Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2011

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Pauta	:	**I1**
Profesor	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3), Lorena Correa (Sec. 4) y Ricardo Olea (Sec. 2)**
Ayudantes	:	**Tamara Fernandez Aguilar, Felipe Fuentes Astudillo y Claudia Reyes Vizcarra.**

Problema 1

Después de la renuncia de Bielsa en enero pasado, el sponsor oficial de nuestra selección de fútbol temía una baja en la ventas de camisetas, pero después de los "resultados" de la reciente gira europea que marcó el debut del "Bichi" y renacer del "Mati", la empresa confía que las ventas debieran mantenerse. Por esta razón, para la próxima "Copa América" que se realizará en Argentina en el mes de julio se está confeccionando una primera partida de un nuevo modelo. La idea es enviarlas a cuatro tiendas para tantear el grado de aceptación de éste. Se confeccionaron $4\,n$ camisetas, cada una con su respectivo código de barras que indica hora y fecha de manufactura. Si la máquina que bordaba el escudo de la federación, en cuatro ocasiones lo hizo al lado derecho (debía hacerlo al lado izquierdo) y cada tienda recibió un lote de tamaño n, calcule:

(a) **[3.0 ptos]** La probabilidad que cada tienda reciba una camiseta con la falla descrita.

(b) **[3.0 ptos]** La probabilidad que sólo dos tiendas reciban camisetas con fallas.

Solución

(a) Definamos como A al evento en que cada tienda recibe una camiseta con falla.

Si las camisetas son asignadas a las cuatro tiendas de maneras aleatoria, entonces

$$P(A) = \frac{\#\,A}{\#\,S} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Como las camisetas son distinguibles existen

$$\frac{(4n)!}{n!\,n!\,n!\,n!}$$

maneras de repartirlas entre las distintas cuatro tiendas en lotes de tamaño n, es decir,

$$\#\,S = \frac{(4n)!}{(n!)^4}. \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

Si queremos contar la cantidad de formas en que las cuatro tiendas reciban exactamente una camiseta con falla, primero necesitamos distribuir las fallas y luego las sin fallas, es decir,

$$\#\,A = \underbrace{\frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!}}_{\textbf{[0.5 Ptos]}} \times \underbrace{\frac{(4n-4)!}{(n-1)!\,(n-1)!\,(n-1)!\,(n-1)!}}_{\textbf{[0.5 Ptos]}} = \frac{24\,(4n-4)!}{[(n-1)!]^4}$$

Por lo tanto

$$P(A) = \frac{24\,n^4}{(4n)(4n-1)(4n-2)(4n-3)} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

(b) Sea B el evento en que solo dos tiendas reciben al menos una camiseta con falla. Para este caso el número de maneras en que puede ocurrir es

$$\# B = \underbrace{\frac{4!}{2!\,2!\,0!\,0!}}_{\textbf{[0.5 Ptos]}} \times \underbrace{\frac{(4n-4)!}{(n-2)!\,(n-2)!\,(n)!\,(n)!}}_{\textbf{[0.25 Ptos]}} \times \underbrace{\binom{4}{2}}_{\textbf{[0.5 Ptos]}} + \overbrace{\frac{4!}{3!\,1!\,0!\,0!}}^{\textbf{[0.5 Ptos]}} \times \overbrace{\frac{(4n-4)!}{(n-3)!\,(n-1)!\,(n)!\,(n)!}}^{\textbf{[0.25 Ptos]}} \times \overbrace{\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}^{\textbf{[0.5 Ptos]}}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
P(B) &= \frac{4!}{2!\,2!\,0!\,0!} \times \frac{n\,(n-1)\,n\,(n-1)}{(4n)\,(4n-1)\,(4n-2)\,(4n-3)} \times \binom{4}{2} + \frac{4!}{3!\,1!\,0!\,0!} \times \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,n}{(4n)\,(4n-1)\,(4n-2)\,(4n-3)} \times \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} \\
&= 6 \times \frac{n\,(n-1)\,n\,(n-1)}{(4n)\,(4n-1)\,(4n-2)\,(4n-3)} \times 6 + 4 \times \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,n}{(4n)\,(4n-1)\,(4n-2)\,(4n-3)} \times 12 \\
&= \frac{36\,n^2\,(n-1)^2}{(4n)\,(4n-1)\,(4n-2)\,(4n-3)} + \frac{48\,n^2\,(n-1)\,(n-2)}{(4n)\,(4n-1)\,(4n-2)\,(4n-3)} \\
&= \frac{n^2\,(n-1)^2}{(4n)\,(4n-1)\,(4n-2)\,(4n-3)}\left[36 + \frac{48\,(n-2)}{(n-1)}\right] \\
&= \frac{n^2\,(n-1)^2}{(4n)\,(4n-1)\,(4n-2)\,(4n-3)}\left[\frac{36\,(n-1)+48\,(n-2)}{(n-1)}\right] \\
&= \frac{n^2\,(n-1)\,(84n-132)}{(4n)\,(4n-1)\,(4n-2)\,(4n-3)} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Considere una variable aleatoria continua X cuya función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\,\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

