

# Clase 04

## Sistemas deductivos

### Deducción natural para lógica proposicional

#### Sistemas deductivos

Un **sistema deductivo** sirve para razonar acerca de **juicios**, para demostrarlos.

Los **juicios** son **afirmaciones matemáticamente precisas** sobre programas en distintos lenguajes de programación.

Un **sistema deductivo** está dado por **reglas de inferencia**, de la forma:

$$\frac{\langle \text{premisa} \rangle_1 \quad \langle \text{premisa} \rangle_2 \quad \dots \quad \langle \text{premisa} \rangle_n}{\langle \text{conclusión} \rangle_n} \langle \text{nombre de la regla} \rangle$$

Las reglas que no tienen premisas ( $n = 0$ ) se llaman **axiomas**.

Las premisas son **condiciones suficientes** para la conclusión.

- Lectura de arriba hacia abajo:  
si tenemos evidencia de que valen las premisas,  
podemos deducir que vale la conclusión.
- Lectura de abajo hacia arriba:  
si queremos demostrar que vale la conclusión,  
alcanza con demostrar que valen las premisas.

Una **derivación** es un árbol finito formado por reglas de inferencia. Parte de ciertas premisas y llega a una conclusión.

Un **juicio** es **derivable** si hay alguna derivación sin premisas que lo concluye

#### Deducción natural para lógica proposicional

##### Fórmulas de la lógica proposicional

Las **fórmulas** son las expresiones que se pueden generar a partir de la siguiente gramática:

$$\tau, \sigma, \varphi, \dots ::= P \mid (\tau \wedge \sigma) \mid (\tau \vee \sigma) \mid \perp \mid \neg \tau$$

Las gramáticas definen sistemas deductivos de manera abreviada.

##### Contextos y juicios

Un **contexto** es un conjunto finito de **fórmulas**. Los notamos con letras griegas mayúsculas ( $\Gamma, \Delta, \Sigma, \dots$ ).

El sistema de **deducción natural** predica sobre juicios de la forma:

$$\Gamma \vdash \tau$$

Informalmente, un juicio afirma que a partir de las hipótesis en el contexto  $\Gamma$  es posible deducir la **fórmula** de la tesis.

El conectivo  $\perp$  representa la falsedad (contradicción, absurdo) y **no** tiene reglas de introducción.

#### Semántica bivaluada