Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2014

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Interrogación	:	**1**
Profesor	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)**
Ayudantes	:	**Carlos Cayuman, Fabián Fuentealba, Alonso Molina, Genaro Olave.**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina, o cualquier tipo de lápiz borrable, renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices, sus cuadernillos y calculadora.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

Cierta empresa alimenticia etiqueta sus productos utilizando códigos. A cada producto le es asignado un código de 8 caracteres, donde cada uno de los primeros 3 puede ser una de cuatro letras, A, B, C o D, sin repetirse, y los restantes 5 caracteres corresponden a 5 dígitos (entre 0 y 9), sin repetirse. Asumiendo que la empresa ha utilizado todas las etiquetas posibles, ¿cuál es la probabilidad de que, al escoger un producto al azar, su etiqueta comience con una consonante, y contenga exactamente 2 dígitos pares, uno al lado del otro? Nota: considere que el 0 es un número par.

Solución: Sea el evento A : "se elige una etiqueta con las características pedidas". Eligiendo los caracteres uno a uno, comenzando con las letras, los casos totales son:

$$\#S = 4 \times 3 \times 2 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 725.760. \qquad [\mathbf{0.6}]$$

Para formar un código con las características pedidas, separamos el proceso en etapas y luego multiplicamos las opciones:

Se elige la consonante para el primer caracter	:	3	[**0.6**]
Se eligen la segunda y tercera letras	:	3×2	[**0.6**]
Se eligen los dos dígitos pares que irán juntos	:	$\binom{5}{2}$	[**0.6**]
Se decide cuál de los dos irá primero	:	2	[**0.6**]
Se decide su ubicación en el código	:	4	[**0.6**]
Se elige los 3 números impares faltantes	:	$\binom{5}{3}$	[**0.6**]
Se ordenan los dígitos impares	:	$3!$	[**0.6**]

Luego, los casos favorables a A son:

$$\begin{aligned} & 3 \times 3 \times 2 \times \binom{5}{2} \times 2 \times 4 \times \binom{5}{3} \times 3! \\ = \; & 86.400. \qquad [\mathbf{0.6}] \end{aligned}$$

Luego, la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{86.400}{725.760} \qquad [\mathbf{0.6}] \\ &= 0.119. \end{aligned}$$

[1.0] punto base

Problema 2

Para una apetecida Gobernación, los tres partidos de gobierno hacen llegar sus ternas (tres candidatos) a la autoridad. Lamentablemente, dentro de cada terna propuesta por los partidos, pueden haber candidatos cuya nominación no sería recomendable, por comportamiento anterior indebido. En particular, uno de los partidos no contiene candidatos no recomendables, el segundo contiene un candidato no recomendable y, el tercero, dos candidatos no recomendables. El Subsecretario del Interior decide un ordenamiento particular de los candidatos presentados por los tres partidos, el que, ante nuestros ojos, tiene la misma probabilidad de ocurrir que cualquier otro ordenamiento. De este ordenamiento, el Subsecretario presenta los tres primeros candidatos a la autoridad máxima, la que decide dando igual probabilidad a cada uno de los tres candidatos propuestos.

a) (4 puntos) Utilizando en Teorema de Probabilidad Total o, en su defecto, un árbol, determine la probabilidad de que la autoridad máxima nomine Gobernador a un candidato no recomendable por comportamiento anterior indebido.

b) (2 puntos) Determine la probabilidad de que la terna propuesta por el Subsecretario no incluya candidatos no recomendables, dado que el candidato elegido por la autoridad máxima era recomendable.

Solución: Sean los eventos C_i : la terna propuesta por el Subsecretario contiene i candidatos no recomendables, $i = 0, 1, 2, 3$, y R : el candidato elegido por la máxima autoridad es recomendable.

a) **Alternativa 1:** Teorema de Probabilidad Total. El teorema dice que:

$$P(\bar{R}) = P(\bar{R}|C_0)P(C_0) + P(\bar{R}|C_1)P(C_1) + P(\bar{R}|C_2)P(C_2) + P(\bar{R}|C_3)P(C_3). \qquad \textbf{[0.4]}$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} P(\bar{R}|C_0) &= 0 && \textbf{[0,3]} \\ P(\bar{R}|C_1) &= \frac{1}{3} && \textbf{[0,3]} \\ P(\bar{R}|C_2) &= \frac{2}{3} && \textbf{[0,3]} \\ P(\bar{R}|C_3) &= 1. && \textbf{[0,3]} \end{aligned}$$

