Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2012

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Interrogación	**:**	**3**
Profesor	**:**	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)**
Ayudantes	**:**	**Carlos Cayuman Cofre, Felipe Ossa Monge, Juan Pablo Vigneaux Ariztía y Claudia Reyes Vizcarra**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

Actualmente se está discutiendo respecto al cobro por estacionamiento en los centros comerciales (malls). Un aspecto relevante se refiere tanto al tiempo de acceso (ingreso y logro de estacionamiento), como al tiempo de egreso (pago y salida). Suponga que X e Y corresponden a los tiempos (en minutos) de acceso y egreso, respectivamente. Asuma además que estas dos variables aleatorias son independientes y siguen una distribución Exponencial de parámetros α y β, respectivamente.

(a) **[2.0 Ptos.]** Si la variable aleatoria $T = X + Y$ representa el tiempo total en el estacionamiento (ingreso y salida), determine la función de densidad de T.

(b) **[2.0 Ptos.]** Suponga que $\alpha = 1/10$ y $\beta = 1/15$. Calcule la probabilidad de que el tiempo total sea superior a 20 minutos.

(c) **[2.0 Ptos.]** En el caso en que α y β sean ambos iguales a 1/20, calcule nuevamente la probabilidad solicitada en (b).

Problema 2

Retomando el problema del ingreso per cápita y la distribución de Pareto, suponga que se realiza la medición de los ingresos per cápita en 20 países Latinoamericanos, $x_1, \ldots, x_{20}$, y asuma que las observaciones son independientes, cada una con distribución de Pareto dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x > x_m \\ \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El parámetro $x_m > 0$ representa el salario mínimo y $\alpha > 0$, la distribución de la riqueza, conocido como el índice de Pareto.

(a) Encuentre los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud del parámetro α. Suponga el parámetro x_m conocido.

Solución:

Para el estimador de momentos se necesita:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_i) &= \int_{x_m}^{\infty} x \frac{\alpha x_m^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\, dx \\
&= \alpha x_m^{\alpha} \int_{x_m}^{\infty} x^{-\alpha}\, dx \\
&= \frac{\alpha}{\alpha - 1} x_m, \qquad \textbf{[0.5pt]}
\end{aligned}$$

con $\alpha > 1$. Luego planteamos,

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - 1} x_m = \bar{X}, \qquad \textbf{[0.5pt]}$$

de donde se obtiene

$$\tilde{\alpha} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - x_m}. \qquad \textbf{[0.5pt]}$$

Para el estimador de máxima verosimilitud se necesita:

$$\begin{aligned}
L(\alpha, x_1, \ldots, x_{20}) &= \prod_{i=1}^{20} \frac{\alpha x_m^{\alpha}}{x_i^{\alpha+1}} \qquad \textbf{[0.5pt]} \\
&= \alpha^{20} x_m^{20\alpha} \prod_{i=1}^{20} \left(\frac{1}{x_i} \right)^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\log L(\alpha, x_1, \ldots, x_{20}) = 20 \log \alpha + 20\alpha \log x_m - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^{20} \log x_i.$$

Para obtener el punto crítico:

$$\begin{aligned}
\frac{d \log L}{d\alpha} &= \frac{20}{\alpha} + 20 \log x_m - \sum_{i=1}^{20} \log x_i = 0 \qquad \textbf{[0.5pt]} \\
\Longrightarrow \qquad \hat{\alpha} &= \frac{20}{\sum \log x_i - 20 \log x_m} \qquad \textbf{[0.5pt]}.
\end{aligned}$$

Para verificar que el punto crítico corresponda a un máximo:

$$\frac{d^2 \log L}{d\alpha^2} = -\frac{20}{\alpha^2} < 0.$$

Luego, $\hat{\alpha}$ corresponde al estimador máximo verosímil de α. **[0.5pt]**

(b) Un índice de interés corresponde a $\gamma = 1/\alpha$. Obtenga el estimador máximo verosimil de γ y su distribución asintótica.

Solución: El estimador máximo verosímil de γ corresponde a

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{\hat{\alpha}}, \qquad \textbf{[0.5pt]}$$

donde $\hat{\alpha}$ corresponde al estimador encontrado en (a). Para tamaño de muestra grande, su distribución se puede aproximar por una distribución Normal, de media

$$\mathrm{E}(\hat{\gamma}) = \frac{1}{\alpha} = \gamma, \qquad \textbf{[0.5pt]}$$

y varianza dada por

$$Var(\hat{\gamma}) = \frac{(g'(\alpha))^2}{I_n(\alpha)},$$

donde

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \frac{1}{\alpha}, \quad \Longrightarrow (g'(\alpha))^2 = \frac{1}{\alpha^4} \qquad \textbf{[0.5pt]} \\ I_n(\alpha) &= -\mathrm{E}\left(\frac{d^2 \log L}{d\alpha^2}\right) = -E\left(-\frac{20}{\alpha^2}\right) = \frac{20}{\alpha^2}. \qquad \textbf{[0.5pt]} \end{aligned}$$

Luego la distribución asintótica de $\hat{\gamma}$ corresponde a una distribución

$$Normal\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha\sqrt{20}}\right). \qquad \textbf{[0.5pt] por normalidad}$$

[0.5pt] por error estándar

También se puede dejar como

$$Normal\left(\gamma, \frac{\gamma}{\sqrt{20}}\right),$$

o combinaciones de lo anterior.