con $\phi(z) = \exp[z - \exp(z)]$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$.

(a) **[3.0 ptos]** Determine la función de distribución de probabilidad acumulada de la variable aleatoria X.

(b) **[3.0 ptos]** Determine una expresión para un valor x_p, tal que la probabilidad que la realización de la variable aleatoria X supere dicho valor sea igual a $(1-p)$, con $0 < p < 1$. Evalúe para $\sigma = 1$, $\mu = 10$ y $p = 0{,}5$.

Solución

(a) Por definición la función de distribución de probabilidad acumulada de la variable aleatoria X es

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}$$

Luego

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma}\,\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\,dy \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \phi\,(z)\;dz, \quad z = \frac{y-\mu}{\sigma} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{z}\,e^{-e^{z}}\,dz \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= \int_{0}^{\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} e^{-u}\,du, \quad u = e^{z} \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right], \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(b) Se pide una expresión para un valor x_p, tal que la probabilidad que la realización de la variable aleatoria X supere dicho valor sea igual a $(1-p)$, con $0 < p < 1$. Es decir,

$$\begin{aligned}
\textbf{[0.3 Ptos]} \quad P(X > x_p) = 1 - p &\Rightarrow (X \leq x_p) = p \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
\Rightarrow 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{x_p-\mu}{\sigma}\right)\right] &= p \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
\Rightarrow -\exp\left[-\exp\left(\frac{x_p-\mu}{\sigma}\right)\right] &= p - 1 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
\Rightarrow \exp\left[-\exp\left(\frac{x_p-\mu}{\sigma}\right)\right] &= 1 - p \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
\Rightarrow \left[-\exp\left(\frac{x_p-\mu}{\sigma}\right)\right] &= \ln(1-p) \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
\Rightarrow \exp\left(\frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) &= -\ln(1-p) \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
\Rightarrow \left(\frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) &= \ln[-\ln(1-p)] \quad \textbf{[0.3 Ptos]}\\
\Rightarrow x_p &= \mu + \sigma\,\ln[-\ln(1-p)] \quad \textbf{[0.3 Ptos]}
\end{aligned}$$

Evaluando en $\mu = 10$, $p = 0{,}5$ y $\sigma = 1$ tenemos que

$$x_{0,5} = 9{,}633487 \quad \textbf{[0.3 Ptos]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

En el marco de una demanda de paternidad interpuesta a un conocido animador, los Tribunales de Familia han divulgado que en estos casos, ante la pregunta: ¿Conoció usted a la madre del demandante?, los demandados mienten con probabilidad p, con $0 < p < 1$, cuando realmente ellos son los padres. En tanto, la respuesta es equiprobable cuando no lo son. Por otra parte, registros históricos indican que **el porcentaje** de demandantes que realmente son hijos de los demandados es $q \times 100\,\%$.

