Pauta I2 - EYP1113 **Octubre'2010**

Problema 1

Una pequeña compañía distribuidora de Gas natural posee una planta de abastecimiento con capacidad de 1.000 m^3. Las fuentes de suministros pueden ser de origen Argentino o bien desde Quintero. Si X corresponde a la cantidad de gas (en miles de m^3) suministrado desde Argentina e Y la cantidad de gas (en miles de m^3) suministrado desde Quintero. Suponga que X e Y se comportan como variables aleatorias regidas por la siguiente función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 24\,x\,y,$$

con $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq x + y \leq 1$.

(a) **[2.0 Ptos.]** Calcule la asociación que existe entre la cantidad de gas proveniente desde Argentina y de Quintero.

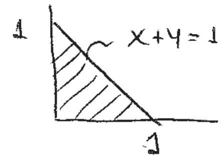
(b) **[2.0 Ptos.]** Si desde Argentina llegan 500 m^3, ¿cuánto gas espera que provenga desde Quintero?

(c) **[2.0 Ptos.]** Calcule la probabilidad que el estanque contenga a lo más 500 m^3 de gas.

Pauta I2 - EYP1113

Preg 1

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 24xy & \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x+y \leq 1 \end{cases} \\ 0 & \sim \end{cases}$$



a) Covarianza entre X e Y

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

i) obtenemos marginales

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 24xy\,dy = 24x \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{1-x}$$

$$= \begin{cases} 12x(1-x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

0,5

Ahora, $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 12x(1-x)^2 dx = 12\int_0^1 x^2(1-2x+x^2)dx$

$$= 12\left[\int_0^1 x^2 dx - 2\int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x^4 dx\right]$$

0,5

$$= 12\left[\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \left.\frac{2x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1\right] = 12\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right]$$

$$= 12 \cdot \left(\frac{20-30+12}{60}\right) = 12 \cdot \frac{2}{60} = \frac{2}{5}$$

ii) Por simetría

$$f(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{2}{5}$$

1a)

1. continuación a)

iii) $\mathbb{E}(XY) = \iint_{Region} xy f(x,y)\, dy\, dx$

$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 24x^2y^2\, dy\, dx$

0,5

$= \int_0^1 24x^2 \frac{(1-x)^3}{3} dx = 8\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$

$= 8\int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5)\, dx$

$= 8\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = 8\left(\frac{20-45+36-10}{60}\right) = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$

$\therefore \ Cov(X,Y) = \frac{2}{15} - \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{10-12}{75} = -\frac{2}{75}$

0,5

NEGATIVO!

(coherente con el problema)

b) $\mathbb{E}(Y/X=1/2) = \int y f_{Y/X=x}(y/x)\, dy$

Primero $f_{Y/X=x}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$ con $x \in (0,1)$ e $0 \leq y \leq 1-x$

$= \begin{cases} \frac{24xy}{12x(1-x)^2} & x \in (0,1),\ 0 \leq y \leq 1-x \\ 0 & \end{cases}$

1,0

$= \begin{cases} \frac{2y}{(1-x)^2} & x \in (0,1),\ 0 \leq y \leq 1-x \\ 0 & \sim \end{cases}$

Como $x = 1/2$

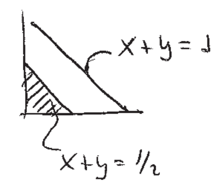
$\Rightarrow f_{Y/X=1/2}(y/_{1/2}) = \begin{cases} 8y & 0 \leq y \leq 1/2 \\ 0 & \sim \end{cases}$

1. Continuación b).

Así,

$$\mathbb{E}(Y/X=1/2) = \int_0^{1/2} 8y^2\,dy = \frac{8y^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2^3} = \frac{1}{3}$$ (1,0)

c) $$P(X+Y \leq 1/2) = \iint_{Reg^*} f(x,y)\,dx\,dy$$



$$= \int_0^{1/2}\int_0^{\frac{1}{2}-x} 24xy\,dy\,dx$$ (1,0)

$$= \int_0^{1/2} 24x\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}-x} dx = 12\int x\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 dx$$

$$= \frac{12}{4}\int x(1-2x)^2\,dx = 3\left[\int_0^{1/2} x\,dx - 4\int_0^{1/2} x^2\,dx + 4\int_0^{1/2} x^3\,dx\right]$$

$$= 3\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{4}{4}\cdot\frac{1}{2^4}\right] = 3\left[\frac{1}{8} - \frac{4}{24} + \frac{1}{16}\right]$$ (1,0)

$$= 3\cdot\frac{1}{48} = 0{,}0625$$

+ 10 base

*alternativa

Encontrar la densidad de $X+Y = Z$

$$f(z) = \int_0^{z} f(x, z-x)\,dx = 24\int_0^{z} x(z-x)\,dx$$ idem

$$= 24\left[z\int x\,dx - \int x^2\,dx\right] = \cancel{24\frac{z^2}{2}\Big|_0}\ \frac{24}{6}z\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right)$$

*Obs Pueden que usen $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Problema 2

Un investigador está estudiando el comportamiento de una célula a partir de un instante. Transcurrido un tiempo, ocurre una de división celular, es decir, la célula inicial se divide en dos nuevas células. Si el tiempo esperado que demora una célula en dividirse es 10 minutos y su distribución de probabilidad es Exponencial.

