Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2014

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I3**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena, Ricardo Olea y Claudia Wehrhahn**
Ayudantes	**:**	**Daniela Castro, Erwin Agüero y Carlos Cayuman.**

Problema 1 [30 %]

Considere una muestra aleatoria $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ proveniente de una población la cual se rige por una distribución que esta determinada por la siguiente función de densidad

$$f(x) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1}, \quad 0 \leq x \leq \theta$$

con $\alpha > 0$ una constante conocida y el parámetro $\theta > 0$.

(a) **[15 %]** Encuentre el estimador de momentos del parámetro θ. Calcule su esperanza y varianza.

(b) **[15 %]** Un investigador propone un estimador para θ alternativo al obtenido en (a):

$$\tilde{\theta} = \frac{(n\,\alpha + 1)}{n\,\alpha} \cdot \text{máx}\{X_1,\, X_2, \ldots,\, X_n\}$$

¿Cual de los dos le parece mejor? Justifique.

Solución

(a) Tenemos que $X \sim f(x) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1}$ para $0 \leq x \leq \theta$, con $\alpha > 0$ conocido y $\theta > 0$.

Luego

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \int_0^\theta x \cdot \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1}\,dx \\
&= \int_0^\theta \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \cdot x^{\alpha}\,dx \\
&= \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \cdot \left.\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)}\right|_0^\theta \\
&= \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)\theta \qquad \textbf{[2 \%]}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X^2) &= \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1}\,dx \\
&= \int_0^\theta \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \cdot x^{\alpha+1}\,dx \\
&= \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \cdot \left.\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)}\right|_0^\theta \\
&= \left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)\theta^2 \qquad \textbf{[2 \%]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}^2(X) = \frac{\alpha\,\theta^2}{(\alpha+2)(\alpha+1)^2} \qquad [\mathbf{2}\,\%]$$

El estimador de momentos, $\hat{\theta}$, del parámetro θ se obtiene como sigue:

$$\mathbf{E}(X) = \overline{X}_n \longrightarrow \hat{\theta} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \overline{X}_n \qquad [\mathbf{3}\,\%]$$

Luego, por linealidad del operador esperanza

$$\mathbf{E}(\hat{\theta}) = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \mathbf{E}(X) = \theta \qquad [\mathbf{3}\,\%]$$

y por independencia

$$\mathbf{Var}(\hat{\theta}) = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^2 \frac{\mathbf{Var}(X)}{n} = \frac{\theta^2}{n\,\alpha\,(\alpha+2)} \qquad [\mathbf{3}\,\%]$$

(b) Sea $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, con $f_Y(y) = n\,[F_X(y)]^{(n-1)}\, f_X(y)$. [**1** %]

Tenemos que

$$F_X(y) = \int_0^y \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1}\,dx = \left.\frac{x^\alpha}{\theta^\alpha}\right|_0^y = \frac{y^\alpha}{\theta^\alpha}, \quad 0 \le y \le \theta \qquad [\mathbf{1}\,\%]$$

Luego

$$f_Y(y) = n\left[\frac{y^\alpha}{\theta^\alpha}\right]^{(n-1)} \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \cdot y^{\alpha-1} = \frac{n\,\alpha}{\theta^{n\,\alpha}} \cdot y^{n\,\alpha-1}, \quad 0 \le y \le \theta \qquad [\mathbf{1}\,\%]$$

Por lo tanto

$$[\mathbf{2}\,\%] \qquad \mathbf{E}(Y) = \left(\frac{n\,\alpha}{n\,\alpha+1}\right)\theta \quad \text{y} \quad \mathbf{Var}(Y) = \frac{n\,\alpha\,\theta^2}{(n\,\alpha+2)(n\,\alpha+1)^2} \qquad [\mathbf{2}\,\%]$$

El estimador $\widetilde{\theta}$ resulta ser insesgado al igual que el estimador logrado en (a):

$$\mathbf{E}(\widetilde{\theta}) = \frac{(n\,\alpha+1)}{n\,\alpha}\,\mathbf{E}(Y) = \theta \qquad [\mathbf{3}\,\%]$$

