Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2014

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I2**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

Si en un negocio, el monto esperado por cada compra es de $50 mil pesos con una desviación estándar igual a $20 mil pesos. Determine el número mínimo aproximado de compras que deben realizarse a objeto que el monto total sea superior a tres millones con una probabilidad no inferior al 90 %. Considere que los montos de las compras son independiente entre si.

Solución

Definamos como $X_1, \ldots, X_k$ una secuencia de variables aleatorias que representan compras. Del enunciado se tiene que estas variables aleatorias son independientes y proveniente de la misma distribución.

Además se tiene que

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \qquad \mu = \mathrm{E}(X_i) = 50.000 \qquad \text{y} \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X_i)} = 20.000 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Por el teorema del límite central se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(k\,\mu,\, \sqrt{k}\,\sigma) \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
\textbf{[1.0 Ptos]} \qquad P\left(\sum_{i=1}^{k} X_i > 3.000.000\right) \geq 0.9 &\Rightarrow \Phi\left(\frac{3.000.000 - k \cdot 50.000}{\sqrt{k} \cdot 20.000}\right) \leq 0.1 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&\Rightarrow \Phi\left(\frac{300 - 5\,k}{2\,\sqrt{k}}\right) \leq 0.1 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&\Rightarrow \frac{300 - 5\,k}{2\,\sqrt{k}} \leq -1.28 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&\Rightarrow 0 \leq 5\,k - 2.56\,\sqrt{k} - 300 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&\Rightarrow 0 \leq k - 0.512\,\sqrt{k} - 60 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

Resolviendo se tiene que

$$\sqrt{k_1} = 8.006196 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{k_2} = -7.494196 \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

Luego el mínimo valor de k que cumple la desigualdad sería 64.09917, es decir, se requieren 65 compras por lo menos. **[0.2 Ptos]**

+ 1 Punto Base

Problema 2

Dos variables aleatorias continuas X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \nu^2\, e^{-\nu\, y}, \quad 0 \leq x \leq y, \quad \nu > 0$$

Determine la distribución de probabilidad de $Z = \frac{X}{Y}$.

Solución

Del enunciado tenemos que $\Theta_Z = [0,\, 1]$. **[0.5 Ptos]**

Alternativa 1

La función de probabilidad acumulada de Z está dada por

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leq z) && \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= P(X \leq z\, Y) && \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \int_0^\infty \int_0^{z\, y} \nu^2\, e^{-\nu\, y}\, dx\, dy && \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= z \int_0^\infty \nu^2\, y\, e^{-\nu\, y}\, dy && \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= z \cdot 1 && \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= z, \qquad 0 \leq z \leq 1 && \textbf{[0.5 Ptos]} \\
f_Z(z) &= \frac{d}{dz}\, F_Z(z) && \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= 1, \qquad 0 \leq z \leq 1 && \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Z \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ **[0.5 Ptos]**

Alternativa 2

Usando $g^{-1} = z\, y$ **[1.0 Ptos]**, tenemos que

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z\, y,\, y)\ |y|\ dy && \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= \int_0^\infty f_{X,Y}(z\, y,\, y)\ |y|\ dy && \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= \int_0^\infty \nu^2\, y\, e^{-\nu\, y}\, dy && \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= 1, \qquad 0 \leq z \leq 1 && \textbf{[1.0 Ptos]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Z \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ **[0.5 Ptos]**

+ 1 Punto Base

Problema 3

Para la generación de energía los niveles mínimos y máximos anual de agua caída, son información relevante para una eficiente planificación. Sean $X_1, \ldots, X_n$ niveles anuales de agua caía para n años, los cuales se comportan como variables aleatorias continuas con idéntica distribución (f_X y F_X). Si $Y_1 = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}$, $Y_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$ y suponemos independencia entre los niveles anuales de agua caída, determine:

(a) Una expresión en términos de F_X y/o f_X para $P(Y_1 > u, Y_n \leq v)$.

(b) Una expresión en términos de F_X y/o f_X para $F_{Y_1,Y_n}(u,v) = P(Y_1 \leq u, Y_n \leq v)$ y $f_{Y_1,Y_n}(u,v)$. El resultado obtenido en (a) puede ser de utilidad.

