Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2014

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Interrogación	**:**	**2**
Profesor	**:**	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)**
Ayudantes	**:**	**Carlos Cayuman, Fabián Fuentealba, Alonso Molina, Genaro Olave.**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina, o cualquier tipo de lápiz borrable, renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices, sus cuadernillos y calculadora.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

Una turbina que está en funcionamiento durante 3 horas, requiere consumir energía adicional durante ciertos intervalos en este tiempo. El instante en el que deja de requerir energía adicional, X, medido desde el momento en que se enciende la turbina, sigue una distribución con función de densidad dada por:

$$f_x(x) = \begin{cases} c\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

a) (3 puntos) Encuentre el valor de la constante adecuada c.

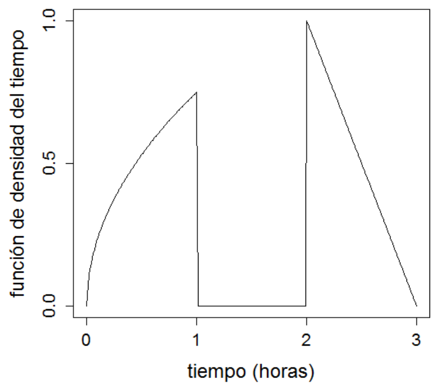
Solución: Se requiere que:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, dx \qquad \textbf{[0,5]} \\ &= \int_0^1 c\sqrt{x}\, dx + \int_2^3 (3-x)\, dx \qquad \textbf{[0,7 por cada sumando]} \\ &= c\frac{x^{3/2}}{3/2}\bigg|_0^1 + 3x\bigg|_2^3 - \frac{x^2}{2}\bigg|_2^3 \\ &= \frac{2\,c}{3} + \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[0,7]} \end{aligned}$$

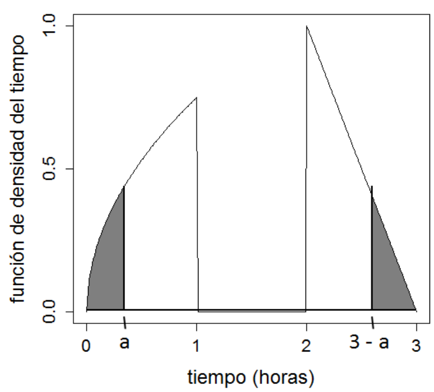
Luego, $c = 3/4$. **[0,4]**

b) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el instante en que deje de requerir energía adicional sea menor que un valor a o mayor que $(3-a)$, cuando $a = 1/3$?

Solución: La función de densidad corresponde a:



Dado que $a < 1$, se requiere el área achurada:



Es decir, se pide

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X < a) + P(X > 3-a) & [\mathbf{0.3}] \\ &= \int_0^a c\sqrt{x}\, dx + \int_{3-a}^3 (3-x)\, dx & [\mathbf{0.8}] \text{ por cada sumando} \\ &= \frac{2\, c}{3} a^{3/2} + 3(3-(3-a)) - \frac{9-(3-a)^2}{2}. & [\mathbf{0.6}] \end{aligned}$$

Reemplazando $c = 3/4$ y $a = 1/3$, encontramos que la probabilidad pedida es $P(A) = 0,152$ **[0.5]**.

Nota: Si no realiza el trabajo analítico pero muestra las areas bajo la curva pedidas (como en la última figura) recibe **[0,5]**.

[1.0] punto base.

Problema 2

Es común ver en las carreteras letreros referentes al riesgo de cruce de animales salvajes. Como ustedes saben, en general, estos animales cruzan intempestivamente.

Suponga que, en cierta carretera, los vehículos que transitan lo hacen de acuerdo a un Proceso de Poisson con tasa 10 vehículos por minuto, y que un animal salvaje requiere de, al menos, 8 segundos para cruzar la carretera sin ser alcanzado.

a) (2 puntos) Si un animal salvaje cruza intempestivamente la carretera inmediatamente después de que ha pasado un vehículo, ¿cuál es la probabilidad de ser alcanzado por el siguiente vehículo, si el conductor no alcanza a reaccionar?

Solución: El animal es alcanzado por el siguiente vehículo, si éste pasa en menos de 8 segundos desde que pasó el primer auto. El tiempo entre ambos autos T, en segundos, distribuye Exponencial de parámetro:

$$\begin{aligned} \nu &= 10/min \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= 10/(60s) = 1/(6s). \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

Su función de probabilidad acumulada corresponde a:

$$\begin{aligned} F_x(x) &= P(X \leq x) = \int_0^x \nu \exp\{-\nu\, u\}\, du \\ &= 1 - \exp(-\nu\, x), \qquad x > 0. \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

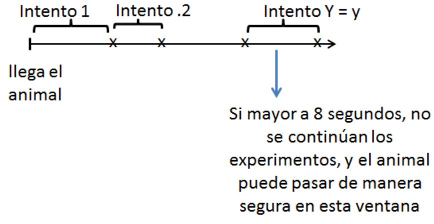
Luego, la probabilidad pedida corresponde a:

$$\begin{aligned} P(T < 8) &= F_x(8) \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= 1 - \exp(-1/6 \times 8) \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= 0,736. \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

b) (3 puntos) Si, al llegar al cruce, un animal salvaje se detiene producto del ruido de los vehículos, determine el valor esperado del mínimo del número de vehículos que debería dejar pasar para realizar un cruce seguro.