Mientras que su varianza

$$\mathbf{Var}(\widetilde{\theta}) = \left(\frac{n\,\alpha+1}{n\,\alpha}\right)^2 \mathbf{Var}(Y) = \frac{\theta^2}{n\,\alpha\,(n\,\alpha+2)} \qquad [\mathbf{3}\,\%]$$

es menor que la obtenida por el estimador en (a)

$$\frac{\mathbf{Var}(\widetilde{\theta})}{\mathbf{Var}(\hat{\theta})} = \frac{\alpha+2}{n\,\alpha+2} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } n \to \infty \qquad [\mathbf{1}\,\%]$$

Por lo tanto, el estimador propuesto por el investigador es más eficiente para estimar θ que el de momentos. [**1** %]

Problema 2 [20 %]

Una variable importante a considerar en el aterrizaje de aviones es la velocidad del viento. Un modelo de probabilidad que describe muy bien este tipo de datos es la distribución Rayleigh, cuya función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\,\theta^2}\right\}, \quad x > 0 \quad \text{y} \quad \theta > 0$$

Durante diciembre del 2013, en el sector de Pudahuel se tomaron 100 velocidades del viento en m/s de manera aleatoria, las que arrojaron los siguientes resultados:

$$n = 100; \qquad \sum_{i=1}^n x_i = 116.325; \qquad \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = -44.26946; \qquad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 222.7271$$

(a) **[10 %]** Encuentre una expresión para el estimador máximo verosímil de θ y evalúe en lo posible con la información obtenida.

(b) **[10 %]** Calcule la probabilidad que la velocidad del viento en un instante cualquiera supere los 2 m/s. Proponga una distribución asintótica para esta probabilidad.

Solución:

(a) La función de verosmilitud es

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{X_i}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{X_i^2}{2\theta^2}\right\} & \textbf{[1 \%]} \\ &= \theta^{-2n} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n X_i^2\right\} \prod_{i=1}^n X_i & \textbf{[1 \%]} \end{aligned}$$

Luego,

$$\ln L(\theta) = -2\,n \cdot \ln(\theta) - \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \qquad \textbf{[2 \%]}$$

Para encontrar el máximo,

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(\theta) = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^n X_i^2 \qquad \textbf{[2 \%]}$$

de donde se obtiene

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2} \qquad \textbf{[2 \%]}$$

Para verificar que es un máximo,

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L(\theta) = \frac{2n}{\theta^2} - \frac{3}{\theta^4}\sum_{i=1}^n X_i^2$$

Evaluando esta segunda derivada en el valor $\theta = \widehat{\theta}$ se tiene

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L(\theta)\right|_{\theta=\widehat{\theta}} = \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2} - \frac{12\,n^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2} = -\frac{8\,n^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2} < 0$$

Por lo tanto, el EMV de θ es

$$\widehat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

De la información entregada se tiene que $\widehat{\theta} = 1.0552$. **[2 %]**

(b) Nos piden calcular $P(X > 2)$.

$$\begin{aligned} P(X>2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - \int_0^2 \frac{x}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\right\} dx \qquad \textbf{[2 \%]} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = x^2 \Rightarrow du/2 = xdx$, tenemos que

$$\begin{aligned} P(X>2) &= 1 - \frac{1}{2\theta^2} \int_0^4 \exp\left\{-\frac{u}{2\theta^2}\right\} du \\ &= 1 + \left[\exp\left\{-\frac{4}{2\theta^2}\right\} - 1\right] \\ &= \exp\left\{-\frac{2}{\theta^2}\right\} \qquad \textbf{[2 \%]} \\ &= g(\theta) \end{aligned}$$

Luego, la estimación de máxima verosimilitud de $P(X > 2)$ es

$$\begin{aligned} \widehat{P(X>2)} &= \exp\left\{-\frac{2}{\widehat{\theta}^2}\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{2}{(1.0552)^2}\right\} \\ &= 0.1659 \end{aligned}$$

Por propiedad del EMV, tenemos que

$$g(\widehat{\theta}) \stackrel{\cdot}{\sim} \text{Normal}\left(g(\theta), \sqrt{\frac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}}\right)$$

donde $g(\theta) = \exp\left\{-\frac{2}{\theta^2}\right\}$ y $g'(\theta) = \frac{4}{\theta^3} \exp\left\{-\frac{2}{\theta^2}\right\}$. **[1 %]**