Solución

(a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
P(Y_1 > u, Y_n \leq v) &= P(u < X_1 \leq v, u < X_2 \leq v, \ldots, u < X_n \leq v) \qquad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= P(u < X_1 \leq v) \times P(u < X_2 \leq v) \times \cdots \times P(u < X_n \leq v), \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \\
&= \prod_{i=1}^{n} [F_{X_i}(v) - F_{X_i}(u)] \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= [F_X(v) - F_X(u)]^n, \qquad \text{por idéntica distribución} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

(b) Notemos que

$$\begin{aligned}
(Y_n \leq v) &= (Y_n \leq v) \cap [(Y_1 \leq u) \cup (Y_1 > u)] \qquad \textbf{[0.4 Ptos]} \\
&= [(Y_n \leq v) \cap (Y_1 \leq u)] \cup [(Y_n \leq v) \cap (Y_1 > u)] \qquad \textbf{[0.4 Ptos]} \\
\longrightarrow P(Y_n \leq v) &= P(Y_1 \leq u, Y_n \leq v) + P(Y_1 > u, Y_n \leq v), \quad \text{por axioma 3} \quad \textbf{[0.4 Ptos]} \\
F_{Y_n}(v) &= F_{Y_1,Y_n}(u,v) + [F_X(v) - F_X(u)]^n, \quad \text{por (a)} \quad \textbf{[0.4 Ptos]} \\
F_X(v)^n &= F_{Y_1,Y_n}(u,v) + [F_X(v) - F_X(u)]^n, \quad \text{por formulario} \quad \textbf{[0.4 Ptos]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$F_{Y_1,Y_n}(u,v) = F_X(v)^n - [F_X(v) - F_X(u)]^n \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

y

$$f_{Y_1,Y_n}(u,v) = \frac{d^2}{du\,dv} F_{Y_1,Y_n}(u,v) = n\,(n-1)\,[F_X(v) - F_X(u)]^{n-2}\, f_X(v)\, f_X(u) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

Suponga que los consumos X de agua (en m^3) en una localidad distribuyen Weibull(η, β). Este modelo tiene una función de probabilidad acumulada dada por

$$F_X(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right], \quad x \geq 0, \quad \eta > 0, \quad \beta > 0$$

Si cuando toman la medición del consumo por simplicidad truncan. Determine la función de distribución de probabilidad de la medición.

Solución

Sea $Y = g(X) = [X]$, luego $\Theta_Y = \mathbb{N}_0$. **[1.0 Ptos]**

Se pide

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= P(y \leq X < y + 1) \qquad \textbf{[2.0 Ptos]} \\ &= F_X(y+1) - F_X(y) \qquad \textbf{[1.0 Ptos]} \\ &= \exp\left[-\left(\frac{y}{\eta}\right)^{\beta}\right] - \exp\left\{-\left[\frac{(y+1)}{\eta}\right]^{\beta}\right\}, \quad y \in \mathbb{N}_0 \qquad \textbf{[2.0 Ptos]} \end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 5

Se está diseñado una represa en la Región Metropolitana la cual considera la normativa sísmica. Sin embargo, está puede sufrir daños estructurales cuando ocurre un sismo de siete grados o más con una probabilidad igual a 0.20. Si el número de sismos con siete o más grados puede ser modelado de acuerdo a una distribución Poisson y según registros históricos en la zona ocurre en promedio (valor esperado) uno cada 10 años. Determine la distribución de probabilidad del número de veces que la represa sufre daños estructurales por sismos dentro de los próximos 50 años. Suponga que si un sismo es inferior a siete grados, la represa no sufre daño estructural por esta causa.

Solución

Definamos como Y a la variable aleatoria correspondiente al número de sismos con siete o más grados en los próximos 50 años. Del enunciado tenemos que

$$Y \sim \text{Poisson}(\nu = 5) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Si X es el número de veces que la presa sufre daño estructural por sismos, entonces

$$X \,|\, Y = y \sim \text{Binomial}(n = y,\, p = 0.20) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Se pide la distribución marginal de X.

