Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2014

| | | |
|---|---|---|
| **Curso** | **:** | **Probabilidad y Estadística** |
| **Sigla** | **:** | **EYP1113** |
| **Pauta** | **:** | **I2** |
| **Profesores** | **:** | **Ricardo Aravena, Ricardo Olea y Claudia Wehrhahn** |
| **Ayudantes** | **:** | **Daniela Castro, Erwin Agüero y Carlos Cayuman.** |

## Problema 1 [15 %]

Hoy en día los usuarios de la aplicación WhatsApp ya han superado los 400 millones y sigue en aumento. Lo grupos de chat de esta aplicación, en el último tiempo han crecido en popularidad, pero el sonido de alerta de los mensajes recibidos, algunas veces nos obliga a poner en silencio el teléfono. Para no hacer esto, la aplicación da la opción de silenciar por las ocho horas, un día o una semana los grupos de chat activos. Supongamos que usted tiene un teléfono con esta aplicación y todos los grupos de chat los dejó en silencio por una semana, desde las 07:00 del viernes pasado. Si hoy viernes se levanto a las 07:00 horas y olvidó silenciar los grupos, y se espera que lleguen 6 mensajes por hora durante el día según un proceso de poisson:

(a) ¿Cuál es la probabilidad que mientras toma una ducha de 10 minutos, el teléfono empiece a sonar por la recepción de mensajes en los chat?

(b) Si usted, al entrar a la ducha, escucha que llego un mensaje y al salir ve que ya son tres, ¿cuanto tiempo espera usted que haya trascurrido entre el que escucho y el último recibido?

### Solución

(a) **Alternativa 1**: Sea $X_t$ el número de mensajes que llegan en un minuto. Del enunciado tenemos que $X_t \sim \text{Poisson}(0.1\,t)$. **[2 %]**

Se pide

$$\begin{aligned} P(X_{10} \geq 1) &= 1 - P(X_{10} < 1) \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= 1 - P(X_{10} = 0) \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= 1 - e^{-0.1 \cdot 10} \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= 1 - e^{-1} \quad \textbf{[1 \%]} \\ &= 0.6321 \quad \textbf{[1 \%]} \end{aligned}$$

**Alternativa 2**: Sea $T$ el tiempo en minutos trascurrido desde que entro a la ducha hasta la llegada del primer mensaje. Del enunciado se deduce que $T \sim \text{Exponencial}(0.1)$. **[2 %]**

Se pide

$$\begin{aligned} P(T \leq 10) &= 1 - e^{-0.1 \cdot 10} \quad \textbf{[6 \%]} \\ &= 1 - e^{-1} \quad \textbf{[1 \%]} \\ &= 0.6321 \quad \textbf{[1 \%]} \end{aligned}$$

(b) Sea $T$ el tiempo transcurrido entre que suenan el primer y el tercer mensaje. Dado que los mensajes llegan según un proceso de Poisson, entonces $T \sim \text{Gamma}(k = 2, \nu = 0.1)$. **[2 %]**

Nos piden $\mathrm{E}(T) = \dfrac{k}{\nu} = \dfrac{2}{0.1} = 20.$ **[3 %]**

Por lo tanto se espera que hayan pasado en promedio 20 minutos entre que suena el primer y el tercer mensaje.

**Problema 2 [20 %]**

Suponga que usted está haciendo un cambio a ampolletas eficientes en su casa y en la sala de estar usted puso dos de distinto fabricante. Si $T_1$ y $T_2$ representan los tiempos de vida de estas ampolletas, los cuales podemos asumir como variables aleatorias con distribución Exponencial, y según los fabricantes los tiempos esperados son respectivamente $\nu$ y $\lambda$, ¿cuál sería la probabilidad que una ampolleta dure más del doble que la otra? Asuma independencia entre las fabricas.

