Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2013

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Interrogación	:	**1**
Profesor	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)**
Ayudantes	:	**Daniela Campos, Fabián Fuentealba, Genaro Olave, Claudia Reyes.**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

Suponga que, al final del proceso de conformación de grupos para el proyecto del curso, quedaron 8 alumnos sin grupo. El profesor ha decidido organizar estos alumnos, de manera aleatoria, formando con ellos a lo más tres grupos, que llamaremos A, B y C. Para esto, el profesor solicita a cada uno de los 8 alumnos que indique una de las tres letras de manera confidencial, sin consultarse entre ellos. Si cada uno de los alumnos elige cada una de los grupos con igual probabilidad, obtenga:

a) La probabilidad de que un grupo quede constituido por exactamente 6 de los 8 alumnos.

b) La probabilidad de que el grupo A quede constituido por 4 alumnos, el grupo B por 3 alumnos, y el grupo C por un solo alumno.

Solución: Cada uno de los 8 alumnos puede ser asignado a 1 de 3 secciones, por lo que los casos totales son

$$\#S = 3^8. \qquad \textbf{[0.5pt]}$$

a) Una estrategia para distruibuir a los alumnos puede ser:

- Elegir la sección en que se dejarán los 6 alumnos.

$$\binom{3}{1} = 3. \qquad \textbf{[0.5pt]}$$

- Las siguientes dos posibilidades son favorables por lo que se deben sumar:
  - Se eligen los 6 alumnos entre 8 y los dos alumnos restantes se asignan a una sola sección, quedando la otra vacía. Finalmente se multiplica por 2, para elegir cuál de las dos secciones restantes quedará vacía y cuál tendrá los dos alumnos.

$$\binom{8}{6}\binom{2}{2} = \binom{8}{6\ 2\ 0} \times 2 \qquad \textbf{[0.8pt]}$$

  - Se eligen los 6 alumnos entre 8, y los dos alumnos restantes se asignan cada uno a una sección diferente:

$$\binom{8}{6}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = \binom{8}{6\ 1\ 1}. \qquad \textbf{[0.8pt]}$$

Luego, la cardinalidad total del evento de interés corresponde a:

$$3\left\{\binom{8}{6\;2\;0}\times 2+\binom{8}{6\;1\;1}\right\}=336. \qquad \textbf{[0.8pt]}$$

Luego $P(A)=336/3^8=0,051$, **[0.3pt]** por escribir la fracción (no requiere el resultado numérico final).

b) Se debe elegir 4 alumnos entre 8 para poner en la sección A, 3 alumnos entre 4 para poner en la sección B, y 1 alumno entre 1 para la sección C:

$$\#A=\binom{8}{4}\binom{4}{3}\binom{1}{1}=\binom{8}{4\;3\;1}=280. \qquad \textbf{[2.0pt]}$$

Luego, $P(A)=280/3^8=0,043$. **[0.3pt]** por escribir la fracción (no requiere el resultado numérico final).

[1.0pt] punto base

Problema 2

a) Demuestre que, si A, B y C son eventos mutuamente independientes, entonces también los son A y $B \cup C$, y $A \cap \bar{B}$ y C.

b) Demuestre que

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

c) Suponga un mazo de 3 cartas numeradas de 1 a 3. Se extraen las cartas una a una hasta haber extraido las tres. Obtenga la probabilidad de que al menos en una de las extracciones, el número de la extracción coincida con el número indicado en la carta. Para ello, utilice el resultado en b).

Solución:

a) i)

$$\begin{aligned}
P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \qquad \textbf{[0.2pt]} \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C)) \qquad \textbf{[0.2pt]} \\
&= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A \cap B \cap C) \qquad \text{por indep. mutua} \qquad \textbf{[0.1pt]} \\
&= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B \cap C) \qquad \text{por indep. mutua} \qquad \textbf{[0.1pt]} \\
&= P(A)\{P(B) + P(C) - P(B \cap C)\} \qquad \textbf{[0.2pt]} \\
&= P(A)P(B \cup C) \qquad \textbf{[0.2pt]}
\end{aligned}$$

Luego, A es independiente de $B \cup C$.

ii) **Alternativa 1:** Tenemos:

$$\begin{aligned}
P((A \cap \bar{B}) \cap C) &= P(A \cap C)P(\bar{B}|A \cap C) \qquad \text{definición prob. condicional} \\
&= P(A \cap C)\,(1 - P(B|A \cap C)) \qquad \text{regla del complemento} \quad \textbf{[0.2pt]} \\
&= P(A \cap C) - P(A \cap C)\,\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap C)} \qquad \text{definición prob. condicional} \quad \textbf{[0.2pt]} \\
&= P(A)P(C) - P(A \cap B)P(C) \qquad \text{independencia mutua} \quad \textbf{[0.2pt]} \\
&= P(C)\{P(A) - P(B)P(A)\} \qquad \text{independencia mutua} \\
&= P(C)\{P(A)(1 - P(B)\} \\
&= P(C)P(A)P(\bar{B}) \qquad \text{regla del complemento} \quad \textbf{[0.2pt]} \\
&= P(C)P(A \cap \bar{B}). \qquad \text{independencia} \quad \textbf{[0.2pt]}
\end{aligned}$$

