Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2010

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113-1**
Pauta	**:**	**I2**
Profesor	**:**	**Ricardo Olea**
Ayudante	**:**	**Claudia Ortega.**

1. **(25 %)** Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2\, e^{-\lambda\, y}, & 0 \leq x \leq y, \quad \lambda > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) **(10 %)** Obtenga $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. Si reconoce algún modelo identifiquelo.

   (b) **(10 %)** Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

   (c) **(5 %)** Obtenga $f_{X\,|\,Y=y}(x)$ y $f_{Y\,|\,X=x}(y)$. Si reconoce algún modelo identifiquelo.

Solución

(a) La densidad marginal de X es:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \\ &= \int_x^{\infty} \lambda^2\, e^{-\lambda y}\,dy \quad \textcolor{red}{[\mathbf{2\,\%}]} \\ &= \lambda \int_x^{\infty} \lambda\, e^{-\lambda y}\,dy \\ &= \lambda\,\left(-e^{-\lambda}\right)\Big|_x^{\infty} \\ &= \lambda\, e^{-\lambda\, x}, \quad x \geq 0,\ \lambda > 0 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{2\,\%}]} \end{aligned}$$

Mientras que la densidad marginal de Y esta dada por:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \\ &= \int_0^{y} \lambda^2\, e^{-\lambda\, y}\,dx \quad \textcolor{red}{[\mathbf{2\,\%}]} \\ &= \lambda^2\, e^{-\lambda y} x\Big|_0^{y} \\ &= \lambda^2\, y\, e^{-\lambda\, y}, \quad y \geq 0,\ \lambda > 0 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{2\,\%}]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$X \sim \text{Exponencial}(\lambda) \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]} \quad \text{e} \quad Y \sim \text{Gamma}(2,\, \lambda) \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]}$$

(b) Por definición tenemos que

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y.$$

Para los modelos encontrados en (a) del formulario se tiene que:

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda}, \quad \mu_Y = \frac{2}{\lambda} \quad \textbf{[2 \%]}$$

Mientras que

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy \\ &= \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{y} xy\, \lambda^2\, e^{-\lambda\, y} dx\, dy \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= \int_{0}^{\infty} y\, \lambda^2\, e^{-\lambda\, y} \left\{ \int_{0}^{y} x dx \right\} dy \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{y^3}{2}\, \lambda^2\, e^{-\lambda\, y}\, dy \\ &= \frac{\Gamma(4)}{2\, \lambda^2} \int_{0}^{\infty} \frac{\lambda^4}{\Gamma(4)}\, y^{4-1}\, e^{-\lambda\, y}\, dy \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= \frac{3}{\lambda^2} \quad \textbf{[2 \%]} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \textbf{[2 \%]}$$

(c) Tenemos que

$$\begin{aligned} f_{X\,|\,Y=y}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{1}{y}, \quad 0 \leq x \leq y \quad \textbf{[1.5 \%]} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_{Y\,|\,X=x}(y) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} \\ &= \lambda\, e^{-\lambda\, (y-x)}, \quad 0 \leq x \leq y,\ \lambda > 0 \quad \textbf{[1.5 \%]} \end{aligned}$$

Es decir,

$$X\,|\,Y = y \sim \text{Uniforme}(0, y) \quad \textbf{[1 \%]} \quad \text{e} \quad Y\,|\,X = x \sim \text{Exponencial}(\lambda) - \text{Trasladada en } x \quad \textbf{[1 \%]}$$

2. **(35 %)** Una gran antena parabólica está diseñado para soportar la fuerza el viento. Durante una tormenta de viento, la presión máxima inducida por el viento a la antena, P, se calcula como:

$$P = \frac{1}{2}\,C\,R\,V^2,$$

donde C = coeficiente de arrastre; R = densidad de masa de aire en slugs/mts^3; V = velocidad máxima del viento en mts/seg. y P = presión en libra/mts^2. Considere que C, R y V son variables aleatorias independientes con distribución lognormal, de las cuales se tiene la siguiente información:

$\mu_C = 1.80$;	$\delta_C = 0.20$
$\mu_R = 2.3 \times 10^{-3}$ slugs/mts^3;	$\delta_R = 0.10$
$\mu_V = 120$ mts/seg;	$\delta_V = 0.45$

(a) **(15 %)** Determine la distribución de la presión máxima del viento P. Identifique y calcule sus parámetros.

