Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2013

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Interrogación	**:**	**3**
Profesor	**:**	**Ricardo Aravena (Sec. 1 y 3) y Ana María Araneda (Sec. 2 y 4)**
Ayudantes	**:**	**Carlos Cayuman Cofre y María Ignacia Vicuña.**

- *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
- *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo celulares y aparatos con bluetooth y wifi).*
- *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
- *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
- *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y sus cuadernillos.*
- *Recuerde poner su N° de lista en ambos cuadernillos.*

Problema 1

Sean X la proporción del volumen de cierta roca que corresponde a cobre sólido, e Y la proporción del volúmen de cobre sólido que corresponde a cristales de tipo A. Suponga que estas dos variables tienen funciones de densidad, respectivamente,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 6x(1-x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \\ f_Y(y) &= 3y^2, \qquad\qquad 0 \leq y \leq 1, \end{aligned}$$

y cero en otros casos. Sea $Z = XY$ la proporción del volumen de las rocas de este tipo que corresponde a cristales de tipo A,

a) (3 puntos) Determine la función de densidad de Z.

Solución: La distribución conjunta de X e Y corresponde a

$$f_{X,Y} = 18x(1-x)y^2, \qquad 0 \leq x \leq 1, \;\; 0 \leq y \leq 1, \qquad \textbf{[0.5]}$$

cero en otro caso **[0.25]**. Por otra parte,

$$X = g^{-1}(Z) = \frac{Z}{Y} \Longrightarrow \left| \frac{dx}{dz} \right| = \frac{1}{y}, \qquad \textbf{[0.5]}$$

pues $y > 0$. También notamos que, si $X \leq 1$ entonces $Z \leq Y$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_z^1 18\,\frac{z}{y}\left(1-\frac{z}{y}\right)y^2\,\frac{1}{y}\,dy \qquad \textbf{[0.5] integral} \qquad \textbf{[0.5] límites} \\ &= 18\left(\int_z^1 z\,dy - z^2\int_z^1 \frac{1}{y}\,dy\right) \\ &= 18(z(1-z) - z^2(\log 1 - \log z)) \\ &= 18(z - z^2 + z^2\log z), \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

para $0 \leq z \leq 1$, y cero en otro caso. **[0.25]**

b) (3 puntos) Obtenga la probabilidad de que el porcentaje del volumen total debido a cristales de tipo A sea mayor al 10 %.

Solución: Se pide:

$$
\begin{aligned}
P(Z > 0.1) &= 18 \int_{0.1}^{1} (z - z^2 + z^2 \log z)\, dz \qquad \textbf{[1.5]} \\
&= 18 \left(\frac{1 - 0.1^2}{2} - \frac{1 - 0.1^3}{3} + \int_{0.1}^{1} z^2 \log z \, dz \right). \qquad \textbf{[0.8]}
\end{aligned}
$$

Integrando por partes el último término con $u = \log z$ y $dv = z^2\, dz$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
P(Z > 0.1) &= 18 \left(0.495 - 0.333 - \log 0.1 \times \frac{0.1^3}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1 - 0.1^3}{3} \right) \\
&= 18(0.162 - 0.0008 - 0.111) = 18 \times 0.0502 \\
&= 0.9036. \qquad \textbf{[0.7]}
\end{aligned}
$$

[1.0] base

Problema 2

En las plantas chancadoras de las faenas mineras se producen detenciones por diversas causas, entre las cuales las más relevantes (por su duración) son las fallas mecánicas y/o eléctricas, y la falta de material. A partir de observaciones anteriores se ha determinado que los tiempos de detención (en horas) debido a cada una de estas causas se comportan como variables aleatorias con distribuciones exponenciales independientes, de parámetros 1/8 y 1/12, para las fallas mecánicas y/o eléctricas, y falta de material, respectivamente. Determine:

a) (1.5 puntos) La probabilidad de que el tiempo de detención producto de la falla mecánica y/o eléctrica sea superior al tiempo de detención por falta de material.

