Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2015

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I3**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

La producción de varillas de acero para la construcción debe cumplir con especificaciones claras. Hay dos aspectos que se pueden "parametrizar". La primera, y más importante, se refiere al largo medio de las varillas de acero y la segunda a su variabilidad. Las especificaciones indican que en promedio el largo no debe diferir de los 6 mts., y que la variabilidad (en términos de desviación estándar) no sea mayor a los 20 cms. Usted, como una forma de definir la recepción o rechazo de una partida de varillas (son más de mil) decide tomar una muestra y verificar si hay o no evidencia estadística que le permita rechazar la partida. Asumiendo que ha sido demostrado que el largo de las varillas se comporta como una distribución Normal, y con base a los resultados obtenidos a partir de una muestra de 24 varillas, las cuales entregan como resultados un largo promedio de 6.1 mts. con una desviación estándar de 26 cms. Si al menos una de las pruebas de hipótesis rechaza la partida el lote es rechazado, ¿Cuál es su decisión? Utilice un nivel de significancia del 5 % en cada prueba.

Solución

Tenemos que el aspecto más importante es con respecto al largo de las varillas, por esta razón comenzamos realizando la siguiente prueba de hipótesis:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu \neq \mu_0 \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

con $\mu_0 = 6$ mts.

Tenemos que si H_0 es correcto, entonces

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t - \text{Student}(n-1) \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Alternativa 1:

Reemplazando tenemos que $T_0 = 1.884223 \to 5\,\% < \text{valor-p} < 10\,\%$, es decir, no existe suficiente evidencia para rechazar que el largo medio de las varillas difiere de los 6 cms. **[1.0 Ptos.]**

Alternativa 2:

Reemplazando tenemos que $T_0 = 1.884223 \to |T_0| < t_{0.975}(23) = 2.069$, es decir, no existe suficiente evidencia para rechazar que el largo medio de las varillas difiere de los 6 cms. **[1.0 Ptos.]**

Por otra parte, tenemos que la prueba de hipótesis con respecto a la variabilidad es la siguiente:

$$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \sigma^2 > \sigma_0^2 \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

con $\sigma_0 = 20$ cms.

Si H_0 es correcto, entonces

$$C_0 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Alternativa 1:

Reemplazando tenemos que $C_0 = 38.87 \to 1\,\% < \text{valor-p} < 2.5\,\%$, es decir, existe suficiente evidencia para rechazar que el largo de las varillas no presenta una variablidad mayor a los 20 cms en términos de su desviación estándar **[1.0 Ptos.]**

Alternativa 2:

Reemplazando tenemos que $C_0 = 38.87 \to C_0 > c_{0.95}(23) = 35.17$, es decir, existe suficiente evidencia para rechazar que el largo de las varillas no presenta una variablidad mayor a los 20 cms en términos de su desviación estándar **[1.0 Ptos.]**

Por lo tanto, la decisión es rechazar el lote. **[1.0 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 2

Con el objetivo de instalar una planta eólica y para que sea rentable se requiere que la velocidad media diaria del viento sea superior a 8 m/s. Para tomar la decisión frente a una futura inversión se realiza la medición de la velocidad media del viento en 16 días tomados al azar del último trimestre. Asumiendo que la velocidad media diaria del viento distribuye Normal con desviación estándar igual a 2 m/s.

(a) **[3.0 Ptos.]** Defina una regla de decisión apropiada tal que α sea igual a 10 %. Exprese la regla en términos de la media. Es decir, especifique claramente el criterio bajo el cual el proyecto sea rentable

(b) **[2.0 Ptos.]** Basado en la regla anterior, determine la probabilidad de cometer un error tipo II si en realidad la velocidad media del viento es 9 m/s.

(c) **[1.0 Ptos.]** Para la regla propuesta en (a) bosqueje la curva de potencia indicando al menos cuatro puntos.

Solución

(a) Queremos hacer una regla de decisión con respecto a la media.

Como se piensa realizar una inversión, entonces queremos probar si la evidencia apoya que esta sea rentable, es decir, debemos realizar la siguiente prueba de hipótesis:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu > \mu_0 \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

con $\mu_0 = 8$ m/s.

Como σ es conocido e igual a 2 m/s, entonces se rechazar H_0 si

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \qquad \frac{\overline{X}_n - 8}{0.5} > k_{0.90} = 1.28 \to \overline{X} > 8.64 \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

y apoyamos la hipótesis que el proyecto es rentable, cometiendo una probabilidad de error tipo I igual a 10 %.

