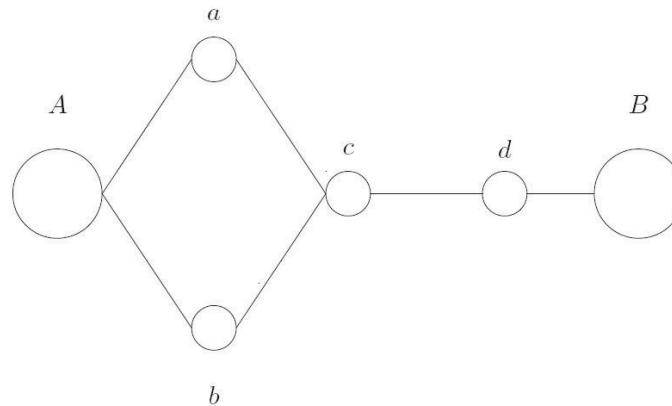


Curso	:	Probabilidad y Estadística
Sigla	:	EYP1113
Interrogación	:	3
Profesor	:	Ricardo Aravena (Sec. 1) y Alejandro Trapp (Sec. 2)
Ayudantes	:	Claudia Reyes Vizcarra y Erwin Agüero Meza

- Se permite el uso de calculadora científica básica.
- No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).
- Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.
- El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.
- En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y su cuadernillo.
- Recuerde poner su N° de lista a su cuadernillos.

Problema 1

La corriente producida en A circula por una red hasta B pasando por nodos intermedios a , b , c y d . Se arranca el sistema y los nodos a , b , c y d están operativos unos tiempos (en segundos) T_a , T_b , T_c y T_d . Estos tiempos son variables aleatorias independientes que siguen una distribución Exponencial con una media de 20 segundos. ¿Cuál es la probabilidad que la corriente circule de A a B al menos 10 segundos en el siguiente circuito?



Problema 2

Basados en un estudio relativo al proceso de extracción de Zinc mediante membranas liquidas emulsionadas (método MLE, ref. Ontiveros, J. et al, 2008. Revista Ciencia e Ingeniería, Vol 29. N°2, pp: 157-164). Se postula que la composición X e Y (donde X : concentración de Zinc e Y : otros minerales) se comporta de acuerdo a la densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = 24xy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x+y \leq 1,$$

- (a) [3.0 Ptos.] Determine la distribución de $Z = \frac{X}{Y}$.
- (b) [3.0 Ptos.] Evalúe $P(Z > 1)$.

Problema 3

Es esperable que en la próxima elección se implemente el sistema de inscripción automática y voto voluntario. Su partido, interesado en determinar el nivel de participación, lleva a cabo un estudio consultando a 200 potenciales votantes. De ellos, 82 afirman que concurrirán si o si a votar, 40 dicen que depende del momento (candidatos, campaña, etc.) y los restantes indican que por ningún motivo concurrirán a votar. El experto electoral del partido afirma que las respuestas responden a un modelo multinomial, con probabilidades asociadas a cada alternativa dadas por $(1 + \alpha)/4$, $(1 - \alpha)/2$ y $(1 + \alpha)/4$, respectivamente. Donde α representa el grado de credibilidad de las instituciones políticas. Obtenga una estimación puntual de α .

Problema 4

Se ha demostrado que el tiempo (en minutos) para desarrollar el examen del curso EYP1113 por parte de los alumnos se comporta según una distribución Gama de parámetros $k = 2$ y $\nu = 0,02$.

- (a) Determine la probabilidad (aproximada) que en promedio los 30 alumnos del EYP1113- TAV demoren más de 2 horas.
- (b) Probabilidad exacta que un alumno demore más de 2 horas.

Problema 5

Un especialista afirmar que un estudiante de la PUC demora más de 60 meses en recuperar la inversión realizada al estudiar. Para contrastar la afirmación se lleva a cabo un estudio con una cohorte de 23 estudiantes de la PUC. Los datos muestran que ellos demoraron, en promedio, 64 meses con una desviación estándar de 12 meses en recuperar la inversión.

- (a) [4.0 Ptos.] ¿Muestran los datos evidencia que permita confirmar la afirmación del especialista? Use $\alpha = 5\%$
- (b) [2.0 Ptos.] ¿Cuál es el menor nivel de significancia para el cual es test rechaza?

Problema 6

En un estudio realizado con 100 estudiantes, muestra que 25 de ellos participarían en campañas solidarias.

- (a) [3.0 Ptos.] Entregue un intervalo de confianza al 90% para la proporción verdadera de estudiantes que participaría en campañas solidarias.
- (b) [3.0 Ptos.] ¿Cuál debe ser el tamaño de muestra mínimo si, con un 95% de confianza, se desea reducir en un 25% el ancho del intervalo obtenido en (a)?

Tiempo: 2 Horas

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \dots, n$	n, p	$\mu_X = n p$ $\sigma_X^2 = n p (1-p)$ $M(t) = [p e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p (1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \dots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p e^t / [1 - (1-p) e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \dots$	r, p	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r(1-p)/p^2$ $M(t) = \{p e^t / [1 - (1-p) e^t]\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\frac{(\nu t)^x e^{-\nu t}}{x!}$	$x = 0, 1, \dots$	ν	$\mu_X = \nu t$ $\sigma_X^2 = \nu t$ $M(t) = \exp\left[\lambda (e^t - 1)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu e^{-\nu x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\frac{\nu^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\nu x}$	$x \geq 0$	k, ν	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	μ, σ	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\zeta x)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	λ, ζ	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2 (e^{\zeta^2} - 1)$ $E(X^r) = e^{r\lambda} M_Z(r\zeta), \text{ con } Z \sim \text{Normal}(0,1)$
Uniforme	$\frac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	a, b	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{tb} - e^{ta}]/[t(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\frac{1}{B(q, r)} \frac{(x-a)^{q-1} (b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	q, r	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r} (b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q r (b-a)^2}{(q+r)^2 (q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\frac{\binom{m}{x} \binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$	N, m, n	$\mu_X = n \frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) n \frac{m}{N} \left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Formulario

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1} e^{-u} du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a \Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot, \cdot)$:

$$(1) \quad B(q, r) = \int_0^1 x^{q-1} (1-x)^{r-1} dx; \quad (2) \quad B(q, r) = \frac{\Gamma(q) \Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu t)^x e^{-\nu t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^x b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

- Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de probabilidad p_X o de densidad f_X , determinada por un parámetro θ . Si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil del parámetro θ , entonces:

- $\mathbf{E}(\hat{\theta}) \rightarrow \theta$, cuando $n \rightarrow \infty$.
- $\mathbf{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{I_n(\theta)}$, con $I_n(\theta) = -\mathbf{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(\theta) \right]$.
- $\hat{\theta} \sim \text{Normal} \left(\theta, \sqrt{\frac{1}{I_n(\theta)}} \right)$, cuando $n \rightarrow \infty$.
- El estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$, cuya varianza está dada por: $\mathbf{Var}[g(\hat{\theta})] = \frac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}$.

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p											Distribución t-student $t_p(\nu)$				
k_p	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	ν	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	1	3,078	6,314	12,706	31,821
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	2	1,886	2,920	4,303	6,965
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	3	1,638	2,353	3,182	4,541
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	4	1,533	2,132	2,776	3,747
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	5	1,476	2,015	2,571	3,365
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	6	1,440	1,943	2,447	3,143
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	7	1,415	1,895	2,365	2,998
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	8	1,397	1,860	2,306	2,896
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	9	1,383	1,833	2,262	2,821
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	10	1,372	1,812	2,228	2,764
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	11	1,363	1,796	2,201	2,718
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	12	1,356	1,782	2,179	2,681
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	13	1,350	1,771	2,160	2,650
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	14	1,345	1,761	2,145	2,624
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	15	1,341	1,753	2,131	2,602
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	16	1,337	1,746	2,120	2,583
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	17	1,333	1,740	2,110	2,567
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	18	1,330	1,734	2,101	2,552
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	19	1,328	1,729	2,093	2,539
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	20	1,325	1,725	2,086	2,528
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	21	1,323	1,721	2,080	2,518
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	22	1,321	1,717	2,074	2,508
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	23	1,319	1,714	2,069	2,500
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	24	1,318	1,711	2,064	2,492
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	25	1,316	1,708	2,060	2,485
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	26	1,315	1,706	2,056	2,479
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	27	1,314	1,703	2,052	2,473
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	28	1,313	1,701	2,048	2,467
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	29	1,311	1,699	2,045	2,462
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	30	1,310	1,697	2,042	2,457
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	∞	1,282	1,645	1,960	2,326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$								
ν	$c_{0,025}$	$c_{0,05}$	$c_{0,10}$	$c_{0,90}$	$c_{0,95}$	$c_{0,975}$	$c_{0,99}$	$c_{0,995}$
1	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93