una desviación estándar de 1,5 minutos.

En lo que sigue, sea explícito con las hipótesis en estudio y conclusiones. Asuma normalidad de los tiempos que toma cada alumno en el proceso de votación.

a) [2 pts] ¿Hay evidencia que sustente la afirmación "la participación de los jóvenes fue inferior a un tercio"? Concluya utilizando valor-p y $\alpha = 0,05$.

b) [2 pts] Existen estudios que afirman que, en votaciones típicas, la variabilidad, medida a través de desviación estándar, es de 15 segundos, y que es directamente proporcional al número de papeletas - en este caso - cuatro. Se esperaría que en esta votación, la variabilidad sea, a lo más, 4×15 segundos. Sin embargo, algunos especialistas indican que en el presente caso, se superó largamente esta la variabilidad, producto del gran número de candidatos. ¿Aportan los datos evidencia respecto a esta afirmación? Concluya utilizando punto crítico y $\alpha = 0,05$.

c) [2 pts] ¿Es posible afirmar que el tiempo medio del proceso de votación supera los dos minutos? Concluya utilizando valor-p y $\alpha = 0,05$.

Solución:

a) Las hipótesis son: $H_0 : p = 1/3, \quad vs. \quad H_a : p < 1/3$, **[0.3pt]** donde p corresponde a la probabilidad de que un joven vote (también es correcto $H_0 : p \geq 1/3$). El estadístico del test corresponde a:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{27/104 - 1/3}{\sqrt{\frac{1}{104}\frac{1}{3}\frac{2}{3}}} \\ &= -1,594 \qquad \textbf{[0.4pt]} \end{aligned}$$

El valor-p corresponde a:

$$\begin{aligned} valor - p &= P(Z < -1.594) \qquad \textbf{[0.4pt]} \\ &= 1 - \Phi(1.594) \\ &= 1 - 0.9445 \\ &= 0,0555. \qquad \textbf{[0.5pt]} \end{aligned}$$

Dado que $valor - p > 0,05$, con significancia $\alpha = 0,05$, no podemos afirmar que la participación de los jóvenes fue inferior a 1/3. (puede haber diferencias debido a redondeos en z_0.) **[0.4pt]**

b) Sea X el tiempo que demora un joven en votar, en segundos, y σ su desviación estándar. Las hipótesis son: $H_0 : \sigma^2 = 60^2, \quad vs. \quad H_a : \sigma^2 > 60^2$ **[0.4pt]** (también es correcto $H_0 : \sigma^2 \leq 60^2$). El estadístico del test corresponde a:

$$\begin{aligned} X_0^2 &= (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} \qquad \textbf{[0.3pt]} \\ &= (27-1) \times \frac{(1,5 \times 60)^2}{60^2} \\ &= 58,5. \qquad \textbf{[0.3pt]} \end{aligned}$$

El valor crítico de tabla corresponde a:

$$\mathcal{X}^2_{27-1,0,95} = 38,89. \qquad \textbf{[0.5pt]}$$

Dado que $X_0^2 = 58,5 > 38,89$, con significancia $\alpha = 0,05$, rechazamos H_0, y concluimos que la desviación estándar es mayor a 1 minuto. (puede haber diferencias debido a redondeos en X_0^2). **[0.5pt]**

También es posible trabajar en minutos, en cuyo caso: $H_0 : \sigma^2 = 1, \ \ vs. \ \ H_a : \sigma^2 > 1$ (también es correcto $H_0 : \sigma^2 \leq 1$). En este caso, $S = 1,5$. El valor del estadístico no cambia, por lo que el razonamiento posterior es el mismo.

c) Sea X el tiempo que demora un joven en votar, en segundos, y μ su media. Las hipótesis son: $H_0 : \mu = 120, \ \ vs. \ \ H_a : \mu > 120$ **[0.3pt]** (también es correcto $H_0 : \mu \leq 120$). El estadístico del test corresponde a:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{2,5 \times 60 - 120}{(1,5 \times 60)/\sqrt{27}} \\ &= 1,732. \qquad \textbf{[0.4pt]} \end{aligned}$$

El valor-p corresponde a:

$$valor - p = P(T_{27-1} > 1,732). \qquad \textbf{[0.4pt]}$$

De tabla tenemos que $t_{26,0,95} = 1,706$, por lo que, $valor-p < 0,05 = \alpha$ **[0.5pt]**. Luego, con significancia $0,05$, rechazamos H_0 y afirmamos que el tiempo medio que toma cada uno de los jóvenes en votar es mayor que 2 minutos. **[0.4pt]** (puede haber diferencias debido a redondeos en t_0).

También es posible trabajar en minutos, en cuyo caso: $H_0 : \mu = 2, \ \ vs. \ \ H_a : \mu > 2$ (también es correcto $H_0 : \mu \leq 2$). En este caso, $\bar{X} = 2,5, \ S = 1,5$. El valor del estadístico no cambia, por lo que el razonamiento posterior es el mismo.

