Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2010

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I1**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena (Sec 02 y 03) y Ricardo Olea (Sec 01)**
Ayudantes	**:**	**Pablo Flores, Constanza Quezada, Victoria Veas.**

Problema 1

Sea Y una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right),$$

con $\phi(z) = \dfrac{\exp(z)}{[1+\exp(z)]^2}$, $-\infty < y < \infty$, $\sigma > 0$ y $-\infty < \mu < \infty$.

(a) **[2.0 Ptos.]** Determine su función de distribución de probabilidad acumulada, $F_Y(y)$.

(b) **[3.0 Ptos.]** Calcule la moda, la mediana y el valor esperado.

(c) **[1.0 Ptos.]** A partir de los resultados obtenidos en (b), ¿qué puede concluir con respecto a la forma de la función de densidad de Y?

Solución

(a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)\,du = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sigma}\,\phi\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)\,du = \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \phi\,(z)\;dz \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{\exp(z)}{[1+\exp(z)]^2}\,dz = \left.\frac{\exp(z)}{[1+\exp(z)]}\right|_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{\exp\left(\dfrac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\left[1+\exp\left(\dfrac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]}, \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \quad -\infty < y < \infty \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) La moda en el caso continuo corresponde al valor en que se maximiza la función de densidad, es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}f_Y(y) &= \frac{1}{\sigma}\phi'\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{\sigma}\\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left\{\frac{\exp\left(\dfrac{y-\mu}{\sigma}\right)\left[1-\exp\left(\dfrac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]}{\left[1+\exp\left(\dfrac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^3}\right\} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Igualando a cero se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma^2}\left\{\frac{\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\left[1-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]}{\left[1+\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^3}\right\} &= 0 \\
\Rightarrow \left\{\frac{\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\left[1-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]}{\left[1+\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^3}\right\} &= 0 \\
\Rightarrow \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\left[1-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right] &= 0 \\
\Rightarrow \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2 &= 0 \\
\Rightarrow \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) &= \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2 \\
\Rightarrow 1 &= \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \\
\Rightarrow 0 &= \frac{y-\mu}{\sigma} \\
\Rightarrow \mu &= y \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

La función se maximiza en $y = \mu$, es decir, la moda para esta distribución es μ. **[0.2 Ptos.]**

Por otra parte, la mediana por definición cumple con que

$$F_Y(y_{\text{med}}) = \frac{1}{2} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Tomando el resultado obtenido en (a) tenemos que

$$\frac{\exp\left(\frac{y_{\text{med}}-\mu}{\sigma}\right)}{\left[1+\exp\left(\frac{y_{\text{med}}-\mu}{\sigma}\right)\right]} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{\text{med}} = \mu \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Es decir, la distribución acumula 0,5 de probabilidad hasta el valor μ. **[0.2 Ptos.]**

Finalmente el valor esperado por definición está dado por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\, dy \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma\, z + \mu] \cdot \phi\,(z)\; dz \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \phi\,(z)\; dz + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \phi\,(z)\; dz\\
&= \sigma \left[\int_{-\infty}^{0} z \cdot \phi\,(z)\; dz + \int_{0}^{\infty} z \cdot \phi\,(z)\; dz\right] + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \phi\,(z)\; dz \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \sigma \left[-\int_{\infty}^{0} (-u) \cdot \phi\,(-u)\; du + \int_{0}^{\infty} z \cdot \phi\,(z)\; dz\right] + \mu \cdot 1 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \sigma \left[\int_{0}^{\infty} (-u) \cdot \phi\,(-u)\; du + \int_{0}^{\infty} z \cdot \phi\,(z)\; dz\right] + \mu \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \sigma \left[\int_{0}^{\infty} (-u) \cdot \frac{\exp(-u)}{[1+\exp(-u)]^2}\, du + \int_{0}^{\infty} z \cdot \phi\,(z)\; dz\right] + \mu \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \sigma \left[\int_{0}^{\infty} (-u) \cdot \frac{\exp(-u)\cdot\exp(2\,u)}{[\exp(u)+1]^2}\, du + \int_{0}^{\infty} z \cdot \phi\,(z)\; dz\right] + \mu \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \sigma \left[\int_{0}^{\infty} (-u) \cdot \frac{\exp(u)}{[\exp(u)+1]^2}\, du + \int_{0}^{\infty} z \cdot \phi\,(z)\; dz\right] + \mu \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \sigma \left[-\int_{0}^{\infty} u \cdot \phi(u)\, du + \int_{0}^{\infty} z \cdot \phi\,(z)\; dz\right] + \mu\\
&= \sigma \cdot 0 + \mu \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}\\
&= \mu
\end{aligned}
$$

