Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano 2013

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Interrogación	:	**1**
Profesores	:	**Ricardo Aravena (Sec. 1), Claudia Wehrhahn (Sec. 2) y Andrés Iturriaga (Sec. 3)**

• *Se permite el uso de calculadora científica básica.*
• *No se permite usar apuntes, correctores y cualquier aparato de transmisión electrónica (por ejemplo aparatos con bluetooth y wifi).*
• *Alumnos que escriban sus soluciones con lápiz mina renuncian a su derecho a re-corrección.*
• *El alumno que sea sorprendido copiando o en otras actividades reñidas con las normas de comportamiento académico, será calificado con nota 1.0 (uno.cero) en la interrogación y su caso será informado a la Dirección de Docencia de la Escuela de Ingeniería.*
• *En su lugar de trabajo Ud. debe tener solo lápices y su cuadernillo.*

Problema 1

(1.a) **[2.0 Ptos.]** Suponga que las patentes de automóviles que se fabrican con 4 letras (de las 27 del alfabeto, no pueden ser usadas las letras A, E, I, O, U, Ñ, Q) y 2 dígitos (entre 0 y 9), se escogen al azar. Calcule la probabilidad que una patente seleccionada mediante este mecanismo:

i) **[1.0 Ptos.]** No tenga ni números ni letras repetidas.

ii) **[1.0 Ptos.]** Empiece con la letra B y termine con el número 7.

(1.b) **[4.0 Ptos.]** Sabemos que cada alumno hace su mejor esfuerzo por llegar a la hora a sus clases de probabilidad y estadística, pero hay un serie de factores que influyen en sus traslados, por tanto en su puntualidad.
Históricamente se tiene que el 40 % de los alumnos se van en auto a la universidad, el 50 % se traslada en metro y el resto se va en bicicleta a la universidad. Quienes se van en auto saben que tienen que lidiar con la posibilidad de encontrar o no estacionamiento y se sabe que hay disponibilidad de estacionamiento el 80 % de las veces. Una vez que encontraron estacionamiento, los alumnos llegan tarde a clases el 10 % de las veces. Si el alumno no encuentra estacionamiento, entonces llega a trasado siempre a su clase.
Por otra parte, quienes se trasladan en metro deben lidiar con las posibles fallas que pueda tener éste, las que ocurren el 10 % de las veces. Si el metro falla, el alumno llega atrasado el 20 % de las veces y si el metro no falla, el alumno llega puntualmente siempre. Finalmente, los que se van en bicicleta pinchan su rueda con probabilidad 0.05 y en tal caso llegan a trasados. Por el contrario, quienes no pinchan su rueda, nunca llegan atrasados a clases.

i) **[2.0 Ptos.]** Calcular la probabilidad de que un alumno llegue puntualmente a su clase de probabilidady estadística.

ii) **[2.0 Ptos.]** A su mejor amigo, ¿Qué medio de transporte le recomendaría para llegar puntualmente a su clase?

Solución

(1.a) Denotemos por Ω_1 y Ω_2 el conjunto de las letras (permitidas) y los dígitos respectivamente. Entonces el espacio muestral es

$$\Omega = \Omega_1^4 \times \Omega_2^2.$$

Consideremos una medida de probabilidad equiprobable P. Luego $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$ para todo $E \subseteq \Omega$.

(i) Sea A el evento de interés. Entonces

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 10 \cdot 9}{20^4 \cdot 10^2} = 0{,}654.$$

[1.0]

(ii) Sea B el evento de interés. Entonces

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{20^3 \cdot 10}{20^4 \cdot 10^2} = 0{,}005.$$

[1.0]

(1.b) **Alternativa A**
Sean
A: el alumno se va en auto a la universidad
M: el alumno se va en metro a la universidad
B: el alumno se va en bicicleta a la universidad
E: el alumno encuentra estacionamiento
F: el metro falla
P: pinchar la rueda de la bicicleta
T: el alumno llega tarde a clases
0.5 pts

