Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2012

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Pauta	**:**	**I1**
Profesor	**:**	**Ricardo Aravena (Sec. 1, 3 y 4) y Ana María Araneda (Sec. 2)**
Ayudantes	**:**	**Carlos Cayuman Cofre, Felipe Ossa Monge, Claudia Reyes Vizcarra y Juan Pablo Vigneaux Ariztía.**

Problema 1

La producción de varillas de acero es un proceso que presenta dificultad en la precisión debido a las temperaturas con las que se trabaja. Cierto proceso debe entregar varillas de acero de 6 mts. de largo. El proceso produce varillas cuyo largo, debido a las imperfecciones, se comporta como una variable aleatoria con distribución Normal de media 6 mts, y con un coeficiente de variación, c.o.v. del 2 %. Sin embargo, cuando la mezcla contiene un porcentaje de impurezas superior al permitido, el coeficiente de variación se incrementa a un 3 %, manteniéndose la media. El control de calidad mide el largo de una varilla tomada al azar de la producción diaria. Si este largo se encuentra entre los límites de tolerancia, dados por

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma,\ \mu + \frac{3}{2}\sigma\right),$$

donde μ y σ corresponden a la media y desviación estándar del largo de las varillas en condiciones regulares, se acepta el lote y se despacha. En caso contrario, se rechaza el lote y se envía a reproceso.

(a) **[2.0 Ptos.]** Determine el porcentaje de la producción que es reprocesado en condiciones regulares.

(b) **[2.0 Ptos.]** Determine el porcentaje de la producción que es reprocesado cuando el porcentaje de impurezas es superior al permitido.

(c) **[2.0 Ptos.]** Con el objetivo de que, en condiciones regulares, el 50 % de la producción sea aceptado, manteniendo el límite inferior de tolerancia, ¿cuál debería ser el límite superior de tolerancia?

Nota: *el coeficiente de variación (c.o.v) se define como el cociente entre la desviación estándar y la media de la distribución*

Solución:

Sea X el largo de las varillas de acero.

Para encontrar las desviaciones estándar bajo condiciones regulares y de mayor porcentaje de impurezas, utilizamos que

$$\text{c.o.v} = \frac{\sigma}{\mu} \ \Rightarrow\ \sigma = \mu \times \text{c.o.v.}$$

De este modo, en condiciones regulares,

$$\sigma = 6 \times 0.02 = 0.12 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

y, cuando la mezcla contiene impurezas superiores a las permitidas,

$$\sigma' = 6 \times 0.03 = 0.18 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

En ambos casos la media es $\mu = 6$.

(a) Bajo condiciones regulares, X distribuye Normal(μ, σ). Se pide

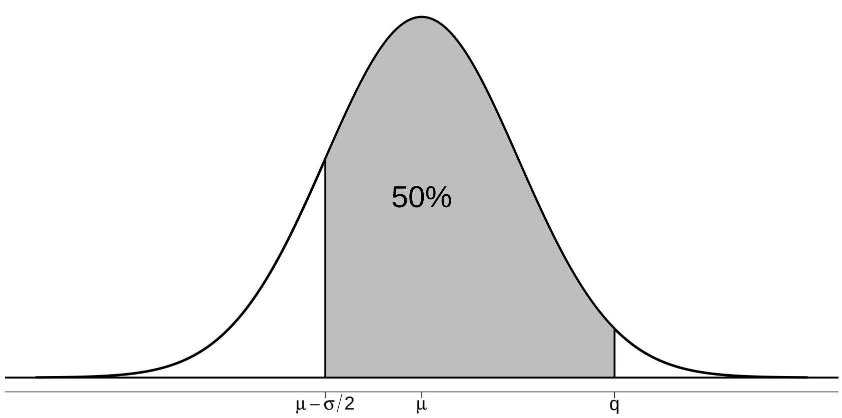
$$
\begin{aligned}
\textbf{[0.2 Ptos.]}\quad 1 - P\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \frac{3}{2}\sigma\right) &= 1 - P\left(\frac{\mu - \frac{1}{2}\sigma - \mu}{\sigma} < Z < \frac{\mu + \frac{3}{2}\sigma - \mu}{\sigma}\right) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - P\left(-\frac{1}{2} < Z < \frac{3}{2}\right) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - [\Phi(1.5) - \Phi(-0.5)] \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - \Phi(1.5) + \Phi(-0.5) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - \Phi(1.5) + [1 - \Phi(0.5)] \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 2 - 0.9332 - 0.6915 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 0.3753. \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

