Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2011

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Pauta	:	**Examen**
Profesor	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3), Lorena Correa (Sec. 4) y Ricardo Olea (Sec. 2)**
Ayudantes	:	**Tamara Fernandez Aguilar, Felipe Fuentes Astudillo y Claudia Reyes Vizcarra.**

Problema 1

La empresa del Retail "Onda Polar" es auditada por la *Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras* (SBIF) en su negocio crediticio. La SBIF busca demostrar que el saldo medio (deuda) de cada tarjetahabiente (persona poseedora de tarjeta de crédito) moroso es igual o superior a 38 UF.

Se lleva a cabo un muestreo aleatorio seleccionado 23 Rut (obviamente entre los tarjetahabientes morosos) registrando su saldo medio. Un análisis de los datos muestra que el saldo promedio es de 35 UF, con un coeficiente de variación del 20 %.

(a) **[2.0 Ptos.]** Con los datos disponibles y asumiendo normalidad de ellos, construya un intervalo de confianza al 90 % para el saldo medio.

(b) **[2.0 Ptos.]** ¿Cuál es el menor nivel de significancia (aproximado) para el cual se tiene evidencia que el saldo medio es inferior a lo afirmado por la SBIF?

(c) **[2.0 Ptos.]** Frente a los resultados anteriores, y en acuerdo con la empresa decide llevar a cabo un nuevo estudio que permite testear la afirmación del SBIF para un nivel de significancia del 5 % y que el test estadístico alcance una potencia del 90 % cuando la diferencia sea de al menos 3 UF. ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo? Utilice la información muestral de los 23 Rut como información poblacional si la necesita.

Solución

(a) Se pide construir un intervalo de confianza al 90 % con desviación estándar desconocido bajo el supuesto de normalidad, el cual esta dado por

$$< \mu >_{1-\alpha} \in \overline{X}_n \pm t_{1-\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

con $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$.

Del enunciado, tenemos que

$$n = 23, \quad \overline{X}_n = 38, \quad s = 35\cdot 0{,}2 = 7$$

Para $1-\alpha = 0{,}90 \Rightarrow t_{0{,}95}(22) = 1{,}717$. **[0.5 Ptos]**

$$\begin{aligned} < \mu >_{0,90} &\in 38 \pm 1{,}717\cdot\frac{7}{\sqrt{23}} \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\ &\in 38 \pm 2{,}506135 \quad \textbf{[0.2 Ptos]}\\ &\in (32{,}49387\ -\ 37{,}50613) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\end{aligned}$$

(b) Se pide determinar el valor-p para el siguiente contraste de hipótesis

$$\mathrm{H}_0 : \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu < \mu_0, \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

con $\mu_0 = 38$.

El estadístico de prueba $T_n \sim t-\text{student}(n-1)$ y esta dado por

$$T_n = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{35-38}{7/\sqrt{23}} = -2{,}055356 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

El valor-p corresponde a $P(T < T_n)$, con $T \sim t-\text{student}(n-1)$. **[0.5 Ptos]**

De la tabla de percentiles, se deduce que

$$2{,}5\,\% < \text{valor} - p < 5\,\% \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

(c) La regla de rechazo para las hipótesis planteadas en (b) con la que se comete una probabilidad de error tipo I, α, es

$$\overline{X}_n < 3{,}8 - k_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

si σ es conocido.

La potencia del test está dada por

$$\begin{aligned}
\text{Potencia} &= P(\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mu = \mu_0 - \Delta) \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= P\left(\overline{X}_n < 3{,}8 - k_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,|\, \mu = \mu_0 - \Delta\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma} - k_{1-\alpha}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= 1 - \beta
\end{aligned}$$

con β igual a la probabilidad de error tipo II.

El tamaño muestral n, esta dado por

$$n = \left(\frac{\sigma\,(k_{1-\alpha} + k_{1-\beta})}{\Delta}\right)^2 \Rightarrow n = \left(\frac{7\,(1{,}645 + 1{,}28)}{3}\right)^2 = 46{,}6 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Por lo tanto, se necesitan 47 tarjetahabientes por lo menos.

+ 1 Punto Base

Problema 2

Debido al fuerte supuesto que se realiza con respecto a la distribución de los saldos medios en las empresas de Retail, la SBIF ha decide determinar la distribución que mejor se ajuste a este tipo de datos. Para esto, se toma una muestra de 100 tarjetahabientes a los cuales se les registra sus respectivos saldos medios. Estos datos, que se encuentran colapsados en la tabla, arrojaron una mediana de 38 UF y un coeficiente de variación del 20 %.

Categoría (en UF)	< 30	$[30 - 34)$	$[34 - 38)$	$[38 - 42)$	$[42 - 46)$	≥ 46
N° de Casos	15	22	24	15	13	11

Ajuste una distribución Normal y Log-Normal. ¿Cuál escogería usted si tiene permitido cometer una probabilidad de error tipo I a lo más del 5 %?

Solución

La estimación de los parámetros a partir de los datos son

- Caso Normal: $\hat{\mu} = 38$, $\hat{\sigma} = 7{,}6$. **[0.3 Ptos]**
- Caso Log-Normal: $\hat{\lambda} = \ln(38)$, $\hat{\zeta} = 0{,}2$. **[0.3 Ptos]**

		Normal		Log-Normal	
Categoría	Frecuencia Observada	Frecuencia Estimada	$(O - E)^2/E$	Frecuencia Estimada	$(O - E)^2/E$
< 30	15	14.63	0.0094	11.86	0.8313
30-34	22	15.31	2.9233	17.04	1.4438
34-38	24	20.07	0.7696	21.09	0.4015
38-42	15	20.07	1.2808	19.16	0.9032
42-46	13	15.31	0.3485	13.87	0.0546
$\geq$46	11	14.63	0.9007	13.97	0.6314
Total	100.00	100.00	6.2322	100	4.2658
		[1.0 Ptos]	**[1.0 Ptos]**	**[1.0 Ptos]**	**[1.0 Ptos]**

Como $k = 6$ entonces, de tabla se tiene $\chi^2_{5\,\%}(6 - 1 - 2) = 7{,}815$ **[1.0 Ptos]**, es decir para $\alpha = 5\,\%$ ambas distribuciones ajustan bien. Pero la distribución Log-Normal lo hace mejor. **[0.4 Ptos]**.

