Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2015

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Interrogación	:	**2**
Profesores	:	**Ana M. Araneda (Sec. 1 y 3), Ricardo Aravena (Sec. 2, 4 y 5) y José Quinlan (Sec. 6)**
Ayudantes	:	**Matías Castro, Fernando Florenzano, Paulina Flores, Daniela Hurtado, M. Constanza Prado, Frane Sazunic**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina, o cualquier tipo de lápiz borrable, renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices, sus cuadernillos y calculadora.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

Se sabe que en la producción de varillas de acero para la construcción, su diámetro sigue una distribución Log-Normal de media 6 mm y desviación estándar 0,15 mm. El método de producción garantiza que los diámetros de las varillas obtenidas son independientes entre sí.

a) Determine los límites de tolerancia, diámetros máximo y mínimo, de modo que sólo un 7,5 % de las varillas sean rechazadas por tener un diámetro menor al límite inferior, y un 7,5 % por tener un diámetro mayor al límite superior.

Solución: Sea X el diámetro de una varilla de acero (mm). El coeficiente de variación de su distribución corresponde a $\delta_X = 0,15/6 = 0,025$. Por ser suficientemente pequeño, se puede utilizar la aproximación $\zeta = \delta_X = 0,025$ o, en su defecto, calcular $\zeta^2 = log(1+\delta^2) = 0,0006$ **[0,1]**. Para obtener λ utilizamos la relación:

$$\lambda = \log(\mu_X) - \frac{1}{2}\zeta^2 = \log(6) - \frac{1}{2} \times 0,025^2 = 1,79. \qquad \textbf{[0,1]}$$

El límite inferior, t_1, debe cumplir con:

$$P(X < t_1) = 0,075 \ \ \textbf{[0,2]} \iff \Phi\left(\frac{\log(t_1) - 1,79}{0,025}\right) = 0,075, \ \ \textbf{[0,3]}$$

de donde

$$t_1 = \exp\{0,025 \times z_{0,075} + 1,79\}.$$

De tabla $z_{0,075} = -z_{0,925} = -1,44$ **[0,3]**, luego,

$$\begin{aligned} t_1 &= \exp\{0,025 \times (-1,44) + 1,79\} \qquad \textbf{[0,2]} \\ &= 5,78 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Del mismo modo, el límite superior, t_2, debe cumplir

$$P(X > t_2) = 0,075 \ \ \textbf{[0,2]} \iff P(X \leq t_2) = 0,925, \ \ \textbf{[0,2]}$$

de donde

$$\begin{aligned} t_2 &= \exp\{0,025 \times z_{0,925} + 1,79\} \qquad \textbf{[0,2]} \\ &= \exp\{0,025 \times 1,44 + 1,79\} \qquad \textbf{[0,2]} \\ &= 6,21 \text{ mm}. \end{aligned}$$

b) Suponga que la producción es embalada en paquetes de 20 varillas. Determine la probabilidad de que un paquete contenga al menos dos varillas fuera de los límites de tolerancia.

Solución: Sea Y el número de varillas en el paquete cuyo diámetro se encuentra fuera de los límites de tolerancia. Luego, $Y \sim$ Binomial$(20; 0,15)$.

[0,8] por reconocer la distribución Binomial
[0,1] por reconocer $n = 20$
[0,1] por reconocer $p = 0,15$

Se pide:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \qquad \textbf{[0,5]} \\ &= 1 - (1 - 0,15)^{20} - 20 \times 0,15 \times 0,85^{19} \qquad \textbf{[0,5]} \\ &= 0,824. \end{aligned}$$

c) Asumiendo que es posible revisar una a una las varillas de la producción, determine el valor esperado del número de varillas que se debe revisar para obtener la tercera varilla fuera de los límites de tolerancia. ¿Cuál es la probabilidad de que se deba observar exactamente dicho número de varillas para obtener la tercera defectuosa?

Solución: Sea U el número de varillas que se debe inspeccionar hasta obtener la tercera varilla cuyo diámetro esté fuera de los límites de tolerancia. Luego, $U \sim$ Binom-Neg$(3; 0,15)$.

