Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2016

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Pauta Examen

Problema 1

En los seguros para automóviles es usual que los contratos exijan el pago de un deducible para responder ante un siniestro. Esto desincentiva muchas veces que un siniestro sea reportado por que el costo por reparación es menor que el deducible. Una encuesta realizada a mil clientes que reportaron m siniestros en un año entregó la siguiente información sobre el número de eventos Y no reportados:

# eventos no reportados	0	1	2	3	4 o +
# asegurados	750	210	32	6	2

En promedio, estos clientes no reportaron 0.30 eventos en el año.

(a) **[3.0 Ptos.]** ¿Un modelo Poisson ajusta al número de eventos no reportados durante un año? Use $\alpha = 5\,\%$.

(b) **[3.0 Ptos.]** Un investigador propone que el número de eventos Y no reportados durante un año es igual a $X - m$, donde X es el numero de siniestros que un cliente acumula hasta denunciar por m-ésima vez un siniestro a la compañía, es decir, X se comporta como una variable aleatoria Binomial-Negativa(m, p), donde p representa la probabilidad que un siniestro tenga un costo de reparación mayor al deducible y m es el número de siniestros reportados a la compañía durante un año. Un simple cambio de variable entrega los siguientes resultados teóricos de Y:

$$p_Y(y) = \binom{m+y-1}{y} p^m\,(1-p)^y, \quad \text{E}(Y) = \frac{m(1-p)}{p}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{m(1-p)}{p^2}$$

con $y \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{N}$. ¿Si $m = 4$, este modelo ajusta mejor que el modelo Poisson? Justifique su respuesta.

Nota: No es necesario colapsar (reducir) la tabla si los valores esperados son pequeños y para todos sus cálculos considere cuatro decimales.
Solución

(a) Se pide contrastar las siguientes hipótesis

$$\text{H}_0 : Y \sim \text{Poisson}(\lambda) \quad \text{vs} \quad \text{H}_1 : Y \not\sim \text{Poisson}(\lambda)$$

Por técnica de momentos y verosimilitud, el estimador de λ es

$$\hat{\lambda} = \overline{Y} = 0.3 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

A partir de las probabilidades estimadas se obtienen los valores esperados para cada categoría, las cuales se presentan en la siguiente tabla

	Observado	Probabilidad	Esperado	(O-E)^2/E
0	750	0.7408	740.8	0.1143
1	210	0.2222	222.2	0.6698
2	32	0.0333	33.3	0.0508
3	6	0.0033	3.3	2.2091
4+	2	0.0004	0.4	6.4000
Total	1000	1.0000	1000.0	9.4440

[1.5 Ptos.]

Bajo H_0 el estadístico

$$X^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(5 - 1 - 1) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

De la tabla χ^2 del formulario, se deduce que el valor-p para $X^2 = 9.4440$ se encuentra en el siguiente intervalo

$$1\,\% < \text{valor-p} < 2.5\,\% \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Por lo tanto, existe suficiente evidencia al 5 % de significancia para rechazar que la distribución Poisson ajusta de buena manera a los eventos no reportados durante un año en clientes que denunciaron m siniestros. **[0.2 Ptos.]**

Nota: Alternativamente, el alumno podría comparar el estadísticos de prueba con el percentil $c_{0.95}(3) = 7.81$ y concluir que el modelo Poisson no ajusta a los datos.

(b) Se pide contrastar las siguientes hipótesis

$$\text{H}_0 : Y \sim p_Y \quad \text{vs} \quad \text{H}_1 : Y \not\sim p_Y$$

El estimador de momentos de p está dado por:

$$\hat{p} = \frac{m}{\overline{Y} - m} = \frac{4}{0.3 + 4} = 0.9302 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

A partir de las probabilidades estimadas se obtienen los valores esperados para cada categoría, las cuales se presentan en la siguiente tabla

	Observado	Probabilidad	Esperado	(O-E)^2/E
0	750	0.7487	748.7	0.0023
1	210	0.2090	209.0	0.0048
2	32	0.0365	36.5	0.5548
3	6	0.0051	5.1	0.1588
4+	2	0.0007	0.7	2.4143
Total	1000	1.0000	1000.0	3.1350

[1.5 Ptos.]