(a) **[2.0 ptos]** Si se elige un demandado al azar y ante la pregunta, contesta NO. Calcule la probabilidad que realmente el demandante sea su hijo.

(b) **[2.0 ptos]** Se eligen n demandados en forma independiente. Encuentre la probabilidad que el número de demandados que admiten "haber conocido a las madres de los demandantes" sea exactamente k.

(c) **[2.0 ptos]** Dado que "la memoria es frágil", los demandados son sometidos a un examen genético que tiene una probabilidad de 0,99 de resultar positivo cuando la paternidad es real, y con probabilidad 0,1 resulta positivo cuando la paternidad no existe. Suponga que el conocido animador es sometido al examen genético en el SML. Determine la probabilidad que el resultado entregado por el SML arroje que hay "exclusión de paternidad'.

Solución

(a) Definamos los siguientes eventos:

A: El demandado contesta NO
B: El demandante es hijo.

Del enunciado tenemos la siguiente información:

$$\begin{aligned} P(B) &= q \Rightarrow P(\overline{B}) = 1 - q \\ P(A \,|\, B) &= p \Rightarrow P(\overline{A} \,|\, B) = 1 - p \\ P(A \,|\, \overline{B}) &= 1/2 \\ P(\overline{A} \,|\, \overline{B}) &= 1/2 \end{aligned}$$

[1.0 Ptos]

Se pide $P(B \,|\, A)$, la cual se puede obtener aplicando el teorema de bayes como sigue:

$$\begin{aligned} P(B \,|\, A) &= \frac{P(A \,|\, B)\, P(B)}{P(A \,|\, B)\, P(B) + P(A \,|\, \overline{B})\, P(\overline{B})} \\ &= \frac{p \cdot q}{p \cdot q + \frac{1}{2} \cdot (1 - q)} \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{aligned}$$

(b) Definamos A_i al evento en que el demandado i-ésimo NO admiten haber conocido a la madre del demandante y B_i el evento en que el demandante realmente es hijo del i-ésimo demandado, con $i = 1, \ldots, n$. Sea X la variable aleatoria que representa al número de demandados que lo admiten entre los n seleccionados.

El soporte de X es $\Theta_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Si pensamos en el evento $\{X = k\}$, estamos pensando en la ocurrencia de alguno de los siguiente resultado:

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_k, \overline{A}_{k+1}, \ldots, \overline{A}_n\}, \ldots, \{\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_{n-k}, A_{n-k+1}, \ldots, A_n\}$$

Por independencia, las probabilidades de cada uno de ellos son:

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \cdots \cap \overline{A}_n) &= P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_k) \times P(\overline{A}_{k+1}) \times \cdots \times P(\overline{A}_n) \\
&= u^k \, (1-u)^{n-k} \\
&\vdots \\
P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap \cdots \cap A_n) &= P(\overline{A}_1) \times P(\overline{A}_2) \times \cdots \times P(\overline{A}_{n-k}) \times P(A_{n-k+1}) \times \cdots \times P(A_n) \\
&= u^k \, (1-u)^{n-k}
\end{aligned}$$

donde $u = P(\overline{A}_i)$, para $i = 1, \ldots n$. Por probabilidades totales tenemos que:

$$\begin{aligned}
P(\overline{A}_i) &= P(\overline{A}_i \,|\, B_i) \, P(B_i) + P(\overline{A}_i \,|\, \overline{B}_i) \, P(\overline{B}_i) \\
&= (1-p) \cdot q + \frac{1}{2} \cdot (1-q)
\end{aligned}$$

[1.0 Ptos]

Luego,

$$P(X = k) = u^k \, (1-u)^{n-k} \cdot K,$$

con K igual a la cantidad de resultados igualmente probables que componen el evento $\{X = k\}$, es decir

$$K = \binom{n}{k}$$

Por lo tanto

$$P(X = k) = \binom{n}{k} u^k \, (1-u)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

con $u = (1-p) \cdot q + \frac{1}{2} \cdot (1-q)$.

(c) Definamos como D el evento en que el resultado entregado por el SML arroja que hay "exclusión de paternidad".