Solución: El tiempo que demora en pasar el primer vehículo distribuye Exponencial de parámetro $1/(6s)$, y así con todos los tiempos entre los vehículos que siguen. Consideremos el intervalo de tiempo desde que llega el animal hasta que pasa el primer vehículo, y todos los intervalos de tiempo entre los siguientes vehículos como experimentos Bernoulli, donde el animal podrá pasar de manera segura (éxito) si el intervalo es mayor a 8 segundos. Sea Y el número de experimentos Bernoulli hasta que se observe el primer intervalo de más de 8 minutos. Luego, Y distribuye Geométrica **[0,5]** de parámetro:

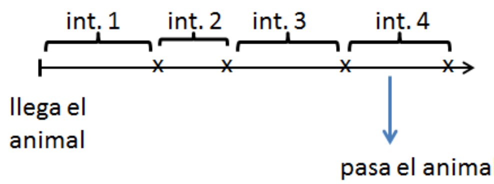
$$p = P(T > 8) = 1 - 0,736 = 0,264. \qquad \textbf{[0.5]}$$



El valor esperado de Y es

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,264} = 3,79, \qquad \textbf{[1.0]}$$

luego, en promedio deberemos realizar 3,79 experimentos Bernoulli, y el animal deberá dejar pasar 3 autos. **[1.0]**



c) (1 punto) Basado en su respuesta en b), ¿cuál es el tiempo esperado que debe esperar el animal salvaje para realizar un cruce seguro? (Puede dejarlo expresado en términos de su respuesta en b))

Solución: Según b), en promedio, el animal debe esperar que pasen 3 autos. Luego, el tiempo T_3 que debe esperar corresponde a una variable aleatoria Gama de parámetros $k = 3$ y $\nu = 1/6$ **[0,5]**, y su valor esperado es

$$E(T_3) = \frac{k}{\nu} = \frac{3}{1/6} = 18 \text{ segundos.} \qquad \textbf{[0,5]}$$

Nota: Puede trabajar en otras unidades de tiempo, realizando las transformaciones necesarias.

[1.0] punto base

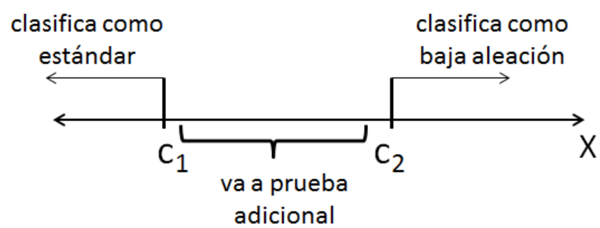
Problema 3

La composición de las barras de acero laminadas para hormigón armado está relacionada con la resistencia de la barra frente a un ensayo de dureza, que mide la resistencia del acero a la penetración de un durómetro, tipo punzón. La profundidad hasta la cual penetra el durómetro en una barra de acero estándar, denominado acero de carbono, puede ser modelada por una distribución Normal, de media 12 mm y desviación estándar 0,5 mm, y esta misma profundidad en una barra producida con acero de baja aleación, donde elementos residuales alteran la microestructura de la barra, puede ser modelada por una distribución Normal de media 16 mm, y desviación estándar 1 mm.

El especialista a cargo del control de calidad de este tipo de barras de acero en una empresa sabe que el procedimiento para clasificar una barra de acero corresponde a clasificarla como de baja aleación cuando la profundidad hasta la cual penetra el durómetro es mayor a cierto valor, clasificarla como estándar si esta profundidad es menor a cierto otro valor, y requerir de una prueba adicional de dureza de mayor precisión, si la profundidad se encuentra entre los dos valores. Sin embargo, el especialista no conoce los valores de corte adecuados.

a) (3 puntos) Encuentre los valores que debe utilizar este especialista si desea identificar aceros de baja aleación correctamente el 99 % de las veces y no clasificar como barra de acero estándar a una barra que sí lo es, sólo el 5 % de las veces.

