Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2015

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I2**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

Un sistema electrónico está compuesto por n componentes independientes, donde cada una de las componentes tiene una distribución de vida Log-Normal con una mediana igual 2 años y coeficiente de variación de 20 %. El sistema funcionará durante un año si al menos el 80 % de las componentes funciona correctamente durante ese tiempo. Determine el valor de n mínimo de modo que el sistema tenga una probabilidad aproximada de funcionamiento correcto durante un año igual o superior a 0.95.

Solución

Definamos como X al tiempo de vida de una componente.

Del enunciado, se tiene que $X \sim \text{Log-Normal}(\lambda, \zeta)$, donde

$$\lambda = \ln(\text{Mediana}) = \ln(2) = 0.69315 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

y

$$\zeta \approx \text{c.o.v.} = 0.2 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Por otra parte sea

$$p = P(X > 1) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(1) - \lambda}{\zeta}\right) = 1 - \Phi(-3.466) = 0.9997 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Definamos como Y_i al evento en que la i-ésima componente funciona al menos un año, es decir,

$$Y_i \overset{iid}{\sim} \text{Bernoulli}(p) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Por Teorema del Límite Central

$$T = \sum_{i=}^{n} Y_i \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}\left(n\,p,\, \sqrt{n\,p\,(1-p)}\right) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Se pide un valor de n tal que

$$P(T \geq 0.8\,n) \geq 0.95 \to P(T \leq 0.8n) = 0.05 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Esto es equivalente a

$$\Phi\left(\frac{0.8\,n - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) = 0.05 \Rightarrow \frac{0.8n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = -1.645 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Elevando al cuadrado, se tiene $\frac{n(0.8-p)^2}{p\,(1-p)} = (-1.645)^2$ reemplazando $p = 0.9997$ se tiene $n = 0.02$, es decir, el mínimo necesario es uno. **[0.5 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 2

Suponga que el gasto electoral de un parlamentario en millones de pesos es una variable aleatoria Gamma con una media de 100 millones y coeficiente de variación del 50 %. Por otra parte el gasto declarado al servicio electoral será un valor al azar entre no reportar nada y reportar lo realmente gastado. Incondicional al gasto real, ¿cómo distribuye el gasto declarado? y ¿cuál sería el gasto esperado a declarar?

Solución

Definamos como X al gasto real y como Y al gasto declarado.

Del enunciado se deduce que

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad X \sim \text{Gamma}(k,\,\nu) \qquad \text{e} \qquad Y \,|\, X = x \sim \text{Uniforme}(0,\,x) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Tenemos que

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \frac{k}{\nu} = 100 \qquad \text{y} \qquad \frac{\sqrt{k}/\nu}{k/\nu} = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Despejando

$$\textbf{[0.2 Ptos.]} \quad k = 4 \quad \text{y} \quad \nu = 0.04 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y\,|\,X=x}(y)\cdot f_X(x)\,dx = \int_y^{\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{\nu^4}{\Gamma(4)}\,x^{4-1}\,e^{-\nu\,x}dx \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \int_y^{\infty} \frac{\nu^4}{\Gamma(4)}\,x^{3-1}\,e^{-\nu\,x}dx = \frac{\nu}{3}\int_y^{\infty}\frac{\nu^3}{\Gamma(3)}\,x^{3-1}\,e^{-\nu\,x}dx \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{\nu}{3}\sum_{x=0}^{3-1}\frac{(\nu\,y)^x\,e^{-\nu\,y}}{x!} = \frac{\nu}{3}\left[1+\nu\,y+\nu^2\,y^2\right]\,e^{-\nu\,y} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{4}{300}\left[1+0.04\,y+0.0008\,y^2\right]\,e^{-0.04\,y}, \quad y \geq 0 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Mientras que el gasto esperado a declarar es

$$\begin{aligned}
\text{E}(Y) = \text{E}\left[\text{E}\left(Y\,|\,X\right)\right] = E\left(\frac{X}{2}\right) &= \int_0^{+\infty}\frac{x}{2}\cdot\frac{\nu^4}{\Gamma(4)}\,x^{4-1}\,e^{-\nu\,x}\,dx \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{\nu^4}{\Gamma(4)}\,x^{4-1}\,e^{-\nu\,x}\,dx \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\nu} = \frac{2}{\nu} = 50 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