Bajo H_0 el estadístico

$$X^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(5-1-1) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

De la tabla χ^2 del formulario, se deduce que el valor-p para $X^2 = 3.1350$ se encuentra en el siguiente intervalo

$$10\,\% < \text{valor-p} < 90\,\% \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Por lo tanto, NO existe suficiente evidencia al 10 % de significancia para rechazar que la distribución propuesta ajusta de buena manera a los eventos no reportados durante un año en clientes que denunciaron m siniestros. Por lo tanto, este modelo ajusta mejor que el modelo Poisson. **[0.2 Ptos.]**

Nota: Alternativamente, el alumno podría solo comparar los estadísticos de prueba debido a que ambos distribuyen $\chi^2(3)$ y concluir que el modelo en (b) ajusta de mejor manera que el Poisson.

+ 1 Punto Base

Problema 2

La velocidad del viento en zonas de baja altura se ve disminuida por el cizallamiento (roce) con la superficie terrestre. Se puede decir que, en general, cuanto mayor sea la rugosidad del suelo, más se verá disminuida la velocidad del viento. Suponga que el nivel Y de rugosidad del suelo en cierta zona se comporta como una variable aleatoria Gamma(k, ν) y que la velocidad X del viento en dicha zona se comporta como una variable aleatoria Weibull(η, β), donde el parámetro η es igual al inverso de la β-ésima raíz del nivel de rugosidad en la zona, es decir, $\eta = Y^{-1/\beta}$ y el parámetro $\beta > 1/k$.

(a) **[4.0 Ptos.]** Obtenga la función de densidad marginal de la velocidad del viento.

(b) **[2.0 Ptos.]** Si β es igual a uno y k es igual a tres, calcule el coeficiente de variación de la velocidad del viento en una zona donde se desconoce el nivel de rugosidad.

Ayuda: Si $X \sim$ Weibull(η, β), entonces

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right] \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right]$$

con $x \geq 0$, $\eta > 0$ y $\beta > 0$. Además si $r > 0$ se tiene que $\mathrm{E}(X^r) = \eta^r\,\Gamma(1 + r/\beta)$.

Solución

(a) Por teorema de probabilidades totales tenemos que

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X\,|\,Y=y}(x)\cdot f_Y(y)\,dy \\
&= \int_0^{\infty} \beta\,y^{1/\beta}\,x^{\beta-1}\,y^{1-1/\beta}\,e^{-x^{\beta}\,y}\,\frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,y^{k-1}\,e^{-\nu\,y}\,dy \quad \textbf{[0.8 Ptos.]} \\
&= \frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,\beta\,x^{\beta-1}\int_0^{\infty} y^{(k+1)-1}\,e^{-(x^{\beta}+\nu)\,y}\,dy \quad \textbf{[0.8 Ptos.]} \\
&= \frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,\beta\,x^{\beta-1}\,\frac{\Gamma(k+1)}{(x^{\beta}+\nu)^{k+1}}\int_0^{\infty}\frac{(x^{\beta}+\nu)^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\,y^{(k+1)-1}\,e^{-(x^{\beta}+\nu)\,y}\,dy \quad \textbf{[0.8 Ptos.]} \\
&= \frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,\beta\,x^{\beta-1}\,\frac{\Gamma(k+1)}{(x^{\beta}+\nu)^{k+1}}\cdot 1, \quad \text{por área bajo el soporte de una Gamma}(k+1,\,x^{\beta}+\nu) \quad \textbf{[0.8 Ptos.]} \\
&= k\,\beta\,\nu^k\,x^{\beta-1}\,\left(x^{\beta}+\nu\right)^{-(k+1)}, \quad \text{con } x \geq 0,\ k > 0,\ \beta > 0,\ \nu > 0,\ \beta > 1/k \quad \textbf{[0.8 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide $\delta_X = \sigma_X/\mu_X$, donde