(b) Bajo condiciones de mayor impureza, X distribuye Normal(μ, σ'). Se pide

$$
\begin{aligned}
\textbf{[0.2 Ptos.]}\quad 1 - P\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \frac{3}{2}\sigma\right) &= 1 - P\left(\frac{\mu - \frac{1}{2}\sigma - \mu}{\sigma'} < Z < \frac{\mu + \frac{3}{2}\sigma - \mu}{\sigma'}\right) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - P\left(-\frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sigma'} < X < \frac{3}{2} \times \frac{\sigma}{\sigma'}\right) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - P\left(-\frac{1}{2} \times \frac{0.12}{0.18} < X < \frac{3}{2} \times \frac{0.12}{0.18}\right) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - P\left(-0.333 < Z < 1\right) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - [\Phi(1) - \Phi(-0.333)] \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - \Phi(1) + \Phi(-0.333) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - \Phi(1) + [1 - \Phi(0.333)] \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 2 - 0.8413 - 0.6293 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 0.5294 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

(c) Bajo condiciones regulares, X distribuye Normal(μ, σ).

Se pide el punto q en la figura.



Para ello, necesitamos conocer el área de la cola izquierda:

$$
\begin{aligned}
P\left(X < \mu - \frac{1}{2}\sigma\right) &= P(Z < -0.5) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - \Phi(0.5) \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 1 - 0.6915 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 0.3085 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}
$$

Luego, el punto q debe dejar a la izquierda $(30.85 + 50)\,\% = 80.85\,\%$ de la probabilidad **[0.4 Ptos.]**, es decir corresponde a

$$
q = \Phi^{-1}(0.8085) \times \sigma + \mu = 0.875 \times 0.12 + 6 = 6.105 \quad \textbf{[0.8 Ptos.]}
$$

+ 1 Punto Base

Problema 2

Considere una variable aleatoria X cuya función de densidad $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\dfrac{1}{(\zeta\,x)}\,\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\log x-\lambda}{\zeta}\right)^2\right\}$, con $x \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\zeta > 0$.

(a) **[2.0 Ptos.]** Encuentre la función de distribución acumulada de X, $F_X(x)$.

(b) **[2.0 Ptos.]** Encuentre la mediana de la distribución.

(c) **[2.0 Ptos.]** Demuestre que la esperanza de esta distribución es $\mathrm{E}(X) = \exp\left\{\lambda + \frac{1}{2}\,\zeta^2\right\}$.

Solución:

(a) Se pide

$$F_x(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(\zeta\,u)}\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log u-\lambda}{\zeta}\right)^2\right\}\,du \quad \textbf{[0.6 Ptos.]}$$

Realizamos el cambio de variable

$$v = \frac{\log u-\lambda}{\zeta} \qquad \Longrightarrow u = \exp\{v\zeta+\lambda\}$$
$$\Longrightarrow du = \exp\{v\zeta+\lambda\}\,\zeta\,dv.$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
F_x(x) &= \int_{-\infty}^{\frac{\log x-\lambda}{\zeta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(\zeta\,\exp\{v\zeta+\lambda\})}\,\exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}\exp\{v\zeta+\lambda\}\,\zeta\,dv \\
&\quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \text{ por limites de integracion, } \textbf{[0.5 Ptos.]} \text{ por integrando} \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{\log x-\lambda}{\zeta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}\,dv \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= \Phi\left(\frac{\log x-\lambda}{\zeta}\right). \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(b) Se pide el punto x_0 tal que $F_x(x_0) = 0.5$, es decir

$$\begin{aligned}
\textbf{[0.8 Ptos.]} \quad \Phi\left(\frac{\log x_0-\lambda}{\zeta}\right) = 0.5 &\Longleftrightarrow \frac{\log x_0-\lambda}{\zeta} = \Phi^{-1}(0.5) = 0 \quad \textbf{[0.8 Ptos.]} \\
&\Longleftrightarrow \log x_0 = \lambda \quad \textbf{[0.5 Ptos.]} \\
&\Longleftrightarrow x_0 = e^{\lambda}. \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}
\end{aligned}$$

