Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2012

I2 . EYP1113 - PAUTA

Problema 1

Una de las últimas hipótesis planteadas en referencia al accidente aéreo ocurrido en Isla Juan Fernández, ha sido en relación a la trizadura de un ala y su impacto en la resistencia de ésta al viento. Lo anterior se sustenta en que las alas de un avión representan el elemento fundamental en la sustentación de éste. Por tanto dentro del proceso de construcción de alas es relevante el control sobre la variabilidad del insumo más importante, las cuales son las planchas con una aleación de acero-alumnio utilizadas en su construcción. Por tanto, la principal característica de este material es su resistencia a la fricción (en *kpsi*). Suponga que a lo más se acepta un 8 % del material bajo el límite considerado crítico e igual a 6 *kpsi*. Si la resistencia del material tiene una media de 10 *kpsi* y una desviación de σ *kpsi*.

a) Asumiendo que la resistencia se comporta según una distribución Normal,

   i) **[2.0 Ptos.]** Determine el valor de σ.

   ii) **[2.0 Ptos.]**Suponga que $\sigma = 5$ *kpsi*, determine el mínimo valor de resistencia del 25 % de las planchas de mayor resistencia.

b) **[2.0 Ptos.]** Asumiendo que la resistencia se comporta según una distribución Lognormal, con $\sigma = 5$, determine la probabilidad que la resistencia sea mayor a 15 *kpsi*.

Solución

a) $X \sim N(\mu = 10, \sigma)$,

   i) Se tiene que cumplir que $P(X < 6) = 0.08$. **[0.5pt]**
   Luego,
   $$\phi\left(\frac{6-10}{\sigma}\right) = 0.08. \qquad \textbf{[0.5pt]}$$
   De tabla se tiene que
   $$-\frac{4}{\sigma} = -1.41, \qquad \textbf{[0.5pt]}$$
   de donde
   $$\sigma = \frac{-4}{-1.41} = 2.8369. \qquad \textbf{[0.5pt]}$$

   ii) Sea x_m tal que $P(X > x_m) = 0.25$. **[0.5pt]**
   Entonces,
   $$P(X < x_m) = 0.75. \qquad \textbf{[0.5pt]}$$
   A partir de tabla,
   $$\frac{x_m - 10}{5} = 0.67, \qquad \textbf{[0.5pt]}$$
   de donde,
   $$x_m = 5 \times 0.67 + 10 = 13.35. \qquad \textbf{[0.5pt]}$$

b) $X \sim$lognormal con μ=10 y σ=5, $\rightarrow \ln(X) \sim N(\lambda, \xi)$

Obtenemos directamente los valores de los parámetros:

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\ln\left(1+\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right)} = 0.4723 \qquad [\mathbf{0.4pt}] \\ \lambda &= \ln\mu - \frac{1}{2}\xi^2 = 2.191. \qquad [\mathbf{0.4pt}] \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} P(X>15) &= 1-P(X \leq 15) \\ &= 1-\phi\left(\frac{\ln(15)-2.191}{0.4723}\right) \qquad [\mathbf{0.4pt}] \\ &= 1-\phi(1.095) = 1-0.863 \qquad [\mathbf{0.4pt}] \\ &= 0.137. \qquad [\mathbf{0.4pt}] \end{aligned}$$

Problema 2

El 19/abril el Mercurio publicó un artículo en el cual compara el ingreso per cápita de Chile con otros países. Se indica que durante el año 2012 Chile alcanzará el segundo lugar de América Latina con poco menos de US$18.000 (detrás de Argentina). Desde la perspectiva estadística es conocido que el ingreso per cápita de un pais sigue una distribución de Pareto, la cual está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x > x_m \\ \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El parámetro $x_m > 0$ representa el salario mínimo y $\alpha > 0$, la distribución de la riqueza, conocido como el índice de Pareto.

a) **[3.0 Ptos.]** Determine la función de distribución acumulada del ingreso per cápita y su media para $\alpha > 1$.

b) **[3.0 Ptos.]** Si un país tiene un salario mínimo anual de US$4.000 y un índice de Pareto igual a 0.4, ¿tiene Chile un ingreso per cápita superior a la mediana de este país?.

