Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2013

| | | |
|---|---|---|
| **Curso** | : | **Probabilidad y Estadística** |
| **Sigla** | : | **EYP1113** |
| **Interrogación** | : | **2** |
| **Profesor** | : | **Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)** |
| **Ayudantes** | : | **Carlos Cayuman Cofre y María Ignacia Vicuña.** |

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

## Problema 1

Se ha estudiado que, en los países de América Latina, la relación entre el ingreso per cápita anual de un país, $X$ (miles de dólares), y los montos anuales invertidos en el rubro de la construcción, $Y$ (miles de dólares) se relacionan en la forma:

$$Y = k \exp\left\{\frac{X+a}{b}\right\},$$

donde $k > 0$. Si $a = -2$ y $b = 3$ para un país dado, la distribución del ingreso per cápita para este país puede ser aproximada por una distribución Normal de media 7 y desviación estándar 3.

a) **(2 puntos)** Determine la probabilidad de que el monto utilizado en construcción sea menor a un valor determinado, digamos $y$. Según esto, ¿qué distribución sigue esta variable?

b) **(2 puntos)** Si este país espera invertir en el rubro de la construcción un monto anual mayor a 46, ¿cuál debiese ser el valor de la constante $k$ para que esto ocurra con probabilidad del 60 %?

c) **(2 puntos)** Asuma que la distribución del monto anual invertido en construcción puede aproximarse por una distribución Normal, que mantiene la media, desviación estándar y constante k obtenida en b). Determine la probabilidad de que este monto se encuentre entre 60 y 140 (miles de dólares)

### Solución:

a) Se pide

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= P\left(k \exp\left\{\frac{X-2}{3}\right\} \leq y\right) && [\mathbf{0.3}] \\
&= P\left(\frac{X-2}{3} \leq \log y - \log k\right) \\
&= P\left(X \leq 3\log y - 3\log k + 2\right) && [\mathbf{0.3}] \\
&= \Phi\left(\frac{3\log y - 3\log k + 2 - 7}{3}\right) && [\mathbf{0.3}] \\
&= \Phi(\log y - (\log k + 1.67)). && [\mathbf{0.2}]
\end{aligned}$$

Luego, $Y$ distribuye Lognormal [**0.3**] con $\lambda = \log k + 1.67$ [**0.3**] y $\mathcal{C} = 1$ [**0.3**].

b) Se quiere $P(Y > 46) = 0.6$ **[0.2]**. Es decir,

$$\begin{array}{rl} & P(Y \leq 46) = 0.4 \qquad \textbf{[0.2]} \\ \iff & \Phi\left(\dfrac{\log(46) - (\log k + 1.67)}{1}\right) = 0.4 \qquad \textbf{[0.8]} \\ \iff & \log(46) - \log k - 1.67 = \Phi^{-1}(0.4) = -\Phi^{-1}(0.6) = -0.25 \\ \iff & 2.409 = \log k \\ \iff & k = 11.12. \qquad \textbf{[0.8]} \end{array}$$

c) Para encontrar media y varianza de la distribución Lognormal, $\mu_Y$ y $\sigma_Y$, respectivamente, obtenemos

$$\lambda = \log(11.12) + 1.67 = 4.08. \qquad \textbf{[0.2]}$$

Ya teníamos $\mathcal{C} = 1$, luego,

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \exp\left\{\lambda + \frac{1}{2}\mathcal{C}\right\} \\ &= \exp\left\{4.08 + \frac{1}{2}\right\} = 97.51 \\ \sigma_Y &= \mu_Y \left(\exp\{\mathcal{C}^2\} - 1\right)^{0.5} \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= 97.51 \left(\exp\{1\} - 1\right)^{0.5} = 127.82. \qquad \textbf{[0.2]} \end{aligned}$$

Se quiere

$$\begin{aligned} P(60 < Y < 140) &= \Phi\left(\frac{140 - 97.51}{127.82}\right) - \Phi\left(\frac{60 - 97.51}{127.82}\right) \qquad \textbf{[0.4]} \\ &= \Phi(0.33) - \Phi(-0.29) \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= \Phi(0.33) - (1 - \Phi(0.29)) \qquad \textbf{[0.4]} \\ &= 0.6293 - (1 - 0.6141) = 0.2434. \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

**[1.0] pto. base**

**Problema 2**

Una póliza de seguros paga 1 millón de pesos por día a cierta empresa debido a un siniestro, por hasta 3 días de paralización de actividades, y 0.5 millones de pesos en los siguientes días. El número de días de paralización de actividades, $X$ (en esta área de la economia el máximo de días de paralización puede ser de 5 días), corresponde a una variable aleatoria discreta con función de probabilidad:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{6-x}{15}, & x = 1,2,3,4,5 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

a) **(3 puntos)** Determine la función generadora de momentos del monto pagado por la póliza bajo estas condiciones.

b) **(3 puntos)** Utilice el resultado obtenido en a) para obtener el monto medio a pagar por la póliza en caso de siniestro.

**Solución:**

a) El monto pagado por la póliza corresponde a

$$Y = \begin{cases} x & , x = 1,2,3 \qquad \textbf{[0.5]} \\ 3 + 0.5(x-3) & , x = 4,5. \qquad \textbf{[0.5]} \end{cases}$$

Sabemos que

$$M_Y(t) = E(e^{t\,Y}). \qquad \textbf{[0.3]}$$

**Alternativa 1:** Usar:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \sum_{x=1}^{5} e^{t\,y}\, p_X(x) \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= \sum_{x=1}^{3} e^{t\,x} \left(\frac{6-x}{15}\right) + \sum_{x=4}^{5} e^{t\,(3+0.5(x-3))} \left(\frac{6-x}{15}\right) \qquad \textbf{[0.7]} \\ &= e^t \frac{5}{15} + e^{2t}\frac{4}{15} + e^{3t}\frac{3}{15} + e^{3.5t}\frac{2}{15} + e^{4t}\frac{1}{15}. \qquad \textbf{[0.7]} \end{aligned}$$

**Alternativa 2:** Usar la función de probabilidad de $Y$, $p_Y$. Los posibles valores de $Y$ están en $A = \{1, 2, 3, 3.5, 4\}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} p_Y(1) &= P(Y=1) = P(X=1) = \frac{6-1}{15} = \frac{5}{15} \qquad \textbf{[0.1]} \\ p_Y(2) &= P(Y=2) = P(X=2) = \frac{6-2}{15} = \frac{4}{15} \qquad \textbf{[0.1]} \\ p_Y(3) &= P(Y=3) = P(X=3) = \frac{6-3}{15} = \frac{3}{15} \qquad \textbf{[0.1]} \\ p_Y(3.5) &= P(Y=3.5) = P(X=4) = \frac{6-4}{15} = \frac{2}{15} \qquad \textbf{[0.1]} \\ p_Y(4) &= P(Y=4) = P(X=5) = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15} \qquad \textbf{[0.1]}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{t\,Y}) \\ &= \sum_{y \in A} e^{t\,y} p_Y(y) \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= e^t p_Y(1) + e^{2t} p_Y(2) + e^{3t} p_Y(3) + e^{3.5t} p_Y(3.5) + e^{4t} p_Y(4) \qquad \textbf{[0.5]} \\ &= e^t \frac{5}{15} + e^{2t}\frac{4}{15} + e^{3t}\frac{3}{15} + e^{3.5t}\frac{2}{15} + e^{4t}\frac{1}{15}. \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

b) Sabemos que

$$E(Y) = \frac{dM_Y(t)}{dt}|_{t=0}. \qquad \textbf{[0.8]}$$

Tenemos

$$\frac{dM_Y(t)}{dt} = \frac{5}{15}e^t + \frac{4}{15} \times 2e^{2t} + \frac{3}{15} \times 3e^{3t} + \frac{2}{15} \times 3.5e^{3.5t} + \frac{1}{15} \times 4e^{4t}. \qquad \textbf{[1.5]}$$

Evaluando en $t = 0$ se obtiene $E(X) = 2.2$. **[0.7]**

**[1.0] pto. base**

**Problema 3**

"Durante el primer trimestre ocurrieron cuatro asaltos diarios en el sector Oriente de Santiago, situación que refleja el aumento de este delito a nivel país"(Teletrece, 19 de abril de 2013).

Con el objeto de analizar este fenómeno, se pide determinar lo siguiente:

a) **(1 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad que en un fin de semana del primer trimestre (viernes y sábado) se observen al menos dos asaltos en el sector Oriente?

b) **(2 puntos)** Originalmente, los días sábados había un único fiscal para atender el sitio del suceso. Si en cada proceso, el fiscal demora 4 horas, ¿cuál es la probabilidad que un día sábado (de 00.00 hasta las 24.00) en el cual ocurren 3 asaltos, él no pueda concurrir a un evento por estar en terreno?

Un análisis más exhaustivo de la información permite determinar que entre las 21.00 horas del viernes y 05.00 horas del sábado, la tasa por horas de asaltos se triplica con respecto a las horas del resto de la semana, por lo cual en ese periodo horario se asignan dos fiscales.

c) **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que durante dicho turno (21.00 horas del viernes y 05.00 horas del sábado) los fiscales no puedan concurrir a un evento por estar ambos en terreno, si ocurren exactamente tres asaltos durante el turno?

**Solución:**

a) Sea $X$ el número de asaltos en viernes y sábado. La tasa del proceso es $\nu = 4$ asaltos por día, y el tiempo corresponde a $t = 2$ días. Luego, $\lambda = 4 \times 2 = 8$ y $X \sim Poisson(8)$ **[0.3]**. Se pide:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \qquad \textbf{[0.4]} \\ &= 1 - e^{-8} - e^{-8} \times 8 = 0.997. \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

b) La tasa de asaltos por hora corresponde a

$$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

Sea $T_2$ el tiempo (en horas) entre el primer y segundo asalto, $T_3$ el tiempo (en horas) entre el segundo y tercer asalto. Tenemos $T_2 \sim Exp(1/6)$ **[0.2]**, $T_3 \sim Exp(1/6)$ **[0.2]**. El fiscal no podrá asistir a un evento por estar en terreno si transcurren menos de 4 horas entre un asalto y otro.

**Alternativa 1:** A través de la distribución Exponencial.

- La probabilidad de que no pueda asistir a, **al menos**, un asalto corresponde a:

$$\begin{aligned} P(\{T_2 < 4\} \cup \{T_3 < 4\}) &= P(T_2 < 4) + P(T_3 < 4) - P(\{T_2 < 4\} \cap \{T_3 < 4\}) \\ &= P(T_2 < 4) + P(T_3 < 4) - P(T_2 < 4) \times P(T_3 < 4), \qquad \textbf{[1.0]} \end{aligned}$$

dado que $T_2$ y $T_3$ son independientes.
La función de probabilidad acumulada de una variable aleatoria Exponencial($\nu$) en $t$ corresponde a $(1 - e^{-\nu t})$ **[0.3]**. Luego, la probabilidad pedida corresponde a:

$$\begin{aligned} &= (1 - e^{-4/6}) + (1 - e^{-4/6}) - (1 - e^{-4/6})^2 \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= 0.736. \qquad \textbf{[0.1]} \end{aligned}$$

- La probabilidad de que no pueda asistir a **exactamente** un asalto corresponde a:

$$P(\{T_2 < 4\} \cap \{T_3 > 4\}) + P(\{T_2 > 4\} \cap \{T_3 < 4\}) \qquad \textbf{[1.0]}$$

La función de probabilidad acumulada de una variable aleatoria Exponencial($\nu$) en $t$ corresponde a $(1 - e^{-\nu t})$ **[0.3]**. Luego, la probabilidad pedida corresponde a:

$$\begin{aligned} & (1 - e^{-4/6})e^{-4/6} + e^{-4/6}(1 - e^{-4/6}) \qquad \textbf{[0.2]} \\ = \quad & 0.4996. \qquad \textbf{[0.1]} \end{aligned}$$

**Alternativa 2:** A través de la distribución Binomial. Sea $X$ el número de asaltos a los que no asiste el fiscal. Luego, $X$ sigue una distribución Binomial(2, $p$) **[0.4]**, donde $p$ corresponde a la probabilidad de no asistir a un asalto cualquiera (el segundo o el tercero). Luego,

$$p = P(T_i > 4) = e^{-4/6}, \qquad \textbf{[0.4]}$$

para $i = 1, 2$.

- La probabilidad de que no pueda asistir a, **al menos**, un asalto corresponde a:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= 1 - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} (e^{-4/6})^0 (1 - e^{-4/6})^2 = 0.736. \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

- La probabilidad de que no pueda asistir a **exactamente** un asalto corresponde a:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (e^{-4/6})^1 (1 - e^{-4/6})^1 \qquad \textbf{[0.5]} \\ &= 0.4996. \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

c) Debemos obtener la tasa de asalto para el turno dicho. Una semana tiene $7 \times 24 = 168$ horas, de las cuales 8 corresponden al turno entre 21:00 y 05:00, y 160 al resto de la semana. De este modo tenemos que si $r$ corresponde a la tasa de asaltos fuera del horario del turno.

$$160 \times r + 8 \times 3\,r = 168 \times \frac{4}{24} = 28. \qquad \textbf{[0.5]}$$

Luego $r = 0.1522$ y la tasa en el turno dado es de $3\,r = 0.4566$. **[0.5]**

Sea $T$ el tiempo entre el primer y tercer asalto. Ninguno de los fiscales podrá asistir a uno de los asaltos si $T < 4$. Tenemos que

$$T \sim \text{Gama}(2, 0.4566),$$

puesto que es el tiempo hasta el segundo evento después del primer asalto **[1.0]**. Nos piden $P(T < 4)$ **[0.5]**.

**Alternativa 1:** Utilizando resultado en formulario, con $t = 4, k = 2, \nu = 0.4566, \nu\, t = 1.8264$,

$$\begin{aligned} P(T < 4) &= 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{1.8264^x\, e^{-1.8264}}{x!} \\ &= 1 - e^{-1.8264} - 1.8264\, e^{-1.8264} = 0.545. \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

**Alternativa 2:** Integrando:

$$P(T < 4) = \int_0^4 \frac{0.4566^2}{\Gamma(2)} x e^{-0.4566\,x}\, dx. \qquad \textbf{[0.25]}$$

Por partes con $u = x$ y $dv = e^{-0.45}$,

$$\begin{aligned} P(T < 4) &= 0.4566^2 \left( -\frac{1}{0.4566} x\, e^{-0.45\,x}|_0^4 + \int_0^4 \frac{1}{0.4566}\, e^{-0.4566\,x}\, dx \right) \\ &= 0.4566^2 \left( -\frac{4}{0.4566}\, e^{-0.4566 \times 4} + \frac{1}{0.4566^2} (1 - e^{-0.4566 \times 4}) \right) = 0.545. \qquad \textbf{[0.25]} \end{aligned}$$

**[1.0] pto. base**

**Problema 4**

Un proceso produce varillas de acero, que es una aleación de hierro y carbono, con propiedades mecánicas que la hacen muy resistente y a la vez flexible. El largo $X$ (m) y la flexión (deformación transversal) $Y$ (m) de una varilla puede ser considerada una variable aleatoria bidimensional con distribución Uniforme en el área definida por $0 < x < 1$ y $x^2 < y < x$.

a) **(2 puntos)** Determine la probabilidad que la flexión sea menor a 0,6 m.

b) **(2 puntos)** Obtenga la función de densidad de la flexión, cuando el largo es igual a 0,3 m. ¿A qué distribución corresponde?

c) **(2 puntos)** Muestre que $E(Y) > E(Y|X = 0.3)$.

*Ayuda: La función de densidad Uniforme en un sector bidimensional dado, de área A, corresponde a $1/A$ dentro de dicho sector, y 0 en otro caso.*

**Solución:** El área de la región sobre la cual están definidas las variables corresponde a:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \int_{x^2}^x dy\, dx \\
&= \int_0^1 (x - x^2)\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}|_0^1 - \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{1}{6}. \qquad \textbf{[0.3]}
\end{aligned}$$

Luego, la función de densidad conjunta de $X$ e $Y$ corresponde a:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 6, & 0 < x < 1, x^2 < y < x \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad \textbf{[0.3]}$$

([**0.2**] si sólo indica que $f_{X,Y}(x, y) = 6$.)

a) Primero debe obtenerse la función de densidad de $Y$:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int f_{X,Y}(x, y)\, dx \\
&= \int_y^{\sqrt{y}} 6\, dx \qquad \textbf{[0.3]} \\
&= 6(\sqrt{y} - y), \qquad \textbf{[0.3]}
\end{aligned}$$

cuando $0 < y < 1$, y 0 en otro caso. [**0.2**]Se pide:

$$\begin{aligned}
P(Y < 0.6) &= \int_0^{0.6} 6(\sqrt{y} - y)\, dy \qquad \textbf{[0.3]} \\
&= 6\left(\frac{2}{3}y^{3/2}|_0^{0.6} - \frac{1}{2}y^2|_0^{0.6}\right) \\
&= 0.779. \qquad \textbf{[0.3]}
\end{aligned}$$

b) Nos piden

$$f_{Y|X=0.3}(y) = \frac{f_{X,Y}(0.3, y)}{f_X(0.3)}. \qquad \textbf{[0.2]}$$

Para el denominador,

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int f_{X,Y}(x, y)\, dy \\
&= \int_{x^2}^x 6\, dy \qquad \textbf{[0.3]} \\
&= 6(x - x^2), \qquad \textbf{[0.3]}
\end{aligned}$$

cuando $0 < x < 1$, cero en otro caso. **[0.2]** Luego

$$f_X(0.3) = 6(0.3 - 0.3^2) = 1.26. \qquad \textbf{[0.2]}$$

Finalmente,

$$f_{Y|X=0.3}(y) = \frac{6}{1.26} = 4.762, \qquad \textbf{[0.3]}$$

cuando $0.3^2 < y < 0.3$, cero en otro caso **[0.2]**. Esto corresponde a la distribución Uniforme en (0.09, 0.3).**[0.3]**

c) Se necesita:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int f_Y(y)\, dy \\ &= \int_0^1 y\; 6(\sqrt{y} - y)\, dy \qquad \textbf{[0.5]} \\ &= 6\left(\frac{2}{5}y^{5/2}|_0^1 - \frac{y^3}{3}|_0^1\right) \\ &= 0.4. \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

Por otra parte $E(Y/X = x)$,
Alternativa 1 -
Como $Y/X = 0,3 \sim U(0,09; 0,30) \rightarrow E(Y/X = x) = (a + b)/2 = 0,39/2 = 0,195$ **[1,0]**

Alternativa 2 :

$$\begin{aligned} E(Y|X = 0.3) &= \int y\; f_{Y|X=0.3}(y)\, dy \\ &= \int_{0.09}^{0.3} y\; 0.4762\, dy \qquad \textbf{[0.5]} \\ &= \frac{4.762}{2} y^2|_{0.09}^{0.3} = 0.195. \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

Luego, $E(Y) > E(Y|X = 0.3)$.

**[1.0] pto base**

**Tiempo: 2 Horas**

# Distribuciones

| Distribución | Densidad de Probabilidad | $\Theta_X$ | Parámetros | Esperanza y Varianza |
|---|---|---|---|---|
| Binomial | $\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$ | $x = 0, \ldots, n$ | $n,\ p$ | $\mu_X = n\,p$<br>$\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$<br>$M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Geométrica | $p\,(1-p)^{x-1}$ | $x = 1, 2, \ldots$ | $p$ | $\mu_X = 1/p$<br>$\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$<br>$M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$ |
| Binomial-Negativa | $\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$ | $x = r, r+1, \ldots$ | $r,\ p$ | $\mu_X = r/p$<br>$\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$<br>$M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$ |
| Poisson | $\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$ | $x = 0, 1, \ldots$ | $\nu$ | $\mu_X = \nu\,t$<br>$\sigma_X^2 = \nu\,t$<br>$M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Exponencial | $\nu\,e^{-\nu\,x}$ | $x \geq 0$ | $\nu$ | $\mu_X = 1/\nu$<br>$\sigma_X^2 = 1/\nu^2$<br>$M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$ |
| Gamma | $\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$ | $x \geq 0$ | $k,\ \nu$ | $\mu_X = k/\nu$<br>$\sigma_X^2 = k/\nu^2$<br>$M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$ |
| Normal | $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ | $-\infty < x < \infty$ | $\mu,\ \sigma$ | $\mu_X = \mu$<br>$\sigma_X^2 = \sigma^2$<br>$M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Log-Normal | $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$ | $x \geq 0$ | $\lambda,\ \zeta$ | $\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\,\zeta^2\right)$<br>$\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$<br>$E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1) |
| Uniforme | $\dfrac{1}{(b-a)}$ | $a \leq x \leq b$ | $a,\ b$ | $\mu_X = (a+b)/2$<br>$\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$<br>$M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$ |
| Beta | $\dfrac{1}{B(q,\ r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$ | $a \leq x \leq b$ | $q,\ r$ | $\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$<br>$\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$ |
| Hipergeométrica | $\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ | $\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$ | $N,\ m,\ n$ | $\mu_X = n\,\frac{m}{N}$<br>$\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$ |

# Formulario

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\,e^{-u}\,du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$:

$$(1) \quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2) \quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

# Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

| $S_p$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |