Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2013

| | | |
|---|---|---|
| **Curso** | **:** | **Probabilidad y Estadística** |
| **Sigla** | **:** | **EYP1113** |
| **Interrogación** | **:** | **1** |
| **Profesor** | **:** | **Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)** |
| **Ayudantes** | **:** | **Carlos Cayuman Cofre y María Ignacia Vicuña.** |

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

## Problema 1

(a) (3 puntos) Demuestre que si $B_1, \ldots, B_n$ corresponde a una colección de sucesos mutuamente excluyentes cuya unión es el suceso $B$, y $P(A|B_j) = p$, para todo $j = 1, \ldots, n$, entonces $P(A|B) = p$.

**Solución:** Se tiene $B = \cup_{j=1}^{n} B_j$. Notemos que, dado que los sucesos $B_1, \ldots, B_n$ son mutuamente excluyentes, entonces los conjuntos $A \cap B_1, \ldots, A \cap B_n$ también lo son.

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} && \text{por definición de probabilidad condicional}\\
&= \frac{P(A \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_n))}{P(B)} && \text{por enunciado}\\
&= \frac{P((A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_n))}{P(B)} && \text{por distributividad}\\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n} P(A \cap B_j)}{P(B)} && \text{pues los sucesos } A \cap B_j \text{ son mutuamente excluyentes}\\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}{P(B)} && \text{por regla multiplicativa}\\
&= \frac{p\ \sum_{j=1}^{n} P(B_j)}{P(B)} && \text{por enunciado}\\
&= \frac{p\ P(B_1 \cup \ldots \cup B_n)}{P(B)} && \text{pues los } B_j \text{ son disjuntos}\\
&= \frac{p\ P(B)}{P(B)} && \text{por enunciado}\\
&= p.
\end{aligned}
$$

Puntajes:

- **[0.3]** por correcta definición de probabilidad condicional
- **[0.6]** por uso de distributividad
- **[0.6]** por uso de ley multiplicativa
- **[0.6]** por uso de aditividad de los $P(B_j)$.
- **[0.6]** por uso de aditividad de los $P(A \cap B_j)$.
- **[0.3]** llegar a resultado

(b) (3 puntos) Considere una encuesta en la que a cada entrevistado se le hacen las preguntas:

   i) *¿Es el dígito verificador de su RUT un número impar?* (0 y K **no** son números impares)

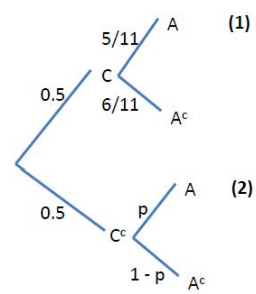
   ii) *¿Ha mentido alguna vez en una solicitud de empleo?*

   Dado que la segunda pregunta corresponde a una pregunta delicada, es de suponer que algunas personas no dirán la verdad, sobretodo si su verdadera respuesta es postiva. Para eliminar este posible sesgo, se pide a los encuestados que lancen una moneda equilibrada, y respondan la pregunta en i) en caso de obtener cara, y que respondan la pregunta en ii) en caso de obtener sello, sin conocer el encuestador el resultado del lanzamiento de la moneda. Se sabe que el 37 % de los encuestados responde de manera afirmativa a esta encuesta. Obtenga la probabilidad de que un encuestado que haya respondido la pregunta delicada respondiera afirmativamente. Suponga que el encuestado siempre responde con la verdad.

**Solución:** La probabilidad de que el dígito verificador del RUT de una persona elegida al azar sea impar es 5/11 puesto que son 5 los números impares posibles (1, 3, 5, 7, 9) entre 11 posibles dígitos verificadores. Sean los eventos $C$ : el lanzamiento sale cara, y $A$: la persona responde la pregunta de manera afirmativa. Se pide

$$p = P(A|\bar{C}).$$

**Alternativa 1:** La representación de árbol corresponde a: [**1.0**] por árbol.




A partir de ella, sumando las ramas (1) y (2):

$$P(A) = 0.5 \times \frac{5}{11} + 0.5 \times p. \qquad [\mathbf{1.0}]$$

Nos dicen que $P(A) = 0.37$ de donde, despejando, se obtiene que $p = P(A|\bar{C}) = 0.285$. [**1.0**]