Solución

a) Directamente, se tiene:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_m}{x}\right)^\alpha, & x > x_m \\ \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Alternativamente, para $x > x_m$, se puede obtener como la integral

$$F(x) = \int_{x_m}^{x} \frac{\alpha x_m^\alpha}{u^{\alpha+1}}\, du = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha, \qquad [\mathbf{1.0pt}]$$

valiendo 0, en otro caso. **[0.5pt]**

Para obtener la media:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{x_m}^{\infty} x \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}\, dx \qquad [\mathbf{1.0pt}] \\ &= \alpha x_m^\alpha \int_{x_m}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \\ &= \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1}. \qquad [\mathbf{0.5pt}] \end{aligned}$$

b) Para cualquier cistribución de Pareto, la mediana es el punto x_0 tal que

$$\begin{aligned} F(x_0) &= 1 - \left(\frac{x_m}{x_0}\right)^\alpha = \frac{1}{2} \qquad [\mathbf{1.0pt}] \\ \Longrightarrow \qquad x_0 &= 2^{1/\alpha}\, x_m. \qquad [\mathbf{1.0pt}] \end{aligned}$$

Así, con $\alpha = 0.4$ y $x_m =$ US$4.000, la mediana del país mencionado es

$$x_m = 2^{1/0.4} \times 4.000 = 22.627,42. \qquad [\mathbf{0.8pt}]$$

Por tanto, Chile tiene un ingreso per cápita por debajo de la mediana de dicho país. **[0.2pt]**

Problema 3

En una gran empresa de la minería, durante el año 2011 ocurrieron 7.300 accidentes laborales. Considere que el año 2011 tuvo 365 días y que el día tiene 24 hrs. Con base a esta información, y asumiendo que el número de accidentes sigue un Proceso de Poisson, responda las siguientes preguntas:

a) **[2.0 Ptos.]** Si cada día se divide en tres turnos de 8 horas cada uno (de las 00.00 a 8.00, de 8.00 a 16.00 y de 16.00 a 24.00 hrs.) y usted revisa la bitácora de lo acaecido en los últimos 8 turnos ¿cuál es la probabilidad que en al menos dos de ellos hayan ocurrido exactamente 5 accidentes?

b) **[2.0 Ptos.]** Si un prevencionista de riesgo comienza su turno a las 8.00 de un día dado, ¿cuál es la probabilidad que tenga que esperar al menos 3 horas para la ocurrencia de un segundo accidente en su turno?

c) **[2.0 Ptos.]** Si de los 7.300 accidentes acaecidos durante el año 2011, se observaron 560 de ellos con resultado de muerte, ¿cuál es la probabilidad exacta y aproximada de que al elegir 30 accidentes al azar entre ellos, la muestra contenga un accidente con resultado de muerte?

Solución

a) La tasa de accidentes para un turno de 8 horas está dada por

$$\lambda = \frac{8 \times 7300}{24 \times 365} = 6.6667. \qquad [\mathbf{0.5pt}]$$

Luego, si X corresponde al número de accidentes en un turno de 8 horas, $X \sim Poisson(6.6667)$ y, con esto, la probabilidad de exactamente 5 accidentes en un turno es

$$P(X = 5) = \frac{e^{-6.6667} 6.6667^5}{5!} = 0.1397. \qquad [\mathbf{0.5pt}]$$

Sea Y el número de turnos, entre los 8 considerados, con 5 accidentes. Luego $Y \sim \ Bin(n = 8, p = 0.1397)$. Luego, se pide