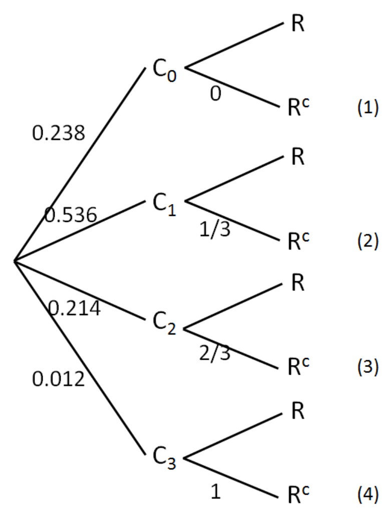
Por otra parte:

$$\begin{aligned} P(C_0) &= \frac{\binom{6}{3}\binom{3}{0}}{\binom{9}{3}} = 0,238 && \textbf{[0,5]} \\ P(C_1) &= \frac{\binom{6}{2}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} = 0,536 && \textbf{[0,5]} \\ P(C_2) &= \frac{\binom{6}{1}\binom{3}{2}}{\binom{9}{3}} = 0,214 && \textbf{[0,5]} \\ P(C_3) &= \frac{\binom{6}{0}\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}} = 0,012. && \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} P(\bar{R}) &= 0 \times 0,238 + \frac{1}{3} \times 0,536 + \frac{2}{3} \times 0,214 + 1 \times 0,012 \qquad \textbf{[0,4]} \\ &= 0.333. \end{aligned}$$

Alternativa 2: Árbol La representación del problema es:



Sumando las ramas (1), (2), (3) y (4):

$$\begin{aligned} P(\bar{R}) &= 0 \times 0,238 + \frac{1}{3} \times 0,536 + \frac{2}{3} \times 0,214 + 1 \times 0,012 \\ &= 0.333. \qquad \textbf{[0,8]} \end{aligned}$$

[0,5] por cada probabilidad en la primera etapa del árbol.
[0,3] por cada probabilidad en la segunda etapa del árbol.
Notar que no se requiere de las probabilidades que no están indicadas en el árbol.

b) Se pide:

$$\begin{aligned} P(C_0|R) &= \frac{P(R|C_0)P(C_0)}{P(R)} \qquad \textbf{[0,6]} \\ &= \frac{1 \times 0.238}{P(R)} \qquad \textbf{[0,6]} \\ &= \frac{0.238}{1 - 0,333} \qquad \textbf{[0,6]} \\ &= 0.357 \qquad \textbf{[0,2]} \end{aligned}$$

[1.0] punto base

Problema 3

En las nuevas designaciones de autoridades se discute respecto a "paridad", participación política y experiencia. Se sabe que entre todos los candidatos que hacen llegar dos partidos políticos, A y B, el 60 % de ellos corresponde a hombres. Por otra parte, hay algunos partidos más proclives a la discriminación positiva que otros. De hecho, si una candidata es mujer, la probabilidad de que haya sido propuesto por el partido A es la mitad de la probabilidad de que haya sido propuesta por el partido B. En cambio, si el candidato es hombre, la probabilidad de haber sido propuesto por el partido A es igual a la probabilidad de haber sido propuesto por el partido B. Por otra parte, entre los hombres, el partido A presenta el doble de candidatos con experiencia que sin experiencia. Sin embargo, estos números son iguales cuando son mujeres. En cambio, entre las mujeres, el partido B sólo presenta candidatas sin experiencia, pero la relación entre candidatos hombres sin experiencia y con experiencia es de 2:5. Determine

a) (3 puntos) La probabilidad de que un candidato cualquiera tenga experiencia.

b) (3 puntos) La probabilidad de que un candidato haya sido presentado por el partido A, si éste es hombre y no tiene experiencia previa.

Solución: Sean los eventos: H : el candidato es hombre, M : el candidato es mujer, A : el candidato pertenece al partido A, B : el candidato pertenece al partido B, y E : el candidato tiene experiencia.

a) Se pide $P(E)$.

Alternativa 1: Teorema de Probabilidad Total.

$$\begin{aligned}
P(H) &= 0,6 \qquad \mathbf{[0{,}1]}\\
P(A|M) &= \frac{1}{2}P(B|M) \Longrightarrow P(A|M) = \frac{1}{3} \quad \mathbf{[0{,}1]}, \qquad P(B|M) = \frac{2}{3} \quad \mathbf{[0{,}1]}\\
P(A|H) &= P(B|H) = \frac{1}{2} \quad \mathbf{[0{,}2]}\\
P(E|H\cap A) &= 2P(\bar{E}|H\cap A) \Longrightarrow P(E|H\cap A) = \frac{2}{3} \quad \mathbf{[0{,}2]}, \qquad P(\bar{E}|H\cap A) = \frac{1}{3} \quad \mathbf{[0{,}2]}\\
P(E|M\cap A) &= P(\bar{E}|M\cap A) = \frac{1}{2} \qquad \mathbf{[0{,}2]}\\
P(E|M\cap B) &= 0 \Longrightarrow P(\bar{E}|M\cap B) = 1 \qquad \mathbf{[0{,}2]}\\
\frac{P(\bar{E}|H\cap B)}{P(E|H\cap B)} &= \frac{2}{5} \Longrightarrow P(E|H\cap B) = \frac{5}{7} \quad \mathbf{[0{,}2]}, \qquad P(\bar{E}|H\cap B) = \frac{2}{7}. \quad \mathbf{[0{,}2]}
\end{aligned}$$

