Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2009

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**Examen**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena (Sec 01) y Ricardo Olea (Sec 02)**
Ayudante	**:**	**José Quinlan y Constanza Quezada.**

Problema 1

Actualmente estamos viviendo una crisis financiera, siendo uno de los principales detonantes los impagos hipotecarios. Como una forma de contrarrestar lo anterior la SBIF (Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras) realiza evaluaciones de cartera, la cual consiste en "revisar la calidad" de los créditos otorgados por las instituciones crediticias. Lo anterior lo realiza a través de un modelo estadístico (scoring) que les permite discriminar entre "buenos" y "malos" pagadores. Sin embargo el procedimiento es "casi-perfecto", dado que logra identificar al 80 % de los "malos" pagadores, pero clasifica erróneamente al 10 % de los "buenos" pagadores. De los créditos clasificados como malos, la institución debe realizar provisiones por el 10 % del monto total. Por otra parte, basado en antecedentes históricos sea sabe que el 25 % de los créditos brindados resultan ser "malos" pagadores.

(a) ¿Cuál es la Probabilidad que un crédito brindado por una institución sea clasificado como "malo" por el modelo de la SBIF?

(b) Si un crédito es clasificado como "bueno", ¿cuál es la probabilidad que realmente sea "malo"?

(c) Si una institución entrega 1520 créditos y asumiendo que los montos en millones de pesos tienen distribución Normal($\mu = 15, \sigma = 5$). ¿Cuántos créditos serán clasificados como malos y cuál será el monto esperado (en millones de pesos) que debe ser provisionado?

Solución

Definamos los siguientes eventos:

$$\begin{aligned} B &= \{\text{Crédito Bueno}\} \\ B^c &= \{\text{Crédito Malo}\} \\ C &= \{\text{SBIF clasifica como Bueno}\} \\ C^c &= \{\text{SBIF clasifica como Malo}\} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos que

$$\begin{aligned} P(B) = 0.75 \Rightarrow P(B^c) = 0.25 \quad &\textbf{[0.5 ptos.]} \\ P(C \mid B) = 0.90 \Rightarrow P(C^c \mid B) = 0.10 \quad &\textbf{[0.5 ptos.]} \\ P(C \mid B^c) = 0.20 \Rightarrow P(C^c \mid B^c) = 0.80 \quad &\textbf{[0.5 ptos.]} \end{aligned}$$

(a) **Alternativa 1:**

La Probabilidad que un crédito brindado por una institución sea clasificado como "malo" por el modelo de la SBIF es por ley del complemento:

$$P(C^c) = 1 - P(C), \quad \textbf{[0.3 ptos.]}$$

donde

$$
\begin{aligned}
P(C) &= P(C \cap B) + P(C \cap B^c), \quad \text{por ley de probabilidades totales} \quad \textbf{[0.3 ptos.]} \\
&= P(C \,|\, B) \cdot P(B) + P(C \,|\, B^c) \cdot P(B^c) \quad \textbf{[0.3 ptos.]} \\
&= 0.90 \cdot 0.75 + 0.20 \cdot 0.25 \quad \textbf{[0.3 ptos.]} \\
&= 0.725
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$P(C^c) = 0.275 \quad \textbf{[0.3 ptos.]}$$

Alternativa 2:

La Probabilidad que un crédito brindado por una institución sea clasificado como "malo" por el modelo de la SBIF es:

$$
\begin{aligned}
P(C^c) &= P(C^c \cap B) + P(C^c \cap B^c), \quad \text{por ley de probabilidades totales} \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\
&= P(C^c \,|\, B) \cdot P(B) + P(C^c \,|\, B^c) \cdot P(B^c) \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\
&= 0.10 \cdot 0.75 + 0.80 \cdot 0.25 \\
&= 0.275 \quad \textbf{[0.5 ptos.]}
\end{aligned}
$$

(b) La probabilidad que realmente un crédito sea "malo" dado que se clasifica como "bueno" es:

$$
\begin{aligned}
P(B^c \,|\, C) &= \frac{P(B^c \cap C)}{P(C)}, \quad \text{por definición de probabilidad condicional} \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\
&= \frac{P(C \,|\, B^c) \cdot P(B)}{P(C)} \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\
&= \frac{0.20 \cdot 0.25}{0.725} \\
&= 0.069 \quad \textbf{[0.5 ptos.]}
\end{aligned}
$$