$$\begin{aligned}
\mu_X &= \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X\,|\,Y)] = \mathrm{E}(Y^{-1}) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \int_0^{\infty} y^{-1}\cdot\frac{\nu^3}{\Gamma(3)}\,y^{3-1}\,e^{-\nu\,y}\,dy \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \frac{\nu\,\Gamma(2)}{\Gamma(3)}\int_0^{\infty}\frac{\nu^2}{\Gamma(2)}\,y^{2-1}\,e^{-\nu\,y}\,dy \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \frac{\nu\,\Gamma(2)}{\Gamma(3)}\cdot 1, \quad \text{por área bajo el soporte de una Gamma}(2,\,\nu) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \frac{\nu}{2} \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}$$

y

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X\,|\,Y)] + \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X\,|\,Y)] \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Var}(Y^{-1}) + \mathrm{E}(Y^{-2}) = 2\,\mathrm{E}(Y^{-2}) - \mathrm{E}^2(Y^{-1}) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
&= 2\int_0^\infty y^{-2}\cdot\frac{\nu^3}{\Gamma(3)}\,y^{3-1}\,e^{-\nu\,y}\,dy - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= 2\,\frac{\nu^2\,\Gamma(1)}{\Gamma(3)}\int_0^\infty \frac{\nu^1}{\Gamma(1)}\,y^{1-1}\,e^{-\nu\,y}\,dy - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= 2\,\frac{\nu^2\,\Gamma(1)}{\Gamma(3)}\cdot 1 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2, \quad \text{por área bajo el soporte de una Gamma}(1,\,\nu) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \nu^2 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \frac{3\,\nu^2}{4} \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\delta_X = \frac{\nu\,\sqrt{3}/2}{\nu/2} = \sqrt{3} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

Los consumos de energía eléctrica en regiones está más relacionado con el crecimiento económico de la región que con respecto al crecimiento económico del país. La siguiente tabla entrega información entre los años 2009-2015 de los consumos de energía en MMWh para una región del sur de Chile y los productos internos brutos de la región y a nivel país.

AÑO	DEMANDA (Y)	PIB.REG (X_1)	PIB (X_2)
2009	507.09	1.86	92.88
2010	536.72	2.01	98.22
2011	559.81	2.18	103.95
2012	596.38	2.23	109.63
2013	637.97	2.38	114.26
2014	665.24	2.41	116.42
2015	685.94	2.54	119.10
2016	NA	2.61	122.08

Obtenga las rectas de regresión ($Y \sim X_1$ e $Y \sim X_2$) y sus respectivos coeficientes de determinación. Para el modelo que mejor ajuste, prediga la demanda para el año 2016 con su respectivo intervalo de confianza al 95 %.

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 4189.1, \qquad \sum_{i=1}^{n} X_{1\,i} = 15.62, \qquad \sum_{i=1}^{n} X_{2\,i} = 754.46$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = 2534260, \qquad \sum_{i=1}^{n} X_{1\,i}^2 = 35.1491, \qquad \sum_{i=1}^{n} X_{2\,i}^2 = 81891.98$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot X_{1\,i} = 9436.192, \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot X_{2\,i} = 455425.7$$

Solución

Modelo 1: $Y \sim X_1$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(X_{1i} - \overline{X}_1)}{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2} = 300.88 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
\hat{\alpha} &= \overline{Y} - \hat{\beta} \cdot \overline{X}_1 = -72.94 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
Y' &= -72.94 + 300.88 \cdot X_1 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
s_Y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 = 4553.83 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
s_{Y\,|\,X_1}^2 &= \frac{1}{n-2} \left[\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 - \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{1i} - \overline{X}_1)^2 \right] = 138.1542 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
r^2 &= 1 - \frac{s_{Y\,|\,X_1}^2}{s_Y^2} = 0.9696 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Modelo 2: $Y \sim X_2$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(X_{2i} - \overline{X}_2)}{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2} = 6.81 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
\hat{\alpha} &= \overline{Y} - \hat{\beta} \cdot \overline{X}_2 = -135.54 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y' &= -135.54 + 6.81 \cdot X_2 \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.2 Ptos.]}} \\
s^2_{Y \mid X_2} &= \frac{1}{n-2}\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 - \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - \overline{X}_1)^2\right] = 119.3969 \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.5 Ptos.]}} \\
r^2 &= 1 - \frac{s^2_{Y \mid X_2}}{s^2_Y} = 0.9737 \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.5 Ptos.]}}
\end{aligned}
$$

