Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2012

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Interrogación	**:**	**2**
Profesor	**:**	**Ricardo Aravena (Sec. 1, 3 y 4) y Ana María Araneda (Sec. 2)**
Ayudantes	**:**	**Carlos Cayuman Cofre, Felipe Ossa Monge, Claudia Reyes Vizcarra y Juan Pablo Vigneaux Ariztía.**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

Como bien saben, en los últimos 20 años (1992-2011) Chile ha enfrentado dos mega-sismos (terremotos con una magnitud superior a los 8° en escala Ritcher: el 30/07/95 en Antofagasta - y el reciente 27/02/10 en las costas de Maule / Biobío). Estadísticamente, la ocurrencia de mega-sismos puede ser modelada, por ejemplo, a través de distribuciones Bernoulli o Poisson.

Consideremos un Modelo Bernoulli:

(a) **[1.2 Ptos]** Si p representa la probabilidad de ocurrencia anual de un mega-sismo, la cual puede obtenerse en base a la información histórica de los últimos 20 años. ¿Cuál sería la probabilidad de que en los próximos 5 años ocurra en Chile uno o más mega-sismos? ¿Qué supuesto es necesario para evaluar esta probabilidad?

Solución: De los datos, podemos utilizar que la probabilidad de ocurrencia de un mega-sismo en un año dado corresponde a $p = 2/20 = 0.1$. Según esto, definimos, para el año $i, i = 1, \ldots, 5$,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{, año } i \text{ ocurre un mega-sismo} \\ 0 & \text{, si no.} \end{cases}$$

El número de mega-sismos en 5 años, $X = \sum_i X_i$, corresponde a una variable aleatoria Binomial(5, 0.1) **[0.2]**. Se pide,

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= 1 - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} 0.1^0\, 0.9^5 \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= 1 - 0.9^5 = 0.41 \qquad \textbf{[0.2]} \end{aligned}$$

Se debe asumir: i) en un año dado, puede ocurrir a lo más un mega-sismo **[0.2]**, e ii) la ocurrencia o no de mega-sismos es independiente de un año a otro. **[0.2]**

(b) **[1.2 Ptos]** ¿Cuál es el periodo de retorno y la probabilidad de observar un mega-sismo durante este período?

Solución: El periodo de retorno corresponde al número esperado de años hasta que ocurre el próximo mega-sismo,

$$\frac{1}{p} = 10 \text{ (años).} \qquad \textbf{[0.4]}$$

Para calcular la probabilidad pedida:

Alternativa 1: Sea X : número de mega-sismos en próximos 10 años. X distribuye Binomial(10, 0.1) **[0.2]**. Se pide

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= 1 - 0.9^{10} \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= 0.651. \qquad \textbf{[0.2]} \end{aligned}$$

Alternativa 2: Sea T : número de años hasta el primer mega-sismo, a partir de ahora. T distribuye Geom(0.1) **[0.2]**. Se pide

$$\begin{aligned} P(T \leq 10) &= \sum_{t=1}^{10} P(T = t) \\ &= \sum_{t=1}^{10} 0.1\, 0.9^{t-1} \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= 0.1 \sum_{t=1}^{10} 0.9^{t-1} = 0.1\, \frac{1 - 0.9^{10}}{0.1} \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= 1 - 0.9^{10} = 0.651. \qquad \textbf{[0.2]} \end{aligned}$$

Consideremos un Modelo Poisson:

(c) **[1.2 Ptos]** Si la tasa de ocurrencia anual puede determinarse en base a la información histórica de los últimos 20 años, ¿cuál es la probabilidad que en los próximos 5 años ocurra en Chile uno o más mega-sismos? Compare su resultado con el obtenido en (a) y comente.

Solución: Sea X el número de mega-sismos que ocurre en un período de 5 años. La tasa del proceso es de $\nu = 2/20 = 0.1$ **[0.3]**, luego, X distribuye Poisson(5 ν), es decir Poisson(0.5) **[0.3]**. Se pide

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= 1 - \frac{e^{-0.5} 0.5^0}{0!} = 0.393. \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

Comparando con la respuesta en (a), 0.41, los modelos Bernoulli y Poisson entregan resultados similares.

