Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2013

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Interrogación	**:**	**2**
Profesor	**:**	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)**
Ayudantes	**:**	**Daniela Castro, Fabián Fuentealba, Genaro Olave, Claudia Reyes.**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

En la transmisión de gas natural resulta relevante controlar las presiones interna, X, y externa, Y, dentro de las tuberías conductoras. Se sabe que el comportamiento de estas dos variables queda determinado por la función de densidad conjunta:

$$f_{xy}(x,y) = \frac{c}{x}, \qquad 27 < y < x < 33,$$

para una constante c dada, y cero en otro caso. Ambas variables se encuentran expresadas en libras/pulgada^2.

a) [2 puntos] Obtenga la densidad no condicional, o marginal, de la presión interna de las tuberías.

b) [2 puntos] Obtenga la densidad condicional de la presión interna de las tuberías, cuando la presión externa toma un valor fijo $Y = y$.

c) [2 puntos] Determine la probabilidad de que la presión interna de las tuberías sea mayor a 32 cuando la presión externa es igual a 30.

Solución:

a) Previamente, necesitamos el valor de la constante c, para lo que imponemos la condición:

$$\begin{aligned} & \int_{27}^{33}\int_{27}^{x} \frac{c}{x}\, dy\, dx = 1 \qquad \textbf{[0.4]} \\ \iff \quad & \int_{27}^{33} \frac{c}{x}(x-27)\, dx = 1 \\ \iff \quad & c\left[(33-27) - 27\log(33/27)\right] = 1 \\ \iff \quad & c = 1,719. \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

Se pide:

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int f_{xy}(x,y)\, dy = \int_{27}^{x} \frac{c}{x}\, dy \qquad \textbf{[0.4]} \\ &= \frac{1,719}{x}(x-27), \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

cuando $27 < x < 33$, cero en otro caso. **[0.4]**

b) Se necesita previamente:

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \int f_{xy}(x,y)\,dx = \int_y^{33} \frac{c}{x}\,dx \qquad \textbf{[0.4]} \\ &= c\,\log(33/y), \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

cuando $27 < y < 33$, cero en otro caso. **[0.3]** Luego,

$$\begin{aligned} f_{x|Y=y}(x) &= \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)} = \frac{c/x}{c\log(33/y)} \\ &= \frac{1}{x\,\log(33/y)}, \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

cuando $y < x < 33$, cero en otro caso. **[0.4]**

c) Se pide:

$$\begin{aligned} P(X > 32|Y = 30) &= \int_{32}^{33} f_{x|Y=30}(x)\,dx \qquad \textbf{[0.7]} \\ &= \frac{1}{\log(33/30)} \int_{32}^{33} \frac{1}{x}\,dx \qquad \textbf{[0.7]} \\ &= \frac{\log(33/32)}{\log(33/30)} \qquad \textbf{[0.6]} \\ &= 0.323. \end{aligned}$$

Importante: Al plantear integrales, los límites de integración deben estar correctos para obtener el puntaje asignado.

[1.0] punto base

Problema 2

Sea X el precio que paga un distribuidor por tonelada de producto, e Y el valor al cual vende esta tonelada. Estas variables siguen una distribución conjunta con función de densidad dada por:

$$f_{xy}(x,y) = c, \qquad 20 < x < y < 40,$$

cero en otro caso.

a) [2 puntos] Obtenga $E(Y - X)$. Interprete su resultado.

b) [2 puntos] Determine la covarianza entre los precios de compra y de venta de la tonelada de producto. ¿Es el signo de esta covarianza consistente con lo esperado? Justifique.

c) [2 puntos] Verifique que se cumple la propiedad general $E(X) = E(E(X|Y))$, encontrando las esperanzas mencionadas.

Solución:

a) Como $E(Y - X) = E(Y) - E(X) \Rightarrow$ E(Venta) - E(Compra)
Es decir, representa el margen de utilidad o de comercialización, [**0.2**]

