Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

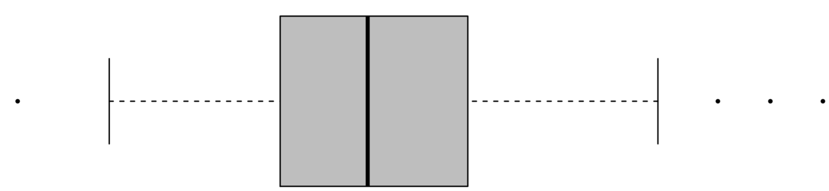
Segundo Semestre 2016

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Pauta	:	**I1**
Profesores	:	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

Hoy usted se enfrenta a la disyuntiva de rendir una buena evaluación y demorar poco tiempo, dado que tiene interés en ver el partido de hoy completo. Basado en comportamiento en evaluaciones anteriores ha determinado que el tiempo T que le toma desarrollar de buena manera este tipo de evaluaciones se comporta como una variable aleatoria Log-Normal(λ, ζ) trasladada en α, es decir, $T-\alpha$ se comporta como Log-Normal(λ, ζ).

Los datos del estudio muestran el siguiente comportamiento empírico:



```
    Min.   1st Qu.    Median      Mean   3rd Qu.      Max.
10.00000  40.84671  50.00000  53.08132  61.86939 100.00000
```

(a) **[2.0 Ptos.]** En base a la información empírica, determine los valores de α, λ y ζ.

(b) **[2.0 Ptos.]** En base los valores propuestos en (a), ¿cuál sería la probabilidad que logre terminar en menos de una hora?

(c) **[2.0 Ptos.]** Si su objetivo es terminar su evaluación en menos de una hora con probabilidad 0.9, ¿cuál debería ser el c.o.v de la distribución propuesta en el enunciado manteniendo los valores α y λ propuestos en (a)?

Solución

(a) Tenemos que

$$T-\alpha > 0 \quad \text{y} \quad \mu_T = e^{\lambda+\zeta^2/2}+\alpha \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

y si t_p es el percentil $p \times 100\,\%$, entonces

$$P(T \leq t_p) = P(T-\alpha \leq t_p-\alpha) = \Phi\left[\frac{\ln(t_p-\alpha)-\lambda}{\zeta}\right] = p \to t_p = e^{\lambda+\zeta\,\Phi^{-1}(p)}+\alpha$$

es decir,

$$t_{0.00} = \alpha \text{ (mínimo valor posible)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$
$$t_{0.25} = e^{\lambda-\zeta\,0.6745}+\alpha \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

$$t_{0.50} = e^{\lambda} + \alpha \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$
$$t_{0.75} = e^{\lambda + \zeta\, 0.6745} + \alpha \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

*Observación: Basta con tres de las cinco igualdades anteriores, si el alumno solo pone tres, adicionar **0.4 Ptos.***

Despejando se tiene que

$$\alpha = 10, \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \quad \lambda = 3.688879, \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \quad \zeta = 0.3852467 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

(b) Se pide

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \quad P(T < 60) = \Phi\left(\frac{\ln(60-10) - 3.688879}{0.3852467}\right) = \Phi(0.5792237) \approx \Phi(0.58) = 0.7190 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

*Observación: Si el alumno no resta α asignar solo **1.0 Ptos.***

(c) Se pide

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad \Phi\left[\frac{\ln(60-10) - 3.688879}{\zeta}\right] = 0.90 \to \frac{\ln(60-10) - 3.688879}{\zeta} = \Phi^{-1}(0.9) \approx 1.28 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

$$\zeta = 0.1743313 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Por otra parte,

$$\mathrm{E}(T^2) = 2\,\alpha\,\mu_T - \alpha^2 + e^{2\lambda + 2\zeta^2} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Luego

$$\textbf{[0.3 Ptos.]} \quad \sigma_T^2 = e^{2\lambda+\zeta^2}\left(e^{\zeta^2} - 1\right) = 50.89619 \quad \text{y} \quad \mu_T = e^{\lambda + \zeta^2/2} + \alpha = 50.61245 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}$$

Por lo tanto

$$\delta_T = \frac{\sigma_T}{\mu_T} = 0.1409566 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

*Observación: Si el alumno no resta α, pero todo lo demás está correcto asignar **1.5 Ptos.***

+ 1 Punto Base

Problema 2

Hoy en día las autoridades (gobierno o partidos políticos) han tenido problemas en la selección de candidatos, dado que muchos de ellos presentan antecedentes negativos (acusaciones VIF, problemas con boletas, etc.). Por lo anterior, las autoridades deben realizar exhaustivos análisis de los antecedentes de los elegibles antes de realizar el nombramiento. Lamentablemente éste examen no es certero. De hecho, es capaz de detectar a un 70 % de los elegibles que presentan antecedentes. Pero también califica al 10 % de los que no tienen antecedentes como problemas. De los que pasan ese filtro inicial se realiza la designación, siendo sometido al escrutinio público. Los hechos muestran que el 90 % de los designados con problemas son detectados y acusados públicamente. De igual forma, a un 5 % de los designados sin problemas los acusan de tener problema, provocando en ambos casos la renuncia del candidato, impidiendo presentación a la elección (aparecer en la papeleta). Asuma que el 30 % de los elegibles tienen antecedentes.

(a) **[3.0 Ptos.]** Si seleccionamos una persona elegible, ¿cuál es la probabilidad que aparezca en la papeleta?

(b) **[3.0 Ptos.]** Si aparece en la papeleta, ¿cuál es la probabilidad que tenga problemas?

Solución

Definamos los eventos:

A: Elegible presenta antecedentes negativos (problema).

B: Examen califica a elegible como persona con antecedentes.

$\overline{B}$: Examen califica a elegible como persona sin antecedentes (es designado).

C: Designado (pasa filtro) es acusado públicamente y renuncia (no aparece en papeleta).

$\overline{C}$: Designado (pasa filtro) no es acusado públicamente (aparece en papeleta).

Del enunciado se tiene

$$\begin{aligned}
P(A) = 0.30 &\to P(\overline{A}) = 0.70 \\
P(B \,|\, A) = 0.70 &\to P(\overline{B} \,|\, A) = 0.30 \\
P(B \,|\, \overline{A}) = 0.10 &\to P(\overline{B} \,|\, \overline{A}) = 0.90 \\
P(C \,|\, A \cap \overline{B}) = 0.90 &\to P(\overline{C} \,|\, A \cap \overline{B}) = 0.10 \\
P(C \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) = 0.05 &\to P(\overline{C} \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) = 0.95
\end{aligned}$$

(a) Se pide $P(\overline{C})$. Aplicando teorema de probabilidades totales se tiene que

$$\begin{aligned}
P(\overline{C}) &= P(\overline{C} \,|\, A \cap \overline{B})\, P(\overline{B} \,|\, A)\, P(A) + P(\overline{C} \,|\, \overline{A} \cap \overline{B})\, P(\overline{B} \,|\, \overline{A})\, P(\overline{A}) \quad \textbf{[1.5 Ptos.]} \\
&= 0.10 \cdot 0.30 \cdot 0.30 + 0.95 \cdot 0.90 \cdot 0.70 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= 0.6075 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide $P(A \,|\, \overline{C})$.

$$\begin{aligned}
P(A \,|\, \overline{C}) &= \frac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})}, \quad \text{por teorema de probabilidades totales} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= \frac{P(\phi) + P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

$$= \frac{0 + 0.10 \cdot 0.30 \cdot 0.30}{P(\overline{C})} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

$$= \frac{0.009}{0.6075} = 0.01481481, \quad \text{por (a)} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

Recientemente se produjo en Plaza Baquedano un gran revuelo por la aparición de un Pokemon en particular. Ahora vamos a cazar Pokemones con una variante: cada jugador dispone de 5 pokebolas y una habilidad p de éxito en cada lanzamiento (o intento). Asumiendo independencia entre los tiros, y frente a la aparición de varios pokemones en su entorno, determine en función de p:

(a) **[2.0 Ptos.]** La probabilidad de capturar solo un Pokemon antes de utilizar su última pokebola

(b) **[2.0 Ptos.]** La probabilidad de capturar solo dos Pokemones utilizando todas sus pokebolas.

(c) **[2.0 Ptos.]** La probabilidad de capturar su primer Pokemon justo antes de utilizar su última pokebola, suponiendo que en cada tiro su habilidad se incrementa en un 20 %.

Solución

(a) La probabilidad de "capturar solo un" Pokemon antes de la última pokebola está dada por

$$4\,p\,(1-p)^3 \quad \textbf{[2.0 Ptos.]}$$

(b) La probabilidad de "capturar solo dos" Pokemon antes de utilizar tdas las pokebolas está dada por

$$\binom{5}{2}\,p^2\,(1-p)^3 = 10\,p^2\,(1-p)^3 \quad \textbf{[2.0 Ptos.]}$$

(c) Primeros tres lanzamientos no logran captura y en el cuarto si, sin importar lo que suceda en el quinto lanzamiento y con un incremento del 20 % en la habilidad en cada lanzamiento.

$$(1-p)\,(1-1.2\,p)\,(1-1.2^2\,p)\,1.2^3\,p \quad \textbf{[2.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Formulario

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales $n_1,\ldots,n_k$, entonces

$$S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (Botón **nPr** de la caluladora)

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} \text{ (Botón } \textbf{nCr} \text{ de la caluculadora)}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1,\ldots, n_k$, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1\, n_2\, \cdots\, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}\, x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$

Propiedades función $\Gamma(\cdot)$

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Propiedades función $B(\cdot, \cdot)$

$$(1) \quad B(q,\, r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\, dx; \quad (2) \quad B(q,\, r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza, Varianza y fgm
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\,\sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M_X(t) = \exp\left(\mu_X\,t + \frac{1}{2}\,\sigma_X^2\,t^2\right)$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\dfrac{1}{(x\,\zeta)}\,\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\ln(x)-\lambda}{\zeta}\right]^2\right\}$	$x \geq 0$	$\lambda,\,\zeta$	$\mu_X = \exp(\lambda + \zeta^2/2)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2(e^{\zeta^2} - 1)$ $E(X^k) = \exp(\lambda\,k)\,M_Z(\zeta\,k)$, con $Z \sim$ Normal(0,1)

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998