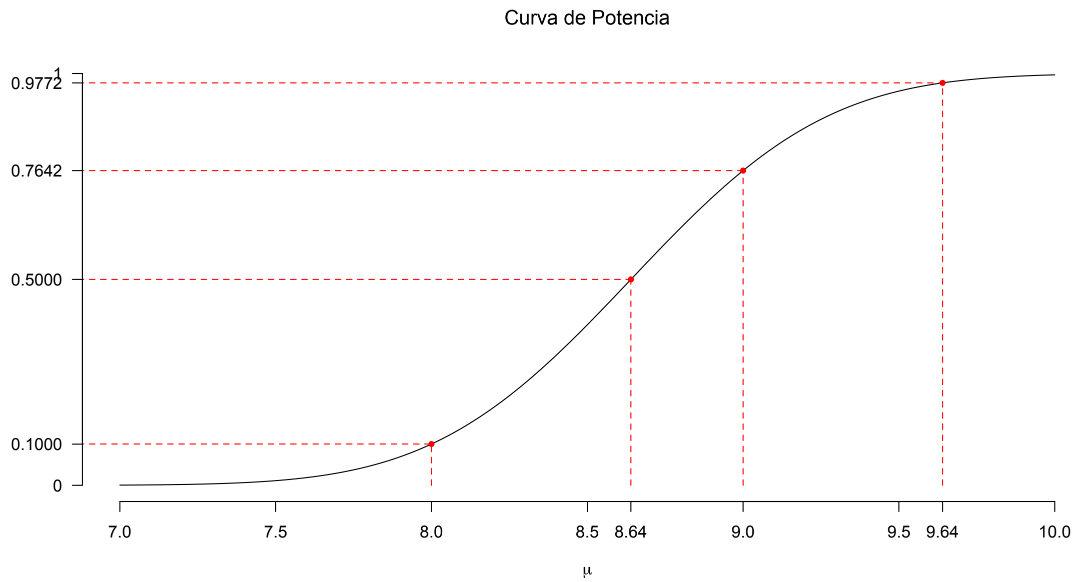
(b) Se pide

$$\begin{aligned}
\beta &= P(\text{No Rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= P(\overline{X}_n \leq 8.64 \,|\, \mu = 9) \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \Phi\left(\frac{8.64 - 9}{0.5}\right) \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \Phi(-0.72) \qquad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - \Phi(0.72) \qquad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 1 - 0.7642 \qquad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 0.2358 \qquad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Nota: Si el alumno calcula la Potencia $= 0.7642$, y luego $\beta = 1-$ Potencia, asignar todo el puntaje.

(c) Se pide evaluar la Potencia$= 1 - \beta$ en cuatro puntos y hacer un bosquejo:

- $\mu = 8.00 \to$ Potencia $= 0.1000$ **[0.1 Ptos.]**
- $\mu = 9.00 \to$ Potencia $= 0.7642$ **[0.1 Ptos.]**
- $\mu = 8.64 \to$ Potencia $= 0.5000$ **[0.2 Ptos.]**
- $\mu = 9.64 \to$ Potencia $= 0.9772$ **[0.2 Ptos.]**



[0.4 Ptos.]

+ 1 Punto Base

Problema 3

Considere una muestra aleatoria $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ proveniente de una población cuyo compartimento se asemeja a una Beta$(q, 1)$ en el intervalo $[0,\ \theta]$ y $q > 1$.

(a) **[3.0 Ptos.]** Defina como $\hat{\theta}$ al estimador de momentos del parámetro θ. Obténgalo y calcule su error cuadrático medio.

(b) **[3.0 Ptos.]** Se propone a $\widetilde{\theta} = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$ como estimador para θ. Calcule su error cuadrático medio y compare con el resultado obtenido en (a).

