Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2013

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Interrogación	:	**2**
Profesor	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)**
Ayudantes	:	**Daniela Castro, Fabián Fuentealba, Genaro Olave, Claudia Reyes.**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

Una empresa productora de salmones está interesada en estudiar el peso y el sexo de su producción, debido a que, en general, las hembras presentan pesos bastante menores que los machos. Esta empresa determinó que el peso de los salmones macho sigue una distribución Normal de media 32 libras, y desviación estándar 2 libras. Por otra parte, determinó que el peso de los salmones hembra sigue una distribución Normal de media 26 libras y desviación estándar 3 libras. Asuma que las proporciones de salmones macho y hembra en la producción de esta empresa son iguales.

a) (2 puntos) Determine el peso mínimo de los salmones macho que pertenecen al 20 % de salmones macho de mayor peso. ¿Qué porcentaje de salmones hembra tiene un peso igual o superior al valor recién obtenido para los salmones macho?

b) (2 puntos) Usted selecciona al azar 5 salmones desde la producción de salmones de esta empresa. Determine la probabilidad de que, entre ellos, haya exactamente dos salmones hembra con peso en el 20 % de salmones macho de mayor peso. Puede dejar esta cantidad expresada.

c) (2 puntos) Suponga que, en realidad, el peso de los salmones macho sigue una distribución Log-Normal con las mismas media y desviación estándar dadas anteriormente. Determine la proporción de salmones macho que tienen un peso superior a la moda de sus pesos.

Solución: Sean $X \sim$ Normal(32,2) e $Y \sim$ Normal(26,3), los pesos de salmones macho y hembra, respectivamente.

a) Se busca un peso q^* tal que $P(X \geq q^*) = 0,2$, es decir

$$
\begin{aligned}
& 1 - \Phi\left(\frac{q^* - 32}{2}\right) = 0,2 \qquad [\mathbf{0.3}] \\
\iff \quad & \Phi\left(\frac{q^* - 32}{2}\right) = 0,8 \\
\iff \quad & \frac{q^* - 32}{2} = z_{0,8} = 0,845 \qquad [\mathbf{0.4}] \\
\iff \quad & q^* = 33,69. \qquad [\mathbf{0.3}]
\end{aligned}
$$

El porcentaje de salmones hembra que tiene un peso igual o superior a q^* corresponde a

$$\begin{aligned} P(Y \geq 33,69) &= 1 - \Phi\left(\frac{33,69 - 26}{3}\right) \qquad \textbf{[0.5]} \\ &= 1 - \Phi(2,56) \\ &= 1 - 0,9948 = 0,0052. \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

b) Sea U el número de salmones hembra con peso mayor o igual a 33,69 libras, en la muestra de 5 salmones. Entonces, U sigue una distribución Binomial con $n = 5$ y

$$p = P(hembra)P(peso\ >\ 33,69|hembra) = \frac{1}{2} \times 0,0052 = 0,0026. \qquad \textbf{[0.6]}$$

Se pide

$$P(U = 2) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array}\right) 0,0026^2 (1 - 0,0026)^3.$$

[0.7] por el producto de las probabilidades, **[0.7]** por el número combinatorial.

c) Supongamos que X sigue una distribución Log-Normal(λ, ζ). El coeficiente de variación del peso del salmón macho es $c.o.v. = 2/32 = 0,0625 < 0,3$, por lo que podemos tomar $\zeta = c.o.v. = 0,0625$ **[0.3]**. Por otra parte,

$$\mu_x = 32 = \exp\left\{\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2\right\},$$

con lo que se obtiene que $\lambda = 3,46$**[0.3]**. Para encontrar la moda de la distribución de X consideremos su función de densidad

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\zeta x} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{log(x) - \lambda}{\zeta}\right)^2\right\}.$$

La moda corresponde al valor de x que maximiza la expresión anterior o, alternativamente, que maximiza su logaritmo (ambos máximos se encuentran en el mismo valor). Por lo tanto, maximizaremos

$$\log f_x(x) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \log\zeta - \log x - \frac{1}{2}\left(\frac{log(x) - \lambda}{\zeta}\right)^2.$$