Por teorema de probabilidades totales tenemos que

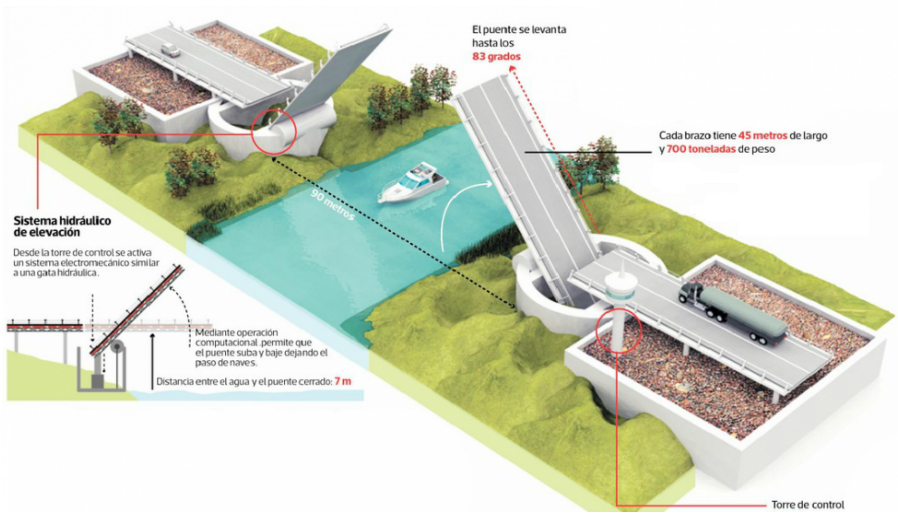
$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \sum_{y \in \Theta_Y} p_{X\,|\,Y=y}(x) \cdot p_Y(y) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} p_{X\,|\,Y=y}(x) \cdot p_Y(y) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \sum_{y=x}^{\infty} p_{X\,|\,Y=y}(x) \cdot p_Y(y) \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \sum_{y=x}^{\infty} \binom{y}{x} p^x \,(1-p)^{y-x} \cdot \frac{\nu^y\, e^{-\nu}}{y!} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \frac{p^x\, e^{-\nu}}{x!} \sum_{y=x}^{\infty} \frac{(1-p)^{y-x}\, \nu^y}{(y-x)!} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \frac{p^x\, \nu^x\, e^{-\nu}}{x!} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\,\nu]^z}{z!} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \frac{p^x\, \nu^x\, e^{-\nu}}{x!} \cdot \exp\{\nu - \nu\, p\} \qquad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
&= \frac{(\nu\, p)^x\, e^{-\nu\, p}}{x!}, \qquad x \in \mathbb{N}_0 \qquad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

Es decir, $X \sim \text{Poisson}(\nu\, p = 1)$. **[1.0 Ptos]**

+ 1 Punto Base

Problema 6

El número de veces Y al día que el puente basculante de Caucau, ver figura, debe abrirse por el paso de embarcaciones es una variable aleatoria con distribución Poisson, la cual tiene un valor esperado que está condicionado al tiempo X en horas que los vehículos esperan cruzar.



Fuente: www.plataformaurbana.cl

Suponga que $X \sim \text{Gamma}(k = 1, \nu = 1/2)$ y que $E(Y \mid X = x) = x$.

(a) Determine el valor esperado y la varianza del número de veces que debe abrirse el puente.

(b) Si durante un día el puente se abrió dos veces, determine la probabilidad que el tiempo de espera ese día haya superado los 40 minutos.

Solución

(a) Se pide

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \qquad \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(Y \mid X)\right] = E(X) = 2 \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

y

$$\textbf{[0.5 Ptos]} \qquad \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y \mid X)) + \mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y \mid X)) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}(X) = 4 + 2 = 6 \qquad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

(b) Se pide $P(X > 2/3 \mid Y = 2)$. **[0.4 Ptos]**

Tenemos que

$$f_{X \mid Y=y} = \frac{p_{Y \mid X=x}(y) \cdot f_X(x)}{p_Y(y)} \qquad \textbf{[0.4 Ptos]}$$