Solución

(a) Tenemos que si $X \sim \text{Beta}(q, 1)$, entonces

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \qquad \mu_X = \frac{q\,\theta}{q+1} \quad \text{y} \quad \sigma_X^2 = \frac{q\,\theta^2}{(q+1)^2(q+2)} \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Por lo tanto, el estimador de momentos de θ sería:

$$\hat{\theta} = \frac{(q+1)}{q} \cdot \overline{X}_n \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

con

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \qquad \text{E}(\hat{\theta}) = \theta \quad \text{y} \quad \text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{n\,q\,(q+2)} \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

como es un estimador insesgado para θ, entonces

$$\text{ECM}(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{n\,q\,(q+2)} \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(b) Tenemos que

$$f_{\widetilde{\theta}}(u) = n\,[F_X(u)]^{n-1}\,f_X(u) \qquad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

con

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \qquad f_X(x) = \frac{q\,x^{q-1}}{\theta^q} \quad \text{y} \quad F_X(x) = \frac{x^q}{\theta^q} \qquad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

reemplazando

$$f_{\widetilde{\theta}}(u) = \frac{n\,q\,x^{nq-1}}{\theta^{n\,q}}, \quad 0 \leq u \leq \theta \qquad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

es decir,

$$\widetilde{\theta} \sim \text{Beta}(n\,q,\ 1) \qquad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

con

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \qquad \text{E}(\widetilde{\theta}) = \frac{n\,q\,\theta}{n\,q+1} \quad \text{y} \quad \text{Var}(\widetilde{\theta}) = \frac{n\,q\,\theta^2}{(n\,q+1)^2(n\,q+2)} \qquad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

como es un estimador sesgado para θ, entonces

$$\text{ECM}(\widetilde{\theta}) = \left(\frac{n\,q\,\theta}{n\,q+1} - \theta\right)^2 + \frac{n\,q\,\theta^2}{(n\,q+1)^2(n\,q+2)} = \frac{2\,\theta^2}{(n\,q+1)(n\,q+2)} \qquad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Comparado con el resultado obtenido en (a) se tiene que

$$\frac{\text{ECM}(\hat{\theta})}{\text{ECM}(\widetilde{\theta})} = \frac{1}{2\,q\,(q+2)}\left(n\,q^2 + 3\,q + \frac{2}{n}\right) \to \infty \qquad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

cuando $n \to \infty$.

Por lo tanto, el estimador propuesto en (b) es más eficiente. **[0.3 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 4

WhatsApp mas que una aplicación para smartphones, se ha convertido en el medio de comunicación mas usado por la telefonía móvil. Por lo que las imágenes enviadas, el listado de contactos, el historial de conversaciones pueden ser considerados pruebas muy importantes en un juicio; por lo que probar su fiabilidad, es un aspecto muy importante a la hora de realizar un análisis forense de un dispositivo móvil. Supongamos que la probabilidad que el algoritmo recupera exitosamente un mensaje cualquiera es p y que los mensajes recibidos/enviados por dispositivo móvil en una hora es Poisson(λ). Proponga una distribución aproximada para el estimador máximo verosimil de λ en base al número de mensajes recuperados en n dispositivos móviles independientes para un periodo de una hora.

Solución

Definamos como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a los mensajes recuperados en n dispositivos móviles.

Como el número de mensajes enviados/recibidos en una hora se comportan como una variable aleatoria Poisson(λ), entonces $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con distribución Poisson($\lambda\, p$). **[2.0 Ptos.]**

Luego, la función de verosimilitud está dada por

$$L(\lambda) = (\lambda\, p)^{\sum_{i=1}^n X_i}\, e^{-n\,\lambda\, p} \left(\prod_{i=1}^n X_i!\right)^{-1} \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

aplicando logaritmo natural tenemos que

$$\ln L(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \ln(\lambda\, p) - n\,\lambda\, p - \sum_{i=1}^n \ln(X_i!) \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Derivando parcialmente con respecto a λ e igualando a cero obtenemos el estimador de máxima verosimilitud

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \qquad \frac{\partial}{\partial\, \lambda} \ln L(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n X_i - n\, p = 0 \to \hat{\lambda} = \frac{\overline{X}_n}{p} \qquad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Por otra parte, la información de Fisher está dada por

$$I_n(\lambda) = -\mathrm{E}\left(-\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{np}{\lambda} \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Luego

$$\hat{\lambda} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}\left(\lambda,\, \sqrt{\frac{\lambda}{n\, p}}\right) \qquad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Formulario

Propiedades función $\Gamma(\cdot)$

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Propiedades función $B(\cdot,\, \cdot)$

$$(1) \quad B(q,\, r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\, dx; \quad (2) \quad B(q,\, r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

Igualdades

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \qquad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Propiedad distribución Gamma

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu), \text{ con } k \in \mathbb{N} \longrightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$$