Tomamos la primera derivada, e igualamos a cero,

$$\frac{d \log f_x(x)}{dx} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{\zeta^2 x}(\log x - \lambda) = 0,$$

de donde el punto crítico corresponde a:

$$x = \exp\{\lambda - \zeta^2\}. \qquad \textbf{[0.4]}$$

Para verificar que este punto es máximo, tomamos la segunda derivada:

$$\frac{d^2 \log f_x(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\zeta x)^2}(1 - \log x + \lambda).$$

Al evaluar esta derivada en el punto crítico $x = \exp\{\lambda - \zeta^2\}$ se obtiene

$$-\frac{1}{\zeta^2 \exp\{2(\lambda - \zeta^2)\}} < 0, \qquad \textbf{[0.2]}$$

por lo que el punto crítico encontrado corresponde a un máximo, es decir, a la moda:

$$x_{moda} = \exp\{\lambda - \zeta^2\}.$$

Se pide

$$
\begin{aligned}
P(X > x_{moda}) &= 1 - \Phi\left(\frac{\log(x_{moda}) - \lambda}{\zeta}\right) \qquad \textbf{[0.4]}\\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\lambda - \zeta^2 - \lambda}{\zeta}\right)\\
&= 1 - \Phi(-\zeta) = 1 - \Phi(-0,0625)\\
&= 1 - (1 - \Phi(0,0625)) = \Phi(0,0625)\\
&= 0,5239. \qquad \textbf{[0.4]}
\end{aligned}
$$

[1.0] base

Problema 2

Según las estadísticas que maneja la Subsecretaría para la Prevención del Delito: "durante el año 2011 se registraron 778 intentos de robos a cajeros automáticos, de los cuales 532 fueron frustrados y 246 consumados." Asuma que la ocurrencia de intentos de robo a cajeros automáticos sigue un Proceso de Poisson, y que el año 2011 tuvo 365 días.

a) (2 puntos) Determine la probabilidad de que durante el día de su cumpleaños se produzcan al menos tres intentos de robo a cajeros automáticos.

b) (2 puntos) Determine la probabilidad de que durante una semana cualquiera se observen menos de dos días con exactamente un intento de robo diario.

c) (2 puntos) Suponga que usted toma, del listado de los 778 intentos de robo, una muestra de 20 de ellos. Determine la probabilidad que de los 20 intentos de robo seleccionados se observen al menos dos robos frustrados. Puede dejar esta cantidad expresada.

Solución: La tasa de ocurrencia de intentos de robo es $\nu = 778$ intentos por año.

a) Sea X el número de intentos de robo ocurridos en el día de su cumpleaños. Entonces

$$\lambda = \nu t = 778 \times \frac{1}{365} = 2,13. \qquad [\mathbf{0.7}]$$

Se pide

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \qquad [\mathbf{0.6}] \\ &= 1 - e^{-2,13} - e^{-2,13}2,13 - \frac{e^{-2,13}2,13^2}{2} = 0,358. \qquad [\mathbf{0.7}] \end{aligned}$$

b) Sea Y el número de días de una semana en los que se observa exactamente un intento de robo. Entonces, Y sigue una distribución Binomial, con $n = 7$ **[0.4]** y

$$p = P(X=1) = e^{-2,13}2,13 = 0.253. \qquad [\mathbf{0.6}]$$

Se pide:

$$\begin{aligned} P(Y < 2) &= P(X=0) + P(X=1) \qquad [\mathbf{0.4}] \\ &= \binom{7}{0} 0,253^0(1-0,253)^7 + \binom{7}{1} 0,253^1(1-0,253)^6 \qquad [\mathbf{0.4}] \\ &= 0,1298 + 0,3077 = 0,4375. \qquad [\mathbf{0.2}] \end{aligned}$$

c) El evento complemento de A: *al menos dos robos frustrados*, ocurre cuando hay exactamente 1 robo frustrado o ninguno, por lo que la probabilidad pedida corresponde a:

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(exactamente\ 1\ frustrado) - P(0\ frustrados) \qquad [\mathbf{0.4}] \\ &= 1 - \frac{\binom{532}{1}\binom{246}{19}}{\binom{778}{20}} - \frac{\binom{532}{0}\binom{246}{20}}{\binom{778}{20}}. \qquad [\mathbf{1.6}] \end{aligned}$$

[1.0] base

Problema 3

Durante estas Fiestas Patrias, Carabineros intensificó controles y, específicamente, efectúo miles de alcotest. Es sabido que este test es muy sensible y específico y que, en particular, arroja positivo en el 96 % de los bebedores, y sólo se equivoca en el 1 % de los no bebedores. De acuerdo a estadísticas generales, durante estas Fiestas Patrias, el 20 % de los asistentes a fondas que se retiró al volante, bebió.

