四川大學

本科生毕业论文(设计)

题　　目　弱宇宙监督相关问题研究

学　　院　物理学院

专　　业　物理学

学生姓名　侯翔健

学　　号　2017141221029　年级　2017

指导教师　宁波

教务处制表

二〇〇八年六月一日

弱宇宙监督相关问题研究

物理学

学生　侯翔健　　指导教师　宁波

[摘要]　我们使用思想实验的方法，在计算出黑洞的存在条件的前提下，考虑极端黑洞的情形，来验证弱宇宙监督假设。假设若极端黑洞和测试粒子的结合体的参数不再满足黑洞存在条件，计算出测试粒子需要的条件，随后使用运动学方程，再次计算可以被黑洞捕获的粒子需要满足的条件。通过对比以上结果，发现两条件之间没有交集。本文研究的黑洞可以分为三类，分别为爱因斯坦引力中的渐近反德西特下的莱斯特-努德斯特伦黑洞和双曲视界面带电黑洞，以及四维新颖爱因斯坦-高斯-博尼特引力中的渐近德西特带电黑洞，这种以往被认为平凡的情况在新的方法下对运动方程存在着非平凡的贡献，并且在思想实验中通过电荷参数的选择情况和莱斯特-努德斯特伦黑洞非常类似。在双曲视界面带电黑洞中，负质量情况经过了特别讨论后，和正质量情况下结论依然相同。由于静电斥力的影响，以上极端黑洞均不能捕获可以破坏黑洞视界的测试粒子，弱宇宙监督假设依然可靠。

[关键词]　黑洞；反德西特时空；宇宙监督；爱因斯坦-高斯-博尼特引力

About Weak Cosmic Censorship Conjecture

Physics

Student: Xiangjian Hou Advisor: Bo Ning

[Abstract] We use the method of thought experiment to test the Weak Cosmic Censorship Conjucture by considering the extreme black hole under the premise of calculating the existence condition of black hole. Assuming that the parameters of the combination of the extreme black hole and the test particle no longer meet the conditions for the existence of the black hole, the conditions required for the test particle are calculated. Then, the kinematics equation is used to calculate the conditions needed for the particles that can be captured by the black hole again. By comparing the above results, it is found that there is no intersection between the two conditions. The black holes studied in this paper can be divided into three categories: the Reissner-Nordström black hole and the charged hyperbolic event horizon black hole under the asymptotically anti-de Siter in Einstein's gravity and the asymptotically charged de Siter black hole in the four-dimensional novel Einstein-Gauss-Bonnet gravity. In the hyperbolic event horizon charged black hole, after special discussion, the negative mass case and the positive mass case still come to the same conclusion. Due to the effect of electrostatic repulsion, none of the above extreme black holes can trap the test particles that can destroy the event horizon of the black hole, and the hypothesis of Weak Cosmic Censorship Conjucture is still reliable.

[Key Words] Black hole; Anti de Sitter; Cosmic Censorship Conjucture; Einstein-Gauss-Bonnett gravity

目 录

1 绪论

1978 年，英国牧师约翰・米歇尔在写给卡文迪什的信中提出了一种超大质量的天体，以至于光都无法逃离[1]。他还指出可以通过观察其对附近可见物体的引力效应来观测这种天体。但是在 19 世纪后，光的波动说成为主流以后，对于这种大质量天体的研究热情就减弱了。并且，由于光的速度恒定为光速，米歇尔将这一过程类比与向上抛的小球的想法是错误的。现在，我们已经揭开了一部分这个大质量天体——黑洞的神秘面纱，甚至获得了它的彩色照片[2]。

1.1 恒星的演化过程

球对称不带电恒星，在质量满足一定条件的情况下（钱德拉塞卡极限），将会形成史瓦西黑洞。恒星在聚变过程中辐射能量，核心部分的收缩，挤压并加热了核心部分，将会点燃下一次聚变，氢 → 氦 → 碳 → 氧等过程。而恒星的外层随之扩大，恒星变为了红巨星。而聚变的过程将会继续，一直到铁元素。由于铁元素的比结合能最高，聚变无法继续下去。恒星的内核开始冷却，并由于自身的引力而收缩。

