Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada de Verano 2013

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
PAUTA	:	**2**
Profesores	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1), Claudia Wehrhahn (Sec. 2) y Andrés Iturriaga (Sec. 3)**
Ayudantes	:	**Carlos Cayuman, Tamara Fernández y Constanza Rojo**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.*

Problema 1

a) Sea X variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (-1,1). Determine la función de densidad de $Y = 4 - X^2$.

b) Sean X, Y variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo (0,1). Determine la función de densidad de Z = X+Y.
Hint: Téngase presente explicitamente el recorrido de Z

c) Se piensa que el tiempo invertido en el desarrollo de cada una de las preguntas de la Interrogación se comportan como una distribución normal de media y desviación estándar dada por lo que sigue: Preg1 - (20, 5); Preg2 - (30, 10); y Preg3 - (35, 15), respectivamente. Asumiendo independencia entre los tiempos invertidos en el desarrollo de cada pregunta, determine la probabilidad que:

i) tome más tiempo desarrollar la preg1 en relación a la preg3.

ii) no alcancen las 2 horas para el desarrollo completo de la prueba.

Solución

a)

$$X \sim U(-1,1) \to f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad [0,2]$$

$$Y = 4 - X^2 \Rightarrow x = \begin{cases} +\sqrt{4-y} \\ -\sqrt{4-y} \end{cases} \qquad [0,5]$$

Nótese que

$$\frac{dg^{-1}}{dy} \mid = \mid + \frac{1}{2\sqrt{4-y}} \mid \qquad [0,3]$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \Sigma\{f_X(g_1^{-1}) + f_X(g_2^{-1}\} \mid \frac{dg^{-1}}{dy} \mid \qquad [0,3] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{4-y}}, & \text{si } 3 \leq y \leq 4; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad [0,7] \end{aligned}$$

b) Si

$$X \sim U(-1,1) \to f(x) = \begin{cases} 1, & si 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad [0,2]$$

y equivalentemente para Y. Entonces, si Z = X + Y, con X e Y independientes, se tiene:

$$f_Z(z) = \int f_X(z-y) f_Y(y) dy = \begin{cases} \int_0^z 1dy, & \text{si } 0 \leq z \leq 1; \\ \int_{z-1}^1 1dy, & \text{si } 1 \leq z \leq 2 \end{cases} \qquad [0,8]$$

Nótese que $0 < z < 2$. Además, se debe cumplir que $0 < z - y < 1$ ambos extremos, de ahí la necesidad de dividir el recorrido de z. [0,2]

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & \text{si } 0 \leq z \leq 1; \\ 2-z, & \text{si } 1 \leq z \leq 2 \end{cases} \qquad [0,8]$$

c) Sean
$X_1 \sim N(20;5)$
$X_2 \sim N(30;10)$
$X_3 \sim N(35;15)$

i) $P(X_1 > X_3) = P(X_1 - X_3 > 0) = 1 - P(X_1 - X_3 \leq 0)$
sea $W = X1 - X3 \sim N(20-35, \sqrt{5^2+15^2})$. Es decir, $W \sim N(-15, \sqrt{250})$ [0,5]
Luego

$$\begin{aligned} P(W \leq 0) &= \Phi\left(\frac{0-(-15)}{\sqrt{250}}\right) \\ &= \Phi(0.95) \\ &= 0.8289 \\ P(X_1 > X_3) &= 1 - 0.8289 \\ &= 0.1711 \qquad [0,5] \end{aligned}$$

ii) Sea

$$\begin{aligned} T = X_1 + X_2 + X_3 &\sim N(20+30+35; \sqrt{5^2+10^2+15^2}) \\ &\sim N(85, \sqrt{350}) \qquad [0,5] \end{aligned}$$

Nos piden

$$\begin{aligned} P(T > 120) &= 1 - P(T \leq 120) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{120-85}{\sqrt{350}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.87) \\ &= 1 - 0.9693 \\ &= 0.0307 \qquad [0,5] \end{aligned}$$

Problema 2

La concesionaria de cierta autopista quiere determinar si en la salida número 5 de su autopista instala una o dos casetas de peajes, lo que depende de la frecuencia con la que llegan los autos a esta caseta. Para esto se estudió la relación que existe entre el instante (en horas) en el que llega un auto al peaje, X, y el instante (en horas) en el que llegan dos autos al peaje, Y, y se descubrió que esta relación se puede describir como sigue:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2xe^{-x(y+1)}, & x \geq 0, y \geq 1; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Encontrar la función de densidad del instante en que llega un auto al peaje. ¿Reconoce alguna distribución?

(b) Encontrar la función densidad del instante en el que llegan dos autos al peaje dado que llegó un auto al peaje en algún instante dado.

(c) ¿Cuál es el tiempo medio transcurrido hasta que llegan dos autos, si un auto llegó en 2 horas?

(d) La concesionaria dispondrá dos casetas si la llegada de dos autos durante, a lo más 2 horas, ocurre más del 30 % de las veces. ¿Qué resolución toma la concesionaria?

