Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2011

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Pauta	:	**I3**
Profesor	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ricardo Olea (Sec. 2)**
Ayudantes	:	**Erwin Agüero Meza, Tamara Fernandez Aguilar y Claudia Reyes Vizcarra.**

Problema 1

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Geométrica(p). Defina la variable aleatoria Z como el mínimo entre X_1 y X_2.

(a) **[3.0 Ptos]** Determine la función de probabilidad de Z.

(b) **[3.0 Ptos]** Calcule el valor esperado de Z.

Solución

(a) Tenemos que $\Theta_Z = \mathbb{N}$ y se pide

$$\begin{aligned}
P(Z = z) &= P(\text{mín}\{X_1, X_2\} = z) \\
&= \left[\sum_{x=z}^{\infty} P(X_1 = z, X_2 = x)\right] + \left[\sum_{x=z}^{\infty} P(X_1 = x, X_2 = z)\right] - P(X_1 = z, X_2 = z) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= \left[\sum_{x=z}^{\infty} P(X_1 = z)\cdot P(X_2 = x)\right] + \left[\sum_{x=z}^{\infty} P(X_1 = x)\cdot P(X_2 = z)\right] - P(X_1 = z)\cdot P(X_2 = z), \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \left[\sum_{x=z}^{\infty} p\,(1-p)^{z-1}\cdot p\,(1-p)^{x-1}\right] + \left[\sum_{x=z}^{\infty} p\,(1-p)^{x-1}\cdot p\,(1-p)^{z-1}\right] - p^2\,(1-p)^{2z-2} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 2\,p^2\,(1-p)^{z-2}\left[\sum_{x=z}^{\infty}(1-p)^x\right] - p^2\,\left[(1-p)^2\right]^{z-1} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 2\,p^2\,(1-p)^{z-2}\cdot\frac{(1-p)^z}{[1-(1-p)]} - p^2\,\left[(1-p)^2\right]^{z-1}, \quad \text{por suma geométrica} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= 2\,p\,(1-p)^{2\,z-2} - p^2\,\left[(1-p)^2\right]^{z-1} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 2\,p\,\left[(1-p)^2\right]^{z-1} - p^2\,\left[(1-p)^2\right]^{z-1} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= p\,\left[(1-p)^2\right]^{z-1}(2-p), \quad z = 1, 2, \ldots \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z) &= \sum_{z=1}^{\infty} z\,P(Z = z) \\
&= \sum_{z=1}^{\infty} z\,p\,\left[(1-p)^2\right]^{z-1}(2-p) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{p\,(2-p)}{[1-(1-p)^2]}\sum_{z=1}^{\infty} z\,[1-(1-p)^2]\,\left[(1-p)^2\right]^{z-1} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{p\,(2-p)}{[1-(1-p)^2]}\cdot\frac{1}{[1-(1-p)^2]}, \quad \text{valor esperado de una Geométrica}\left(1-[1-p]^2\right) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= \frac{p\,(2-p)}{[1-(1-p)^2]^2} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{p\,(2-p)} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Durante la semana pasada se llevó a cabo la segunda vuelta de la elección de la FEUC. Un estudiante, tratando de adelantarse a los diferentes escenarios levantó una encuesta los días previos a la elección, y consultó a 100 estudiantes con respecto a su creencia respecto a los resultados finales. La información recogida es la que sigue:

Cree que ganará el NAU	45
Cree que ganará la 1A	38
No es claro quién ganará	17

Como la encuesta tienen tres opciones de respuesta el modelo Bernoulli no sirve, por lo tanto, el estudiante plantea el siguiente modelo de probabilidad asociado a las creencias, en términos de un parámetro θ que representa un indicador de adherencia a la estabilidad:

$$P(\text{Crencia por NAU}) = \theta^2$$
$$P(\text{Crencia por 1A}) = 2\,\theta\,(1-\theta)$$
$$P(\text{No se la juega por ninguna lista}) = (1-\theta)^2$$

Determine el estimador de θ por el método de la máxima verosimilitud y a partir de este obtenga el estimador de cada una de las probabilidades.