**Alternativa 2:** Por teorema de Probabilidad Total,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|C)\,P(C) + P(A|\bar{C})\,P(\bar{C}) \\ &= P(A|C)\,P(C) + p\,(1 - P(C)). \qquad [\mathbf{1.0}] \end{aligned} \tag{1}$$

Del enunciado

$$P(C) = 0.5,\ [\mathbf{0.2}] \qquad P(A) = 0.37, [\mathbf{0.3}] \qquad P(A|C) = \frac{5}{11}.[\mathbf{0.5}]$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (1) y despejando se obtiene $p = P(A|\bar{C}) = 0.285$. [**1.0**]

[**1.0**] **base**

**Problema 2**

Una línea de producción produce artículos cuya calidad puede ser clasificada como excelente, promedio o deficiente, conociéndose que el 90 % de los artículos son de calidad promedio, el 1 % de calidad excelente, y los restantes de calidad deficiente. Suponga que se selecciona de manera sucesiva dos artículos de esta línea de producción observándose su calidad. Sean los eventos:

A = {el primer artículo es de calidad deficiente},
B = {la calidad de ambos articulos es la misma}, y
C = {la calidad del primer artículo es superior a la del segundo}.

(a) (1.5 puntos) Para cada uno de los siguientes pares de sucesos, determine si ellos son mutuamente excluyentes: $A$ y $B$, $A$ y $C$, $B$ y $C$. Justifique.

(b) (1.5 puntos) Para cada uno de los siguientes pares de sucesos, determine si ellos son independientes: $A$ y $B$, $A$ y $C$, $B$ y $C$. Justifique.

(c) (1.5 puntos) Determine la probabilidad de que la calidad del primer artículo sea deficiente o que la calidad del primer artículo sea superior a la del segundo.

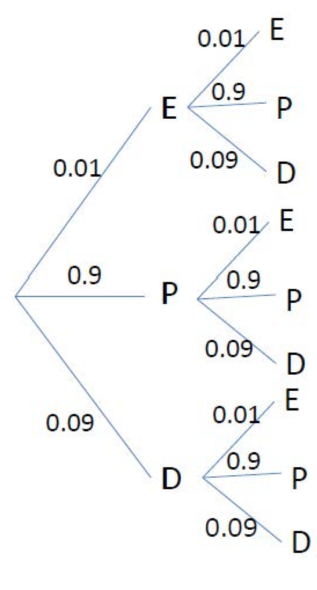
(d) (1.5 puntos) Si se sabe que la calidad de ambos artículos es la misma o la calidad del primer artículo es superior a la del segundo, ¿cuál es la probabilidad de que el primer artículo sea de calidad deficiente?

**Solución:** Los resultados posibles corresponden a las 9 posibles combinaciones formadas por dos de los estados, es decir $S = \{(E,E),(E,P),(E,D),\ldots,(D,E),(D,P),(D,D)\}$, donde E, P y D indican si es artículo seleccionado es de calidad excelente, promedio o deficiente, respectivamente. Los eventos definidos corresponden a

$$\begin{aligned} A &= \{(D,E),(D,P),(D,D)\}, \\ B &= \{(E,E),(P,P),(D,D)\} \\ C &= \{(E,P),(E,D),(P,D)\}. \end{aligned}$$

(a) Observamos que $A \cap B = \{(D,D)\} \neq \emptyset$, luego $A$ y $B$ **no son** mutuamente excluyentes. [**0.5**] $A \cap C = \emptyset$, luego $A$ y $C$ **son** mutuamente excluyentes. [**0.5**] $B \cap C = \emptyset$, luego $B$ y $C$ **son** mutuamente excluyentes. [**0.5**]

(b) La situación puede ser representada a través del árbol:



$$
\begin{aligned}
P(A) &= P((D,E)) + P((D,P)) + P((D,D))) \\
&= 0.09 \times 0.01 + 0.09 \times 0.9 + 0.09 \times 0.09 = 0.09.(^*) \qquad \textbf{[0.2]} \\
P(B) &= P((E,E)) + P((P,P)) + P((D,D))) \\
&= 0.01^2 + 0.9^2 + 0.09^2 = 0.8182. \qquad \textbf{[0.2]} \\
P(C) &= P((E,P)) + P((E,D)) + P((P,D))) \\
&= 0.01 \times 0.9 + 0.01 \times 0.09 + 0.9 \times 0.09 = 0.0909. \qquad \textbf{[0.2]}
\end{aligned}
$$

(*) Sale del enunciado sin necesidad de considerar el segundo ítem.