Alternativa 2:
Notemos que $A \cap C = (A \cap C \cap \bar{B}) \cup (A \cap C \cap B)$. Dado que los dos conjuntos a la derecha de la igualdad son disjuntos, $P(A \cap C) = P(A \cap C \cap \bar{B}) + P(A \cap C \cap B)$, luego

$$\begin{aligned}
P((A \cap \bar{B}) \cap C) &= P(A \cap C \cap \bar{B}) \\
&= P(A \cap C) - P(A \cap C \cap B) \\
&= P(A)P(C) - P(A)P(C)P(B) \qquad \text{por indep. mutua} \\
&= P(A)P(C)(1 - P(B)) \\
&= P(A)P(C)P(\bar{B}) \qquad \text{por regla del compl.} \\
&= P(A \cap \bar{B})P(C) \qquad \text{por indep. mutua} \qquad \textbf{[1.0pt]}
\end{aligned}$$

Luego, $A \cap \bar{B}$ es independiente de C.

b) Por la propiedad $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, podemos decir:

$$
\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2\cup A_3) &= P(A_1\cup(A_2\cup A_3)) = P(A_1)+P(A_2\cup A_3)-P(A_1\cap(A_2\cup A_3)) \qquad \textbf{[0.5pt]}\\
&= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cap A_3)-P((A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)) \qquad \textbf{[0.5pt]}\\
&= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cap A_3)-\\
&\quad [P(A_1\cap A_2)+P(A_1\cap A_3)-P((A_1\cap A_2)\cap(A_1\cap A_3))] \qquad \textbf{[0.5pt]}\\
&= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3), \textbf{[0.5pt]}
\end{aligned}
$$

(También puede hacerse por conteo/árbol.)

c) Sean los eventos A_i : *el número de la carta obtenida en la i-ésima extracción es* i, $i=1,2,3$. Luego, se pide

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3).$$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{1\times 2\times 1}{3!}=\frac{1}{3}\\
P(A_2) &= \frac{2\times 1\times 1}{3!}=\frac{1}{3}\\
P(A_3) &= \frac{2\times 1\times 1}{3!}=\frac{1}{3}\\
P(A_1\cap A_2) &= \frac{1\times 1\times 1}{3!}=\frac{1}{6}\\
P(A_1\cap A_3) &= \frac{1\times 1\times 1}{3!}=\frac{1}{6}\\
P(A_2\cap A_3) &= \frac{1\times 1\times 1}{3!}=\frac{1}{6}\\
P(A_1\cap A_2\cap A_3) &= \frac{1\times 1\times 1}{3!}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

[**0.25pt**] por cada probabilidad ([**1.75pt**] en total)

Luego, por a), la probabilidad pedida corresponde a:

$$
\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2\cup A_3) &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6} \qquad \textbf{[0.25 pt]}\\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

[1.0pt] base

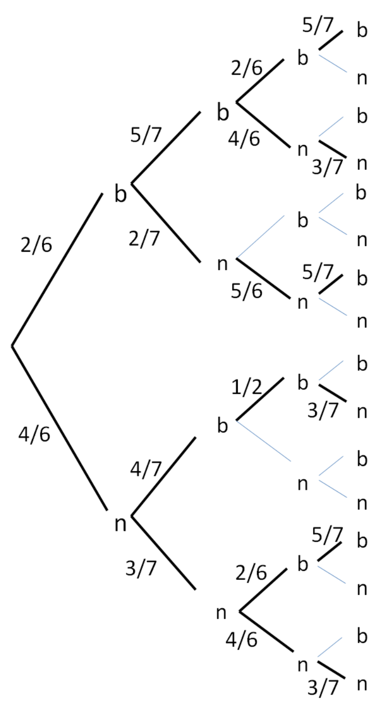
Problema 3

En un proceso de difusión, se produce intercambio de moléculas entre dos regiones separadas por una membrana permeable. Para modelar esto, se consideran dos urnas de $N = N_1 + N_2$ fichas cada una. En la primera, N_1 son negras y N_2 son blancas, mientras que en la segunda, N_2 son negras y N_1 son blancas. El proceso probabilístico consiste en repetir k veces la siguiente operación bietápica:

1. Se extrae al azar una ficha de la urna I y se transfiere a la urna II.
2. Se elige al azar una ficha de la urna II y se transfiere a la urna I.

Considere el caso $N_1 = 4$, $N_2 = 2$, $k = 2$, y calcule la probabilidad de que la composición final de las urnas sea idéntica a la inicial.

Solución: En el árbol, se marcan con negrita las secuencias favorables.



Luego, la probabilidad pedida corresponde a:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} \quad + \quad \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} \\
&\quad +\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{6} \quad + \quad \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{6} \\
&\quad +\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} \quad + \quad \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} \\
&= 0,413.
\end{aligned}
$$

Puntaje:
[0.5pt] por cada rama correcta identificada (3.0 pts en total)
[0.5pt] por cada probabilidad de rama correcta (3.0 pts en total)
[1pt] base

Tiempo: 2 Horas

Formulario

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales $n_1, \ldots, n_k$, entonces

$$S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$.

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1, \ldots, n_k$, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1 \, n_2 \, \cdots \, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!} \, x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$