(c) Se pide

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty u \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(\zeta\,u)}\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log u-\lambda}{\zeta}\right)^2\right\}\,du \quad \textbf{[0.6 Ptos.]}$$

Utilizando el mismo cambio de variable,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\zeta}\,\exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}\exp\{v\zeta+\lambda\}\zeta\,dv \\
&\quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \text{ por limites de integracion, } \textbf{[0.4 Ptos.]} \text{ por integrando} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(v^2-2\zeta v+\zeta^2\right)\right\}\exp\{\lambda+1/2\zeta^2\}\,dv \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \exp\left\{\lambda+\frac{1}{2}\,\zeta^2\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(v-\zeta)^2\right\}\,dv \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \exp\left\{\lambda+\frac{1}{2}\,\zeta^2\right\}\cdot 1, \quad \text{Por integrar una Normal}(\zeta,\,1) \text{ en todo } \mathbb{R} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}
\end{aligned}$$

+ 1 Punto Base

Problema 3

Una empresa con buen historial, donde el 90 % de las partidas cumple con las especificaciones, decide participar en una licitación que impone un estricto control de calidad en la recepción del material.

(a) **[3.0 Ptos.]** Si el control de calidad que permite aceptar o rechazar los lotes tiene una confiabilidad del 95 % (es decir, clasifica correctamente el 95 % de los lotes recibidos), ¿cuál es la probabilidad que un lote de la empresa cumpla con las especificaciones, dado que fue rechazado?

(b) **[3.0 Ptos.]** Existe también otro procedimiento de aceptación o rechazo de cada lote de 12 varillas. Del lote, se selecciona una varilla al azar y, si ésta no cumple con las especificaciones, se rechaza el lote. En caso contrario, se selecciona una segunda varilla y, si ésta cumple con las especificaciones, el lote es aceptado, en caso contrario es rechazado, ¿cuál es la probabilidad que el lote sea rechazado, si éste contiene exactamente 2 varillas que no cumplen con las especificaciones?

Solución:

(a) Definamos los siguientes eventos:

C: El lote cumple con las especificaciones. **[0.1 Ptos.]**
T: Test de control de calidad indica que el lote cumple con las especificaciones. **[0.1 Ptos.]**

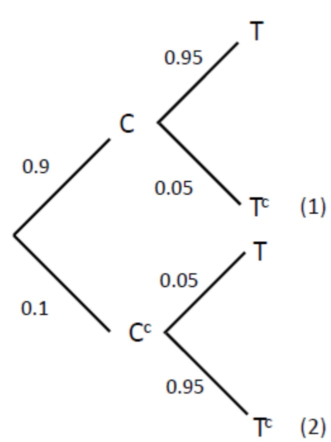
Alternativa 1: Del enunciado se deduce que:

$$P(C) = 0.90 \Rightarrow P(\overline{C}) = 0.10 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$
$$P(T \,|\, C) = 0.95 \Rightarrow P(\overline{T} \,|\, C) = 0.05 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$
$$P(\overline{T} \,|\, \overline{C}) = 0.95 \Rightarrow P(T \,|\, \overline{C}) = 0.05 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

Se pide $P(C \,|\, \overline{T})$, la cual se obtienen aplicando el Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(C \,|\, \overline{T}) &= \frac{P(\overline{T} \,|\, C) \cdot P(C)}{P(\overline{T} \,|\, C) \cdot P(C) + P(\overline{T} \,|\, \overline{C}) \cdot P(\overline{C})} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\ &= \frac{0.05 \cdot 0.90}{0.05 \cdot 0.90 + 0.95 \cdot 0.10} \quad \textbf{[1.0 Ptos.]} \\ &= 0.3214 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \end{aligned}$$

Alternativa 2: Mediante un árbol de probabilidad se tiene que:



[0.6 Ptos.]

