Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2011

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113-1**
Pauta	**:**	**I2**
Profesor	**:**	**Ricardo Alonso Olea Ortega**
Ayudantes	**:**	**María Ignacia Vicuña Loyola**

Problema 1

En la actualidad una cantidad considerable de encuestas aún se realizan en papel, lo que implica digitar manualmente la información para luego hacer los respectivos análisis, siendo un problema habitual los típicos errores de tipeo. Suponga que un digitador ingresa a una planilla la información de n encuestas y para cada una de ellas comete al menos un error de tipeo con una probabilidad igual U. Si la probabilidad U de un digitador se comporta como una variable aleatoria Uniforme$(0, 1)$:

(a) Determine la distribución de probabilidad para la cantidad de encuestas con al menos un error de tipeo al ingresar n a una planilla.

(b) Determine la distribución de probabilidad de U dado que el número de encuestas con al menos un error de tipeo fue x. Identifique el modelo y sus parámetros.

Solución

(a) Sea X_n el número de encuestas ingresadas con al menos un error de tipeo.

Tenemos que

$$\textbf{[0.4 Ptos.]}\quad X_n \,|\, U = u \sim \text{Binomial}(n,\, u) \quad \text{y} \quad U \sim \text{Uniforme}(0,\, 1) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Interesa determinar $P(X_n = x)$, la cual podemos obtener por probabilidades totales

$$\begin{aligned}
P(X_n = x) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X_n = x \,|\, U = u)\, f_U(u)\, du \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \int_0^1 \binom{n}{x} u^x\,(1-u)^{n-x}\cdot 1\, du \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \binom{n}{x} \int_0^1 u^x\,(1-u)^{n-x}\, du\\
&= \binom{n}{x} B(x+1, n-x+1) \int_0^1 \frac{1}{B(x+1, n-x+1)}\, u^{[x+1]-1}\,(1-u)^{[n-x+1]-1}\, du \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}\\
&= \binom{n}{x} B(x+1, n-x+1)\\
&= \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,\frac{\Gamma(x+1)\,\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+2)} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
&= \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,\frac{x!\,(n-x)!}{(n+1)!} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
&= \frac{1}{n+1}, \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \quad x = 0, 1, \ldots, n \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide

$$
\begin{aligned}
f_{U\,|\,X_n=x}(u) &= \frac{P(X_n = x\,|\,U = u)\cdot f_U(u)}{P(X_n = x)}, \quad \text{por teorema de bayes} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{\binom{n}{x}\, u^x\,(1-u)^{n-x}\cdot 1}{\dfrac{1}{n+1}} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, u^x\,(1-u)^{n-x}\cdot(n+1) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(n-x+1)}\, u^x\,(1-u)^{n-x}\cdot(n+1) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(n-x+1)}\, u^x\,(1-u)^{n-x} \\
&= \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(n-x+1)}\, u^x\,(1-u)^{n-x} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{B(x+1, n-x+1)}\, u^x\,(1-u)^{n-x} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{B(x+1, n-x+1)}\, u^{[x+1]-1}\,(1-u)^{[n-x+1]-1}, \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
U\,|\,X_n = x \sim \text{Beta}(x+1, n-x+1) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}
$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Durante el verano la cantidad de agua disponible para Maintencillo se comporta como una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es Log-Normal con una media de 3,79 millones de metros cúbicos y un coeficiente de variación del 40 %. Por otra parte, la demanda por agua también sigue una distribución Log-Normal, pero con una media de 5,685 millones de metros cúbicos y un coeficiente de variación del 10 %.

(a) Si la cantidad disponibilidad de agua y la demanda se comportan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad que haya escasez de agua durante este verano?

(b) Calcule la probabilidad solicitada en (a) asumiendo ahora una distribución Normal para cantidad y demanda de agua.

Solución

Definamos como X a la variable aleatoria que representa la cantidad de agua disponible durante el verano en Maintencillo e Y la variable aleatoria correspondiente a la demanda.

(a) Del enunciado tenemos que

$$\mu_X = 3{,}790; \quad \delta_X = 0{,}4 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}$$
$$\mu_Y = 5{,}658; \quad \delta_Y = 0{,}1 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}$$

Además nos indican la cantidad X y la demanda Y distribuyen

$$\textbf{[0.1 Ptos.]} \quad X \sim \text{Log-Normal}(\lambda_X, \zeta_X) \quad \text{e} \quad Y \sim \text{Log-Normal}(\lambda_Y, \zeta_Y) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}$$

con

$$\begin{aligned}
\zeta_X &= \sqrt{\ln(1+\delta_X^2)} = 0{,}3852532 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
\lambda_X &= \ln \mu_X - \frac{1}{2}\zeta_X^2 = 1{,}258156 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
\zeta_Y &= \sqrt{\ln(1+\delta_Y^2)} = 0{,}09975135 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
\lambda_Y &= \ln \mu_Y - \frac{1}{2}\zeta_Y^2 = 1{,}732856 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Se pide