Solución: Sean X e Y los tiempos de detención debidos a fallas mecánicas y/o eléctricas, y a faltas de material, respectivamente. Se pide $P(X > Y) = P(Z > 0)$, con $Z = X - Y$. La función de densidad conjunta de X e Y corresponde a

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{12} e^{-1/8x} e^{-1/12y}, \qquad \textbf{[0.1]}$$

para $x > 0, y > 0$, cero en otro caso. Por otra parte, $X = Z + Y$, por lo que $|dx/dz| = 1$ **[0.2]**. Notamos que Z toma valores en todo $\mathbb{R}$, pero dado que se pide $P(Z > 0)$ sólo se requiere su función de densidad para $z > 0$. En este caso, y puede tomar cualquier valor real, por lo que

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty f_{XY}(z + y, y) \times 1 \, dy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{96} \, e^{-1/8(z+y)} e^{-1/12y} \, dy \qquad \textbf{[0.2] integral} \qquad \textbf{[0.2] límites} \\
&= \frac{1}{96} e^{-1/8z} \frac{24}{5} \underbrace{\int_0^\infty \frac{5}{24} e^{-(5/24)y} \, dy}_{\int Exp(5/24)=1} \\
&= \frac{1}{20} e^{-1/8z} \qquad z > 0. \qquad \textbf{[0.3]}
\end{aligned}$$

Se nos pide

$$\begin{aligned}
P(Z > 0) &= \int_0^\infty \frac{1}{20} e^{-1/8z} \qquad \textbf{[0.3]} \\
&= \frac{1}{20} \times 8 \int_0^\infty \frac{1}{8} e^{-1/8z} \, dz \\
&= \frac{8}{20} = 0.4. \qquad \textbf{[0.2]}
\end{aligned}$$

Solución alternativa:

$$\begin{aligned}
P(X > Y) &= \int_0^\infty \int_0^x f_{XY}(x, y) \, dy \, dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^x \frac{1}{8} \times \frac{1}{12} e^{-1/8x} e^{-1/12y} \, dy \, dx \qquad \textbf{[0.7]} \\
&= 0.4. \qquad \textbf{[0.8]}
\end{aligned}$$

b) (1.5 puntos) La probabilidad de que el tiempo mínimo de las dos detenciones producidas sea superior a 10 hrs.

Solución: Sea U el mínimo entre X e Y. Se pide

$$\begin{aligned}
P(U > 10) &= P(\min\{X, Y\} > 10) \\
&= P(X > 10, Y > 10) \qquad \textbf{[0.3]} \\
&= P(X > 10)P(Y > 10) \qquad \textbf{[0.3]} \\
&= (1 - F_X(10))(1 - F_Y(10)). \qquad \textbf{[0.3]}
\end{aligned}$$

Para una distribución exponencial de parámetro λ, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, luego,

$$\begin{aligned} P(U > 10) &= e^{-1/8 \times 10} e^{-1/12 \times 10} \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= 0.287 \times 0.435 = 0.125. \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

c) (1.5 puntos) La probabilidad de que el tiempo máximo de las dos detenciones producidas sea inferior a 10 hrs.

Solución: Sea V el máximo entre X e Y. Se pide

$$\begin{aligned} P(V < 10) &= P(\text{máx}\{X, Y\} < 10) \\ &= P(X < 10, Y < 10) \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= P(X < 10) P(Y < 10) \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= F_X(10) F_Y(10) \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= (1 - e^{-1/8 \times 10})(1 - e^{-1/12 \times 10}) \qquad \textbf{[0.3]} \\ &= 0.713 \times 0.565 = 0.403. \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

d) (1.5 puntos) El valor esperado de la diferencia entre los tiempos máximos y mínimo de estas detenciones.

Solución: Necesitamos $E(V - U) = E(V) - E(U)$. Para ello, obtendremos primero las funciones de densidad de U y V.

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(\text{mín}\{X, Y\} \leq u) \\ &= 1 - P(\text{mín}\{X, Y\} > u) \\ &= 1 - P(X > u, Y > u) \\ &= 1 - P(X > u) P(Y > u) \\ &= 1 - e^{-1/8u} e^{-1/12u} = 1 - e^{-(5/24)u}, \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

$u > 0$, cero en otro caso, la que corresponde a la función de distribución acumulada de una variable Exponencial de parámetro $5/24$. Luego, su valor esperado corresponde a $E(U) = 24/5 = 4.8$. **[0.3]** Por otra parte,