Por otra parte,

$$P(A \cap B) = P((D,D)) = 0.09^2 = 0.0081 \neq P(A)\ P(B) = 0.09 \times 0.8182 = 0.073638. \qquad \textbf{[0.2]}$$

Luego, $A$ y $B$ **no son** eventos independientes. [**0.2**]

También

$$P(A \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)\ P(C). \qquad \textbf{[0.05]} \text{ por prob. de } \emptyset$$

Luego, A y C **no son** eventos independientes. [**0.2**]

Finalmente,

$$P(B \cap C) = P(\emptyset) = 0[0.1] \neq P(B)\ P(C). \qquad \textbf{[0.05]} \text{ por prob. de } \emptyset$$

Luego, B y C **no son** eventos independientes. [**0.2**]

(c) Se requiere

$$
\begin{aligned}
P(A \cup C) &= P(A) + P(C) \qquad \text{pues } A \text{ y } C \text{ son mutuamente excluyentes} \\
&= 0.09 + 0.0909 = 0.1809.
\end{aligned}
$$

[**0.5**] por identificar lo requerido. [**0.5**] por uso de aditividad. [**0.5**] por resultado.

(d) Se requiere

$$
\begin{aligned}
P(A|B \cup C) &= \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} \qquad \text{por definición de probabilidad condicional } \textbf{[0.2]} \\
&= \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(B \cup C)} \qquad \text{por distributividad } \textbf{[0.3]} \\
&= \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(B) + P(C))} \qquad \text{pues } B \text{ y } C \text{ son mutuamente excluyentes } \textbf{[0.3]} \\
&= \frac{P(A \cap B))}{P(B) + P(C)} \qquad \text{pues } A \cap C = \emptyset \ \textbf{[0.3]} \\
&= \frac{0.073638}{0.8182 + 0.0909} = 0.081. \ \textbf{[0.3]}
\end{aligned}
$$

[**0.1**] por identificar que se requiere $P(A|B \cup C)$.

**[1.0] pto base.**

**Problema 3**
Como es sabido, en el proceso de selección universitaria del año 2013 se ha considerado por primera vez el ranking de notas de Enseñanza Media. Uno de los objetivos buscados con esta medida fue reducir la brecha producto del origen de los seleccionados en cada una de las carreras.
La Universidad Católica llevó a cabo un acucioso estudio en las carreras de mayor demanda - Ingeniería, Medicina y Derecho - en las que los números de seleccionados fueron 700, 200 y 100, respectivamente. En lo que sigue se denomina:

PP: establecimiento particular pagado,
PS: establecimiento particular subvencionado, y
M: establecimiento municipal.

El estudio arrojó que un 70 % de los alumnos seleccionados en estas tres carreras proviene de PP. Además, que en la carrera de Derecho sólo ingresaron alumnos provenientes de PP, mientras que la relación entre número de alumnos de PS o M que entraron a Ingeniería y los que entraron a Medicina es 3:1. Por otra parte, la probabilidad de que un alumno proveniente de PP sea beneficiado por el ranking$^{(*)}$ es 0.3, siendo ésta el doble de la probabilidad de los alumnos restantes, independiente de la carrera en la cual fueron seleccionados.