+ 1 Punto Base

Problema 3

Con frecuencia, en las pequeñas empresas los dueños manejan irregularmente el adelanto de salario o préstamo de dinero a sus trabajadores, sin comprender que en caso de un retiro o despido inesperado, se puede complicar el cobro del préstamo (o adelanto).

Por esta razón, ante una solicitud de préstamo (o adelanto), la empresa considera la probabilidad que tiene el empleado de mantenerse en esta durante el período de pago como una variable aleatoria X. Se sabe que la relación entre la variable X y proporción de solicitudes de préstamos otorgadas (Y) está determinada por la siguiente función de densidad

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4\,x, & \text{si } (1-x^2) \leq y \leq 1 \text{ y } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) **[3.0 Ptos.]** ¿Como distribuye, marginalmente, la probabilidad que tienen los empleados de mantenerse en la empresa y la proporción de prestamos otorgados? ¿Son independientes?

(b) **[1.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad esperada que tiene un empleado de mantenerse en la empresa durante el período de pago?

(c) **[1.0 Ptos.]** ¿Cuál es la proporción esperada de solicitudes de préstamos que se otorgan?

(d) **[1.0 Ptos.]** Determine el coeficiente de asociación entre las variables del punto (a).

Solución

(a) Se pide determinar la distribución de densidad de las variables aleatorias X e Y, las cuales están dadas por:

$$f_X(x) = \int_{1-x^2}^{1} 4\,x\,dy = 4\,x^3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

y

$$f_Y(y) = \int_{\sqrt{1-y}}^{1} 4\,x\,dy = 2\,y, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

Notemos que

$$f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

por lo tanto, podemos afirmar que X e Y no son independientes.

(b) Se pide el valor esperado de X dado por

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^1 4\,x^4\,dx = \frac{4}{5} \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

(c) Se pide el valor esperado de Y dado por

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 2\,y^2\,dy = \frac{2}{3} \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

(d) La asociación entre X e Y está determinada por la covarianza dada por

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \int_0^1 \int_{1-x^2}^1 4\,x^2\,y\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 2\,x^4\,dx \\ &= \frac{2}{5}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X,Y) &= \frac{2}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} \\ &= -\frac{2}{15}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Formulario

- Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de probabilidad p_X o de densidad f_X, determinada por un parámetro θ. Si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil del parámetro θ, entonces:
  - $\mathbf{E}(\hat{\theta}) \to \theta$, cuando $n \to \infty$.
  - $\mathbf{Var}(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{I_n(\theta)}$, con $I_n(\theta) = -\mathbf{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}\,\ln L(\theta)\right]$.
  - $\hat{\theta} \,\dot{\sim}\, \text{Normal}\left(\theta,\, \sqrt{\dfrac{1}{I_n(\theta)}}\right)$, cuando $n \to \infty$.
  - El estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$, cuya varianza está dada por: $\mathbf{Var}[g(\hat{\theta})] = \dfrac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}$.
- Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Normal(μ, σ), entonces

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,1), \qquad \frac{\overline{X}_n - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim \text{t-student}(n-1), \qquad \frac{s^2\,(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

  con $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$
Poisson	$\dfrac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\, t$ $\sigma_X^2 = \nu\, t$
Exponencial	$\nu\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Gamma Trasladada	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, (x-\gamma)^{k-1}\, e^{-\nu\,(x-\gamma)}$	$x \geq \gamma$	$k,\ \nu,\ \gamma$	$\mu_X = k/\nu + \gamma$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\, x)}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\, x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\ \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\, r\, (b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\, n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\, \cdot)$:

$$(1)\quad B(q,\, r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\, dx; \quad (2)\quad B(q,\, r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$
1	3,078	6,314	12,706	31,821
2	1,886	2,920	4,303	6,965
3	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,476	2,015	2,571	3,365
6	1,440	1,943	2,447	3,143
7	1,415	1,895	2,365	2,998
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764
11	1,363	1,796	2,201	2,718
12	1,356	1,782	2,179	2,681
13	1,350	1,771	2,160	2,650
14	1,345	1,761	2,145	2,624
15	1,341	1,753	2,131	2,602
16	1,337	1,746	2,120	2,583
17	1,333	1,740	2,110	2,567
18	1,330	1,734	2,101	2,552
19	1,328	1,729	2,093	2,539
20	1,325	1,725	2,086	2,528
21	1,323	1,721	2,080	2,518
22	1,321	1,717	2,074	2,508
23	1,319	1,714	2,069	2,500
24	1,318	1,711	2,064	2,492
25	1,316	1,708	2,060	2,485
26	1,315	1,706	2,056	2,479
27	1,314	1,703	2,052	2,473
28	1,313	1,701	2,048	2,467
29	1,311	1,699	2,045	2,462
30	1,310	1,697	2,042	2,457
∞	1,282	1,645	1,960	2,326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$

ν	$c_{0,025}$	$c_{0,05}$	$c_{0,10}$	$c_{0,90}$	$c_{0,95}$	$c_{0,975}$	$c_{0,99}$	$c_{0,995}$
1	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93