

Curso : Probabilidad y Estadística
Sigla : EYP1113
Profesor : Ricardo Aravena (Sec. 1) y Alejandro Trapp (Sec. 2)
Ayudantes : Claudia Reyes Vizcarra y Erwin Agüero Meza

Examen

- Se permite el uso de calculadora científica básica.
- No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).
- Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.
- El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.
- En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y su cuadernillo.
- Recuerde poner su N° de lista a su cuadernillos.

Problema 1

La distribución del voltaje de ruptura de circuitos electrónicamente cargados se asume normal, siendo de interés el comportamiento de la varianza. Con el objeto de tomar decisiones con respecto a un proceso se toman 16 datos obteniendo una varianza muestral de 175, cuando el valor ideal de la varianza debe ser menor o igual 100. Se proponen dos reglas de decisión:

- **Regla 1:** Construir un Intervalo de confianza al 95 % para σ^2 y si éste no contiene el valor ideal, rechazar el proceso.
 - **Regla 1:** Llevar a cabo un test de hipótesis para varianza y tomar la decisión para un valor $\alpha = 5\%$ (probabilidad de error tipo I).
- (a) [4.0 Ptos.] Aplique ambas reglas y diga cual es la decisión
- (b) [2.0 Ptos.] Indique la equivalencia que podría obtener entre el intervalo de confianza y el test aplicado en estas reglas.

Problema 2

Con el objeto de analizar la mejor ubicación de una futura estación eólica, se toman 90 mediciones referentes a la velocidad del viento (en m/s), en una meseta ubicada a 400 msnm frente a la zona de Concón, obteniendo una mediana de 8 m/s, y los datos que se presentan en la siguiente tabla

Intervalo m/s	(0 – 4]	(4 – 8]	(8 – 12]	> 12
Num observaciones	9	32	30	19

Se postulan dos distribuciones:

- Weibull, con parámetro de forma $k = 2$.
- Lognormal, con coeficiente de variación del 48 %.

¿Qué distribución ajusta mejor? (entregue valor- p en cada caso).

Ayuda: Si $X \sim \text{Weibull}(k, \lambda)$, entonces $f_X(x) = \left(\frac{k}{\lambda}\right) \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right]$, $x \geq 0$, $k > 0$, $\lambda > 0$.

Problema 3

Una investigación de la influencia de la concentración de benzoato de sodio (X), en el pH mínimo crítico (Y) necesario para la inhibición de hierro (“Mechanism of the corrosion inhibition of Fe by Sodium Benzoate”, Corrosion Science, 1971. P675-682), produjo los siguientes cuatro datos, los cuales sugieren que un modelo lineal en $\ln(x)$ ajusta mejor que el modelo lineal en X . Los datos son presentados a continuación, donde la última línea corresponde a la SUMA respectiva.

X	Y	$\ln(X)$	$X \cdot Y$	$Y \cdot \ln(X)$	Y^2	X^2	$[\ln(X)]^2$
0.010	5.100	-4.610	0.051	-23.511	26.010	0.0001	21.252
0.025	5.500	-3.690	0.138	-20.295	30.250	0.0006	13.616
0.100	6.100	-2.300	0.610	-14.030	37.210	0.0100	5.290
0.950	7.300	-0.050	6.935	-0.3650	53.290	0.9025	0.003
1.085	24.000	-10.65	7.734	-58.201	146.760	0.9132	40.161

- [1.5 Ptos.]** Ajuste el modelo $E(Y | X = x) = \alpha + \beta \cdot X$, entregue varianza y r^2 del modelo.
- [1.5 Ptos.]** Ajuste el modelo $E(Y | X = x) = \alpha + \beta \cdot \ln(X)$, entregue varianza y r^2 del modelo.
- [1.0 Ptos.]** A partir de los resultados anteriores, obtenga la correlación estimada entre X e Y , y entre $\ln(X)$ e Y .
- [1.0 Ptos.]** Obtenga la probabilidad que el pH mínimo crítico sea superior a 6.0 cuando la concentración de benzoato de sodio es igual a 0.5. con cada uno de los modelos propuestos.
- [1.0 Ptos.]** Escoja el mejor modelo y obtenga los respectivos intervalos de confianza para cada uno de los datos observados. Bosqueje el gráfico destacando los intervalos de confianza.

Nota: Trabaje todo con tres decimales.

Tiempo: 2 Horas

Formulario:

- Sean X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria con distribución Normal(μ, σ^2), entonces

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0, 1), \quad \frac{\bar{X}_n - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1), \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)},$$

$$\text{con } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

- Para el modelo de regresión lineal simple $Y = \alpha + \beta x$ se tiene que

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}, \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad r^2 = 1 - \frac{s_{Y|x}^2}{s_Y^2}$$

$$s_{Y|x}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2$$

$$\square \quad \langle \mu_{Y|x_i} \rangle_{1-\alpha} = \bar{y}_i \pm t_{(1-\alpha/2), n-2} \cdot s_{Y|x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}}$$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p											Distribución t-student $t_p(\nu)$				
k_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	ν	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	1	3.078	6.314	12.706	31.821
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753	2	1.886	2.920	4.303	6.965
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141	3	1.638	2.353	3.182	4.541
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517	4	1.533	2.132	2.776	3.747
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879	5	1.476	2.015	2.571	3.365
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224	6	1.440	1.943	2.447	3.143
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549	7	1.415	1.895	2.365	2.998
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852	8	1.397	1.860	2.306	2.896
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133	9	1.383	1.833	2.262	2.821
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389	10	1.372	1.812	2.228	2.764
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621	11	1.363	1.796	2.201	2.718
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830	12	1.356	1.782	2.179	2.681
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015	13	1.350	1.771	2.160	2.650
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177	14	1.345	1.761	2.145	2.624
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319	15	1.341	1.753	2.131	2.602
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441	16	1.337	1.746	2.120	2.583
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545	17	1.333	1.740	2.110	2.567
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633	18	1.330	1.734	2.101	2.552
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706	19	1.328	1.729	2.093	2.539
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767	20	1.325	1.725	2.086	2.528
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817	21	1.323	1.721	2.080	2.518
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857	22	1.321	1.717	2.074	2.508
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890	23	1.319	1.714	2.069	2.500
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916	24	1.318	1.711	2.064	2.492
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936	25	1.316	1.708	2.060	2.485
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952	26	1.315	1.706	2.056	2.479
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964	27	1.314	1.703	2.052	2.473
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	28	1.313	1.701	2.048	2.467
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981	29	1.311	1.699	2.045	2.462
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986	30	1.310	1.697	2.042	2.457
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990	∞	1.282	1.645	1.960	2.326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$								
ν	$c_{0.025}$	$c_{0.05}$	$c_{0.10}$	$c_{0.90}$	$c_{0.95}$	$c_{0.975}$	$c_{0.99}$	$c_{0.995}$
1	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93