(c) Tenemos que la probabilidad que un crédito sea malo esta dada por $P(C^c) = 0.275$, por lo tanto el número esperado de créditos malos entre $n = 1520$ créditos entregados es

$$n \cdot P(C^c) = 418. \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Luego, como el monto esperado por crédito es de 15 millones, entonces el monto esperado de créditos mal entregados son $15 \cdot 418$ millones **[0.5 ptos.]**. Por lo tanto el monto a provisionar es el 10 % de esta suma, es decir, 627 millones. **[0.5 ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 2

Como es bien sabido la encuesta CEP es una de las más confiables. Sin embargo, los medios de comunicación han ido un poco más allá y han realizado múltiples análisis al "abrirla". Por ejemplo, un análisis exclusivo para Concepción muestra que un candidato obtiene un 35,4 % de la preferencia basado en los 226 casos válidos para la región.

(a) Con base a la información, construya un Intervalo de Confianza al 90 % para el apoyo (o votación esperada) a ese candidato.

(b) ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para que nuestros resultados sean muy precisos, es decir, no se cometa un error no mayor al 3 % con un 95 % de confianza bajo el criterio de varianza maxima?

Solución

(a) Un intervalo de confianza para la proporción esta dado por:

$$\hat{p} \pm Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \quad \textbf{[1.0 ptos.]}$$

Para nuestro caso:

$$\hat{p} = 0.354, \quad n = 226, \quad Z_{1-\alpha/2} = 1.645 \text{ para } \alpha = 0.1 \quad \textbf{[1.0 ptos.]}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} p &\in 0.354 \pm 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.354 \cdot 0.646}{226}} \\ &\in 0.354 \pm 1.645 \cdot 0.03181 \\ &\in 0.354 \pm 0.052 \\ &\in (0.302;\ 0.406) \quad \textbf{[1.0 ptos.]} \end{aligned}$$

con un 90 % de confianza.

(b) El tamaño muestral esta dado por:

$$n = \left(\frac{Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{p(1-p)}}{\text{Error}}\right)^2 \quad \textbf{[1.0 ptos.]}$$

Para $\alpha = 5\,\%$ tenemos que $Z_{1-\alpha/2} = 1.96$ **[0.5 ptos.]**. El criterio de varianza máxima se cumple cuando $p = 1/2$ **[0.5 ptos.]**. Por lo tanto para un Error igual a 0.03 se tiene que

$$n = (32.67)^2 \approx 1067.1$$

Se requiere un tamaño muestral de 1068 casos. **[1.0 ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 3

Este viernes se realizará el sorteo de la fase final de la copa mundial de la FIFA Sudáfrica 2010 al cual están invitado un grupo de dirigentes de la Federación de Fútbol de Chile. El itinerario del viaje es el siguiente:

Santiago - Buenos Aires - Johannesburgo - Ciudad Del Cabo.

Las líneas aéreas informan que los tiempos de vuelo entre las ciudades se comportan como variables aleatorias Normales según:

- Santiago - Buenos Aires: $\mu = 2$ horas, $\sigma = 0.15$ horas.
- Buenos Aires - Johannesburgo: $\mu = 10$ horas, $\sigma = 0.5$ horas.
- Johannesburgo - Ciudad del Cabo: $\mu = 2$ horas, $\sigma = 0.2$ horas.

Dado esto, el encargado de la reserva planificó el viaje dejando una holgura de una hora para los transbordo en cada aeropuerto que se requiera considerando como tiempos oficiales de cada vuelo los tiempo medios indicados anteriormente.

Por otra parte, debido a múltiples problemas que han presentado en el aeropuerto de Santiago, los vuelos hacia Buenos Aires presentan un tiempo de retraso que se comporta como una variable aleatoria Normal de media 40 min. y c.o.v. del 20 %. Por su parte, el aeropuerto de Buenos Aires no ha estado exento de problemas, y los vuelos hacia Africa también presentan tiempos de retrasos que distribuyen normal de media de 40 min. y un c.o.v. del 30 %. Por último, los tiempos de retraso en Johannesburgo son menores dado que tienen que dar una buena imagen y distribuyen normal de media 10 min y c.o.v. 30 %. Asumiendo que el tiempos mínimos para cambiar de avión es 30 min. y que existe independencia entre todos los tiempos:

(a) ¿Cuál es la probabilidad que llegue al menos 30 minutos antes de la hora oficial de salida del vuelo Buenos Aires - Johannesburgo?

