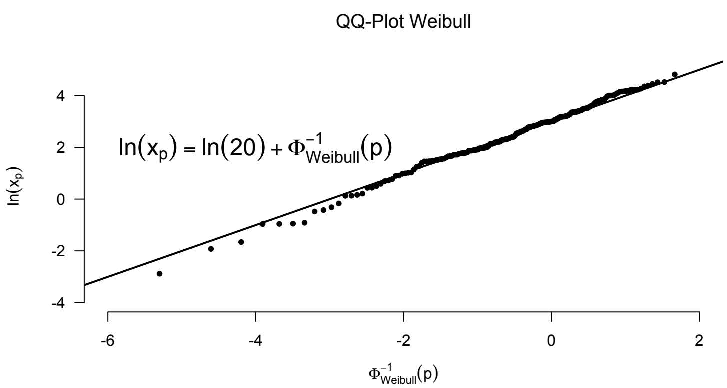
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2016

| | | |
|---|---|---|
| **Curso** | **:** | **Probabilidad y Estadística** |
| **Sigla** | **:** | **EYP1113** |
| **Interrogación** | **:** | **2** |
| **Profesores** | **:** | **Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.** |

## Problema 1

Suponga que el nivel de radiación solar ($\text{Wh}/\text{m}^2$) en distintos puntos del país se comporta como una variable aleatoria Weibull($\eta$, $\beta$) durante las horas de sol. Calcule la probabilidad (exacta o aproximada) que la radiación mínima diaria de 20 mediciones independientes durante 100 días, en promedio sea mayor a 1,154 $\text{Wh}/\text{m}^2$. El gráfico de probabilidad de las 2000 mediciones es el siguiente:




## Solución

Definamos $X_{ij}$ como la $i$-ésima medición de radiación solar durante horas de sol en el $j$-ésimo día y como $Y_j = \text{mín}\{X_{1\,j}, \ldots, X_{20\,j}\}$ con $j = 1, \ldots, 100$.

A partir del QQ-Weibull tenemos que

**[1.0 Ptos.]** $X_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Weibull}(\eta = 20,\, \beta = 1) = \text{Exponencial}(\nu = 1/20) \to Y_j \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exponencial}(1)$ **[2.0 Ptos.]**

Se pide $P(\overline{Y}_{100} > 1{,}154)$, donde

$$\overline{Y}_{100} \sim \text{Gamma}(k = 100,\, \nu = 100) \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{Normal}(1,\, 1/10)$$ **[2.0 Ptos.]**

Luego

$$P(\overline{Y}_{100} > 1{,}154) = 1 - P(\overline{Y}_{100} \leq 1{,}154) \approx 1 - \Phi\,(1{,}54) = 1 - 0{,}9382 = 0{,}0618$$ **[1.0 Ptos.]**

**+ 1 Punto Base**

**Problema 2**

La autoridad ha anunciado fuertes marejadas para este fin de semana. De acuerdo a estudios, es posible asumir que la altura de las olas durante este tipo de marejadas se comportan como una variable aleatoria Gamma con coeficiente de variación igual a un 50 % y una esperanza de 2 metros. Además, el número de olas se rige de acuerdo a un proceso de Poisson con una tasa esperada de 1.5 olas por minuto. Un restaurante ubicado en la costa dispone de defensas que soportan hasta dos olas sobre los 4 metros. Determine la probabilidad que una vez abierto el restaurante, este deba cerrar antes de 20 minutos debido a una inundación producidas por las fuertes marejadas.

**Solución**

Definamos como $X_t$ al número de olas que se generan en $t$ minutos e $Y_t$ al número de olas sobre los 4 metros que se generan en $t$ minutos.

Si $Z$ es la altura de una ola cualquiera, la cual se comporta como una variable aleatoria Gamma($k = 4$, $\nu = 2$).

Del enunciado tenemos que

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \quad X_t \sim \text{Poisson}(1{,}5 \cdot t) \quad \text{e} \quad Y_t \,|\, X_t = x \sim \text{Binomial}(n = x,\, p) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

con

$$p = P(Z > 4) = \sum_{k=0}^{4-1} \frac{(4 \cdot 2)^k \, e^{-4 \cdot 2}}{k!} = 0{,}04238011 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Por teorema de probabilidades totales se puede mostrar que

$$Y_t \sim \text{Poisson}(1{,}5 \cdot t \cdot p) \quad \textbf{[2.0 Ptos.]}$$

Se pide

$$P(Y_{20} > 2) = 1 - P(Y_{20} \leq 2) = 1 - \sum_{y=0}^{2} \frac{(30 \cdot p)^y \, e^{-30 \cdot p}}{y!} = 1 - 0{,}8636465 = 0{,}1363535 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

**Alternativa**:

Definir $T_3$ como el tiempo (en minutos) transcurrido hasta la llegada de la 3ra ola sobre 4 metros

$$T_3 \sim \text{Gamma}(k = 3,\, \nu = 1{,}5 \cdot p) \quad \textbf{[2.0 Ptos.]}$$

