Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2015

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Interrogación	**:**	**3**
Profesores	**:**	**Ana M. Araneda (Sec. 1 y 3), Ricardo Aravena (Sec. 2, 4 y 5) y José Quinlan (Sec. 6)**
Ayudantes	**:**	**Matías Castro, Fernando Florenzano, Paulina Flores, Daniela Hurtado, M. Constanza Prado, Frane Sazunic**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina, o cualquier tipo de lápiz borrable, renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices, sus cuadernillos y calculadora.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

Un proyecto inmobiliario construirá un edificio de departamentos, y planea iniciar la venta de estas unidades al mismo tiempo en que comienza su construcción. El equipo de ventas tiene como desafío la venta de todas ellas antes de que se obtenga la recepción municipal, la que solo puede ser tramitada una vez terminada la construcción. Los jefes del proyecto han decidido comenzar este trámite inmediatamente después del término de la obra.

Se sabe que las distribuciones de los tiempos de venta de las unidades, de construcción, y de obtención de la recepción municipal son Normales, de medias 18, 12 y 3, respectivamente, y desviaciones estándar 5, 2 y 1, respectivamente, con todas las cantidades expresadas en meses. Por otra parte, algunos de estos tiempos están correlacionados: la correlación entre los tiempos de venta de todas las unidades y de obtención de la recepción municipal es 0,5, mientras que la correlación entre el tiempo de construcción y la misma recepción es negativa, de -0,2. Los tiempos de venta de las unidades y de construcción de estas no presentan correlación.

a) **[3,0 puntos]** Determine la probabilidad que los departamentos estén disponibles para su entrega a lo más 18 meses iniciada la construcción. Los departamentos solo pueden ser entregados una vez obtenida la recepción municipal.

Solución: Sean X, Y y Z los tiempos de venta de los departamentos, de construcción, y de obtención de la recepción municipal, respectivamente. Entonces:

$$X \sim \text{Normal}(18,\ 5) \qquad Y \sim \text{Normal}(12,\ 2) \qquad Z \sim \text{Normal}(3,\ 1)$$
$$\rho_{XY} = 0 \qquad \rho_{XZ} = 0,5 \qquad \rho_{YZ} = -0,2.$$

Se pide $\underbrace{P(Y + Z \leq 18)}_{\textbf{[0,5]}} = P(W \leq 18)$, con $W = Y + Z$. La media y desviación estándar de W son:

$$\begin{aligned}
\mu_W &= \mu_Y + \mu_Z = \overbrace{12}^{\textbf{[0,3]}} + \overbrace{3}^{\textbf{[0,3]}} = 15 \\
\sigma_W &= \sqrt{\underbrace{\sigma_Y^2}_{\textbf{[0,3]}} \underbrace{+2\rho_{YZ}\,\sigma_Y\,\sigma_Z}_{\textbf{[0,3]}} + \underbrace{\sigma_Z^2}_{\textbf{[0,3]}}} \\
&= \sqrt{2^2 \underbrace{+2 \times (-0,2) \times 2 \times 1}_{\textbf{[0,3]}} + 1^2} \\
&= 2,05.
\end{aligned}$$

Por corresponder a una combinación lineal de variables aleatorias normales **[0,2]**, W también sigue una distribución Normal, por lo que:

$$\begin{aligned} P(W \leq 18) &= \Phi\left(\frac{18-15}{2,05}\right) \qquad \textbf{[0,5]} \\ &= \Phi(1,46) = 0,928. \end{aligned}$$

b) **[3,0 puntos]** Determine la probabilidad de haber vendido todas las unidades antes de obtener la recepción municipal.