Para obtener las E(), se requieren las densidades marginales de X e Y. Requerimos previamente el valor de la constante c, el que se obtiene imponiendo la condición:

$$\begin{aligned}
& \int_{20}^{40}\int_{x}^{40} c\,dy\,dx = 1 \qquad [\mathbf{0.2}] \\
\iff\quad & \int_{20}^{40} c(40-x)\,dx = 1 \\
\iff\quad & c\left[40(40-20) - \frac{1}{2}(40^2 - 20^2)\right] = 1 \\
\iff\quad & c = 0,005. \qquad [\mathbf{0.1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_x(x) &= \int f_{xy}(x,y)\,dy = \int_x^{40} c\,dy \qquad [\mathbf{0.2}] \\
&= c(40-x), \qquad [\mathbf{0.1}]
\end{aligned}$$

cuando $20 < x < 40$, cero en otro caso.[**0.1**] Por otra parte,

$$\begin{aligned}
f_y(y) &= \int f_{xy}(x,y)\,dx = \int_{20}^{y} c\,dy \qquad [\mathbf{0.2}] \\
&= c(y-20), \qquad [\mathbf{0.1}]
\end{aligned}$$

cuando $20 < y < 40$, cero en otro caso. [**0.1**] Luego,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{20}^{40} x\,c(40-x)\,dx \qquad [\mathbf{0.2}] \\
&= c\left[\frac{40}{2}(40^2 - 20^2) - \frac{1}{3}(40^3 - 20^3)\right] \\
&= 5.333,33\,c = 26,67. \qquad [\mathbf{0.1}] \\
E(Y) &= \int_{20}^{40} y\,c(y-20)\,dy \qquad [\mathbf{0.2}] \\
&= c\left[\frac{1}{3}(40^3 - 20^3) - \frac{20}{2}(40^2 - 20^2)\right] \\
&= 6.666,67\,c = 33,33. \qquad [\mathbf{0.1}]
\end{aligned}$$

Luego, la esperanza pedida corresponde a:

$$E(Y - X) = 33,33 - 26,67 = 6,66. \qquad \textbf{[0.1]}$$

b) Necesitamos previamente:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{20}^{40}\int_{x}^{40} xyc\,dy\,dx \qquad \textbf{[0.5]} \\ &= c\int_{20}^{40} x\frac{1}{2}(40^2 - x^2)\,dx \\ &= \frac{c}{2}\left[\frac{40^2}{2}(40^2 - 20^2) - \frac{1}{4}(40^4 - 20^4)\right] \\ &= 900. \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \qquad \textbf{[0.5]} \\ &= 900 - 26,67 \times 33,33 \\ &= 11,09. \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

El signo positivo responde a lo esperado, ya que el modelo dice que Y siempre es mayor que X, luego cuando X crece esperaríamos que Y también lo hiciera. **[0.2]**

c) Primero obtenemos:

$$f_{x|Y=y}(x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)} = \frac{c}{c(y-20)} = \frac{1}{y-20}, \qquad \textbf{[0.4]}$$

cuando $20 < x < y$, cero en otro caso. De este modo:

$$\begin{aligned} E(X|Y=y) &= \int_{20}^{y} x\,\frac{1}{y-20}\,dx \qquad \textbf{[0.4]} \\ &= \frac{1}{2(y-20)}(y^2 - 20^2) = \frac{1}{2}(y+20). \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &= \int_{20}^{40} \frac{1}{2}(y+20)f_y(y)\,dy \qquad \textbf{[0.4]} \\ &= \frac{1}{2}\int_{20}^{40} c(y+20)(y-20)\,dy \\ &= \frac{c}{2}\int_{20}^{40}(y^2 - 20^2)\,dy \\ &= \frac{c}{2}\left[\frac{1}{3}(40^3 - 20^3) - 20^2(40-20)\right] \\ &= 26,67, \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

igual a $E(X)$ obtenida en parte a).

Importante: Al plantear integrales, los límites de integración deben estar correctos para obtener el puntaje asignado.

[1.0] punto base

Problema 3

PARTE I
Suponga las variables aleatorias independientes X e Y, ambas con distribución Uniforme(0,1).

a) [2 puntos] Encuentre la función de densidad de la diferencia entre estas dos variables, $Z = X - Y$.

b) [2 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que esta diferencia esté entre -0,3 y 0.2?

Solución:

a) Tenemos $Z = g(X, Y) = X - Y$. Luego,

$$X = g^{-1}(Z) = Z + Y.$$

De este modo,

$$\|\frac{dg^{-1}(z)}{dz}\| = |1| = 1. \qquad \textbf{[0.3]}$$

Por otra parte,

$$f_{xy}(x, y) = 1, \qquad \textbf{[0.2]}$$

cuando $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, cero en otro caso. Distinguiremos los casos $0 \leq z \leq 1$ y $-1 \leq z < 0$.

