Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2012

| | | |
|---|---|---|
| **Curso** | **:** | **Probabilidad y Estadística** |
| **Sigla** | **:** | **EYP1113** |
| **Interrogación** | **:** | **3** |
| **Profesor** | **:** | **Ricardo Aravena (Sec. 1, 3 y 4) y Ana María Araneda (Sec. 2)** |
| **Ayudantes** | **:** | **Carlos Cayuman Cofre, Felipe Ossa Monge, Claudia Reyes Vizcarra y Juan Pablo Vigneaux Ariztía.** |

## Problema 1

Uno de los aspectos relevantes en las recientes elecciones municipales correspondió a la constitución oportuna de las mesas, situación que fue monitoreada por las autoridades. Personeros de gobierno consideraban que la instalación de las mesas sería un fracaso si, a las 10:00 hrs., menos de un 80 % de las mesas habían sido constituidas. Si usted constata, con la ayuda de colegas, que a las 10:00 hrs. solo 87 de las 120 mesas de su comuna se habían constituido,

(a) **[4.0 Ptos.]** ¿Es ésta evidencia suficiente para afirmar que la constitución de mesas en su comuna fue un fracaso? Use $\alpha = 5\,\%$. Explicite las hipótesis, la regla de decisión utilizada y su conclusión.

(b) **[2.0 Ptos.]** ¿Cuál es el menor nivel de significancia para el cual se rechazaría la hipótesis nula?

**Solución:** Sean $X_i = 1$, si mesa $i$ se encontraba constituida a las 10:00 hrs, 0, en caso contrario, para $i = 1, \ldots, 120$. Los $X_i$ son variables aleatorias independientes Bernoulli($p$).

(a) Las hipótesis corresponden a: $H_0 : p = 0.8$ vs $H_a : p < 0.8$ [**0.5pt**]. La regla es rechazar $H_0$ si

$$\frac{\hat{p} - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{120}}} < z_\alpha, \qquad \textbf{[1.5pt] por evidencia de que conoce la regla}$$

con $\hat{p} = 87/120 = 0.725$ [**0.5pt**], y $\alpha = 0.05$, es decir $z_\alpha = z_{0.05} = -1.64$ [**0.5pt**]. Tenemos:

$$\frac{0.725 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{120}}} = -2.05 < -1.64.$$

**[0.5pt] por el cálculo del estadístico**. Luego, rechazamos $H_0$ y concluimos que, con 95 % de confianza, la constitución de las mesas fue un fracaso (o equivalentemente, que la proporción de mesas constituidas a las 10:00 hrs era menor a 0.8).**[0.5pt] por cualquiera de las cos conclusiones.**

(b) Se pide el valor-p, es decir

$$\begin{aligned}
\text{valor-p} &= P(Z < -2.05) \qquad \textbf{[0.5pt]}\\
&= \Phi(-2.05) \qquad \textbf{[0.5pt]}\\
&= 1 - \Phi(2.05) \qquad \textbf{[0.5pt]}\\
&= 1 - 0.98 = 0.02. \qquad \textbf{[0.5pt]} \quad \textbf{[1.0pt] base}
\end{aligned}$$

**Problema 2**

Los tiempos requeridos para determinar las tendencias mayoritarias, después de la hora oficial de cierre de mesas, en las recientes elecciones de alcaldes para cada una de las comunas del Gran Santiago, pueden ser considerados variables aleatorias independientes con distribución Normal. Si al seleccionar al azar 18 comunas, se observa un tiempo promedio de 33 minutos con una desviación estándar de 6 minutos,

(a) **[3.0 Ptos.]** ¿Es ésta evidencia suficiente para afirmar que no puede determinarse una tendencia mayoritaria dentro de la primera media hora? Use $\alpha = 5\,\%$. Explicite las hipótesis, la regla de decisión utilizada y su conclusión.

(b) **[3.0 Ptos.]** Suponga ahora que $\sigma$ es conocido e igual a 6 minutos ¿Cuál es la probabilidad de cometer un error Tipo II al utilizar la regla de decisión obtenida en (a), si el tiempo medio para determinar la tendencia mayoritaria es igual a 32 minutos?

