Problema 1

Considere una población la cual tiene una variable aleatoria Y que se rige por una distribución de Poisson. Esta población está segmentada en k grupos dentro los cuales la variable aleatoria Y tiene una tasa esperada $\lambda\,\theta_i$, con θ_i conocido, para $i = 1, \ldots, k$. Sean $y_1, \ldots, y_k$ muestras aleatorias de tamaño uno de cada uno de los k grupos.

(a) Obtenga el estimador máximo verosímil del parámetro λ.

(b) ¿Es el estimador obtenido en (a) insesgado? Calcule su varianza.

Solución

(a) Tenemos que $y_1, \ldots, y_k$ son las realizaciones de las variable aleatorias $Y_1, \ldots, Y_k$ independientes (por ser aleatorias) con distribución Poisson$(\lambda\,\theta_i)$ para $i = 1, \ldots, k$.

La función de verosimilitud esta dada por

$$\begin{aligned}
L(y_1, \ldots, y_k, \lambda) &= P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_k = y_k) \\
&= \prod_{i=1}^{k} P(Y_i = y_i), \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \frac{(\lambda\,\theta_i)^{y_i}\, e^{-\lambda\,\theta_i}}{y_i!} \\
&= \frac{\lambda^{\left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right)} \left[\prod_{i=1}^{k} \theta_i^{y_i}\right] \exp\left\{-\lambda\left(\sum_{i=1}^{k}\theta_i\right)\right\}}{\left[\prod_{i=1}^{k} y_i!\right]} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Aplicando logaritmo natural se tiene

$$\ln L(y_1, \ldots, y_k, \lambda) = \left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right) \ln\lambda + \sum_{i=1}^{k} y_i \ln\theta_i - \lambda\left(\sum_{i=1}^{k}\theta_i\right) - \sum_{i=1}^{k} \ln y_i! \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Derivando con respecto a λ

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L(y_1, \ldots, y_k, \lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{k}\theta_i\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Igualando a cero y despejando se tiene que

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i}{\sum_{i=1}^{k} \theta_i} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(b) El valor esperado de $\hat{\lambda}$ es

$$E(\hat{\lambda}) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} E(Y_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \theta_i} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda\,\theta_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \theta_i} = \frac{\lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \theta_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \theta_i} = \lambda \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Por lo tanto $\hat{\lambda}$ es un estimador insesgado para λ. **[0.5 Ptos.]**

Su varianza es

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(\hat{\lambda}) &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbf{Var}(Y_i)}{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \theta_i\right]^2}, \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda\,\theta_i}{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \theta_i\right]^2} = \frac{\lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \theta_i}{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \theta_i\right]^2} \\
&= \frac{\lambda}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \theta_i} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Producto de la Copa Mundial de la FIFA Sudáfrica 2010 es común ver que compañeros de trabajo y grupos de amigos estén organizando la típica Polla Mundialera, la cual consiste en determinar los dos países que llegaran a la final que se jugará en Johannesburgo el Domingo 11 de Julio. Sin embargo, dada las características del mundial no todas las apuestas son "válidas" (hay parejas que de una u otra forma se eliminan entre si antes de la final). Usted, ha conversado con varias personas que han participado las últimas semanas en este tipo de juego y piensa que más del 20 % ha indicado parejas imposibles. Con el objetivo de demostrarlo estadísticamente consigue usted una muestra aleatoria de 100 volantes (apuestas) y determina que 28 de ellas son parejas imposibles.

(a) Para un nivel del significancia del 5 %, ¿existe evidencia estadística que permita validar su hipótesis?

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de apuestas válidas tenga un ancho no superior a 0.05?

Solución

(a) Sea p la proporción de apuestas no "válidas".

Las hipótesis de interés son:

$$\mathrm{H}_0 : p = p_0 \quad \text{vs.} \quad \mathrm{H}_a : p > p_0, \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

con $p_0 = 0{,}2$.

Bajo H_0 se tiene que

$$\hat{p} \stackrel{\cdot}{\sim} \text{Normal}\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

lo que implica que el estadístico de prueba

$$Z_n = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} \stackrel{\cdot}{\sim} \text{Normal}(0,1) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Reemplazando

$$Z_n = \frac{0{,}28 - 0{,}2}{\sqrt{\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{100}}} = 2 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Alternativa 1

Se rechaza H_0 si

$$Z_n > k_{1-\alpha}$$

Para un nivel de significancia del 5 % se tiene que $k_{1-0,05} = 1{,}645$ **[0.5 Ptos.]**, es decir, existe suficiente evidencia estadística para decir que más de un 20 % de las apuestas son no "válidas". **[0.5 Ptos.]**

Alternativa 2

Tenemos que el valor-p $= P(Z > Z_n)$ con $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$.

$$\begin{aligned} P(Z > 2) &= 1 - P(Z \leq 2) \\ &= 1 - \Phi(2) \\ &= 1 - 0{,}9772 \\ &= 0{,}0228 \\ &= 2,28\,\% \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \end{aligned}$$

Se rechaza H_0 si el valor-p $< \alpha$.