(a) **[3.0 Ptos.]** Determine la distribución de probabilidad del tiempo transcurrido entre la $(n-1)$-ésima y n-ésima división celular.

(b) **[3.0 Ptos.]** Calcule la probabilidad que la segunda división celular ocurra antes de 20 minutos.

Solución

(a) El tiempo de división de cada una de las células distribuye exponencial de parámetro ν. Al dividirse las células se comportan de manera independiente y si además tenemos en cuenta la carencia de memoria de la distribución exponencial, tenemos que el tiempo X_n que transcurre entre la aparición de la $(n-1)$-ésima y la n-ésima célula corresponde al mínimo tiempo de división celular de las n células independientes que hay en ese momento. **[1.0 Ptos]**

Por lo tanto, la distribución de X_n esta dada por:

$$\begin{aligned} F_{X_n}(t) &= P(X_n \leq t) \\ &= 1 - P(X_n > t) \\ &= 1 - P(\text{mín}\{T_1 > t, \ldots, T_n > t\}), \quad \text{donde } T_i\text{: corresponde al tiempo de división de la } i\text{-ésima célula} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - F_{T_i}(t)\right], \quad \text{por comportamiento independencia de las células} \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\ &= 1 - \left[1 - F_{T_1}(t)\right]^n, \quad \text{por idéntica distribución} \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \end{aligned}$$

Luego, su densidad esta determinada por:

$$f_{X_n}(t) = \frac{d}{d\,t} F_{X_n}(t) = n\,\left[1 - F_{T_1}(t)\right]^{n-1}\, f_{T_1}(t) = n\,\left[e^{-\nu\,t}\right]^{n-1}\,\nu\,e^{-\nu,t} = n\,\nu\,e^{n\,\nu\,t}, \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

$$X_n \sim \text{ Exponencial}(n\,\nu). \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

con $\nu = \frac{1}{10} = 0{,}1$. **[0.2 Ptos]**

(b) Se pide $P(X_1 + X_2 \leq 20)$.

Sea $T = X_1 + X_2$, cuya función de densidad está dada por

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(t - x_2,\, x_2)\, dx_2 \\ &= \int_0^t f_{X_2\,|\,X_1 = t - x_2}(x_2) \cdot f_{X_1}(t - x_2)\, dx_2 \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\ &= \int_0^t 2\,\nu\,e^{-2\nu\,x_2} \cdot \nu\,e^{-\nu\,(t - x_2)}\, dx_2, \quad \text{por la carencia de memoria} \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\ &= 2\,\nu\,e^{-\nu\,t} \int_0^t \nu\,e^{-\nu\,x_2}\, dx_2 \\ &= 2\,\nu\,e^{-\nu\,t}\left[1 - e^{-\nu\,t}\right], \quad t \geq 0,\ \nu > 0 \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \end{aligned}$$

Luego, su función de distribución de probabilidad acumulada es

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= \int_0^t 2\,\nu\, e^{-\nu\, u}\left[1 - e^{-\nu\, u}\right]\, du \\
&= 2\int_0^t \nu\, e^{-\nu\, u}\, du - \int_0^t (2\,\nu)\, e^{-(2\,\nu)\, u}\, du \\
&= 2\left[1 - e^{-\nu\, t}\right] - \left[1 - e^{-2\nu\, t}\right] \\
&= 1 - 2\, e^{-\nu\, t} + e^{-2\,\nu\, t}, \quad t \geq 0,\ \nu > 0 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 \leq 20) &= F_T(20) \\
&= 1 - 2\, e^{-\nu\, 20} + e^{-2\,\nu\, 20} \\
&= 1 - 2\, e^{-0,1\cdot\, 20} + e^{-2\cdot 0,1\cdot 20} \\
&= 1 - 2\, e^{-2} + e^{-4} \\
&= 0{,}747645 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

Sean $X_1, \ldots, X_n$ los niveles de humedad al interior de la Mina San José, en escala de cero a uno, registrados en los primeros n días de contacto. Si la distribución de probabilidad de los niveles de humedad pueden ser representados por la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = (\theta + 1)\, x^{\theta},$$

con $0 \leq x \leq 1$ y $\theta > 0$. Bajo el supuesto que los niveles de humedad diarios son estadísticamente independientes, estime el valor del parámetro θ por el método de:

(a) **[3.0 Ptos.]** Momentos.

(b) **[2.0 Ptos.]** Máxima Verosimilitud.