**Solución:** Sean $X_i$ los tiempos requeridos en cada una de las comunas, $i = 1, \ldots, 18$. Los $X_i$ son variables aleatorias independientes con distribución Normal$(\mu, \sigma)$.

(a) Las hipótesis corresponden a: $H_0 : \mu = 30$ vs $H_a : \mu > 30$ [**0.5pt**]. Como $\sigma$ es desconocido utilizamos la desviación estándar muestral, $S = 6$, y la regla es rechazar $H_0$ si

$$\frac{\bar{x} - 30}{6/\sqrt{18}} > t_{n-1,1-\alpha}, \qquad \textbf{[1.0pt] por evidencia de que conoce la regla}$$

con $\bar{x} = 33$, y $n = 18, \alpha = 0.05$, es decir $t_{n-1,1-\alpha} = t_{17,0.95} = 1.74$ [**0.5pt**]. Tenemos:

$$\frac{\bar{3}3 - 30}{6/\sqrt{18}} = 2.12 > 1.74.$$

**[0.5pt] por el cálculo del estadísico**. Luego, rechazamos $H_0$ y concluimos que, con 95 % de confianza, el tiempo requerido después del cierre de las mesas para determinar tendencias mayoritarias es mayor a 30 minutos. [**0.5pt**]

(b) Se pide la probabilidad de no rechazar $H_0$ cuando $H_1$ es cierto, en particular, cuando $\mu = 32$.

$$\begin{aligned}
P(\text{Error Tipo II}) &= P\left(\frac{\bar{X} - 30}{6/\sqrt{18}} \leq 1.74 | \mu = 32\right) \qquad \textbf{[1.0pt]} \\
&= P\left(\bar{X} \leq 1.74 \times \frac{6}{\sqrt{18}} + 30 | \mu = 32\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - 32}{6/\sqrt{18}} \leq 1.74 + \frac{30 - 32}{6/\ sqrt(18)} | \mu = 32\right) \qquad \textbf{[1.0pt]} \\
&= \Phi\left(1.74 + \frac{30 - 32}{6/\sqrt(18)}\right) = \Phi(0.326) \qquad \textbf{[0.5pt]} \\
&= 0.628. \qquad \textbf{[0.5pt]}
\end{aligned}$$

**[1.0pt] base**

**Problema 3**

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución Uniforme$(0,\, \theta)$. Se propone como estimador para el parámetro $\theta$ a $\hat{\theta} = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$. Determine sesgo y varianza de este estimador.

**Ayuda:** Sesgo $\left(\hat{\theta}\right) = \text{E}\left(\hat{\theta}\right) - \theta$.

**Solución:** La distribución de $\hat{\theta} = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\} = X_{(n)}$ corresponde a:

$$\begin{aligned}
F_{X_{(n)}}(x) &= P(X_{(n)} \leq x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \int_0^x \frac{1}{\theta}\, du \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{x}{\theta} = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n. \qquad \textbf{[1.0pt]}
\end{aligned}$$

Luego, su función de densidad corresponde a:

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{dF_{X_{(n)}}(x)}{dx} = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}, \qquad 0 < x < \theta, \qquad \textbf{[1.0pt]}$$

0, en caso contrario. Para encontrar el sesgo,

$$\begin{aligned}
E(X_{(n)}) &= \int_0^\theta u\, \frac{n}{\theta^n} u^{n-1}\, du \\
&= \frac{n}{\theta^n}\, \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta. \qquad \textbf{[1.0pt]}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\text{Sesgo}\left(\hat{\theta}\right) &= \frac{n}{n+1}\theta - \theta \\
&= -\frac{\theta}{n+1}. \qquad \textbf{[1.0pt]}
\end{aligned}$$