(b) **(5 %)** ¿Cuál es la probabilidad que la presión máxima del viento exceda las 30 libras/mts^2?

(c) **(5 %)** La actual capacidad de resistencia de la antena se comporta como una variable aleatoria lognormal con media 90 libras/mts^2 y c.o.v. de 0.15. Una falla en la antena se producirá cuando la máxima presión del viento exceda su capacidad de resistencia. Durante una tormenta de viento, ¿cuál es la probabilidad que la antena falle?

(d) **(5 %)** Si las ocurrencias de tormentas vientos ocurren según un proceso de Poisson con una tasa de incidencia media de una vez cada 5 años, ¿cuál es la probabilidad que falle la antena en 25 años?

(e) **(5 %)** Suponga que cinco antenas fueron construidas e instaladas en una región determinada. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de las cinco antenas no fallará en 25 años? Suponga que las fallas entre las antenas son estadísticamente independientes.

Solución

(a) Tenemos que

$$\ln P = -\ln 2 + \ln C + \ln R + 2\,\ln V, \quad \textbf{[1 \%]}$$

donde

$$\begin{aligned} \ln C &\sim \text{Normal}(\lambda_C,\,\xi_C) \\ \ln R &\sim \text{Normal}(\lambda_R,\,\xi_R) \quad \textbf{[2 \%]} \\ \ln V &\sim \text{Normal}(\lambda_V,\,\xi_V) \end{aligned}$$

A partir de la información del enunciado podemos determinar los parámetros

$$\begin{aligned} \xi_C &= \sqrt{\ln\left(1+\delta_C^2\right)} = 0.1980422 \Rightarrow \lambda_C = \ln\mu_C - \frac{1}{2}\,\xi_C^2 = +0.5681763 \quad \textbf{[2 \%]} \\ \xi_R &= \sqrt{\ln\left(1+\delta_R^2\right)} = 0.0997514 \Rightarrow \lambda_R = \ln\mu_R - \frac{1}{2}\,\xi_R^2 = -6.0798213 \quad \textbf{[2 \%]} \\ \xi_V &= \sqrt{\ln\left(1+\delta_V^2\right)} = 0.4294214 \Rightarrow \lambda_V = \ln\mu_V - \frac{1}{2}\,\xi_V^2 = +4.6952904 \quad \textbf{[2 \%]} \end{aligned}$$

Por independencia de C, R y V se tiene que

$$\begin{aligned} \ln P &\sim \text{Normal}\left(-\ln 2 + \lambda_C + \lambda_R + 2\,\lambda_V,\, \sqrt{\xi_C^2 + \xi_R^2 + 4\,\xi_V^2}\right) \quad \textbf{[2 \%]} \\ &\sim \text{Normal}\,(3.185789,\ 0.8870073) \quad \textbf{[1 \%]} \\ \Rightarrow P &\sim \text{Log-Normal}\,(\lambda_P = 3.185789,\ \xi_P = 0.8870073) \quad \textbf{[3 \%]} \end{aligned}$$

(b) Se pide

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(P > 30) &= 1 - \mathrm{P}(P \leq 30) \quad \textbf{[1 \%]} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln 30 - \lambda_P}{\xi_P}\right) \quad \textbf{[1 \%]} \\ &= 1 - \Phi(0.242849) \\ &\approx 1 - \Phi(0.24) \\ &= 1 - 0.5948 \\ &= 0.4052 \quad \textbf{[3 \%]} \end{aligned}$$

(c) Sea S la resistencia actual de la antena con distribución Log-Normal(λ_S, ξ_S). Los parámetros están dados por:

$$\begin{aligned} \xi_S &= \sqrt{\ln(1+\delta_S^2)} = 0.1491664 \quad \textbf{[1 \%]} \\ \lambda_S &= \ln \mu_S - \frac{1}{2}\,\xi_S^2 = 4.488684 \quad \textbf{[1 \%]} \end{aligned}$$

La probabilidad que la antena falle esta dada por:

$$\mathrm{P}(S < P) = P\left(\frac{S}{P} < 1\right) = \mathrm{P}(\ln\, S - \ln\, P \leq 0) \quad \textbf{[1 \%]}$$

Asumiendo independencia entre la presión del viento y la resistencia de la antena se tiene que:

$$\begin{aligned} \ln S - \ln P &\sim \text{Normal}\left(\lambda_S - \lambda_P,\ \sqrt{\xi_S^2 + \xi_P^2}\right) \\ &\sim \text{Normal}(1.302895,\ 0.8994624) \quad \textbf{[1 \%]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad solicitada es:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S < P) &= \Phi\left(\frac{0 - 1.302895}{0.8994624}\right) \\ &= \Phi(-1.448526) \\ &= 1 - \Phi(1.448526) \\ &\approx 1 - \Phi(1.45) \\ &= 1 - 0.9265 \\ &= 0.0735 \quad \textbf{[1 \%]} \end{aligned}$$

(d) Sean las siguientes variables aleatorias: X: N° de tormentas en 25 años en que la antena falla Y: N° de tormentas en 25 años.

Como se espera una tormenta cada cinco años, entonces se esperan 5 tormentas de viento durante 25 años. Es decir,

$$Y \sim \text{Poisson}(\nu = 5) \quad \textbf{[1 \%]}$$

Tenemos que

$$X \,|\, Y = y \sim \text{Binomial}(y,\, p), \quad \textbf{[1 \%]}$$

con $p = 0.0735$ (probabilidad que la antena falle durante una tormenta de viento).

La probabilidad solicitada corresponde a

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) \quad \textbf{[1 \%]}$$

Por ley de probabilidades totales tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = x) &= \sum_{y=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = x \,|\, Y = y)\, \mathrm{P}(Y = y) \\
&= \sum_{y=x}^{\infty} \mathrm{P}(X = x \,|\, Y = y)\, \mathrm{P}(Y = y) \\
&= \sum_{y=x}^{\infty} \binom{y}{x} p^x\, (1-p)^{y-x}\, \frac{\nu^y\, e^{-\nu}}{y!} \\
&= \sum_{y=x}^{\infty} \frac{1}{x!\,(y-x)!} p^x\, (1-p)^{y-x}\, \nu^y\, e^{-\nu} \\
&= \frac{[\nu\, p]^x\, e^{-\nu}}{x!} \sum_{y=x}^{\infty} \frac{[\nu\,(1-p)]^{y-x}}{(y-x)!} \\
&= \frac{[\nu\, p]^x\, e^{-\nu}}{x!} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{[\nu\,(1-p)]^{z}}{z!} \\
&= \frac{[\nu\, p]^x\, e^{-\nu}}{x!}\, e^{\nu\,(1-p)} \\
&= \frac{[\nu\, p]^x\, e^{-\nu\, p}}{x!}
\end{aligned}
$$

Esto implica que

$$X \sim \text{Poisson}(\nu\, p), \quad \textbf{[1 \%]}$$

con $\nu\, p = 5 \cdot 0.0735 = 0.3675$.

Por lo tanto, la probabilidad que la antena falle en 25 años es:

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \frac{[0.3675]^0\, e^{-0.3675}}{0!} = 0.3075367 \quad \textbf{[1 \%]}$$

(e) Sea Z número de antenas que fallan en 25 años de las cinco instaladas.

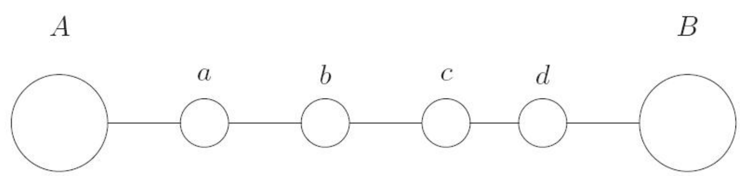
$$Z \sim \text{Binomial}(5, q), \quad \textbf{[2 \%]}$$