+ 1 punto base

Problema 3

Debido a las dificultades a las que que hoy en día se enfrentan los alumnos que vienen en auto al tratar de estacionar al interior del Campus, la autoridad competente ha decidido tomar cartas en el asunto y por tanto conocer el real estado de la situación (o más bien una estimación). Entre las diferentes hipótesis que se plantean, algunas son las que siguen:

i. Menos de un 32 % de los estudiantes viene actualmente en auto.

ii. De los que vienen en auto, éstos demoran más de 10 minutos en encontrar estacionamiento.

iii. Más del 50 % de los que vienen en auto estaría dispuesto a pagar por estacionar cerca de su sala/lugar de interés.

Con el objetivo de poder validar las hipótesis anteriores, se entrevista 120 alumnos, a quienes se les realiza varias preguntas, dentro de las cuales destacan:

- ¿Concurres regularmente en auto a la universidad? (1: SI, 2:NO)
  - (a) Si tu respuesta es positiva, ¿aproximadamente cuántos minutos demoras en encontrar estacionamiento?
  - (b) Si tuvieras la opción de estacionarte a no más de 100 mts. de tu sala/lugar de interés, ¿cuál es el valor que estarías dispuesto a pagar diariamente (adicional al costo de ingresar al Campus)?
    - i. No estoy dispuesto a pagar.
    - ii. A lo más \$500.
    - iii. Entre \$501 y \$1000.
    - iv. Más de \$1000.

Un análisis rápido de los datos entrega los siguientes resultados. Sólo 28 alumnos/as vienen en auto. Para ellos, el tiempo en encontrar estacionamiento es, en promedio, de 12 min, con una desviación estándar de 6 min. Además, el 64.3 % no estaría dispuesto a pagar; el 28.7 % estaría dispuesto a pagar a lo más \$500, y el 7 % estaría dispuesto a pagar entre \$501 y \$1.000. Nadie seleccionó la alternativa de más de \$1000.
En base a los resultados, lleve a cabo las hipótesis respectivas, indicando claramente el test y valor-p de la prueba. No olvide su conclusión. Utilice $\alpha = 0.05$.

Problema 4

a) El ajuste sencillo corresponde al redondeo a la decena (en \$) de las cuentas de servicios públicos (agua, luz, etc.) Una discusión permanente se refiere a los ingresos extras que logran las compañías todos los meses con este sistema. Una empresa le ha solicitado que evalúe la probabilidad aproximada de obtener un ingreso superior a \$5.000 debido a estos cobros, para un total de 10.000 suscriptores. Un antecedente importante se refiere a que el ajuste sencillo de cada cliente se comporta como una variable aleatoria Uniforme entre -\$10 y +\$10.

Solución: Sea X_i el ajuste sencillo del cliente i, con $1 = 1, \ldots, 10.000$. Se pide

$$P\left(\sum_{i=1}^{10.000} X_i > 1.000\right).$$

Podemos utilizar el Teorema Central del Límite para $\sum_{i=1}^{10.000} X_i$. Para ello calculamos,

$$\begin{aligned} \mu &= \mathrm{E}(X_i) = 0, \qquad \textbf{[0.5pt]} \\ \sigma &= \sqrt{Var(X_i)} = \sqrt{\frac{20^2}{12}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5.77. \qquad \textbf{[0.5pt]} \end{aligned}$$

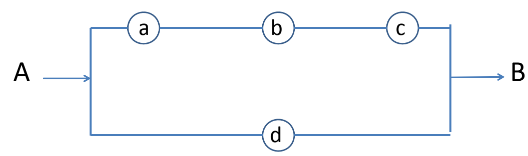
La distribución de $\sum X_i$ puede ser aproximada por una distribución Normal de media $10.000 \times 0 = 0$, y desviación estándar $\sqrt{10.000} \times 5.77 = 577$ **[0.5pt]**. De este modo,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{10.000} X_i > 1000\right) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{1.000-0}{577}\right) \qquad \textbf{[0.5pt]} \\ &= 1 - \Phi(1.73) \qquad \textbf{[0.5pt]} \\ &= 1 - 0.958 = 0.042. \qquad \textbf{[0.5pt]} \end{aligned}$$