Solución: Se pide $\underbrace{P(X < Y + Z)}_{\textbf{[0,4]}} = \underbrace{P(X - Y - Z < 0)}_{\textbf{[0,1]}} = P(V < 0)$, con $V = X - Y - Z$. La media y desviación estándar de V corresponden a:

$$\begin{aligned} \mu_V &= \mu_X - \mu_Y - \mu_Z = \overbrace{18}^{\textbf{[0,2]}} - \overbrace{12}^{\textbf{[0,2]}} - \overbrace{3}^{\textbf{[0,2]}} = 3 \\ \sigma_V &= \sqrt{\underbrace{\sigma_X^2}_{\textbf{[0,2]}} + \underbrace{\sigma_Y^2}_{\textbf{[0,2]}} + \underbrace{\sigma_Z^2}_{\textbf{[0,2]}} \underbrace{-2\rho_{XZ}\,\sigma_X\,\sigma_Z}_{\textbf{[0,2]}} \underbrace{+2\rho_{YZ}\,\sigma_Y\,\sigma_Z}_{\textbf{[0,2]}}} \\ &= \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2 \underbrace{-2 \times 0,5 \times 5 \times 1}_{\textbf{[0,2]}} \underbrace{+2 \times (-0,2) \times 2 \times 1}_{\textbf{[0,2]}}} \\ &= \sqrt{24,2} = 4,92. \end{aligned}$$

Por corresponder a una combinación lineal de variables aleatorias normales **[0,2]**, V también sigue una distribución Normal, por lo que:

$$\begin{aligned} P(V < 0) &= \Phi\left(\frac{0-3}{4,92}\right) \qquad \textbf{[0,3]} \\ &= \Phi(-0.61) = 0,271. \end{aligned}$$

[1,0] punto base

Problema 2
En un edificio de estacionamientos, la tarifa de cobro es de \$1.000 por cada 30 minutos o fracción. Esto significa, como ejemplo, que si una persona ocupa un estacionamiento durante 35 minutos, deberá cancelar el mismo monto que hubiese cancelado si se estacionara durante 1 hora, es decir, \$2.000.

Suponga que los tiempos de estadía de cada vehículo pueden ser modelados a través de distribuciones Exponenciales independientes, de media 30 minutos, y que, cada vez que se desocupa un estacionamiento, este es inmediatamente utilizado por otro vehículo.

a) **[2,0 puntos]** Muestre que si una variable T sigue una distribución Exponencial de tasa 1, entonces $[T]+1$ sigue una distribución Geométrica de parámetro $1-e^{-1}$, donde $[T]$ representa a la parte entera de T, es decir $[T]=k$ *ssi* $k \leq T < k+1$. *(Ayuda: Obtenga $P([T]+1=k) : k \in \mathbb{N}$).*

Solución: Sea $T \sim$ Exponencial(1). Luego, para $\overbrace{k \in \mathbb{N}}^{[\mathbf{0,2}]}$,

$$\begin{aligned} P([T]+1=k) &\overset{(1)}{=} P(k-1 \leq T < k) = P(k-1 < T \leq k) \\ &\overset{(2)}{=} F_T(k) - F_T(k-1) \qquad [\mathbf{0,3}] \\ &\overset{(3)}{=} (1-\exp\{-k\}) - (1-\exp\{-(k-1)\}) \qquad [\mathbf{1,0}] \\ &\overset{(4)}{=} (\exp\{-1\})^{k-1}\,(1-\exp\{-1\}). \qquad [\mathbf{0,3}] \end{aligned}$$

Por otra parte, $\overbrace{P([T]+1=k)=0, \text{si } k \notin \mathbb{N}}^{[\mathbf{0,2}]}$. Luego, $[T]+1$ sigue una distribución Geométrica de parámetro $(1-\exp\{-1\})$.

Obs: Si pasa directamente desde (1) a (3), recibe [1,3] por el paso.

b) **[4,0 puntos]** Obtenga un valor aproximado para la probabilidad de que el ingreso monetario generado por 240 vehículos sea superior a \$400.000.

