Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2010

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113-1**
Pauta	**:**	**I1**
Profesor	**:**	**Ricardo Olea**
Ayudante	**:**	**Claudia Ortega.**

1. **(20 %)** La concentración media diaria de contaminantes en una corriente sigue una distribución log-normal con una media de 60 mg/lts y un c.o.v. del 20 %.

   (a) **(10 %)** ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración promedio de contaminantes en la corriente sea superior a 100 mg/lts (nivel crítico) en un día determinado?

   (b) **(10 %)** Supongamos que la concentración de contaminantes entre los días son estadísticamente independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el nivel crítico de concentración de contaminantes no se alcanzará durante una semana cualquiera?

   Solución

   (a) Sea X la concentración media diaria de contaminantes en una corriente. Tenemos que

   $$\begin{aligned} &\mu_X = 60 \\ &\delta_X = 0.20 \Rightarrow \sigma_X = 0.20 \times 60 = 12 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{2\,\%}]} \end{aligned}$$

   con $X \sim$ Log-Normal$(\lambda,\, \xi)$.

   Del formulario se tiene que

   $$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \mu_X^2\left(e^{\xi^2-1}\right) \Rightarrow \xi^2 = \ln\left(1+\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2}\right) = 0.03922071 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{2\,\%}]} \\ \mu_X &= \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\,\xi^2\right) \Rightarrow \lambda = \ln\mu_X - \frac{1}{2}\,\xi^2 = 4.074734 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]} \end{aligned}$$

   Se pide

   $$\begin{aligned} P(X > 100) &= 1 - P(X \leq 100) \quad \textcolor{red}{[\mathbf{1\,\%}]} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln 100 - \lambda}{\xi}\right) \quad \textcolor{red}{[\mathbf{2\,\%}]} \\ &= 1 - \Phi(2.678971) \\ &\approx 1 - \Phi(2.68) \\ &= 1 - 0.9963 \\ &= 0.0037 \quad \textcolor{red}{[\mathbf{2\,\%}]} \end{aligned}$$

(b) Definamos $X_1, \ldots, X_7$ como las concentraciones medias de contaminates durante una semana cualquiera.

Definamos los eventos A_i: Concentración de contaminante de i-ésimo día no alcanza el nivel critico. Se pide calcular la probabilidad del evento

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \quad \textbf{[2 \%]}$$

Por regla multiplicativa y por independencia se tiene que

$$\begin{aligned} P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7\right) &= P\left(A7 \,|\, A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6\right) \times \\ &\quad P\left(A6 \,|\, A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5\right) \times \\ &\quad P\left(A5 \,|\, A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right) \times \\ &\quad P\left(A4 \,|\, A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \times \\ &\quad P\left(A3 \,|\, A_1 \cap A_2\right) \times P\left(A2 \,|\, A_1\right) \times P\left(A_1\right) \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= P(A_7) \times P(A_6) \times \cdots \times P(A_1) \quad \textbf{[2 \%]} \end{aligned}$$

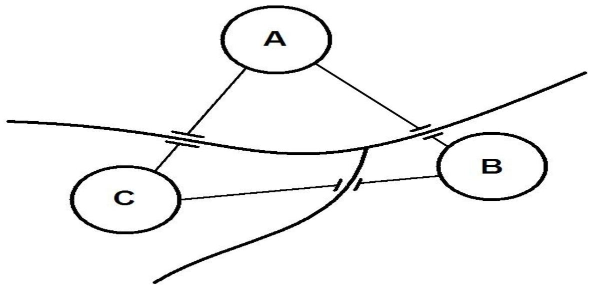
donde

$$P(A_i) = P(\{X_i < 100\}) = 0.9963 \quad \textbf{[2 \%]}$$

Por lo tanto,

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7\right) = (0.9963)^7 = 0.9743857 \quad \textbf{[2 \%]}$$

2. **(20 %)** Tres ciudades A, B y C están separadas por dos ríos. La ciudades están conectadas con tres carreteras como muestra la figura, cada cual con un puente. Un temporal puede destruir un puente con probabilidad p. La destrucción de puentes ocurre de manera mutuamente independientemente.

