Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2011

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Pauta	:	**Examen**
Profesor	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ricardo Olea (Sec. 2)**
Ayudantes	:	**Erwin Agüero Meza, Tamara Fernandez Aguilar y Claudia Reyes Vizcarra.**

Problema 1

Consideremos el valor de una acción de una empresa que se transa en la Bolsa de Santiago en un instante t. Se define el retorno de la acción en el instante t como la ganancia (o perdida) porcentual al invertir en $t-1$ y vender en t, es decir,

$$X_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

con P_t el valor de la acción en t. Este retorno se comporta como una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es Normal de media cero con una varianza que depende de la variabilidad, Y_{t-1}, del mercado en el día anterior. Un investigador propone que los retornos de esta acción pueden ser representados como sigue:

$$X_t \,|\, Y_{t-1} = y \sim \text{Normal}(0,\, 1/\sqrt{y}), \quad Y_{t-1} \sim \text{Gamma}(k,\, \nu)$$

con $k > 1$ y $\nu > 0$.

(a) **[1.5 Ptos]** Muestre que

$$f_{X_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k)}\,\frac{\nu^k}{\left(\nu + \frac{x^2}{2}\right)^{k+1/2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(b) **[1.5 Ptos]** Calcule la esperanza y varianza del retorno de la acción en un instante t.

(c) **[1.5 Ptos]** Determine la distribución de Y_{t-1} condicionada a que $X_t = x$. Reconozca el modelo e identifique sus parámetros.

(d) **[1.5 Ptos]** Si $k = 3/2$ y $\nu = 1$, calcule $P(Y_{t-1} \leq 1/2 \,|\, X_t = \sqrt{2})$.

Solución

(a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
f_{X_t}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_t,\,Y_{t-1}}(x,y)\,dy \quad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_t\,|\,Y_{t-1}=y}(x)\cdot f_{Y_{t-1}}(y)\,dy \quad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\frac{1}{y}}}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{1/\sqrt{y}}\right)^2\right]\,\frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,y^{k-1}\,\exp(-\nu\,y)\,dy \quad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\int_0^{\infty} y^{(k+1/2)-1}\,\exp\left[-y\left(\nu + \frac{x^2}{2}\right)\right]\,dy \quad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,\frac{\Gamma(k+1/2)}{\left(\nu+\frac{x^2}{2}\right)^{k+1/2}}\int_0^{\infty}\frac{\left(\nu+\frac{x^2}{2}\right)^{k+1/2}}{\Gamma(k+1/2)}\,y^{(k+1/2)-1}\,\exp\left[-y\left(\nu+\frac{x^2}{2}\right)\right]\,dy \quad \textbf{[0.2 Ptos]}
\end{aligned}$$

$$f_{X_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,\frac{\Gamma(k+1/2)}{\left(\nu + \frac{x^2}{2}\right)^{k+1/2}} \cdot 1 \quad \textbf{[0.2 Ptos]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k)}\,\frac{\nu^k}{\left(\nu + \frac{x^2}{2}\right)^{k+1/2}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

(b) Se pide

$$\mathbf{E}(X_t) = \mathbf{E}[\mathbf{E}(X_t \,|\, Y_{t-1})] = \mathbf{E}(0) = 0 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(X_t) &= \mathbf{Var}[\mathbf{E}(X_t \,|\, Y_{t-1})] + \mathbf{E}[\mathbf{Var}(X_t \,|\, Y_{t-1})] \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\
&= \mathbf{Var}(0) + \mathbf{E}\left(Y_{t-1}^{-1}\right) \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{y}\,\frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,y^{k-1}\,e^{-\nu\,y}\,dy \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\
&= \int_0^\infty \frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,y^{[k-1]-1}\,e^{-\nu\,y}\,dy \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\
&= \frac{\nu\,\Gamma(k-1)}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{\nu^{k-1}}{\Gamma(k-1)}\,y^{[k-1]-1}\,e^{-\nu\,y}\,dy \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\
&= \frac{\nu\,\Gamma(k-1)}{\Gamma(k)} \cdot 1, \quad \text{ya que } k > 1 \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\
&= \frac{\nu\,\Gamma(k-1)}{(k-1)\,\Gamma(k-1)} \quad \textbf{[0.1 Ptos]} \\
&= \frac{\nu}{k-1} \quad \textbf{[0.2 Ptos]}
\end{aligned}$$

