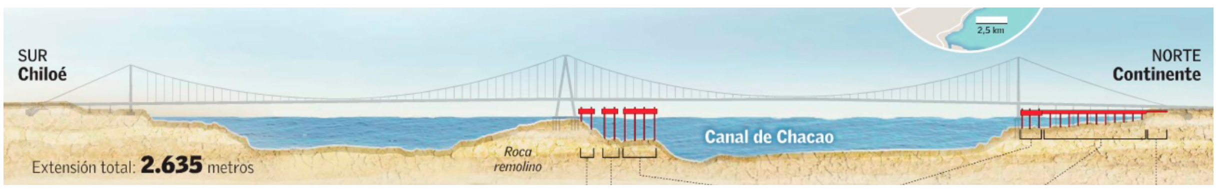
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2017

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**Interrogación 2**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena C. y Ricardo Olea O.**

Problema 1

Para la construcción del puente de Chacao (Chiloé) se han realizado estudios y uno en particular, y muy relevante, se refiere a la resistencia a la compresión de la roca remolino, puntal del futuro puente, ya que la mega estructura estaría diseñada para resistir terremotos de gran envergadura; vientos sobre los 200 kilómetros a la hora; fuertes corrientes marinas y en general todas las posibles vicisitudes a que será sometido un puente cuya vida útil de diseño será de 100 años.



Este estudio de resistencia a la compresión de la roca remolino entrego los siguientes resultados en kg/cm^2

Min	Mediana	Media
700	2381.467	2400

Bajo el supuesto que estas resistencias se comporta como variables aleatorias de tipo Log-Normal(λ, ζ) trasladada en α:

(a) ¿Cuál sería la probabilidad que la resistencia a la comprensión de la roca remolino sea inferior a 2800 kg/cm2.

(b) ¿Cuál sería es el valor mínimo de resistencia (en kg/cm2) que presenta el cuarto superior de las resistencias a la compresión de la roca remolino?

Nota: Si $X \sim$ Log-Normal(λ, ζ) trasladada en α, entonces $(X - \alpha) \sim$ Log-Normal(λ, ζ).

Solución

(a) Tenemos que $Y = X - \alpha \sim$ Log-Normal(λ, ζ), esto implica que

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \mu_X = e^{\lambda+\zeta^2/2} + \alpha \qquad \text{y} \qquad \text{Mediana} = e^{\lambda} + \alpha \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Reemplazado $\alpha = 700$ se tiene que

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \lambda = 7.427422 \qquad \text{y} \qquad \zeta = 0.148065 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Se pide

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad P(X \leq 2800) = P(X - \alpha \leq 2100) = \Phi\left(\frac{\ln(2100) - \lambda}{\zeta}\right) \approx \Phi(1.50) = 0.9332 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(b) Se pide el valor del percentil 75 %.

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \quad P(X \leq x_{0.75}) = 0.75 \to x_{0.75} = \exp\left\{\lambda + \zeta \cdot \Phi^{-1}(0.75)\right\} + \alpha \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$
$$\approx \exp\{\lambda + \zeta \cdot 0.67\} + \alpha \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$
$$= 2556.829\,\text{kg/cm}^2 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Como han sabido, recientemente una ola polar azotó a Europa, trayendo consigo múltiples problemas viales. Suponga que en un sector de la Autobahn (carreteras de alta velocidad de Alemania) el número de vehículos que circula por ellas sigue un proceso Poisson con una tasa de 20 veh x min. Por otra parte, un número no menor de vehículos supera la velocidad máxima (definida en este sector en 130 km/hr) aumentando el riesgo de accidentes al doble. De hecho, la proporción de vehículos que supera la velocidad máxima por minuto se comporta de acuerdo a una distribución Beta(2, 1). Determine el valor esperado y varianza del número de vehículos que supera la velocidad máxima por minuto en este sector de la Autobahn.

Solución

Definamos como X la proporción de vehículos que supera la velocidad máxima por minuto, cuya distribución está determinada por un modelo Beta($q = 2$, $r = 1$) y como Y al número de vehículos que sobrepasa el limite de velocidad por minuto, cuya distribución condicionada a la proporción x de X es Poisson($\nu\, x$) **[2.0 Ptos.]**, con $\nu = 20$ veh x min.

Se pide

[0.4 Ptos.] $$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(Y \mid X)] = \mathrm{E}(\nu\, X) = \int_0^1 \nu\, x\, f_X(x)\, dx = \nu \cdot \mathrm{E}(X) = \nu \cdot \frac{q}{q+r} = \frac{40}{3} = 13.\overline{3}$$ **[0.4 Ptos.]**

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}[\mathrm{E}(Y \mid X)] + \mathrm{E}[\mathrm{Var}(Y \mid X)] && \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \mathrm{Var}[\nu\, X] + \mathrm{E}(\nu\, X) && \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \mathrm{Var}[\nu\, X] + \frac{40}{3} && \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \int_0^1 (\nu \cdot x - \nu \cdot \mu_X)^2\, f_X(x)\, dx + \frac{40}{3} && \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \nu^2 \int_0^1 (x - \mu_X)^2\, f_X(x)\, dx + \frac{40}{3} && \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \nu^2 \cdot \mathrm{Var}(X) + \frac{40}{3} && \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= 20^2 \cdot \frac{2}{36} + \frac{40}{3} && \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= \frac{800 + 480}{36} && \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 35.\overline{5} && \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

El Call Center de un banco recibe llamadas durante el día. Estas llamadas pueden durar solo unos segundos, dado que el cliente prefiere no esperar en una cola virtual hasta su atención. Suponga que estos tiempos (espera + atención) se comportan como variables aleatorias Exponencial(ν) trasladada en α, es decir, presenta las siguientes características:

$$f(t) = \nu\, e^{-\nu\,(t-\alpha)} \quad \text{y} \quad F(t) = 1 - e^{-\nu\,(t-\alpha)}$$

con $t > \alpha$, $\alpha > 0$ y $\nu > 0$.

Si registros históricos muestran que el coeficiente de variación de los tiempos es igual a 50 % y que su mediana es de 5 minutos, ¿cuál sería entonces la probabilidad que deban ingresar más de diez llamadas al Call Center hasta observar una cuya duración sea superior a 10 minutos? Asuma independencia entre las llamadas.

Solución

Tenemos que coeficiente de variación del tiempo T de una llamada que llega al Call Center está dada por

$$\delta_T = \frac{\sigma_T}{\mu_T} = 0.50 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

con

$$\mu_T = \int_\alpha^{+\infty} t\,\nu\, e^{-\nu\,(t-\alpha)}\,dt = \alpha + \frac{1}{\nu} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \text{y} \quad \sigma_T^2 = \int_\alpha^{+\infty} (t-\mu_t)^2\,\nu\, e^{-\nu\,(t-\alpha)}\,dt = \frac{1}{\nu^2} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Además,

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad F(5) = 1 - e^{-\nu\,(5-\alpha)} = 1/2 \to 5 = \frac{\ln(2)}{\nu} + \alpha \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Despejando, se tiene que

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \nu = 0.3386294 \quad \text{y} \quad \alpha = 2.953081 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Luego, la probabilidad p que una llamada supere los diez minutos es

$$p = P(T > 10) = e^{-\nu\,(10-\alpha)} = 0.09196986 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Definamos como X al número de llamadas hasta la primera que dura más de diez minutos, es decir,

$$X \sim \text{Geométrica}(p = 0.09196986) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

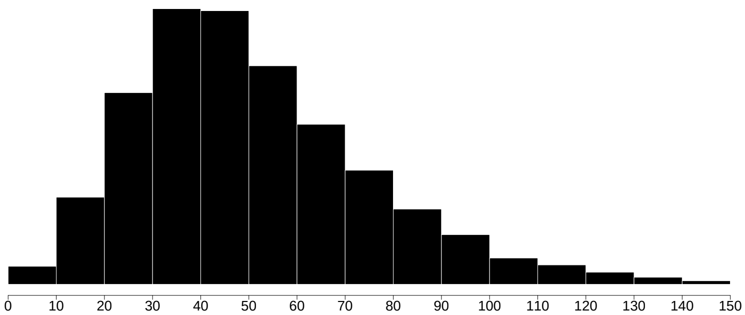
Se pide

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad P(X > 10) = 1 - F_X(10) = 1 - \left(1 - (1-p)^{[10]}\right) = 0.3810681 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

El caudal que traen los río a lo largo del tiempo frecuentemente presentan un sesgo hacia la derecha con unos cuantos casos de niveles extremos de agua a la derecha y una mayoría de niveles de agua en la cola inferior. Un ejemplo es el caudal en m^3/seg del río Mapocho que se presenta a continuación



Un modelo de probabilidad que ajusta estas características es el modelo Lev(μ, σ) cuya función de probabilidad y de densidad están dada por

$$F_Y(y) = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{y} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sigma}\,\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

para $y \in \mathbb{R}$, con $\Phi(z) = \exp\left[-\exp(-z)\right]$, $\phi(z) = \exp\left[-z - \exp(-z)\right]$, $\gamma \approx 0.5772$, $\pi \approx 3.1416$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Mientras que el valor esperado y varianza están dados por

$$\mu_Y = \mu + \sigma\,\gamma \qquad \text{y} \qquad \sigma_Y^2 = \frac{\sigma^2\,\pi^2}{6}$$

Si la moda y mediana del caudal del río Mapocho en el tiempo son respectivamente 40 m^3/seg y 47.33026 m^3/seg, determine entonces el coeficiente de variación del caudal en el tiempo.

Solución

Si a es la mediana, entonces

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad F_Y(a) = 1/2 \to a = \mu - \sigma \cdot \ln(\ln(2)) \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Si b es la moda, entonces b es el valor en $\mathbb{R}$ donde se maximiza f_Y. Para ello derivamos con respecto a y e igualando a cero se tiene que

$$\textbf{[1.5 Ptos.]} \quad f_Y'(y) = \frac{1}{\sigma}\left\{\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \cdot \left(-1 + \exp\left[-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right)\right\}\frac{1}{\sigma} = 0 \to y = \mu \to b = \mu \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Despejando se tiene que

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \mu = 40 \quad \text{y} \quad \sigma = 20 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Por lo tanto el coeficiente de variación es

$$\textbf{[0.5 Ptos.]} \quad \delta_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\frac{\sigma\,\pi}{\sqrt{6}}}{\mu + \sigma\,\gamma} = 0.4976537 = 49.77\,\% \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base