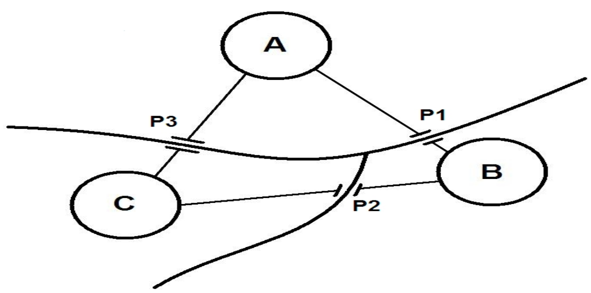


(a) **(10 %)** ¿Cuál es la probabilidad que después de un temporal no haya paso de A a B?

(b) **(10 %)** ¿Cuál es la probabilidad que después de un temporal no haya paso de A a B dado que exactamente dos puentes fueron destruidos?

Solución

Primero se enumeran los puentes como en la figura:



(a) Consideremos los siguientes eventos o sucesos:
D_i : i-ésimo puente queda destruido.
H : No hay paso entre A y B.

El evento H se puede escribir como

$$H = D_1 \cap (D_2 \cup D_3) = (D_1 \cap D_2) \cup (D_1 \cap D_3), \quad \textbf{[3 \%]}$$

luego se tiene que

$$\begin{aligned}
P(H) &= P([D_1 \cap D_2] \cup [D_1 \cap D_3]) \\
&= P(D_1 \cap D_2) + P(D_1 \cap D_3) - P([D_1 \cap D_2] \cap [D_1 \cap D_3]) \quad \textbf{[2 \%]} \\
&= P(D_1 \cap D_2) + P(D_1 \cap D_3) - P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= P(D_1)P(D_2) + P(D_1)P(D_3) - P(D_1)P(D_2)P(D_3), \quad \text{por independencia mutua} \quad \textbf{[2 \%]} \\
&= p \cdot p + p \cdot p - p \cdot p \cdot p \\
&= 2p^2 - p^3 \\
&= p^2(2 - p) \quad \textbf{[2 \%]}
\end{aligned}$$

(b) Sea el evento J : Dos puentes están destruidos.

Se pide $P(H|J)$, luego por definición de probabilidad condicional se tiene que

$$P(H|J) = \frac{P(H \cap J)}{P(J)}, \quad \textbf{[1\,\%]}$$

donde el evento $(H \cap J)$ es equivalente a $(D_1 \cap D_2 \cap D_3^c) \cup (D_1 \cap D_2^c \cap D_3)$, por lo tanto su probabilidad es

$$\begin{aligned}
P(H \cap J) &= P([D_1 \cap D_2 \cap D_3^c] \cup [D_1 \cap D_2^c \cap D_3]) \\
&= P(D_1 \cap D_2 \cap D_3^c) + P(D_1 \cap D_2^c \cap D_3), \quad \text{por ser eventos disjuntos} \quad \textbf{[1\,\%]} \\
&= P(D_1)P(D_2)P(D_3^c) + P(D_1)P(D_2^c)P(D_3), \quad \text{por independencia mutua} \quad \textbf{[1\,\%]} \\
&= p \cdot p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) \cdot p \\
&= 2p^2(1-p) \quad \textbf{[2\,\%]}
\end{aligned}$$

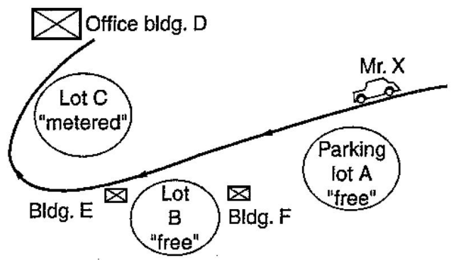
y el evento J es igual a el evento $(D_1 \cap D_2 \cap D_3^c) \cup (D_1 \cap D_2^c \cap D_3) \cup (D_1^c \cap D_2 \cap D_3)$, siendo su probabilidad

$$\begin{aligned}
P(J) &= P([D_1 \cap D_2 \cap D_3^c] \cup [D_1 \cap D_2^c \cap D_3] \cup [D_1^c \cap D_2 \cap D_3]) \\
&= P(D_1 \cap D_2 \cap D_3^c) + P(D_1 \cap D_2^c \cap D_3) + P(D_1^c \cap D_2 \cap D_3), \quad \text{por ser eventos disjuntos} \quad \textbf{[1\,\%]} \\
&= P(D_1)P(D_2)P(D_3^c) + P(D_1)P(D_2^c)P(D_3) + P(D_1^c)P(D_2)P(D_3), \quad \text{por independencia mutua} \quad \textbf{[1\,\%]} \\
&= p \cdot p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) \cdot p + (1-p) \cdot p \cdot p \\
&= 3p^2(1-p) \quad \textbf{[2\,\%]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(H|J) = \frac{2p^2(1-p)}{3p^2(1-p)} = \frac{2}{3} \quad \textbf{[1\,\%]}$$