质量为太阳质量 1.4 倍且转动较慢的星体会变成一种高密度的物质状态白矮星。如果白矮星的质量大于钱德拉塞卡极限，那么引力将压倒电子简并压使白矮星进一步压缩，形成中子星。如果恒星的质量更大，以至于中子星也无法保持稳定，将会发生引力坍缩，如果坍缩是球对称的，最后将形成史瓦西黑洞。

1.2 史瓦西黑洞

1915 年，爱因斯坦提出了他的广义相对论理论，显示了引力确实会对光的运动产生影响。几个月后史瓦西就提出了真空爱因斯坦方程的静态球对称解[3]，在物理上描述一个球对称引力场，伯克霍夫证明了真空爱因斯坦方程的球对称解必为史瓦西度规[4]。史瓦西解的形式如下：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1.1}$$

其中 $R_s = 2GM/c^2$ 为史瓦西半径。时空在远离黑洞的情况下为渐近平坦时空。度规在史瓦西半径处的奇异性，可以通过坐标变换来去除。史瓦西坐标不适合描述粒子在 $r < R_s$ 中的运动。由于时空流形独立存在，不依赖与坐标卡的选择，我们可以选择其他坐标系。

克鲁斯卡时空为史瓦西时空的最大延拓，选取克鲁斯卡坐标 $(\upsilon, u, \theta, \phi)$，在这组坐标下视界奇点被消除

$$ds^2 = \frac{32\mu^2}{r} e^{-r/2\mu} \left(-d\upsilon^2 + du^2\right) + r^2 d\Omega^2 \tag{1.2}$$

其中 r 由式(1.3)定义

$$\left(u^2 - v^2\right) = \left(\frac{r}{R_s} - 1\right) e^{r/R_s} \tag{1.3}$$

上文提到如果坍缩是球对称的，那么形成的黑洞是史瓦西黑洞，随之而来的问题是，是否可能在坍缩过程中存在小的非对称性扰动，从而事件视界不能形成。下一节我们会介绍奇点定理保证了黑洞会在自然界中形成。

1.3 奇点和奇点定理

时空奇点主要有两种定义。第一种是曲率无穷大的点或者区域。第二种是时空流形的测地线不完备性，严格的数学定义参考文献[5]。奇点定理其中一个表述如下[6]

奇点定理 令 M 是一个具有一般性度规 $g_{\mu\nu}$ 的时空流形，度规满足爱因斯坦方程且相关物质的能动张量满足强能量条件。如果在 M 中有一个陷俘面，则流形上必然有一个闭合的类时曲线或者一个奇点（体现为非完备的类时或类光测地线）。

奇点附近的量子效应应当非常剧烈，在描述量子引力的弦理论中，奇点应当是不存在的。但是，由于我们还没有一个完整的量子引力工作理论，所以不能保证量子效应将解决时空奇点。事实上，量子效应可能在时空奇点附近被抑制，伸缩子带电 G-H-S 黑洞的弦耦合在奇点处变得很弱，这表明它的行为是“经典的”[7]。

所以，我们不能简单的希望量子引力会解决奇点，尤其是会给广义相对论带来不确定性的裸奇点。为了避免裸奇点的产生，彭罗斯提出宇宙监督假设。宇宙监督假设有两个版本，我们将在下一节详细介绍。

1.4 宇宙监督假设

史瓦西黑洞这样的类空奇点并不是问题，因为任何内部的观察者都看不到奇点，在视界内部，径向方向成为了时间方向，所以奇点存在于观察者的未来，奇点无法传递任何信息，正如我们不能发短信跟过去的自己。

1.5 弱宇宙监督假设

弱宇宙监督假设要求，奇点应在黑洞视界之后。根据黑洞的定义，关于奇点的信息不能影响外部世界。

Choptuik 证明了在非常特殊的初始条件下[8]，可以形成一个裸奇点。但这样的粒子已经被弱宇宙监督假设排除，因为弱宇宙监督假设只要求在一般的初始条件下不形成裸奇点。