**Solución**

Tenemos que

$$T_1 \sim \text{Exponencial}(1/\nu) \quad \text{y} \quad T_2 \sim \text{Exponencial}(1/\lambda) \quad \textbf{[2 \%]}$$

Por independencia

$$f_{T_1,T_2}(u,v) = f_{T_1}(u) \cdot f_{T_2}(v) = \frac{1}{(\nu \cdot \lambda)}\, e^{-u/\nu - v/\lambda} \quad \textbf{[2 \%]}$$

Se pide

$$P([T_1 > 2\,T_2] \cup [T_2 > 2\,T_1]) = P(T_1 > 2\,T_2) + P(T_2 > 2\,T_1) \quad \textbf{[2 \%]}$$

Luego

$$\begin{aligned}
P(T_1 > 2\,T_2) &= \int_0^\infty \int_{2\,v}^\infty f_{T_1,T_2}(u,v)\, du\, dv \quad \textbf{[2 \%]}\\
&= \frac{1}{\nu\lambda} \int_0^\infty \int_{2\,v}^\infty e^{-(u/\nu + v/\lambda)}\, du\, dv \quad \textbf{[2 \%]}\\
&= \frac{1}{\nu\lambda} \int_0^\infty e^{-v/\lambda} \left[-\nu e^{-u/\nu}\right]\Big|_{2\,v}^\infty du\, dv \quad \textbf{[2 \%]}\\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-v/\lambda}\, e^{-2\,v/\nu}\, dv \quad \textbf{[1 \%]}\\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-(1/\lambda - 2/\nu)\,v}\, dv \quad \textbf{[1 \%]}\\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda\nu}{\nu + 2\,\lambda} \quad \textbf{[1 \%]}\\
&= \frac{\nu}{\nu + 2\,\lambda} \quad \textbf{[1 \%]}
\end{aligned}$$

Análogamente

$$P(T_2 > 2\,T_1) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\,\nu} \quad \textbf{[2 \%]}$$

Por lo tanto

$$P([T_1 > 2\,T_2] \cup [T_2 > 2\,T_1]) = \frac{\nu}{\nu + 2\,\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\,\nu} \quad \textbf{[2 \%]}$$

**Problema 3** **[15 %]**

Considere una variable aleatoria continua $X$, cuya función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \beta\, e^{\beta[x-\ln(\eta)]}\, e^{-e^{\beta[x-\ln(\eta)]}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \eta > 0, \beta > 0$$

Muestre que si $Y = e^X$, entonces $F_Y(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\eta}\right)^\beta\right]$ para $y \geq 0$.

Solución

**Alternativa 1**: Tenemos que $Y = g(X) = e^X \geq 0$. **[3 %]**

Se pide

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y \leq y) &= P\left(e^X \leq Y\right) = P\left(X \leq \ln(y)\right) \quad \textbf{[3 \%]} \\
&= \int_{-\infty}^{\ln(y)} \beta\, e^{\beta[x-\ln(\eta)]}\, e^{-e^{\beta[x-\ln(\eta)]}}\, dx \quad \textbf{[3 \%]} \\
&= \int_0^{\left(\frac{y}{\eta}\right)^\beta} e^{-z}\, dz, \quad z = \exp\{\beta\,[x - \ln(y)]\} \quad \textbf{[3 \%]} \\
&= 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\eta}\right)^\beta\right], \quad y \geq 0 \quad \textbf{[3 \%]}
\end{aligned}$$