[0,8] por reconocer la distribución Binomial Negativa
[0,1] por reconocer $r = 3$
[0,1] por reconocer $p = 0,15$

Se pide

$$E(U) = \frac{3}{0,15} = 20 \text{ varillas.} \qquad \textbf{[0,5]}$$

Se pide además:

$$\begin{aligned} P(U = 20) &= \binom{20-1}{3-1} 0,15^3 (1 - 0,15)^{17} \qquad \textbf{[0,5]} \\ &= 0,036. \end{aligned}$$

[1,0] punto base

Problema 2
Durante un día de lluvia, los truenos se producen según procesos de Poisson. El primero de ellos ocurre entre las 9:00AM y las 9:10AM con una tasa de 1 trueno cada 5 minutos. El segundo ocurre entre las 9:10AM y las 9:30AM con una tasa de 1 trueno cada 4 minutos. Se asume que los procesos son independientes.

a) Determine la probabilidad de observar exactamente 8 truenos entre las 9:00AM y las 9:30AM.

Ayuda: Puede usar que $\{X+Y=k\} = \bigcup_{i=0}^{k}\{X=i, Y=k-i\}$. Tenga presente el teorema del Binomio.

Solución: Sea X el número de truenos observados entre las 9:00AM y las 9:10AM. Luego, X distribuye Poisson con parámetro $\lambda = 1/5 \times 10 = 2$ **[0,3]**. Sea Y el número de truenos observados entre las 9:10AM y las 9:30AM. Luego, Y distribuye Poisson con parámetro $\lambda = 1/4 \times 20 = 5$ **[0,3]**. Ambas variables aleatorias son independientes por estar definidas sobre procesos de Poisson independientes.

Se pide $P(X+Y=8)$. Utilizando la sugerencia,

$$\begin{aligned}
P(X+Y=8) &= P\left(\bigcup_{i=0}^{8}\{X=i, Y=8-i\}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{8} P(X=i, Y=8-i) \qquad \textbf{[0,6]} \\
&= \sum_{i=0}^{8} P(X=i)\; P(Y=8-i), \qquad \textbf{[0,6]}
\end{aligned}$$

por independencia de X e Y. De este modo:

$$\begin{aligned}
P(X+Y=8) &= \sum_{i=0}^{8} \frac{e^{-2}\,2^i}{i!}\;\frac{e^{-5}\,5^{8-i}}{(8-i)!} \qquad \textbf{[0,6]} \\
&= \frac{e^{-7}}{8!}\sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i} 2^i\,5^{8-i} \\
&= \frac{e^{-7}\,7^8}{8!} \qquad \textbf{[0,6]} \\
&= 0,130.
\end{aligned}$$

b) Determine la probabilidad de que en los primeros 10 minutos se hayan observado exactamente 6 truenos, si se sabe que entre las 9:00AM y las 9:30AM se observaron exactamente 8.

Solución: Se pide:

$$\begin{aligned}
P(X=6|X+Y=8) &= \frac{P(X=6, X+Y=8)}{P(X+Y=8)} \qquad \textbf{[0,6]} \\
&= \frac{P(X=6, Y=2)}{P(X+Y=8)} \qquad \textbf{[0,8]} \\
&= \frac{P(X=6)P(Y=2)}{P(X+Y=8)}
\end{aligned}$$

[0,6] por factorizar numerador, **[0,2]** por argumentar independencia

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{e^{-2}2^6}{6!}\;\frac{e^{-5}5^2}{2!}}{0,130} \qquad \textbf{[0,8]} \\
&= 0,0078.
\end{aligned}$$

[1,0] punto base

Problema 3
Los avances tecnológicos en el campo de la Medicina permiten detectar anomalías en el cerebro a través de imágenes transversales obtenidas por resonancia magnética. Cada lámina o sección transversal registra la localización de zonas alteradas. Simplificando la forma del cerebro, las secciones se pueden ver como semicírculos (Figura 1). Suponga que la localización (X, Y) donde aparece una anomalía en una de las secciones transversales sigue una distribución con función de densidad:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A \end{cases},$$

donde $A = \{(x,y) : \quad 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$ (Figura 2). Note que esta distribución reparte la masa de probabilidad de manera uniforme sobre el semicírculo.

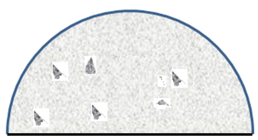
Figura 1

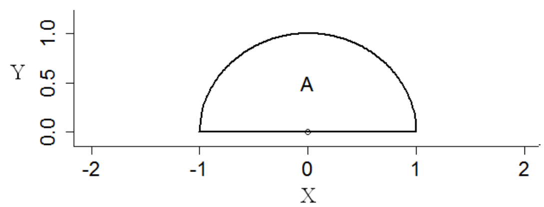

Figura 2

a) Encuentre las distribuciones marginales de X e Y. ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justifique.