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(\text{máx}\{X, Y\} \leq v) \\ &= P(X \leq v, Y \leq v) = P(X \leq v) P(Y \leq v) \\ &= F_X(v) F_Y(v). \qquad \textbf{[0.3]} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \frac{dF_V(v)}{dv} \\ &= f_X(v) F_Y(v) + F_X(v) f_Y(v) \\ &= \frac{1}{8} e^{-1/8v} (1 - e^{-1/12v}) + (1 - e^{-1/8v}) \frac{1}{12} e^{-1/12v} \\ &= \frac{1}{8} e^{-1/8v} - \frac{1}{8} e^{-5/24v} + \frac{1}{12} e^{-1/12v} - \frac{1}{12} e^{-5/24v}, \qquad \textbf{[0.2]} \end{aligned}$$

con $v > 0$, cero en otro caso. Luego

$$\begin{aligned}
E(V) &= \underbrace{\int_0^\infty v\ \frac{1}{8} e^{-1/8v}\ dv}_{E(Exp(1/8))=8} - \frac{1}{8}\ \frac{24}{5} \underbrace{\int_0^\infty v\ \frac{5}{24} e^{-(5/24)v}\ dv}_{E(Exp(5/24))=4.8} \\
&\quad + \underbrace{\int_0^\infty v\ \frac{1}{12} e^{-1/12v}\ dv}_{E(Exp(1/12))=12} - \frac{1}{12}\ \frac{24}{5} \underbrace{\int_0^\infty v\ \frac{5}{24} e^{-(5/24)v}\ dv}_{E(Exp(5/24))=4.8} \\
&= 8 - \frac{1}{8} \times \frac{24}{5} \times 4.8 + 12 - \frac{1}{12} \times \frac{24}{5} \times 4.8 \\
&= 8 - 2.88 + 12 - 1.92 \\
&= 15.2. \qquad [\mathbf{0.3}]
\end{aligned}$$

Finalmente

$$E(V - U) = 15.2 - 4.8 = 10.4. \qquad [\mathbf{0.1}]$$

[1.0] base

Problema 3

PARTE I:

Usted desea trasladarse desde el punto A al punto B, en la ciudad de Santiago. Para hacerlo, dispone de dos alternativas:

1. Viajar de manera directa, utilizando un bus del Transantiago cuyo tiempo de viaje, X, distribuye Normal de media 30 minutos y desviación estándar 10 minutos.

2. Utilizar la combinación colectivo - caminata - metro, cuyos tiempos de viaje, Y_1, Y_2 e Y_3, distribuyen Normal, de medias 10, 5 y 15 minutos, y desviaciones estándar 3, 1 y 2 minutos, respectivamente.

Debido a las condiciones del flujo vehicular, los tiempos de viaje en Transantiago y colectivo se encuentran correlacionados, siendo su correlación igual a 0,3. Por otra parte, al aumentar el tiempo que toma el colectivo, usted decidirá caminar más rápido, por lo que los tiempos de traslado en colectivo y caminata estan negativamente correlacionados, siendo esta correlación igual a -0,4. Las restantes correlaciones pueden asumirse nulas.

a) (2 puntos) ¿Qué alternativa es la más apropiada si se desea llegar lo más pronto posible al punto B? Justifique.

Solución:

Alternativa 1: Sea $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ el tiempo que toma la alternativa 2. Entonces Y distribuye Normal con media dada por:

$$\mu_y = 10 + 5 + 15 = 30. \qquad \textbf{[0.4]}$$

Para tomar una decisión podemos obtener

$$P(X > Y) = P(X - Y > 0) = P(Z > 0), \qquad \textbf{[0.4]}$$

con $Z = X - Y$. La variable Z distribuye Normal de media:

$$\mu_z = \mu_x - \mu_y = 30 - 30 = 0 \qquad \textbf{[0.4]}$$

De este modo:

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= P(Z > 0) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{0-0}{\sigma_z}\right) \\ &= 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5. \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

Luego, según este criterio, somos indiferentes frente a las alternativas de viaje 1. y 2. propuestas. **[0.4]**