Transformación

Sea $Y = g(X)$ una función cualquiera, con k raíces:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X\left(g_i^{-1}(y)\right) \cdot \left| \frac{d}{dy}\, g_i^{-1}(y) \right|$$

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} p_X\left(g_i^{-1}(y)\right)$$

Sea $Z = g(X, Y)$ una función cualquiera:

$$p_Z(z) = \sum_{g(x,y)=z} p_{X,Y}(x, y)$$

Sea $Z = g(X, Y)$ una función invertible para X o Y fijo:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(g^{-1}, y) \left| \frac{\partial}{\partial z} g^{-1} \right| dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, g^{-1}) \left| \frac{\partial}{\partial z} g^{-1} \right| dx \end{aligned}$$

Esperanza y Varianza Condicional

$$\text{E}(Y) = \text{E}[\text{E}(Y \mid X)] \quad \text{y} \quad \text{Var}(Y) = \text{Var}[\text{E}(Y \mid X)] + \text{E}[\text{Var}(Y \mid X)]$$

Teorema del Límite Central

Sean $X_1,\, \ldots,\, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces

$$Z_n = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow Z \sim \text{Normal}(0, 1),$$

cuando $n \to \infty$, $\text{E}(X_i) = \mu$ y $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

Propiedades Esperanza, Varianza y Covarianza

Sean $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n,\, Y_1,\, Y_2,\, \ldots,\, Y_m$ variables aleatorias y $a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n,\, b_0,\, b_1,\, \ldots,\, b_m$ constantes conocidas.

- $\mathrm{E}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathrm{E}(X_i)$.
- $\mathrm{Cov}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i,\, b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \cdot b_j \cdot \mathrm{Cov}\,(X_i, Y_j)$.
- $\mathrm{Var}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$.
- Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, entonces

$$\mathrm{Var}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \mathrm{Var}\,(X_i)$$

Mínimo y Máximo

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias continuas independientes con idéntica distribución (f_X y F_X), entonces para:

$$Y_1 = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \longrightarrow f_{Y_1} = n\,[1 - F_X(y)]^{n-1}\; f_X(y)$$
$$Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\} \longrightarrow f_{Y_n} = n\,[F_X(y)]^{n-1}\; f_X(y)$$

Mientras que la distribución conjunta entre Y_1 e Y_n está dada por:

$$f_{Y_1,Y_n}(u,v) = n\,(n-1)\,[F_X(v) - F_X(u)]^{n-2}\; f_X(v)\, f_X(u), \qquad u \leq v$$

Aproximación de Momentos

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias con valores esperados $\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_n}$ y varianzas $\sigma^2_{X_1}, \ldots, \sigma^2_{X_n}$ e Y una función de ellas. La aproximación de primer orden está dada por

$$Y \approx g(\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_n}) + \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_{X_i})\, \frac{\partial}{\partial X_i} g(\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_n})$$

Estimador Máximo Verosímil

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de probabilidad p_X o de densidad f_X, determinada por un parámetro θ. Si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil del parámetro θ, entonces:

- $\mathrm{E}(\hat{\theta}) \to \theta$, cuando $n \to \infty$.
- $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{I_n(\theta)}$, con $I_n(\theta) = -\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}\,\ln L(\theta)\right]$.
- $\hat{\theta} \,\dot{\sim}\, \text{Normal}\left(\theta,\, \sqrt{\dfrac{1}{I_n(\theta)}}\right)$, cuando $n \to \infty$.
- El estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$, cuya varianza está dada por: $\mathrm{Var}[g(\hat{\theta})] = \dfrac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}$.

Error Cuadrático Medio

El error cuadrático medio de un estimador $\hat{\theta}$ de θ se define como:

$$\mathrm{ECM}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}\left\{\left[\hat{\theta} - \mathrm{E}(\hat{\theta})\right]^2\right\} = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + \text{Sesgo}^2$$

Distribuciones Muestrales

Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Normal(μ, σ), entonces

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,1), \quad \frac{\overline{X}_n - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim \text{t-student}(n-1), \quad \frac{s^2\,(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

con $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\ \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
∞	1.282	1.645	1.960	2.326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$

ν	$c_{0.025}$	$c_{0.05}$	$c_{0.10}$	$c_{0.90}$	$c_{0.95}$	$c_{0.975}$	$c_{0.99}$	$c_{0.995}$
1	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93