(c) Tenemos que

$$\begin{aligned}
f_{Y_{t-1}\,|\,X_t = x}(y) &= \frac{f_{X_t,\,Y_{t-1}}(x, y)}{f_{X_t}(x)} \quad \textbf{[0.4 Ptos]} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,y^{(k+1/2)-1}\,\exp\left[-y\left(\nu + \frac{x^2}{2}\right)\right]}{\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k)}\,\frac{\nu^k}{\left(\nu + \frac{x^2}{2}\right)^{k+1/2}}} \quad \textbf{[0.4 Ptos]} \\
&= \frac{\left(\nu + \frac{x^2}{2}\right)^{k+1/2}}{\Gamma(k+1/2)}\,y^{(k+1/2)-1}\,\exp\left[-y\left(\nu + \frac{x^2}{2}\right)\right] \quad \textbf{[0.4 Ptos]}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$Y_{t-1} \,|\, X_t = x \sim \text{Gamma}\left(k + 1/2,\, \nu + \frac{x^2}{2}\right) \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

(d) Si $k = 3/2$ y $\nu = 1$, entonces

$$Y_{t-1} \,|\, X_t = \sqrt{2} \sim \text{Gamma}\,(2,\, 2) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
P(Y_{t-1} \leq 1/2 \,|\, X_t = \sqrt{2}) &= 1 - \sum_{z=0}^{2-1} \frac{(2 \cdot 1/2)^z\,e^{-2}}{z!} \quad \textbf{[0.4 Ptos]} \\
&= 1 - e^{-2} - e^{-2} \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\
&= 1 - 2\,e^{-2} \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \\
&= 0{,}7293294 \quad \textbf{[0.2 Ptos]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

(a) Considere la proporción de tiempo, X, utilizado en responder un test de aptitud. Suponga que la función de densidad de X está dada por:

$$f_X(x) = (1+\theta)\,x^{\theta}, \quad 0 < x < 1, \quad -1 < \theta,$$

donde θ denota la habilidad.

a.1 **[1.5 Ptos]** Con base a una muestra $X_1, \ldots, X_n$ determine la distribución asintótica del estimador máximo verosímil de θ.

a.2 **[1.5 Ptos]** Si en una muestra $n = 40$ alumnos, se observa

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 23 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) = -30$$

¿Es evidencia suficiente para afirmar que $\theta > 0$ (habilidad positiva)? (Use $\alpha = 5\,\%$)

(b) Con base a los resultados históricos, donde un 20 % de los alumnos que se presentan al examen no logra aprobar, usted desea calcular:

b.1 **[1.5 Ptos]** La probabilidad exacta que al menos un alumno(a) de su grupo de estudio compuesto por 5 personas repruebe.

b.2 **[1.5 Ptos]** La probabilidad aproximada que a lo más 30 alumno(a)s, de entre los 200 que se presentan al examen, reprueben.

Solución

(a) a.1 Primeramente, obtenemos el estimador máximo verosímil de θ usando la función de verosimilitud

$$L(X_1, \ldots, X_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} (1+\theta)\,X_i^{\theta} = (1+\theta)^n \left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]^{\theta} \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Tomando logaritmo natural

$$\ln\, L(X_1, \ldots, X_n, \theta) = n\,\ln(1+\theta) + \theta \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Derivando e igualando a cero se tiene

$$\frac{\partial}{\partial\,\theta} \ln\, L(\theta) = \frac{n}{1+\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(Xi)} - 1 \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Ahora, para obtener la distribución asintótica calculamos la varianza asintótica:

$$\frac{\partial^2}{\partial\,\theta^2} \ln\, L(\theta) = -\frac{n}{(1+\theta)^2} \Rightarrow \textbf{Var}(\hat{\theta}) = \frac{(1+\theta)^2}{n} \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Por tanto,

$$\hat{\theta} \overset{\text{aprox.}}{\sim} \text{Normal}\left[\theta,\, \frac{(1+\theta)}{\sqrt{n}}\right] \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

a.2 La hipótesis de interés es

$$\mathrm{H}_0 : \theta = 0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \theta > 0, \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

con

$$\hat{\theta} = -\frac{40}{-30} - 1 = \frac{1}{3}, \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

El estadístico de prueba bajo H_0

$$Z_n = \frac{\hat{\theta} - 0}{(1+0)/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{40}}{3} = 2,087 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

distribuye Normal(0,1), por lo tanto

$$\text{valor-p} = P(Z > 2,087) \approx 1 - 0,9817 = 0,0183 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Como el valor-p es menor que $\alpha = 5\,\%$ podemos afirmar que hay evidencia contra H_0, es decir, podemos asumir habilidad positiva. **[0.3 Ptos]**

(b) b.1 Sea X la variable aleatoria que representa al número alumnos que reprueba, es decir,

$$X \sim \text{Binomial}(n,\, p) \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

con $p = 0{,}2$ y $n = 5$. **[0.2 Ptos]**

Nos piden

[0.5 Ptos] $$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot (1 - 0{,}2)^{5-0} = 1 - 0{,}3277 = 0{,}6723$$ **[0.5 Ptos]**

b.2 Tenemos que

$$X \sim \text{Binomial}(n,\, p) \approx \text{Normal}\left(n\,p,\, \sqrt{n\,p\,(1-p)}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

con $p = 0{,}2$ y $n = 200$.

Aplicando corrección por continuidad

[0.5 Ptos] $$P(X \leq 30) = P(X < 30{,}5) \approx \Phi\left(\frac{30{,}5 - 40}{\sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = \Phi(-1{,}68) = 0{,}0465$$ **[0.5 Ptos]**

+ 1 Punto Base

Problema 3

Con base a un análisis de los últimos 100 alumnos que han reprobado el curso EYP1113, se han tabulado los puntajes que ellos habían obtenidos en la PSU-lenguaje, con promedio observado de 700 puntos, como se muestra a continuación:

Categoría	≤ 620	$(620 - 680]$	$(680 - 710]$	$(710 - 740]$	> 740
Freciencia	12	18	24	24	22

(a) **[3.0 Ptos]** ¿Se adecúan a una distribución normal, con una desviación estándar conocida e igual a 60? Especifique hipótesis, obtenga el test y su respectiva conclusión. (Utilice tres decimales en sus cálculos)

(b) **[1.0 Ptos]** Basado en los resultados anteriores, determine un intervalo de confianza al 90 % para el puntaje medio PSU-L.

(c) **[2.0 Ptos]** Con el objeto de profundizar el estudio se requiere determinar el tamaño de muestra mínimo que permita estimar el puntaje medio con un error no mayor a 5 puntos y con un 95 % de confianza. ¿Que tamaño muestral propondría usted?

Solución

(a) La hipótesis es

$$\text{H}_0 : \text{Datos} \sim \text{Normal}(\mu,\, \sigma) \quad \text{vs} \quad \text{H}_a : \text{Datos} \not\sim \text{Normal}(\mu,\, \sigma)$$

Del enunciado tenemos que

$$\hat{\mu} = 700 \quad \text{y} \quad \sigma = 60 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Categoría	Frecuencia (O)	Probabilidad Estimada	Frecuencia Estimada (E)	$(O - E)^2/E$
≤ 620	12	0,0912	9,12	0,909
$(620 - 680]$	18	0,2783	27,83	3,472
$(680 - 710]$	24	0,1967	19,67	0,953
$(710 - 740]$	24	0,1813	18,13	1,901
> 740	22	0,2525	25,25	0,418
Σ	100,000	1,000	100,000	7,653
		[0.5 Ptos]	**[0.5 Ptos]**	**[0.5 Ptos]**