Por otra parte, las normas de construcción en Chile son tales que los edificios deben tener una capacidad de soportar sismos. La intensidad del movimiento producto de un mega-sismo que afecta a las construcciones se puede modelar a través de una distribución Log-Normal cuya mediana es 0.2 g (g: aceleración gravitacional) y cuyo coeficiente de variación (c.o.v.) es 25 %. Un edificio sufrirá daños si la intensidad del movimiento supera su capacidad sísmica. (Puede utilizar que la mediana de una distribución Log-Normal corresponde a e^{λ})

(d) **[1.2 Ptos]** Si un edificio en particular tiene una capacidad sísmica de 0.3 g, determine la probabilidad que el edificio sufra daño producto de la intensidad del movimiento del mega-sismo.

Solución: Sea Y la intensidad del mega-sismo. Los parámetros de su distribución (Log-Normal) pueden obtenerse a partir de los datos como

$$\zeta \approx \text{c.o.v} = 0.25,\ \textbf{[0.2]} \qquad \lambda = \log(0.2) + \log g = -1.61 + \log g.\ \textbf{[0.2]}$$

La probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(Y > 0.3g) &= 1 - \Phi\left(\frac{(log(0.3) + \log g) - (-1.61 + \log g)}{0.25}\right) \qquad \textbf{[0.4]} \\ &= 1 - \Phi(1.62) \qquad \textbf{[0.1]} \\ &= 1 - 0.9474 \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= 0.0526. \qquad \textbf{[0.1]} \end{aligned}$$

(e) **[1.2 Ptos]** Determine la probabilidad que el edificio con capacidad sísmica de 0.3 g. no sufra daño producto por mega-sismos en los próximos 5 años.

Solución:

Alternativa 1: A través de modelo Bernoulli. Para un año dado, sean A : ocurre un mega-sismo y B : el edificio **no** sufre daño como producto de un mega-sismo. Luego,

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = (1 - 0.0526) \times 0.1 + 1 \times 0.9 = 0.9947. \qquad \textbf{[0.6]}$$

La probabilidad pedida es

$$0.9947^5 = 0.9738. \qquad \textbf{[0.6]}$$

Alternativa 2: A través de modelo Poisson. Para los cinco años, definimos los eventos A_i : ocurren exactamente i mega-sismos en los 5 años, y B: el edidicio no sufre daño en los 5 años.

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i) \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(1 - 0.0526)^i\ \frac{e^{-0.5}0.5^i}{i!} \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= e^{-0.5}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(0.9474 \times 0.5)^i}{i!} \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= e^{-0.5}e^{0.9474\times 0.5} = 0.9740. \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

+ [1.0] base

Problema 2

La PSU de Matemáticas está compuesta por 75 preguntas y el tiempo disponible para rendirla es 2 horas y 15 minutos. Un alumno se ha preparado "mecánicamente" para rendirla, de tal forma que frente a cada problema el responde si o sí (correcta o incorrectamente) de acuerdo a la siguiente distribución de probabilidad:

- Tarda 60 segundos con probabilidad 0.2.
- Tarda 90 segundos con probabilidad 0.4.
- Tarda 120 segundos con probabilidad 0.3.
- Tarda 150 segundos con probabilidad 0.1.

Calcule aproximadamente la probabilidad de no alcanzar a responder la prueba completa en el tiempo asignado.

Solución

Sea X_i: tiempo discreto en responder la pregunta i. Es claro que la distribución de X_i es la misma para $i = 1, \ldots, 75$. Por tanto, obtenemos $E(X)$ y $V(X)$. Así,

$$\begin{aligned}
\mu &= E(X) = \sum t_i P(X = t_i) \\
&= 60 \times 0.2 + 90 \times 0.4 + 120 \times 0.3 + 150 \times 0.1 \\
&= 99. \qquad \textbf{[1.0]}
\end{aligned}$$

Podemos obtener la varianza usando el segundo momento:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum t_i^2 P(X = t_i) \\
&= 60^2 \times 0.2 + 90^2 \times 0.4 + 120^2 \times 0.3 + 150^2 \times 0.1 \\
&= 10530. \\
V(X) &= 10530 - 99^2 = 729. \qquad \textbf{[1.0]}
\end{aligned}$$