Caso $0 \leq z \leq 1$**:**

Tenemos $x = y + z \leq 1$. Luego $0 \leq y \leq 1 - z$. De este modo:

$$f_z(z) = \int_0^{1-z} dy = 1 - z. \qquad \textbf{[0.6]}$$

Caso $-1 \leq z < 0$**:**

Tenemos $y = x - z \geq -z$. Luego $-z \leq y \leq 1$. De este modo:

$$f_z(z) = \int_{-z}^{1} dy = 1 + z, \qquad \textbf{[0.6]}$$

y $f_z(z) = 0$, en cualquier otro caso. **[0.3]**

b) Se pide:

$$\begin{aligned}
P(-0.3 \leq Z \leq 0,2) &= \int_{-0,3}^{0.2} f_z(z)\, dz \qquad \textbf{[0.5]} \\
&= \int_{-0,3}^{0} (1 + z)\, dz + \int_0^{0,2} (1 - z)\, dz \qquad \textbf{[1.0]} \\
&= (0 + 0,3) - \frac{1}{2} 0,3^2 + 0,2 - \frac{1}{2} 0,2^2 \qquad \textbf{[0.5]} \\
&= 0,435.
\end{aligned}$$

PARTE II
Cierta tarea productiva requiere del cumplimiento de tres etapas, donde los tiempos utilizados en completar cada una de ellas siguen distribuciones Normales, de medias 15, 20 y 8 minutos, y desviaciones estándar respectivas de 4, 3 y 2 minutos. Los tiempos requeridos por cada una de estas tres etapas se encuentran correlacionados, de modo que la correlación entre los tiempos utilizados en la primera y segunda etapa es de -0,40, entre la primera y tercera etapa es de 0,20 , y entre la segunda y tercera etapa es -0.55.

c) [2 puntos] Determine la probabilidad de que el tiempo total requerido para finalizar la tarea sea mayor a 40 minutos.

Solución: El tiempo total requerido para terminar la tarea corresponde a $X = X_1 + X_2 + X_3$, donde $X_1 \sim \text{Normal}(15,\ 4)$, $X_2 \sim \text{Normal}(20,\ 3)$ y $X_3 \sim \text{Normal}(8,\ 2)$. Las correlaciones entre estas variables corresponden a:

$$\rho_{12} = -0,40, \qquad \rho_{13} = 0,10, \qquad \rho_{13} = -0.55.$$

La variable X distribuye Normal **[0.2]**, con media y desviación estándar dadas por:

$$\begin{aligned}
\mu_x &= 15 + 20 + 8 = 43 \qquad \textbf{[0.4]} \\
\sigma_x^2 &= 4^2 + 3^2 + 2^2 + 2 \times (-0,4) \times 4 \times 3 + 2 \times 0,2 \times 4 \times 2 + 2 \times (-0,55) \times 3 \times 2 \\
&= 16 \qquad \textbf{[0.9]}^{(1)} \\
\sigma &= 4. \qquad \textbf{[0.1]}
\end{aligned}$$

De este modo, la probabilidad pedida corresponde a:

$$\begin{aligned}
P(X > 40) &= 1 - \phi\left(\frac{40 - 43}{4}\right) \qquad \textbf{[0.2]} \\
&= 1 - \phi(-0,75) \\
&= \phi(0,75) \qquad \textbf{[0.1]} \\
&= 0,773. \qquad \textbf{[0.1]}
\end{aligned}$$

(1) : **[0.1]** por cada ($varianza^2$), **[0.2]** por cada término de covarianza.

[1.0] punto base

Problema 4

a) [3 puntos] Un test está compuesto por 50 preguntas de cuatro alternativas cada una. Para cada una de las preguntas, una de las alternativas es completamente correcta, una es parcialmente correcta, y las dos alternativas restantes son incorrectas, obteniéndose puntajes de 2, 1 y -1 puntos, respectivamente, en caso de contestar cada una de ellas. De acuerdo a estudios previos, un alumno responde de acuerdo a las siguientes probabilidades:

Estado	Puntaje	Probabilidad
Completamente correcta	2	0,2
Parcialmente correcta	1	0,3
Incorrecta	-1	0,5

Determine la probabilidad aproximada de que, al responder las 50 preguntas, este alumno obtenga, al menos, 20 puntos.