**Alternativa 2**: Tenemos que $Y = g(X) = e^X \longrightarrow X = g^{-1}(Y) = \ln(Y)$ **[2 %]**

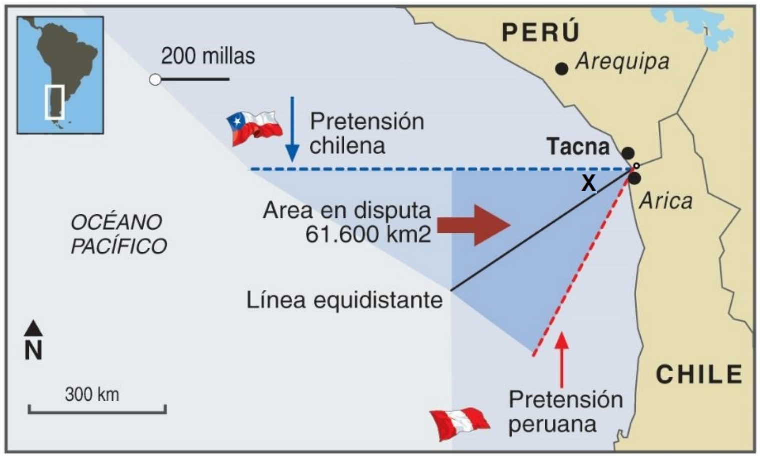
$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X\left(g^{-1}(y)\right)\, \frac{d}{dy} \cdot \left|g^{-1}(y)\right| \quad \textbf{[2 \%]} \\
&= \beta\, e^{\beta[\ln(y)-\ln(\eta)]}\, e^{-e^{\beta[\ln(y)-\ln(\eta)]}} \cdot \frac{1}{|y|}, \quad y \geq 0 \quad \textbf{[2 \%]} \\
&= \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{y}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{y}{\eta}\right)^\beta\right], \quad y \geq 0 \quad \textbf{[2 \%]}
\end{aligned}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \quad \textbf{[2 \%]} \\
&= \int_0^y \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{v}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{v}{\eta}\right)^\beta\right] dy \quad \textbf{[2 \%]} \\
&= \int_0^{\left(\frac{y}{\eta}\right)^\beta} e^{-z}\, dz, \quad z = \left(\frac{v}{\eta}\right)^\beta \quad \textbf{[2 \%]} \\
&= 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\eta}\right)^\beta\right], \quad y \geq 0 \quad \textbf{[1 \%]}
\end{aligned}$$

**Problema 4** [15 %]

Como es sabido, prontamente se dará a conocer el fallo de La Haya, en la cual básicamente Perú ha solicitado cambiar el límite actual por una línea equidistante (Ver figura).




En resumen, el mar territorial Chileno en disputa puede ser visto como dos triángulos rectángulos con hipotenusa en común, el cual dependerá del valor que la corte de a $X$. Por otra parte la perdida económica potencial $Y$ (en MMUS$) dependerá del valor $x$ de $X$, la cual sigue una distribución $\text{Gamma}(k = x^{-1},\, \nu = x)$. Si $X$ es una variable aleatoria con distribución Beta$(1, 1)$ en $[0,\, \pi/4]$. Determine la pérdida económica potencial esperada.

**Solución**

Tenemos que

$$[2\,\%] \quad Y \,|\, X = x \sim \text{Gamma}\left(x^{-1},\, x\right) \quad \text{y} \quad X \sim \text{Beta}(1,1), \quad \text{con}\, \Theta_X = [0,\, \pi/4] \quad [2\,\%]$$

Se pide

$$\begin{aligned} E(Y) &= E[E(Y \,|\, X)] \quad [3\,\%] \\ &= E\left(X^{-2}\right) \quad [3\,\%] \\ &= \int_0^{\pi/4} x^{-2}\, \frac{4}{\pi}\, dx \quad [2\,\%] \\ &= -x^{-1}\, \frac{4}{\pi}\bigg|_0^{\pi/4} \quad [1\,\%] \\ &= -\frac{16}{\pi^2} - (-\infty) \quad [1\,\%] \\ &= \infty \quad [1\,\%] \end{aligned}$$

Por lo tanto, la perdida económica esperada para los que trabajan en la zona sería infinita, es decir, se espera que quiebren.

**Problema 5 [20 %]**

Un grupo de investigadores está recopilando información para realizar un estudio estadístico. La información está siendo recopilada mediante el envío de una encuesta electrónica a mails de distintas personas, la cual queda registrada en una página web con el nombre del correo electrónico a quien se le envió. Se sabe que cada una de las encuestas enviadas no llega al destinatario (mail enviado) el 5 % de las veces independientemente. Si la encuesta no fue recibida por un destinatario, el mail de ese destinatario queda sin información en la página web.

(a) En un envío de 8 encuestas, ¿cuál es la probabilidad que a lo más dos no lleguen a destino?

(b) ¿Cuantas encuestas debería esperar enviar hasta recibir el tercer informe de no recepción?