donde $q = 0.3075367$ obtenido en (d). **[1 %]**
La probabilidad solicitada es

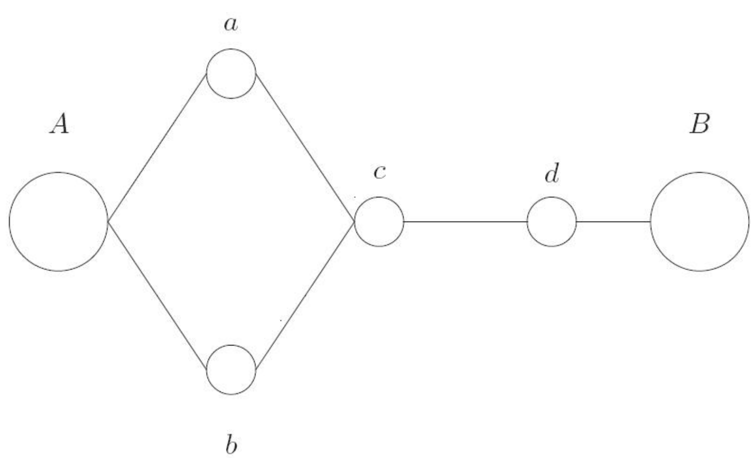
$$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) = 1 - \binom{5}{0} q^0\, (1-q)^{5-0} - \binom{5}{1} q^1\, (1-q)^{5-1} = 0.4872324 \quad \textbf{[2 \%]}$$

3. **(25 %)** La corriente producida en A circula por una red hasta B pasando por nodos intermedios a, b, c y d. Se arranca el sistema y los nodos a, b, c y d están operativos unos tiempos (en segundos) T_a, T_b, T_c y T_d. Estos tiempos son variables aleatorias independientes que siguen todas una misma distribución Exponencial con una media de 20 segundos.

   (a) **(10 %)** ¿Cuál es la probabilidad de que la corriente circule de A a B al menos 10 segundos en el siguiente circuito?



   (b) **(15 %)** Calcule la probabilidad pedida en (a) usando este otro circuito.



Solución

(a) Sea T el tiempo en que circula corriente entre A y B. En términos de los tiempos de operación de los nodos se tiene que

$$T = \min\{T_a, T_b, T_c, T_d\} \quad \textbf{[3 \%]}$$

Como T_a, T_b, T_c y T_d son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Exponencial(ν) se tiene que

$$f_T(t) = 4\,[1 - F(t)]^{4-1}\,f(t) = 4\,\nu\,e^{-4\,\nu\,t}. \quad \textbf{[3 \%]}$$

Reemplazando $\nu = \frac{1}{20}$ se obtiene que

$$T \sim \text{Exponencial}(0.2) \quad \textbf{[2 \%]}$$

Por lo tanto, la probabilidad solicitada es:

$$\text{P}(T > 10) = 1 - \text{P}(T \leq 10) = 1 - [1 - e^{-2}] = e^{-2} = 0.1353353 \quad \textbf{[2 \%]}$$

(a) Para este caso tenemos que

$$T = \min\{\max\{T_a, T_b\}, T_c, T_d\} \quad \textbf{[3 \%]}$$

Luego

$$\begin{aligned}
P(T \leq t) &= P(\text{mín}\{\text{máx}\{T_a, T_b\}, T_c, T_d\} \leq t) \\
&= 1 - P(\text{mín}\{\text{máx}\{T_a, T_b\}, T_c, T_d\} > t) \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= 1 - P(\text{máx}\{T_a, T_b\} > t) P(T_c > t) P(T_d > t), \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= 1 - \left[1 - P(\text{máx}\{T_a, T_b\} \leq t)\right] P(T_c > t) P(T_d > t) \\
&= 1 - \left[1 - P(T_a \leq t) P(T_b \leq t)\right] P(T_c > t) P(T_d > t) \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= 1 - \left[1 - (1 - e^{-\nu\, t}) \cdot (1 - e^{-\nu\, t})\right] \cdot e^{-\nu\, t} \cdot e^{-\nu\, t} \\
&= 1 - \left[1 - (1 - e^{-\nu\, t})^2\right] \cdot e^{-2\,\nu\, t} \\
\Rightarrow P(T > 10) &= \left[1 - (1 - e^{-\nu\, t})^2\right] \cdot e^{-2\,\nu\, t} \quad \textbf{[5 \%]}
\end{aligned}$$

Luego, reemplazando $\nu = \frac{1}{20}$ la probabilidad solicitada es

$$P(T > 10) = \left[1 - \left(1 - e^{-0.5}\right)^2\right] \cdot e^{-1} = 0.3109250 \quad \textbf{[4 \%]}$$

4. **(15 %)** Sean $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Exponencial de parámetro ν igual a uno.

   (a) **(10 %)** Muestre que $Z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(k = n,\, \nu = 1)$.

   (b) **(5 %)** Proponga una distribución aproximada para Z_n.

