Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2010

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**Examen**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena (Sec 02 y 03) y Ricardo Olea (Sec 01)**
Ayudantes	**:**	**Pablo Flores, Constanza Quezada, Victoria Veas.**

Problema 1 [15 %]

Urbana es una ciudad que se encuentra en el **Condado de Champaign**, **Illinois**, en la zona de las llanuras del Medio Oeste de Estados Unidos. En esta área pueden ocurrir fuertes tormentas de viento con velocidades superiores a los 96 kilómetros por hora. En algunas ocasiones estas tormentas pueden generar tornados cuyas velocidades pueden ser aún mayores. Suponga que queremos evaluar la probabilidad anual de daños estructurales en casas residenciales en la ciudad de **Urbana**.

En base a datos históricos se determinó que tormentas con fuertes vientos ocurren en el **Condado de Champaign** aproximadamente una vez cada dos años y la probabilidad que ocurra un tornado durante una tormenta es de 0,25. Por otra parte, la probabilidad que un tornado en el **Condado de Champaign** afecte a la ciudad de **Urbana** es 0,15.

Sobre la base de cálculos de ingeniería, se determinó que la probabilidad de daño severo a las casas en **Urbana** durante una tormenta de viento (en ausencia de tornado) es de 0,05. Si ocurre un tornado en el condado, pero que no afecta a la ciudad de Urbana, la probabilidad de daño severo a las casas aumenta a 0,10 y si el tornado afecta a la ciudad, un daño severo en una o más casas en **Urbana** ocurre de todas maneras.

Determine la probabilidad que durante una tormenta de fuertes vientos, ésta ocasione daños graves en las casas de **Urbana**.

Solución

Definamos los siguientes eventos:

F: Daño grave en casas de Urbana.
S: Ocurre una tormenta en el Condado de Champaign.
T: Ocurre un tornado durante una tormenta en el Condado de Champaign.
H: Un tornado afecta a la ciudad de Urbana.

Del enunciado tenemos que

$$\begin{aligned} P(S) &= 0{,}50 \quad \textbf{[1 \%]} \\ P(T \mid S) &= 0{,}25 \quad \textbf{[1 \%]} \\ P(H \mid S \cap T) &= 0{,}15 \quad \textbf{[1 \%]} \end{aligned}$$

Por otra parte los eventos

$$(S \cap T \cap H),\ (S \cap T \cap \overline{H}),\ (S \cap \overline{T}),\ (\overline{S} \cap \overline{T})$$

son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, con $\overline{S} \cap T = \phi$.

Se pide $P(F)$, la cual por probabilidades totales es igual a

$$P(F) = P(F \mid S\cap T\cap H)\, P(S\cap T\cap H) + P(F \mid S\cap T\cap \overline{H})\, P(S\cap T\cap \overline{H}) + P(F \mid S\cap \overline{T})\, P(S\cap \overline{T}) + P(F \mid \overline{S}\cap \overline{T})\, P(\overline{S}\cap \overline{T}) \quad \textbf{[3 \%]}$$

donde

$$
\begin{aligned}
P(F \,|\, S \cap T \cap H) &= 1{,}00 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]}\\
P(F \,|\, S \cap T \cap \overline{H}) &= 0{,}10 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]}\\
P(F \,|\, S \cap \overline{T}) &= 0{,}05 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]}\\
P(F \,|\, \overline{S} \cap \overline{T}) &= 0{,}00 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
P(S \cap T \cap H) &= P(H \,|\, S \cap T)\, P(T \,|\, S)\, P(S)\\
&= 0{,}15 \times 0{,}25 \times 0{,}50\\
&= 0{,}01875 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]}\\
P(S \cap T \cap \overline{H}) &= P(\overline{H} \,|\, S \cap T)\, P(T \,|\, S)\, P(S)\\
&= 0{,}85 \times 0{,}25 \times 0{,}50\\
&= 0{,}10625 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]}\\
P(S \cap \overline{T}) &= P(\overline{T} \,|\, S)\, P(S)\\
&= (1 - 0{,}25) \times 0{,}50\\
&= 0{,}3750 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]}\\
P(\overline{S} \cap \overline{T}) &= 1 - 0{,}01875 - 0{,}10625 - 0{,}3750\\
&= 0{,}5 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]}
\end{aligned}
$$

Reemplazando se tiene que

$$
P(F) = 0{,}048125 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]}
$$

Problema 2 [15 %]

Supongamos que cuatro motores diesel (idénticos) se utilizan para generar energía eléctrica de respaldo para el sistema de control de emergencia en una planta de energía nuclear. Si al menos dos de las unidades a diesel tienen la obligación de suministrar la potencia necesaria para una emergencia, es decir, al menos dos de los cuatro motores deben iniciarse automáticamente durante una pérdida repentina de energía eléctrica externa.