Que el lote sea rechazado ocurre en las ramas (1) o (2). Se pide la probabilidad de ocurrencia de la rama (1) dado que el lote fue rechazado **[1.0 Ptos.]**, es decir,

$$\textbf{[1.0 Ptos.]} \quad \frac{0.05 \cdot 0.90}{0.05 \cdot 0.90 + 0.95 \cdot 0.10} = 0.3214 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

(b) Definamos como C_i al evento "la varilla i cumple con las especificaciones", con $i = 1, 2$ y R al evento "el lote es rechazado". **[0.2 Ptos.]**

Alternativa 1: Al sacar la primera varilla, la probabilidad de que ésta cumpla las especificaciones es 10/12, es decir,

$$P(C_1) = \frac{10}{12} \Rightarrow P(\overline{C}_1) = \frac{2}{12} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

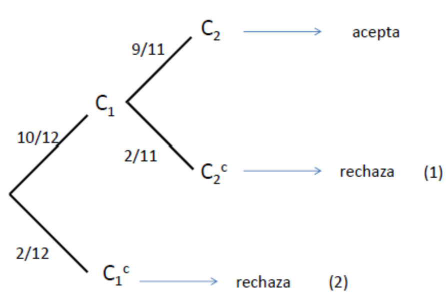
Si la primera varilla cumple con las especificaciones, la segunda varilla tiene probabilidad 2/11 de no cumplir con las especificaciones, es decir,

$$P(\overline{C}_2 \,|\, C_1) = \frac{2}{11} \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Se pide

$$\begin{aligned}
P(R) &= P[\overline{C}_1 \cup (C_1 \cap \overline{C}_2)] \quad \textbf{[0.8 Ptos.]} \\
&= P(\overline{C}_1) + P(C_1 \cap \overline{C}_2), \quad \text{por ser eventos disjuntos} \quad \textbf{[0.4 Ptos.]} \\
&= P(\overline{C}_1) + P(\overline{C}_2 \,|\, C_2) \cdot P(C_1) \quad \textbf{[0.3 Ptos.]} \\
&= \frac{2}{12} + \frac{2}{11} \cdot \frac{10}{12} \quad \textbf{[0.2 Ptos.]} \\
&= 0.3181818 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}
\end{aligned}$$

Alternativa 2: Mediante un árbol de probabilidad



[1.0 Ptos.]

Se pide la suma de las probabilidades de las ramas (1) y (2) **[1.5 Ptos.]**, es decir,

$$\textbf{[0.2 Ptos.]} \quad \frac{10}{12} \times \frac{2}{11} + \frac{2}{12} = 0.833 \times 0.182 + 0.167 = 0.3182 \quad \textbf{[0.1 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Problema 4

Un grupo de estudiantes del Instituto Tecnológico de Massachusetts en Estados Unidos, elaboró un sistema de probabilidades para ganar la lotería estatal informaron medios internacionales el pasado mes. Según los jóvenes, mientras realizaban un proyecto para dicha institución y tras desarrollar varios cálculos matemáticos, llegaron a la conclusión que apostando cuando el pozo superara los dos millones de dólares, se garantizaba su fortuna. Esta lotería, es muy similar al juego del LOTO que se juega en nuestro país, pero la diferencia está en que acá no existe un límite en el pozo mayor acumulado, en cambio, en la lotería de Massachusetts cuando este pozo supera los dos millones de dólares y no habían ganadores, entonces se repartía en las categorías inferiores. Para ilustrar este caso, consideremos el juego del LOTO (sin comodín) con los siguientes premios por categoría:

Categoría	Número de Aciertos	Premio (pesos chilenos)
LOTO*	6	\$ 2.000.000.000
QUINA	5	\$ 2.000.000
CUATERNA	4	\$ 20.000
TERNA	3	\$ 1.000
SIN PREMIO	< 3	\$ 0

$*$ Si en esta categoría hay más de un ganador, este monto de reparte.

Recuerde que el juego del LOTO selecciona una muestra sin reemplazo de 6 bolitas entre un grupo de 41 marcadas con los números 1 a 41.

(a) **[3.0 Ptos.]** Aplicando técnicas de conteo complete la siguiente tabla de probabilidades:

Categoría	LOTO	QUINA	CUATERNA	TERNA	SIN PREMIO
Probabilidad			0,0019849		0,9688559

Redondee sus resultados a 7 decimales.

(b) **[1.0 Ptos.]** Suponga que un juego cuesta \$1.000, estime la ganancia esperada (PREMIO - COSTO) para una jugada. Observará que el juego no es favorable, es decir, espera perder dinero.

Si se juegan 2 millones de apuestas, entonces estas deberían distribuirse teóricamente, redondeando a números enteros, de la siguiente manera

Categoría	Distribución de Apuestas
LOTO	0
QUINA	93
CUATERNA	3.970
TERNA	58.225
SIN PREMIO	1.937.712
TOTAL	2.000.000

(c) **[2.0 Ptos.]** Con el objetivo de mostrar que bajo la regla estadounidense el juego se vuelve favorable para el apostador desarrolle los siguientes pasos:

(c.1) **[0.5 Ptos.]** Calcule el monto total a repartir para las categorías TERNA, CUATERNA y QUINA, según la tabla de premios del enunciado.

(c.2) **[0.5 Ptos.]** Reparta proporcionalmente los mil millones de pesos según los montos totales calculados anteriormente.

(c.3) **[0.5 Ptos.]** Determine ahora la nueva tabla de premios.

(c.4) **[0.5 Ptos.]** Calcule la ganancia esperada y observe que ahora el juego es favorable para el apostador.

Solución:

(a) Tenemos que

$$\# S = \binom{41}{6} = 4.496.388 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$
$$\# \text{LOTO} = \binom{6}{6} \cdot \binom{41-6}{0} = 1 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$
$$\# \text{QUINA} = \binom{6}{5} \cdot \binom{41-6}{1} = 6 \cdot 35 = 210 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

Luego,

$$P(\text{LOTO}) = \frac{1}{4.496.388} = 0.0000002 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$
$$P(\text{QUINA}) = \frac{210}{4.496.388} = 0.0000467 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$
$$P(\text{TERNA}) = 1 - P(\text{LOTO}) - P(\text{QUINA}) - P(\text{CUATERNA}) - P(\text{SIN PREMIO}) = 0.0291123 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(b) Definamos como U a la variable aleatoria que denota la ganancia (premio - costo) al jugar un boleto, es decir,

u	1.999.999.000	1.999.000	19.000	0	-1.000
$p_U(u)$	$0,0000002$	$0,0000467$	$0,0019849$	$0,0291123$	$0,9688559$

[0.5 Ptos.]

Luego

$$\text{E}\,(U) = \sum_{u \in \Theta_U} u \cdot p_U(u) = -437,7897 \quad \textbf{[0.5 Ptos.]}$$

(c) (c.1) Tenemos que los montos totales por categoría a repartir son

Categoría	Premio	Distribución de Apuestas	Monto Total a Repartir
QUINA	\$ 2.000.000	93	\$ 186.000.000
CUATERNA	\$ 20.000	3.970	\$ 79.400.000
TERNA	\$ 1.000	58.225	\$ 58.225.000

[0.5 Ptos.]

(c.2) Repartamos proporcionalmente los dos mil millones de pesos de la categoría LOTO

Categoría	Monto a Repartir	Premio LOTO	Nuevo Monto a Repartir
QUINA	\$ 186.000.000	\$ 1.149.478.563	\$ 1.335.478.563
CUATERNA	\$ 79.400.000	\$ 490.691.387	\$ 570.091.387
TERNA	\$ 58.225.000	\$ 359.830.050	\$ 418.055.050
TOTAL	\$ 323.625.000	\$ 2.000.000.000	\$ 2.323.625.000

[0.5 Ptos.]

(c.3) La nueva tabla de premios queda como sigue

Categoría	Nuevo Monto a Repartir	Distribución de Apuestas	Nuevo Premio
QUINA	\$ 1.335.478.563	93	\$ 14.359.985
CUATERNA	\$ 570.091.387	3.970	\$ 143.600
TERNA	\$ 418.055.050	58.225	\$ 7.180

[0.5 Ptos.]

(c.4) La nueva ganancia esperada esta dada por

u	0	$14.358.985$	142.600	6.180	-1.000
$p_U(u)$	$0,0000002$	$0,0000467$	$0,0019849$	$0,0291123$	$0,9688559$

[0.3 Ptos.]

Luego

$$\mathrm{E}\left(U\right) = \sum_{u \in \Theta_U} u \cdot p_U(u) = 164.6689 \quad \textbf{[0.2 Ptos.]}$$

+ 1 Punto Base

Formulario

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales $n_1,\ldots,n_k$, entonces

$$S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$.

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1,\ldots, n_k$, con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1\, n_2\, \cdots\, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}\, x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$

Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza, Varianza y fgm
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	μ, σ	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M_X(t) = \exp\left(\mu_X\,t + \frac{1}{2}\,\sigma_X^2\,t^2\right)$

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998