
Primer Semestre 2013

Curso : Probabilidad y Estadística
Sigla : EYP1113
Examen
Profesor : Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)
Ayudantes : Carlos Cayuman Cofre y María Ignacia Vicuña.

- Se permite el uso de calculadora científica básica.
- No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).
- Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.
- El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.
- En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.
- Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.

Problema 1

Cierto banco está interesado en caracterizar el monto total girado desde un cajero automático ubicado en el Campus San Joaquín, entre las 06.00 y 24.00 hrs. Se ha determinado que el monto de cada giro, expresado en miles de pesos, se comporta como una variable aleatoria con distribución Gama de parámetros $k = 2$ y $\nu = 0,05$, y que estos montos son independientes entre sí. Por otra parte, el número de giros entre las 06.00 y 24.00 hrs sigue una distribución Poisson con una tasa de 12 giros por hora. Determine esperanza (2 pts) y varianza (4 pts) del monto total girado entre las 06.00 y 24.00 hrs.

Problema 2

Cierto experimento impregna carbón grafitizado con carbonato de potasio, para luego calentarlo en una corriente de 15 % de dióxido de carbono en nitrógeno. Con el objeto de encontrar la relación entre el porcentaje de dióxido de carbono absorbido por el carbón, Y , y la razón entre los pesos del carbonato de potasio y el carbón grafitizado al iniciar el experimento, X , se tomó una medición de estas dos variables en cada uno de 22 experimentos independientes, obteniéndose los siguientes estadísticos:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 1.41 & \bar{y} &= 13.22 \\ \sum_{i=1}^{22} (x_i - \bar{x})^2 &= 16.61 & \sum_{i=1}^{22} (y_i - \bar{y})^2 &= 43.92 \\ \sum_{i=1}^{22} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= 26.63\end{aligned}$$

- (2.0 pts) Obtenga los valores de los estimadores de mínimos cuadrados de los coeficientes de la regresión y del estimador insesgado de σ^2 , e interprete cada uno de ellos.
- (1.5 pts) Obtenga el coeficiente de determinación r^2 e interprételo. ¿Cuál es el coeficiente de correlación entre X e Y ?
- (2.5 pts) Se realizará un experimento en el que la razón entre los pesos del carbonato de potasio y el carbón grafitizado será de 1,5. Estime la probabilidad de que, en dicho experimento, el porcentaje de dióxido de carbono absorbido sea mayor a 13.5 %. Asuma normalidad.

Problema 3

Como parte de un estudio a objeto de determinar la potencial instalación de un nuevo casino en el campus, se lleva a cabo una encuesta que incluye las siguientes preguntas:

¿Traes colación/almuerzo a la universidad? SI _____ NO _____
¿Cuál es tu gasto mensual en alimentación en la universidad? \$ _____

Una breve descripción de los datos recolectados es la que sigue:

Carrera	Número de encuestados	¿Trae colación?	Gasto mensual (M\$)	
		SI	Promedio	D. Estándar
Ingeniería	78	40	48	12
Economía	52	26	52	15
Agronomía	24	6	37	8
Otras	18	4	18	7
Total	172	76	44,5	12,2

- a) Lleve a cabo las siguientes pruebas de hipótesis con nivel de significancia $\alpha = 5\%$, utilizando el criterio del valor-p:
- i) (1.5pts) La minoría de los estudiantes trae colación/almuerzo a la universidad.
 - ii) (1.5pts) El gasto mensual medio en alimentación de los estudiantes de Agronomía difiere de M\$40. Asuma que los gastos de estos alumnos siguen una distribución Normal.
 - iii) (1.5pts) La variabilidad (en términos de desviación estándar) del gasto en alimentación de los estudiantes de otras carreras, diferentes a Ingeniería, Economía y Agronomía, es inferior a M\$10. Asuma que los gastos de estos alumnos siguen una distribución Normal.
- b) (1.5pts) Considere la regla de decisión utilizada en el apartado a) ii). Obtenga la probabilidad de cometer error tipo II, cuando en realidad el gasto mensual medio en alimentación de los estudiantes de Agronomía es de M\$38. Asuma que la desviación estándar dada es poblacional.

Problema 4

En el Problema 1, con el objeto de determinar si el monto de cada giro entre las 6:00 y las 24:00 horas sigue el comportamiento descrito o, en cambio, sigue una distribución Lognormal de mediana 40 y coeficiente de variación, c.o.v, de 43%, se toma una muestra aleatoria de 60 de estos giros. Utilice que la mediana de la distribución Lognormal de parámetros λ y ζ corresponde a e^λ . Los resultados han sido tabulados como sigue:

Categoría	Número de observaciones
< 30	20
30 - 40	15
40 - 50	10
≥ 50	15

¿Qué distribución de las propuestas ajusta mejor a estos datos? Decida en base a valor-p con nivel de significancia $\alpha = 5\%$.