另一个违反弱宇宙监督假设的尝试为摧毁一个黑洞的视界，这也是本文采用的方法。Wald 的论文[9] 和之后的许多工作都证明了当黑洞越来越接近极值时，也就越来越难扔进可能破坏视界的粒子。

但是弱宇宙监督假设并不是那么牢不可破了。Santos 和他的合作者对于边界有特殊化学势的黑洞—Hovering 黑洞进行了数值分析[10,11]，似乎得出了和 Wald 相反的结论。

1.5.1 尝试摧毁黑洞的思想实验

向极端黑洞中丢入一个测试粒子，使黑洞捕获其后最终的物体不再满足黑洞存在的条件，从而检验是否导致视界被破坏。由于只需要计算出黑洞的存在条件、粒子能够进入黑洞的条件和破坏视界时粒子需要满足的条件，这种方法在计算上非常简单易行。

后来有研究称，如果 Wald 使用的测试粒子电荷满足一定的大小，那么在只考虑一阶修正项的情况下，是可以破坏黑洞视界的[12]。但是很快就被发现，在此情况下测试粒子对背景时空的影响不能忽略[13–17]，弱宇宙监督假设依然得到了保证。

1.6 强宇宙监督假设

强宇宙监督假设本质上要求未来应该是完全确定的，即使是在黑洞里。毕竟，一个观测者可以被送入一个任意大小的黑洞，如果他或她在旅行中幸存下来，就可以在黑洞内进行物理观测和实验。至少在原则上，人们可以在黑洞内部进行物理研究，而不必向外部时空的同事报告研究结果[7]。其中一种简单的表述为真实时空是整体双曲时空，即时空中不应当存在柯西视界。

1.7 本文的主要工作

在第二章，我们通过思想实验的方法，尝试让黑洞捕获一个可以摧毁黑洞视界的测试粒子，验证了在渐近反德西特时空中黑洞的例子，分别为莱斯特-努德斯特伦黑洞、双曲带电黑洞和爱因斯坦-高斯-博尼特引力模型中的黑洞，其中对于双曲带电黑洞分为正质量和负质量情形。爱因斯坦-高斯-博尼特引力模型中的黑洞和 RN-AdS 黑洞的情况通过替换电荷参数，情况高度类似。最终发现，由于静电斥力的影响，可以破坏黑洞视界的测试粒子总是不能被捕获。

2 渐近反德西特黑洞与弱宇宙监督假设

渐近反德西特中的黑洞与渐近平坦和渐近德西特黑洞有很多不同之处，比如在渐近平坦和德西特空间中，四维黑洞的视界拓扑一定是一个球面 S_2[18]。在反德西特空间，黑洞视界也有可能有着零或者负曲率[19]。因为 BTZ 黑洞[20] 的发现，人们对渐近反德西特黑洞产生了兴趣，BTZ 黑洞是具有负宇宙学常数的三维爱因斯坦引力的精确解[21]。

2.1 德西特时空和反德西特时空

德西特时空和反德西特时空都是最大对称空间，都只有一个时间方向，曲率分别为正负常数。可以看作球面和双曲面在赝黎曼时空流形中的推广[6]。对于 n 维最大对称时空，有

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = K\left(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\right) \tag{2.1}$$

其中

$$K = \frac{R}{n\left(n-1\right)} \tag{2.2}$$

2.1.1 常曲率空间

一些定义对我们理解常曲率空间是什么非常有必要[22]：

1. 满足式(2.1)的度规 $g_{\mu\nu}$，被称为常曲率度规；
2. 若度规 $g_{\mu\nu}$，被称为常曲率度规，广义黎曼空间 $(M, g_{\mu\nu})$ 被称为常曲率空间；
3. 当满足如下条件时候，广义黎曼空间 $(M, g_{\mu\nu})$ 与 $\left(M', g'_{\mu\nu}\right)$ 被称为有相同局域几何的。
   (a) $\forall p \in M, \exists p$ 的邻域 $O \subset M$ 和开子集 $O' \subset M'$ 以及微分同胚 $\phi : O \to O'$，满足 $\phi_*\left(g_{\mu\nu}|_O\right) = g'_{\mu\nu}|_{O'}$；
   (b) $\forall p' \in M', \exists p'$ 的邻域 $O' \subset M'$ 和开子集 $O \subset M$ 以及微分同胚 $\phi' : O' \to O$，满足 $\phi'_*\left(g'_{\mu\nu}|_{O'}\right) = g_{\mu\nu}|_O$。