Se pide

$$P(T_3 \leq 20) = 1 - \sum_{y=0}^{2} \frac{(1{,}5 \cdot p \cdot 20)^y \, e^{-1{,}5 \cdot p \cdot 20}}{y!} = 1 - 0{,}8636465 = 0{,}1363535 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

**+ 1 Punto Base**

**Problema 3**

Un asesor de inversiones piensa que las rentabilidades históricas diarias que ha entregado cierta acción transada en la Bolsa de Santiago puede ser modelada por una distribución t-Student($\nu$), pero no recuerda como es su función de densidad. Al consultar a un especialista, este le dice que la puede obtener dividiendo $Z$ por $\sqrt{U/\nu}$, con $Z$ una variable aleatoria Normal(0,1) y $U$ una variable aleatoria Gamma($\nu/2, 1/2$), ambas independientes. El asesor le pide a usted que muestre paso a paso como obtener la función de densidad t-Student($\nu$).

**Solución**

Por demostrar que $T = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}} \sim$ t-Student($\nu$), con $Z$ y $U$ variables aleatorias independientes con distribución Normal(0, 1) y Gamma($\nu/2$, 1/2) respectivamente.

Tenemos que $T = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}} \to Z = T\sqrt{\frac{U}{\nu}}$ **[0.5 Ptos.]**, donde

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z,U}(t\sqrt{u/\nu},\, u)\left|\sqrt{\frac{u}{\nu}}\right| du \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t\sqrt{u/\nu})\cdot f_U(u)\sqrt{\frac{u}{\nu}}\, du \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \int_{0}^{+\infty} f_Z(t\sqrt{u/\nu})\cdot f_U(u)\,\frac{u^{1/2}}{\nu^{1/2}}\, du \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-t^2\,u/2\,\nu}\cdot\frac{(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)}\, u^{\nu/2-1}\, e^{-u/2}\cdot\frac{u^{1/2}}{\nu^{1/2}}\, du \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{(1/2)^{1/2}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-t^2\,u/2\,\nu}\cdot\frac{(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)}\, u^{\nu/2-1}\, e^{-u/2}\cdot\frac{u^{1/2}}{\nu^{1/2}}\, du \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{(1/2)^{(\nu+1)/2}\,\nu^{-1/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu/2)}\int_{0}^{+\infty} u^{(\nu+1)/2-1}\, e^{-u(t^2/\nu+1)/2} du \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{(1/2)^{(\nu+1)/2}\,\nu^{-1/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu/2)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\left(\frac{t^2}{2\,\nu}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}\int_{0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{t^2}{2\,\nu}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}\, u^{(\nu+1)/2-1}\, e^{-u(t^2/\nu+1)/2} du \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{(1/2)^{(\nu+1)/2}\,\nu^{-1/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu/2)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\left(\frac{t^2}{2\,\nu}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}\cdot 1, \text{ por área sobre todo el soporte de una Gamma}\left(\frac{\nu+1}{2},\, \frac{t^2}{2\,\nu}+\frac{1}{2}\right) \textbf{[1.0 Ptos.]}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi\,\nu}\,\Gamma(\nu/2)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)^{\frac{\nu+1}{2}}} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}\\
&= \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\,\nu}\,\Gamma(\nu/2)}\left(\frac{t^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $T \sim$ t-Student($\nu$)

**+ 1 Punto Base**

**Problema 4**

La probabilidad de éxito en bandas especializadas en el robo de cajeros automáticos vía saturación de gas se comporta como una variable aleatoria Beta$(3, 2)$. ¿Cuál es el número esperado de intentos que una banda debería realizar hasta logra el segundo botín?

**Solución**

Sea $Y$ el número de intentos hasta que una banda logra el segundo botín ey $X$ la probabilidad de éxito que puede tener una banda.

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \quad Y \,|\, X = x \sim \text{Binomial-Negativa}(k = 2,\, p = x) \quad \text{y} \quad X \sim \text{Beta}(3, 2) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

con $\Theta_X = [0, 1]$ **[0.5 Ptos.]** y $\Theta_{Y\,|\,X=x} = k,\, k+1,\, k+2, \ldots$.

Se pide

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E[E(Y \,|\, X)] \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= E(2/X) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \int_0^1 2\, x^{-1}\, \frac{x^{3-1}\,(1-x)^{2-1}}{B(3,2)}\, dx \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{2 \cdot B(2,2)}{B(3,2)} \int_0^1 \frac{x^{2-1}\,(1-x)^{2-1}}{B(2,2)}\, dx \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{2 \cdot B(2,2)}{B(3,2)} \cdot 1, \quad \text{por área sobre todo el soporte de una Beta(2,2)} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\
&= 4 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

**+ 1 Punto Base**