Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2011

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Pauta	:	**I1**
Profesor	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ricardo Olea (Sec. 2)**
Ayudantes	:	**Erwin Agüero Meza, Tamara Fernandez Aguilar y Claudia Reyes Vizcarra.**

Problema 1

Actualmente es muy común que los bancos y otras entidades comerciales clasifiquen a sus clientes según ciertos perfiles, que hacen más eficiente la venta de distintos productos a sus ejecutivos. Suponga que a una sucursal de un banco acaba de llegar un listado con 30 nuevos clientes que se agregarán a la cartera ya existente, los cuales ya vienen clasificados desde la mesa central como perfil A (12 clientes) o perfil B (18 clientes). Si usted es el agente responsable de la sucursal y tiene a cargo solo dos ejecutivos:

(a) **[3.0 Ptos]** ¿De cuantas maneras podría asignar a estos 30 nuevos clientes a los ejecutivos siendo justo según perfil?

(b) **[3.0 Ptos]** Si solo cuatro de los clientes con perfil A y ocho del B están dispuesto a adquirir un producto si se lo ofrecen. ¿Cuál es la probabilidad que la repartición hecha por usted en (a) realmente haya sido justa?

Solución

(a) Como no hay información si es mejor un cliente de perfil A o B para un ejecutivo, la manera más justa de repartir a los 30 clientes es la siguiente

i. Tenemos $\dfrac{12!}{6!\,6!}$ maneras de asignar los 12 clientes de perfil A en dos grupos de tamaño 6 entre los dos ejecutivos. **[1.0 Ptos]**

ii. Tenemos $\dfrac{18!}{9!\,9!}$ maneras de asignar los 18 clientes de perfil B en dos grupos de tamaño 6 entre los dos ejecutivos. **[1.0 Ptos]**

Por lo tanto, por regla multiplicativa tenemos

$$\begin{aligned}\#S &= \frac{12!}{6!\,6!} \times \frac{18!}{9!\,9!} \quad \textbf{[0.8 Ptos]}\\ &= 44924880 \quad \textbf{[0.2 Ptos]}\end{aligned}$$

maneras de repartir a los clientes en el sentido justo según perfil.

(b) Si tenemos par de clientes que comprarían el producto si se lo ofrecieran según tipo, la justicia estaría dada ahora en el caso que ambos ejecutivos logren vender la misma cantidad de productos en clientes de perfil A y en clientes de perfil B, es decir

i. Tenemos $\dfrac{4!}{2!\,2!} \times \dfrac{8!}{4!\,4!}$ maneras de asignar los clientes de perfil A que compran y no compran entre los dos ejecutivos, manteniendo el sentido de justicia ahora por venta. **[1.0 Ptos]**

i. Tenemos $\dfrac{8!}{4!\,4!} \times \dfrac{10!}{5!\,5!}$ maneras de asignar los clientes de perfil B que compran y no compran entre los dos ejecutivos, manteniendo el sentido de justicia ahora por venta. **[1.0 Ptos]**

Si C es el evento en que la repartición realizada en (a) realmente fue justa, entonces

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\# C}{\# S} \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\ &= \frac{\frac{4!}{2!\,2!} \times \frac{8!}{4!\,4!} \times \frac{8!}{4!\,4!} \times \frac{10!}{5!\,5!}}{44924880} \quad \textbf{[0.4 Ptos]} \\ &= \frac{7408800}{44924880} \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\ &= 0{,}1649153 \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Producto del accidente recientemente acaecido en Isla Juan Fernández, diversos expertos han opinado con respecto a los riesgos y probabilidades asociadas. Haciendo un sucinto resumen de las diferentes discusiones, se pueden aislar tres factores relevantes que pueden haber incidido en el accidente: falla técnica, falla humana y/o condiciones meteorológicas adversas. Además, es bien sabido que en los accidentes aéreos la presencia de falla humana interactúa con los otros dos factores, y que la ocurrencia de fallas técnicas y condiciones climáticas son independientes.

Basados en un exhaustivo análisis del último centenar de accidentes que han afectado a los aviones CASA, se tienen las siguientes probabilidades (o proporciones):

- Proporción de accidentes aéreos que han estado presente los tres factores (es decir, concurren falla humana, mal tiempo y falla técnica) = 12 %.
- Proporción de accidentes aéreos que han estado presente solamente los siguientes dos factores: falla humana y falla técnica = 14 % (con buenas condiciones climáticas)
- Proporción de accidentes aéreos que han estado presente solamente los siguientes dos factores: falla humana y mal tiempo = 32 % (no hay evidencia de falla técnica)
- Proporción de accidentes aéreos que únicamente ha estado presente la falla humana = 28 % (con buen tiempo y sin falla técnica).