Solución

(a) Sea $X$ el número de encuestas que no llegan a destino. Del enunciado tenemos que

$$X \sim \text{Binomial}(n = 8, p = 0.05) \quad \textbf{[2 \%]}$$

Nos piden calcular $P(X \leq 2)$. **[2 %]**

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= \binom{8}{0}(0.05)^0(0.95)^8 + \binom{8}{1}(0.05)^1(0.95)^7 + \binom{8}{2}(0.05)^2(0.95)^6 \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= 0.9942 \quad \textbf{[2 \%]} \end{aligned}$$

(b) Sea $T_3$ el número de envíos que se debieran realizar hasta que 3 encuestas no lleguen a destinatario.

$$T_3 \sim \text{Binomial-Negativa}(k = 3, p = 0.05) \quad \textbf{[5 \%]}$$

Nos piden calcular $E(T_3) = \frac{k}{p} = \frac{3}{0.05} = 60$. **[5 %]**

Por lo tanto en promedio se deberían enviar 60 encuestar para recibir un tercer informe de no recepción.

**Problema 6 [15 %]**

Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias continuas, cuya distribución conjunta está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = x\,e^{-(1-y)\cdot x}\,e^{-e^{x\cdot y}}, \quad x \geq 0, \quad -\infty < y < +\infty$$

Obtenga la función de densidad condicional de $Y$ dado que $X = x$.

Solución

Se pide $f_{Y\,|\,x=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$. **[3 %]**

Tenemos que

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-(1-y)\cdot x}\,e^{-e^{x\cdot y}}\,dy \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-x}\,e^{y\,x}\,e^{-e^{x\cdot y}}\,dy \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,e^{-z}\,dy, \quad z = e^{x\cdot y} \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= e^{-x}, \quad x \geq 0 \quad \textbf{[2 \%]} \end{aligned}$$

Luego

$$f_{Y\,|\,x=x}(y) = x\;e^{y\,x}\,e^{-e^{x\cdot y}}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0 \quad \textbf{[2 \%]}$$

# Formulario

### Propiedades función $\Gamma(\cdot)$

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

### Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$

$$(1)\quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2)\quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

### Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

# Distribuciones

| Distribución | Densidad de Probabilidad | $\Theta_X$ | Parámetros | Esperanza y Varianza |
|---|---|---|---|---|
| Binomial | $\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$ | $x = 0, \ldots, n$ | $n,\ p$ | $\mu_X = n\,p$<br>$\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$<br>$M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Geométrica | $p\,(1-p)^{x-1}$ | $x = 1, 2, \ldots$ | $p$ | $\mu_X = 1/p$<br>$\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$<br>$M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$ |
| Binomial-Negativa | $\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$ | $x = r, r+1, \ldots$ | $r,\ p$ | $\mu_X = r/p$<br>$\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$<br>$M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$ |
| Poisson | $\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$ | $x = 0, 1, \ldots$ | $\nu$ | $\mu_X = \nu\,t$<br>$\sigma_X^2 = \nu\,t$<br>$M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Exponencial | $\nu\,e^{-\nu\,x}$ | $x \geq 0$ | $\nu$ | $\mu_X = 1/\nu$<br>$\sigma_X^2 = 1/\nu^2$<br>$M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$ |
| Gamma | $\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$ | $x \geq 0$ | $k,\ \nu$ | $\mu_X = k/\nu$<br>$\sigma_X^2 = k/\nu^2$<br>$M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$ |
| Normal | $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ | $-\infty < x < \infty$ | $\mu,\ \sigma$ | $\mu_X = \mu$<br>$\sigma_X^2 = \sigma^2$<br>$M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Log-Normal | $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$ | $x \geq 0$ | $\lambda,\ \zeta$ | $\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$<br>$\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$<br>$E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1) |
| Uniforme | $\dfrac{1}{(b-a)}$ | $a \leq x \leq b$ | $a,\ b$ | $\mu_X = (a+b)/2$<br>$\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$<br>$M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Beta | $\dfrac{1}{B(q,\,r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$ | $a \leq x \leq b$ | $q,\ r$ | $\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$<br>$\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$ |
| Hipergeométrica | $\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ | $\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$ | $N,\ m,\ n$ | $\mu_X = n\,\frac{m}{N}$<br>$\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$ |

# Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

| $S_p$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |