Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2015

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I2**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

Basado en estudios es posible asumir que, posterior al inicio del proceso eruptivo, la distribución de los pulsos eruptivos† del volcán Calbuco se comporta como una distribución Poisson con una tasa esperada de cuatro pulsos por hora. A su vez, la distancia (en kms) en la cual cae el material picoclástico producto de un pulso eruptivo se comporta como una Gamma con media igual a 4 y un c.o.v. igual a un 50 %. Por simplicidad asuma independencia entre las distancias alcanzadas por el material picoclástico entre pulsos.

(†) Un pulso eruptivo consiste de una explosión que genera una columna eruptiva con material piroclástico.

(a) **[2.0 Ptos.]** Si un vulcanólogo esta observando el comportamiento del volcán, determine el tiempo esperado (en minutos) para que observe un tercer pulso eruptivo.

(b) **[2.0 Ptos.]** ¿Cuál seria la probabilidad que el tercer pulso eruptivo no ocurra durante la primera hora de observación?

(c) **[2.0 Ptos.]** Una estación vulcanológica que se encuentra a 8 km del cráter del volcán aún se encuentra intacta. ¿Cuál es la probabilidad que después del tercer pulso eruptivo observado por el vulcanólogo, el material piroclástico alcance la estación?

Solución

(a) Sea X_t el número de pulsos emitidos en t minutos, cuya distribución es Poisson($\nu\, t$).

Del enunciado se tiene que

$$E(X_{60}) = \nu \cdot 60 = 4 \rightarrow \nu = \frac{1}{15} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Si T es el tiempo transcurrido hasta observar el tercer pulso, entonces

$$T \sim \text{Gamma}(k = 3, \nu = 1/15) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Se pide

$$E(T) = \frac{3}{1/15} = 45 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(b) Se pide

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \quad P(T > 60) = \sum_{x=0}^{2} \frac{4^x\, e^{-4}}{x!} = e^{-4} \cdot (1 + 4 + 8) = 0.2381033 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

(c) Definamos como p a la probabilidad que un pulso lance material piroclástico a más de 8 km y como X_i a las distancias alcanzadas.

Del enunciado tenemos que

$$X_i \sim \text{Gamma}(k = 4,\, \nu = 1) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Luego,

$$p = P(X_i > 8) = \sum_{x=0}^{3} \frac{8^x\, e^{-8}}{x!} = e^{-8} \cdot (1 + 8 + 64/2 + 512/6) = 0.04238011 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Sea Y el número de pulsos observados, hasta que se superan los 8 km.

$$Y \sim \text{Geométrica}(p) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Interpretación 1: Se pide

$$P(Y = 4) = (1 - p)^3\, p = 0.03721702 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Interpretación 2: Se pide

$$P(Y > 3) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - \big(1 - (1 - p)^3\big) = (1 - p)^3 = 0.8781718 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

El terremoto de magnitud 7,8 ocurrido hace unos días en Nepal ha dejado hasta el momento más de 5.000 muertos, además de muchas víctimas en Bangladesh, India, Tíbet y el monte Everest. Suponga que los rescatistas que están trabajando en las distintas zonas encuentran personas (vivas o fallecidas) con probabilidades que varían según la experiencia de cada rescatista. Si esta probabilidad se comporta como una variable aleatoria Beta(2, 3) y no tenemos información de la experiencia de los rescatista, ¿cuántas zonas esperarían revisar cada uno hasta encontrar personas (vivas o fallecidas) por tercera vez? Suponga que la experiencia de cada rescatistas durante este operativo no varía.

Solución

Sea X el número se sectores que un rescatista reviza hasta por tercera vez encuentra personas (vivas o fallecidas) e Y la probabilidad que un rescatista encuentre personas (vivas o fallecidas) en un sector.