Obviamente, existen otros factores presentes (ej: sobrepeso) que permiten complementar las proporciones faltantes y que no corresponden a ninguno de los otros tres factores descritos.

Por último, del análisis se obtiene que en el 60 % de los accidentes aéreos las condiciones climáticas eran adversas y análisis técnicos muestran que sólo en un 30 % de los accidentes están presente una o más fallas técnicas.

(a) **[2.0 ptos]** ¿Cuál es la probabilidad qué en un accidente esté presente la falla humana?.

(b) **[2.0 ptos]** si se determinó la presencia de falla humana, ¿cuál es la probabilidad que concurran las condiciones climáticas adversas y falla técnica?.

(c) **[2.0 ptos]** ¿Cuál es la probabilidad que esté presente únicamente el clima adverso?.

Solución

(a) Definamos los siguientes eventos

A = Falla Humana
B = Mal tiempo
C = Falla Técnica

Del enunciado entregan la siguiente información:

$$P(A \cap B \cap C) = 0{,}12 \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$
$$P(A \cap \overline{B} \cap C) = 0{,}14 \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$
$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = 0{,}32 \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$
$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 0{,}28 \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

Por probabilidades totales tenemos que

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap S) \quad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= P\{A \cap [(B \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C})]\} \quad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= P[(A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})] \quad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \quad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= 0{,}86 \quad \textbf{[0.4 Ptos]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide

$$\begin{aligned}
P(B \cap C \,|\, A) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)} \quad \textbf{[1.0 Ptos]}\\
&= \frac{0{,}121}{0{,}86} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= 0{,}1395 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

(c) Del enunciado tenemos que

$$\textbf{[0.1 Ptos]} \quad P(B) = 0{,}6 \quad \text{y} \quad P(C) = 0{,}3 \quad \textbf{[0.1 Ptos]}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
P(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) &= P(\overline{A} \,|\, B \cap \overline{C})\, P(B \cap \overline{C}) \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
&= \left[1 - P(A \,|\, B \cap \overline{C})\right] P(B \cap \overline{C}) \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
&= P(B \cap \overline{C}) - P(A \cap B \cap \overline{C}) \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
&= P(B)\, P(\overline{C}) - P(A \cap B \cap \overline{C}), \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
&= 0{,}6 \cdot 0{,}7 - 0{,}32 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
&= 0{,}10 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

Sea Z el tiempo transcurrido entre sismos que afectan a una zona. Una distribución que se ajusta muy bien en la práctica a este tipo de datos es la llamada distribución Gaussiana-Inversa(μ, λ), la cuál está determinada por la siguiente función de densidad:

$$f_Z(z) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\,\pi}}\, z^{-3/2} \exp\left[-\frac{\lambda}{2\,\mu^2\,z}\,(z-\mu)^2\right] \tag{1}$$

con $z \in \mathbb{R}^+$, $\mu \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

A continuación usted analizará el comportamiento de sus momentos teóricos, para ello se recomienda trabajar con la siguiente re-parametrización de la densidad propuesta en (1):

$$f_Z(z) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\,\pi}}\, z^{-3/2} \exp\left[-\lambda\,\alpha\,z + \lambda\,(2\,\alpha)^{1/2} - \frac{\lambda}{2\,z}\right] \tag{2}$$

donde $\alpha = \dfrac{1}{2\,\mu^2}$.

(a) **[2.0 ptos]** Muestre que la función generadora de momentos de Z es

$$M_Z(t) = \exp\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}}\right)\right], \quad t < \frac{\lambda}{2\,\mu^2}$$

Ayuda: *Recuerde que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,dz = 1.$

(b) **[2.0 ptos]** Muestre que la varianza de Z es $\dfrac{\mu^3}{\lambda}$.

(c) **[2.0 ptos]** Muestre que el coeficiente de asimetría de Z es $3\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{1/2}$.

Solución

(a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= E(e^{t\,Z}) \quad \textbf{[0.1 Ptos]}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\,z}\, f_Z(z)\,dz\\
&= \int_0^{\infty} e^{t\,z} \sqrt{\frac{\lambda}{2\,\pi}}\, z^{-3/2} \exp\left[-\lambda\,\alpha\,z + \lambda\,(2\,\alpha)^{1/2} - \frac{\lambda}{2\,z}\right] dz \quad \textbf{[0.1 Ptos]}\\
&= \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{2\,\pi}}\, z^{-3/2} \exp\left[t\,z - \lambda\,\alpha\,z + \lambda\,(2\,\alpha)^{1/2} - \frac{\lambda}{2\,z}\right] dz\\
&= \exp\left[\lambda\,(2\,\alpha)^{1/2}\right] \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{2\,\pi}}\, z^{-3/2} \exp\left[-\lambda\,z\left(\alpha - \frac{t}{\lambda}\right) - \frac{\lambda}{2\,z}\right] dz \quad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= \exp\left\{\lambda\,(2\,\alpha)^{1/2} - \lambda\left[2\left(\alpha - \frac{t}{\lambda}\right)\right]^{1/2}\right\} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{2\,\pi}}\, z^{-3/2} \exp\left\{-\lambda\,z\left(\alpha - \frac{t}{\lambda}\right) + \lambda\left[2\left(\alpha - \frac{t}{\lambda}\right)\right]^{1/2} - \frac{\lambda}{2\,z}\right\} dz \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= \exp\left\{\lambda\,(2\,\alpha)^{1/2} - \lambda\left[2\left(\alpha - \frac{t}{\lambda}\right)\right]^{1/2}\right\} \cdot 1, \quad \text{si } t < \alpha\,\lambda \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

$$M_Z(t) = \exp\left\{\lambda\left(2\cdot\frac{1}{2\,\mu^2}\right)^{1/2} - \lambda\left[2\left(\frac{1}{2\,\mu^2} - \frac{t}{\lambda}\right)\right]^{1/2}\right\} \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

$$= \exp\left[\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}\right)^{1/2}\right] \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

$$= \exp\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}}\right)\right], \quad t < \frac{\lambda}{2\,\mu^2} \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

(b) Tenemos que la varianza de Z depende de los primeros dos momentos:

$$\sigma_Z^2 = E(Z^2) - [E(Z)]^2 \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

Para obtener los momentos de Z utilizaremos la función generadora propuesta en (a) la cual tiene la siguiente propiedad:

$$E(Z^r) = M_Z^{(r)}(t) \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

La primera derivada con respecto a t es

$$M_Z^{(1)}(t) = \exp\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}}\right)\right]\cdot\left[\mu\left(1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}\right)^{-1/2}\right]$$

$$= M_Z(t)\cdot\left[\mu\left(1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}\right)^{-1/2}\right] \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

$$\Rightarrow M_Z^{(1)}(0) = \mu \quad \textbf{[0.1 Ptos]}$$

Mientras que la segunda derivada con respecto a t es

$$M_Z^{(2)}(t) = M_Z^{(1)}(t)\cdot\left[\mu\left(1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}\right)^{-1/2}\right] + M_Z(t)\cdot\left[\frac{\mu^3}{\lambda}\left(1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}\right)^{-3/2}\right] \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

$$\Rightarrow M_Z^{(2)}(0) = \mu^2 + \frac{\mu^3}{\lambda} \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Por lo tanto

$$\sigma_Z^2 = \mu^2 + \frac{\mu^3}{\lambda} - [\mu]^2 = \frac{\mu^3}{\lambda} \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

(c) El coeficiente de asimetría esta dado por la siguiente expresión

$$E\left[\left(\frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z}\right)^3\right] = \frac{1}{\sigma_Z^3}\left[E(Z^3) - 3\,E(Z^2)\,\mu_Z + 3\,E(Z)\,\mu_Z^2 - \mu_Z^3\right] \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

y podemos ver que necesitamos el tercer momento de Z, el cual podemos obtener derivando por tercera vez la función generadora propuesta en (a):

$$M_Z^{(3)}(t) = M_Z^{(2)}(t)\cdot\left[\mu\left(1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}\right)^{-1/2}\right] + M_Z^{(1)}(t)\cdot\left[\frac{\mu^3}{\lambda}\left(1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}\right)^{-3/2}\right] +$$

$$M_Z^{(1)}(t)\cdot\left[\frac{\mu^3}{\lambda}\left(1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}\right)^{-3/2}\right] + M_Z(t)\cdot\left[\frac{3\,\mu^5}{\lambda^2}\left(1 - \frac{2\,\mu^2\,t}{\lambda}\right)^{-5/2}\right] \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

$$\Rightarrow M_Z^{(3)}(0) = \mu^3 + \frac{\mu^4}{\lambda} + \frac{\mu^4}{\lambda} + \frac{\mu^4}{\lambda} + \frac{3\,\mu^5}{\lambda^2}$$

$$= \mu^3 + \frac{3\,\mu^4}{\lambda} + \frac{3\,\mu^5}{\lambda^2} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Reemplazando tenemos que

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}\right)^3\right] &= \frac{\lambda^{3/2}}{\mu^{9/2}}\left[\mu^3 + \frac{3\,\mu^4}{\lambda} + \frac{3\,\mu^5}{\lambda^2} - 3\left(\mu^2 + \frac{\mu^3}{\lambda}\right)\mu + 3\,\mu\,\mu^2 - \mu^3\right] \quad \textbf{[0.1 Ptos]}\\
&= \frac{\lambda^{3/2}}{\mu^{9/2}} \cdot \frac{3\,\mu^5}{\lambda^2} \quad \textbf{[0.1 Ptos]}\\
&= \frac{\lambda^{3/2}}{\mu^{9/2}} \cdot \frac{3\,\mu^{10/2}}{\lambda^{4/2}} \quad \textbf{[0.1 Ptos]}\\
&= 3\,\frac{\mu^{1/2}}{\lambda^{1/2}} \quad \textbf{[0.1 Ptos]}\\
&= 3\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{1/2} \quad \textbf{[0.1 Ptos]}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

En el reciente caso de La Polar, los montos de las renegociaciones unilaterales alcanzan en promedio los M$650 con un coeficiente de variación del 40 %.