El estadístico de prueba

$$X^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 7{,}653 \sim \chi^2(\nu) \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

con $\nu = (5 - 1) - 1 = 3$, ya que solo se estimo un parámetro. **[0.2 Ptos]**

De la tabla chi-cuadrado tenemos que

$$5\,\% < \text{valor-p} < 10\,\% \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Por lo tanto para un error tipo I del 5 %, no existe suficiente evidencia para rechazar que los datos distribuyen Normal.

(b) Basado en el teorema del límite central, tenemos que

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{aprox.}}{\sim} \text{Normal}(0,\, 1)$$

Por lo tanto, un intervalo de confianza para el puntaje medio μ está dado por

$$\begin{aligned} <\mu>_{1-\alpha} &\in \overline{X} \pm k_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\ &\in 700 \pm 1{,}645 \cdot \frac{60}{\sqrt{100}} \quad \textbf{[0.3 Ptos]} \\ &\in (690{,}13 - 709{,}87) \quad \textbf{[0.2 Ptos]} \end{aligned}$$

(c) Se pide

$$\textbf{[1.0 Ptos]} \quad n = \left(\frac{k_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96\cdot 60}{5}\right)^2 = 553{,}1904 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Se propone un mínimo de 554 casos. **[0.5 Ptos]**

+ 1 Punto Base

Formulario

- Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de probabilidad p_X o de densidad f_X, determinada por un parámetro θ. Si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil del parámetro θ, entonces:

  - $\mathbf{E}(\hat{\theta}) \to \theta$, cuando $n \to \infty$.
  - $\mathbf{Var}(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{I_n(\theta)}$, con $I_n(\theta) = -\mathbf{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}\,\ln L(\theta)\right]$.
  - $\hat{\theta} \,\dot{\sim}\, \text{Normal}\left(\theta,\, \sqrt{\dfrac{1}{I_n(\theta)}}\right)$, cuando $n \to \infty$.
  - El estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$, cuya varianza está dada por: $\mathbf{Var}[g(\hat{\theta})] = \dfrac{\left[g'(\theta)\right]^2}{I_n(\theta)}$.

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\,e^{-u}\,du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$:

$$(1)\quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2)\quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\,\nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\,b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \dfrac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$
1	3,078	6,314	12,706	31,821
2	1,886	2,920	4,303	6,965
3	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,476	2,015	2,571	3,365
6	1,440	1,943	2,447	3,143
7	1,415	1,895	2,365	2,998
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764
11	1,363	1,796	2,201	2,718
12	1,356	1,782	2,179	2,681
13	1,350	1,771	2,160	2,650
14	1,345	1,761	2,145	2,624
15	1,341	1,753	2,131	2,602
16	1,337	1,746	2,120	2,583
17	1,333	1,740	2,110	2,567
18	1,330	1,734	2,101	2,552
19	1,328	1,729	2,093	2,539
20	1,325	1,725	2,086	2,528
21	1,323	1,721	2,080	2,518
22	1,321	1,717	2,074	2,508
23	1,319	1,714	2,069	2,500
24	1,318	1,711	2,064	2,492
25	1,316	1,708	2,060	2,485
26	1,315	1,706	2,056	2,479
27	1,314	1,703	2,052	2,473
28	1,313	1,701	2,048	2,467
29	1,311	1,699	2,045	2,462
30	1,310	1,697	2,042	2,457
∞	1,282	1,645	1,960	2,326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$

ν	$c_{0,025}$	$c_{0,05}$	$c_{0,10}$	$c_{0,90}$	$c_{0,95}$	$c_{0,975}$	$c_{0,99}$	$c_{0,995}$
1	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93