Solución: Sea X la profundidad de la penetración en la barra. La figura muestra la regla de clasificación:



Se desea que:

$$P(X > c_2 | \text{barra es de acero de baja aleación}) = 0,99 \qquad [\mathbf{0.3}] \tag{1}$$
$$P(X > c_1 | \text{barra es de acero estandar}) = 0,05 \qquad [\mathbf{0.3}]. \tag{2}$$

La ecuación (1) dice que:

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & 1 - \Phi\left(\frac{c_2 - 16}{1}\right) = 0,99 \qquad [\mathbf{0.4}] \\ \Longrightarrow \quad & \Phi\left(\frac{c_2 - 16}{1}\right) = 0,01 \\ \Longrightarrow \quad & c_2 = z_{0,01} \times 1 + 16. \qquad [\mathbf{0.3}] \end{aligned}$$

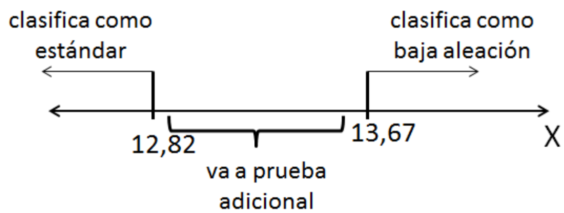
De tabla obtenemos que $z_{0,01} = -z_{0,99} = -2.33$ [**0.3**], luego $c_2 = 13,67$ [**0,2**]. Por otra parte, la ecuación (2) dice que:

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & 1 - \Phi\left(\frac{c_1 - 12}{0,5}\right) = 0,05 \qquad [\mathbf{0.4}] \\ \Longrightarrow \quad & \Phi\left(\frac{c_1 - 12}{0,5}\right) = 0,95 \\ \Longrightarrow \quad & c_1 = z_{0,95} \times 0,5 + 12. \qquad [\mathbf{0.3}] \end{aligned}$$

De tabla obtenemos que $z_{0,95} = 1,645$ [**0.3**], luego $c_1 = 12,82$ [**0.2**].

b) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una barra de acero seleccionada al azar de esta producción, a la que se evalúa la resistencia según el procedimiento descrito, requiera de una prueba adicional de mayor precisión para ser clasificada, si se sabe que el 6 % de las barras de acero producidas corresponde a barras de acero de baja aleación?

Solución: De a) sabemos que:



Luego, la probabilidad de que requiera de una prueba adicional (evento A) es:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A|\text{baja aleacion})\ P(\text{baja aleación}) + P(A|\text{estandar})\ P(\text{estandar}) \quad [\mathbf{0.5}] \\
&= P(12,82 < X < 13,67|\text{baja aleacion}) \times 0,06 \\
&\quad + P(12,82 < X < 13,67|\text{estandar}) \times 0,94 \qquad [\mathbf{0.3}] \\
&= \left(\Phi\left(\frac{13,67-16}{1}\right) - \Phi\left(\frac{12,82-16}{1}\right)\right) \times 0,06 \\
&\quad + \left(\Phi\left(\frac{13,67-12}{0,5}\right) - \Phi\left(\frac{12,82-12}{0,5}\right)\right) \times 0,94 \qquad [\mathbf{0.6}] \\
&= \left(\Phi\left(-2.33\right) - \Phi\left(-3.18\right)\right) \times 0,06 + \left(\Phi\left(3,34\right) - \Phi\left(1,64\right)\right) \times 0,94. \qquad [\mathbf{0.3}]
\end{aligned}$$

De tabla:

$$\begin{aligned}
\Phi(-2.33) &= 1 - \Phi(2,33) = 1 - 0,99 = 0,01 \quad [\mathbf{0.2}] \\
\Phi(-3.18) &= 1 - \Phi(3.18) = 1 - 0.9993 = 0,0007 \quad [\mathbf{0.2}] \\
\Phi(3.34) &= 0,9996 \quad [\mathbf{0.2}] \\
\Phi(1.64) &= 0,95. \quad [\mathbf{0.2}]
\end{aligned}$$

Luego,

$$P(A) = (0,01 - 0,0007) \times 0,06 + (0,9996 - 0,95) \times 0,94 = 0,047. \quad [\mathbf{0.5}]$$

[**1.0**] punto base

Problema 4

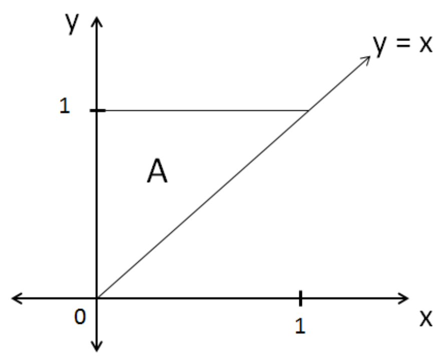
La Superintendencia de Seguridad Social (SUSESO) dispone de estadísticas respecto a las licencias médicas que se presentan a las instituciones de salud previsional (Isapres). Hay dos atributos relevantes que pueden ser modelados estadísticamente. Del total de licencias recibidas por una Isapre, se definen: X como la proporción de licencias apeladas ante la Comisión Médica Preventiva y de Invalidez (COMPIN) del Servicio de Salud que corresponda, e Y como la proporción de licencias médicas rechazadas por una Isapre. Un especialista determina que el mejor modelo que describe el comportamiento de este vector aleatorio tiene función de densidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = k\,exp(-y), \qquad 0 < x < y < 1,$$

y cero en otro caso.

a) (1 punto) Encuentre el valor de la constante k.