Alternativa 2: Supongamos que deseamos llegar al punto B antes de k minutos. Sean p_x y p_y las probabilidades de hacerlo utilizando las alternativas 1. y 2., respectivamente. Obtenemos la desviación estándar del tiempo requerido a través de la alternativa 2.:

$$\begin{aligned} Var(Y) &= 3^2 + 1^2 + 2^2 + 2Cov(Y_1, Y_2) \\ &= 14 - 2 \times 0.4 \times 3 \times 1 \\ &= 14 - 2.4 = 11.6, \\ \text{luego} \qquad \sigma_Y &= \sqrt{11.6} = 3.41. \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} p_x &= P(X < k) = \Phi\left(\frac{k-30}{10}\right). \\ p_y &= P(Y < k) = \Phi\left(\frac{k-30}{3.41}\right). \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

Si $k < 30$ (se quiere llegar pronto),

$$\frac{k-30}{10} > \frac{k-30}{3.41}. \qquad \textbf{[0.4]}$$

Dado que la función Φ es creciente, $p_x > p_y$, **[0.4]** por lo que debiésemos elegir la alternativa de viaje 1. **[0.4]**

b) (2 puntos) Determine la covarianza entre los tiempos de viaje de las alternativas 1. y 2..

Solución: Se tiene:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= Cov(X, Y_1 + Y_2 + Y_3) \\ &= Cov(X, Y_1) \qquad \textbf{[1.0]} \\ &= \rho_{X,Y_1}\sigma_X\sigma_{Y_1} \\ &= 0.3 \times 10 \times 3 = 9. \qquad \textbf{[1.0]} \end{aligned}$$

PARTE II:

Una estación eólica realiza mediciones diarias de la velocidad del viento, encontrando que esta velocidad, medida en m/s, puede modelarse a través de una distribución Weibull de parámetros k y λ. Con información histórica, se ha determinado que los parámetros k y λ corresponden a 2 y 5, respectivamente. Suponga que para que el rotor genere energía se requiere que la velocidad media del viento sea superior a 4 m/s.

Si X sigue una distribución Weibull(k, λ), su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\},$$

para $x > 0$ y cero en otro caso, donde $k > 0$ corresponde a un parámetro de forma y $\lambda > 0$ a un parámetro de escala. Sus momentos de primer y segundo orden corresponden a:

$$E(X) = \lambda\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right), \qquad E(X^2) = \lambda^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right).$$

d) (1 punto) Determine la **probabilidad aproximada** de que el promedio de las velocidades medias diarias observadas durante el verano que viene sea superior a 4 m/s. Asuma que este verano tendrá 90 días y que observaciones pertenecientes a distintos días son independientes.

Solución: Las observaciones de los 90 días, $X_1, \ldots, X_{90}$, son independientes e idénticamente distribuidas Weibull(2,5). Por otra parte $n \geq 30$, luego podemos utilizar el Teorema del Límite Central para su promedio $\bar{X}$, es decir,

$$\bar{X} \,\dot{\sim}\, Normal\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

donde $n = 90$,

$$\begin{aligned}
\mu &= E(X_i) = 5\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= 5\,\Gamma\,(1.5) = 5 \times 0.5 \times \Gamma(0.5) \\
&= 5 \times 0.5 \times \sqrt{\pi} \\
&= 4.43. \qquad \textbf{[0.25]} \\
\sigma^2 &= Var(X_i) = E(X_i^2) - \mu^2 \\
&= 5^2\,\Gamma\left(1 + \frac{2}{2}\right) - 4.43^2 \\
&= 25 \times \Gamma(2) - 19.62 \\
&= 25 - 19.62 = 5.38 \qquad \textbf{[0.25]}
\end{aligned}$$

Luego $\sigma = \sqrt{5.38} = 2.32$ **[0.1]**. De este modo,

$$\begin{aligned}
P(\bar{X} > 4) &= 1 - \Phi\left(\frac{4 - 4.43}{2.32/\sqrt{90}}\right) \qquad \textbf{[0.3]} \\
&= 1 - \Phi(-1.76) \\
&= 1 - (1 - \Phi(1.76)) \\
&= \Phi(1.76) = 0.961. \qquad \textbf{[0.1]}
\end{aligned}$$

e) (1 punto) ¿Cuántos días es esperable que el rotor no genere energía?