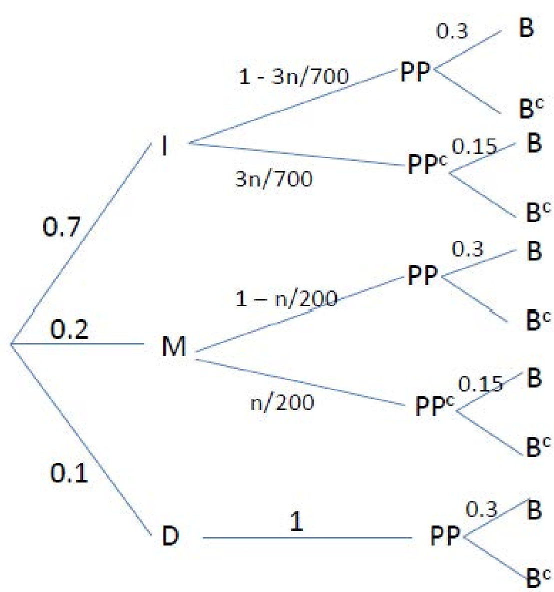
(*): Se considera que un postulante fue beneficiado por el ranking, si obtiene un mayor puntaje con la fórmula 2013 que con la fórmula 2012, es decir, sin considerar el ranking.

(a) (3 puntos) Determine la probabilidad de que un alumno seleccionado al azar de una de estas tres carreras haya sido beneficiado por el ranking.

(b) (3 puntos) ¿Cuántos alumnos de Ingeniería fueron beneficiados por el ranking?

**Solución:** Sean los eventos $I, M$, y $D$, cuya ocurrencia indica que el alumno seleccionado proviene de la carrera de Ingeniería, Medicina o Derecho, respectivamente. Sean los eventos $PP$: "el alumno seleccionado proviene de un establecimiento particular pagado", $B$: "el alumno seleccionado fue beneficiado por el uso del ranking".

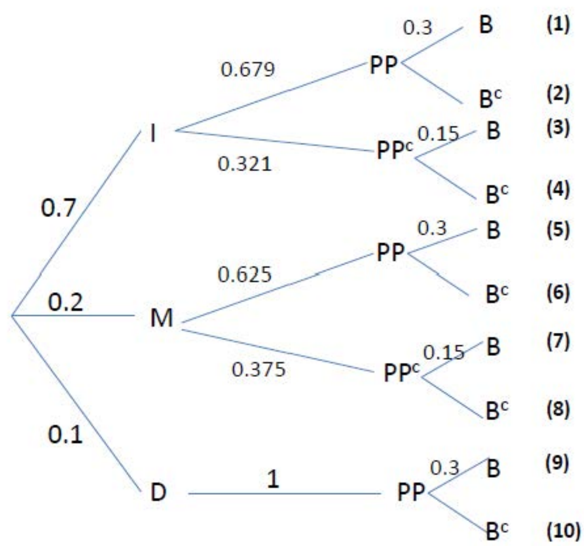
(a) **Alternativa 1:** La situación está representada en el siguiente árbol, donde $n$ representa el número de alumnos de Medicina que provienen de PS o M. (Notamos que $PS \cup M = \bar{PP}$).



Para encontrar $n$ utilizamos que se nos dice que $P(PP) = 0.7$. Desde el árbol vemos entonces que:

$$0.7 \quad = \quad 0.7 \times \left(1 - \frac{3n}{700}\right) + 0.2 \times \left(1 - \frac{n}{200}\right) + 0.1 \times 1.$$

Despejando $n$, se obtiene que el número de alumnos de Medicina que proviene de PS o M corresponde a $n = 75$. De acuerdo a esto, reescribimos el árbol:




Con esto, desde el árbol sumando las ramas (1), (3), (5), (7) y (9), leemos que

$$\begin{aligned} P(B) &= 0.3 \times 0.679 \times 0.7 + 0.15 \times 0.321 \times 0.7 + 0.3 \times 0.625 \times 0.2 \\ &\quad +0.15 \times 0.375 \times 0.2 + 0.3 \times 1 \times 0.1 \\ &= 0.14259 + 0.033705 + 0.0375 + 0.01125 + 0.03 = 0.255. \end{aligned} \tag{2}$$

**Alternativa 2:** Utilizamos el Teorema de Probabilidad Total, con la partición

$$(I \cap PP), (I \cap \bar{P}P), (M \cap PP), (M \cap \bar{P}P), (D \cap PP).$$

(el evento $D \cap \bar{P}P$ corresponde al conjunto vacío). Es decir,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|I \cap PP)\ P(I \cap PP) + P(B|I \cap \bar{P}P)\ P(I \cap \bar{P}P) \\ &\quad +P(B|M \cap PP)\ P(M \cap PP) + P(B|M \cap \bar{P}P)\ P(M \cap \bar{P}P) \\ &\quad +P(B|D \cap PP)\ P(D \cap PP). \end{aligned} \tag{3}$$