很容易证明，流形维数、度规号差及 K 值相同的两个常曲率空间有相同的局域几何，并且常曲率空间有最高对称性[22]。如此我们可以按照标量曲率 R 来对给定维数和号差的常曲率度规分类。$R = 0$ 的常曲率度规就是平直度规。在 $n = 4$ 的洛伦兹号差的前提下，$R > 0$ 和 $R < 0$ 的常曲率度规非别为德西特度规和反德西特度规。

2.1.2 德西特时空

通过将 4 维德西特时空嵌入到一个 5 维的时空中可以诱导出德西特度规，其为 4 维旋转双曲面 M^4。参数为 l 的德西特度规可以看为宇宙学常数 $\Lambda = 3l^{-2}$ 的真空爱因斯坦方程的解。其中 $l > 0$ 为任一正实数。式(2.1)中的 $K = l^{-2}$。

通过对德西特时空做不同的切片，德西特时空的空间部分正曲率的球，到曲率为零的平坦空间，再到负曲率的双曲面。

德西特时空的另一个特点是存在着宇宙事件视界，对于在德西特时空的观测者来说来说，可以传播穿过视界的信号，但是却无法接收到视界以外的信号[23]。虽然德西特时空并非真实的宇宙，但是极早期宇宙的暴涨阶段可以看作德西特时空的一个子时空。此外，如果真实宇宙的暗能量就是宇宙学常数 $\Lambda > 0$，宇宙将越来越趋近于德西特时空直至永远[22]。

2.1.3 反德西特时空

同样可以把反德西特时空嵌入高维平坦时空中。其看作为具有负宇宙学常数的爱因斯坦方程的真空解，球对称形式为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.3}$$

由于 Λ 的取值为负，这个解不存在坐标奇点。

虽然近年来的天文观测表明我们的宇宙有一个小的、整的宇宙学常数 Λ[22]，但是超引力理论和弦理论的数学进展倾向于相信超引力中的自然“基态”为反德西特时空。尤其是反德西特-共形场论对偶的进展，把反德西特时空中的量子引力与边界上的共形场论联系起来[24,25]。

2.2 RN-AdS 黑洞

2.2.1 RN 黑洞

史瓦西时空描述的为真空静态球对称的时空，其带电推广为莱斯纳-努德斯特伦时空。相较于史瓦西时空，它存在多个黑洞视界，存在着类时的奇点。

爱因斯坦-麦克斯韦的作用量可以写为：

$$S = \frac{1}{16\pi G_D}\int d^D x\sqrt{-g}\left(R - \frac{g_0^2}{4\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) \tag{2.4}$$

可以得到爱因斯坦方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_D g_0^2 T_{\mu\nu}^{(F)} \tag{2.5}$$

其中

$$T_{\mu\nu}^{(F)} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right) \tag{2.6}$$

由此，我们可以得到莱斯纳-努德斯特伦度规[6]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{2.7}$$

同史瓦西解类似，莱斯纳-努德斯特伦解是爱因斯坦-麦克斯韦理论的唯一球对称解。当 $Q = 0$，既电荷为零时，莱斯纳-努德斯特伦解退化为史瓦西解。

如果要描述整个时空的情况，除了 $r = 0$ 这一个时空奇性以外，若 $1-2M/r+Q^2/r^2 = 0$ 有解，那么还有其他奇性存在。简单求解发现 r 值满足

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \tag{2.8}$$

根据解的形式，分三种情况讨论

1. 若 $M^2 < Q^2$，此时 r 无实数值，这种情况下莱斯纳-努德斯特伦时空只有一个奇性 $r = 0$，在此情况下莱斯纳-努德斯特伦解存在裸奇点；

2. 若 $M^2 > Q^2$，此时除 $r = 0$ 以外，$r_{\pm}$ 也为奇性，它们为坐标奇性[22]，r_+ 被称为外视界，r_- 被称为内视界。在外视界 r_+ 以外，具有球对称性，存在类时的基灵矢量；