Solución

EYP1113- I3

P2)

1 $L = [\theta^2]^{n_1}[2\theta(1-\theta)]^{n_2}[(1-\theta)^2]^{n_3}$, con $n_1+n_2+n_3=n$

$= 2^{n_2}\,\theta^{2n_1+n_2}\,(1-\theta)^{n_2+2n_3}$ 1

$\log L = \text{cte} + (2n_1+n_2)\log\theta + (n_2+2n_3)\log(1-\theta)$

$\dfrac{\partial}{\partial\theta} = \dfrac{2n_1+n_2}{\theta} - \dfrac{n_2+2n_3}{1-\theta} = 0$ 1

$(1-\theta)(2n_1+n_2) = \theta(n_2+2n_3)$

$2n_1+n_2 = \theta(2n_1+n_2+n_2+2n_3)$

$2n_1+n_2 = \theta\cdot 2n$

$\to \hat{\theta} = \dfrac{2n_1+n_2}{2n}$ 1

1 reemplazando $\hat{\theta} = \dfrac{2\times 45+38}{200} = 0{,}64$

Así,

$P(\text{NAU}) = 0{,}64^2 = 0{,}4096$

1 $P(1A) = 2\cdot 0{,}64\times 0{,}36 = 0{,}4608$

$P(\text{indeciso}) = (1-0{,}64)^2 = 0{,}1296$ //

Problema 3

Uno de los factores más relevantes en la evaluación del Transantiago es el cumplimiento de la frecuencia en las horas puntas. Usted, buscando establecer si este criterio se cumple para una línea específica - 210 P.Alto, Vicuña, Plaza Italia - realiza mediciones entre las 7.30 y 8.30 hrs. en el trayecto (Sur-Norte). De acuerdo al contrato, la frecuencia debe ser al menos 6 vehículos por hora en ese horario.

La toma de datos la inicia cada día a partir de las 7.30 hrs., tomando el tiempo transcurrido entre buses por el frontis del campus san Joaquín, deteniendo la medición a las 8.30 hrs.

Los resultados agregados son, para n buses medidos, expresados en minutos:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1600, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 48600, \quad \text{mín}\{x_1, \ldots, x_n\} = 3, \quad \text{máx}\{x_1, \ldots, x_n\} = 28, \quad n = 140$$

Asumiendo (i) independencia entre los tiempos de cada bus, (ii) homogeneidad durante el módulo horario: 7.30 y 8.30, (iii) que los tiempos de cada bus distribuyen exponencial.

(a) **[3.0 Ptos]** Obtenga el estimador de máxima verosimilitud y su distribución asintótica del (o los) parámetros de la distribución.

(b) **[3.0 Ptos]** ¿Existe evidencia que permita afirmar que el tiempo medio entre buses es superior a los 10 minutos? Use $\alpha = 5\,\%$.

Solución

EYP1113- I3

P3)

a) $X_1, X_2, .\ X_n$ iid $Exp(\lambda)$

nos interesa λ

Así, $L = \prod \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}$ (1)

$\log L = n \log \lambda - \lambda \sum x_i$

$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum x_i}$ (1)

Por propiedades

$\hat{\lambda} \stackrel{\cdot}{\sim} N(\lambda, \sqrt{(I_n(\lambda))^{-1}})$

$\therefore I_n(\lambda) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\right)$

Así, $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} \Rightarrow -\mathbb{E}\left(-\frac{n}{\lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda^2}$

es decir, $\hat{\lambda} \stackrel{\cdot}{\sim} N(\lambda ; \sqrt{\lambda^2/n})$ (1)

P3] b) Sea $\mu = \frac{1}{\lambda}$ tiempo medio

Nos interesa $H_0: \mu = 10$ vs $H_a: \mu > 10$ (1)

(o equiv $H_0: \lambda = 0{,}1$ vs $H_a: \lambda < 0{,}1$)

Debemos determinar EMV de μ y su distrib

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\hat{\lambda}} \overset{\circ}{\sim} N\left(\frac{1}{\lambda}; \sqrt{\frac{1}{n\lambda^2}}\right)$$ (0,5)

ya que $[g'(\lambda)]^2 (I(\lambda))^{-1} = \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)^2 \cdot \frac{\lambda^2}{n} = \frac{1}{n\lambda^2}$ //

bajo $H_0: \lambda = 0{,}1$ se tiene

$$\hat{\mu} \overset{\circ}{\sim} N(10; 0{,}84515)$$ (0,5)

por tanto $z = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sqrt{v(\mu_0)}} = \frac{11{,}4286 - 10}{0{,}84515} = 1{,}69$