(b) ¿Cuál es la probabilidad que pierda la conexión a Sudáfrica?

(c) ¿Cuál es la probabilidad que demore más de los programado en llegar a Ciudad del Cabo, es decir, 16 horas?

Solución

Definamos las siguientes variables aleatorias en minutos:

- R_1: Retraso Santiago. $R_1 \sim \text{Normal}(\mu = 40, \sigma = 8)$ **[0.3 ptos.]**
- R_2: Retraso Buenos Aires. $R_2 \sim \text{Normal}(\mu = 40, \sigma = 12)$ **[0.3 ptos.]**
- R_3: Retraso Johannesburgo. $R_3 \sim \text{Normal}(\mu = 10, \sigma = 3)$ **[0.3 ptos.]**
- T_1: Tiempo vuelo Santiago - Buenos Aires. $T_1 \sim \text{Normal}(\mu = 120, \sigma = 9)$ **[0.3 ptos.]**
- T_2: Tiempo vuelo Buenos Aires - Johannesburgo. $T_2 \sim \text{Normal}(\mu = 600, \sigma = 30)$ **[0.3 ptos.]**
- T_3: Tiempo vuelo Johannesburgo - Ciudad del Cabo. $T_3 \sim \text{Normal}(\mu = 120, \sigma = 12)$ **[0.3 ptos.]**

Itinerario oficial hora chilena tomado como hora de salida desde Santiago las 00:00 horas:

	Salida	Llegada
Santiago - Buenos Aires:	00:00	02:00
Buenos Aires - Johannesburgo:	03:00	13:00
Johannesburgo - Ciudad del Cabo:	14:00	16:00

[0.2 ptos.]

(a) La probabilidad que llegue al menos 30 minutos antes de la hora oficial de salida del vuelo Buenos Aires - Johannesburgo es:

$$\begin{aligned} P(R_1 + T_1 < 120 + 60 - 30) &= P(R_1 + T_1 < 150) \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\ &= \Phi\left(\frac{150 - (40 + 120)}{\sqrt{8^2 + 9^2}}\right) \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\ &= \Phi\left(-0.8305\right) \\ &= 1 - \Phi\left(0.8305\right) \\ &\approx 1 - 0.7967 = 0.2033 \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \end{aligned}$$

(b) La probabilidad que pierda la conexión a Sudáfrica esta dada por:

$$\begin{aligned} P(120 + 60 - R_1 - T_1 + R_2 < 30) &= P(R_1 + T_1 - R_2 > 150) \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\ &= 1 - P(R_1 + T_1 - R_2 \leq 150) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{150 - (40 + 120 - 40)}{\sqrt{8^2 + 9^2 + 12^2}}\right) \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \\ &= 1 - \Phi\left(1.764706\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(1.77\right) \\ &= 1 - 0.9616 = 0.0384 \quad \textbf{[0.5 ptos.]} \end{aligned}$$

(c) La probabilidad que demore menos de los programado en llegar a Ciudad del Cabo, es decir, 16 horas. Se cumple si suceden simultáneamente los siguientes tres eventos:

- $120 + 60 - R_1 - T_1 + R_2 > 30 \Rightarrow R_1 + T_1 - R_2 < 150.$ **[0.3 ptos.]**
- $600 + 60 - R_2 - T_2 + R_3 > 30 \Rightarrow R_2 + T_2 - R_3 < 630.$ **[0.3 ptos.]**
- $120 + 60 - R_3 - T_3 > 0 \Rightarrow R_3 + T_3 < 180.$ **[0.3 ptos.]**

Es decir,

$$P(R_1 + T_1 - R_2 < 150,\, R_2 + T_2 - R_3 < 630,\, R_3 + T_3 < 180) = P(R_1 + T_1 - 150 < R_2,\, R_2 + T_2 - 630 < R_3 < 180 - T_3)$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida esta dada por:

$$1 - P(R_1 + T_1 - 150 < R_2,\, R_2 + T_2 - 630 < R_3 < 180 - T_3) \quad \textbf{[0.1 ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

(a) Para 15 ciudades de los EE.UU. se registró el costo promedio (en US$) de estacionar todo el día en distritos comerciales, los cuales fueron contrastados con respecto a la cantidad de habitantes (en miles). Un investigador propone dos modelos para el valor esperado de los costos:

- Modelo 1: $E(Y \mid X = x) = \alpha + \beta\, x$.
- Modelo 2: $E(Y \mid X = x) = \alpha + \beta\, \log x$.

