Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2015

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Pauta Examen

Problema 1

Sean X e Y dos variables aleatorias distribuidas conjuntamente de manera uniforme en la región comprendida entre $y = x^2$, $y = x$, $0 < x$ e $y < 1$.

(a) **[2.0 Ptos.]** Determine la funciones de densidad marginal de X e Y.

(b) **[2.0 Ptos.]** Determine la distribución condicional de X dado $Y = 1/2$.

(c) **[2.0 Ptos.]** Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

Solución

(a) Como la función de densidad conjunta es uniforme, supongamos igual a una constantes k, entonces

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x k\,dy\,dx = k \cdot \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{k}{2} - \frac{k}{3} = \frac{k}{6} = 1 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

por lo tanto,

$$f_{X,Y}(x, y) = 6, \quad (x, y) \in \text{ Región} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Las funciones de densidad marginal, las obtenemos aplicando el teorema de probabilidades totales

$$f(x) = \int_{x^2}^x 6\,dy = 6\,(x - x^2), \quad 0 < x < 1 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

y

$$f(y) = \int_y^{\sqrt{y}} 6\,dx = 6\,(\sqrt{y} - y), \quad 0 < y < 1 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(b) Por definición la densidad condicional de X dado que $Y = y$, está dada por

$$f_{X\,|\,Y=y}(x) = \frac{6}{6(\sqrt{y} - y)} = \frac{1}{\sqrt{y} - y}, \quad 0 < y < x < \sqrt{y} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

para $Y = 1/2$, se tiene que

$$f_{X\,|\,Y=1/2}(x) = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}, \quad 1/2 < x < \sqrt{1/2} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

(c) Como $\text{Cov}(X, Y) = \text{E}(X, Y) - \text{E}(X) \cdot \text{E}(Y)$, se requiere obtener las esperanzas respectivas.

$$\text{E}(X) = 6 \int_0^1 x \cdot (x - x^2)\,dx = 6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

$$\text{E}(Y) = 6 \int_0^1 y \cdot (\sqrt{y} - y)\,dy = 6 \left[\frac{y^{5/2}}{5/2} - \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

$$\text{E}(X\,Y) = 6 \int_0^1 \in_{x^2}^x \, x\,y\,dy\,dx = 6 \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Por lo tanto

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{5} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Se ha llevado a cabo una encuesta respecto a la carga semanal de la tarjeta Bip! por parte de alumnos/as de la U.C. De los 120 alumnos/as entrevistados sólo 45 reconocen haber cargado su tarjeta Bip! en la semana previa, obteniéndose un monto promedio de $4.500 con una desviación estándar de $1.200.

(a) **[1.5 Ptos.]** Obtenga un intervalo de confianza al 96 % para la proporción de alumnos/as de la U.C. que han usado la tarjeta Bip! recientemente (y por tanto la han cargado).

(b) **[1.5 Ptos.]** Obtenga un intervalo de confianza al 90 % para el monto promedio de carga de la tarjeta Bip! por parte de los alumnos/as de la U.C.

(c) **[3.0 Ptos.]** Después de analizar los resultados obtenidos en la encuesta, se plantea el diseño de un nuevo estudio que busca, entre muchos otros objetivos, profundizar respecto a: (i) Proporción de alumnos/as de la U.C. que utilizan la tarjeta Bip! con un error no mayor al 8 % y con un 95 % de confianza; y (ii) Carga media semanal con un error no mayor a $500 con un 95 % de confianza. ¿Cuál es el tamaño muestral que recomienda para el desarrollo del estudio? (Indique sus supuestos y los respectivos fundamentos).

Solución

(a) Se tiene

$$\hat{p} = \frac{45}{120} = 0.375, \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

y de tabla de percentiles

$$k_{1-\alpha/2} = 2.05 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

por tanto el I. de C. para la proporción de usuarios de la tarjeta Bip! está dado por:

$$0.375 \pm 2,05\sqrt{\frac{0.375 \times 0.625}{120}} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$
$$0.375 \pm 0.0906 \quad \rightarrow \quad < p >_{0.96} \in (0.2884 \quad - \quad 0.4656) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(b) Como $n = 45$ indican la carga realizada y $k_{1-\alpha/2} = 1.645$, con $\alpha = 10\,\%$, **[0.5 Ptos.]**

Luego, se tiene que el I. de C. para la carga media está dado por:

$$4500 \pm 1.645\frac{1200}{\sqrt{45}} \quad \rightarrow \quad < \mu >_{0.90} \in (4205,7 \quad - \quad 4794,3) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

(c) Primeramente, el tamaño de muestra necesario para estimar la proporción de usuarios con un error del 0.08 y un 95 % de confianza ($k_{1-\alpha/2} = 1.96$), usando el valor previo de $p = 0.375$ para el cálculo de la varianza **[0.3 Ptos.]**, se obtiene de

$$n \geq \left(\frac{1,96\sqrt{0.375 \times 0.625}}{0.08}\right)^2 = 140.68 \quad \textbf{[0.8 Ptos.]}$$

es decir, como mínimo se requiere 141 casos. **[0.2 Ptos.]**

Ahora, el tamaño de muestra necesario para estimar la carga media semanal con un error de $500 y un 95 % de cofnianza ($k = 1.96$), usando el valor previo de $\sigma = 1200$ **[0.3 Ptos.]**, está dado por:

$$n \geq \left(\frac{1.96 \times 1200}{500}\right)^2 = 22.12 \quad \textbf{[0.8 Ptos.]}$$

es decir, como mínimo 23 casos. **[0.2 Ptos.]**

hora como para la proporcion se requieren 141 y se estima un 37.5 % de usuarios, lo que implica que se tendrían 53 usuarios, suficientes para estimar la media con una precision mayor a la requerida.

Así, el tamaño muestra recomendado es de 141 casos. **[0.4 Ptos.]**

Alternativa: *Distribuir según los siguientes resultados*

Usar $p = 0.5$, bajo el criterio de varianza máxima. En ese caso como mínimo se requiere 151 casos.

Con 151 casos se esperarían 75 (ó 76) usuarios, suficientes para estimar la media con una precision mayor a la requerida.

Así, el tamaño muestra recomendado es de 151 casos.

+ 1 Punto Base

Problema 3

La demanda eléctrica de una ciudad es una variable aleatoria que interesa de sobremanera poder predecir. Un estudio entregó información mensual del consumo eléctrico en MMWh (Millones de Watt horas) para una ciudad del sur del país para el periodo 2006 - 2013, cuyos resultados son los siguientes:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1048.9 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 11585.24$$

Intervalo	< 9	$[9 - 10)$	$[10 - 11)$	$[11 - 12)$	$[12 - 13)$	≥ 13
Frecuencia	6	15	26	33	14	2

(a) **[2.5 Ptos.]** ¿Los datos se ajusta a un modelo Normal? Use $\alpha = 5\,\%$.

(b) **[2.5 Ptos.]** ¿Los datos se ajusta a un modelo Log-Normal? Use $\alpha = 1\,\%$.

(c) **[1.0 Ptos.]** Entre los dos modelos, ¿cuál propondría?

Solución

(a) Definamos las siguientes

$$\text{H}_0 : X \sim \text{Normal} \quad \text{vs} \quad \text{H}_a : X \not\sim \text{Normal}$$

Para el calculo de las probabilidades teóricas se necesita estimar los parámetros μ y σ.

A partir del método de momentos se tiene que

$$\hat{\mu} = \overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1048.9}{96} = 10.92604 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

y

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{x^2}_n - \overline{x}_n^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \sqrt{\frac{11585.24}{96} - \left(\frac{1048.9}{96}\right)^2} = 1.1407 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Luego

```
Intervalo O      p        E  (O-E)^2/E
-------------------------------------
  <9      6 0.0457  4.3872 0.59288928
 9-10    15 0.1628 15.6288 0.02529877
10-11    26 0.3174 30.4704 0.65586524
11-12    33 0.3009 28.8864 0.58580179
12-13    14 0.1387 13.3152 0.03521923
 >13      2 0.0345  3.3120 0.51972947
-------------------------------------
Total    96 1.0000 96.0000 2.41480378
```

[1.0 Ptos.]

Como $X^2 = 2.41 \sim \chi^2(6 - 1 - 2)$, entonces

$$10\,\% < \text{valor-p} < 90\,\%$$

Es decir, no existe suficiente evidencia al $5\,\%$ de significancia para rechazar la hipótesis nula que los datos se comportan según una distribución Normal. **[0.5 Ptos.]**

(b) Definamos las siguientes

$$\text{H}_0 : X \sim \text{Log-Normal} \quad \text{vs} \quad \text{H}_a : X \not\sim \text{Log-Normal}$$

Para el calculo de las probabilidades teóricas se necesita estimar los parámetros λ y ζ.

A partir del método de momentos se tiene que

$$\hat{\zeta} = \sqrt{\ln(\overline{x^2}_n) - 2\,\ln(\overline{x}_n)} = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - 2\,\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} = \sqrt{\ln\left(\frac{11585.24}{96}\right) - 2\,\ln\left(\frac{1048.9}{96}\right)} = 0.1041191$$

[0.5 Ptos.]

y

$$\hat{\lambda} = \ln(\overline{x}_n) - \frac{\zeta^2}{2} = \ln\left(\frac{1048.9}{96}\right) - \frac{0.1041191}{2} = 2.385729 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Luego

```
Intervalo O      p       E   (O-E)^2/E
-------------------------------------
  <9       6 0.0351  3.3696  2.0533607
 9-10     15 0.1772 17.0112  0.2377801
10-11     26 0.3342 32.0832  1.1534174
11-12     33 0.2831 27.1776  1.2473633
12-13     14 0.1278 12.2688  0.2442825
 >13       2 0.0426  4.0896  1.0676908
-------------------------------------
Total   96 1.0000 96.0000   6.0038949
```

[1.0 Ptos.]

Como $X^2 = 6.00 \sim \chi^2(6 - 1 - 2)$, entonces

$$10\,\% < \text{valor-p} < 90\,\%$$

Es decir, no existe suficiente evidencia al 1 % de significancia para rechazar la hipótesis nula que los datos se comportan según una distribución Log-Normal. **[0.5 Ptos.]**

(c) Ya que ambos estadísticos de pruebas distribuyen de igual manera, entonces se escoge el más cercano a cero como mejor ajuste, es decir, se propone el modelo Normal. **[1.0 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 4

El consumo mensual de gas natural X de una empresa en m^3, está condicionado a un factor de demanda Y el cual distribuye $Y \sim \text{Exponencial}(\nu)$. Determine el consumo mensual esperado de una empresa si

$$F_{X \,|\, Y=y}(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta}\right]$$

con $x \geq 0$, $y > 0$ y $\beta > 0$.

Solución

Se pide $\text{E}(X) = \text{E}[\text{E}(X \,|\, Y)]$. **[0.5 Ptos.]**

Por otra parte,

$$f_{X \,|\, Y=y}(x) = \left(\frac{\beta}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta}\right], \quad x \geq 0, \quad y > 0, \quad \beta > 0 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\text{E}(X \,|\, Y = y) &= \int_0^\infty x \cdot \left(\frac{\beta}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta}\right] dx \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= y \cdot \int_0^\infty z^{1/\beta} \exp\{-z\}\, dz \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= y \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} z^{(1+1/\beta)-1} \exp\{-z\}\, dz \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= y \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \cdot 1 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= y \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \text{E}(X) = \text{E}\left[Y \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right] = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \text{E}(Y) = \frac{1}{\nu} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Formulario

Propiedades función $\Gamma(\cdot)$

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Propiedades función $B(\cdot,\, \cdot)$

$$(1) \quad B(q,\, r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\, dx; \quad (2) \quad B(q,\, r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

Igualdades

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \qquad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Propiedad distribución Gamma

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu), \text{ con } k \in \mathbb{N} \longrightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$$

Transformación

Sea $Y = g(X)$ una función cualquiera, con k raíces:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X\left(g_i^{-1}(y)\right) \cdot \left| \frac{d}{dy}\, g_i^{-1}(y) \right|$$

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} p_X\left(g_i^{-1}(y)\right)$$

Sea $Z = g(X, Y)$ una función cualquiera:

$$p_Z(z) = \sum_{g(x,y)=z} p_{X,Y}(x, y)$$

Sea $Z = g(X, Y)$ una función invertible para X o Y fijo:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(g^{-1}, y) \left| \frac{\partial}{\partial z} g^{-1} \right| dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, g^{-1}) \left| \frac{\partial}{\partial z} g^{-1} \right| dx \end{aligned}$$

Esperanza y Varianza Condicional

$$\text{E}(Y) = \text{E}[\text{E}(Y \mid X)] \quad \text{y} \quad \text{Var}(Y) = \text{Var}[\text{E}(Y \mid X)] + \text{E}[\text{Var}(Y \mid X)]$$

Teorema del Límite Central

Sean $X_1,\, \ldots,\, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces

$$Z_n = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow Z \sim \text{Normal}(0, 1),$$

cuando $n \to \infty$, $\text{E}(X_i) = \mu$ y $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

Propiedades Esperanza, Varianza y Covarianza

Sean $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n,\, Y_1,\, Y_2,\, \ldots,\, Y_m$ variables aleatorias y $a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n,\, b_0,\, b_1,\, \ldots,\, b_m$ constantes conocidas.

- $\mathrm{E}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathrm{E}(X_i)$.
- $\mathrm{Cov}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i,\, b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \cdot b_j \cdot \mathrm{Cov}\,(X_i, Y_j)$.
- $\mathrm{Var}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$.
- Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, entonces

$$\mathrm{Var}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \mathrm{Var}\,(X_i)$$

Mínimo y Máximo

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias continuas independientes con idéntica distribución (f_X y F_X), entonces para:

$$Y_1 = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} \longrightarrow f_{Y_1} = n\,[1 - F_X(y)]^{n-1}\; f_X(y)$$
$$Y_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\} \longrightarrow f_{Y_n} = n\,[F_X(y)]^{n-1}\; f_X(y)$$

Mientras que la distribución conjunta entre Y_1 e Y_n está dada por:

$$f_{Y_1,Y_n}(u,v) = n\,(n-1)\;[F_X(v) - F_X(u)]^{n-2}\; f_X(v)\, f_X(u), \qquad u \leq v$$

Aproximación de Momentos

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias con valores esperados $\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_n}$ y varianzas $\sigma^2_{X_1}, \ldots, \sigma^2_{X_n}$ e Y una función de ellas. La aproximación de primer orden está dada por

$$Y \approx g(\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_n}) + \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_{X_i})\,\frac{\partial}{\partial X_i} g(\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_n})$$

Estimador Máximo Verosímil

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de probabilidad p_X o de densidad f_X, determinada por un parámetro θ. Si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil del parámetro θ, entonces:

- $\mathrm{E}(\hat{\theta}) \to \theta$, cuando $n \to \infty$.
- $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{I_n(\theta)}$, con $I_n(\theta) = -\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}\,\ln L(\theta)\right]$.
- $\hat{\theta} \mathrel{\dot\sim} \text{Normal}\left(\theta,\, \sqrt{\dfrac{1}{I_n(\theta)}}\right)$, cuando $n \to \infty$.
- El estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$, cuya varianza está dada por: $\mathrm{Var}[g(\hat{\theta})] = \dfrac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}$.

Error Cuadrático Medio

El error cuadrático medio de un estimador $\hat{\theta}$ de θ se define como:

$$\mathrm{ECM}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}\left\{\left[\hat{\theta} - \mathrm{E}(\hat{\theta})\right]^2\right\} = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + \text{Sesgo}^2$$

Distribuciones Muestrales

Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Normal(μ, σ), entonces

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,1), \qquad \frac{\overline{X}_n - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim \text{t-student}(n-1), \qquad \frac{s^2\,(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

con $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

Bondad de Ajuste

Si O_1, O_2,..., O_k son las frecuencias observadas de k valores (o k intervalos) de una variable y E_1, E_2,..., E_k sus correspondientes frecuencias teóricas, entonces

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(k - 1 - \nu)$$

con ν igual a cero si la distribución es teórica no tiene parámetros estimados o la información muestral no es utilizada.

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
∞	1.282	1.645	1.960	2.326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$

ν	$c_{0.025}$	$c_{0.05}$	$c_{0.10}$	$c_{0.90}$	$c_{0.95}$	$c_{0.975}$	$c_{0.99}$	$c_{0.995}$
1	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93