Solución

(a) Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución Gamma$(\alpha, 1)$ y Gamma$(\beta, 1)$ respectivamente.

Definamos $Z = X + Y$.

La función densidad de Z esta dada por:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)\, dy \\
&= \int_{0}^{z} f_X(z-y)\, f_Y(y)\, dy, \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= \int_{0}^{z} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,(z-y)^{\alpha-1}\, e^{-(z-y)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)}\, y^{\beta-1}\, e^{-y} dy \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, e^{-z} \int_{0}^{z} (z-y)^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, dy \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, z^{(\alpha+\beta)-1} e^{-z} \underbrace{\int_{0}^{z} \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, \frac{(z-y)^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}}{z^{(\alpha+\beta)-1}}\, dy}_{1 \qquad \text{Densidad Beta}} \quad \textbf{[4 \%]} \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, z^{(\alpha+\beta)-1} e^{-z} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, z^{(\alpha+\beta)-1}\, e^{-z}, \quad z \geq 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $Z \sim \text{Gamma}(\alpha+\beta, 1)$. **[2 %]**

Como una distribución Exponencial(1) = Gamma(1,1), entonces aplicando el resultado anterior se tiene que

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= X_1 \sim \text{Gamma}(1,1) \\
Z_2 &= Z_1 + X_2 \sim \text{Gamma}(2,1) \\
Z_3 &= Z_2 + X_3 \sim \text{Gamma}(3,1) \\
\vdots &= \vdots \\
Z_n &= Z_{n-1} + X_n \sim \text{Gamma}(n,1) \quad \textbf{[2 \%]}
\end{aligned}
$$

(b) Por teorema central de límite tenemos que

$$
\overline{X}_n \overset{\text{aprox.}}{\sim} \text{Normal}\left(\frac{1}{\lambda},\, \frac{1}{\sqrt{n}\,\lambda}\right) \Rightarrow Z_n \overset{\text{aprox.}}{\sim} \text{Normal}\left(\frac{n}{\lambda},\, \frac{\sqrt{n}}{\lambda}\right) \quad \textbf{[5 \%]}
$$

Formulario

Distribución	$P(X=x)$ o $f_X(x)$	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	p	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$
Geometrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2 \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r} p^r (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\, p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\, e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$
Exponencial	$\nu\, e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\, \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Gamma Trasladada	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, (x-\gamma)^{k-1}\, e^{-\nu\,(x-\gamma)}$	$x \geq \gamma$	$\nu,\, \gamma,\, k$	$\mu_X = k/\nu + \gamma$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\, \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\xi\,x}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x-\lambda}{\xi}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\, \xi$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\,\xi^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_x^2\left(e^{\xi^2} - 1\right)$
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\, b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,r)}\, \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\, r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$

- Propiedades de $\Gamma(\cdot)$ son:

$$(1)\ \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a), \quad (2)\ \Gamma(n+1) = n! \quad \text{si } n \in \mathbb{N}, \quad (3); \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades de $B(\cdot,\, \cdot)$:

$$(1)\ B(q,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2)\ B(q,r) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- **Valor Esperado**
  - Sea X una variable aleatoria discreta y Θ_X el conjunto de todos los valores posible.

$$E[g(X)] = \sum_{x \in \Theta_X} g(x) \cdot P(X = x)$$

  - Sea X una variable aleatoria continua y Θ_X la unión de todos los intervalos en los $\mathbb{R}$ en que la función de densidad $f_X(x) \neq 0$.

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx = \int_{x \in \Theta_X} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

  - Sean X e Y variables aleatorias distribuidas conjuntamente

$$E[g(X,Y)] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\ \displaystyle\sum_{x \in \Theta_X} \sum_{y \in \Theta_Y} g(x,y)\, P(X = x,\, Y = y) \end{cases}$$

- **Varianza**: Sea X una variable aleatoria,

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = E(X^2) - \mu_X^2$$

- **Skewness**: Sea X una variable aleatoria,

$$\theta = \frac{E[(X - \mu_X)^3]}{\sigma_X^3}$$

- **Kurtosis**: Sea X una variable aleatoria,

$$K = \frac{E[(X - \mu_X)^4]}{\sigma_X^4}$$

- **Covarianza**: Sean X e Y variables aleatorias,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y$$

Tabla de Percentiles p

Distribución Normal Estándar

z_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990