Del enunciado tenemos que

$$\begin{aligned}
P(A) &= 0.4 \\
P(M) &= 0.5 \\
P(E|A) &= 0.8 \Rightarrow P(\overline{E}|A) = 0.2 \\
P(F|M) &= 0.1 \Rightarrow P(\overline{F}|M) = 0.9 \\
P(P|B) &= 0.05 \Rightarrow P(\overline{P}|B) = 0.95 \\
P(T|A \cap E) &= 0.1 \Rightarrow P(\overline{T}|A \cap E) = 0.9 \\
P(T|A \cap \overline{E}) &= 1 \Rightarrow P(\overline{T}|A \cap \overline{E}) = 0 \\
P(T|M \cap F) &= 0.2 \Rightarrow P(\overline{T}|M \cap F) = 0.8 \\
P(\overline{T}|M \cap \overline{F}) &= 1 \Rightarrow P(T|M \cap \overline{F}) = 0 \\
P(T|B \cap P) &= 1 \Rightarrow P(\overline{T}|B \cap P) = 0 \\
P(\overline{T}|B \cap \overline{P}) &= 1 \Rightarrow P(T|B \cap \overline{P}) = 0
\end{aligned}$$

y $P(B) = 0.1$
0.5 pts

(a) Nos piden $P(\overline{T})$ y para esto usamos el teorema de probabilidades totales. Entonces

$$\begin{aligned}
P(\overline{T}) &= P(\overline{T}|A \cap E)P(A \cap E) + P(\overline{T}|A \cap \overline{E})P(A \cap \overline{E}) + P(\overline{T}|M \cap F)P(M \cap F) + \\
&\quad P(\overline{T}|\overline{M} \cap F)P(\overline{M} \cap F) + P(\overline{T}|B \cap P)P(B \cap P) + P(\overline{T}|B \cap \overline{P})P(B \cap \overline{P}) \\
&= P(\overline{T}|A \cap E)P(E|A)P(A) + P(\overline{T}|A \cap \overline{E})P(\overline{E}|A)P(A) + \\
&\quad P(\overline{T}|M \cap F)P(F|M)P(M) + P(\overline{T}|\overline{M} \cap F)P(F|\overline{M})P(\overline{M}) + \\
&\quad P(\overline{T}|B \cap P)P(P|B)P(B) + P(\overline{T}|B \cap \overline{P})P(\overline{P}|B)P(B) \qquad \textbf{0.5 pts} \\
&= 0.9 \cdot 0.4 \cdot 0.8 + 0 \cdot 0.2 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.5 + \\
&\quad 1 \cdot 0.9 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.05 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.95 \cdot 0.1 \\
&= 0.873 \qquad \textbf{0.5 pts}
\end{aligned}$$

(b) Nos piden calcular $P(\overline{T}|A), P(\overline{T}|M), P(\overline{T}|B)$.

$$
\begin{aligned}
P(\overline{T}|A) &= \frac{P(\overline{T}|A\cap E)P(A\cap E)+P(\overline{T}|A\cap \overline{E})P(A\cap \overline{E})}{P(A)} \\
&= \frac{P(\overline{T}|A\cap E)P(E|A)P(A)+P(\overline{T}|A\cap \overline{E})P(\overline{E}|A)P(A)}{P(A)} && \textbf{0.3 pts} \\
&= \frac{0.9\cdot 0.4\cdot 0.8+0\cdot 0.2\cdot 0.4}{0.4} \\
&= 0.72 \qquad \textbf{0.3 pts} \\
P(\overline{T}|M) &= \frac{P(\overline{T}|M\cap F)P(M\cap F)+P(\overline{T}|M\cap \overline{F})P(M\cap \overline{F})}{P(M)} \\
&= \frac{P(\overline{T}|M\cap F)P(F|M)P(M)+P(\overline{T}|M\cap \overline{F})P(\overline{F}|M)P(M)}{P(M)} && \textbf{0.3 pts} \\
&= \frac{0.8\cdot 0.1\cdot 0.5+1\cdot 0.9\cdot 0.5}{0.5} \\
&= 0.98 \qquad \textbf{0.3 pts} \\
P(\overline{T}|B) &= \frac{P(\overline{T}|B\cap P)P(B\cap P)+P(\overline{T}|B\cap \overline{P})P(B\cap \overline{P})}{P(B)} \\
&= \frac{P(\overline{T}|B\cap P)P(P|B)P(B)+P(\overline{T}|B\cap \overline{P})P(\overline{P}|B)P(B)}{P(B)} && \textbf{0.3 pts} \\
&= \frac{0\cdot 0.05\cdot 0.1+1\cdot 0.95\cdot 0.1}{0.1} \\
&= 0.95 \qquad \textbf{0.3 pts}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto le recomendamos a nuestro amigo irse en metro a la universidad para no llegar tarde.
0.2 pts