donde

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= \int_0^\infty p_{Y\,|\,X=x}(y)\cdot f_X(x)\,dx \qquad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= \int_0^\infty \frac{x^y\,e^{-x}}{y!}\cdot\frac{1}{2}\,e^{-x/2}\,dx \qquad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= \int_0^\infty \frac{1/2}{\Gamma(y+1)}\,x^{(y+1)-1}\,e^{-\frac{3\,x}{2}}\,dx \qquad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= \frac{1/2}{(3/2)^{y+1}}\int_0^\infty \frac{(3/2)^{y+1}}{\Gamma(y+1)}\,x^{(y+1)-1}\,e^{-\frac{3\,x}{2}}\,dx \qquad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= \frac{1/2}{(3/2)^{y+1}}\cdot 1 \qquad \textbf{[0.2 Ptos]}\\
&= \frac{2^y}{3^{y+1}}, \quad y\in\mathbb{N}_0 \qquad \textbf{[0.2 Ptos]}
\end{aligned}
$$

Reemplazando

$$
f_{X\,|\,Y=y} = \frac{(3/2)^{y+1}}{\Gamma(y+1)}\,x^{(y+1)-1}\,e^{-3\,x/2}, \quad x\geq 0, \quad y\in\mathbb{N}_0 \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}
$$

es decir

$$
X\,|\,Y=y \sim \text{Gamma}(k=y+1,\,\nu=3/2) \qquad \textbf{[0.3 Ptos]}
$$

Luego

$$
P(X>2/3\,|\,Y=2) = \sum_{x=0}^{3-1}\frac{1^x\,e^{-1}}{x!} = e^{-1}+e^{-1}+\frac{1}{2}\,e^{-1} = 0.9196986 \qquad \textbf{[0.4 Ptos]}
$$

+ 1 Punto Base

Formulario

Propiedades función $\Gamma(\cdot)$

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Propiedades función $B(\cdot,\cdot)$

$$(1)\quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2)\quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

Igualdades

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \qquad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Propiedad distribución Gamma

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\,\nu), \text{ con } k \in \mathbb{N} \longrightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$$

Transformación

Sea $Y = g(X)$ una función cualquiera, con k raíces:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X\left(g_i^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{d}{dy}\, g_i^{-1}(y)\right|$$

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} p_X\left(g_i^{-1}(y)\right)$$

Sea $Z = g(X,Y)$ una función cualquiera:

$$p_Z(z) = \sum_{g(x,y)=z} p_{X,Y}(x,y)$$

Sea $Z = g(X,Y)$ una función invertible para X o Y fijo:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(g^{-1}, y)\, \left|\frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\right|\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, g^{-1})\, \left|\frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\right|\, dx \end{aligned}$$

Esperanza y Varianza Condicional

$$\text{E}(Y) = \text{E}[\text{E}(Y \mid X)] \quad \text{y} \quad \text{Var}(Y) = \text{Var}[\text{E}(Y \mid X)] + \text{E}[\text{Var}(Y \mid X)]$$

Teorema del Límite Central

Sean $X_1,\,\ldots,\,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces

$$Z_n = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow Z \sim \text{Normal}(0,1),$$

cuando $n \to \infty$, $\text{E}(X_i) = \mu$ y $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

Mínimo y Máximo

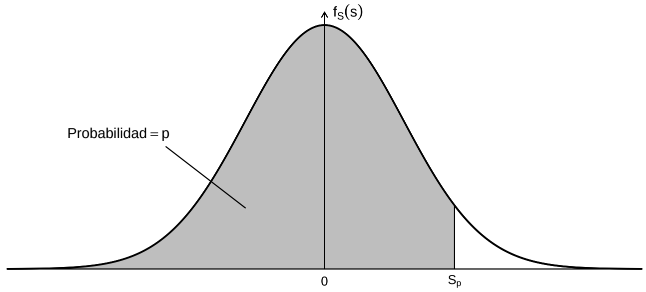
Sean $X_1,\,\ldots,\,X_n$ variables aleatorias continuas independientes con idéntica distribución (f_X y F_X), entonces para:

$$Y_n = \text{máx}\{X_1,\ldots,X_n\} \longrightarrow f_{Y_n} = n\,\left[F_X(y)\right]^{n-1}\, f_X(y)$$

$$Y_1 = \text{mín}\{X_1,\ldots,X_n\} \longrightarrow f_{Y_1} = n\,\left[1 - F_X(y)\right]^{n-1}\, f_X(y)$$

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\ \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \dfrac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Tabla Normal Estándar



Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998