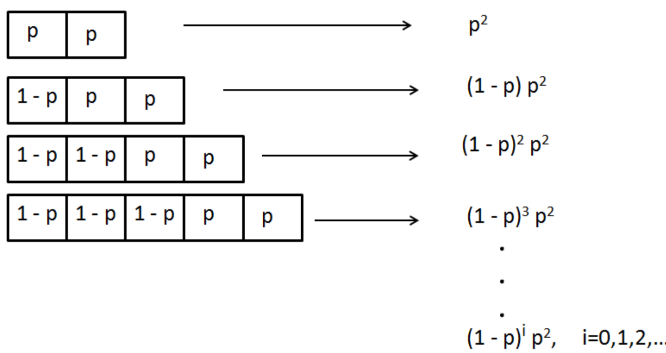
a) (4 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros exámenes positivos obtenidos a la salida de una fonda, se obtengan en controles sucesivos?

b) (2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo examen positivo se obtenga en el quinto control?

Solución: Sean B: *la persona bebió*, y T: *el alcotest sale positivo*. El enunciado dice que $P(T|B) = 0,96$, $P(T|\bar{B}) = 0,01$, $P(B) = 0,2$. La probabilidad de que un alcotest realizado salga positivo es

$$p = P(T) = P(T|B)P(B) + P(T|\bar{B})P(\bar{B}) = 0,96 \times 0,2 + 0,01 \times 0,8 = 0,2. \qquad \textbf{[1.0]}$$

a) La figura muestra las situaciones favorables al evento de interés:



La probabilidad pedida es entonces,

$$\begin{aligned} P(A) &= p^2 + (1-p)p^2 + (1-p)^2p^2 + (1-p)^3p^2 + \dots & \textbf{[1.0]} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i p^2 \qquad \textbf{[1.0]} \\ &= p^2\frac{1}{1-(1-p)} = p = 0,2. \qquad \textbf{[1.0]} \end{aligned}$$

b) Sea X el número de alcotests que se debe realizar hasta obtener el segundo resultado positivo. Entonces, X sigue una distribución Binomial Negativa de parámetros $k = 2$, $p = 0,2$. Luego,

$$P(X = 5) = \binom{4}{1} 0,2^2 0,8^3.$$

Alternativa de Puntuación 1: El alumno llega directamente a la probabilidad sin mencionar que corresponde a una Binomial Negativa:

- **[0.6]** por números combinatoriales
- **[0.7]** por $0,2^2$.
- **[0.7]** por $0,8^3$.

Alternativa de Puntuación 2: El alumno llega a través de reconocer que es una Binomial Negativa:

- **[0.5]** por mencionar que es Binomial Negativa.
- **[0.5]** por identificar $k = 2$.
- **[0.5]** por identificar $p = 0,2$.
- **[0.5]** por la expresión para la probabilidad pedida.

[1.0] base

Problema 4

a) Considere una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{16} & , |x| \leq a \\ 0 & , \text{si no,} \end{cases}$$

con $a > 0$.

i) (1 punto) Encuentre el valor de la constante a.

ii) (2 puntos) Encuentre el valor de la variable tal que la probabilidad de que ésta sea menor a dicho valor sea igual a p, para cualquier valor de p, $0 < p < 1$.

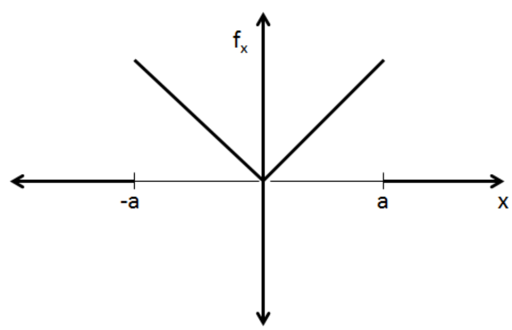
b) (3 puntos) Suponga una variable aleatoria X con Función Generadora de Momentos

$$M_x(t) = \exp\{t^2/2\}.$$

Encuentre la Función Generadora de Momentos de la variable $Y = aX + b$, donde a y b son constantes reales y, en base a ella, obtenga la varianza de Y.