Si asumimos que los montos se comportan como una distribución Normal, evalúe:

(a) **[1.5 ptos]** Proporción de morosos renegociados unilateralmente que se encuentran sobre una desviación del monto medio.

(b) **[1.5 ptos]** Monto máximo renegociado del 30 % de morosos de los menores montos renegociados

Si asumimos que los montos renegociados se comportan como una distribución Log-Normal, evalúe:

(c) **[1.5 ptos]** Proporción de morosos renegociados unilateralmente que se encuentran sobre una desviación estándar de la mediana de los montos.

(d) **[1.5 ptos]** Monto mínimo renegociado del 30 % de morosos de los mayores montos renegociados

Solución

(a) Definamos como X a los montos de las renegociaciones unilaterales.

Del enunciado tenemos que

$$\mu_X = 650 \quad \text{y} \quad \delta_X = 0{,}4 \Rightarrow \sigma_X = 260 \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

Si X distribuyen según una Normal(μ, σ), entonces

$$\textbf{[0.1 Ptos]} \quad \mu = 650 \quad \text{y} \quad \sigma = 260 \quad \textbf{[0.1 Ptos]}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
P(X > \mu + \sigma) &= P(X > 650 + 260) \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\
&= 1 - P(X \leq 910) \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{910 - 650}{260}\right) \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\
&= 1 - \Phi(1) \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\
&= 1 - 0{,}8413 \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\
&= 0{,}1587 \quad \textbf{[0.1 Ptos]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide un valor k ta que $P(X < k) = 0{,}3$. **[0.5 Ptos]**

Estandarizando tenemos que

$$\Phi\left(\frac{k - 650}{260}\right) = 0{,}3 \Rightarrow -\left(\frac{k - 650}{260}\right) \approx 0{,}52 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Despejando

$$k \approx -0{,}52 \cdot 260 + 650 = 514{,}8 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

(c) Si X distribuyen según una Log-Normal(λ, ζ), entonces

$$\zeta = \sqrt{\log(1 + \delta_X^2)} = 0{,}3852532 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

y

$$\lambda = \log(\mu_X) - \frac{1}{2}\zeta^2 = 6{,}402762 \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.3 Ptos]}}$$

Por otra parte, la mediana (x_{med}) de una distribución Log-Normal está dada por e^{λ}, es decir, igual a 603,5098. **[0.2 Ptos]**

Se pide

$$\begin{aligned} P(X > x_{\text{med}} + \sigma) &= P(X > 603{,}5098 + 260) \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\ &= 1 - P(X \leq 863{,}5098) \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(863{,}5098) - \lambda}{\zeta}\right) \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\ &= 1 - \Phi\,(0{,}9298895) \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\ &\approx 1 - \Phi\,(0{,}93) \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\ &= 1 - 0{,}8238 \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\ &= 0{,}1762 \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \end{aligned}$$

(d) Se pide un valor k ta que $P(X > k) = 0{,}7$. **[0.5 Ptos]**

Tomando logaritmo natural y estandarizando

$$\Phi\left(\frac{\ln(k) - \lambda}{\zeta}\right) = 0{,}7 \Rightarrow \left[\frac{\ln(k) - \lambda}{\zeta}\right] \approx 0{,}52 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Despejando y reemplazando tenemos que

$$k \approx \exp\,(0{,}52 \cdot 0{,}3852532 + 6{,}402762) = \exp(6{,}603094) = 737{,}3728 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Formulario (Técnicas de Conteo)

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales $n_1,\ldots,n_k$, entonces

$$S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$.

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1,\ldots, n_k$, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1\, n_2\, \cdots\, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}\, x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$

Distribuciones

Distribución	**Densidad de Probabilidad**	Θ_X	**Parámetros**	**Esperanza, Varianza y fgm**
Exponencial	$\nu\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M_X(t) = \frac{\nu}{\nu - t}$, con $t < \nu$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	μ, σ	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M_X(t) = \exp\left(\mu_X\, t + \frac{1}{2}\,\sigma_X^2\, t^2\right)$
Log-Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\, x)}\, \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\, x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	λ, ζ	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\, M_Z(r\,\zeta)$, con $Z\, \sim$Normal(0,1)

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998