(c) A partir de los resultados obtenidos en (b), podemos concluir qué la forma de la función de densidad de Y es simétrica en torno a μ. **[1.0 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 2

Datos históricos (CONASET, Período 1999-2008) indican que en un día de celebración de fiestas patrias el número de accidentes de tránsito promedio (esperado) son 143 en todo el país. Si estos accidentes ocurren según un Proceso de Poisson,

(a) **[3.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad que el próximo sábado 18 de septiembre entre las 07:00 y 09:00 horas ocurran por lo menos cinco accidentes de tránsito en el país?

(b) **[3.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad que el tiempo transcurrido entre dos accidentes durante la celebración de fiestas patrias sea inferior a 30 minutos?

Solución

(a) Tenemos que número de accidentes en t horas, X_t, se comporta como una variable aleatoria Poisson$(\nu\, t)$, donde ν corresponde al número esperado de accidentes en una hora, es decir, para las fiestas patrias

$$\nu = \frac{143}{24} = 5{,}958333 \quad \textbf{[1.5 Ptos.]}$$

Se pide

$$\begin{aligned} P(X_2 \geq 5) &= 1 - P(X_2 < 5) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\ &= 1 - P(X_2 \leq 4) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\ &= 1 - \left[\frac{(2\nu)^0\, e^{-2\nu}}{0!} + \frac{(2\nu)^1\, e^{-2\nu}}{1!} + \frac{(2\nu)^2\, e^{-2\nu}}{2!} + \frac{(2\nu)^3\, e^{-2\nu}}{3!} + \frac{(2\nu)^4\, e^{-2\nu}}{4!}\right] \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\ &= 1 - [0{,}0000 + 0{,}0001 + 0{,}0005 + 0{,}0019 + 0{,}0056] \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\ &= 0{,}9919 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad que el próximo sábado 18 de septiembre entre las 07:00 y 09:00 horas ocurran por lo menos cinco accidentes de tránsito en el país es de 0,9919. **[0.2 Ptos.]**

(b) Si X_t corresponde al número de accidentes en t minutos durante las fiestas patrias. Bajo el supuesto que estos se comportan como una variables aleatoria Poisson$(\nu\, t)$, con ν igual al número esperado de accidentes en un minuto, es decir,

$$\nu = \frac{143}{24 \cdot 60} = 0{,}09930556 \quad \textbf{[1.5 Ptos.]}$$

Se tiene entonces que el tiempo (en minutos) entre accidentes se comporta como una variable aleatoria

$$T \sim \text{Exponencial}(\nu). \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Se pide

$$\begin{aligned} P(T < 30) &= 1 - e^{-30\cdot\nu} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\ &= 0{,}9491648 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad que durante las fiestas patrias ocurran dos accidentes en menos de 30 minutos es 0.9492. **[0.2 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 3

Como es bien sabido, durante el mes de mayo ocurren las primeras complicaciones ambientales provocando **Alertas**, **Pre-emergencias** y **Emergencias** en Santiago. Un exhaustivo análisis de los datos para el mes de mayo de años anteriores permiten suponer que el material particulado respirable PM10 diario, sigue una distribución Log-Normal con mediana igual a 149 $\mu g/m^3$ y un c.o.v. de 41.7 % durante días hábiles.

Índices de calidad del Aire por Material Particulado Respirable (ICAP)					
ICAP	Estado	Categoría ICAP	PM10 $\mu g/m^3$ (24 hrs.)	Nivel	Episodio
[0-100]	Bueno	0	0	0	-
(100-200]	Regular	100	150	0	-
(200-300]	Malo	200	195	1	Alerta
(300-400]	Critico	300	240	2	Pre-emergencia
(400-500]	Peligroso	400	285	2	Pre-emergencia
>500	Excede	400	330	3	Emergencia

Asumiendo independencia estadística entre los días, determine la probabilidad que:

(a) **[2.0 Ptos.]** Durante cinco días hábiles en un mes de mayo se observen al menos 2 días con condiciones de al menos de pre-emergencia.

(b) **[2.0 Ptos.]** La segunda alerta del mes de mayo se declare el décimo día hábil.

(c) **[2.0 Ptos.]** Que en un día hábil cualquiera de mayo, en que las condiciones son por lo menos de pre-emergencia, no se llegue a niveles de emergencia.

Solución

(a) Sea X el material particulado respirable en un día hábil cualquiera.

Si $X \sim$ Log-Normal$(\lambda; \zeta)$, entonces $\ln X \sim$ Normal$(\mu = \lambda; \sigma = \zeta)$.

Del enunciado se deduce lo siguiente:

$$x_{\text{mediana}} = \exp(\lambda) \Rightarrow \lambda = 5{,}003946 \approx 5$$
$$\zeta^2 = \ln(1 + \delta_X^2) \Rightarrow \zeta = 0{,}4004025 \approx 0{,}4$$

Esto implica que

$$\ln X \sim \text{Normal}(\mu = 5;\, \sigma = 0{,}4) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

La probabilidad p que en un día hábil de mayo cualquiera el nivel de PM10 diario indique al menos que el episodio sea de pre-emergencia está dada por:

$$\begin{aligned} p &= P(X > 240) \\ &= 1 - P(X \leq 240) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln 240 - 5}{0{,}4}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(1{,}20) \\ &= 1 - 0{,}8849 \\ &= 0{,}1151 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

Si en cinco días hábiles, Y es el número de días hábiles con un episodio de al menos pre-emergencia, entonces,

$$Y \sim \text{Binomial}(n = 5;\, p = 0{,}1151) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2)\\
&= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1)\\
&= 1 - \binom{5}{0} p^0\,(1-p)^{5-0} - \binom{5}{1} p^1\,(1-p)^{5-1}\\
&= 1 - 0{,}895465\\
&= 0{,}1045350 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) La probabilidad p de declarar una alerta un día hábil cualquiera es:

$$\begin{aligned}
p &= P(195 < X < 240)\\
&= \Phi\left(\frac{\ln 240 - \lambda}{\zeta}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 195 - \lambda}{\zeta}\right)\\
&= \Phi\left(\frac{\ln 240 - 5}{0{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 195 - 5}{0{,}4}\right)\\
&= \Phi(1{,}201597) - \Phi(0{,}6824989)\\
&\approx \Phi(1{,}20) - \Phi(0{,}68)\\
&= 0{,}8849 - 0{,}7517\\
&= 0{,}1332 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Sea Z el número de días hábiles que deben transcurrir hasta observar la segunda alerta, es decir,

$$Z \sim \text{Bin-Neg}(r = 2;\, p) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
P(Z = 10) &= \binom{10-1}{r-1} p^r\,(1-p)^{10-r}\\
&= \binom{9}{1} p^2\,(1-p)^8\\
&= 0{,}05088645\\
&\approx 0{,}051 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(c) Se pide

$$\begin{aligned}
P(X < 330 \,|\, X > 240) &= \frac{P(240 < X < 330)}{P(X > 240)} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}\\
&= \frac{\Phi\left(\frac{\ln 330 - \lambda}{\zeta}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 240 - \lambda}{\zeta}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln 240 - \lambda}{\zeta}\right)}\\
&= \frac{\Phi(1{,}997732) - \Phi(1{,}201597)}{1 - \Phi(1{,}201597)}\\
&\approx \frac{\Phi(2{,}00) - \Phi(1{,}20)}{1 - \Phi(1{,}20)}\\
&= \frac{0{,}9772 - 0{,}8849}{1 - 0{,}8849}\\
&= 0{,}8019114 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