Para un nivel de significacia del 5 % existe evidencia suficiente estadística para decir que más de un 20 % de las apuestas son no "válidas". **[0.5 Ptos.]**

(b) **Alternativa 1**

Tenemos que un intervalo de confianza a un nivel $(1-\alpha)\,100\,\%$ para p utilizando la información muestral esta dado por

$$< p >_{1-\alpha} = \hat{p} \pm k_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Para $1 - \alpha = 0{,}90$ tenemos que $1 - \alpha/2 = 0{,}95 \Rightarrow k_{0{,}95} = 1{,}645$ **[0.5 Ptos.]**

Se pide que

$$2\,k_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} = 2 \cdot 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}28\,(1-0{,}28)}{n}} = 0{,}05 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Despejando

$$n = \left(\frac{2 \cdot 1{,}645 \cdot \sqrt{0{,}28\,(1-0{,}28)}}{0{,}05}\right)^2 = 872{,}8554 \quad \textbf{[0.8 Ptos.]}$$

Por lo tanto el tamaño mínimo de la muestra debe ser $n = 873$. **[0.2 Ptos.]**

Alternativa 2

Tenemos que un intervalo de confianza a un nivel $(1-\alpha)\,100\,\%$ para p utilizando el criterio de varianza máxima esta dado por

$$< p >_{1-\alpha} = \hat{p} \pm k_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4\,n}} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Para $1 - \alpha = 0{,}90$ tenemos que $1 - \alpha/2 = 0{,}95 \Rightarrow k_{0{,}95} = 1{,}645$ **[0.5 Ptos.]**

Se pide que

$$2\,k_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4\,n}} = 2 \cdot 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{1}{4\,n}} = 0{,}05 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Despejando

$$n = \left(\frac{2 \cdot 1{,}645 \cdot \sqrt{1/4}}{0{,}05}\right)^2 = 1082{,}41 \quad \textbf{[0.8 Ptos.]}$$

Por lo tanto el tamaño mínimo de la muestra debe ser $n = 1083$. **[0.2 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 3

Se ha dicho que el monto (en miles de $) que los usuarios del Transantiago disponen en su tarjeta Bip! sigue una distribución estadística con medina 2 y coeficiente de variación 1. Una muestra aleatoria de 100 tarjetas entrega la siguiente información:

Monto (miles de $)	$[0-2)$	$[2-4)$	$[4-6)$	$[6-8)$	$+8$
Frecuencia	49	29	10	5	7

Entre una distribución Exponencial y Log-Normal, ¿cuál es más apropiada?. Sea explícito y fundamente su respuesta.

Solución

Test de Bondad de Ajuste χ^2 para una distribución Exponencial y Log-Normal con Mediana igual a 2 y c.o.v igual a 1

Sean las siguientes hipótesis:

$$\text{H}_0 : \text{Datos} \sim \text{Exponencial}(\nu) \text{ vs. } \text{H}_a : \text{Datos} \not\sim \text{Exponencial}(\nu) \tag{1}$$

$$\text{H}_0 : \text{Datos} \sim \text{LogNormal}(\lambda, \zeta) \text{ vs. } \text{H}_a : \text{Datos} \not\sim \text{LogNormal}(\lambda, \zeta) \tag{2}$$

Para (1) tenemos que:

$$\text{Mediana} = \frac{\log(2)}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{\log(2)}{2} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Para (2) tenemos que:

$$\text{Mediana} = \exp(\lambda) \Rightarrow \lambda = \log(2) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

$$\zeta^2 = \log(1+\delta^2) \Rightarrow \zeta = \sqrt{\log(2)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Para el calculo de las probabilidades teóricas utilizamos que

$$\text{Si } X \sim\text{Exponencial}(\nu) \Rightarrow P(X \leq x) = 1 - e^{-\nu \cdot x} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

$$\text{Si } X \sim\text{Log-Normal}(\lambda, \zeta) \Rightarrow P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Monto	Frecuencia Observada	Probabilidad Teórica		Frecuencia Esperada (E_i)		$(O_i - E_i)^2/E_i$	
(miles de $)	(O_i)	Exponencial	Log-Normal	Exponencial	Log-Normal	Exponencial	Log-Normal
$[0-2)$	49	0,5000	0,5000	50,000	50,000	0,0200	0,0200
$[2-4)$	29	0,2500	0,2975	25,000	29,750	0,6400	0,0189
$[4-6)$	10	0,1250	0,1091	12,500	10,910	0,5000	0,0759
$[6-8)$	5	0,0625	0,0455	6,250	4,550	0,2500	0,0445
$+8$	7	0,0625	0,0479	6,250	4,790	0,0900	1,0196
$\sum$	100	1,0000	1,0000	100,000	100,000	1,5000	1,1790
		[1.0 Ptos.]	**[1.0 Ptos.]**	**[0.5 Ptos.]**	**[0.5 Ptos.]**	**[0.5 Ptos.]**	**[0.5 Ptos.]**