Sabemos:

$$\begin{aligned} P(B|I \cap PP) &= P(B|M \cap PP) = P(B|D \cap PP) = P(B|PP) = 0.3 \\ P(B|I \cap \bar{P}P) &= P(B|M \cap \bar{P}P) = P(B|\bar{P}P) = 0.15. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$P(I \cap PP) = P(I)\ P(PP|I) = 0.7 \times \frac{700 - 225}{700} = 0.475 \tag{4}$$

$$P(I \cap \bar{P}P) = P(I) - P(I \cap PP) = 0.7 - 0.475 = 0.225 \tag{5}$$

$$P(M \cap PP) = P(M)\ P(PP|M) = 0.2 \times \frac{200 - 75}{200} = 0.125 \tag{6}$$

$$P(M \cap \bar{P}P) = P(M) - P(M \cap PP) = 0.2 - 0.125 = 0.075 \tag{7}$$

$$P(D \cap PP) = P(D)\ P(PP|D) = P(D) = 0.1. \tag{8}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (3), obtenemos $P(B) = 0.255$.

Puntajes:

**A través de Árbol**

- **[0.6]** $n = 75$ alumnos $\bar{P}P$ en Medicina (o equivalente).
- **[0.2]** $P(PP|I) = 0.679$ o complemento.
- **[0.2]** $P(PP|M) = 0.625$ o complemento.
- **[0.3]** Árbol.
- **[0.3]** Por cada uno de los 5 términos en la suma en (2) (basta con los factores, no es necesario resultados).
- **[0.2]** resultado $P(B) = 0.255$.

**A través de fórmula Teo Prob. Total.**

- **[0.6]** $n = 75$ alumnos $\bar{P}P$ en Medicina (o equivalente).
- **[0.4]** Por fórmula en (3).
- **[0.15]** $P(B|PP \cap I), P(B|PP \cap M), P(B|PP \cap D)$.
- **[0.15]** $P(B|\bar{PP} \cap I), P(B|\bar{PP} \cap M)$.
- **[0.3]** por cada uno de resultados (4) a (8).
- **[0.2]** resultado $P(B) = 0.255$.

(b) Necesitamos primero

$$P(B|I) = \frac{P(B \cap I)}{P(I)}$$

**Alternativa 1:**

A partir del árbol obtenemos el numerador sumando las ramas (1) y (3), y en el denominador reconocemos que $P(I) = 0.7$ (lo que también puede obtenerse sumando las ramas (1) a (4)). De esta forma,

$$\begin{aligned} P(B|I) &= \frac{0.3 \times 0.679 \times 0.7 + 0.15 \times 0.321 \times 0.7}{0.3 \times 0.679 \times 0.7 + 0.7 \times 0.679 \times 0.7 + 0.15 \times 0.321 \times 0.7 + 0.85 \times 0.321 \times 0.7} \qquad (9) \\ &= \frac{0.176295}{0.7} = 0.252. \end{aligned}$$

(También puede obtenerse directamente como:

$$P(B|I) = 0.3 \times 0.679 + 0.15 \times 0.321 = 0.252.$$

)

**Aternativa 2:**

Utilizando el Teorema de Probabilidad Total con la partición $PP$, $\bar{P}P$,

$$\begin{aligned} P(B|I) &= P(B|I \cap PP)\ P(PP|I) + P(B|I \cap \bar{P}P)\ P(\bar{P}P|I) \\ &= P(B|PP)\ P(PP|I) + P(B|\bar{P}P)\ P(PP|I) \qquad (10) \\ &= 0.3 \times 0.679 + 0.15 \times 0.321 = 0.252. \qquad (11) \end{aligned}$$

Finalmente, el número de alumnos de Ingeniería que se vio beneficiado por el uso del ranking corresponde aproximadamente a $0.252 \times 700 \approx 176$.