Tiempo: 2 Horas

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \dots, n$	n, p	$\mu_X = np$ $\sigma_X^2 = np(1-p)$ $M(t) = [pe^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \dots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = pe^t/[1-(1-p)e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \dots$	r, p	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r(1-p)/p^2$ $M(t) = \{pe^t/[1-(1-p)e^t]\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\frac{(\nu t)^x e^{-\nu t}}{x!}$	$x = 0, 1, \dots$	ν	$\mu_X = \nu t$ $\sigma_X^2 = \nu t$ $M(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu e^{-\nu x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\frac{\nu^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\nu x}$	$x \geq 0$	k, ν	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	μ, σ	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\zeta x)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	λ, ζ	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2 \left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\lambda} M_Z(r\zeta), \text{ con } Z \sim \text{Normal}(0,1)$
Uniforme	$\frac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	a, b	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{tb} - e^{ta}]/[t(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\frac{1}{B(q, r)} \frac{(x-a)^{q-1} (b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	q, r	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r} (b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{qr(b-a)^2}{(q+r)^2(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\frac{\binom{m}{x} \binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$	N, m, n	$\mu_X = n \frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) n \frac{m}{N} \left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Formulario

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1} e^{-u} du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a \Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot, \cdot)$:

$$(1) \quad B(q, r) = \int_0^1 x^{q-1} (1-x)^{r-1} dx; \quad (2) \quad B(q, r) = \frac{\Gamma(q) \Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu t)^x e^{-\nu t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

- Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\text{Normal}(\mu, \sigma)$, entonces

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1), \quad \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t\text{-student}_{n-1}, \quad (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

donde

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

- Para un modelo de regresión lineal simple $Y = \alpha + \beta X$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ \hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X} \\ S_{Y/X}^2 &= \frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) \\ S_Y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2. \end{aligned}$$

Para el coeficiente de determinación r^2 puede usar,

$$r^2 = 1 - \frac{(n-2)S_{Y/X}^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad \text{en cuyo caso, el coeficiente de correlación corresponde a } \hat{\rho} = \pm \sqrt{r^2}.$$

o

$$r^2 = 1 - \frac{S_{Y/X}^2}{S_Y^2}, \quad \text{donde } S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

También:

$$\hat{\rho}^2 = 1 - \left(\frac{n-2}{n-1} \right) \frac{S_{Y/X}^2}{S_X^2}, \quad S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p											Distribución t-student $t_p(\nu)$				
k_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	ν	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	1	3.078	6.314	12.706	31.821
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753	2	1.886	2.920	4.303	6.965
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141	3	1.638	2.353	3.182	4.541
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517	4	1.533	2.132	2.776	3.747
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879	5	1.476	2.015	2.571	3.365
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224	6	1.440	1.943	2.447	3.143
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549	7	1.415	1.895	2.365	2.998
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852	8	1.397	1.860	2.306	2.896
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133	9	1.383	1.833	2.262	2.821
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389	10	1.372	1.812	2.228	2.764
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621	11	1.363	1.796	2.201	2.718
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830	12	1.356	1.782	2.179	2.681
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015	13	1.350	1.771	2.160	2.650
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177	14	1.345	1.761	2.145	2.624
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319	15	1.341	1.753	2.131	2.602
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441	16	1.337	1.746	2.120	2.583
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545	17	1.333	1.740	2.110	2.567
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633	18	1.330	1.734	2.101	2.552
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706	19	1.328	1.729	2.093	2.539
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767	20	1.325	1.725	2.086	2.528
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817	21	1.323	1.721	2.080	2.518
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857	22	1.321	1.717	2.074	2.508
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890	23	1.319	1.714	2.069	2.500
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916	24	1.318	1.711	2.064	2.492
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936	25	1.316	1.708	2.060	2.485
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952	26	1.315	1.706	2.056	2.479
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964	27	1.314	1.703	2.052	2.473
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	28	1.313	1.701	2.048	2.467
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981	29	1.311	1.699	2.045	2.462
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986	30	1.310	1.697	2.042	2.457
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990	∞	1.282	1.645	1.960	2.326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$								
ν	$c_{0.025}$	$c_{0.05}$	$c_{0.10}$	$c_{0.90}$	$c_{0.95}$	$c_{0.975}$	$c_{0.99}$	$c_{0.995}$
1	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93