3. 若 $M^2 = Q^2$，此时上述两个奇性合二为一，这种情况被称为极端 RN 黑洞。第二章所提到的 Wald 的测试粒子方法[9]，就是采用此种情况下的 RN 黑洞来验证弱宇宙监督假设。

2.2.2 RN-AdS 黑洞

式(2.7)给出了渐近平坦下的 RN 黑洞的度规。在渐近 AdS 的空间中，RN 黑洞的度规为

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\phi d\phi^2\right) \tag{2.9}$$

度规的逆

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = -\frac{1}{f(r)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + f(r)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\phi}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2\right] \tag{2.10}$$

其中

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2} \tag{2.11}$$

l 为反德西特半径，它和宇宙学常数的关系为 $\Lambda = -3/l^2$，参数 M 和 Q，可以被理解为黑洞的质量和电荷。规范势可以写为

$$A = A_t(r)\,dt = -\frac{Q}{r}dt \tag{2.12}$$

采用测试粒子的方法来验证对于 RN-AdS 黑洞弱宇宙监督假设是否成立，首先需要根据其度规式(2.9)，来计算出极端 RN-AdS 黑洞的视界半径。令 $f(r)=0$，会发现和渐近平坦的 RN 黑洞不同的是，由于 r^2/l^2 这一项的存在，$f(r)=0$ 事实上为四次方程，这将带来四个根。这并不说明 RN-AdS 黑洞存在四个视界，我们通过讨论发现，其中两根的值为虚数没有物理意义，其内外视界半径为

$$r_+ = r + r_* \tag{2.13}$$

$$r_- = r - r_* \tag{2.14}$$

其中

$$\begin{aligned}
r &= \frac{1}{2}\gamma \\
r_* &= \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{4l^2M}{\gamma} - \gamma^2 - \frac{2l^2}{3})} \\
\gamma &= \sqrt{\frac{\sqrt[3]{\sqrt{\beta^2-4\alpha^3}+\beta}}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}\alpha}{3\sqrt[3]{\sqrt{\beta^2-4\alpha^3}+\beta}} - \frac{2l^2}{3}} \\
\alpha &= 12l^2Q^2 + l^4 \\
\beta &= 2l^6 + 108l^4M^2 - 72l^4Q^2
\end{aligned}$$

2.2.3 RN-AdS 黑洞存在条件

观察解的形式，对比渐近平坦的 RN 黑洞，得到极端 RN-AdS 黑洞的视界半径为 $r_+ = r_-$，RN-AdS 黑洞存在条件应为

$$\beta^2 - 4\alpha^3 \geq 0 \tag{2.15}$$

求解式(2.15)，得到关于质量参数 M、电荷参数 Q 和反德西特半径 l 的关系式(2.16)

$$M \geq \frac{\sqrt{\delta}(\delta+3)l}{3\sqrt{6}} \qquad \delta = \sqrt{\frac{12Q^2}{l^2}+1} - 1 \tag{2.16}$$

简单计算验证，发现式(2.17)得到满足。

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{\beta^2-4\alpha^3}+\beta}}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}\alpha}{3\sqrt[3]{\sqrt{\beta^2-4\alpha^3}+\beta}} - \frac{2l^2}{3} \geq 0 \tag{2.17}$$

以上的讨论是为了获得在极端 RN-AdS 黑洞的信息，通过比较前文中渐近平坦的 RN 黑洞，我们可以知道极端 RN-AdS 黑洞的视界半径。

$$M = \frac{\sqrt{\delta}(\delta+3)l}{3\sqrt{6}} \tag{2.18}$$

将极端黑洞条件式(2.18)代入式(2.13)和式(2.14)，得极端 RN-AdS 黑洞的视界半径为

$$r = r_+ = r_- = l\sqrt{\frac{\delta}{6}} \tag{2.19}$$

2.2.4 测试粒子思想实验

现在通过向黑洞中丢入一个满足特殊条件的粒子，尝试创造一个违反式(2.16)的时空。假设此黑洞捕获了一个有着能量 E，电荷为 e，无自旋的粒子。因此，最后的物体具有电荷 $(e+Q)$，质量不大于 $(m+E)$。测试粒子需要满足 $e \ll Q$，$E \ll M$ 的条件。简单计算得出，若末态时空不能保持为极端 RN-AdS 黑洞，即式(2.16)成为

$$M+E<\frac{\sqrt{\delta'}(\delta'+3)l}{3\sqrt{6}} \qquad \delta'=\sqrt{\frac{12\,(Q+e)^2}{l^2}+1}-1 \tag{2.20}$$

由于 $e \ll Q$，$E \ll M$，对式(2.20)平方，泰勒展开，得到如果测试粒子破坏极端 RN-AdS 黑洞 E 需要满足的条件

$$E<\frac{Qe\,(3+\delta)}{3M} \qquad \delta=\sqrt{\frac{12Q^2}{l^2}+1}-1 \tag{2.21}$$

本次思想实验的目标就是，尝试让黑洞捕获一个满足式(2.21)条件的小物体。如此，最终的时空必然会出现违反弱宇宙监督假设的情况[9]。

Carter 非常详尽的研究了在克尔-纽曼几何下的粒子运动[26]。有着静止质量 M 和电荷 Q 的带电粒子的运动方程为

$$\frac{D^2x^\mu}{Ds^2}=\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}=\frac{e}{m}F^{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{ds} \tag{2.22}$$

粒子的守恒能量 E 由下式给出

$$-E=p_t=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}}=Mg_{tt}\frac{dx^t}{ds}+QA_t \tag{2.23}$$

根据之前的讨论，我们现在试图找到一个可以进入极端 RN-AdS 黑洞的粒子轨道，并且满足式(2.21)的条件。

很容易推出式(2.24)，得到

$$-M^2=g^{tt}\left(-E-eA_t\right)^2+g^{rr}p_r^2+g^{\theta\theta}p_\theta^2 \tag{2.24}$$

通过解式(2.24)，由于 $dt/ds>0$，只保留其中一个解

$$E=-eA_t-\frac{1}{g^{tt}}\sqrt{-M^2g^{tt}+p_r^2-g^{tt}g^{\theta\theta}p_\theta^2} \tag{2.25}$$

由此，我们得到

$$E>-eA_t=\frac{eQ}{r} \tag{2.26}$$

此时我们讨论的为极端 RN-AdS 黑洞，由式(2.19)和式(2.16)取等号，得到

$$E>\frac{Qe\,(3+\delta)}{3M} \qquad \delta=\sqrt{\frac{12Q^2}{l^2}+1}-1 \tag{2.27}$$

任何可以进入黑洞的粒子必循满足式(2.27)，从而式(2.21)不满足。这个结果保证了弱宇宙监督假设不被违反。

2.3 双曲带电黑洞

2.3.1 双曲黑洞

双曲黑洞的度规为

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + f(r)^{-1}\,dr^2 + r^2 d\Sigma_2^2 \tag{2.28}$$

其中 $f(r)$ 为

$$f(r) = -1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \tag{2.29}$$

在 Curry 的文章中[27] 给出了不带电情况下双曲黑洞的视界半径，借助于此我们可以更清楚的了解负质量情况是如何影响视界半径的，表2.1为 Curry 给出的视界半径。在 Curry

表 2.1 双曲黑洞视界半径

Λ	$k=-1$
$< -1/9m^2$	$r_1 = a$
$-1/9m^2$	$r_1 = 6m,\ m > 0,$
	$r_2 = r_3 = -3m,\ m < 0.$
$-1/9m^2 < \Lambda < 0$	$r_1 = 2\sqrt{-\frac{1}{\Lambda}}\cos\left(\frac{1}{3}\eta\right),\ m > 0,$
	或者
	$r_2 = 2\sqrt{-\frac{1}{\Lambda}}\cos\left(\frac{1}{3}\eta + \frac{4}{3}\pi\right),\ m > 0$
	$r_3 = a,\ m < 0$

的文章中[27] 给出了不带电情况下双曲黑洞的视界半径，借助于此我们可以更清楚的了解负质量情况是如何影响视界半径的，表2.1为 Curry 给出的视界半径。其中 a 和 η 的定义为

$$a \equiv \left[-\frac{3m}{\Lambda} + \left(\frac{9m^2}{\Lambda^2} - \frac{k^3}{\Lambda^3}\right)^{1/2}\right]^{1/3}$$

$$\cos\eta = -\frac{3m}{\Lambda}\left(\frac{\Lambda}{k}\right)^{3/2}$$

2.3.2 渐近 AdS 的双曲带电黑洞

渐近 AdS 黑洞的视界几何除球面外，还可以是双曲面，即双曲黑洞。渐近反德西特下的双曲带电黑洞和 RN-AdS 黑洞的度规非常相似。考虑以下度规形式[21]

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(k - \frac{8\pi M}{\omega_2 r} + \frac{16\pi^2 Q^2}{\omega_2^2 r^2} + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 \\ &+ \left(k - \frac{8\pi M}{\omega_2 r} + \frac{16\pi^2 Q^2}{w_2^2 r^2} + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Sigma_2^2 \end{aligned} \tag{2.30}$$

其中，Q 和 M 为黑洞的电荷与质量，ω_2 为视界面超曲面 Σ_2 的面积。$d\Sigma_2^2$ 为曲率为常数 $2k$ 二维超曲面 Σ_2 的线元；

$$d\Sigma_2^2=\begin{cases} d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2 & \text{对于}\quad k=1,\\ d\theta^2+\theta^2 d\phi^2 & \text{对于}\quad k=0,\\ d\theta^2+\sinh^2\theta d\phi^2 & \text{对于}\quad k=-1.\end{cases} \tag{2.31}$$

在式(2.31)中，使用了事件视界二维超曲面的常曲率分别为 1, 0 和 -1 的坐标，这种做法依然保留了一般性。在 $k=1$ 的情况下，式(2.30)变成了 RN-AdS 黑洞，事件视界为 S^2。在 $k=-1$ 的时候，视界边界为双曲面 T^2，这种情况即为双曲带电黑洞。有趣的是即使质量 M 为负数的时候，依然存在视界边界，这种负质量黑洞可以在正常的引力坍缩中形成[28,29]。这种负质量情况会带来很多有意思的后果，但是对于采用测试粒子验证弱宇宙监督假设的情形，我们不需要特别关注负质量情况。

由式(2.30)，双曲带电黑洞的度规。

$$ds^2=-f(r)\,dt^2+\frac{1}{f(r)}dr^2+r^2d\Sigma_2^2 \tag{2.32}$$

度规的逆为

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2=-\frac{1}{f(r)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+f(r)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sinh^2\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2\right] \tag{2.33}$$

其中 l 为了同 Curry 的结果对比，依据 $\Lambda=-3l^{-2}$，得到 $f(r)$

$$f(r)=-1-\frac{2m}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}+\frac{Q^2}{r^2} \tag{2.34}$$

规范势为

$$A=A_t(r)\,dt=-\frac{Q}{r}dt \tag{2.35}$$

和 RN-AdS 黑洞相似（参见式(2.9)），参数 m 和 Q 被理解为黑洞的质量参数和电荷参数。经过同样的讨论我们可以得出来双曲带电黑洞的视界半径，依然舍去两个虚数的解，保留有物理意义的实数解。

$$r_+=r+r_* \tag{2.36}$$

$$r_-=r-r_* \tag{2.37}$$

其中

$$\begin{aligned} r=&\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\\ r_*=&\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{12m}{\Lambda\sqrt{\gamma}}-\gamma-\frac{6}{\Lambda}}\\ \gamma=&-\frac{2}{\Lambda}-\frac{3\times 2^{\frac{1}{3}}\alpha}{\Lambda\left(\beta+\sqrt{\beta^2-4(9\alpha)^3}\right)^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{3\times 2^{\frac{1}{3}}\Lambda}\left(\beta+\sqrt{\beta^2-4\left(9\alpha\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha =&1-4\Lambda Q^2\\ \beta =&-972\Lambda m^2-648\Lambda Q^2-54\end{aligned}$$