El teorema dice que:

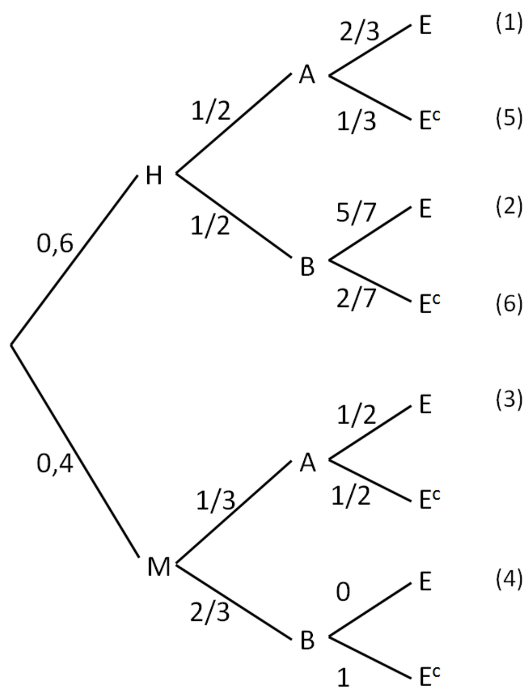
$$P(E) = P(E|H\cap A)\ P(H\cap A) + P(E|H\cap B)\ P(H\cap B) + P(E|M\cap A)\ P(M\cap A) + P(E|M\cap B)\ P(M\cap B).\mathbf{[0{,}2]}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
P(H\cap A) &= P(H)P(A|H) = 0,6\times\frac{1}{2} = 0,3 \qquad \mathbf{[0{,}2]}\\
P(H\cap B) &= P(H)P(B|H) = 0,6\times\frac{1}{2} = 0,3 \qquad \mathbf{[0{,}2]}\\
P(M\cap A) &= P(M)P(A|M) = 0,4\times\frac{1}{3} = 0,133 \qquad \mathbf{[0{,}2]}\\
P(M\cap B) &= P(M)P(B|M) = 0,4\times\frac{2}{3} = 0,267. \qquad \mathbf{[0{,}2]}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
P(E) &= \frac{2}{3}\times 0,3 + \frac{5}{7}\times 0,3 + \frac{1}{2}\times 0,133 + 0\times 0,267 \qquad \mathbf{[0{,}3]}\\
&= 0,2 + 0,214 + 0.0665 + 0 = 0.4805.
\end{aligned}$$



Alternativa 2: Árbol. La figura arriba representa el problema.
Sumando las ramas marcadas (1), (2), (3) y (4)

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 0,6 + \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} \times 0,6 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 0,4 + 0 \times \frac{2}{3} \times 0,4 \qquad \textbf{[0.4]} \\ &= 0,2 + 0,214 + 0.067 = 0.481. \end{aligned}$$

[0.1] por cada probabilidad en la primera etapa del árbol (0,2 puntos en total)
[0.2] por cada probabilidad en las segunda y tercera etapas del árbol (2,4 puntos en total)

b) **Alternativa 1:**

$$P(A|H \cap \bar{E}) = \frac{P(H \cap A \cap \bar{E})}{P(H \cap \bar{E})} \qquad \textbf{[0,4]}$$

Para el numerador:

$$\begin{aligned} P(H \cap A \cap \bar{E}) &= P(H \cap A) P(\bar{E}|H \cap A) \\ &= 0,3 \times \frac{1}{3} = 0,1. \qquad \textbf{[0.8]} \end{aligned}$$

Para el denominador:

$$\begin{aligned} P(H \cap \bar{E}) &= P(H \cap A \cap \bar{E}) + P(H \cap B \cap \bar{E}) \\ &= P(H)P(A|H)P(\bar{E}|H \cap A) + P(H)P(B|H)P(\bar{E}|H \cap B) \qquad \textbf{[0.8]} \\ &= 0,6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0,6 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} \qquad \textbf{[0.4]} \\ &= 0,1 + 0,086 = 0,186. \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

Luego:

$$P(A|H \cap \bar{E}) = \frac{0,1}{0,186} = 0,538. \qquad \textbf{[0.3]}$$

Alternativa 2: Árbol. Las ramas (5) y (6) del árbol son las ramas que cumplen con $H \cap \bar{E}$. De ellas, la rama (5) incluye a A. Luego, la probabilidad pedida corresponde a:

$$\begin{aligned} P(A|H \cap \bar{E}) &= \frac{(5)}{(5)+(6)} \\ &= \frac{1/3 \times 1/2 \times 0,6}{1/3 \times 1/2 \times 0,6 + 2/7 \times 1/2 \times 0,6} \\ &= \frac{0,1}{0,186} = 0,538. \end{aligned}$$

[**1.4**] numerador
[**1,4**] denominador
[**0,2**] resultado final.

