Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2016

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I1**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

Usted asistió a una comida hace un tiempo y escuchó (indebidamente) que a partir de enero del 2016 sería obligatorio el uso de chaleco reflectantes. Esta información (parcial) le entrega una gran oportunidad para iniciar un negocio: Importar chalecos reflectantes. Sin embargo no había mucha información respecto del color, forma, calidad u otros antecedentes, por tanto decide hacer un estudio para determinar la oferta existente.

Con ayuda de un amigo que reside en China revisan la oferta de chalecos reflectantes que se producen para exportación. Primero vienen en dos colores: Verde y Naranja, los cuales se producen en relación 3:2. Además, se producen dos modelos: huinchas reflectantes cruzadas (X) o en paralelo (II). Un rápido estudio de mercado permite establecer que un 70 % de la oferta de chalecos verdes se presenta en formato (X), mientras que entre los chalecos naranjas la oferta de cada modelo es la misma. Por último, y muy importante el valor monetario (calidad el producto). La calidad del producto y por ende su valor, no depende del color del chaleco. En los de formato (X) el 60 % es de buena calidad, es decir caro. En cambio en el formato (II) el 80 % es de baja calidad, es decir barato. Como ya es de conocimiento público el chaleco exigido por el Ministerio de Transporte debe ser de color verde tipo (X).

Suponga que su contacto en china le envía un embarque con chalecos según las proporciones del mercado chino, es decir, en el embarque viene chalecos verdes y naranjos, tipo (X) y (II), de buena calidad y mala calidad.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que un chaleco sacado al azar desde el embarque cumpla con la norma?

(b) Si el chaleco sacado en (a) es de baja calidad, ¿cuál es la probabilidad que cumpla con la norma?

Solución

Definimos los siguientes eventos

V: Chaleco color verde.
F: Chaleco tipo (X).
B: Chaleco de baja calidad (barato).

(a) Se pide

$$\begin{aligned} P(V \cap F) &= P(F \,|\, V) \times P(V) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\ &= 0.70 \times 0.60 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\ &= 0.42 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \end{aligned}$$

(b) Se pide

$$\begin{aligned} P(V \cap F \,|\, B) &= \frac{P(V \cap F \cap B)}{P(B)} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= \frac{P(V \cap F \cap B)}{P(V \cap F \cap B) + P(\overline{V} \cap F \cap B) + P(V \cap \overline{F} \cap B) + P(\overline{V} \cap \overline{F} \cap B)} \quad \textbf{[0.7 Ptos.]} \quad (1) \end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
P(V \cap F \cap B) &= P(B \,|\, V \cap F) \cdot P(F \,|\, V) \cdot P(V) = 0.40 \times 0.70 \times 0.60 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
P(\overline{V} \cap F \cap B) &= P(B \,|\, \overline{V} \cap F) \cdot P(F \,|\, \overline{V}) \cdot P(\overline{V}) = 0.40 \times 0.50 \times 0.40 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
P(V \cap \overline{F} \cap B) &= P(B \,|\, V \cap \overline{F}) \cdot P(\overline{F} \,|\, V) \cdot P(V) = 0.80 \times 0.30 \times 0.60 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
P(\overline{V} \cap \overline{F} \cap B) &= P(B \,|\, \overline{V} \cap \overline{F}) \cdot P(\overline{F} \,|\, \overline{V}) \cdot P(\overline{V}) = 0.80 \times 0.50 \times 0.40 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

reemplazando en (1) se tiene que

$$
\begin{aligned}
P(V \cap F \,|\, B) &= \frac{0.40 \times 0.70 \times 0.60}{0.40 \times 0.70 \times 0.60 + 0.40 \times 0.50 \times 0.40 + 0.80 \times 0.30 \times 0.60 + 0.80 \times 0.50 \times 0.40} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}\\
&= \frac{0.168}{0.552} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}\\
&= 0.3043478 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

La extensión X de una grieta por fatiga puede ser modelada por la distribución Birnbaum-Saunders(θ, β) cuya función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\,\beta\,x} \cdot \phi\left(\frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\frac{x}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right]\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{\theta}} + \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right)$$

con $x \geq 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ y $\phi(\cdot)$ es la función de densidad de una Normal$(0, 1)$.

(a) Muestre que la mediana de X es igual a θ.

(b) Calcule $\text{E}[g(X)]$, donde $g(X) = \dfrac{1}{\beta}\left[\sqrt{\dfrac{X}{\theta}} - \sqrt{\dfrac{\theta}{X}}\right]$.

Solución

(a) Se pide mostrar que $F_X(\theta) = 1/2$. **[0.5 Ptos.]**

Tenemos que

$$\begin{aligned}
F_X(\theta) &= \int_0^\theta \frac{1}{2\,\beta\,x} \cdot \phi\left(\frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\frac{x}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right]\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{\theta}} + \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right) dx \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \int_{-\infty}^0 \phi(u)\,du, \quad u = \frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\frac{x}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right] \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= 1/2 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

ya que corresponde al área bajo curva hasta cero de una normal estándar. **[0.5 Ptos.]**

(b) Se pide

$$\begin{aligned}
\text{E}\left(\frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\frac{X}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{X}}\right]\right) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\frac{X}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{X}}\right]\right) \cdot \frac{1}{2\,\beta\,x} \cdot \phi\left(\frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\frac{x}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right]\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{\theta}} + \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right) dx \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= \int_{-\infty}^\infty u\,\phi(u)\,du, \quad u = \frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\frac{x}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right] \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= 0 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

ya que corresponde a la esperanza de una normal estándar. **[0.5 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 3

Una máquina produce engranaje cuyo diámetro, debido a imperfecciones del proceso, se comporta según una distribución normal. Parte relevante del proceso está bajo control. En otras palabras, la variabilidad esta fija, siendo su desviación estándar es igual a 0.2 mm. El parámetro de localización μ puede ser fijado arbitrariamente en la máquina según requerimiento de la producción.