Un proveedor distribuye producto con un nivel de calidad aceptable (NCA o AQL en inglés) de un 5 %. Es decir, a lo más el 5 % de la producción no cumple con los requerimientos. Usted que es asesor/a de la empresa compradora propone el siguiente plan para verificar el cumplimiento de calidad y tomar la decisión respecto a la recepción o rechazo de la producción: En la línea de producción extraer, durante la mañana, 20 productos al azar. Si dos o más de estos no cumplen con los requerimientos rechazar TODA la producción de la mañana. El proveedor dice que es incómodo tener personal extraño en el proceso productivo e indica que el siguiente plan es absolutamente equivalente: Con la producción de la mañana se forman paquetes de 100 y se propone seleccionar uno al azar. Ahora, del paquete seleccionado elegir 20 productos al azar y si dos o más no cumplen la condición rechazar la producción de la mañana.

(a) ¿Tiene razón el proveedor? Justifique plenamente.

(b) Producto de una mala decisión del proveedor al usar un insumo incorrecto, el NCA se ha incrementado a un 10 %, Si se aplica el criterio propuesto por el proveedor, ¿en cuántos días del mes (considere 22 días) será rechazada la producción de la mañana?

Solución

(a) Definamos como X al número de artículos seleccionados que no cumple los requerimientos.

Del enunciado se tiene que

$$X \sim \text{Binomial}(n,\, p) \quad \textbf{[0.4 Ptos.]}$$

donde $p \leq 5\,\%$.

Para el cálculo nos ponemos en el caso limite, es decir $p = 0.05$.

La probabilidad de rechazar esta dada por

$$P(X \geq 2) = P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0.264 \quad \textbf{[0.7 Ptos.]}$$

Ahora, bajo el plan del "proveedor", se tiene que un lote de $N = 100$ tiene a lo más un 5 % de productos que no cumplen la condición, de igual forma nos ponemos en el caso limite del 5 %, es decir hay $m = 5$ productos que no cumplen los requerimientos.

Por lo tanto, ahora

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(N = 100,\, m = 5\, n = 20) \quad \textbf{[0.6 Ptos.]}$$

La probabilidad de rechazo es ahora

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{95}{20}}{\binom{100}{20}} - \frac{\binom{5}{1}\binom{95}{19}}{\binom{100}{20}} \\ &= 1 - 0.319 - 0,420 \\ &= 0.261 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \end{aligned}$$

Como se observa, el proveedor No tiene razón, nuestro plan tiene mayor probabilidad de rechazar. **[0.3 Ptos.]**

(b) Ahora, cambia el AQL a un 10 %, asi que en el caso limite $p = 10\,\%$, es decir el lonte de $N = 100$ tiene $m = 10$ artículos que no cumple los requerimientos. **[0.5 Ptos.]**

Por tanto,

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(N = 100,\, m = 10\, n = 20 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Evaluando la probabilidad de rechazar se tiene

$$P(\text{Rechazar}) = 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{90}{20}}{\binom{100}{20}} - \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{19}}{\binom{100}{20}} = 1 - 0.095 - 0.2679 = 0.637 \quad \textbf{[1.5 Ptos.]}$$

De los 22 días se espera rechazar el 63,7 % es decir, 14 de ellos. **[0.5 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 4

A lo largo de la ruta 5 de nuestro país nacen muchas carreteras concesionadas que acercan a los usuarios de manera mucho más rápido a distintas localidades pagando un peaje. Usualmente estos peajes son estructuras pequeños con una casetas por sentido para pagar. Suponga que los vehículos llegan desde ambas direcciones (hacia el Este o hacia el Oeste) según un procesos de Poisson y en promedio llegan cinco vehículos por minuto desde ambos sentidos de manera independiente. Por otra parte el tiempo que toman los cajeros en cobrar es una variable aleatoria exponencial y en promedio demoran 12 segundos en el proceso de cobro. Si ahora no hay vehículos en el peajes, ¿cuál es la probabilidad que el próximo vehículo que salga del peaje venga con dirección este-oeste?