O bien como

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum (t_i - \mu)^2 P(X = t_i) \\
&= (60 - 99)^2 \times 0.2 + (90 - 99)^2 \times 0.4 + (120 - 99)^2 \times 0.3 + (150 - 99)^2 \times 0.1 \\
&= 729. \qquad \textbf{[1.0]}
\end{aligned}$$

Por tanto $\sigma = \sqrt{729} = 27$. Ahora, aplicamos el Teorema Central del Límite. Es decir,

$$\begin{aligned}
T = \sum X_i &\backsim N(75 \times 99;\ \sqrt{75} \times 27) \\
&\backsim N(7425;\ 233.83). \quad \textbf{[2.0]}
\end{aligned}$$

Nos piden:

$$\begin{aligned}
P(T > 2\text{hrs } 15 \text{ min}) &= P(T > 8100) \qquad \textbf{[1.0]} \\
&= 1 - P(T \leq 8100) = 1 - P\left(Z \leq \frac{8100 - 7425}{233,83}\right) \\
&= 1 - \Phi(2.89) \\
&= 1 - 0.9981 = 0.0019. \qquad \textbf{[1.0]}
\end{aligned}$$

+ [1.0] base

Problema 3

Un proyecto de ingeniería tiene establecido en su carta Gantt tres etapas: A, B y C. Suponga que los tiempos de ejecución de cada etapa se comportan como variables aleatorias independientes con distribución Normal con valor esperado y desviación estándar en días: (50, 10), (45, 15) y (80, 25), respectivamente. Las etapas A y B se realizan en paralelo, mientras que la etapa C necesita que las dos anteriores hayan finalizado previamente.

(a) **[2.0 Ptos]** Calcule la probabilidad que la etapa A finalice antes que la etapa B.

Solución: Sean X_1, X_2 y X_3 los tiempos de ejecución de las etapas A, B y C, respectivamente, en días. Se tiene

$$X_1 \sim Normal(50, 10), \qquad X_2 \sim Normal(45, 15), \qquad X_3 \sim Normal(80, 25).$$

Se pide $P(X_1 < X_2) = P(X_1 - X_2 < 0) = P(Z < 0)$, donde $Z = X_1 - X_2$ **[0.4]**. Z tiene distribución Normal de media y desviación estándar

$$\mu_Z = 50 - 45 = 5, \ \textbf{[0.4]} \qquad \sigma_Z = \sqrt{10^2 + 15^2} = 18.03. \ \textbf{[0.4]}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(Z < 0) &= \Phi\left(\frac{0-5}{18.03}\right) \ \textbf{[0.2]} \\ &= \Phi(-0.28) \ \textbf{[0.1]} \\ &= 1 - \Phi(0.28) \ \textbf{[0.2]} \\ &= 1 - 0.6103 \ \textbf{[0.2]} \\ &= 0.3897. \ \textbf{[0.1]} \end{aligned}$$

(b) **[2.0 Ptos]** Calcule la probabilidad que la etapa C comience a más tardar el día 60.

Solución: La etapa C comienza cuando han terminado las etapas A y B, por lo tanto se requiere que ambas demoren menos de 60 días. Es decir, se pide $P((X_1 < 60) \cap (X_2 < 60)) = P(X_1 < 60) \times P(X_2 < 60)$ **[0.5]**, puesto que las variables son independientes. **[0.2]**

$$\begin{aligned} P(X_1 < 60) &= \Phi\left(\frac{60-50}{10}\right) = \Phi(1) = 0.8413. \qquad \textbf{[0.5]} \\ P(X_2 < 60) &= \Phi\left(\frac{60-45}{15}\right) = \Phi(1) = 0.8413. \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

Luego, la probabilidad pedida es $0.8413^2 = 0.7079$. **[0.3]**

(c) **[2.0 Ptos]** Con el objeto de estimar los montos que deben ser destinados a salarios de los empleados, interesa estudiar el total de días trabajados. Calcule la probabilidad de que el total de días que deban ser cancelados por este concepto sea menor a 200.