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad P(X < Y) = P\left(\frac{X}{Y} < 1\right) = P(Z < 1) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Por independencia entre X e Y

$$\begin{aligned}
Z &\sim \text{Log-Normal}\left(\lambda_Z = \lambda_X - \lambda_Y, \zeta_Z = \sqrt{\zeta_X^2 + \zeta_Y^2}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&\sim \text{Log-Normal}\left(\lambda_Z = -0{,}4746999, \zeta_Z = 0{,}3979577\right) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
P(X < Y) &= P(Z < 1) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln 1 - \lambda_Z}{\zeta_Z}\right) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \Phi\left(\frac{0 - [-0{,}4746999]}{0{,}3979577}\right) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \Phi(1{,}192840) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&\approx \Phi(1{,}19) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 0{,}8830 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) En el caso que

$$\textbf{[0.1 Ptos.]} \quad X \sim \text{Normal}(\mu_X,\, \sigma_X) \quad \text{e} \quad Y \sim \text{Normal}(\mu_Y,\, \sigma_Y) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}$$

Necesitamos obtener primero σ_X^2 y σ_Y^2 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mu_X &= 3{,}790 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
\delta_X &= 0{,}4 \Rightarrow \sigma_X = 0{,}4 \cdot 3{,}79 = 1{,}516 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
\mu_Y &= 5{,}658 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
\delta_Y &= 0{,}1 \Rightarrow \sigma_Y = 0{,}1 \cdot 5{,}658 = 0{,}5658 \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Para este caso, la probabilidad solicitada puede ser representada como

$$P(X < Y) = P\,(X - Y < 0) = P(Z < 0), \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

donde

$$\begin{aligned}
Z &\sim \text{Normal}\left(\mu_Z = \mu_X - \mu_Y,\, \sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&\sim \text{Normal}\,(\mu_Z = -1{,}895,\, \sigma_Z = 1{,}619089) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
P(X < Y) &= P(Z < 0) \\
&= \Phi\left(\frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \Phi\left(\frac{0 - [-1{,}895]}{1{,}619089}\right) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \Phi\,(1{,}170411) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&\approx \Phi\,(1{,}17) \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 0{,}8790 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

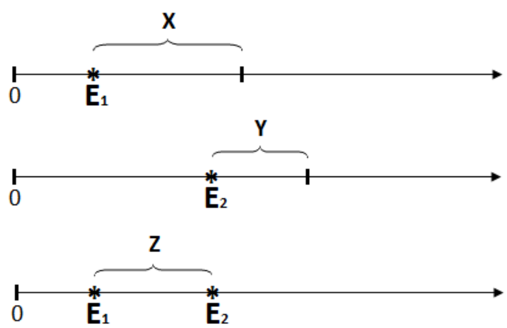
A una tienda ingresan según un proceso de poisson en promedio ν clientes por hora. Si el tiempo (en horas) en que un cliente permanece en la tienda distribuye Exponencial(ν), ¿cual es a probabilidad que el primer cliente que ingresa salga antes que el segundo?

Solución

Sea X_t el número de clientes que entran durante un periodo de t en horas a una tienda. Del enunciado tenemos que

$$X_t \sim \text{Poisson}(\nu\, t)$$

La siguiente figura ilustras las llegadas de los primeros dos clientes y los tiempos de permanencia en la tienda.



[0.3 Ptos.]

La distribución del tiempo Z transcurrido entre la llegada del primer y segundo cliente distribuye Exponencial(ν) ya que los clientes llegan según un proceso de Poisson. **[0.5 Ptos.]**

Por otra parte, nos indican en el enunciado que los tiempos de permanencia en la tienda X e Y (se asume independencia entre ambos) también distribuyen Exponencial(ν). **[0.2 Ptos.]**

Se pide

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad P(X < Y + Z) = P(X - T < 0) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

donde $T = Y + Z$ distribuye Gamma($k = 2,\, \nu$) por corresponder a la suma de dos exponenciales independientes con mismo parámetro. **[0.3 Ptos.]**

Tenemos que determinar la distribución de $W = X - T$, la cual está dada por

$$\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_{\infty}^{\infty} f_{X,T}(w + t,\, t)\, dt \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \int_{\infty}^{\infty} f_X(w + t)\, f_T(t)\, dt, \quad \text{por independencia entre } X \text{ y } T \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll}
\displaystyle\int_{0}^{\infty} f_X(w + t)\, f_T(t)\, dt, \quad \text{si } w \geq 0 & (*) \\
 & \qquad \textbf{[0.6 Ptos.]} \\
\displaystyle\int_{-w}^{\infty} f_X(w + t)\, f_T(t)\, dt, \quad \text{si } w < 0 & (**)
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

