Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2012

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Pauta	:	**I1**
Profesor	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1) y Alejandro Trapp (Sec. 2)**
Ayudantes	:	**Claudia Reyes Vizcarra y Erwin Agüero Meza**

Problema 1

(a) Considere que en un proceso de selección laboral, entre muchos postulantes, se presentan dos egresados de ingeniería UC (digamos A y B). Suponga que cada uno de ellos tiene la misma probabilidad de ser seleccionado, la cuál es igual a p. Asumiendo independencia, calcule la probabilidad que ambos sean seleccionados, dado que:

(a.1) **[1.5 Ptos.]** A es seleccionado.

(a.2) **[1.5 Ptos.]** Al menos uno de ellos es seleccionado.

Nota: En sala se informo que A y B son eventos independientes.

(b) Durante las cuatro semanas de febrero 10 ministros del gobierno, en forma independiente, deben solicitar sus vacaciones. ¿Cuál es la probabilidad de que:

(b.1) **[1.5 Ptos.]** para una semana determinada 6 ministros hayan solicitado sus vacaciones?

(b.1) **[1.5 Ptos.]** las solicitudes se distribuyan como sigue: para la primera semana cuatro solicitudes, la segunda semana tres solicitudes, la tercera dos solicitudes y la última semana solo una solicitud de vacaciones?

Solución

(a.1) Definamos los siguientes eventos: A: "A es seleccionado" y B: "B es seleccionado" **[0.2 Ptos.]**

Tenemos que

$$\begin{aligned}
P(A \cap B \,|\, A) &= \frac{P(A \cap B \cap A)}{P(A)} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{P(A) \cdot P(B)}{(P(A)}, \quad \text{por independencia} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{p^2}{p} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= p \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(a.2) Se pide

$$\begin{aligned}
P(A \cap B \,|\, A \cup B) &= \frac{P[(A \cap B) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)}, \quad \text{por independencia y ley aditiva} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{p^2}{p + p - p^2} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{p}{2 - p} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b.1) Definamos como C al evento en que para una semana determinada 6 ministros hayan solicitado sus vacaciones.

Primeramente contamos los casos totales

$$\# S = 4^{10} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

ya que cada ministro tiene como alternativa elegir cualquiera de las 4 semanas disponible.

Los casos favorables son

$$\# C = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

ya que de los 10 ministros se necesitamos que 6 elijan una semana.

Por lo tanto, la probabilidad solicitada es

$$P(C) = \frac{\# C}{\# S} = \frac{210}{4^{10}} = 0.0002002716 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(b.2) Definamos como D al evento donde las solicitudes se distribuyen como sigue: para la primera semana cuatro solicitudes, la segunda semana tres solicitudes, la tercera dos solicitudes y la última semana solo una solicitud de vacaciones.

Las solicitudes se distribuyan 4,3,2 y 1 es una ordenación multinomial.

Por tanto, los casos favorables son

$$\# D = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot} = 12600 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Por tanto, la probabilidad solicitada

$$P(D) = \frac{\# D}{\# S} = \frac{12600}{4^{10}} = 0.0120163 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Un establecimiento educacional (PS - Particular subvencionado) llevó a cabo estos últimos cinco años una preparación especial para sus alumnos de cuarto medio, como una forma de incrementar el rendimiento en la PSU. A la luz de los resultados de estas generaciones, han decidido efectuar una inserción publicitaria en un medio de comunicación, para lo cual requieren algunos datos y piden su ayuda. Le informan que, en resumen, los alumnos han obtenido una media de 600 puntos con una desviación estándar de 72 puntos en el puntaje medio de la PSU (promedio Lenguaje y Matemáticas), y requieren los siguientes datos (bajo el supuesto que los puntaje medios siguen una distribuyen Normal):

(a) **[1.5 Ptos.]** Proporción de estudiantes que obtienen más de 700 puntos

(b) **[1.5 Ptos.]** Proporción de estudiantes que pueden postular (ya que obtiene 475 ó más)

(c) **[1.5 Ptos.]** Puntaje mínimo alcanzado por el 20 % de los puntajes más altos (y así poder afirmar: "el 20 % ó más de nuestros alumnos logra **X** puntos o más en la PSU, asegurando su futuro universitario").

(d) **[1.5 Ptos.]** Repita (c) bajo el supuesto que los los puntajes medios siguen una distribución Log-Normal.

Solución

Problema 3

Con el objetivo de evaluar la instalación de un parque eólico en la Quinta región, se lleva a cabo un estudio referente a la velocidad del viento en la zona. Éstos pueden ser modelados adecuadamente a través de la distribución Weibull (Waloddi Weibull, 1951. Aunque fue propuesta originalmente por Fréchet, 1927), donde la función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\kappa-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\kappa}\right],$$

donde $x \geq 0$, $\kappa > 0$ y $\lambda > 0$.

(a) **[3.0 Ptos.]** Determine la función de distribución acumulada e indique el valor de la mediana de esta distribución.

(b) **[3.0 Ptos.]** Muestre que el valor esperado está dado por $\dfrac{\lambda}{\kappa}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{\kappa}\right)$.

Solución

Problema 4

Las causas por las cuales se inicia un incendio forestal pueden ser catalogadas como Humanas (68 % de las veces) por negligencia o intención y No Humanas, las cuales corresponden a causas naturales (caída de un rayo, erupciones volcánicas, meteoritos, combustión espontánea, etc) o causas indirectas (chispa producida por un vehículo, rotura de tendido eléctrico, etc).

Por otra parte, para su propagación deben darse condiciones meteorológicas particulares. Cuando estas son peligrosas (altas temperaturas, ráfagas de viento, etc) es altamente probable su propagación. En cambio cuando las condiciones no son peligrosas (humedad, baja temperatura, ausencia de viento, etc) estas podrían impedir su propagación. Basados en diversos estudios, un especialista ha asignado las siguientes probabilidades:

- Que se propague un incendio dado que la causa inicial es humana y que las condiciones meteorológicas sean peligrosas ocurre un 50 % de la veces. Si las condiciones meteorológicas son calificadas como no peligrosas y la causa inicial es humana la probabilidad de propagación se reduce en un 76 %.
- Que se propague un incendio dado que la causa inicial no es humana (natural o indirecta) y que las condiciones meteorológicas sean peligrosas ocurre un 36 % de la veces. Si las condiciones meteorológicas son calificadas como no peligrosas y la causa inicial no es humana la probabilidad de propagación se reduce en un 90 %.
- Cuando las condiciones meteorológicas son peligrosas, la probabilidad que la causa inicial sea humana es 0.8 y baja a 0.6 cuando no son peligrosas. En cambio, si las condiciones meteorológicas son peligrosas o no, la probabilidad que la causa inicial sea natural es la misma e igual a 0.1.

Otros estudios con respecto a las condiciones meteorológicas muestran que el 40 % de las veces puede considerarse como peligrosas.

(a) **[3.0 Ptos.]** Determine la probabilidad que un incendio se propague.

(b) **[1.5 Ptos.]** ¿Qué fracción de incendios iniciados por causa humana se propagan?

(c) **[1.5 Ptos.]** Si un incendio no se propaga, ¿cuál es la probabilidad que el tipo de causa sea indirecta?

Solución

(a) Definamos los siguientes eventos

- A_1: Se inicia incendio forestal por cauda humana.
- A_2: Se inicia incendio forestal por cauda no humana (causa natural).
- A_3: Se inicia incendio forestal por cauda no humana (causa indirecta).
- B: Condiciones meteorológicas peligrosas.
- C: Incendio se propaga.

Del enunciado tenemos que

$$P(A_1) = 0.68 \Rightarrow P(A_2) + P(A_3) = 0.32 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$
$$P(B) = 0.40 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0.60 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$
$$P(A_1 \mid B) = 0.80 \Rightarrow P(\overline{A}_1 \mid B) = 0.20 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$
$$P(A_1 \mid \overline{B}) = 0.60 \Rightarrow P(\overline{A}_1 \mid \overline{B}) = 0.40 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$
$$P(C \mid A_1 \cap B) = 0.50 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$
$$P(C \mid A_1 \cap \overline{B}) = 0.50 \cdot [1 - 0.76] \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$
$$P(C \mid \overline{A}_1 \cap B) = 0.36 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$
$$P(C \mid \overline{A}_1 \cap \overline{B}) = 0.36 \cdot [1 - 0.9] \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Se pide $P(C)$, la cuál por probabilidades totales es igual a

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(C \cap [A_1 \cap B]) + P(C \cap [\overline{A}_1 \cap B]) + P(C \cap [A_1 \cap \overline{B}]) + P(C \cap [\overline{A}_1 \cap \overline{B}]) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= P(C \mid A_1 \cap B)\, P(A_1 \mid B)\, P(B) + P(C \mid \overline{A}_1 \cap B)\, P(\overline{A}_1 \mid B)\, P(B) + P(C \mid A_1 \cap \overline{B})\, P(A_1 \mid \overline{B})\, P(\overline{B}) + P(C \mid \overline{A}_1 \cap \overline{B})\, P(\overline{A}_1 \mid \overline{B})\, P(\overline{B}) \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&= 0.50 \cdot 0.80 \cdot 0.40 + 0.36 \cdot 0.20 \cdot 0.40 + 0.50 \cdot [1 - 0.76] \cdot 0.60 \cdot 0.60 + 0.36 \cdot [1 - 0.9] \cdot 0.40 \cdot 0.60 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= 0.24064 \quad \textbf{[0.3 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide $P(C \mid A_1) \times 100\,\%$. **[0.2 Ptos.]**

Tenemos que

$$\begin{aligned}
P(C \mid A_1) &= \frac{P(C \cap A_1)}{P(A_1)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{P(C \cap A_1 \cap B) + P(C \cap A_1 \cap \overline{B})}{P(A_1)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{P(C \mid A_1 \cap B)\, P(A_1 \mid B)\, P(B) + P(C \mid A_1 \cap \overline{B})\, P(A_1 \mid \overline{B})\, P(\overline{B})}{P(A_1)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{0.50 \cdot 0.80 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot [1 - 0.76] \cdot 0.6 \cdot 0.6}{0.68} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{0.2032}{0.68} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 0.2988235 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto 29.88 % de los incendios iniciados por causa humana se propagan. **[0.1 Ptos.]**

(c) Del enunciado tenemos que

$$\begin{aligned}
P(A_2 \mid B) = 0.1 &\Rightarrow P(A_3 \mid B) = 0.1 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
P(A_2 \mid \overline{B}) = 0.1 &\Rightarrow P(A_3 \mid \overline{B}) = 0.3 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
P(C \mid A_3 \cap B) &= 0.36 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
P(C \mid A_3 \cap \overline{B}) &= 0.36 \cdot [1 - 0.9] \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
P(A_3 \mid \overline{C}) &= \frac{A_3 \cap \overline{C}}{P(\overline{C})} \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{P(\overline{C} \cap A_3 \cap B) + P(\overline{C} \cap A_3 \cap \overline{B})}{1 - P(C)} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \frac{P(\overline{C} \mid A_3 \cap B)\, P(A_3\, 1\, B)\, P(B) + P(\overline{C} \mid A_3 \cap \overline{B})\, P(A_3 \mid \overline{B})\, P(\overline{B})}{1 - P(C)} \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \frac{[1 - 0.36] \cdot 0.1 \cdot 0.4 + [1 - 0.36 \cdot 0.1] \cdot 0.3 \cdot 0.6}{1 - 0.24064} \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= \frac{0.19912}{0.75936} \quad \textbf{[0.1 Ptos.]} \\
&= 0.2622208 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Formulario

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales n_1,..., n_k, entonces

$$S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$.

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños n_1,..., n_k, con $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1 \, n_2 \, \cdots \, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!} \, x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$

Propiedades función $\Gamma(\cdot)$

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1} \, e^{-u} \, du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a \, \Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Propiedades función $B(\cdot, \cdot)$

$$(1) \quad B(q, r) = \int_0^1 x^{q-1} \, (1-x)^{r-1} \, dx; \quad (2) \quad B(q, r) = \frac{\Gamma(q) \, \Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x \, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Distribuciones

Distribución	**Densidad de Probabilidad**	Θ_X	**Parámetros**	**Esperanza, Varianza y fgm**
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\,\sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M_X(t) = \exp\left(\mu_X\,t + \frac{1}{2}\,\sigma_X^2\,t^2\right)$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\,x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\,\zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z\sim$Normal(0,1)

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998