3. **(30 %)** El Sr. X, que trabaja en el edificio de oficinas D es seleccionado para un estudio de observación sobre el problema que existe en los estacionamiento en el campus de una universidad. Supongamos que cada día el Sr. X comprueba la falta de estacionamiento según la secuencia A, B y C tal como muestra la figura, estacionando su auto tan pronto como encuentre un espacio vacío. Supongamos que sólo existen estos tres lugares de estacionamientos disponibles y no está permitido aparcar en la calle. Los estacionamientos A y B son liberados, mientras que el C es pagado.



Supongamos que antes de observaciones estadísticas, las probabilidades de conseguir un espacio en cada mañana de lunes a viernes en los estacionamientos A, B y C son 0.20, 0.15 y 0.8, respectivamente. Sin embargo, si A está lleno, la probabilidad de que el Sr. X encuentra un espacio en B es 0.05. Además, si los dos lotes de estacionamientos A y B están completos, el Sr. X sólo tienen una probabilidad del 40 % de conseguir un espacio de estacionamiento en el lote C. Dado esto, determine lo siguiente:

(a) **(10 %)** La probabilidad de que el Sr. X no encuentre estacionamiento gratuito en una mañana cualquiera de lunes a viernes.

(b) **(10 %)** La probabilidad de que el Sr. X podrán estacionar su auto en el campus la mañana de un día cualquiera de lunes a viernes.

(c) **(10 %)** Si el Sr. X logro estacionar su auto en el campus una mañana, ¿cuál es la probabilidad de que el parking sea gratuito?

Solución

(a) Sean los eventos:

A: Sr. X encuentra estacionamientos disponibles en A.
B: Sr. X encuentra estacionamientos disponibles en B.
C: Sr. X encuentra estacionamientos disponibles en C.

Del enunciado se deduce que:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.20 \\ P(B) &= 0.15 \\ P(C) &= 0.80 \quad \textbf{[3 \%]} \\ P(B \,|\, \overline{A}) &= 0.05 \\ P(C \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) &= 0.40 \end{aligned}$$

La probabilidad de no encontrar estacionamiento gratuito un día cualquiera esta dada por

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{B} \,|\, \overline{A}) \times P(\overline{A}) \quad \textbf{[3 \%]} \\ &= \left[1 - P(B \,|\, \overline{A})\right] \times [1 - P(A)] \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= [1 - 0.05] \times [1 - 0.2] \\ &= 0.76 \quad \textbf{[2 \%]} \end{aligned}$$

(b) Definamos el evento D como lograr estacionar. Este evento corresponde a:

$$D = \{A\} \cup \{\overline{A} \cap B\} \cup \{\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\} \quad \textbf{[5\,\%]}$$

Luego

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(A) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C), \quad \text{por ser eventos disjuntos} \quad \textbf{[2\,\%]} \\
&= P(A) + P(B \,|\, \overline{A}) \times P(\overline{A}) + P(C \,|\, \overline{A} \cap \overline{B}) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}), \quad \text{por regla multiplicativa} \quad \textbf{[2\,\%]} \\
&= 0.20 + 0.05 \times 0.80 + 0.40 \times 0.76, \quad \text{por (a)} \\
&= 0.544 \quad \textbf{[1\,\%]}
\end{aligned}$$

(c) Definamos el evento E como lograr estacionar gratuitamente. Este evento corresponde a:

$$E = \{A\} \cup \{\overline{A} \cap B\} \quad \textbf{[3\,\%]}$$

Cuya probabilidad esta dada por:

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(A) + P(\overline{A} \cap B), \quad \text{por ser eventos disjuntos} \quad \textbf{[2\,\%]} \\
&= P(A) + P(B \,|\, \overline{A}) \times P(\overline{A}), \quad \text{por regla multiplicativa} \quad \textbf{[1\,\%]} \\
&= 0.20 + 0.05 \times 0.80 \\
&= 0.24 \quad \textbf{[1\,\%]}
\end{aligned}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
P(E \,|\, D) &= \frac{P(E \cap D)}{P(D)}, \quad \text{por definición de probabilidad condicional} \quad \textbf{[1\,\%]} \\
&= \frac{P(E)}{P(D)}, \quad \text{dado que } E \subset D \quad \textbf{[1\,\%]} \\
&= \frac{0.24}{0.544} \\
&= 0.4411765 \quad \textbf{[1\,\%]}
\end{aligned}$$