En ambos casos al comparar con una distribución $\chi^2_{(k-1)-0} = \chi^2_4$ el valor-p se encuentra entre un 10 % y un 90 % **[0.5 Ptos.]**, esto implica que ambas distribuciones propuestas ajustan bien a los datos para un nivel de significancia del 10 % y entre las dos, el mejor ajuste se logra asumiendo una distribución Log-Normal. **[0.5 Ptos.]**

+ 1 Punto Base

Problema 4

El artículo "Promising Quantitative Nondestructive Evaluation Techniques for Composite Materials" (Materials Evaluation 1985, pp. 561-565) reporta sobre un estudio que investiga la forma en que la propagación de una onda de esfuerzo ultrasónico que pasa por una sustancia depende de las propiedades de la sustancia. Se dispone de datos sobre la resistencia a la fractura (X, como porcentaje de resistencia final a la tracción) y la atenuación (disminución en amplitud de la onda de esfuerzo, que denotaremos por Y, en neper/cm) en materiales compuestos por fibra de vidrio y poliéster reforzado. Las cantidades para 14 pruebas son resumidas como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 890; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 67182; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 37{,}6; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 103{,}54; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 2234{,}3$$

(a) Estime el modelo de regresión lineal de Y vs. X. Entregue los estadísticos asociados.

(b) Asumiendo normalidad, determine la probabilidad que la atenuación se encuentre entre 2,5 y 2,8 cuando el porcentaje de resistencia final a la tracción alcanza un 50 %.

(c) Obtenga el intervalo de confianza al 90 % para la atenuación cuando $X = 63{,}57$. Para el mismo nivel de confianza indique para qué otro valor de X el intervalo de confianza para atenuación puede resultar más preciso que el obtenido anteriormente.

Solución

Formulario

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Normal(μ, σ), entonces

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,1), \quad \frac{\overline{X}_n - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim \text{t-student}(n-1), \quad \frac{s^2\,(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

con $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

- Para un modelo de regresión simple $y' = \alpha + \beta \cdot x$ se tiene que

$$\hat{\beta} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \quad \hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\cdot\overline{x}, \quad r^2 = 1 - \frac{s^2_{Y|X}}{s^2_Y}, \quad s^2_{Y|X} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i')^2, \quad s^2_Y = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

$$\hat{\rho}^2 = 1 - \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\cdot\frac{s^2_{Y|X}}{s^2_Y}, \quad s^2_X = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\, e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$
Exponencial	$\nu\, e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Gamma Trasladada	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,(x-\gamma)^{k-1}\, e^{-\nu\,(x-\gamma)}$	$x \geq \gamma$	$k,\ \nu,\ \gamma$	$\mu_X = k/\nu + \gamma$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\ \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\,\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\ \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r+1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\,e^{-u}\,du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a); \quad (3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$:

$$(1)\quad B(q,\,r) = \int_0^\infty x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2)\quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$
1	3,078	6,314	12,706	31,821
2	1,886	2,920	4,303	6,965
3	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,476	2,015	2,571	3,365
6	1,440	1,943	2,447	3,143
7	1,415	1,895	2,365	2,998
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764
11	1,363	1,796	2,201	2,718
12	1,356	1,782	2,179	2,681
13	1,350	1,771	2,160	2,650
14	1,345	1,761	2,145	2,624
15	1,341	1,753	2,131	2,602
16	1,337	1,746	2,120	2,583
17	1,333	1,740	2,110	2,567
18	1,330	1,734	2,101	2,552
19	1,328	1,729	2,093	2,539
20	1,325	1,725	2,086	2,528
21	1,323	1,721	2,080	2,518
22	1,321	1,717	2,074	2,508
23	1,319	1,714	2,069	2,500
24	1,318	1,711	2,064	2,492
25	1,316	1,708	2,060	2,485
26	1,315	1,706	2,056	2,479
27	1,314	1,703	2,052	2,473
28	1,313	1,701	2,048	2,467
29	1,311	1,699	2,045	2,462
30	1,310	1,697	2,042	2,457
∞	1,282	1,645	1,960	2,326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$

ν	$c_{0,025}$	$c_{0,05}$	$c_{0,10}$	$c_{0,90}$	$c_{0,95}$	$c_{0,975}$	$c_{0,99}$	$c_{0,995}$
1	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93