Para la varianza,

$$\begin{aligned}
E(X_{(n)}^2) &= \int_0^\theta u^2\, \frac{n}{\theta^n}\, u^{n-1}\, du \\
&= \frac{n}{\theta^n}\, \frac{\theta^{n+2}}{n+2} = \frac{n}{n+2}\theta^2. \qquad \textbf{[1.0pt]}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
Var(X_{(n)}) &= E(X_{(n)}^2) - E^2(X_{(n)}) \\
&= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \theta^2. \qquad \textbf{[1.0pt]}
\end{aligned}$$

**[1.0pt] base**

**Problema 4**

Con el objetivo de dimensionar los cambios de las componentes electrónicas de un sistema, se desea obtener un buen estimador, en términos de sesgo y varianza, del tiempo esperado de falla de éstas. Suponga que el tiempo de falla de las componentes está distribuido exponencialmente de parámetro $\nu$. En base a una muestra de observaciones independientes $T_1, \ldots, T_n$, se propone elegir entre los siguientes dos estimadores:

- $\hat{\theta}_1 = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} T_i$.
- $\hat{\theta}_2 = n \cdot \text{mín}\{T_1, \ldots, T_n\}$.

Determine el Error Cuadrático Medio ($ECM$) de cada estimador, donde

$$\text{ECM}\left(\hat{\theta}\right) = \text{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 = \text{Var}\left(\hat{\theta}\right) + \left[\text{Sesgo}\left(\hat{\theta}\right)\right]^2 \quad \text{y} \quad \text{Sesgo}\left(\hat{\theta}\right) = \text{E}\left(\hat{\theta}\right) - \theta$$

**Solución:** Se desea estimar $\theta = E(T_i) = \frac{1}{\nu}$. Para $\hat{\theta}_1 = \bar{T}$,

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}_1) &= E(\bar{T}) = E(T_i) \\ &= \frac{1}{\nu} = \theta \qquad \textbf{[0.8pt]} \\ Var(\hat{\theta}_1) &= Var(\bar{T}) = \frac{1}{n} Var(T_i) \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\nu^2} = \frac{\theta^2}{n}. \qquad \textbf{[0.8pt]} \end{aligned}$$

Luego,

$$\text{ECM}\left(\hat{\theta}_1\right) = \frac{\theta^2}{n} + (\theta - \theta)^2 = \frac{\theta^2}{n}. \qquad \textbf{[0.8pt]}$$

Para $\hat{\theta}_2 = n \cdot \text{mín}\{T_1, \ldots, T_n\} = n \cdot T_{(1)}$,

$$\begin{aligned} F_{T_{(1)}}(t) &= P(T_{(1)} \leq t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) \\ &= 1 - (e^{-\nu t})^n = 1 - e^{-n\nu t}, \qquad \textbf{[1.0pt]} \end{aligned}$$

para $t > 0$. Luego $T_{(1)}$ distribuye Exponencial de parámetro $n\nu$. Luego,

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}_2) &= E(n \cdot T_{(1)}) \\ &= nE(T_{(1)}) = n\frac{1}{n\nu} = \theta \qquad \textbf{[0.9pt]} \\ Var(\hat{\theta}_2) &= Var(n \cdot T_{(1)}) = n^2 Var(T_{(1)}) \\ &= n^2 \frac{1}{n^2\nu^2} = \theta^2. \qquad \textbf{[0.9pt]} \end{aligned}$$

Luego,

$$\text{ECM}\left(\hat{\theta}_2\right) = \theta^2 + (\theta - \theta)^2 = \theta^2. \qquad \textbf{[0.8pt]}$$

**[1.0pt] base**

**Problema 5**

Con el objetivo de estimar el tiempo esperado de falla de una componente electrónica, se ponen en funcionamiento simultáneo $n$ componentes seleccionadas al azar. A las $T_0$ horas de iniciado el experimento, se observa que $k$ de ellas ($k < n$) han fallado. Si el tiempo de falla se puede asumir como una variable aleatoria Exponencial de parámetro $\nu$ , determine el estimador máximo verosímil del tiempo esperado de falla.

**Ayuda:** Se recomienda defina las variables aleatorias

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{Si componente } i\text{-ésima falla antes de las } T_0 \text{ horas} \\ 0, & \text{En otro caso} \end{cases}$$

**Solución:** Las variables $X_i$ distribuyen Bernoulli($p$).

**Alternativa 1:**

$$p = P(X_i = 1) = P(T_i \leq T_0) = 1 - \exp\{-\nu\, T_0\}. \qquad \textbf{[0.6pt]}$$

La función de verosimilitud corresponde a:

$$L(x_1, \ldots, x_n, p) = p^{\sum_i x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}, \qquad \textbf{[0.9pt]}$$

luego,

$$\log L(x_1, \ldots, x_n, p) = \sum_i x_i \log p + (n - \sum_i x_i) \log(1-p). \qquad \textbf{[0.9pt]}$$

Para hallar el máximo,

$$\frac{d \log L}{dp} = \frac{\sum_i x_i}{p} - \frac{n - \sum_i x_i}{1-p} = 0, \qquad \textbf{[0.9pt]}$$

de donde se obtiene

$$\hat{p} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{k}{n}. \qquad \textbf{[0.9pt]}$$

Para verificar que es un máximo,

$$\frac{d^2 \log L}{dp^2} = -\frac{\sum_i x_i}{p^2} - \frac{n - \sum_i x_i}{(1-p)^2} \leq 0,$$

luego, el estimador máximo verosímil de $p$ es $\hat{p} = k/n$. Por invarianza del estimador máximo verosímil,

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = 1 - \exp\{-\hat{\nu}\, T_0\}, \qquad \textbf{[0.9pt]}$$

de donde el estimador máximo verosímil de $\nu$ es

$$\hat{\nu} = -\frac{1}{T_0} \log\left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

El parámetro que se desea estimar es $\theta = E(T_i) = 1/\nu$, luego,

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\nu}} = -\frac{T_0}{\log\left(1 - \frac{k}{n}\right)}. \qquad \textbf{[0.9pt]}$$

**[1.0pt] base**

**Alternativa 2:** El parámetro que se desea estimar es $\theta = 1/\nu$. Como

$$p = P(X_i = 1) = P(T_i \leq T_0) = 1 - \exp\{-T_0/\theta\}, \qquad \textbf{[1.2pt]}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} L(x_1, \ldots, x_n, \theta) &= (1 - \exp\{-T_0/\theta\})^{\sum_i x_i}(1 - (1 - \exp\{-T_0/\theta\}))^{n - \sum x_i} \\ &= (1 - \exp\{-T_0/\theta\})^{\sum_i x_i}(\exp\{-T_0/\theta\})^{n - \sum x_i}. \qquad \textbf{[1.2pt]} \end{aligned}$$

Luego,

$$\log L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \sum_i x_i \log(1 - \exp\{-T_0/\theta\}) - \frac{T_0}{\theta}(n - \sum_i x_i). \qquad \textbf{[1.2pt]}$$

Para hallar el máximo,

$$\frac{d \log L}{d\theta} = -\frac{T_0}{\theta^2}\exp\{-T_0/\theta\}\frac{\sum_i x_i}{1 - \exp\{-T_0/\theta\}} + \frac{T_0(n - \sum_i x_i)}{\theta_2} = 0, \qquad \textbf{[1.2pt]}$$

es decir,

$$-T_0 \exp\{-T_0/\theta\} \sum_i x_i + T_0(n - \sum_i x_i)(1 - \exp\{-T_0/\theta\}) = 0,$$

de donde, despejando $\theta$, se obtiene

$$\hat{\theta} = -\frac{T_0}{\log\left(1 - \frac{\sum_i x_i}{n}\right)} = -\frac{T_0}{\log\left(1 - \frac{k}{n}\right)}. \qquad \textbf{[1.2pt]}$$

**[1.0pt] base**

**Problema 6**

Para construir indicadores de vulnerabilidad de las comunas del Gran Santiago, se propone utilizar la estrategia definida en la construcción del IDH (Índice de Desarrollo Humano). Esta metodología consiste en definir las variables aleatorias,

$$\begin{aligned} Y_1 &= 0.3\,X_1 - 0.7\,X_3 \\ Y_2 &= 0.5\,X_2 - 0.5\,X_3, \end{aligned}$$

donde $X_1$ corresponde a un indicador de salud, con distribución Normal(65, 10), $X_2$ corresponde a un indicador de ingresos, con distribución Normal(45, 12) y $X_3$ corresponde a un indicador de pobreza, con distribución Normal(25, 5).

Es sabido que las variables $X_1$, $X_2$ y $X_3$ son dependientes, con correlaciones $\rho_{12} = 0.4$, entre $X_1$ y $X_2$, $\rho_{13} = -0.2$ entre $X_1$ y $X_3$, y $\rho_{23} = -0.5$ entre $X_2$ y $X_3$. Determine la probabilidad de que $Y_1 < Y_2$.

**Solución:** Se quiere $P(Y_1 - Y_2 < 0) = P(W < 0)$. La variable $W$ es Normal, puesto que es una combinación lineal de Normales. Para encontrar su media y varianza:

$$\begin{aligned} W &= Y_1 - Y_2 = 0.3\,X_1 - 0.7\,X_3 - 0.5\,X_2 + 0.5\,X_3 \\ &= 0.3\,X_1 - 0.5\,X_2 - 0.2\,X_3. \qquad \textbf{[0.4pt]} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} E(W) &= 0.3\,E(X_1) - 0.5\,E(X_2) - 0.2\,E(X_3) \\ &= 0.3 \times 65 - 0.5 \times 45 - 0.2 \times 25 = -8. \qquad \textbf{[0.8pt]} \\ Var(W) &= 0.3^2\,Var(X_1) + 0.5^2\,Var(X_2) + 0.2^2\,Var(X_3) + 2 \times 0.3 \times (-0.5)\,Cov(X_1, X_2) \\ &\quad +2 \times 0.3 \times (-0.2)\,Cov(X_1, X_3) + 2 \times (-0.5) \times (-0.2)\,Cov(X_2, X_3) & (1) \\ &= 0.3^2 \times 10^2 + 0.5^2 \times 12^2 + 0.2^2 \times 5^2 & (2) \\ &\quad +2 \times 0.3 \times (-0.5)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2 \times 0.3 \times (-0.2)\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2 \times (-0.5) \times (-0.2)\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & (3) \\ &= 9 + 36 + 1 \\ &\quad -0.3 \times 0.4 \times 10 \times 12 - 0.12 \times (-0.2) \times 10 \times 5 + 0.2 \times (-0.5) \times 12 \times 5 & (4) \\ &= 46 - 14.4 + 1.2 - 6 = 26.8. & (5) \end{aligned}$$

**[0.4pt] por usar correctamente la fórmula de varianza (incluir varianzas y covarianzas) en** (1)
**[1.2pt] por obtener las tres varianzas correctamente en** (2)
**[1.2pt] por manejar correctamente los coeficientes en los términos de las covarianzas en** (3)
**[1.2pt] por obtener correctamente las covarianzas, en la forma** $\rho\sigma_x\sigma_y$ **en** (4)
**[0.3pt] por resultado en** (5)

Luego, la desviación estándar de $W$ es $\sigma_W = \sqrt{26.8} = 5.18$. La probabilidad pedida corresponde a:

$$\begin{aligned} P(W < 0) &= P\left(Z < \frac{0 - (-8)}{5.18}\right) \\ &= P(Z < 1.54) = \Phi(1.54) \qquad \textbf{[0.25pt]} \\ &= 0.938. \qquad \textbf{[0.25pt]} \end{aligned}$$

**[1.0pt] base**

# Formulario

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=a}^{b} \phi^k = \frac{\phi^a - \phi^{b+1}}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

# Distribuciones

| Distribución | Densidad de Probabilidad | $\Theta_X$ | Parámetros | Esperanza y Varianza |
|---|---|---|---|---|
| Binomial | $\binom{n}{x} p^x\, (1-p)^{n-x}$ | $x = 0, \ldots, n$ | $n,\ p$ | $\mu_X = n\, p$<br>$\sigma_X^2 = n\, p\, (1-p)$<br>$M(t) = [p\, e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Geométrica | $p\,(1-p)^{x-1}$ | $x = 1, 2, \ldots$ | $p$ | $\mu_X = 1/p$<br>$\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$<br>$M(t) = p\, e^t/[1-(1-p)\, e^t], \quad t < -\ln(1-p)$ |
| Binomial-Negativa | $\binom{x-1}{r-1} p^r\, (1-p)^{x-r}$ | $x = r, r+1, \ldots$ | $r,\ p$ | $\mu_X = r/p$<br>$\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$<br>$M(t) = \left\{p\, e^t/[1-(1-p)\, e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$ |
| Poisson | $\dfrac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$ | $x = 0, 1, \ldots$ | $\nu$ | $\mu_X = \nu\, t$<br>$\sigma_X^2 = \nu\, t$<br>$M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Exponencial | $\nu\, e^{-\nu\, x}$ | $x \geq 0$ | $\nu$ | $\mu_X = 1/\nu$<br>$\sigma_X^2 = 1/\nu^2$<br>$M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$ |
| Gamma | $\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\nu\, x}$ | $x \geq 0$ | $k,\ \nu$ | $\mu_X = k/\nu$<br>$\sigma_X^2 = k/\nu^2$<br>$M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$ |
| Normal | $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ | $-\infty < x < \infty$ | $\mu,\ \sigma$ | $\mu_X = \mu$<br>$\sigma_X^2 = \sigma^2$<br>$M(t) = \exp(\mu\, t + \sigma^2\, t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Log-Normal | $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\, x)} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\, x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$ | $x \geq 0$ | $\lambda,\ \zeta$ | $\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\,\zeta^2\right)$<br>$\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$<br>$E(X^r) = e^{r\,\lambda}\, M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1) |
| Uniforme | $\dfrac{1}{(b-a)}$ | $a \leq x \leq b$ | $a,\ b$ | $\mu_X = (a+b)/2$<br>$\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$<br>$M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Beta | $\dfrac{1}{B(q,\ r)}\, \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$ | $a \leq x \leq b$ | $q,\ r$ | $\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$<br>$\sigma_X^2 = \frac{q\, r\, (b-a)^2}{(q+r)^2\, (q+r+1)}$ |
| Hipergeométrica | $\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ | $\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$ | $N,\ m,\ n$ | $\mu_X = n\, \frac{m}{N}$<br>$\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) n\, \frac{m}{N}\left(1 - \frac{m}{N}\right)$ |

# Tablas de Percentiles

**Distribución Normal Estándar $k_p$**

| $k_p$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |

**Distribución t-student $t_p(\nu)$**

| $\nu$ | $t_{0.90}$ | $t_{0.95}$ | $t_{0.975}$ | $t_{0.99}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 |
| 2 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 |
| 3 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 |
| 4 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 |
| 5 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 |
| 6 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 |
| 7 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 |
| 8 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 |
| 9 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 |
| 10 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 |
| 11 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 |
| 12 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 |
| 13 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 |
| 14 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 |
| 15 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 |
| 16 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 |
| 17 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 |
| 18 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 |
| 19 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 |
| 20 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 |
| 21 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 |
| 22 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 |
| 23 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 |
| 24 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 |
| 25 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 |
| 26 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 |
| 27 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 |
| 28 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 |
| 29 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 |
| 30 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 |
| $\infty$ | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 |

**Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$**

| $\nu$ | $c_{0.025}$ | $c_{0.05}$ | $c_{0.10}$ | $c_{0.90}$ | $c_{0.95}$ | $c_{0.975}$ | $c_{0.99}$ | $c_{0.995}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.05 | 0.10 | 0.21 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 |
| 3 | 0.22 | 0.35 | 0.58 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 | 12.84 |
| 4 | 0.48 | 0.71 | 1.06 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | 0.83 | 1.15 | 1.61 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.95 |
| 9 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 |
| 12 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 |