El modelo 1 explica un 96.96 % de la variabilidad presente en los datos y el modelo 2 un 97.37 %, es decir, el modelo 2 presenta un mejor ajuste lineal. **[0.5 Ptos.]**

Luego, el pronóstico para el año 2016 es 695.8265 y su IC al 95 % sería

$$
\begin{aligned}
\langle \mu_{Y \mid x_i} \rangle_{0.95} &= 695.8265 \pm t_{0.975}(5) \cdot \sqrt{119.3969} \cdot \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{(122.08 - 754.46/7)^2}{(81891.98 - 7 \cdot 754.46^2/7^2)}} \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.6 Ptos.]}} \\
&= (676.0107 \quad - \quad 715.6423) \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.4 Ptos.]}}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base

Formulario

Propiedades función $\Gamma(\cdot)$

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$

$$(1)\quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2)\quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

Igualdades

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \qquad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Propiedad distribución Gamma

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\,\nu), \text{ con } k \in \mathbb{N} \longrightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$$

Teorema de Probabilidades Totales

$$p_X(x) = \sum_{y \in \Theta_Y} p_{X\,|\,Y=y}(x) \cdot p_Y(y), \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y\,|\,X=x}(y) \cdot f_X(x)\,dx$$

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X\,|\,Y=y}(x) \cdot f_Y(y)\,dy, \qquad f_Y(y) = \sum_{x \in \Theta_X} f_{Y\,|\,X=x}(y) \cdot p_X(x)$$

Esperanza y Varianza Condicional

$$\text{E}(Y) = \text{E}[\text{E}(Y\,|\,X)] \quad \text{y} \quad \text{Var}(Y) = \text{Var}[\text{E}(Y\,|\,X)] + \text{E}[\text{Var}(Y\,|\,X)]$$

Regresión Lineal Simple

Para el modelo de regresión lineal simple $Y = \alpha + \beta\, x$, se tiene que

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\,\overline{x}, \quad \hat{\beta} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \quad r^2 = 1 - \frac{s^2_{Y|x}}{s^2_Y}, \qquad s^2_{Y|x} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i')^2$$

$$\langle \mu_{Y\,|x_i} \rangle_{1-\alpha} = \overline{y}_i \pm t_{(1-\alpha/2),\,n-2} \cdot s_{Y|x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{n-1}\,\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{s_X \cdot s_Y}, \qquad \hat{\rho} = \hat{\beta}\,\frac{s_X}{s_Y} \quad \text{y} \quad \hat{\rho}^2 = 1 - \frac{(n-2)}{(n-1)}\,\frac{s^2_{Y\,|\,x}}{s^2_Y}$$

$$s^2_{Y\,|\,x} = \frac{1}{n-2}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 - \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right]$$

$$s^2_Y = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2, \qquad s^2_X = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma^2_X = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma^2_X = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma^2_X = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma^2_X = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma^2_X = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma^2_X = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu-t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma^2_X = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma^2_X = \mu^2_X\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma^2_X = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma^2_X = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma^2_X = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
∞	1.282	1.645	1.960	2.326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$

ν	$c_{0.025}$	$c_{0.05}$	$c_{0.10}$	$c_{0.90}$	$c_{0.95}$	$c_{0.975}$	$c_{0.99}$	$c_{0.995}$
1	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93