Solución

(a) Sea X =instante en que llega 1 auto al peaje
Sea Y =instante en que llegan 2 autos al peaje
Nos piden la marginal de X

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_1^\infty f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \int_1^\infty 2xe^{-xy-x}dy \qquad \textbf{0.5pts} \\ &= 2xe^{-x}\int_1^\infty e^{-xy}dy \\ &= 2xe^{-x}\left[-\frac{e^{-xy}}{x}|_{y=1}^{\infty}\right] \qquad \textbf{0.5pts} \\ &= 2e^{-2x}, x \geq 0 \qquad \textbf{0.5pts} \end{aligned}$$

Por lo tanto $X \sim \exp(2)$

(b) Nos piden la condicional de Y dado $X = x$

$$\begin{aligned} f_{Y|X=x}(y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2xe^{-xy-x}}{2e^{-2x}} \qquad \textbf{0.5pts} \\ &= xe^{-xy+x}, y \geq 1 \qquad \textbf{1 pt} \end{aligned}$$

(c)

$$E(Y|X=2) = \int_1^\infty y f_{Y|X=2}(y)dy = \int_1^\infty y2e^{-2y+2}dy = 2e^2\int_1^\infty ye^{-2y}dy \qquad \textbf{0.5pts}$$

Hacemos integración por partes para resolver la integral. Sea $u = y$ y $dv = e^{-2y}$, $\Rightarrow du = dy$ y $v = -\frac{e^{-2y}}{2}$ **0.5pts**. Luego

$$E(Y|X=2) = 2e^2\left[-\frac{ye^{-2y}}{2}|_{y=1}^{\infty} + \int_1^\infty \frac{e^{-2y}}{2}dy\right] = e^2\left[e^{-2} + \frac{e^{-2}}{2}\right] = \frac{3}{2} \qquad \textbf{0.5pts}$$

(d) Nos piden $P(Y \geq 2)$ y para esto calculamos la marginal de Y

$$f_Y(y) = \int_0^\infty 2xe^{-x(y+1)}dx = 2\int_0^\infty xe^{-x(y+1)}dx = 2\frac{\Gamma(2)}{(y+1)^2} = 2(y+1)^{-2}, y \geq 1 \qquad \textbf{0.5pts}$$

Con esto calculamos lo que nos pieden

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= \int_1^2 2(y+1)^{-2} \qquad \textbf{0.25pts} \\ &= 2\left[-(y+1)^{-1}\big|_{y=1}^{2}\right] \\ &= 2\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{1}{3} \\ &= 0.3333 \qquad \textbf{0.5pts} \end{aligned}$$

Por lo tanto la consecionaria decide poner dos casetas. **0.25pts**

Problema 3

Considere el cruce de calles señalado en la siguiente figura, para una determinada ciudad.

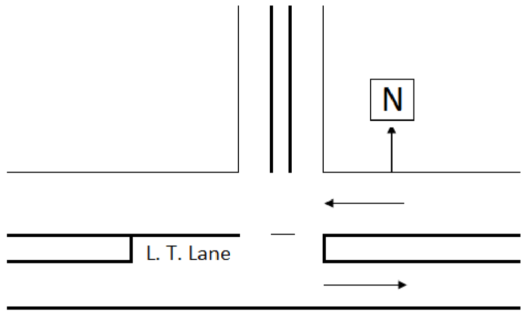

Fig. 1: cruce de calles.

Suponga que el encargado del proyecto de diseño del carril de giro a la izquierda lo contrata como asesor para responder a la pregunta de qué largo construir el carril. Se sabe que el número de vehículos que llega a la intersección y quiere doblar a la izquierda se puede modelar como un proceso de Poisson, que la luz del semaforo permitiendo el giro a la izquierda dura 1 minuto y que el número promedio de autos que doblan a la izquierda durante un día normal es de 100 en una hora. Suponiendo que el largo de todos los autos que transitan por la ciudad es aproximadamente de 4,2 metros, responda la pregunta del encargado garantizando que el largo del carril sea suficiente **por lo menos el** 96 % **de las veces**.

Solución Problema 3

La tasa de autos que gira a la izquierda es de $\nu = \frac{100}{60}$ autos por minuto **[1,0]**.

Luego, X_t (definido como el número de autos que dobló a la izquierda hasta el instante de tiempo t) se distribuye como una v. a. Poisson de parámetro νt. Notemos que criterio de diseño a satisfacer nos obliga a que la probabilidad de no más que k autos esperando a doblar en el carril sea al menos 0,96 **[1,0]**
Luego buscamos el menor $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(X_{t=1} \leq k) = \sum_{x=0}^{k} \frac{e^{-\frac{100}{60}} \left(\frac{100}{60}\right)^x}{x!} \geq 0{,}96. \qquad [\mathbf{2},\mathbf{0}]$$

Calculando se obtiene que

$$\begin{aligned} P(X_{t=1} \leq 3) &\approx 0{,}91 & [\mathbf{1},\mathbf{0}] \\ P(X_{t=1} \leq 4) &\approx 0{,}968. & [\mathbf{1},\mathbf{0}] \end{aligned}$$

Por lo tanto, el largo óptimo del carril es de $4 \cdot 4{,}2 = 16{,}8$ metros. **[1,0]**

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Formulario

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\,e^{-u}\,du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\,\cdot)$:

$$(1) \quad B(q,\,r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\,dx; \quad (2) \quad B(q,\,r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998