Solución: Sea X_i el puntaje obtenido en la pregunta $i = 1, \ldots, 50$. Se requiere previamente:

$$\begin{aligned}
\mu &= E(X_i) = 2 \times 0,2 + 1 \times 0,3 - 1 \times 0,5 \\
&= 0,2. \qquad \textbf{[0.3]} \\
E(X_i^2) &= 2^2 \times 0,2 + 1^2 \times 0,3 + (-1)^2 \times 0,5 \\
&= 1,6. \qquad \textbf{[0.3]} \\
\sigma &= \sqrt{1,6 - 0,2^2} = 1,249. \qquad \textbf{[0.3]}
\end{aligned}$$

El Teorema del Límite Central dice que el puntaje total en el test, $\sum_{i=1}^{50} X_i$ distribuye aproximadamente Normal con media

$$n\mu = 50 \times 0,2 = 10, \qquad \textbf{[0.6]}$$

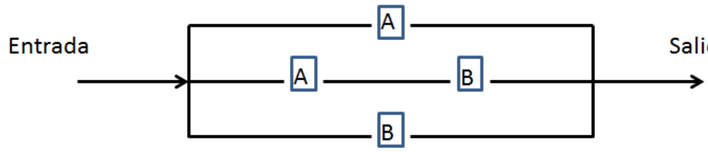
y desviación estándar

$$\sqrt{n}\sigma = \sqrt{50} \times 1,249 = 8,832. \qquad \textbf{[0.6]}$$

Luego, la probabilidad pedida puede ser aproximada como:

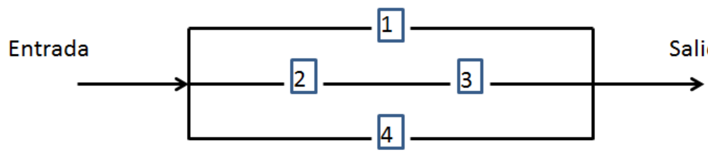
$$\begin{aligned}
P(\sum X_i \geq 20) &\approx 1 - \phi\left(\frac{20-10}{8,832}\right) \qquad \textbf{[0.6]} \\
&= 1 - \Phi(1,132) \\
&= 1 - 0,8712 \qquad \textbf{[0.3]} \\
&= 0,1288.
\end{aligned}$$

b) Considere el siguiente circuito, formado por interruptores de tipos A y B.



Los tiempos, en segundos, que permanecen encendidos los interruptores de tipos A y B siguen distribuciones Exponenciales de parámetros 1/6 y 1/12, respectivamente, siendo todos ellos independientes. Determine la probabilidad de que la corriente fluya por el circuito por, al menos, 10 segundos.

Solución: Identificaremos los tiempos encendidos de los interruptores utilizando como subíndices los números indicados en la figura:



De este modo,

$$T_1, T_2 \overset{iid}{\sim} Exp(1/6)$$
$$T_3, T_4 \overset{iid}{\sim} Exp(1/12).$$

Para que la corriente fluya por, al menos, 10 segundos se requiere:

$$(T_1 \geq 10) \;\text{ o }\; (T_2 \geq 10 \;\text{ y }\; T3 \geq 10) \;\text{ o }\; (T_4 \geq 10), \qquad [\mathbf{0.2}]$$

es decir,

$$\max\{T_1, \min\{T_2, T_3\}, T_4\} \geq 10. \qquad [\mathbf{0.6}]$$

La probabilidad de que esto ocurra corresponde a:

$$\begin{aligned} P(\max\{T_1, \min\{T_2, T_3\}, T_4\} \geq 10) &= 1 - P(\max\{T_1, \min\{T_2, T_3\}, T_4\} < 10) \qquad [\mathbf{0.2}] \\ &= 1 - P(T_1 < 10)\; P(\min\{T_2, T_3\} < 10)\; P(T_4 < 10). \qquad [\mathbf{0.5}] \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} P(T_1 < 10) &= 1 - e^{-10/6} = 0,811 \qquad [\mathbf{0.2}] \\ P(\min\{T_2, T_3\} < 10) &= 1 - P(\min\{T_2, T_3\} \geq 10) \qquad [\mathbf{0.2}] \\ &= 1 - P(T_2 \geq 10)P(T_3 \geq 10) \qquad [\mathbf{0.5}] \\ &= 1 - e^{-10/6}e^{-10/12} = 0,918 \qquad [\mathbf{0.2}] \\ P(T_4 < 10) &= 1 - e^{-10/12} = 0,565. \qquad [\mathbf{0.2}] \end{aligned}$$

De este modo:

$$\begin{aligned} P(\max\{T_1, \min\{T_2, T_3\}, T_4\} > 10) &= 1 - 0,811 \times 0,918 \times 0,565 \\ &= 0,579. \qquad [\mathbf{0.2}] \end{aligned}$$

[1.0] punto base

Tiempo: 2 Horas

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Formulario

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\,e^{-u}\,du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$:

$$(1) \quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2) \quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998