Puntajes:

**A través de Árbol**

- **[1.0]** numerador en (9).
- **[1.0]** denominador en (9).
- **[0.5]** $P(B|I) = 0.252$.
- **[0.5]** $\approx 176$.

**A través de teorema**

- **[1.0]** fórmula en (10).
- **[0.5]** por cada uno de los dos términos en (11).
- **[0.5]** $P(B|I) = 0.252$.
- **[0.5]** $\approx 176$.

**[1.0] punto base**

**Problema 4**
Anoche debutó por las Clasificatorias al mundial de Brasil 2014 el sistema de control de identidad del plan *Estadio Seguro* que la actual administración ha impulsado en el último tempo, con el objetivo de devolver el fútbol a las familias. El sistema consiste en la instalación de 92 torniquetes, parecidos a los del metro, en los tres ingresos habilitados: 24 en avenida Maratón, 56 en avenida Grecia, y 12 en la calle Guillermo Mann. Un lector de código indicará si el hincha tiene o no causas pendientes con la justicia, lo que filtrará el acceso al estadio y lo hará más seguro. Suponga que la mitad de los lectores son muy sensibles a cualquier alteracventoión que pueda tener la cédula de identidad, por ejemplo rayas o suciedad sobre el código, lo que hace que la lectura demore más de la cuenta o que simplemente no se pueda realizar. El encargado del plan supo de este detalle a última hora, por lo que dio la instrucción de distribuir los lectores de manera aleatoria en los tres accesos, pensando que con esto las proporciones de lectores deficientes en cada una de las puertas serían las mismas. ¿Cuál es la probabilidad que esto realmente ocurra?

**Solución:**

**Casos Totales: Etapa 1**: De los 92 torniquetes elegimos 24 para acceso Avenida Maratón:

$$\binom{92}{24}.$$

**Etapa 2**: De los (92 - 24) = 68 torniquetes restantes elegimos 56 para acceso Avenida Grecia:

$$\binom{68}{56}.$$

**Etapa 3**: De los (68 - 56) = 12 torniquetes restantes elegimos 12 para acceso calle Gmo. Mann: sólo 1 manera.
De este modo, los casos totales son:

$$\#S = \binom{92}{24} \times \binom{68}{56}.$$

**[0.9] por cada uno de los dos factores.**
**Casos Favorables:** Dado que la mitad de los torniquetes (46) son defectuosos, mantener las proporciones iguales en los tres accesos significa que en cada uno de ellos, la mitad de los torniquetes debe ser defectuoso. Para ello, dividimos los 92 torniquetes en dos grupos: los 46 defectuosos y los 46 no defectuosos:

**Etapa 1**: Para Avenida Maratón: de los 46 torniquetes defectuosos elegimos 12, y de los 46 torniquetes no defectuosos elegimos 12:

$$\binom{46}{12} \times \binom{46}{12}.$$

**Etapa 2**: Para Avenida Grecia: de los (46 - 12) = 34 torniquetes defectuosos elegimos 28, y de los (46 - 12) = 34 torniquetes no defectuosos elegimos 28:

$$\binom{34}{28} \times \binom{34}{28}.$$

**Etapa 3**: Para calle Gmo. Mann: de los (34 - 28) = 6 torniquetes defectuosos elegimos 6, y de los (34 - 28) = 6 torniquetes no defectuosos elegimos 6: sólo una manera.
De este modo, los casos favorables son:

$$\#A = \binom{46}{12}^2 \times \binom{34}{28}^2.$$

**[0.9] por cada uno de los cuatro factores.**

Finalmente, la probabilidad pedida es:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{\binom{46}{12}^2 \binom{34}{28}^2}{\binom{92}{24}\binom{68}{56}}. \qquad [\mathbf{0.6}]$$

**[1.0] pto. base**

**Tiempo: 2 Horas**

# Formulario

### Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de $k$ experimentos con tamaños muestrales $n_1, \ldots, n_k$, entonces

$$S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

### Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de $r$ objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: $n^r$.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$.

### Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño $r$ son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

### Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar $n$ objetos a $k$ grupos distintos de tamaños $n_1, \ldots, n_k$, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1 \, n_2 \, \cdots \, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!} \, x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$