Si los valores observados de humedad en los primeros 10 días de contacto fueron:

0,88	0,93	0,81	0,92	0,98	0,98	0,79	0,95	0,82	0,71

(c) **[1.0 Ptos.]** Evalúe los estimadores propuestos en (a) y (b).

PAUTA I2 - EYP1113

Preg 3 |

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)\, x^{\theta} & 0 < x < 1 \;,\; \theta > 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

a) Estimador de momentos

$$\mu_1 = \mathbb{E}(X) = \int_0^1 (\theta+1)\, x^{\theta+1} dx$$

$$= \frac{\theta+1}{\theta+2}$$ (1)

$$\Rightarrow \frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X} \Longrightarrow \theta+1 = \bar{X}(\theta+2)$$ (1)

$$\theta(1-\bar{X}) = 2\bar{X} - 1$$

$$\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$$ (1)

b) Estimador de Max. Verosimilitud

$$L(X_1, .. X_n; \theta) = \prod (\theta+1)\, X_i^{\theta}$$

$$= (\theta+1)^n \prod X_i^{\theta}$$ (1)

$$\ell = \log L = n \log(\theta+1) + \theta \sum \log X_i$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum \log X_i = 0$$ (1)

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{mv} = -\frac{n}{\sum \log X_i} - 1$$

c) Evaluando con $\bar{X} = 0{,}877$ y $\sum \log X_i = -1{,}363$

$$\hat{\theta}_{momentos} = 6{,}13 \quad ; \quad \hat{\theta}_{mv} = 6{,}34$$

(0,5) (0,5) +1 base

Problema 4

Antes de iniciar el rescate de los 33 mineros, las pruebas iniciales de la Fenix 1 indicaban que demorarían aproximadamente una hora en sacar a cada uno. A las 23:19 horas del día 12 de octubre se inicio el descenso de la Fenix 2, volviendo 51 minutos después con el primer de ellos. A las 07:58 horas ya se tenía al noveno minero en la superficie y los datos hasta ese instante nos indicaban que en promedio el tiempo de rescate era de 40,8 minutos con una desviación estándar de 7,4 minutos. Las autoridades en ese instante informaron que esperaban tener a los 33 mineros a salvo antes de medianoche. En ese momento, ¿cuál era la probabilidad que eso efectivamente ocurriese? Suponga que los tiempos de rescate de los mineros restantes son independientes y distribuyen Normal con los datos que hasta ese momento se tenían.

Nota: Tiempo de rescate, se consideran todas las instancias, es decir: preparación en la superficie, tiempo de bajada, abrazos, preparación en la mina, tiempo de subida y recepción en la superficie (incluyendo abrazos, fotos y breves palabras).

Solución

Definamos $X_{10},\ldots,X_{33}$ como los tiempos de rescate de los 24 mineros que aún permanecían en la mina a esa hora.

Se pide calcular

$$P\left(\sum_{i=10}^{33} X_i \leq 962\right) \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

Si suponemos que

$$X_{10},\ldots,X_{33} \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(\mu_X = 40{,}8;\ \sigma_X = 7{,}4),$$

entonces

$$\sum_{i=10}^{33} X_i \sim \text{Normal}(\mu = 24\cdot\mu_X,\ \sigma = \sqrt{24}\cdot\sigma_X) \quad \textbf{[2.0 Ptos]}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=10}^{33} X_i \leq 962\right) &= \Phi\left(\frac{962 - 24\cdot\mu_X}{\sqrt{24}\cdot\sigma_X}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= \Phi\left(\frac{962 - 24\cdot 40{,}8}{7{,}4\cdot\sqrt{24}}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= \Phi\left(-0{,}4744507\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= 1 - \Phi\left(0{,}4744507\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&\approx 1 - \Phi\left(0{,}48\right)\\
&= 1 - 0{,}6844\\
&= 0{,}3156 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Gamma Trasladada	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,(x-\gamma)^{k-1}\,e^{-\nu\,(x-\gamma)}$	$x \geq \gamma$	$k,\ \nu,\ \gamma$	$\mu_X = k/\nu + \gamma$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1-\frac{m}{N}\right)$

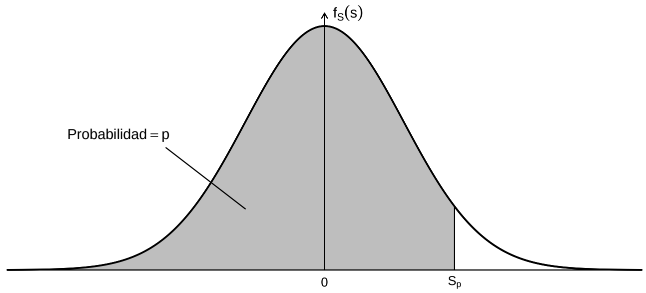
- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\,e^{-u}\,du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a); \quad (3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$:

$$(1)\quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2)\quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

Tabla Normal Estándar



Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998