Solución: Para la distribución marginal de X: si $-1 \leq x \leq 1$, **[0,1]**

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\, dy \quad \textbf{[0,2]} \text{ por integrando } \textbf{[0,2]} \text{ por límites de integración} \\ &= \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, \qquad \textbf{[0,2]} \end{aligned}$$

y $f_X(x) = 0$, cuando $x < -1$ o $x > 1$. **[0,1]**
Para la distribución marginal de Y: con $0 \leq y \leq 1$, **[0,1]**

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}\, dx \quad \textbf{[0,2]} \text{ por integrando } \textbf{[0,2]} \text{ por límites de integración} \\ &= \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}, \qquad \textbf{[0,2]} \end{aligned}$$

y $f_Y(y) = 0$, cuando $y < 0$ o $y > 1$. **[0,1]**

Para justificar la falta de independencia: **(lleva puntaje solo una de las dos)**

Alternativa 1: X e Y no son indendientes pues $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$. **[0,4]**

Alternativa 2: si X e Y fuesen variables aleatorias independientes, entonces $\Theta_{X,Y} = \Theta_X \times \Theta_Y$ (el soporte conjunto corresponde al producto cartesiano de los soportes marginales). Sin embargo $A = \Theta_{X,Y} \neq \Theta_X \times \Theta_Y = [-1,1] \times [0,1]$. Por lo tanto, dichas variables no pueden ser independientes. **[0,4]**

b) Calcule $E(Y)$.

Solución: Se pide:

$$E(Y) = \int_0^1 y\ f_Y(y)\ dy = \frac{4}{\pi} \int_0^1 y\ \sqrt{1-y^2}\ dy. \qquad \textbf{[0,7]}$$

Haciendo el cambio de variable $u = 1 - y^2$,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{u}\ du \qquad \textbf{[0,7]} \\ &= \frac{4}{3\ \pi}\ u^{3/2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{3\pi}. \qquad \textbf{[0,6]} \end{aligned}$$

c) Encuentre $P(X \leq 0, Y \geq 1/2)$.

Ayuda: considere el cambio de variable: $y(t) = \sin(t) : t \in [\pi/6, \pi/2]$, y la relación trigonométrica $\cos^2(t) = \frac{1}{2}\ [1 + \cos(2t)] : t \in \mathbb{R}$.

Solución:

$$P(X \leq 0, Y \geq 1/2) = \int_{1/2}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{2}{\pi}\ dx\ dy$$

[0,3] por integrando, **[0,3]** por límites de integración en x, **[0,3]** por límites de integración en y.

$$P(X \leq 0, Y \geq 1/2) = \frac{2}{\pi} \int_{1/2}^1 \sqrt{1-y^2}\ dy. \qquad \textbf{[0,2]}$$

Hacemos el cambio de variable propuesto, $y(t) = \sin(t)$, luego $dy = \cos(t)dt$. Si $y = 1/2$, entonces $t = \pi/6$, y si $y = 1$, entonces $t = \pi/2$. Con esto,

$$\begin{aligned} P(X \leq 0, Y \geq 1/2) &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)}\ \cos(t)\ dt \qquad \textbf{[0,3]} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2(t)\ dt \qquad \textbf{[0,2]} \end{aligned}$$

Usando la relación dada:

$$\begin{aligned} P(X \leq 0, Y \geq 1/2) &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}\ [1 + \cos(2t)]\ dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} dt + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos(2t)\ dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\ \sin(2t)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \right) \qquad \textbf{[0,3]} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\ \pi}. \qquad \textbf{[0,1]} \end{aligned}$$

[1,0] punto base

Problema 4
Para construir una plataforma en el mar, una de las especificaciones que se debe tener en cuenta es su altura. Es deseable que el número de años en que **no** se observe una ola de altura mayor o igual a la de la plataforma sea mayor a 10, por lo que se pide que la probabilidad de que esto ocurra sea de 90 %. Se sabe que la altura de una ola tiene un valor esperado de 5 m. Asuma que las ocurrencias de olas con alturas iguales o superiores a la de la plataforma son independientes entre sí.

Observación: El puntaje no se reparte de manera equitativa en los apartados, sino de la forma: a) [2,8] b) [1,2] c) [2,0].

a) Determine la altura que debe tener la plataforma, si se sabe que la altura de una ola sigue una distribución Exponencial.