Del enunciado se deduce que

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \quad Y \sim \text{Beta}(2,\, 3) \quad \text{y} \quad X \,|\, Y = y \sim \text{Binomial-Negativa}(k = 3,\, p = y) \quad \textbf{[2.0 Ptos.]}$$

con $\Theta_Y = [0,\, 1]$. **[0.5 Ptos.]**

Se pide

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \quad \text{E}(X) = \text{E}[\text{E}(X \,|\, Y)] = \text{E}\left(\frac{3}{Y}\right) = \int_0^1 \frac{3}{y} \cdot \frac{y\,(1-y)^2}{B(2,3)}\, dy = 12 \quad \textbf{[1.5 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

Sean X_1, X_2, $\ldots$, X_n variables aleatorias independientes con distribución Beta(1, 1) en el intervalo [0, 1]. Proponga una distribución exacta y una aproximada para la variable aleatoria Y definida como:

$$Y = -\ln\left[\prod_{i=1}^{n}(1 - X_i)\right]$$

Solución

Tenemos que

$$Y = \sum_{i=1}^{n} -\ln(1 - X_i) = \sum_{i=1}^{n} Z_i \quad \textbf{[2.0 Ptos.]}$$

Por otra parte

$$f_{Z_i}(z) = f_{X_i}\left(1 - e^{-z}\right) \cdot |e^{-z}| = 1 \cdot e^{-z} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

con $z > 0$, la cual corresponde a un función de densidad de una Exponencial($\nu = 1$). **[0.5 Ptos.]**

Como los X_i's son independientes, entonces los Z_i's también lo son. **[0.5 Ptos.]**

Luego

$$Y \sim \text{Gamma}(k = n,\, \nu = 1) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Aplicando el Teorema del Límite central **[0.5 Ptos.]**

$$Y \stackrel{\cdot}{\sim} \text{Normal}(n,\, \sqrt{n}) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

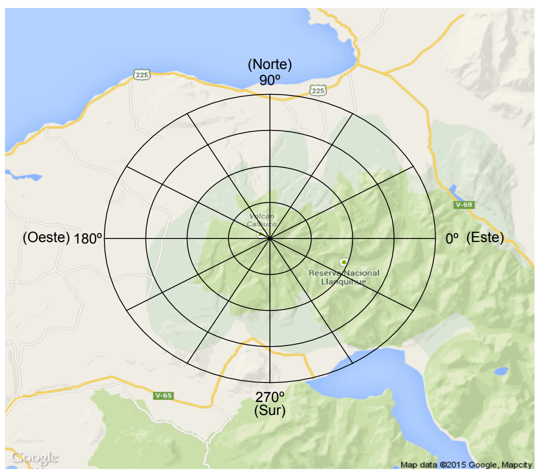
Posterior a la erupción volcánica del Calbuco, la emisión de la lava se empezó a distribuir en torno al cráter. Suponga que la distancia en kilómetros, X, que alcanza la lava al cabo de una hora y su dirección, Y, están determinadas por la siguiente función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\nu}{\Gamma^2(1/2)}\, x\, e^{-\nu\, x^2}$$

con $\nu > 0$, $y \in [0,\, 2\,\pi]$ y $x > 0$.

(a) **[3.0 Ptos.]** ¿Cómo distribuye la distancia X que recorre la lava en la hora posterior a la erupción?

(b) **[3.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad que la lava que va en dirección norte supere el radio de seguridad de 20 kilómetros establecido por las autoridades durante la hora posterior a la erupción? Evalúe para $\nu = 0.005$.