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) \\
&= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \qquad [\mathbf{0.5pt}] \\
&= 1 - (1 - 0.1397)^8 - 8 \times 0.1397 \times (1 - 0.1397)^7 \\
&= 1 - 0.6898 = 0.3102. \qquad [\mathbf{0.5pt}]
\end{aligned}$$

b) La tasa de accidentes por hora está dada por

$$\lambda = \frac{7300}{24 \times 365} = 0.8333. \qquad [\mathbf{0.5pt}]$$

Sea T_2 el tiempo (en horas) hasta el segundo accidente. Del enunciado, se tiene que $T_2 \sim Gama(2; 0.8333)$[**0.5pt**]. Se pide entonces,

$$\begin{aligned}
P(T_2 > 3) &= 1 - P(T_2 \leq 3) \\
&= 1 - \left(1 - \sum_{x=0}^{2-1} \frac{(\lambda t)^x e^{-3\lambda}}{x!}\right) \qquad \text{(del formulario)} \qquad [\mathbf{0.5pt}] \\
&= \frac{(3 \times 0.8333)^0 e^{-3 \times 0.8333}}{0!} + \frac{(3 \times 0.8333)^1 e^{-3 \times 0.8333}}{1!} \\
&= 0.28732. \qquad [\mathbf{0.5pt}]
\end{aligned}$$

Otra alternativa es integrar:

$$\begin{aligned}
P(T_2 > 3) &= \int_3^\infty \frac{0.8333^2}{\Gamma(2)} u \exp\{-0.8333u\}\, du \qquad \text{(por partes)} \qquad [\mathbf{0.5pt}] \\
&= 0.28732. \qquad [\mathbf{0.5pt}]
\end{aligned}$$

c) En este caso, tenemos que los 7.300 accidentes se dividen en dos grupos: 560 con resultados de muerte y (7300 - 560) sin resultado de muerte. Se toma una muestra de 30 accidentes y se define X como el número de accidentes con resultado de muerte. La variable aleatoria X sigue una distribución Hipergeométrica. Por lo tanto:

i) Probabilidad exacta:

$$P(X=1) = \frac{\binom{560}{1}\binom{7300-560}{29}}{\binom{7300}{30}} =$$

(puede quedar expresado) **[1.0pt]**

ii) Probabilidad aproximada: la misma situación, pero la diferencia es que los seleccionados son "devueltos" y, por tanto, se mantiene constante la probabilidad de escoger un accidente con resultado de muerte. En este caso, aproximamos la distribuciónde X por una Binomial de parámetros $n = 30$ y $p = 560/7.300 = 0.0767$. Luego

$$P(X=1) \approx \binom{30}{1} 0.0767^1 (1-0.0767)^{29} = 0.2274. \qquad [\mathbf{1.0pt}]$$

Problema 4

El número de casos de pacientes contagiados con la bacteria Clostridium Dificille en una semana, a partir del año 2012, en cada centro asistencial, puede modelarse a través de una distribución de Poisson con una tasa de contagio de λ pacientes por semana, donde λ varía de un centro a otro siguiendo una distribución $Gama(3, \frac{1}{2})$. Determine:

a) **[2.0 Ptos.]** Probabilidad que durante la segunda semana de abril se hayan contagiado con la bacteria al menos 3 pacientes del Hospital de Urgencia de la Asistencia Pública (ex – Posta Central).

b) **[2.0 Ptos.]** Dado que en la segunda semana de abril se contagiaron 3 pacientes en la ex – Posta Central, determine la probabilidad que la tasa de contagio sea inferior a 4 pacientes por semana.

c) **[2.0 Ptos.]** Determine la asociación entre el número de pacientes contagiados semanalmente y la tasa de contagio.

Solución

a) Sea X el número de pacientes contagiados en un hospital. Del enunciado se tiene $X/\Lambda = \lambda \sim Poisson(\lambda)$, y $\Lambda \sim Gama(3; \frac{1}{2})$. Se debe obtener la distribución marginal de X,

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= \int_0^\infty f_{X\Lambda}(x, \lambda)\, d\lambda \qquad [\mathbf{0.4pt}] \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \frac{(1/2)^3 \lambda^{3-1} e^{-\lambda/2}}{\Gamma(3)} d\lambda \qquad [\mathbf{0.4pt}] \\
&= \frac{1}{2^4}\frac{1}{x!}\int_0^\infty \underbrace{\lambda^{2+x}\exp\{-(3/2)\lambda\}}_{KernelGama(2+x+1,3/2)}\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2^4}\frac{1}{x!}\frac{\Gamma(2+x+1)}{(3/2)^{2+x+1}} \\
&= \binom{2+x}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^3,
\end{aligned}
$$

para $x = 0, 1, ...$, cero en otro caso, **[0.6pt]** que corresponde a una distribución Binomial Negativa.

Así, la probabilidad pedida es

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 3) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \qquad [\mathbf{0.3pt}] \\
&= 1 - 0.037 - 0.074 - 0.099 = 0.790. \qquad [\mathbf{0.3pt}]
\end{aligned}
$$

b) Necesitamos la distribución condicional de Λ dado X=3.

$$
\begin{aligned}
f_{\Lambda/X=x}(\lambda) &= \frac{f_{X\Lambda}(x,\lambda)}{p_X(x)} \qquad [\mathbf{0.4pt}] \\
&= \frac{\frac{1}{2^4}\frac{1}{x!}\lambda^{2+x}e^{-3\lambda/2}}{\binom{2+x}{x}(2/3)^x(1/3)^3} \qquad [\mathbf{0.4pt}] \\
x = 3 \Longrightarrow \quad &= 0.094 \times \lambda^5 e^{-3\lambda/2}. \qquad [\mathbf{0.4pt}]
\end{aligned}
$$

Luego, $\Lambda|X = 3$ distribuye $Gama(6, 3/2)$**[0.4pt]**. De este modo,

$$
\begin{aligned}
P(\Lambda < 4|X = 3) &= 1 - \sum_{x=0}^{5}\frac{6^x e^{-6}}{x!} \qquad [\mathbf{0.4pt}] \\
&= 0.554.
\end{aligned}
$$

Otra alternativa es dejar expresada la integral entre 0 y 4, en vez de utilizar la fórmula de la sumatoria, y sin reconocer que corresponde a una Gama. Este resultado obtiene **[0.4pt]**

c) La covarianza se puede obtener como:

$$Cov(X,\Lambda) = E(X\Lambda) - E(X)E(\Lambda). \qquad [\mathbf{0.2pt}]$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X/\Lambda)) \\ &= E(\Lambda) = \frac{3}{(1/2)} \\ &= 6, \qquad [\mathbf{0.4pt}] \end{aligned}$$

y que

$$E(\Lambda) = \frac{3}{(1/2)} = 6. \qquad [\mathbf{0.2pt}]$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} E(X\Lambda) &= \int_0^\infty \sum_{x=0}^\infty x\lambda \, \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \frac{(1/2)^3}{\Gamma(3)} \lambda^2 e^{-\lambda/2} \, d\lambda \\ &= \frac{(1/2)^3}{\Gamma(3)} \int_0^\infty \lambda^4 e^{-\lambda/2} \sum_{u=0}^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^u}{u!} \, d\lambda \\ &= \frac{(1/2)^3}{\Gamma(3)} \int_0^\infty \underbrace{\lambda^4 e^{-\lambda/2}}_{KernelGama(5,1/2)} \, d\lambda \\ &= \frac{(1/2)^3}{\Gamma(3)} \frac{\Gamma(5)}{(1/2)^5} \\ &= 48. \qquad [\mathbf{0.8pt}] \end{aligned}$$

Luego,

$$Cov(X,\Lambda) = 48 - 6^2 = 12. \qquad [\mathbf{0.4pt}]$$

Otra forma de calcular $E(X\Lambda)$ corresponde a:

$$\begin{aligned} E(X\Lambda) &= E(E(X\Lambda/\Lambda) \\ &= E(\Lambda E(X|\Lambda)) \\ &= E(\Lambda^2) = Var(\Lambda) + E^2(\Lambda) \\ &= \frac{3}{(1/2)^2} + 6^2 = 48. \end{aligned}$$