Del enunciado tenemos las siguientes probabilidades

$$\begin{aligned}
P(\overline{D} \,|\, B) = 0{,}99 &\Rightarrow P(D \,|\, B) = 0{,}01 \quad \textbf{[0.5 Ptos]} \\
P(\overline{D} \,|\, \overline{B}) = 0{,}10 &\Rightarrow P(D \,|\, \overline{B}) = 0{,}90 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}
\end{aligned}$$

Se pide $P(D)$, la cual podemos obtener por probabilidades totales:

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(D \,|\, B) \, P(B) + P(D \,|\, \overline{B}) \, P(\overline{B}) \\
&= 0{,}01 \cdot q + 0{,}90 \cdot (1-q) \\
&= 0{,}90 - 0{,}89 \cdot q \quad \textbf{[1.0 Ptos]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

Una estación de servicio (gasolinera) del sector posee 5 estanques con sus correspondientes islas (surtidores). Los días previos a las variaciones de precios (miércoles para jueves), cada estanque tiene $Y \cdot 100\,\%$ de su capacidad con gasolina. La **fracción** Y de cada estanque se comporta como una variable aleatoria continua cuya función de densidad está dada por

$$f_Y(y) = \begin{cases} c\,y^2\,(1-y), & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por características tecnológicas si un estanque dispone de menos del 10 % de su capacidad, el surtidor no funciona en forma automática y por tanto requiere del manejo de un experto (bombero).

Debido a una futura alza en el valor, usted concurre a esta estación de servicio y decide llenar su estanque. (Suponga que los estanques se comportan de manera mutuamente independiente)

(a) **[3.0 ptos]** Si usted quiere atenderse solo para no dejar propina y ya ha probado en dos estanque sin lograr que salga gasolina de manera automática, ¿cuál es la probabilidad que lo logre en la tercera elección que haga? Determine previamente el valor de la constante c.

(b) **[3.0 ptos]** ¿Cuál es la probabilidad que al menos una islas puedan expender gasolina en forma automática?

Solución

(a) Para determinar la constante c tenemos la siguiente condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 c\,y^2\,(1-y)\,dy &= 1 \\ \Rightarrow c\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 &= 1 \\ \Rightarrow c\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] &= 1 \\ \Rightarrow c &= 12 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{aligned}$$

La probabilidad que un surtidor no funcione automáticamente es

$$\begin{aligned} P(Y \le 0{,}1) &= \int_0^{0,1} 12\,y^2\,(1-y)\,dy \\ &= 12\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{0,1} \\ &= 12\left[\frac{0{,}1^3}{3} - \frac{0{,}1^4}{4}\right] \\ &= 0{,}0037 \quad \textbf{[1.0 Ptos]} \end{aligned}$$

Definamos S_i al evento en que el i-ésimo surtidor probado funciona automáticamente.

Nos pide $P(S_3 \,|\, \overline{S}_1 \cap \overline{S}_2)$, la cual por independencia entre los surtidores es igual a $P(S_3)$.

Por lo tanto

$$P(S_3 \,|\, \overline{S}_1 \cap \overline{S}_2) = P(S_3) = 1 - P(\overline{S}_3) = 1 - 0{,}0037 = 0{,}9963 \quad \textbf{[1.0 Ptos]}$$

(b) Se pide la probabilidad que al menos una funciones, es decir, $P\left(\bigcup_{i=1}^{5} S_i\right)$. **[1.0 Ptos]**

Por ley del complemento, ley De Morgan e independencia tenemos que:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{5} S_i\right) &= 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{5} S_i}\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{5} \overline{S}_i\right) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{S}_i) \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&= 1 - 0{,}0037^5 \quad \textbf{[0.5 Ptos]}\\
&\approx 1
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Formulario (Técnicas de Conteo)

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales $n_1,\ldots,n_k$, entonces

$$S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$.

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño n son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1,\ldots, n_k$, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1\, n_2\, \cdots\, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}\, x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$