Solución

(a) Se pide

$$f_X(x) = \int_0^{2\,\pi} \frac{\nu}{\Gamma^2(1/2)}\, x\, e^{-\nu\, x^2}\, dy = \frac{\nu}{\Gamma^2(1/2)}\, x\, e^{-\nu\, x^2}\, y\Big|_0^{2\,\pi} = \frac{2\,\pi\,\nu}{\Gamma^2(1/2)}\, x\, e^{-\nu\, x^2} = 2\,\nu\, x\, e^{-\nu\, x^2} \quad \textbf{[2.5 Ptos.]}$$

con $x > 0$ y $\nu > 0$. **[0.5 Ptos.]**

(b) Tenemos que

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} \frac{\nu}{\pi}\, x\, e^{-\nu\, x^2}\, dx = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} = \frac{1}{2\,\pi} \quad \textbf{[0.8 Ptos.]}$$

con $y \in [0,\, 2\,\pi]$ **[0.2 Ptos.]**, es decir $Y \sim \text{Uniforme}(0,\, 2\,\pi)$. **[1.0 Ptos.]**

Alternativa 1: Notemos que X e Y son independientes, ya que

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Se pide

$$P(X > 20 \,|\, Y = \pi/2) = P(X > 20) = \int_{20}^{\infty} 2\,\nu\, x\, e^{-\nu\, x^2}\, dx = \int_{400\,\nu}^{\infty} e^{-u}\, du = e^{-400\,\nu} = e^{-2} = 0.1353353 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Alternativa 2: Tenemos que

$$f_{X\,|\,Y=y} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = 2\,\nu\,x\,e^{-\nu\,x^2} \quad \textbf{[0.8 Ptos.]}$$

con $x > 0$, $\nu > 0$ e $y \in [0,\,2\,\pi]$. **[0.2 Ptos.]**

Se pide

$$P(X > 20\,|\,Y = \pi/2) = \int_{20}^{\infty} 2\,\nu\,x\,e^{-\nu\,x^2}\,dx = \int_{400\,\nu}^{\infty} e^{-u}\,du = e^{-400\,\nu} = e^{-2} = 0.1353353 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Formulario

Propiedades función $\Gamma(\cdot)$

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$

$$(1)\quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2)\quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

Igualdades

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \qquad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Propiedad distribución Gamma

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\,\nu), \text{ con } k \in \mathbb{N} \longrightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\,t)^x\, e^{-\nu\,t}}{x!}$$

Transformación

Sea $Y = g(X)$ una función cualquiera, con k raíces:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X\left(g_i^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{d}{dy}\, g_i^{-1}(y)\right|$$

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} p_X\left(g_i^{-1}(y)\right)$$

Sea $Z = g(X, Y)$ una función cualquiera:

$$p_Z(z) = \sum_{g(x,y)=z} p_{X,Y}(x, y)$$

Sea $Z = g(X, Y)$ una función invertible para X o Y fijo:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(g^{-1}, y) \left|\frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\right| dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, g^{-1}) \left|\frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\right| dx \end{aligned}$$

Esperanza y Varianza Condicional

$$\text{E}(Y) = \text{E}[\text{E}(Y \mid X)] \quad \text{y} \quad \text{Var}(Y) = \text{Var}[\text{E}(Y \mid X)] + \text{E}[\text{Var}(Y \mid X)]$$

Teorema del Límite Central

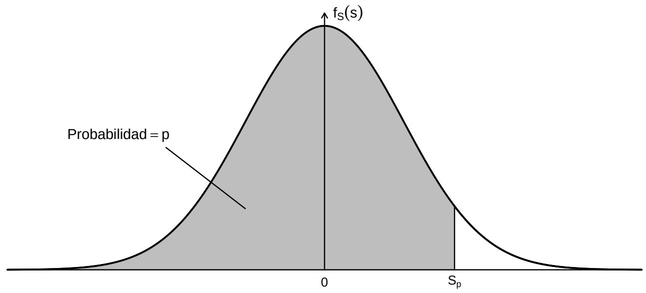
Sean $X_1,\,\ldots,\,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces

$$Z_n = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow Z \sim \text{Normal}(0,1),$$

cuando $n \to \infty$, $\text{E}(X_i) = \mu$ y $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\ \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \dfrac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Tabla Percentiles Distribución Normal Estándar



S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998