Por otra parte,

$$I_n(\theta) = -\mathbf{E}\left[\frac{2n}{\theta^2} - \frac{3}{\theta^4}\sum_{i=1}^n X_i^2\right] = -\frac{2n}{\theta^2} + \frac{3}{\theta^4}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i^2) \qquad \textbf{[1 \%]}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X^2) &= \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{x}{\theta^2} e^{-x^2/2\theta^2}\, dx, \quad \text{con } u = \frac{x^2}{\theta^2} \Rightarrow du = \frac{2x}{\theta^2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \theta^2 u e^{-u/2}\, du \\ &= 2\,\theta^2 \qquad \textbf{[2 \%]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $I_n(\theta) = \frac{4n}{\theta^2}$ y la distribución asintótica estaría dada por

$$\widehat{P(X>2)} = \exp\left\{-\frac{2}{\widehat{\theta}^2}\right\} \stackrel{\cdot}{\sim} \text{Normal}\left(\exp\left\{-\frac{2}{\theta^2}\right\}, \frac{2}{n\,\theta^2}\exp\left\{-\frac{2}{\theta^2}\right\}\right) \qquad \textbf{[2 \%]}$$

Problema 3 [20 %]

Suponga que el examen tiene tres preguntas y que los tiempos dedicados a cada una de ellas se pueden asumir que distribuyen como una variable aleatoria normal. Dado que la dificultad en general es incremental, esto implica que los tiempos dedicados a cada pregunta están correlacionados. Suponga que T_1, T_2 y T_3 son los tiempos asignados, en minutos, a cada una de las preguntas. Si se asume que estas tienen medias 15, 25 y 35, y desviación estándar 3, 6 y 9 respectivamente. Si además los coeficientes de correlación están dados por:

$$\mathbf{Corr}(T_1, T_2) = 0.2; \qquad \mathbf{Corr}(T_1, T_3) = -0.6; \qquad \mathbf{Corr}(T_2, T_3) = 0.4$$

Calcule la probabilidad que la pregunta tres demande menos tiempo que el dedicado a las otras dos en total.

Solución:

Se pide $P(T_3 < T_1 + T_2)$. Si $D = T_3 - (T_1 + T_2)$, entonces se piden $P(D < 0)$. [4 %]

Como los T_i son normales, entonces $D \sim \text{Normal}(\mu_D, \sigma_D)$, donde

$$\begin{aligned}
\mu_D &= \mathbf{E}(D) \\
&= \mathbf{E}(T_3 - T_1 - T_2) \\
&= \mathbf{E}(T_3) - \mathbf{E}(T_1) - \mathbf{E}(T_2) \\
&= 35 - 15 - 25 \\
&= -5 \qquad [4\,\%]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sigma_D^2 &= \mathbf{Var}(D) \\
&= \mathbf{Var}(T_3 - T_1 - T_2) \\
&= \mathbf{Var}(T_3) + \mathbf{Var}(T_1) + \mathbf{Var}(T_2) - 2\,\mathbf{Cov}(T_3, T_1) - 2\,\mathbf{Cov}(T_3, T_2) + 2\,\mathbf{Cov}(T_1, T_2) \qquad [4\,\%] \\
&= 3^2 + 6^2 + 9^2 - 2 \cdot (-0.6) \cdot 3 \cdot 9 - 2 \cdot 0.4 \cdot 6 \cdot 9 + 2 \cdot 0.2 \cdot 3 \cdot 6 \\
&= 9 + 36 + 81 + 32.4 - 43.2 + 7.2 \\
&= 122.4 \qquad [4\,\%]
\end{aligned}$$

Luego

$$P(D < 0) = \Phi\left(\frac{0 - (-5)}{\sqrt{122.4}}\right) \approx \Phi(0.45) = 0.6736 \qquad [4\,\%]$$

Problema 4 [30 %]

Frente a los últimos rumores respecto al fallo de La Haya, las personas se han formado una opinión respecto a estas, las cuales pueden expresarse en las siguientes hipótesis:

(a) "Chile está pesimista frente al fallo de La Haya" - Hipótesis: Menos de un 15 % de la población de Chile piensa que el fallo es negativo para las pretensiones de Chile.