Solución: En un día dado, el rotor no genera energía si la velocidad media del viento es menor a 4 m/s. Luego, necesitamos

$$\begin{aligned}
P(X_i < 4) &= \frac{2}{5}\int_0^4 \left(\frac{x}{5}\right) e^{-(x/5)^2}\,dx \qquad \textbf{[0.4]} \\
&= 2\int_0^{4/5} u e^{-u^2}\,du \qquad \text{(haciendo } u = x/5) \\
&= -e^{-u^2}\,\Big|_0^{4/5} \\
&= 1 - e^{-(4/5)^2} = 0.437. \qquad \textbf{[0.2]}
\end{aligned}$$

Luego, el número esperado de días que el rotor no genera energía corresponde a

$$90 \times 0.437 = 42.57. \qquad \textbf{[0.4]}$$

[1.0] base

Problema 4

Suponga que el tiempo de falla de cierta máquina productiva, Y, sigue una distribución Gaussiana Inversa de parámetros μ y λ, cuya densidad está dada por

$$f_y(y) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y^3}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2}\frac{(y-\mu)^2}{y}\right\},$$

cuando $y > 0$, y cero en otro caso. Se sabe que la media de esta densidad corresponde a μ y la varianza a μ^3/λ.

a) (1.5 puntos) Encuentre los estimadores de momentos de μ y λ en base a n observaciones independientes $Y_1, \ldots, Y_n$.

Solución:

Alternativa 1: Igualamos media y varianza poblacionales a media y varianza muestrales:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{Y} \qquad \textbf{[0.4]} \\ \frac{\hat{\mu}^3}{\hat{\lambda}} &= S_n^2, \qquad \text{con } S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2. \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

Despejando se obtiene los estimadores de momentos

$$\hat{\mu} = \bar{Y}\textbf{[0.3]} \qquad \hat{\lambda} = \frac{\bar{Y}^3}{S_n^2}. \qquad \textbf{[0.4]}$$

Alternativa 2: Igualamos media y momento de orden 2 poblacionales a media y momento de orden 2 muestrales:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{Y} \qquad \textbf{[0.4]} \\ \frac{\hat{\mu}^3}{\hat{\lambda}} + \hat{\mu}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2. \qquad \textbf{[0.4]} \end{aligned}$$

Despejando se obtiene los estimadores de momentos

$$\hat{\mu} = \bar{Y}\textbf{[0.3]} \qquad \hat{\lambda} = \frac{n\bar{Y}^3}{\sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2} = \frac{\bar{Y}^3}{S_n^2}. \qquad \textbf{[0.4]}$$

b) (1.5 puntos) Encuentre los estimadores máximo verosímiles de μ y λ en base a n observaciones independientes $Y_1, \ldots, Y_n$. No es necesario mostrar que el punto crítico encontrado corresponde a un máximo.

Solución: la función de verosimilitud corresponde a:

$$L(\mathbf{y}, \mu, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} y_i^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)^2}{y_i}\right\}. \qquad \textbf{[0.3]}$$

Su logaritmo corresponde a

$$\log L(\mathbf{y}, \mu, \lambda) = \frac{n}{2}\log\frac{\lambda}{2\pi} - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log y_i - \frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)^2}{y_i}. \qquad \textbf{[0.3]}$$

Las derivadas parciales corresponden a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log L}{\partial \mu} &= \frac{\lambda}{\mu^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)^2}{y_i} - \frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\mu}\left(\frac{y_i^2-2y_i\mu+\mu^2}{y_i}\right) \\
&= \frac{\lambda}{\mu^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)^2}{y_i} - \frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\left(-2+\frac{2\mu}{y_i}\right) = 0. \qquad [\mathbf{0.3}] \qquad (1) \\
\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} &= \frac{n}{2\lambda} - \frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)^2}{y_i} = 0. \qquad [\mathbf{0.3}] \qquad (2)
\end{aligned}$$

De la ecuación (1) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-2\mu+\frac{\mu^2}{y_i}\right)+n\lambda\mu-\lambda\mu^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i} &= 0 \\
\Longleftrightarrow \qquad \hat{\mu} &= \bar{Y}. \qquad [\mathbf{0.2}]
\end{aligned}$$

Utilizando este resultado y despejando λ en la ecuación (2) obtenemos:

$$\hat{\lambda} = \frac{n\bar{Y}^2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\bar{y})^2}{y_i}}. \qquad [\mathbf{0.1}]$$

c) (1.5 puntos) Suponga ahora que el parámetro μ es conocido. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ.