Conclusión

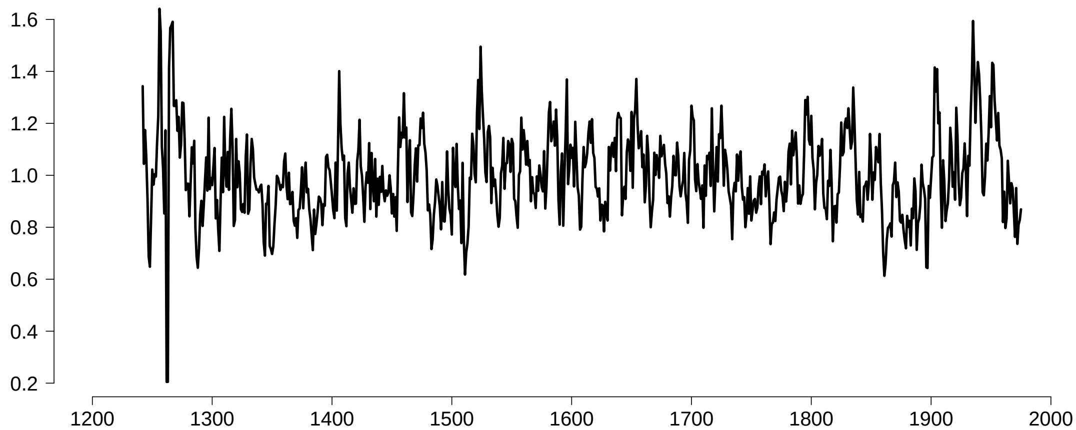
(0,5) alt1) como $z_c = 1{,}69 > z_{1-\alpha} = 1{,}645$ se rechaza H_0

alt2) valor-p $= P(Z > 1{,}69) = 0{,}0455 < \alpha$

Es decir, Existe evidencia que permite afirmar que el tiempo medio entre buses es superior a 10 min. (0,5)

Problema 4

En climatología la búsqueda de información en la naturaleza para determinar (o predecir) el comportamiento del clima en el pasado (o futuro) es fundamental y un ejemplo de ello es el uso de árboles milenarios. La edad de un árbol se puede determinar por el número de anillos que forman su tronco y el ancho de estos es un muy buen "parámetro" para saber si el año fue lluvioso o seco. A continuación se presenta el ancho de los anillos de un árbol ubicado en el sector de Piedra del Águila, Malleco - Chile, entre los años 1242-1975.



Un investigador propone que el ancho de los anillos en el año t, digamos Y_t, depende del pasado de la siguiente manera:

$$Y_t = \begin{cases} \nu + Z_t, & t = 1242 \\ \nu + \phi\, Y_{t-1} + Z_t, & t = 1243, 1244, \ldots, 1975 \end{cases}$$

con $\{Z_t\}$ variables aleatorias independientes con distribución Normal$(0,\, \sigma)$, ν, ϕ (con $|\phi| < 1$) y σ parámetros.

(a) **[2.0 Ptos]** Muestre que

$$Y_{1242+k} = \frac{\nu\,(1-\phi^{k+1})}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{k} \phi^j\, Z_{1242+k-j}$$

(b) **[4.0 Ptos]** Muestre que

$$\mathbf{Cov}(Y_t,\, Y_{t+h}) = \sigma^2\, \phi^h \left[\frac{1-\phi^{2\,(t-1242+1)}}{1-\phi^2}\right]$$

para $t = 1242, \ldots, 1975$ y $h = 0, 1, 2, \ldots$.

Solución

(a) Tenemos que se cumple para $k = 1$:

$$\begin{aligned}
Y_{1242+1} &= \nu + \phi\, Y_{1242} + Z_{1242+1} \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \nu + \phi\,\nu + \phi\, Z_{1242} + Z_{1242+1} \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \nu\,(1+\phi) + \phi\, Z_{1242} + Z_{1242+1} \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \nu\,(1+\phi)\cdot\left(\frac{1-\phi}{1-\phi}\right) + \phi\, Z_{1242} + Z_{1242+1} \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \frac{\nu\,\left(1-\phi^{1+1}\right)}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{1} \phi^j\, Z_{1242+1-j} \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $k = n$:

$$Y_{1242+n} = \frac{\nu\,(1-\phi^{n+1})}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{n} \phi^j\, Z_{1242+n-j} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Por demostrar que se cumple para $k = n+1$:

$$\begin{aligned}
Y_{1242+(n+1)} &= \nu + \phi\, Y_{1242+n} + Z_{1242+(n+1)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \nu + \phi\,\left[\frac{\nu\,(1-\phi^{n+1})}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{n} \phi^j\, Z_{1242+n-j}\right] + Z_{1242+(n+1)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \nu + \phi\,\left[\frac{\nu\,(1-\phi^{n+1})}{1-\phi}\right] + \left[\sum_{j=0}^{n} \phi^{j+1}\, Z_{1242+n-j}\right] + Z_{1242+(n+1)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \nu\,\left[1 + \phi\,\frac{(1-\phi^{n+1})}{1-\phi}\right] + \left[\sum_{i=1}^{n} \phi^{i}\, Z_{1242+n-(i-1)}\right] + Z_{1242+(n+1)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \nu\,\left[\frac{1-\phi+\phi-\phi^{(n+1)+1}}{1-\phi}\right] + \left[\sum_{i=1}^{n+1} \phi^{i}\, Z_{1242+(n+1)-i}\right] + Z_{1242+(n+1)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{\nu\,\left[1-\phi^{(n+1)+1}\right]}{1-\phi} + \sum_{i=0}^{n+1} \phi^{i}\, Z_{1242+(n+1)-i} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por inducción tenemos que

$$Y_{1242+k} = \frac{\nu\,(1-\phi^{k+1})}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{k} \phi^j\, Z_{1242+k-j} \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}$$