Alternativa B - VER ARBOL

Sean
A: el alumno se va en auto a la universidad
M: el alumno se va en metro a la universidad
B: el alumno se va en bicicleta a la universidad
E: el alumno encuentra estacionamiento
F: el metro falla
P: pinchar la rueda de la bicicleta
T: el alumno llega tarde a clases
0.5 ptos

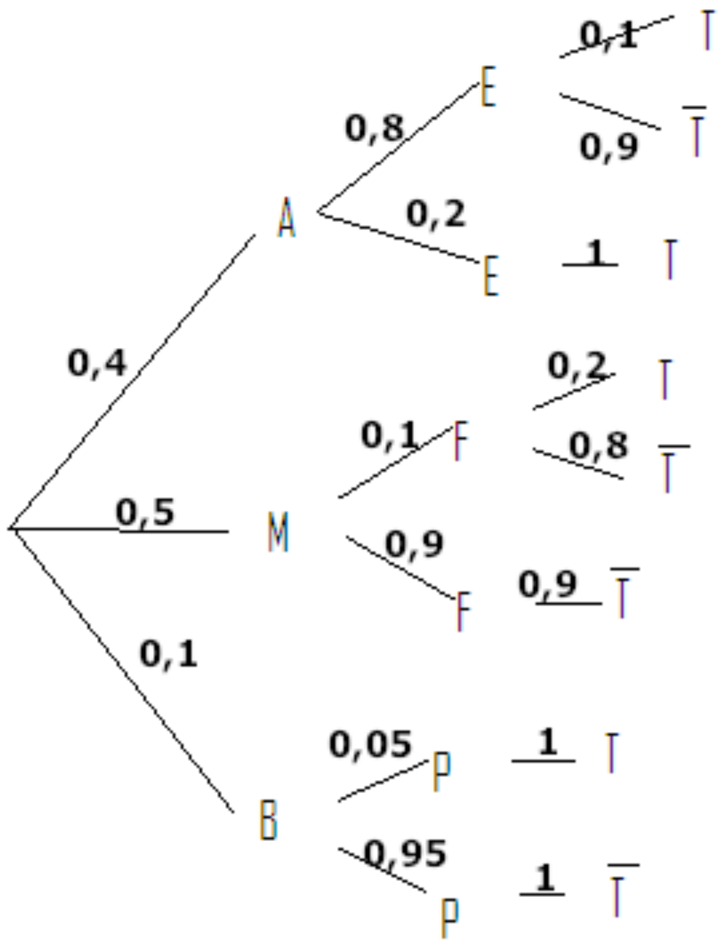
(a)

$$
\begin{aligned}
P(\overline{T}) &= 0.9\cdot 0.4\cdot 0.8+0\cdot 0.2\cdot 0.4+0.8\cdot 0.1\cdot 0.5+1\cdot 0.9\cdot 0.5+0\cdot 0.05\cdot 0.1+1\cdot 0.95\cdot 0.1 \\
&= 0.873 \qquad \textbf{1pto}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(\overline{T}|A) &= 0.9\cdot 0.8+0\cdot 0.2 \\
&= 0.72 \qquad \textbf{0.5 pts} \\
P(\overline{T}|M) &= 0.8\cdot 0.1+1\cdot 0.9 \\
&= 0.98 \qquad \textbf{0.5 pts} \\
P(\overline{T}|B) &= 0\cdot 0.05+1\cdot 0.95 \\
&= 0.95 \qquad \textbf{0.5 pts}
\end{aligned}
$$