Solución:

a) i) La forma de la densidad corresponde a:

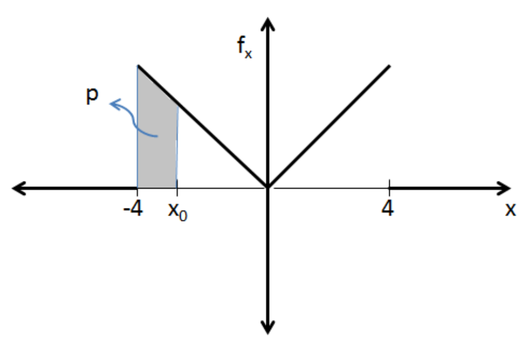


Se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f_x(x)\, dx &= 1 \qquad \textbf{[0.2]} \\ \int_{-a}^{0} -\frac{x}{16}\, dx + \int_{0}^{a} \frac{x}{16}\, dx &= 1 \qquad \textbf{[0.4]} \\ -\frac{0^2 - (-a)^2}{32} + \frac{a^2 - 0^2}{32} &= 1, \end{aligned}$$

de donde $a = 4$.**[0.4]**

ii) Se debe considerar dos casos: 1) $0 < p \leq 1/2$:



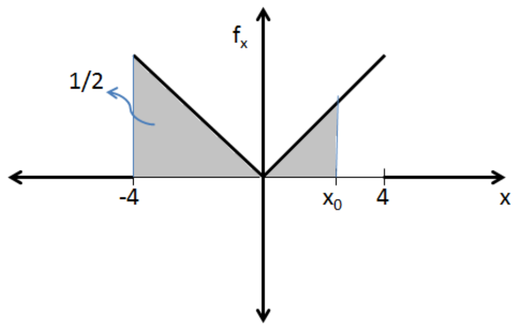
Se pide encontrar x_0 tal que:

$$P(X < x_0) = \int_{-4}^{x_0} -\frac{x}{16}\, dx = -\frac{x_0^2 - 16}{32} = p, \qquad \mathbf{[0.5]}$$

de donde

$$x_0 = -\sqrt{16 - 32p}. \qquad \mathbf{[0.5]}$$

2) $1/2 < p < 1$:



Se pide encontrar x_0 tal que:

$$P(X < x_0) = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x_0} \frac{x}{16}\, dx = \frac{1}{2} + \frac{x_0^2 - 0^2}{32} = p, \qquad \mathbf{[0.5]}$$

de donde

$$x_0 = \sqrt{32(p - 1/2)}. \qquad \mathbf{[0.5]}$$

b) La Función Generadora de Momentos de Y corresponde a:

$$\begin{aligned} M_y(t) &= E(e^{tY}) \qquad \mathbf{[0.1]} \\ &= E(e^{t(aX+b)}) \qquad \mathbf{[0.1]} \\ &= E(e^{taX}e^{tb}) \\ &= e^{tb}E(e^{taX}) \qquad \mathbf{[0.2]} \\ &= e^{tb}M_x(ta) \qquad \mathbf{[0.3]} \\ &= e^{tb}e^{a^2t^2/2} \qquad \mathbf{[0.3]} \\ &= \exp\left\{bt + \frac{a^2t^2}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Para obtener la media:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \exp\left\{bt + \frac{a^2t^2}{2}\right\}(b + ta^2). \qquad \mathbf{[0.4]}$$

Evaluando en $t = 0$ se obtiene $E(Y) = b$ **[0.4]**. Para obtener la varianza, obtenemos primero el segundo momento

$$\frac{d^2M(t)}{dt^2} = \exp\left\{bt + \frac{a^2t^2}{2}\right\}(b + ta^2)^2 + \exp\left\{bt + \frac{a^2t^2}{2}\right\}a^2. \qquad \mathbf{[0.4]}$$

Evaluando en $t = 0$ se obtiene $E(Y^2) = b^2 + a^2$ **[0.4]**. Con esto,

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = b^2 + a^2 - b^2 = a^2. \qquad \mathbf{[0.4]}$$

[1.0] base