Solución: Sea Z_i el tiempo de estacionamiento del i-ésimo vehículo, medido en minutos, y X_i el valor que se debe cancelar por su estadía, expresado en \$. Entonces, $Z_1, \ldots, Z_n$ son variables aleatorias independientes, cada una con distribución Exponencial(1/30).

$$X_i = 1.000\left\{\left[\frac{Z_i}{30}\right]+1\right\}. \qquad [\mathbf{0,5}]$$

Sea $T_i = g(Z_i) = Z_i/30$. Luego, $g^{-1}(t) = 30\,t$ y

$$\frac{dg^{-1}(t)}{dt} = 30 > 0.$$

Entonces, la función de densidad de T_i está dada por:

$$f_{T_i}(t) \;=\; f_{Z_i}(30\,t)\times 30 = \frac{1}{30}\,\exp\{-\frac{1}{30}\times 30t\}\times 30 = \exp\{-t\} : t > 0, \qquad [\mathbf{0,4}]$$

y $\overbrace{f_{T_i}(t)=0 \text{ para } t \leq 0}^{[\mathbf{0,1}]}$. Luego $\underbrace{T_i \sim \text{Exponencial}(1)}_{[\mathbf{0,2}]}$. Por otra parte, se pide:

$$\begin{aligned} \underbrace{P\left(\sum_{i=1}^{240} X_i > 400.000\right)}_{[\mathbf{0,4}]} &= P\left(\sum_{i=1}^{240}\left(1.000\left\{\left[\frac{Z_i}{30}\right]+1\right\}\right) > 400.000\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{240}\{[T_i]+1\} > 400\right). \qquad [\mathbf{0,4}] \end{aligned}$$

Sabemos que los $[T_i]+1$ siguen distribuciones Geométricas $\overbrace{\text{independientes}}^{\textbf{[0,3]}}$ (ya que los Z_i lo son) de parámetro $1-\exp\{-1\}$. Luego, su media y desviación estándar están dadas por:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{1-\exp\{-1\}} = 1,582 \qquad \textbf{[0,3]} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{\exp\{-1\}}{(1-\exp\{-1\})^2}} = 0,96. \qquad \textbf{[0,3]} \end{aligned}$$

Por otra parte, por el $\overbrace{\text{Teorema del Límite Central}}^{\textbf{[0,2]}}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{240}\{[T_i]+1\}\right) \overset{aprox}{\sim} \underbrace{\text{Normal}}_{\textbf{[0,2]}}\left(\underbrace{240\times 1,582}_{\textbf{[0,2]}};\underbrace{\sqrt{240}\times 0,96}_{\textbf{[0,2]}}\right),$$

es decir, Normal(379,68; 14,87). Luego, la probabilidad pedida corresponde aproximadamente a:

$$\begin{aligned} & 1-\Phi\left(\frac{400-379,68}{14,87}\right) \qquad \textbf{[0,3]} \\ & = 1-\Phi(1,36) = 0,087. \end{aligned}$$

[1,0] punto base

Problema 3

a) **[3,0 puntos]** Durante el último tiempo, han ocurrido numerosos robos en los distintos sectores de estacionamientos de nuestro campus, lo que ocurre con mayor frecuencia en algunos de ellos. Un experto ha modelado la ocurrencia de robos en cada uno de estos sectores, rotulados como cuadrantes I al IV, como procesos de Poisson indepedientes, estableciendo una tasa base λ, expresada en número de robos diarios, para el cuadrante II (Administración - Humanidades), tasa que se duplica en los cuadrantes I (Agronomía) y III (Ingeniería), y que se cuadruplica en el cuadrante IV.

Con el objetivo de estimar la tasa base, λ, se han obtenido los números de robos en cada uno de los cuadrantes en los 5 días hábiles de una semana dada, obteniéndose:

	Número de robos				
Cuadrante	L	M	W	J	V
I	0	1	0	1	2
II	0	0	1	0	1
III	2	1	0	1	1
IV	2	3	1	1	4

Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de la tasa base λ. En base a los datos, ¿cuál es su valor estimado?