Se recomienda METRO


0,4
0,5
0,1
A
M
B
0,8
0,2
E
E
0,1
0,9
1
T
T
T
0,1
0,9
F
F
0,2
0,8
0,9
T
T
T
0,05
0,95
P
P
1
1
T
T

1 pto

Problema 2

(2.a) **[3.0 Ptos.]** Juan acaba de ganarse una entrada doble para asistir al concierto de su grupo favorito y no sabe con cuál de sus dos mejores amigos (Matías y Nicole) ir. Para resolver este problema Juan decide lanzar una moneda y así dejar todo en manos del azar. Nicole rechaza este procedimiento, argumentando que no existen las monedas perfectamente balanceadas y que, por lo tanto, hay posibilidades de verse perjudicada. Pedro, un alumno del curso de "Probabilidad y Estadística" que pasaba, oye casualmente la conversación y propone el siguiente mecanismo que garantizaría igualdad de oportunidades a Matías y Nicole: lanzar dos veces (independientemente) la moneda, escogiendo a Matías si el resultado es `(cara,sello)` y a Nicole si el resultado es `(sello,cara)`. En caso de obtener otro resultado, se repite de manera independiente el procedimiento.
Calcule la función de probabilidad puntual de la variable aleatoria T, definida como el número de intentos necesarios para llegar a una decisión y muestre que $P(T < \infty) = 1$.

Indicación: Observe que el procedimiento por Pedro va a continuar hasta que se obtenga un resultado distinto de (cara,cara) o (sello,sello)

(2.b) **[3.0 Ptos.]** Sea Y una variable aleatoria continua con distribución Chi-cuadrado con k grados de libertad, cuya función de densidad esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} & , x \geq 0, k > 0 \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$$

i) **[1.0 Ptos.]** Muestre que la f.g.m. esta dada por $(1-2t)^{-k/2}$, para $t < 1/2$

ii) **[1.0 Ptos.]** Determine la Moda

iii **[1.0 Ptos.]** Determine la Media o valor esperado.

Solución

(2.a)

(a) T es la primera vez que sale `(cara,sello)` o `(sello,cara)` en una sucesión de pares de lanzamientos de la moneda. Sea α la probabilidad que en un par de lanzamientos de la moneda salga `(cara,sello)` o `(sello,cara)`. Si p es la probabilidad de que en un lanzamiento cualquiera salga `cara`, entonces

$$\alpha = 2p(1-p).$$

[0.8]

Luego T es una variable aleatoria (geométrica de parámetro α), con función de probabilidad,

$$p_T(k) = P(T = k) = \alpha(1-\alpha)^{k-1} = 2p(1-p)(p^2 + (1-p)^2)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

[1.0]

Notemos que si $\alpha > 0$, entonces

$$P(T < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} p_T(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^{k-1} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha)^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty}(1-\alpha)^k = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)} = 1.$$

[1.0]

Si $\alpha = 0$, entonces $p = 0$ ó 1 y en tal situación no es posible observar `(cara,sello)` o `(sello,cara)`, y por lo tanto, el procedimiento falla.

[0.2]

(2.b) i) Como se define $M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$, se tiene

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

[0.5]

$$M_X(t) = (1-2t)^{-(\frac{k}{2}-1)}(1-2t)^{-1} \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} [x(1-2t)]^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}(1-2t)} dx(1-2t)$$

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{k}{2}}$$

[0.5]

ii) Necesitamos x tal que max f(x), por tanto es necesario derivar f(x), igualar a cero y despejar.

$$(f(x))' = cte[(\frac{k}{2}-1)x^{\frac{k}{2}-2}e^{-x/2} + x^{\frac{k}{2}-1}e^{-x/2}(-\frac{1}{2})]$$

[0.5]

igualando a cero y despejado se tiene

$$(\frac{k}{2}-1)x^{\frac{k}{2}-2}e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$x = k-2, \text{siempre y cuando } k > 2$$

[0.5]

iii) derivamos la fgm evaluamos en t=0 y obtenemos lo solicitado. Es decir,

$$E(X) = M'_X(t=0)$$

[0.2]

$$M'_X(t) = -\frac{k}{2}(1-2t)\cdot(-2) = k(1-2t)$$

[0.3]

al evaluar en 0, se tiene:

$$E(X) = k$$

[0.5]

Problema 3

Como parte del plan frontera norte, se considera la instalación y uso de cuatro "scanners"para vehículos (con el objetivo de detectar el potencial tráfico de drogas). Una de las condiciones explicitas de la licitación es entregar, junto a los equipos solicitados, un plan de mantención con el objetivo de optimizar los tiempos de operación. Si el tiempo entre fallas (o equivalentemente, el tiempo de vida) de cada uno de los equipos se comporta como una distribución NORMAL con mediana igual a 6 meses y un C.O.V. del 30 %:

a) **[1.5 Ptos.]** Determine el intervalo de tiempo para inspeccionar y reparar el equipo tal que se garantice una probabilidad de 90 % que éste estará operativo en cualquier momento.

b) **[1.5 Ptos.]** Suponga que se determina que el intervalo de tiempo de inspección (y de reparación si corresponde) del equipo son 8 meses, ¿Cuál es la probabilidad que el equipo se mantenga operativo por dos meses más si al inspeccionar en el tiempo definido éste se encuentra operativo?