Solución

Del enunciado tenemos que el número de vehículos que llegan al peaje en t minutos desde el Este y Oeste son variables aleatorias independientes con distribución Poisson$(\nu\, t)$, donde ν igual a 5. **[0.5 Ptos.]**

Si X corresponde al tiempo de espera en minutos que llegue el próximo auto desde el Este y Y el equivalente desde el Oeste, entonces tenemos que ambas son variables aleatorias independientes con distribución Exponencial(ν). **[0.5 Ptos.]**

Por otra parte, si Z y W representan el tiempo de cobranza en minutos de los cajeros, del enunciado se tiene que distribuyen Exponencial(λ) de manera independiente. **[0.5 Ptos.]**

Además se indica que en promedio demoran 12 segundos, lo que es equivalente a 0.2 minutos. **[0.5 Ptos.]**

Luego, se deduce que $\lambda = 5$. **[0.5 Ptos.]**

Por independencia y dado que $\nu = \lambda$, se tiene que

[0.5 Ptos.] $U = X + Z \sim \text{Gamma}(k = 2,\, \nu = 5)$ y $V = Y + W \sim \text{Gamma}(k = 2,\, \nu = 5)$ **[0.5 Ptos.]**

$$
\begin{aligned}
P(U < V) &= \int_0^\infty \int_0^v \nu^2\, u\, e^{-\nu\, u}\, \nu^2\, v\, e^{-\nu\, v}\, du\, dv \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \int_0^\infty \nu^2\, v\, e^{-\nu\, v} \left\{ 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{(\nu\, v)^x\, e^{-\nu\, v}}{x!} \right\} dv \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= 1 - \frac{1}{4} \int_0^\infty (2\,\nu)^2\, v\, e^{-2\,\nu\, v}\, dv - \frac{\Gamma(3)}{8} \int_0^\infty \frac{(2\,\nu)^3}{\Gamma(3)}\, v\, e^{-2\,\nu\, v}\, dv \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{8} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{1}{2} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Formulario

Propiedades función $\Gamma(\cdot)$

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$

$$(1)\quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2)\quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

Igualdades

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \qquad \sum_{k=x}^\infty \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \qquad \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Propiedad distribución Gamma

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\,\nu), \text{ con } k \in \mathbb{N} \longrightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$$

Transformación

Sea $Y = g(X)$ una función cualquiera, con k raíces:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^k f_X\left(g_i^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{d}{dy}\, g_i^{-1}(y)\right|$$
$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^k p_X\left(g_i^{-1}(y)\right)$$

Sea $Z = g(X, Y)$ una función cualquiera:

$$p_Z(z) = \sum_{g(x,y)=z} p_{X,Y}(x, y)$$

Sea $Z = g(X, Y)$ una función invertible para X o Y fijo:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(g^{-1}, y)\, \left|\frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\right| dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x, g^{-1})\, \left|\frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\right| dx \end{aligned}$$

Esperanza y Varianza Condicional

$$\text{E}(Y) = \text{E}[\text{E}(Y \mid X)] \quad \text{y} \quad \text{Var}(Y) = \text{Var}[\text{E}(Y \mid X)] + \text{E}[\text{Var}(Y \mid X)]$$

Teorema del Límite Central

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces

$$Z_n = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow Z \sim \text{Normal}(0, 1),$$

cuando $n \to \infty$, $\text{E}(X_i) = \mu$ y $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\, p$ $\sigma_X^2 = n\, p\, (1-p)$ $M(t) = [p\, e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\, (1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\, e^t/[1-(1-p)\, e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\, (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\, (1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\, e^t/[1-(1-p)\, e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\, t$ $\sigma_X^2 = \nu\, t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\, t + \sigma^2\, t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\, x)}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\, x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\, M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\ \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\, r\, (b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\, n\, \frac{m}{N}\, \left(1 - \frac{m}{N}\right)$