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 13610, \quad \sum_{i=1}^{15} y_i = 11.57, \quad \sum_{i=1}^{15} \log\, x_i = 94.96087, \quad \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 29664300,$$

$$\sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 9.7885, \quad \sum_{i=1}^{15} (\log\, x_i)^2 = 612.7392, \quad \sum_{i=1}^{15} y_i\, x_i = 13845.2, \quad \sum_{i=1}^{15} y_i\, \log x_i = 76.08385$$

i. Obtenga los coeficientes para ambos modelos propuestos y sus respectivos coeficientes de determinación r^2. ¿Cuál prefiere?

ii. Para el modelo escogido en (a) obtenga una estimación puntual e intervalar al 95 % para $\mu_{Y \mid X = x}$ cuando $x = 300$.

(b) Al estudiar la densidad vehicular como predictor de la velocidad media en las vías expresas de Santiago, un experto realiza 12 mediciones durante un mes en hora punta. Parte de los resultados se presentan a continuación:

Var. Independientes	Modelo ajustado	$s_{Y \mid X_1, X_2, \ldots}$
X_1, X_2, X_3	$Y' = 1 + 2\, X_1 + 10\, X_2 - 5\, X_3$	1.25
X_1, X_3	$Y' = 1.2 + 1.5\, X_1 - 3\, X_3$	1.58
X_1, X_2	$Y' = 2.2 + 1.0\, X_1 + 5\, X_2$	1.42
X_1	$Y' = 3.2 + 1.2\, X_1$	2.40

Donde X_1 = densidad vehicular (v/hr.)
X_2 = día de semana ($X_2 = 1$ si es lunes o viernes, $X_2 = 0$ en otro caso) X_3 = horario del día ($X_3 = 1$ si es punta tarde, $X_3 = 0$ si es punta mañana)

iii. Obtenga los respectivos coeficientes de determinación. Considere $s_Y^2 = 9$.

iv. Basado en el criterio de $s_{Y \mid X_1, X_2, \ldots}$ seleccione el mejor modelo, y para el modelo elegido realice una predicción de la velocidad media cuando $x_1 = 24$ v/hr; x_2=viernes y x_3=punta tarde.

Solución

(a) i. Modelo $E(Y \mid X = x) = \alpha + \beta\, x$:

$$n = 15$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - n\, \overline{x}\, \overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\, \overline{x}^2} = 0.00019 \quad \textbf{[0.25 ptos.]}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\, \overline{x} = 0.5959 \quad \textbf{[0.25 ptos.]}$$

Modelo $E(Y \mid X = x) = \alpha + \beta\, \log\, x$:

$$n = 15$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\, \log x_i - n \cdot \left(\overline{\log x}\right) \cdot \overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} (\log x_i)^2 - n\, \left(\overline{\log\, x}\right)^2} = -0.7814 \quad \textbf{[0.25 ptos.]}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\, \left(\overline{\log x}\right) = 0.2453 \quad \textbf{[0.25 ptos.]}$$

El coeficiente de determinación $r^2 = 1 - \frac{s^2_{Y|X}}{s^2_Y}$ donde

$$\begin{aligned} s^2_Y &= \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) - n\,\overline{y}^2\right] \\ &= \frac{1}{14}\left[9.7885 - 15 \times 9.771\overline{3}^2\right] \\ &= 0.0617 \end{aligned}$$

y

$$s^2_{Y|X} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n (y_i - y_i')^2$$

Para el modelo $E(Y \,|\, X = x) = \alpha + \beta\, x$:

$$\begin{aligned} s^2_{Y|X} &= \frac{1}{n-2}\left[\sum_{i=1}^n (y_i - [\hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x_i])^2\right] \\ &= \frac{1}{n-2}\left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\,\hat{\alpha}\sum_{i=1}^n y_i - 2\,\hat{\beta}\sum_{i=1}^n x_i\, y_i + n\,\hat{\alpha}^2 + 2\,\hat{\alpha}\,\hat{\beta}\sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta}^2\sum_{i=1}^n x_i^2\right] \\ &= 0.0167 \quad \textbf{[0.25 ptos.]} \\ r^2 &= 0.7295 \end{aligned}$$

Para el modelo $E(Y \,|\, X = x) = \alpha + \beta\, x$:

$$\begin{aligned} s^2_{Y|X} &= \frac{1}{n-2}\left[\sum_{i=1}^n (y_i - [\hat{\alpha} + \hat{\beta}\, \log\, x_i])^2\right] \\ &= \frac{1}{n-2}\left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\,\hat{\alpha}\sum_{i=1}^n y_i - 2\,\hat{\beta}\sum_{i=1}^n y_i \log\, x_i + n\,\hat{\alpha}^2 + 2\,\hat{\alpha}\,\hat{\beta}\sum_{i=1}^n \log\, x_i + \hat{\beta}^2\sum_{i=1}^n (\log\, x_i)^2\right] \\ &= 0.0129 \quad \textbf{[0.25 ptos.]} \\ r^2 &= 0.7903 \end{aligned}$$

En términos de r^2 se prefiere el modelo Y vs. $\log\, X$.

ii. Estimación Puntual

$$y' = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,\log x$$

Para $x = 300$ tenemos que $\log x = 5.7$. Por lo tanto

$$y' = -0.78 + 0.245\, 5.7 = 0.617 \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Un intervalo de confianza al 95 % esta dado por:

$$y_j' \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot S_{Y|X} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\log x_j - \overline{\log x})^2}{\sum_{i=1}^n (\log x_i - \overline{\log x})}} \quad \textbf{[0.3 ptos.]}$$

donde para $x_j = 300$:

$$\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\log x_j - \overline{\log x})^2}{\sum_{i=1}^n (\log x_i - \overline{\log x})}} = \sqrt{\frac{1}{15} - \frac{(5.7 - 6.33)^2}{11.57}} = 0.32 \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Reemplazando tenemos que el intervalo esta dado por:

$$(0.617 - 2.16 \times 0.113 \times 0.32;\ 0.617 - 2.16 \times 0.113 \times 0.32) = (0.539,\ 0.695) \quad \textbf{[0.2 ptos.]}$$

(b) iii. El coeficiente de determinación r^2 se define como:

$$r^2 = 1 - \frac{S^2_{Y|\mathbf{X}}}{S^2_Y} \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Var. Independientes	Modelo ajustado	r^2
X_1, X_2, X_3	$Y' = 1 + 2\,X_1 + 10\,X_2 - 5\,X_3$	0.8264
X_1, X_3	$Y' = 1.2 + 1.5\,X_1 - 3\,X_3$	0.7226
X_1, X_2	$Y' = 2.2 + 1.0\,X_1 + 5\,X_2$	0.7760
X_1	$Y' = 3.2 + 1.2\,X_1$	0.3600

[1.0 ptos.]

iv. Basado el criterio, se escoge el primer modelo dado que es el de menor $S_{Y|\mathbf{X}}$ **[0.5 ptos.]**.

Para $x_1 = 24$; $x_2 = 1$ y $x_3 = 1$ se tiene

$$E(Y \mid X_1 = 24, X_2 = 1, X_3 = 1) = Y' \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Reemplazando

$$Y' = 1 + 2 \times 24 + 10 \times 1 - 5 = 54 \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Formulario:

- Sean $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria con distribución Normal(μ,σ^2), entonces

$$\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,1), \quad \frac{\overline{X}_n-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \text{t}(n-1), \quad \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)},$$

con $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2$.

- Para el modelo de regresión lineal simple $Y=\alpha+\beta\,x$ se tiene que

$$\hat{\alpha}=\overline{y}-\hat{\beta}\,\overline{x}, \quad \hat{\beta}=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}, \quad r^2 = 1-\frac{s^2_{Y|x}}{s^2_Y}$$

$$s^2_{Y|x}=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_i')^2$$

- $\langle \mu_{Y\,|x_i}\rangle_{1-\alpha} = \overline{y}_i \pm t_{(1-\alpha/2),\,n-2}\cdot s_{Y|x}\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{(x_i-\overline{x})^2}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})^2}}$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar

Z_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
∞	1.282	1.645	1.960	2.326