Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2009

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**1**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena (Sec 01) y Ricardo Olea (Sec 02)**
Ayudante	**:**	**José Quinlan y Constanza Quezada.**

Problema 1

Un vehículo al llegar a un cruce con una avenida se detiene. El conductor decide continuar su trayecto siempre y cuando una ventana de tiempo de 15 segundos sin tránsito se presente en la avenida. Si el trafico en la avenida es en un solo sentido y se comporta según un proceso de Poisson con una tasa promedio de 10 autos por minuto.

(a) Determine la probabilidad, p, que una ventana de tiempo sin tránsito sea mayor a 15 segundos.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el conductor decida cruzar la avenida después que pasa un tercer auto desde que se detuvo?

(c) Determinar el número esperado de ventanas de tiempo que deben ocurrir para decidir cruzar.

Solución

(a) Sea X_t: n° de autos que transita por la avenida durante t segundos. Del enunciado se tiene que

$$X_t \sim \text{Poisson}(\lambda\, t), \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

con $E(X_t) = \lambda\, t$. Para un minuto (60 segundo) la tasa promedio (esperada) es de 10 automóviles, es decir,

$$\lambda\, 60 = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6} \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Por otra parte, en un proceso de Poisson los tiempos entre eventos (automóviles) son variables aleatorias independientes con distribución Exponencial(λ). **[0.5 ptos.]**

Sea T el tiempo entre dos automóviles cualquiera. La probabilidad p que una ventana de tiempo sin tránsito sea mayor a 15 segundos corresponde a:

$$p = P(T > 15) = e^{-\lambda\, 15} = e^{-2{,}5} \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

(b) Si T_i corresponde al tiempo transcurrido entre eventos (automóviles), entonces la secuencia de variables aleatorias:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si } T_i > 15 \\ 0, & \text{si } T_i \leq 15 \end{cases}$$

es una secuencia de variables aleatorias independientes Bernoulli($p = e^{-2{,}5}$). **[0.5 ptos.]**

Si Y: # de ventanas de tiempo (experimentos bernoulli) necesarias para decidir cruzar la avenida, se tiene que

$$Y \sim \text{Geometrica}(p) \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Luego, la probabilidad de que el conductor decida cruzar la avenida después que pasa un tercer auto desde que se detuvo, corresponde a

$$P(Y = 4) = p\,(1-p)^3 = e^{-2{,}5} \cdot (1 - e^{-2{,}5})^3 \quad \textbf{[1.0 ptos.]}$$

(c) El número esperado de ventanas de tiempo que deben ocurrir para decidir cruzar corresponde al valor esperado de Y (period de retorno)

$$E(Y) = \frac{1}{p} = e^{2,5} \quad \textbf{[2.0 ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Una ciudad se abastece de dos fuentes de agua, A y B. Durante la temporada de verano, la probabilidad de que el suministro de la fuente A sea inferior a lo normal es de 0.30, mientras que la probabilidad correspondiente a la fuente B es de 0.15. Sin embargo, si la fuente A es inferior a la normal, la probabilidad de que la fuente B también lo sea sea durante la temporada de verano es 0.30.
La probabilidad de escasez de agua en la ciudad, obviamente dependerá de los suministros de las dos fuente. En particular, si solo la fuente A presenta un suministro por debajo de lo normal, la probabilidad de escasez de agua es de 0.20, mientras si solo la fuente B presenta un suministro inferior a la normal la probabilidad correspondiente de la escasez es de 0.25, obviamente, si ninguna de las fuentes están por debajo de lo normal, no habría ninguna posibilidad de escasez, mientras que si ambas fuentes son inferiores a lo normal durante el verano, la probabilidad de escasez de agua en la ciudad sería 0.80.
Durante una temporada de verano, determine:

(a) La probabilidad que una o dos fuentes presenten un suministro inferior al normal.

(b) La probabilidad de que sólo una de las dos fuentes de suministro esté por debajo de lo normal.

(c) La probabilidad de escasez de agua en la ciudad durante la temporada de verano.

(d) Si hay escasez de agua en la ciudad, ¿cuál es la probabilidad que sea causada por un suministro bajo lo normal de ambas fuentes?

(e) Si no hay escasez de agua en la ciudad durante el verano, ¿cuál es la probabilidad que haya suministro normal en la fuente A?

Solución

Sean los siguientes eventos:

A: Suministro fuente A bajo lo normal durante el verano.

B: Suministro fuente B bajo lo normal durante el verano.

E: Escasez de agua durante la temporada de verano en la ciudad.

Del enunciado se deducen las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned}
P(A) &= 0{,}30 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0{,}70 \\
P(B) &= 0{,}15 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0{,}85 \\
P(B \,|\, A) &= 0{,}30 \Rightarrow P(\overline{B} \,|\, A) = 0{,}70 \\
P(E \,|\, A \cap \overline{B}) &= 0{,}20 \Rightarrow P(\overline{E} \,|\, A \cap \overline{B}) = 0{,}80 \quad \textbf{[1.0 ptos.]} \\
P(E \,|\, \overline{A} \cap B) &= 0{,}25 \Rightarrow P(\overline{E} \,|\, \overline{A} \cap B) = 0{,}75 \\
P(E \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) &= 0{,}00 \Rightarrow P(\overline{E} \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) = 1{,}00 \\
P(E \,|\, A \cap B) &= 0{,}80 \Rightarrow P(\overline{E} \,|\, A \cap B) = 0{,}20
\end{aligned}$$

(a) La probabilidad que una o dos fuentes presenten un suministro inferior al normal es la siguiente:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad \text{por ley aditiva} \quad \textbf{[0.4 ptos.]} \\
&= P(A) + P(B) - P(B \,|\, A)\, P(A), \quad \text{por ley multiplicativa} \quad \textbf{[0.4 ptos.]} \\
&= 0{,}30 + 0{,}15 - 0{,}30 \cdot 0{,}30 \\
&= 0{,}45 - 0{,}09 \\
&= 0{,}36 \quad \textbf{[0.2 ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) La probabilidad de que sólo una de las dos fuentes de suministro esté por debajo de lo normal es la siguiente:

$$\begin{aligned}
P([\overline{A} \cap B] \cup [A \cap \overline{B}]) &= P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B}), \quad \text{por ser eventos disjuntos} \quad \textbf{[0.2 ptos.]} \\
&= P(\overline{A \cup \overline{B}}) + P(A \cap \overline{B}), \quad \text{por ley de morgan} \quad \textbf{[0.2 ptos.]} \\
&= 1 - P(A \cup \overline{B}) + P(A \cap \overline{B}), \quad \text{por ley del complemento} \quad \textbf{[0.1 ptos.]} \\
&= 1 - P(A) - P(\overline{B}) + P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap \overline{B}), \quad \text{por ley aditiva} \quad \textbf{[0.1 ptos.]} \\
&= 1 - P(A) - P(\overline{B}) + 2 \cdot P(A \cap \overline{B}) \\
&= 1 - P(A) - P(\overline{B}) + 2 \cdot P(\overline{B} \,|\, A)\, P(A), \quad \text{por ley multiplicativa} \quad \textbf{[0.2 ptos.]} \\
&= 1 - 0{,}30 - 0{,}85 + 2 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}30 \\
&= -0{,}15 + 0{,}42 \\
&= 0{,}27 \quad \textbf{[0.2 ptos.]}
\end{aligned}$$

(c) La probabilidad de escasez de agua en la ciudad durante la temporada de verano es la siguiente:

$$\begin{aligned}
P(E) = {} & P(E \,|\, A \cap B)\, P(A \cap B) + P(E \,|\, \overline{A} \cap B)\, P(\overline{A} \cap B) + \\
& P(E \,|\, A \cap \overline{B})\, P(A \cap \overline{B}) + P(E \,|\, \overline{A} \cap \overline{B})\, P(\overline{A} \cap \overline{B}), \quad \text{por teorema de probabilidades totales} \quad \textbf{[0.4 ptos.]} \\
= {} & P(E \,|\, A \cap B)\, P(A \cap B) + P(E \,|\, \overline{A} \cap B)\, P(\overline{A} \cap B) + P(E \,|\, A \cap \overline{B})\, P(A \cap \overline{B}) \\
= {} & P(E \,|\, A \cap B)\, P(B \,|\, A)\, P(A) + P(E \,|\, \overline{A} \cap B)\, P(\overline{A \cup \overline{B}}) + P(E \,|\, A \cap \overline{B})\, P(\overline{B} \,|\, A)\, P(A) \\
= {} & P(E \,|\, A \cap B)\, P(B \,|\, A)\, P(A) + P(E \,|\, \overline{A} \cap B)\, \left[1 - P(A \cup \overline{B})\right] + P(E \,|\, A \cap \overline{B})\, P(\overline{B} \,|\, A)\, P(A) \\
= {} & P(E \,|\, A \cap B)\, P(B \,|\, A)\, P(A) + P(E \,|\, \overline{A} \cap B)\, \left[1 - P(A) - P(\overline{B}) + P(A \cap \overline{B})\right] + P(E \,|\, A \cap \overline{B})\, P(\overline{B} \,|\, A)\, P(A) \\
= {} & P(E \,|\, A \cap B)\, P(B \,|\, A)\, P(A) + P(E \,|\, \overline{A} \cap B)\, \left[1 - P(A) - P(\overline{B}) + P(\overline{B} \,|\, A)\, P(A)\right] + P(E \,|\, A \cap \overline{B})\, P(\overline{B} \,|\, A)\, P(A) \quad \textbf{[0.3 ptos.]} \\
= {} & 0{,}80 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}30 + 0{,}25 \cdot (1 - 0{,}30 - 0{,}85 + 0{,}70 \cdot 0{,}30) + 0{,}20 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}30 \\
= {} & \frac{72}{1000} + \frac{25}{100} \cdot \left(\frac{6}{100}\right) + \frac{42}{1000} \\
= {} & \frac{72}{1000} + \frac{15}{1000} + \frac{42}{1000} \\
= {} & \frac{129}{1000} \\
= {} & 0{,}129 \quad \textbf{[0.4 ptos.]}
\end{aligned}$$

(d) Si hay escasez de agua en la ciudad, la probabilidad que sea causada por un suministro bajo lo normal de ambas fuentes es:

$$\begin{aligned}
P(A \cap B \,|\, E) &= \frac{P(A \cap B \cap E)}{P(E)} \quad \textbf{[0.2 ptos.]} \\
&= \frac{P(E \,|\, A \cap B)\, P(B \,|\, A)\, P(A)}{P(E)} \quad \textbf{[0.6 ptos.]} \\
&= \frac{0{,}80 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}30}{0{,}129} \\
&= \frac{0{,}072}{0{,}129} \quad \textbf{[0.2 ptos.]}
\end{aligned}$$

(e) Si no hay escasez de agua en la ciudad durante el verano, la probabilidad que haya suministro normal en la fuente A es:

$$P(\overline{A} \,|\, \overline{E}) = 1 - P(A \,|\, \overline{E}), \quad \textbf{[0.2 ptos.]}$$

donde

$$\begin{aligned}
P(A \,|\, \overline{E}) &= \frac{P(A \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} \quad \textbf{[0.2 ptos.]} \\
&= \frac{P(A \cap \overline{E} \cap B) + P(A \cap \overline{E} \cap \overline{B})}{P(\overline{E})}, \quad \text{por probabilidades totales} \quad \textbf{[0.2 ptos.]} \\
&= \frac{P(\overline{E} \,|\, A \cap B)\, P(A \cap B) + P(\overline{E} \,|\, A \cap \overline{B})\, P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{E})} \\
&= \frac{P(\overline{E} \,|\, A \cap B)\, P(B \,|\, A)\, P(A) + P(\overline{E} \,|\, A \cap \overline{B})\, P(\overline{B} \,|\, A)\, P(A)}{P(\overline{E})} \quad \textbf{[0.2 ptos.]} \\
&= \frac{0{,}20 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}30 + 0{,}80 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}30}{1 - 0{,}129} \\
&= \frac{0{,}018 + 0{,}168}{0{,}871} \\
&= \frac{186}{871}
\end{aligned}$$

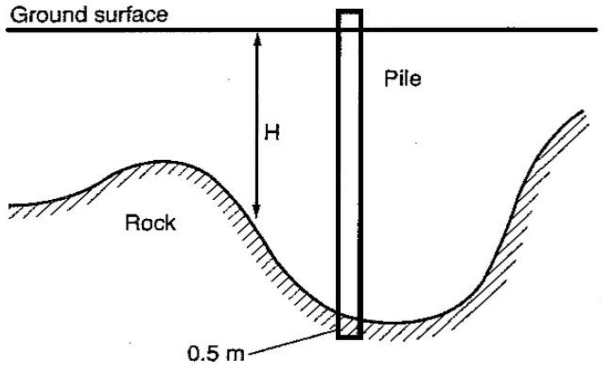
luego

$$P(\overline{A} \,|\, \overline{E}) = 1 - \frac{186}{871} = \frac{685}{871} \quad \textbf{[0.2 ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

Debido a irregularidades espaciales, la profundidad H de perforación desde la superficie hasta la roca base puede ser modelada por medio de una distribución log-normal con profundidad media de 20 metros y coeficiente de variación del 30 %. En el orden de proveer un soporte adecuado, una "pila" de acero debe ser "anclada" 0.5 metros en la roca.



(a) ¿Cuál es la probabilidad que una pila de 25 metros de largo no se ancle satisfactoriamente en la roca?

(b) Si una pila de 25 metros ha sido introducida 24 metros y aun no encuentra roca, ¿cuál es la probabilidad que sea necesario soldar dos metros adicionales a esta pila para ser anclada satisfactoriamente en la roca?

Solución

Tenemos que $H \sim$log-Normal$(\lambda,\, \xi^2)$, $\mu_H = 20$ y $\delta_H = 0{,}3$. Los parámetros λ y ξ se obtienen como sigue:

- Si $\delta_H \leq 0{,}3$, entonces $\xi \approx \delta_H = 0{,}3$. **[1.0 ptos.]**
- $\lambda = \ln(\mu_H) - \frac{1}{2}\,\xi^2 = \ln 20 - \frac{9}{200} = 2\,\ln 2 + \ln 5 - \frac{9}{200} \approx 2 \cdot 0{,}7 + 1{,}6 - \frac{9}{200} = 2{,}955$ **[1.0 ptos.]**

Notemos que $\ln H \sim$Normal$(\lambda,\, \xi^2)$.

(a) La probabilidad que una pila de 25 metros de largo no se ancle satisfactoriamente en la roca es:

$$\begin{aligned} P(H > 24{,}5) &= 1 - P(H \leq 24{,}5) \quad \textbf{[0.4 ptos.]} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln 24{,}5 - \lambda}{\xi}\right) \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \end{aligned}$$

donde

$$\ln 24{,}5 = \ln 245 - \ln 10 = \ln(7^2 \cdot 5) - \ln(2 \cdot 5) = 2\,\ln 7 - \ln 2 \approx 2 \cdot 1{,}9 - 0{,}7 = 3{,}1 \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(H > 24{,}5) &= 1 - \Phi\left(\frac{3{,}100 - 2{,}955}{0{,}300}\right) \quad \textbf{[0.2 ptos.]} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{0{,}145}{0{,}300}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(0{,}48\overline{3}\right) \\ &\approx 1 - 0{,}6844 \\ &= 0{,}3156 \quad \textbf{[0.4 ptos.]} \end{aligned}$$

(b) Si una pila de 25 metros ha sido introducida 24 metros y aun no encuentra roca, la probabilidad que sea necesario soldar dos metros adicionales a esta pila para ser anclada satisfactoriamente en la roca es:

$$
\begin{aligned}
P(24{,}5 < H < 26{,}5 \,|\, H > 24) &= \frac{P([24{,}5 < H < 26{,}5] \cap [H > 24])}{P(H > 24)} \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\
&= \frac{P(24{,}5 < H < 26{,}5)}{1 - P(H \leq 24)} \\
&= \frac{\Phi\left(\frac{\ln 26{,}5 - \lambda}{\xi}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 24{,}5 - \lambda}{\xi}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln 24 - \lambda}{\xi}\right)} \quad \textbf{[0.5 ptos.]}
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
&\ln 24{,}5 \approx 3{,}1 \\
&\ln 24{,}0 = \ln 3 + 3\,\ln 2 \approx 3{,}2 \quad \textbf{[0.2 ptos.]} \\
&\ln 26{,}5 = \ln 5 + \ln 53 - \ln 10 \approx \ln 5 + \ln 52{,}5 - \ln 10 = \ln 5 + \ln 525 - 2\,\ln 10 \\
&\qquad\quad = \ln 5 + 2\,\ln 5 + \ln 3 + \ln 7 - 2\,\ln 5 - 2\,\ln 2 \approx 3{,}2 \quad \textbf{[0.3 ptos.]}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
P(24{,}5 < H < 26{,}5 \,|\, H > 24) &= \frac{\Phi\left(\frac{3{,}200 - 2{,}955}{0{,}300}\right) - \Phi\left(\frac{3{,}100 - 2{,}955}{0{,}300}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{3{,}200 - 2{,}955}{0{,}300}\right)} \\
&= \frac{\Phi\,(0{,}82) - \Phi\,(0{,}48)}{1 - \Phi\,(0{,}82)} \\
&= \frac{0{,}7910 - 0{,}6844}{1 - 0{,}7910} = \frac{0{,}1066}{0{,}209} = 0{,}51 \quad \textbf{[0.5 ptos.]}
\end{aligned}
$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

Los retrasos de vuelos en el aeropuerto es un fenómeno común para los pasajeros. La posibilidad de retraso depende de las condiciones climáticas y de la hora del día. La siguiente información esta disponible para nuestro aeropuerto:

- En la mañana (AM), no hay retrasos si el buen tiempo prevalece; sin embargo, si hay mal tiempo la mitad de los vuelos se retrasa.
- Para el resto del día (PM), las probabilidades de retraso durante el buen tiempo es 0.3 y con mal tiempo es 0.9.
- El 30 % de los vuelos se realizan durante la mañana (AM), mientras que los restantes se realizan durante la tarde (PM).
- Tener mal tiempo es más probable en la mañana; de hecho, el 20 % de las mañanas están asociadas con mal tiempo; mientras que sólo el 10 % de las horas PM han presentado mal tiempo.
- Suponga que sólo existen dos posibles estados del tiempo: bueno y malo.

(a) ¿Qué fracción de los vuelos de este aeropuerto son retrasados?

(b) Si un vuelo es retrasado, ¿cuál es la probabilidad que sea a causa del mal tiempo?

(c) ¿Qué fracción de vuelos matinales en este aeropuerto son retrasados?

Solución

Sean los siguientes eventos:

R: Vuelo retrasado.

A_1: = Horario AM.

A_2: = Horario PM.

B_1: = Buen Tiempo.

B_2: = Mal Tiempo.

Del enunciado se tiene que:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0{,}3 \\ P(A_2) &= 0{,}7 \\ P(B_2 \mid A_1) &= 0{,}2 \Rightarrow P(B_1 \mid A_1) = 0{,}8 \\ P(B_2 \mid A_2) &= 0{,}1 \Rightarrow P(B_1 \mid A_2) = 0{,}9 \qquad \textbf{[0.5 ptos.]} \end{aligned}$$

Además con esta información se deduce que

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B_1) &= P(B_1 \mid A_1)\, P(A_1) = 0{,}24 \\ P(A_1 \cap B_2) &= P(B_2 \mid A_1)\, P(A_1) = 0{,}06 \\ P(A_2 \cap B_1) &= P(B_1 \mid A_2)\, P(A_2) = 0{,}63 \\ P(A_2 \cap B_2) &= P(B_2 \mid A_2)\, P(A_2) = 0{,}07 \qquad \textbf{[0.5 ptos.]} \end{aligned}$$

Por último nos dan las probabilidades de retrasar un vuelo según horario y tiempo:

$$\begin{aligned} P(R \mid A_1 \cap B_1) &= 0{,}0 \\ P(R \mid A_1 \cap B_2) &= 0{,}5 \\ P(R \mid A_2 \cap B_1) &= 0{,}3 \\ P(R \mid A_2 \cap B_2) &= 0{,}9 \qquad \textbf{[0.5 ptos.]} \end{aligned}$$

(a) La fracción de vuelos retrasados la obtenemos a partir de la probabilidad de ocurrencia del evento R dada por:

$$\begin{aligned}
P(R) &= P(R \,|\, A_1 \cap B_1)\, P(A_1 \cap B_1) + P(R \,|\, A_1 \cap B_2)\, P(A_1 \cap B_2) + \\
&\quad P(R \,|\, A_2 \cap B_1)\, P(A_2 \cap B_1) + P(R \,|\, A_2 \cap B_2)\, P(A_2 \cap B_2) \quad \textbf{[1.0 ptos.]} \\
&= 0{,}0 \cdot 0{,}24 + 0{,}5 \cdot 0{,}06 + 0{,}3 \cdot 0{,}63 + 0{,}9 \cdot 0{,}07 \\
&= 0{,}282 \quad \textbf{[0.5 ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Si un vuelo es retrasado, la probabilidad que sea a causa del mal tiempo es:

$$\begin{aligned}
P(B_2 \,|\, R) &= \frac{P(R \cap B_2)}{P(R)}, \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\
&= \frac{P(R \cap B_2 \cap A_1) + P(R \cap B_2 \cap A_2)}{P(R)}, \quad \text{por probabilidades totales} \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\
&= \frac{P(R \,|\, B_2 \cap A_1)\, P(B_2 \cap A_1) + P(R \,|\, B_2 \cap A_2)\, P(B_2 \cap A_2)}{P(R)} \\
&= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}06 + 0{,}9 \cdot 0{,}07}{0{,}282} \\
&= \frac{0{,}093}{0{,}282} \\
&= 0{,}33 \quad \textbf{[0.5 ptos.]}
\end{aligned}$$

(c) La fracción de vuelos matinales en este aeropuerto son retrasados es

$$\begin{aligned}
P(R \,|\, A_1) &= \frac{P(R \cap A_1)}{P(A_1)} \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\
&= \frac{P(R \cap A_1 \cap B_1) + P(R \cap A_1 \cap B_2)}{P(A1)}, \quad \text{por probabilidades totales} \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\
&= \frac{P(R \,|\, A_1 \cap B_1)\, P(A_1 \cap B_1) + P(R \,|\, A_1 \cap B_2)\, P(A_1 \cap B_2)}{P(A1)} \\
&= \frac{0{,}0 \cdot 0{,}24 + 0{,}5 \cdot 0{,}06}{0{,}3} \\
&= 0{,}10 \quad \textbf{[0.5 ptos.]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la fracción es del 10 %.

+ 1 Punto Base