(a) Determine el valor de μ tal que el porcentaje de engranajes cuyos diámetros se encuentran entre 15.5 mm y 16.0 mm (límites de tolerancia o equivalentemente, valores requeridos por los compradores) sea máximo.

(b) Si $\mu = 15.8$ mm, determine la probabilidad que un engranaje sea rechazado (diámetro fuera de los valores requeridos por los compradores en (a)).

Un análisis más específico muestra que el diámetro, en realidad, se comporta como una distribución Log-Normal con media 15.8 y c.o.v. igual a 15 %.

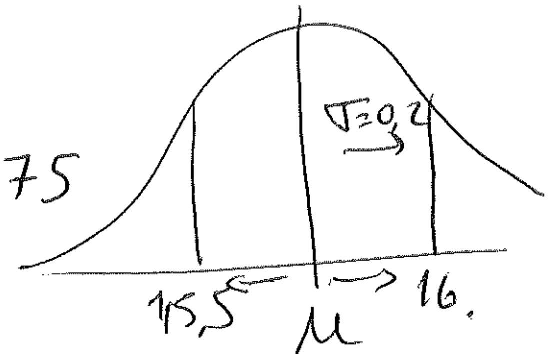
(c) Determine la probabilidad que un engranaje presente un diámetro dentro de los límites de tolerancia (definidos en (a))

(d) Si el diámetro de un engranaje es mayor a un valor determinado, este puede ser re-procesado para que cumpla. Determine ese valor de tal manera que sólo el 10 % de los engranajes deba ser re-procesado.

X = diámetro del engranaje

3. $X \sim N(\mu, \sigma = 0{,}2)$

a) μ t.q. $P(15{,}5 < X < 16)$ sea máximo.



$\boxed{0{,}5}$ Claramente $\mu = 15{,}75$ maximiza el "área"

$$\therefore P(15{,}5 < X < 16{,}0) = \Phi\left(\frac{16 - 15{,}75}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{15{,}5 - 15{,}75}{0{,}2}\right)$$

$$= \phi(1{,}25) - \Phi(-1{,}25) \qquad \boxed{0{,}5}$$

$$= 2\Phi(1{,}25) - 1 = 2 \times 0{,}8944 - 1$$

$$\boxed{0{,}5} \qquad \boxed{= 0{,}7888}$$

b) $P(X > 16 \cup X < 15{,}5) = 1 - P(15{,}5 < X < 16)$ $\boxed{0{,}5}$

con $X \sim N(\mu = 15{,}8 ; \sigma = 0{,}2)$

$$\therefore P(15{,}5 < X < 16) = \Phi\left(\frac{16 - 15{,}8}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{15{,}5 - 15{,}8}{0{,}2}\right)$$

$$\boxed{0{,}5} \qquad = \Phi(1) - \Phi(-1{,}5)$$

$$= \Phi(1) - 1 + \Phi(1{,}5) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}9332$$

$$= 0{,}7745$$

$$\therefore P(\text{"Rechazado"}) = 0{,}2255 \qquad \boxed{0{,}5}$$

Preg3 - continuación

Sea $X \sim$ log-normal con $\mu = 15{,}8$, $\delta = 0{,}15$

$\boxed{[0{,}5]}$

$\Rightarrow \xi \simeq 0{,}15$ y $\lambda = \ln(15{,}8) - \frac{0{,}15^2}{2} = 2{,}749$

c) $P(15.5 \leq X \leq 16) = \Phi\left(\frac{\ln 16 - 2{,}749}{0{,}15}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 15{,}5 - 2{,}749}{0{,}15}\right)$

$\boxed{[0{,}5]}$

$= \Phi(0{,}157) - \Phi(-0{,}054)$

$\approx 0{,}563 - (1 + 0{,}522)$

$\approx \underline{0{,}085}$ $\boxed{[0{,}5]}$

d) sea a t.q. $P(X > a) = 0{,}10$ $\boxed{[0{,}5]}$

$\Rightarrow P(X \leq a) = \Phi\left(\frac{\ln a - \lambda}{\xi}\right) = 0{,}9$

$\Rightarrow \frac{\ln a - \lambda}{\xi} = 1{,}28$ $\boxed{[0{,}5]}$

$\Rightarrow a = \exp\{\lambda + 1{,}28\xi\}$

$a = \exp\{2{,}94\}$

$a = \underline{18{,}916 \text{ mm}}$ $\boxed{[0{,}5]}$

* alternativa: si usan $\xi = \sqrt{\ln(1+\delta^2)} = 0{,}149$

$\Rightarrow \lambda = 2.749$ y los resultados varían MUY POCO!

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza, Varianza y fgm
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	μ, σ	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M_X(t) = \exp\left(\mu_X\,t + \frac{1}{2}\,\sigma_X^2\,t^2\right)$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\dfrac{1}{(x\,\zeta)}\,\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\ln(x)-\lambda}{\zeta}\right]^2\right\}$	$x \geq 0$	λ, ζ	$\mu_X = \exp(\lambda + \zeta^2/2)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2(e^{\zeta^2} - 1)$ $E(X^k) = \exp(\lambda\,k)\,M_Z(\zeta\,k)$, con $Z \sim$ Normal(0,1)

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^x\,b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty}\phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$