Solución: El vector aleatorio se mueve en el área A de la figura: Luego,



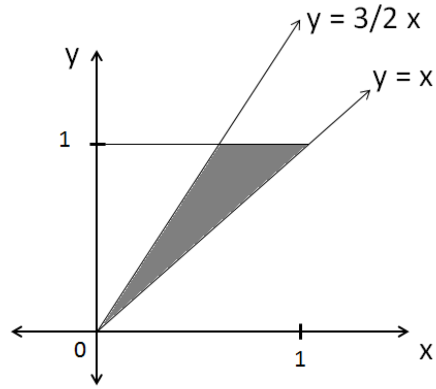
$$\begin{aligned}
P(A) &= 1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy \qquad \textbf{[0.1]}\\
&= \int_0^1 \int_0^y k\ \exp\{-y\}\,dx\,dy \qquad \textbf{[0.4]}\\
&= k\int_0^1 \exp\{-y\}\,y\,dy, \qquad \text{integrando por partes}\\
&= k\left(-ye^{-y}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-y}\,dy\right)\\
&= k(1-2e^{-1}). \qquad \textbf{[0.3]}
\end{aligned}$$

Luego,

$$k = \frac{1}{1-2e^{-1}} = 3,78. \qquad \textbf{[0.2]}$$

b) (3 puntos) Para una Isapre dada, determine la probabilidad de que la proporción de licencias apeladas sea superior a 2/3 de la proporción de licencias rechazadas.

Solución: Se pide $P(X > 2/3\ Y)$ **[0.5]**, lo que corresponde a la probabilidad de la región pintada. Luego,



$$\begin{aligned}
P(X > 2/3\,Y) &= \int_0^1 \int_{2/3y}^{y} k\, e^{-y}\, dx\, dy \qquad \textbf{[1.0]} \\
&= k \int_0^1 e^{-y} \left(y - \frac{2}{3} y \right) dy \qquad \textbf{[0.5]} \\
\text{Integrando por partes:} \quad &= \frac{k}{3} \left(-ye^{-y} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-y}\, dy \right) \qquad \textbf{[0.4]} \\
&= \frac{k}{3}(1 - 2e^{-1}) \qquad \textbf{[0.3]} \\
&= \frac{1}{3}. \qquad \textbf{[0.3]}
\end{aligned}$$

Nota: Si no realiza desarrollo analíticos pero identifica el área adecuada recibe **[0.5]**.

c) (2 puntos) Para una Isapre dada, determine el valor esperado de la proporción de licencias apeladas, cuando el 35 % de las licencias médicas presentadas es rechazado.

Solución: Se pide:

$$E(X|Y = 0.35) = \int_0^1 x\, f_{x|y=0,35}(x)\, dx. \qquad \textbf{[0.2]}$$

Tenemos que:

$$f_{x|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)}. \qquad \textbf{[0.2]}$$

Requerimos

$$\begin{aligned}
f_y(y) &= \int_0^1 f(x,y)\, dx \qquad \textbf{[0.2]} \\
&= \int_0^y ke^{-y}\, dx \qquad \textbf{[0.4]} \\
&= k\, y\, e^{-y}, \quad 0 < y < 1, \qquad \textbf{[0.2]}
\end{aligned}$$

cero en otro caso. Luego,

$$\begin{aligned} f_{x|Y=y}(x) &= \frac{k\ e^{-y}}{k\ y\ e^{-y}} \\ &= \frac{1}{y}, \qquad \textbf{[0.2]} \end{aligned}$$

cuando $0 < x < y$, cero en otro caso **[0.1]**. Luego,

$$\begin{aligned} E(X|Y = 0,35) &= \int_0^{0,35} x\ \frac{1}{0,35}\ dx \qquad \textbf{[0.4]} \\ &= \frac{0,35}{2} = 0,175. \qquad \textbf{[0.1]} \end{aligned}$$

También se puede llegar al resultado reconociendo que $X|Y = 0,35$ distribuye Uniforme(0,0.35), por lo que su valor esperado es el punto medio, 0.175.

[1.0] punto base

Tiempo: 2 Horas

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Formulario

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\,e^{-u}\,du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$:

$$(1) \quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2) \quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998