En le caso de ($*$) tenemos que

$$
\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_0^\infty f_X(w+t)\, f_T(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \nu\, e^{-\nu\,(w+t)} \cdot \nu^2\, t\, e^{-\nu\, t}\, dt \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}} \\
&= \nu\, e^{-\nu\, w} \int_0^\infty \nu^2\, t\, e^{-2\,\nu\, t}\, dt \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}} \\
&= \frac{\nu\, e^{-\nu\, w}}{4} \int_0^\infty \frac{(2\,\nu)^2}{\Gamma(2)}\, t^{2-1}\, e^{-(2\,\nu)\, t}\, dt \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}} \\
&= \frac{\nu\, e^{-\nu\, w}}{4}, \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}} \quad w \geq 0 \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}}
\end{aligned}
$$

Mientras que para ($**$)

$$
\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_{-w}^\infty f_X(w+t)\, f_T(t)\, dt \\
&= \int_{-w}^\infty \nu\, e^{-\nu\,(w+t)} \cdot \nu^2\, t\, e^{-\nu\, t}\, dt \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}} \\
&= \nu\, e^{-\nu\, w} \int_{-2}^\infty \nu^2\, t\, e^{-2\,\nu\, t}\, dt \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}} \\
&= \frac{\nu\, e^{-\nu\, w}}{4} \int_{-w}^\infty \frac{(2\,\nu)^2}{\Gamma(2)}\, t^{2-1}\, e^{-(2\,\nu)\, t}\, dt \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}} \\
&= \frac{\nu\, e^{-\nu\, w}}{4} \left[\sum_{s=0}^{2-1} \frac{(2\,\nu\,[-w])^s\, e^{-2\,\nu\,[-w]}}{s!}\right] \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}} \\
&= \frac{\nu\, e^{-\nu\, w}}{4} \left[e^{2\,\nu\, w} - 2\,\nu\, w\, e^{2\,\nu\, w}\right] \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}} \\
&= \frac{\nu\, e^{\nu\, w}}{4} \left[1 - 2\,\nu\, w\right], \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}} \quad w < 0 \quad \textcolor{red}{\textbf{[0.1 Ptos.]}}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
f_W(w) = \begin{cases} \dfrac{\nu\, e^{\nu\, w}}{4} \left[1 - 2\,\nu\, w\right], & w < 0 \\[2ex] \dfrac{\nu\, e^{-\nu\, w}}{4}, & w \geq 0 \end{cases} \qquad \textcolor{red}{\textbf{[0.2 Ptos.]}}
$$

Por lo tanto, la probabilidad solicitada esta dada por

$$
\begin{aligned}
P(W<0) &= \int_{-\infty}^{0} f_W(w)\,dw \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{\nu\,e^{\nu\,w}}{4}\,dw - \int_{-\infty}^{0} \frac{\nu\,e^{\nu\,w}}{4}\,2\,\nu\,w\,dw \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= -\frac{1}{4}\int_{\infty}^{0} \nu\,e^{-\nu\,u}\,du - \frac{1}{2}\int_{\infty}^{0} \nu^2\,u\,e^{-\nu\,u}du \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \frac{1}{4}\int_{0}^{\infty} \nu\,e^{-\nu\,u}\,du + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \nu^2\,u\,e^{-\nu\,u}du \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \frac{1}{4}\int_{0}^{\infty} \nu\,e^{-\nu\,u}\,du + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{\nu^2}{\Gamma(2)}\,u^{2-1}\,e^{-\nu\,u}du \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{2} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= \frac{3}{4} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Gamma Trasladada	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,(x-\gamma)^{k-1}\,e^{-\nu\,(x-\gamma)}$	$x \geq \gamma$	$k,\ \nu,\ \gamma$	$\mu_X = k/\nu + \gamma$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\,r)}\ \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1-\frac{m}{N}\right)$

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\,e^{-u}\,du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

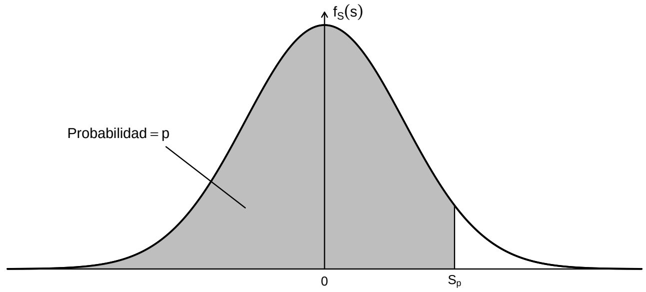
- Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$:

$$(1)\quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2)\quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\,\nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

Tabla Normal Estándar



Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998