[1.0pt] base

Problema 4

En la situación planteada en el Problema 3, un especialista discute el supuesto de normalidad para los tiempos de votación. Para verificar esta conjetura, decide llevar a cabo tests de hipótesis para determinar si ellos distribuyen Normal, de media y desviación estándar de 120 y 60 segundos, respectivamente, o Exponencial, donde decide estimar el parámetro λ a partir de los datos. ¿Cuál de estas dos distribuciones ajusta mejor? Sea explicito con las hipótesis en juego, valores-p y decisión. Use $\alpha = 5\,\%$. Utilice 4 decimales en sus cálculos.

Intervalo de tiempo (seg)	Número de casos
< 80	7
80 - 180	12
> 180	8

Solución: Para estudiar el ajuste de la distribución Normal(120, 60):

$$\begin{aligned} p_1 &= \Phi\left(\frac{80-120}{60}\right) = 0,2525. \qquad \textbf{[0.3pt]} \\ p_2 &= \Phi\left(\frac{180-120}{60}\right) - 0,2525 = 0,5888. \qquad \textbf{[0.3pt]} \\ p_3 &= 1 - \Phi\left(\frac{180-120}{60}\right) = 0,1587. \qquad \textbf{[0.3pt]} \end{aligned}$$

Con estos valores completamos la tabla:

Intervalo (seg)	n_i	p_i	e_i	$(n_i - e_i)^2/e_i$
Menos de 80	7	0,2525	6,8175	0,0049
Entre 80 y 180	12	0,5888	15,8976	0,9556
Mas de 180	8	0,1587	4,2849	3,2211

[**0.3pt**] por cada e_i.

Con esto, $X_0^2 = 4,1816$. [**0.6pt**]

Para estudiar el ajuste de la distribución Exponencial(λ), usamos $\hat{\lambda} = 1/\bar{X} = 1/150 = 0.0067$. [**0.3pt**].

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - e^{-0.0067\times 80} = 0,4149. \qquad \textbf{[0.3pt]} \\ p_2 &= 1 - e^{-0.0067\times 180} - 0,4149 = 0,2857. \qquad \textbf{[0.3pt]} \\ p_3 &= e^{-0.0067\times 180} = 0,2994. \qquad \textbf{[0.3pt]} \end{aligned}$$

Con estos valores completamos la tabla:

Intervalo (seg)	n_i	p_i	e_i	$(n_i - e_i)^2/e_i$
Menos de 80	7	0,4149	11,2023	1,5764
Entre 80 y 180	12	0,2857	7,7139	2,3815
Mas de 180	8	0,2994	8,0838	0,0009

[**0.3pt**] por cada e_i.

Con esto, $X_0^2 = 3,9588$. [**0.6pt**]

Para decidir:

Alternativa 1:

- Para evaluar la distribución Normal(120,60) comparamos $X_0^2 = 4,1816$ con valor de tabla $\mathcal{X}^2_{2,0.95} = 5,99$. Luego, con $\alpha = 0,05$, los datos se ajustan a esta distribución. [**0.4pt**]
- Para evaluar la distribución Exponencia(λ) comparamos $X_0^2 = 3,9588$ con valor de tabla $\mathcal{X}^2_{1,0.95} = 3,84$. Luego, con $\alpha = 0,05$, los datos **no** se ajustan a esta distribución.[**0.4pt**]

Luego, preferimos distribución Normal(120, 60). [**0.1pt**]

Alternativa 2:

- Para evaluar la distribución Normal(120, 60), notamos que de tabla $\mathcal{X}^2_{2,0.9} = 4.61$. Dado que $X_0^2 = 4,1816 < 4,61$, concluimos que $valor - p > 0,10$. **[0.4pt]**
- Para evaluar la distribución Exponencia(λ) notamos que de tabla $\mathcal{X}^2_{1,0.95} = 3,84$. Dado que $X_0^2 = 3,9588 > 3,84$, concluimos que $valor - p < 0,05$ **[0.4pt]**

Es decir, el $valor - p$ del modelo Normal es mayor que el $valor - p$ del modelo Exponencial. Dado que, además, el primero es mayor que α, preferimos el modelo Normal(120,60).**[0.1pt]**

[1.0pt] base

Tiempo: 2 Horas

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)

Formulario

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de probabilidad p_X o de densidad f_X, determinada por un parámetro θ. Si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil del parámetro θ, entonces:
  - $E(\hat{\theta}) \to \theta$, cuando $n \to \infty$.
  - $Var(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{I_n(\theta)}$, con $I_n(\theta) = -E\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}\,\ln L(\theta)\right]$.
  - $\hat{\theta} \stackrel{\cdot}{\sim}$ Normal $\left(\theta,\ \sqrt{\dfrac{1}{I_n(\theta)}}\right)$, cuando $n \to \infty$.
  - El estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$, cuya varianza está dada por: $Var[g(\hat{\theta})] = \dfrac{\left[g'(\theta)\right]^2}{I_n(\theta)}$.
- Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Normal(μ, σ), entonces

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,1), \quad \frac{\overline{X}_n - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim \text{t-student}(n-1), \quad \frac{s^2\,(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

con $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
∞	1.282	1.645	1.960	2.326

Distribución Chi-Cuadrado $\quad c_p(\nu)$

ν	$c_{0.025}$	$c_{0.05}$	$c_{0.10}$	$c_{0.90}$	$c_{0.95}$	$c_{0.975}$	$c_{0.99}$	$c_{0.995}$
1	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64