[1.0] punto base.

Problema 4

En términos sísmicos, el país puede dividirse en tres áreas: Norte, Centro y Sur. Aparentemente, los comportamientos sísmicos de estas áreas no pueden suponerse independientes, sin embargo, los datos muestran que existe independencia entre la ocurrencia de sismos de gran intensidad (más de 7^o en escala de Richter) en las áreas Norte y Sur. Revisando estadísticas de los últimos 100 años, un especialista realiza las siguientes afirmaciones, en base a la observación de períodos disjuntos de 5 años consecutivos:

- Las probabilidades de observar al menos un sismo de gran intensidad en el Norte, Centro y Sur son 20 %, 40 % y 50 %, respectivamente.
- Sólo en uno de los periodos de 5 años observados, ocurrieron sismos de gran intensidad en las tres áreas simultáneamente.
- La probabilidad de observar al menos un sismo de gran intensidad en el Norte dado que se observó al menos uno en el Centro es igual a la mitad de la probabilidad de observar al menos un sismo de gran intensidad en el Sur, dado que se observó al menos uno en el Centro.
- Para cada uno de los períodos de 5 años, hay una probabilidad del 6 % de observar al menos un sismo de gran intensidad tanto en el Centro como en el Sur del país, de manera simultánea.

Determine la probabilidad que en el próximo periodo de 5 años consecutivos:

a) (3 puntos) Se observe al menos un sismo de gran intensidad en el Norte, dado que no se observan sismos de gran intensidad en el Centro.

b) (3 puntos) No se observe sismos de gran intensidad en todo el territorio nacional.

Solución: Sean: N, C y S los eventos que indican al menos un terremoto en un período de 5 años en las zonas Norte, Centro y Sur, respectivamente. Se entregan:

$$P(N) = 0,2\ [\mathbf{0.1}] \qquad P(C) = 0,4\ [\mathbf{0.1}] \qquad P(S) = 0,5\ [\mathbf{0.1}]$$
$$P(N \cap S) = P(N)\ P(S) = 0,2 \times 0,5 = 0,1 \quad [\mathbf{0.3}]$$
$$P(N \cap C \cap S) = \frac{1}{20} = 0,05 \qquad [\mathbf{0.2}]$$
$$P(N|C) = \frac{1}{2} P(S|C) \qquad [\mathbf{0.3}]$$
$$P(C \cap S) = 0,06. \qquad [\mathbf{0.2}]$$

a) Se pide:

$$P(N|\bar{C}) = \frac{P(N \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}. \qquad [\mathbf{0.3}]$$

Para el numerador, consideremos que $N = (N \cap C) \cup (N \cap \bar{C})$. Luego

$$P(N) = P(N \cap C) + P(N \cap \bar{C}),$$

de donde:

$$P(N \cap \bar{C}) = P(N) - P(N \cap C).$$

Por otra parte, $P(N|C) = \frac{1}{2} P(S|C)$, luego

$$\begin{aligned} P(N \cap C) &= \frac{1}{2} P(S \cap C) \\ &= \frac{1}{2} \times 0,06 \\ &= 0,03. \qquad [\mathbf{0.7}] \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(N \cap \bar{C}) &= 0,2 - 0,03 \\ &= 0,17. \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(N|\bar{C}) &= \frac{0,17}{1 - 0,4} \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= 0,283. \end{aligned}$$

b) Se pide:

$$\begin{aligned} & P(\bar{N} \cap \bar{C} \cap \bar{S}) \qquad \textbf{[0.7]} \\ = \quad & P(\overline{N \cup C \cup S}) \qquad \textbf{[0.8]} \\ = \quad & 1 - P(N \cup C \cup S) \qquad \textbf{[0.5]} \\ = \quad & 1 - (0,2 + 0,4 + 0,5 - 0,03 - 0,1 - 0,06 + 0,05) \qquad \textbf{[1.0]} \\ = \quad & 1 - 0,96 = 0,04. \end{aligned}$$

[1.0] punto base

Tiempo: 2 Horas

Formulario

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales $n_1,\ldots,n_k$, entonces

$$S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$.

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1,\ldots, n_k$, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1 \, n_2 \, \cdots \, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!} \, x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$