Solución: Sean X la altura de una ola, y p la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a la de la plataforma. Para que el número de años en que **no** se observe una ola de altura mayor o igual a la de la plataforma sea mayor a 10, se requiere que no ocurra una de ellas en cada uno de los primeros 10 años. Luego la condición es:

$$(1-p)^{10} = 0,9 \ \ \textbf{[0,7]} \iff p = 1 - 0,9^{1/10} = 0,0105. \ \ \textbf{[0,2]}$$

Si h^* corresponde a la altura buscada, se debe cumplir que $0,0105 = P(X > h^*)$ **[0.7]**. Dado que la altura de la ola tiene valor esperado 5 m, el parámetro de la distribución Exponencial corresponde a $\lambda = 1/5 = 0,2$ **[0,3]**. Por otra parte, la función de probabilidad acumulada de una distribución Exponencial es

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0,2\times x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases},$$

luego, se quiere

$$0,0105 = 1 - (1 - e^{-0,2\times h^*}), \qquad \textbf{[0,7]}$$

de donde se obtiene $h^* = 22{,}78$ m. **[0.2]**

b) Determine la altura que debe tener la plataforma, si se sabe que la altura de una ola sigue una distribución Gumbel de parámetro λ, donde la función de probabilidad acumulada de esta distribución corresponde a

$$F_X(x) = \begin{cases} \exp\{-\exp\{-\lambda x\}\} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0, \end{cases}$$

y su valor esperado es igual a γ/λ, donde γ es la constante de Euler (aproximadamente 0.577).

Solución: Dado que la altura de la ola tiene valor esperado 5 m, el parámetro de la distribución Gumbel corresponde a $\lambda = 0.577/5 = 0,1154$ **[0,3]**. Utilizando la función de probabilidad acumulada de la distribución Gumbel, se quiere

$$0,0105 = 1 - \exp\{-\exp\{-0,1154\, h^*\}\} \qquad \textbf{[0,7]}$$

de donde se obtiene $h^* = 39{,}44$ m. **[0,2]**

c) Determine la probabilidad de que una ola de altura mayor o igual a la de la plataforma ocurra antes de 10 años, si se sabe esto no ha ocurrido en 5 años.

Solución:

Alternativa 1: Dado que las ocurrencias de olas en años sucesivos son independientes **[0,5]**, solo se requiere que ocurra el evento A: "se observa al menos una ola de dichas características en los 4 años siguientes" **[0,5]**. Su complemento corresponde a A^c: "no se observa ninguna ola de dichas características en los 4 años siguientes", por lo que la probabilidad pedida puede obtenerse como:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - (1 - 0,0105)^4 = 1 - 0,9895^4. \qquad \textbf{[1,0]}$$

Alternativa 2: Sea Y el número de años hasta que se observa la primera ola de dichas características. Luego, Y sigue una distribución Geométrica$(0,0105)$.

[0,4] por reconocer la distribución Geométrica
[0,2] por reconocer $p = 0,0105$

Se pide:

$$\begin{aligned}
P(Y < 10 | Y > 5) &= \frac{P(Y < 10, Y > 5)}{P(Y > 5)} \qquad \textbf{[0,3]} \\
&= \frac{P(5 < Y < 10)}{P(Y > 5)} \\
&= \frac{P(6 \leq Y \leq 9)}{P(Y > 5)} \qquad \textbf{[0,5]} \\
&= \frac{F_Y(9) - F_Y(5)}{1 - F_Y(5)}
\end{aligned}$$

Para $y = 1, 2, \ldots$, la función de probabilidad acumulada de Y corresponde a:

$$F_Y(y) \quad = \quad P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) = 1 - (1 - 0,0105)^y.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
P(Y < 10 | Y > 5) &= \frac{(1 - 0,0105)^5 - (1 - 0,0105)^9}{(1 - 0,0105)^5} \qquad \textbf{[0,4]} \\
&= 1 - (1 - 0,0105)^4 \qquad \textbf{[0,2]} \\
&= 1 - 0,9895^4.
\end{aligned}$$

[1,0] punto base

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\, p$ $\sigma_X^2 = n\, p\, (1-p)$ $M(t) = [p\, e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\, (1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\, e^t/[1 - (1-p)\, e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\, (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\, (1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\, e^t/[1 - (1-p)\, e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\, t$ $\sigma_X^2 = \nu\, t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\, \left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\, t + \sigma^2\, t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\, x)}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\, x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\, \left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\, M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\, \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\, r\, (b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\, n\, \frac{m}{N}\, \left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Formulario

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\, \cdot)$:

$$(1) \quad B(q,\, r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\, dx; \quad (2) \quad B(q,\, r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998