Solución: Se pide $P(X_1 + X_2 + X_3 < 200) = P(Z < 200)$, donde $Z = X_1 + X_2 + X_3$ **[0.4]**. Z tiene distribución Normal de media y desviación estándar

$$\mu_Z = 50 + 45 + 80 = 175, \ \textbf{[0.4]} \qquad \sigma_Z = \sqrt{10^2 + 15^2 + 25^2} = 30.82. \ \textbf{[0.4]}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(Z < 200) &= \Phi\left(\frac{200-175}{30.82}\right) \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= \Phi(0.81) \qquad \textbf{[0.2]} \\ &= 0.7910. \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

+ [1.0] base

Problema 4

En la licitación 1971-38-CO06 "Curso introductorio de análisis estadístico e inferencial", hubo 4 proponentes con valores: M\$2178, M\$1254, M\$1472, y M\$1920. En este caso se adjudicó a la tercera institución (M\$1472), pero cabe preguntarse cuál es el valor real del curso.

De acuerdo a antecedentes históricos, todas aquellas propuestas inferiores a 100 UTM pueden ser modeladas de acuerdo a una variable aleatoria bidimensional (X, Y), donde X representa el monto asignado previamente al servicio, expresado en UTMs, (de alguna manera, éste corresponde al precio "real"del servicio), el que no puede ser superior a las 100 UTM, e Y representa el monto, también en UTMs, por el cual es seleccionada la propuesta ganadora (es decir, el valor con sobreprecio o precio inferior al precio real), el cual puede ser, como máximo 200 UTM, con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{100^2}, \qquad \text{para} \quad 0 < x < 100, \;\; 0 < y < 2\,x,$$

y cero en otro caso.

(a) **[3.0 Ptos]** Si el valor de la propuesta seleccionada es de 60 UTM, ¿cuál es el monto esperado del valor asignado de la propuesta?

Solución: Se requiere $f_{X|Y=60}$. Para ello

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{y/2}^{100} f_{X,Y}(x,y)\,dx \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= \int_{y/2}^{100} \frac{1}{100^2}\,dx \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= \frac{1}{100^2}\left(100 - \frac{y}{2}\right), \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

para $0 < y < 200$, cero en otro caso. **[0.3]** Luego,

$$f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{100^2}}{\frac{1}{100^2}\left(100 - \frac{y}{2}\right)} = \frac{2}{200-y}, \qquad \textbf{[0.3]}$$

para $0 < y < 200, y/2 < x < 100$ **[0.3]**, cero en otro caso. **[0.3]** Luego,

$$\begin{aligned} E(X|Y=y) &= \int_{y/2}^{100} x\,\frac{2}{200-y}\,dx \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= \frac{2}{200-y}\,\frac{1}{2}\left(100^2 - \frac{y^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{200-y}\left(100^2 - \frac{y^2}{4}\right). \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

Para $y = 60$, se obtiene

$$E(X|Y=60) = \frac{1}{200-60}\left(100^2 - \frac{60^2}{4}\right) = 65. \qquad \textbf{[0.3]}$$

(b) **[3.0 Ptos]** Aparentemente, las empresas que prestan servicios al estado reciben información de mala forma (por ejemplo, conocen los montos previamente asignados a éste) y usan ésta para su postulación. Determine un coeficiente de asociación entre los montos previamente asignados y el monto al que es asignada la propuesta (es decir, obtenga $\text{Cov}(X, Y)$).

Solución: Se necesitan $E(X), E(Y), E(XY)$.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{2x} \frac{1}{100^2}\, dy \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= \frac{2x}{100^2}, \text{ para } 0 < x < 100, \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

cero en otro caso. **[0.3]** Luego,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{100} \frac{2x^2}{100^2}\, dx \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= 66.67.\textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

Por otra parte, f_Y se obtuvo en (a), luego,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{200} \frac{y}{100^2}\left(100 - \frac{y}{2}\right)\, dy \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= 66.67. \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^{100}\int_0^{2x} x\; y\; f_{X,Y}(x,y)\; dy\; dx \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= \frac{1}{100^2}\int_0^{100}\int_0^{2x} x\; y\; dy\; dx \\ &= \frac{1}{100^2}\int_0^{100} 2\; x^3\; dx \\ &= 5000. \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

Luego,

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\; E(Y) = 5000 - 66.67^2 = 555.11. \qquad \textbf{[0.3]}$$

+ [1.0] base

Tiempo: 2 Horas

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Formulario

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\,e^{-u}\,du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$:

$$(1)\quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2)\quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\,\nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\,b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=a}^{b} \phi^k = \frac{\phi^a - \phi^{b+1}}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998