(b) Tenemos

$$\begin{aligned}
\textbf{Cov}\,(Y_{1242+k},\, Y_{1242+k+h}) &= \textbf{Cov}\left[\frac{\nu\,(1-\phi^{k+1})}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{k} \phi^j\, Z_{1242+k-j},\, \frac{\nu\,(1-\phi^{k+h+1})}{1-\phi} + \sum_{i=0}^{k+h} \phi^i\, Z_{1242+k+h-i}\right] \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \textbf{Cov}\left[\sum_{j=0}^{k} \phi^j\, Z_{1242+k-j},\, \sum_{i=0}^{k+h} \phi^i\, Z_{1242+k+h-i}\right] \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k+h} \phi^{i+j}\, \textbf{Cov}\left[Z_{1242+k-j},\, Z_{1242+k+h-i}\right] \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{h-1} \phi^{i+j}\, \textbf{Cov}\left[Z_{1242+k-j},\, Z_{1242+k+h-i}\right] + \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=h}^{h+k} \phi^{i+j}\, \textbf{Cov}\left[Z_{1242+k-j},\, Z_{1242+k+h-i}\right] \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= 0 + \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=h}^{h+k} \phi^{i+j}\, \textbf{Cov}\left[Z_{1242+k-j},\, Z_{1242+k+h-i}\right], \quad \text{por independencia de los } \{Z_t\} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{s=0}^{k} \phi^{j+s+h}\, \textbf{Cov}\left[Z_{1242+k-j},\, Z_{1242+k-s}\right] \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \phi^{2\,j+h}\, \sigma^2, \quad \text{por independencia de los } \{Z_t\} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \sigma^2\, \phi^h\, \sum_{j=0}^{k} (\phi^2)^j \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \sigma^2\, \phi^h\, \left(\frac{1-\phi^{2\,(k+1)}}{1-\phi^2}\right) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Sea $t = 1242 + k$, **[0.2 Ptos.]** entonces

$$\mathbf{Cov}(Y_t,\, Y_{t+h}) = \sigma^2\, \phi^h\, \left[\frac{1-\phi^{2\,(t-1242+1)}}{1-\phi^2}\right] \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Formulario

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de probabilidad p_X o de densidad f_X, determinada por un parámetro θ. Si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil del parámetro θ, entonces:
  - $\mathbf{E}(\hat{\theta}) \to \theta$, cuando $n \to \infty$.
  - $\mathbf{Var}(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{I_n(\theta)}$, con $I_n(\theta) = -\mathbf{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}\,\ln L(\theta)\right]$.
  - $\hat{\theta} \,\dot{\sim}\, \text{Normal}\left(\theta,\, \sqrt{\dfrac{1}{I_n(\theta)}}\right)$, cuando $n \to \infty$.
  - El estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$, cuya varianza está dada por: $\mathbf{Var}[g(\hat{\theta})] = \dfrac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}$.
- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\, \cdot)$:

$$(1) \quad B(q,\, r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\, dx; \quad (2) \quad B(q,\, r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\, (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\, e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\, M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\ \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \dfrac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\, n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$
1	3,078	6,314	12,706	31,821
2	1,886	2,920	4,303	6,965
3	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,476	2,015	2,571	3,365
6	1,440	1,943	2,447	3,143
7	1,415	1,895	2,365	2,998
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764
11	1,363	1,796	2,201	2,718
12	1,356	1,782	2,179	2,681
13	1,350	1,771	2,160	2,650
14	1,345	1,761	2,145	2,624
15	1,341	1,753	2,131	2,602
16	1,337	1,746	2,120	2,583
17	1,333	1,740	2,110	2,567
18	1,330	1,734	2,101	2,552
19	1,328	1,729	2,093	2,539
20	1,325	1,725	2,086	2,528
21	1,323	1,721	2,080	2,518
22	1,321	1,717	2,074	2,508
23	1,319	1,714	2,069	2,500
24	1,318	1,711	2,064	2,492
25	1,316	1,708	2,060	2,485
26	1,315	1,706	2,056	2,479
27	1,314	1,703	2,052	2,473
28	1,313	1,701	2,048	2,467
29	1,311	1,699	2,045	2,462
30	1,310	1,697	2,042	2,457
∞	1,282	1,645	1,960	2,326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$

ν	$c_{0,025}$	$c_{0,05}$	$c_{0,10}$	$c_{0,90}$	$c_{0,95}$	$c_{0,975}$	$c_{0,99}$	$c_{0,995}$
1	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93