4. **(30 %)** Sea Y una variable aleatoria cuya función de densidad esta dada por:

$$f_Y(y)\begin{cases} \dfrac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}\, y^{\nu-1}\, e^{-\lambda\, y}, & y \geq 0,\, \nu > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\Gamma(\nu) = \displaystyle\int_0^\infty t^{\nu-1}\, e^{-t}\, dt.$

Algunas propiedades de $\Gamma(\cdot)$ son:

$$(1)\ \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a), \quad (2)\ \Gamma(n+1) = n! \quad \text{si } n \in \mathbb{N}, \quad (3); \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución esta dada por:

$$F_X(x) = 1 - \exp\left(-\alpha\, x^\beta\right), \quad x \geq 0,$$

con α, $\beta > 0$.

(a) Se pide mostrar que $E(Y) = \dfrac{\nu}{\lambda}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^\infty y \cdot \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}\, y^{\nu-1}\, e^{-\lambda\, y}\, dy \quad \textbf{[1 \%]} \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}\, y^{(1+\nu)-1}\, e^{-\lambda\, y}\, dy \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}\, y^{\theta-1}\, e^{-\lambda\, y}\, dy, \quad \theta = \nu + 1 \quad \textbf{[2 \%]} \\ &= \frac{\Gamma(\theta)}{\lambda\,\Gamma(\nu)} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\lambda^\theta}{\Gamma(\theta)}\, y^{\theta-1}\, e^{-\lambda\, y}\, dy,}_{1 \text{ ya que } \theta > 1} \quad \theta = \nu + 1 \quad \textbf{[5 \%]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la propiedad (1) de la función $\Gamma(\cdot)$

$$E(Y) = \frac{\Gamma(\theta)}{\lambda\,\Gamma(\nu)} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda\,\Gamma(\nu)} = \frac{\nu\,\Gamma(\nu)}{\lambda\,\Gamma(\nu)} = \frac{\nu}{\lambda} \quad \textbf{[2 \%]}$$

$\square$

(b) Para una variable continua X se tiene que

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \quad \textbf{[2 \%]}$$

Luego

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\,\beta\,x^{\beta-1}\,e^{-\alpha\,x^\beta}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \textbf{[3 \%]}$$

con α, $\beta > 0$.

Por otra parte si x_m corresponde a la mediana se debe cumplir lo siguiente:

$$F_X(x_m) = 1/2 \quad \textbf{[2 \%]}$$

Igualando se tiene que

$$
\begin{aligned}
1 - \exp\left(-\alpha\, x_m^\beta\right) &= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow -\alpha\, x_m^\beta &= -\ln 2 \\
\Rightarrow x_m^\beta &= \frac{\ln 2}{\alpha} \\
\Rightarrow x_m &= \left(\frac{\ln 2}{\alpha}\right)^{1/\beta} \qquad \textbf{[3 \%]}
\end{aligned}
$$

(c) Se pide mostrar que $E(X) = \dfrac{(1/\beta)\,\Gamma\,(1/\beta)}{\alpha^{1/\beta}}$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty x \cdot \alpha\,\beta\, x^{\beta-1}\, e^{-\alpha\, x^\beta}\, dx \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{y}{\alpha}\right)\, e^{-y}\, dy, \quad y = \alpha\, x^\beta \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= \frac{1}{\alpha^{1/\beta}} \int_0^\infty y^{1/\beta}\, e^{-y}\, dy \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= \frac{\Gamma(1 + 1/\beta)}{\alpha^{1/\beta}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1 + 1/\beta)}\, y^{(1+1/\beta)-1}\, e^{-y}\, dy \quad \textbf{[5 \%]} \\
&= \frac{\Gamma(1 + 1/\beta)}{\alpha^{1/\beta}}, \quad \text{por (a) ya que } 1 + 1/\beta > 1 \quad \textbf{[1 \%]} \\
&= \frac{(1/\beta)\,\Gamma\,(1/\beta)}{\alpha^{1/\beta}}, \quad \text{por propiedad (1) de función } \Gamma(\cdot) \quad \textbf{[1 \%]}
\end{aligned}
$$

$\square$