Solución:

Alternativa 1: Obseraciones diarias. Sea $X_{i,j}$ el número de robos observados el i-ésimo día, en el j-ésimo cuadrante, $i = 1, \ldots, 5, j = 1, \ldots, 4$. Estas variables son $\underbrace{\text{mutuamente independientes}}_{[\mathbf{0{,}2}]}$, con

$$
\begin{aligned}
X_{i1} &\overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(2\lambda) \quad [\mathbf{0{,}1}] \\
X_{i2} &\overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(\lambda) \quad [\mathbf{0{,}1}] \\
X_{i3} &\overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(2\lambda) \quad [\mathbf{0{,}1}] \\
X_{i4} &\overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(4\lambda) \quad [\mathbf{0{,}1}]
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{x}, \lambda) &= \prod_{i=1}^{5} \prod_{j=1}^{4} p_{X_{ij}}(x_{ij}) \\
&= \underbrace{\prod_{i=1}^{5} \left\{ \frac{\exp\{-2\lambda\}(2\lambda)^{x_{i1}}}{x_{i1}!} \right\} \prod_{i=1}^{5} \left\{ \frac{\exp\{-\lambda\}\lambda^{x_{i2}}}{x_{i2}!} \right\} \prod_{i=1}^{5} \left\{ \frac{\exp\{-2\lambda\}(2\lambda)^{x_{i3}}}{x_{i3}!} \right\} \prod_{i=1}^{5} \left\{ \frac{\exp\{-4\lambda\}(4\lambda)^{x_{i4}}}{x_{i4}!} \right\}}_{[\mathbf{0{,}6}]}.
\end{aligned}
$$

La función de Logverosimilitud queda:

$$
\log L(\boldsymbol{x}, \lambda) = C - 45\lambda + \log \lambda \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} x_{ij}, \qquad [\mathbf{0{,}2}]
$$

donde C corresponde a una constante que no depende de λ. Para encontrar $\underbrace{\text{puntos críticos de esta función}}_{[\mathbf{0{,}2}]}$:

$$
\frac{d \log L(\boldsymbol{x}, \lambda)}{d\lambda} = -45 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 0 \Longrightarrow \lambda^* = \frac{\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} x_{ij}}{45}. \qquad [\mathbf{0{,}4}]
$$

Por otra parte,
$$\frac{d^2 \log L(\boldsymbol{x},\lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}}{\lambda^2} < 0, \qquad \textbf{[0,3]}$$
cuando $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} x_{ij} > 0$. Luego, bajo estas condiciones, el estimador de máxima verosimilitud de λ corresponde a:
$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} X_{ij}}{45}. \qquad \textbf{[0,3]}$$
(Si $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} X_{ij} = 0$, la función de verosimilitud de λ es estrictamente decreciente en λ. Dado que $\lambda \in \Theta = \mathbb{R}^+$, la función de verosimilitud se maximiza para $\lambda = 0$, valor no admisible para λ. Por lo tanto, en estas condiciones, el estimador máximo verosímil no existe).

Reemplazando los datos entregados, la estimación de λ en base a esta muestra corresponde a $22/45 \approx$ 0,49 robos diarios. **[0,4]**

Alternativa 2: Observaciones semanales. Sea Y_j el número de robos observados durante los 5 días hábiles en el j-ésimo cuadrante, $j = 1, \ldots, 4$. Estas variables son $\underbrace{\text{mutuamente independientes}}_{\textbf{[0,2]}}$, con

$$\begin{aligned}
Y_1 &\overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(10\,\lambda) \quad \textbf{[0,1]}\\
Y_2 &\overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(5\,\lambda) \quad \textbf{[0,1]}\\
Y_3 &\overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(10\,\lambda) \quad \textbf{[0,1]}\\
Y_4 &\overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(20\,\lambda) \quad \textbf{[0,1]}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{y},\lambda) &= \prod_{j=1}^{4} p_{Y_j}(y_j)\\
&= \underbrace{\left\{\frac{\exp\{-10\lambda\}(10\lambda)^{y_1}}{y_1!}\right\}\left\{\frac{\exp\{-5\lambda\}(5\lambda)^{y_2}}{y_2!}\right\}\left\{\frac{\exp\{-10\lambda\}(10\lambda)^{y_3}}{y_3!}\right\}\left\{\frac{\exp\{-20\lambda\}(20\lambda)^{y_4}}{y_4!}\right\}}_{\textbf{[0,6]}}.
\end{aligned}$$