(b) "La pérdida de territorio marítimo será significativa" - Hipótesis: De la superficie en disputa, más de un 15 % será entregado al Perú.

Para contrastar las hipótesis anteriores se realiza una encuesta de dos preguntas a 240 personas:

1. Para Chile, el fallo será: ____ Negativo ____ Positivo
2. Si fuese negativo, que proporción será entregado al Perú: ____ %

Usted, con un análisis descriptivo simple de los datos obtiene lo siguiente:

- Fallo negativo: 25 personas
- Proporción promedio 17 % con una desviación estándar del 5 %. (Asuma normalidad)

¿Para qué nivel de significancia las afirmaciones realizadas en (a) y (b) tienen sustento estadístico?

Solución:

(a) Test de hipótesis para una proporción:

$$\mathrm{H}_0 : p = 0.15 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_1 : p < 0.15 \qquad \textbf{[5 \%]}$$

Tenemos

$$n = 240, \quad \hat{p} = \frac{25}{240} = 0.1041667 \qquad \textbf{[2 \%]}$$

Bajo H_0, el estadístico de prueba Z_0 por TCL distribuye

$$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} \mathrel{\dot{\sim}} \text{Normal}(0,\, 1)$$

Reemplazando tenemos que

$$Z_0 = \frac{0.1042 - 0.15}{\sqrt{\frac{0.15 \times 0.85}{240}}} = -1.99 \qquad \textbf{[3 \%]}$$

Se pide

$$\text{valor-p} = P(Z < Z_0) = \Phi(-1.99) = 1 - \Phi(1.99) = 1 - 0.9767 = 0.0233 \qquad \textbf{[3 \%]}$$

Por lo tanto, para un nivel del 2.33 % la afirmación "menos de un 15 % de l población de chile piensa que el fallo es negativo" tiene sustento estadístico. **[2 %]**

(b) Test de hipótesis para la media (Caso Normal con σ desconocida y n pequeño).

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 15 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}:_1 : \mu > 15 \qquad \textbf{[5 \%]}$$

Tenemos del enunciado

$$n = 25 \qquad \overline{X}_n = 17 \qquad S = 5 \qquad \textbf{[2 \%]}$$

El estadístico de prueba

$$T_0 = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim \text{t-Student}(n-1)$$

Reemplazando

$$T_0 = \frac{17-15}{5/\sqrt{25}} = 2.0 \qquad \textbf{[3 \%]}$$

Se pide

$$\text{valor-p} = P(T > T_0) = P(T > 2) \longrightarrow 2.5\,\% < \text{valor-p} < 5\,\% \qquad \textbf{[3 \%]}$$

Por lo tanto, para un nivel del entre el 2.5 % y 5 % la afirmación "De la superficie en disputa, más de un 15 % será entregado al Perú" tiene sustento estadístico. **[2 %]**

Formulario

- Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de probabilidad p_X o de densidad f_X, determinada por un parámetro θ. Si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil del parámetro θ, entonces:
  - $\mathbf{E}(\hat{\theta}) \to \theta$, cuando $n \to \infty$.
  - $\mathbf{Var}(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{I_n(\theta)}$, con $I_n(\theta) = -\mathbf{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}\,\ln L(\theta)\right]$.
  - $\hat{\theta} \mathrel{\dot{\sim}} \text{Normal}\left(\theta,\, \sqrt{\dfrac{1}{I_n(\theta)}}\right)$, cuando $n \to \infty$.
  - El estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$, cuya varianza está dada por: $\mathbf{Var}[g(\hat{\theta})] = \dfrac{\left[g'(\theta)\right]^2}{I_n(\theta)}$.
- Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Normal(μ, σ), entonces

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,1), \quad \frac{\overline{X}_n - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim \text{t-student}(n-1), \quad \frac{s^2\,(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

  con $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\, (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\, e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\, e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\, M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\, \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\, n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
∞	1.282	1.645	1.960	2.326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$

ν	$c_{0.025}$	$c_{0.05}$	$c_{0.10}$	$c_{0.90}$	$c_{0.95}$	$c_{0.975}$	$c_{0.99}$	$c_{0.995}$
1	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93