También se puede aplicar el Teorema Central del Límite para $\bar{X}$. En este caso la media será de 0 y la desviación estándar de $5.77/\sqrt{10.000} = 0.0577$. De este modo,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{10.000} X_i > 1.000\right) &= P\left(\bar{X} > \frac{1.000}{10.000}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{0.1-0}{0.0577}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.73) = 1 - 0.958 = 0.042. \end{aligned}$$

b) Para el circuito adjunto determine la probabilidad que fluya corriente entre A y B por, al menos, 20 segundos. Suponga que los tiempos de operación de los nodos a, b, c y d siguen distribuciones exponenciales independientes, de parámetros 1/30, 1/25, 1/20 y 1/10, respectivamente.



Solución: Sean $T_i, i = a, b, c, d$ los tiempos de funcionamiento de los nodos a, b, c y d. Estos tiempos son variables aleatorias independientes exponenciales con parámetros α, β, γ y δ en enunciado. Sea T el tiempo durante el cual fluye corriente entre los puntos A y B. Se necesita $P(T \geq 20)$.

El evento $(T \geq 20)$ ocurre

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} & \text{nodos } a, b \text{ y } c \text{ funcionan por más de 20s} \\ o & \text{nodo } d \text{ funciona por más de 20s} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} & T_a \geq 20 \text{ y } T_b \geq 20 \text{ y } T_c \geq 20 \\ o & T_d \geq 20 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} & T_{abc} = \text{mín}\{T_a, T_b, T_c\} \geq 20 \\ o & T_d \geq 20 \end{cases} \\ &\iff \text{máx}\{T_{abc}, T_d\} \geq 20. \end{aligned}$$

Comenzamos por encontrar la distribución de T_{abc}:

$$\begin{aligned} F_{abc}(t) &= P(\text{mín}\{T_a, T_b, T_c\} \leq t) = 1 - P(\text{mín}\{T_a, T_b, T_c\} > t) \\ &= 1 - \prod_{i=a,b,c} P(T_i > t) \qquad \textbf{[0.5pt]} \\ &= 1 - \prod_{i=a,b,c} (1 - P(T_i \leq t)). \qquad \textbf{[0.5pt]} \end{aligned}$$

Utilizando que la función de distribución acumulada de una variable aleatoria Exponencial(λ) es $(1 - e^{-\lambda t})$, se llega a

$$\begin{aligned} F_{abc}(t) &= 1 - e^{-\alpha t} \times e^{-\beta t} \times e^{-\gamma t} \\ &= 1 - e^{-(\alpha+\beta+\gamma)t}. \qquad \textbf{[0.5pt]} \end{aligned}$$

Por otra parte, la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(T \geq 20) &= 1 - P(\text{máx}\{T_{abc}, T_d\} \leq 20) \qquad \textbf{[0.2pt]} \\ &= 1 - P(T_{abc} \leq 20)P(T_d \leq 20) \qquad \textbf{[0.5pt]} \\ &= 1 - F_{abc}(20)(1 - e^{-20\delta}) \\ &= 1 - (1 - e^{-(\alpha+\beta+\gamma)\times 20}) \times (1 - e^{-20\delta}). \qquad \textbf{[0.5pt]} \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de α, β, γ y δ en el enunciado se llega a:

$$P(T \geq 20) = 0.209. \qquad \textbf{[0.3pt]}$$

+ 1 pto. base

Tiempo: 2 Horas

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\,(1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\,(1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\,\dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1-\frac{m}{N}\right)$

Formulario

- Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida con función de probabilidad p_X o de densidad f_X, determinada por un parámetro θ. Si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil del parámetro θ, entonces:
  - $\mathrm{E}(\hat{\theta}) \to \theta$, cuando $n \to \infty$.
  - $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{I_n(\theta)}$, con $I_n(\theta) = -\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}\,\ln L(\theta)\right]$.

- $\hat{\theta} \stackrel{\cdot}{\sim} \text{Normal}\left(\theta,\, \sqrt{\dfrac{1}{I_n(\theta)}}\right)$, cuando $n \to \infty$.

- El estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$, cuya varianza está dada por: $\text{Var}[g(\hat{\theta})] = \dfrac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}$.

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1)\quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2)\quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3)\quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4)\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\, \cdot)$:

$$(1)\quad B(q,\, r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\, dx; \quad (2)\quad B(q,\, r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Tablas de Percentiles p

Distribución Normal Estándar k_p

k_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Distribución t-student $t_p(\nu)$

ν	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
∞	1.282	1.645	1.960	2.326