Solución: Tomamos la ecuación (2) anterior [**0.8**] y despejamos λ obteniendo:

$$\hat{\lambda} = \frac{n\mu^2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)^2}{y_i}}. \qquad [\mathbf{0.7}]$$

d) (1.5 puntos) En la situación anterior, encuentre el estimador máximo verosímil de la varianza de los tiempos de falla, μ^3/λ, y su distribución aproximada, para n grande.

Solución: Por invarianza, el estimador máximo verosímil de la varianza, $\delta = \mu^3/\lambda$ corresponde a

$$\hat{\delta} = \frac{\mu^3}{\hat{\lambda}}, \qquad [\mathbf{0.2}]$$

con $\hat{\lambda}$ en c). Para encontrar su varianza aproximada para n grande tomamos:

$$\begin{aligned}
I_n(\lambda) &= -E\left(\frac{d^2\log L}{d\lambda^2}\right) \\
&= -E\left(-\frac{n}{2\lambda^2}\right) = \frac{n}{2\lambda^2}. \qquad [\mathbf{0.3}]
\end{aligned}$$

Por otra parte, $g(u) = \mu^3/u$, por lo que

$$\frac{dg}{du} = -\frac{\mu^3}{u^2}, \qquad [\mathbf{0.3}]$$

con lo que la distribución aproximada de $\hat{\delta}$, para n grande corresponde a una distribución Normal [**0.2**] de media δ [**0.2**] y desviación estándar

$$\sigma = \frac{\mu^3}{\lambda^2}\sqrt{\frac{2\lambda^2}{n}}. \qquad [\mathbf{0.3}]$$

(Nota: también puede dejarse lo anterior expresando en términos de δ, $\sigma = \delta\sqrt{2/n}$). [**1.0**] **base**

Tiempo: 2 Horas

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\, p$ $\sigma_X^2 = n\, p\, (1-p)$ $M(t) = [p\, e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\, (1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\, e^t/[1-(1-p)\, e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1}\, p^r\, (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\, e^t/[1-(1-p)\, e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\dfrac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\, t$ $\sigma_X^2 = \nu\, t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\dfrac{\nu^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\nu\, x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\, t + \sigma^2\, t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\, x)}\, \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\, x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\, M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\dfrac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\dfrac{1}{B(q,\ r)}\, \dfrac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\, r\, (b-a)^2}{(q+r)^2\, (q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\dfrac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\text{máx}\{0, n+m-N\} \leq x \leq \text{mín}\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\, \frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\, n\, \frac{m}{N}\, \left(1 - \frac{m}{N}\right)$

Formulario

- Propiedades función $\Gamma(\cdot)$:

$$(1) \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, du; \quad (2) \quad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a);$$

$$(3) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}_0; \quad (4) \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

- Propiedades función $B(\cdot,\, \cdot)$:

$$(1) \quad B(q,\, r) = \int_0^1 x^{q-1}\,(1-x)^{r-1}\, dx; \quad (2) \quad B(q,\, r) = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

- Propiedad distribución Gamma:

$$\text{Si } T \sim \text{Gamma}(k,\, \nu) \Rightarrow F_T(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu\, t)^x\, e^{-\nu\, t}}{x!}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

- Igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^x\, b^{n-k} = (a+b)^n, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \quad \text{si } |\phi| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$$

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de variables independientes e idénticamente distribuidas, con función de probabilidad p_X o de densidad f_X, determinada por un parámetro θ. Si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil del parámetro θ, entonces:
    - $E(\hat{\theta}) \to \theta$, cuando $n \to \infty$.
    - Para n grande, $Var(\hat{\theta}) \approx \dfrac{1}{I_n(\theta)}$, con $I_n(\theta) = -E\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}\, \ln L(\theta)\right]$.
    - Para n grande, $\hat{\theta} \,\dot{\sim}\, \text{Normal}\left(\theta,\, \sqrt{\dfrac{1}{I_n(\theta)}}\right)$.
    - El estimador máximo verosímil de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$, cuya varianza aproximada está dada por $Var[g(\hat{\theta})] = \dfrac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}$.

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998