La vida operativa T de cada motor diesel puede ser modelada por una distribución exponencial trasladada, con una vida operativa esperada de 15 años y una vida mínima garantizada de 2 años.

Determine la probabilidad que al menos dos de los cuatro motores funcionaran sin problema en caso de ocurrir una emergencia dentro de los cuatro primeros años de vida del sistema.

Solución

Sean $T_1, \ldots, T_4$ la vida operativa de los cuatro motores diesel. Del enunciado tenemos que

$$T_i \sim \text{Exponencial-Traslada}(a,\, \nu)$$

con $a = 2$ **[1 %]** y $\nu = \dfrac{1}{15 - a} = \dfrac{1}{13}$. **[2 %]**

La probabilidad que en los primeros cuatro años el motor i-ésimo no falle está dada por:

$$p = P(T_i > 4) = 1 - F_{T_i}(4) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda\cdot(4-2)}\right] = e^{-2/13} = 0{,}857404 \quad \textbf{[4 \%]}$$

Sea X el número de motores que en los primeros cuatro años se mantienen operativos

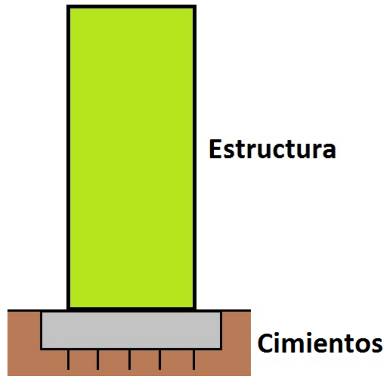
$$X \sim \text{Binomial}(n = 4, p) \quad \textbf{[3 \%]}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= 1 - \binom{4}{0} p^0\,(1-p)^{4-0} - \binom{4}{1} p^1\,(1-p)^{4-1} \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= 1 - 0{,}000413457 - 0{,}009944163 \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= 0{,}9896424 \quad \textbf{[1 \%]}
\end{aligned}$$

Problema 3 [15 %]

La estructura y los cimientos de un edificio de gran altura (ver figura) fueron diseñados para resistir las presiones inducidas por el viento.



Las resistencias a las presiones inducidas por el viento que la estructura y los cimientos del edificio logran soportar sin problemas son respectivamente 40 psf(lb/ft^2) y 30 psf.

La presión máxima del viento P_W sobre el edificio durante una tormenta de viento está dada por

$$P_W = 1{,}165 \times 10^{-3}\, C\, V^2,$$

donde V corresponde a la máxima velocidad del viento (en fps) y C el coeficiente de resistencia.

Registros de tormentas en los últimos 50 años hacen suponer que la máxima velocidad del viento, V, se comporta como una variable aleatoria Log-Normal con valor esperado $\mu_V = 100$ fps y un coeficiente de variación $\delta_V = 0{,}25$. Suponga que el coeficiente de resistencia C también distribuye Log-Normal con valor esperado $\mu_C = 1{,}80$ y $\delta_C = 0{,}30$.

Determine la probabilidad que el edificio presente problemas durante una tormenta.