La función de Logverosimilitud queda:

$$\log L(\boldsymbol{y},\lambda) = C - 45\lambda + \log\lambda \sum_{j=1}^{4} y_j, \qquad \textbf{[0,2]}$$

donde C corresponde a una constante que no depende de λ. Para encontrar $\underbrace{\text{puntos críticos de esta función}}_{\textbf{[0,2]}}$:

$$\frac{d\log L(\boldsymbol{y},\lambda)}{d\lambda} = -45 + \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{4} y_j = 0 \Longrightarrow \lambda^* = \frac{\sum_{j=1}^{4} y_j}{45}. \qquad \textbf{[0,4]}$$

Por otra parte,
$$\frac{d^2 \log L(\boldsymbol{y},\lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{\sum_{j=1}^{4} y_j}{\lambda^2} < 0, \qquad \textbf{[0,3]}$$
cuando $\sum_{j=1}^{4} y_j > 0$. Luego, bajo estas condiciones, el estimador de máxima verosimilitud de λ corresponde a:

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^{4} Y_j}{45}. \qquad \textbf{[0,3]} \tag{1}$$

(Si $\sum_{j=1}^{4} Y_j = 0$, la función de verosimilitud de λ es estrictamente decreciente en λ. Dado que $\lambda \in \Theta = \mathbb{R}^+$, la función de verosimilitud se maximiza para $\lambda = 0$, valor no admisible para λ. Por lo tanto, en estas condiciones, el estimador máximo verosímil no existe).

Reemplazando los datos entregados, la estimación de λ en base a esta muestra corresponde a $22/45 \approx 0{,}49$ robos diarios. **[0,4]**

<u>Obs:</u> Si, al plantear la función de verosimilitud, el alumno reemplaza directamente los datos entregados, llegando a la estimación numérica de λ, y no al estimador: sumar el puntaje obtenido hasta (1), ponderar por 0,6, y sumar 0,4 por obtener la estimación numérica de λ correctamente. Es decir, el puntaje máximo en este apartado sería de [1,7] puntos.

b) **[3,0 puntos]** Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con densidad de probabilidad común:

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha-1)\theta^{\alpha-1}x^{-\alpha} \,:\, x > \theta \\ 0 \,:\, x \leq \theta \end{cases}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha > 3$ son parámetros desconocidos. Determine los estimadores de momentos de los parámetros α y θ. *(Ayuda: Puede ser de utilidad la igualdad:* $(\alpha-1)(\alpha-3) = (\alpha-2)^2 - 1$*).*

Solución: Eventualmente se requieren 2 ecuaciones (2 parámetros) para encontrar dichos estimadores. Por definición

$$m_1(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n \qquad \textbf{[0,3]}$$
$$m_2(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \overline{Y}_n \qquad \textbf{[0,3]}$$

son los momentos empíricos de orden 1 y 2, respectivamente. Por otro lado

$$\mu_1(\alpha,\theta) = \mathrm{E}[X_1] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\mathrm{d}x = (\alpha-1)\theta^{\alpha-1}\int_{\theta}^{\infty} x^{-\alpha+1}\mathrm{d}x = \frac{\alpha-1}{\alpha-2}\theta \qquad \textbf{[0,5]}$$
$$\mu_2(\alpha,\theta) = \mathrm{E}[X_1^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\mathrm{d}x = (\alpha-1)\theta^{\alpha-1}\int_{\theta}^{\infty} x^{-\alpha+2}\mathrm{d}x = \frac{\alpha-1}{\alpha-3}\theta^2 \qquad \textbf{[0,5]}$$

corresponden a los momentos teóricos de orden 1 y 2. Los estimadores $\hat{\alpha}$ y $\hat{\theta}$ pedidos satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\overline{X}_n = \frac{\hat{\alpha}-1}{\hat{\alpha}-2}\hat{\theta} \qquad \textbf{[0,4]}$$
$$\overline{Y}_n = \frac{\hat{\alpha}-1}{\hat{\alpha}-3}\hat{\theta}^2. \qquad \textbf{[0,4]}$$

La primera ecuación entrega la relación

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{\alpha}-2}{\hat{\alpha}-1}\overline{X}_n. \qquad \textbf{[0,2]}$$

Al sustituir esta expresión en la segunda ecuación se obtiene

$$\overline{Y}_n = \frac{(\hat{\alpha}-2)^2}{(\hat{\alpha}-1)(\hat{\alpha}-3)}\overline{X}_n$$

cuya única solución (bajo la restricción $\hat{\alpha} > 3$ con probabilidad 1) es

$$\hat{\alpha} = 2 + \left(\frac{\overline{Y}_n}{\overline{Y}_n - \overline{X}_n^2}\right)^{1/2} = 2 + \left(1 + \frac{\overline{X}_n^2}{\overline{Y}_n - \overline{X}_n^2}\right)^{1/2}. \qquad \textbf{[0,4]}$$

Esta solución está bien definida (con probabilidad 1) pues

$$\overline{X}_n^2 > 0$$
$$\overline{Y}_n - \overline{X}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 > 0.$$

[1,0] punto base

Problema 4
En un supermercado, los clientes entran de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa ν clientes por hora. El supermercado tiene iluminación mientras no se queme un fusible instalado en el instante $t = 0$, y cuya vida útil, expresada en horas, sigue una distribución Lognormal de parámetros λ y ζ. Suponga que los clientes solo ingresan al supermercado cuando este se encuentra iluminado.

a) **[2,0 puntos]** Obtenga la densidad de probabilidad del valor esperado del número de clientes que ingresan en el supermercado, dado que este se encuentra iluminado durante T horas.

Solución: Sea X el número de clientes que ingresan al supermercado, y T el tiempo de vida del fusible instalado. Entonces:

$$\begin{aligned} T &\sim \text{Lognormal}(\lambda, \zeta) \\ X|T=t &\sim \text{Poisson}(\nu t). \qquad \textbf{[0,6]} \end{aligned}$$

Luego, $\underbrace{E(X|T) = \nu T}_{\textbf{[0,4]}}$. Sea $Z = g(T) = \nu T$, luego $g^{-1}(z) = z/\nu$, y

$$\frac{dg^{-1}(z)}{dz} = \frac{1}{\nu} > 0.$$

Entonces la función de densidad de Z corresponde a:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_T(z/\nu)\frac{1}{\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\zeta(z/\nu)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log z - log\nu - \lambda}{\zeta}\right)^2\right\}\frac{1}{\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\zeta z}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log z - \lambda^*}{\zeta}\right)^2\right\}, \quad z > 0 \qquad \textbf{[0,8]} \end{aligned}$$

con $\lambda^* = \log(\nu) + \lambda$, y $\underbrace{f_Z(z) = 0 : z \leq 0}_{\textbf{[0,2]}}$. Es decir $Z = E(X|T)$ distribuye Lognormal(λ^*, ζ).

b) **[2,0 puntos]** Obtenga el valor esperado del número de clientes que entran en el supermercado.

Solución: Por teorema de esperanzas iteradas,

$$\begin{aligned} E(X) &= \underbrace{E(E(X|T))}_{\textbf{[1,0]}} = \underbrace{E(\nu T)}_{\textbf{[0,3]}} \\ &= \nu E(T) \\ &= \nu \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2\right). \qquad \textbf{[0,7]} \end{aligned}$$

c) **[2,0 puntos]** Obtenga la varianza del número de clientes que entran en el supermercado.

Solución: Por teorema de descomposición de la varianza:

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(E(X|T)) + E(Var(X|T)) \qquad \textbf{[1,0]} \\ &= Var(\underbrace{\nu T}_{\textbf{[0,1]}}) + E(\underbrace{\nu T}_{\textbf{[0,1]}}) \\ &= \nu^2 Var(T) + \nu E(T) \\ &= \underbrace{\nu^2 \exp\left\{2\left(\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2\right)\right\}\left(e^{\zeta^2} - 1\right)}_{\textbf{[0,4]}} + \underbrace{\nu \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2\right)}_{\textbf{[0,4]}}. \end{aligned}$$

[1,0] punto base