Si en realidad la distribución del tiempo entre fallas es LOGNORMAL con mediana igual a 6 meses y un C.O.V. del 30 %:

c) **[1.5 Ptos.]** Se denomina defecto de fábrica, cuando un equipo falla antes del denominado tiempo de *falla central*. Es decir, existen $t_1 < mediana < t_2$, de tal forma que $P(t_1 < T < t_2) = 0,5$. Determine los valores de t_1 y t_2.

d) **[1.5 Ptos.]** Asumiendo equi-probabilidad e independencia entre los tiempos de fallas de los cuatro "scanners". Obtenga la probabilidad que exactamente dos de ellos presenten el temido defecto de fábrica.

Solución

Sea T: tiempo entre fallas (o tiempo de vida). Entonces, $T \sim N(\mu = 6, \sigma = 1,8)$ **[0.5]**

a) Nos piden t tal que $P(T > t) = 0,9$

$$P(T \leq t) = 0,1 \Rightarrow \Phi(\frac{t-\mu}{\sigma}) = 0,9$$

[0.5]

$$\Rightarrow \frac{t-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,9) \Rightarrow t = \mu + \Phi^{-1}(0,9)\sigma$$

reemplazando, se tiene

$$t = 6 - 1,28 \cdot 1,8 = 3,7(aprox)$$

[0.5]

b) En este caso, nos piden que T sea mayor que 8+2 dado que ya es mayor que 8. **[0.2]**

Es decir,

$$P(T > 10/T > 8) = \frac{P(T > 10 \cap T > 8)}{P(T > 8)} = \frac{P(T > 10)}{P(T > 8)}$$

$$P(T > 10/T > 8) = \frac{1 - \Phi(\frac{10-\mu}{\sigma})}{1 - \Phi(\frac{8-\mu}{\sigma})}$$

[0.8]

$$P(T > 10/T > 8) = \frac{1 - \Phi(2,22)}{1 - \Phi(1,11)} = \frac{0,0132}{0,1335} = 0,0989$$

[0.5]

c) Ahora, T $\sim$ Lognormal, tal que $lnT \sim N(\lambda = 1,7918, \zeta = 0,2936)$. Estos valores se obtiene dado que $mediana = e^{\lambda}$ y $\zeta = \sqrt{ln(1+\delta^2)}$

[0.3]

Nos piden $P(t_1 < T < t_2) = 0,5 \rightarrow t_{0,25}$ y $t_{0,75}$ son válidos
(o alternativamente podrían ser $t_{0,3}$ y $t_{0,8}$, etc). **[0.3]**

Así, $P(T < t_{0,25}) = 0,25 \rightarrow \Phi(\frac{lnt_{0,25}-\lambda}{\zeta}) = 0,25$ **[0.3]**

$$\frac{lnt_{0,25}-\lambda}{\zeta} = \Phi^{-1}(0,25) \Rightarrow lnt_{0,25} = \lambda + \Phi^{-1}(0,25)\zeta$$

Por tanto, $t_{0,25} = exp\{\lambda + \Phi^{-1}(0,25)\zeta\}$ **[0.3]**

y es inmediato que $t_{0,75} = exp\{\lambda + \Phi^{-1}(0,75)\zeta\}$ Reemplazando $\Phi^{-1}(0,25) = -0,675$ y $\Phi^{-1}(0,75) = 0,675$ se tiene $t_{0,25} = 4,9215$ y $t_{0,75} = 7,3154$. **[0.3]**

d) Es decir, se tiene B-B-F-F (una posible ordenacion). Por tanto, hay 4 sobre 2 formas de .ªsignar"los dos scanners con la temida defecto de fábrica. **[0.5]**

Ahora, si p=prob falla = 0,25. Entonces,

$$P(\text{Dos con falla}) = \binom{4}{2} p^2(1-p)^2, \text{reemplazando los valores, se tiene:}$$

[0.5]

$$P(\text{Dos con falla}) = \binom{4}{2} 0,25^2(1-0,25)^{4-2} = 0,2109$$

[0.5]