Solución

Como

$$C \sim \text{Log-Normal}(\lambda_C, \zeta_C) \quad \text{y} \quad V \sim \text{Log-Normal}(\lambda_V, \zeta_V)$$

Entonces

$$P_W \sim \text{Log-Normal}(\lambda_{P_W}, \zeta_{P_W}), \quad \textbf{[2 \%]}$$

donde

$$\lambda_{P_W} = \ln\left(1{,}165 \cdot 10^{-3}\right) + \lambda_C + 2\,\lambda_V \quad \textbf{[1 \%]} \quad \text{y} \quad \zeta_{P_W} = \sqrt{\zeta_C^2 + 4\,\zeta_V^2} \quad \textbf{[1 \%]}$$

Del formulario se deduce que

$$\zeta_C^2 = \log(1+\delta_C^2) \Rightarrow \zeta_C^2 = \ln(1+0{,}30^2) = 0{,}0861777 \quad \textbf{[1 \%]}$$

$$\lambda_C = \ln \mu_C - \frac{1}{2}\,\zeta_C^2 \Rightarrow \lambda_C = \ln(1{,}80) - \frac{1}{2}\cdot 0{,}0861777 = 0{,}5446978 \quad \textbf{[1 \%]}$$

$$\zeta_V^2 = \log(1+\delta_V^2) \Rightarrow \zeta_V^2 = \ln(1+0{,}25^2) = 0{,}06062462 \quad \textbf{[1 \%]}$$

$$\lambda_V = \ln \mu_V - \frac{1}{2}\,\zeta_V^2 \Rightarrow \lambda_V = \ln(100) - \frac{1}{2}\cdot 0{,}06062462 = 4{,}574858 \quad \textbf{[1 \%]}$$

Reemplazando

$$\lambda_{P_W} = \ln\left(1{,}165 \cdot 10^{-3}\right) + 0{,}5446978 + 2 \cdot 4{,}574858 = 2{,}939379 \quad \textbf{[1 \%]}$$

y

$$\zeta_{P_W} = \sqrt{0{,}0861777 + 4 \cdot 1{,}0625} = 0{,}5733029 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]}$$

La probabilidad que la estructura presente problemas esta dada por

$$P(P_W > 40) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(40) - \lambda_{P_W}}{\zeta_{P_W}}\right) = 1 - \Phi(1{,}307337) \approx 1 - 0{,}9049 = 0{,}0951 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{2\,\%}]}$$

Mientras que los cimientos, presentan problema por la presión del viento con la siguiente probabilidad

$$P(P_W > 30) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(30) - \lambda_{P_W}}{\zeta_{P_W}}\right) = 1 - \Phi(0{,}8055393) \approx 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{2\,\%}]}$$

Finalmente, el edificio presenta problema por el viento con una probabilidad p dada por:

$p = P(\text{Problema Edificio}) = P(\text{Problema Estructura} \cup \text{Problema Cimientos}) = P(P_W > 30) = 0{,}2119$ $\quad$ **[1 %]**

Problema 4 [20 %]

En una población de individuos la presencia del genotipo MN se presenta en uno de los siguientes tres tipos: M, MN y N. El tipo es determinado por dos alelos, y cuando no hay predominio se dice que la población está en equilibrio. Más aún, se puede demostrar que una población de individuos se dice que está en equilibrio si

$$P(M) = \theta^2, \quad P(MN) = 2\,\theta(1-\theta), \quad P(N) = (1-\theta)^2$$

Se toma una muestra de 500 individuos y se observa lo siguiente

Tipo	M	MN	N
Frecuencia	125	225	150

Si el estimador máximo verosímil del parámetro θ según los datos es $\hat{\theta} = 0{,}475$. ¿Existe suficiente evidencia estadística que permita afirmar que esta población no está en equilibrio?. Use $\alpha = 5\,\%$.

Solución

Ho: la población esta en equilibrio **3%**

Ha: NO

$\Leftrightarrow$ Ho: los datos se ajustan a la distribución especificada

vs Ha: NO

Test χ^2- bondad de Ajuste **7%**

Categ	obs	$\hat{p}_i$	esp
M	125	0,2256	112,81
M N	225	0,4987	249,38
N	150	0,2756	~~173,81~~ 137,81

$$\chi^2 = \sum \frac{(obs_i - esp_i)^2}{esp}$$

Calculando

$\chi^2 \approx 4{,}78$ **3%**

Se rechaza Ho si $\chi^2_{calc} > \chi^2_{1-\alpha}(k-1-m)$

es decir,

Como $\chi^2_c = 4{,}78 > \chi^2_{0{,}95}(3-1-1) = 3{,}84$ **4%**

(ya que $m=1$, se estimó $\hat{\theta}$ a partir de los datos)

Se rechaza Ho, es decir: Hay evidencia estadística para afirmar que la población NO esta en equilibrio **3%**

Problema 5 [15 %]

Una Prueba de laboratorio de tres ejes se llevan a cabo a cinco muestras de arena saturada. Cada muestra está sujeta a cargas cíclicas vertical con amplitudes de carga de 200 libras por pie cuadrado. El número de ciclos de carga aplicados hasta que cada una de las muestras fallara fue el siguiente: 25, 20, 28, 33 y 26 ciclos. Si el número de ciclos realizados hasta la falla sigue con una distribución Log-Normal(λ, ζ). Obtenga los estimadores máximo verosímiles de λ y ζ. Para los datos registrados evalúe los estimadores.

Solución

Sean $x_1, \ldots, x_n$ los ciclos de cargas aplicados a cada una de la n muestras de arena saturada hasta que fallan.

Del enunciado se propone que

$$X_i \sim \text{Log-Normal}(\lambda,\, \zeta)$$

Luego, la función de verosimilitud está dada por

$$\begin{aligned} L(\lambda,\, \zeta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{1}{(x_i\,\zeta)}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_i - \lambda}{\zeta}\right)^2\right] \quad \textbf{[1 \%]} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\zeta}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i}\right) \exp\left[-\frac{1}{2\,\zeta^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \lambda)^2\right] \quad \textbf{[1 \%]} \end{aligned}$$

Aplicando logaritmo natural se tienen que

$$\ell(\lambda,\, \zeta) = \ln L(\lambda,\, \zeta) = -\frac{n}{2}\ln(2\,\pi) - n\,\ln(\zeta) - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{2\,\zeta^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \lambda)^2 \quad \textbf{[1 \%]}$$

Derivando $\ell(\cdot)$ e igualando a cero, con respecto a λ y ζ, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\zeta^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \lambda) = 0 \quad \textbf{[2 \%]}$$

$$-\frac{n}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^3}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i - \lambda)^2 = 0 \quad \textbf{[2 \%]}$$

Despejando se tiene que

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \quad \textbf{[2 \%]}$$

y

$$\hat{\zeta}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \lambda)^2 \quad \textbf{[2 \%]}$$

Evaluando para las cinco realizaciones que se tienen

$$\hat{\lambda} = 3{,}260283 \quad \textbf{[2 \%]} \quad \text{y} \quad \hat{\zeta} = 0{,}1628995 \quad \textbf{[2 \%]}$$

Problema 6 [20 %]

En el artículo *"Ethylene Synthesis in Lettuce Seeds: Its physiological significance"* (Plant Physiology, 1972, páginas 719-722) se postula que el contenido de etileno Y en semillas (en nL/g de peso seco) se relaciona con el tiempo de exposición X (en minutos) a un absorbente de etileno. Se realizan 11 mediciones, obteniendo lo que sigue:

$$\sum_{i=1}^{11} x_i = 552; \quad \sum_{i=1}^{11} y_i = 1341; \quad \sum_{i=1}^{11} \ln(y_i) = 47{,}50; \quad \sum_{i=1}^{11} x_i\, y_i = 30826;$$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i\, \ln(y_i) = 2034{,}5; \quad \sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 38504; \quad \sum_{i=1}^{11} y_i^2 = 318719; \quad \sum_{i=1}^{11} (\ln y_i)^2 = 216{,}45$$

Se proponen dos modelos

(a) Lineal: $y = \alpha + \beta\, x$.

(b) Exponencial: $y = \alpha\, e^{\beta\, x}$.

Suponga que para una exposición de 50 minutos el valor observado fue 78 nL/g, obtenga el error que cometen en este caso cada uno de los modelos propuestos.

Solución

Preg 6

a) lineal $\hat{\beta} = \dfrac{30826 - 11 \times 50{,}18 \times 121{,}91}{38.504 - 11 \times 50{,}18^2} = -3{,}375$ **4%**

$\hat{\alpha} = 121{,}91 + 3{,}375 \times 50{,}18 = 291{,}3$ **3%**

Predección para $x = 50$

$\hat{y} = 291{,}3 - 3{,}375 \times 50 = 122{,}55$

error : $122{,}55 - 78 = 44{,}55$ **3%**

$(\sigma\ -44{,}55)$

b) No lineal

$\ln y = \underbrace{\ln\alpha}_{a} + \beta x$

$\hat{\beta} = \dfrac{2034{,}5 - 11 \times 50{,}18 \times 4{,}32}{38504 - 11 \times 50{,}18^2} = -0{,}0323$ **4%**

$\hat{a} = 4{,}32 + 0{,}0323 \times 50{,}18 = 5{,}94$ **3%**

Así, para $x = 50$

$(\widehat{\ln y}) = 5{,}94 - 0{,}0323 \times 50 = 4{,}325$

$\Rightarrow \hat{y} = e^{4{,}325} = 75{,}56$ **3%**

error : $75{,}56 - 78 = -2{,}44$

$(\sigma\ +2{,}44)$

Formulario

- Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Normal(μ, σ), entonces

$$\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim \text{Normal}(0,1),\quad \frac{\overline{X}_n-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim \text{t-student}(n-1),\quad \frac{s^2\,(n-1)}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$$

con $s^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$.

- Para un modelo de regresión simple $y'=\alpha+\beta\cdot x$ se tiene que

$$\hat{\beta}=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\quad \hat{\alpha}=\overline{y}-\hat{\beta}\cdot\overline{x},\quad r^2=1-\frac{s^2_{Y|X}}{s^2_Y},\quad s^2_{Y|X}=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_i')^2,\quad s^2_Y=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$$

$$\hat{\rho}^2=1-\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\cdot\frac{s^2_{Y|X}}{s^2_Y},\quad s^2_X=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

$$<\mu_{Y\,|\,x_i}>_{1-\alpha}=\overline{y}_i\pm t_{(1-\alpha/2),\,n-2}\cdot s_{Y\,|\,x}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_i-\overline{x})^2}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})^2}},\quad \overline{y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\cdot x_i$$

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\, p$ $\sigma_X^2 = n\, p\, (1-p)$
Geométrica	$p\, (1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\, (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$
Poisson	$\dfrac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\, t$ $\sigma_X^2 = \nu\, t$
Exponencial	$\nu\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$
Exponencial Trasladada	$\nu\, e^{-\nu\,(x-a)}$	$x \geq a$	$a,\ \nu$	$\mu_X = 1/\nu + a$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Gamma Trasladada	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, (x-\gamma)^{k-1}\, e^{-\nu\,(x-\gamma)}$	$x \geq \gamma$	$k,\ \nu,\ \gamma$	$\mu_X = k/\nu + \gamma$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\, x)}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\, x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\, \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\, r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x$ $x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\, n\, \frac{m}{N}\, \left(1 - \frac{m}{N}\right)$

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\ \cdot)$:

$$(1)\quad B(q,\ r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\, dx; \quad (2)\quad B(q,\ r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$
1	3,078	6,314	12,706	31,821
2	1,886	2,920	4,303	6,965
3	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,476	2,015	2,571	3,365
6	1,440	1,943	2,447	3,143
7	1,415	1,895	2,365	2,998
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764
11	1,363	1,796	2,201	2,718
12	1,356	1,782	2,179	2,681
13	1,350	1,771	2,160	2,650
14	1,345	1,761	2,145	2,624
15	1,341	1,753	2,131	2,602
16	1,337	1,746	2,120	2,583
17	1,333	1,740	2,110	2,567
18	1,330	1,734	2,101	2,552
19	1,328	1,729	2,093	2,539
20	1,325	1,725	2,086	2,528
21	1,323	1,721	2,080	2,518
22	1,321	1,717	2,074	2,508
23	1,319	1,714	2,069	2,500
24	1,318	1,711	2,064	2,492
25	1,316	1,708	2,060	2,485
26	1,315	1,706	2,056	2,479
27	1,314	1,703	2,052	2,473
28	1,313	1,701	2,048	2,467
29	1,311	1,699	2,045	2,462
30	1,310	1,697	2,042	2,457
∞	1,282	1,645	1,960	2,326

Distribución Chi-Cuadrado $c_p(\nu)$

ν	$c_{0,025}$	$c_{0,05}$	$c_{0,10}$	$c_{0,90}$	$c_{0,95}$	$c_{0,975}$	$c_{0,99}$	$c_{0,995}$
1	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93