Hoy en día, la realidad nos ha mostrado lo riesgosas que son las labores mineras. De hecho, las estadísticas publicadas por Sernageomin (Anuario de la minería chilena 2009) muestran que la probabilidad de presentar un accidente varían según el tamaño de la empresa. La división, según tamaño - horas trabajadas (antiguas horas - hombres), considera cuatro categorías (Grandes, Medianas, Pequeñas y Muy pequeñas), y las probabilidades de accidentes son 0.02, 0.10, 0.14 y 0.20 respectivamente (mientras más pequeñas-artesanales, más riesgosas son). Por otra parte, la parti-cipación en el mercado, según tamaño, de cada categoría es 47 %, 31 %, 16 % y 6 % respectivamente.

(a) **[3.0 Ptos.]** Determine la probabilidad de ocurrencia de un accidente en el área de la minería.

(b) **[3.0 Ptos.]** Si ha ocurrido un accidente, ¿cuál es la probabilidad que haya ocurrido en una empresa considerada de mediana minería?

Solución

(a) Sean los siguientes eventos:

B_1: Empresa Grande
B_2: Empresa Mediana
B_3: Empresa Pequeña
B_4: Empresa Muy Pequeña
A: Accidente en Minería

Por Probabilidades Totales tenemos que

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{4} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\ &= 0{,}02 \cdot 0{,}47 + 0{,}10 \cdot 0{,}31 + 0{,}14 \cdot 0{,}16 + 0{,}20 \cdot 0,06 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\ &= 0{,}0748 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \end{aligned}$$

(b) Se pide

$$\begin{aligned} P(B_2 \mid A) &= \frac{P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)}, \quad \text{Por Teorema de Bayes} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\ &= \frac{0{,}10 \cdot 0{,}31}{0{,}0748}, \quad \text{Por resultado obtenido en (a)} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\ &= 0{,}414 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Formulario

- Valor Esperado:

  Sea X una variable aleatoria discreta y Θ_X el conjunto de todos los valores posible.

$$E[g(X)] = \sum_{x \in \Theta_X} g(x) \cdot P(X = x)$$

  Sea X una variable aleatoria continua y Θ_X la unión de todos los intervalos en los $\mathbb{R}$ en que la función de densidad $f_X(x) \neq 0$.

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx = \int_{x \in \Theta_X} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

- Varianza (σ_X^2), Coeficiente de Asimetría (θ_X) y Kurtosis (K_X):

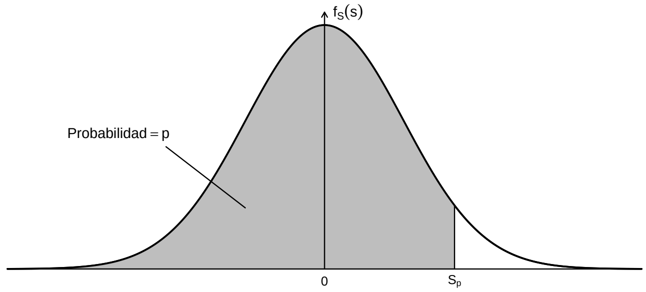
  Sea X una variable aleatoria con valor esperado $\mu_X = E(X)$.

$$\sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right], \quad \theta_X = E\left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^3\right], \quad K_X = E\left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^4\right]$$

Distribuciones

Distribución	**Densidad de Probabilidad**	Θ_X	**Parámetros**	**Esperanza y Varianza**
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\, e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$
Exponencial	$\nu\, e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$

Tabla Normal Estándar



Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998