2.3.3 测试粒子的思想实验

我们采用与前一节相同的办法，首先找到反德西特时空下的双曲带电黑洞的存在条件，通过让其捕获测试粒子来尝试得到“裸奇点”。双曲带电黑洞的存在条件应为

$$\beta^2-4\left(9\alpha\right)^3\geq 0 \tag{2.38}$$

求解式(2.38)，得到关于质量参数 M、电荷参数 Q 和宇宙学常数 Λ 的关系式(2.39)

$$m\geq -\frac{1}{12}\Lambda\sqrt{-\frac{2}{\Lambda}-\frac{2\sqrt{1-4\Lambda Q^2}}{\Lambda}}\left(\frac{4}{\Lambda}-\frac{2\sqrt{1-4\Lambda Q^2}}{\Lambda}\right) \tag{2.39}$$

如果取 $Q=0$ 会发现此时的结果和表2.1的视界半径一致。把宇宙学常数 Λ 换成反德西特半径 l（以使和 RN-AdS 黑洞对比）。

$$m\geq\frac{l\left(\delta-3\right)\sqrt{\delta}}{3\sqrt{6}}\qquad\qquad \delta=\sqrt{1+12Q^2/l^2}+1 \tag{2.40}$$

在此情况下，我们也可以得出极端双曲带电黑洞的视界半径为

$$r=r_+=r_-=\sqrt{\frac{\delta}{6}}l \tag{2.41}$$

对于极端 RN-AdS 黑洞，此时我们可以计算出捕获测试粒子后可以使得末态时空出现裸奇点的条件式(2.21)，双曲带电黑洞的负质量情况令人担忧，因为没有理由要求式(2.39) $\left(4/\Lambda-2\sqrt{1-4\Lambda Q^2}/\Lambda\right)$ 这一项始终大于零，那么负质量情况的讨论就不可避免。接下将分别讨论黑洞的质量参数 m 大于零和小于零的两种情况，我们 m 的符号仅影响过程中不等号的方向，而对最终的结论并无影响。

2.3.4 正质量情况

考虑向黑洞中丢入一个满足特殊条件的粒子。假设此黑洞捕获了一个有着能量 E，电荷为 e，无自旋的粒子。因此，最后的物体具有电荷 $(e+Q)$，质量不大于 $(m+E)$。测试粒子需要满足 $e\ll Q$，$E\ll m$ 的条件。简单计算得出，若末态时空不能保持为极端双曲带电黑洞，那么式(2.40)成为

$$m+E<\frac{\sqrt{\delta'}(\delta'-3)l}{3\sqrt{6}}\qquad\qquad \delta'=\sqrt{\frac{12\left(Q+e\right)^2}{l^2}+1}+1 \tag{2.42}$$

不等式两端平方以后，再取泰勒展开只保留一阶项, 可以得到

$$E < \frac{Qe\,(\delta - 3)}{3m} \qquad\qquad \delta = \sqrt{1 + 12Q^2/l^2} + 1 \tag{2.43}$$

粒子的轨道仍满足式(2.24)，由于 $dt/ds > 0$，我们可以得到

$$E > -eA_t = \frac{eQ}{r} \tag{2.44}$$

将式(2.41)和式(2.40)取等号，代入式(2.44)中，可以得到

$$E > e\frac{Q}{r} = \frac{Qe\,(\delta - 3)}{3m} \tag{2.45}$$

对比式(2.45)和式(2.43)，任何可以进入黑洞的粒子都不能满足摧毁黑洞视界的条件，由此弱宇宙监督假设再次得到了保证。

2.3.5 负质量情况

对于负质量情况，首先需要明确的问题为黑洞捕获了测试粒子以后的质量不大于 $m+E$，是否依然不大于零。很显然如果大于零的话，$E \ll m$ 的条件就不能得到满足。第二个问题在于对式(2.42)进行平方操作后不等号会反向。但是由于泰勒展开后存在 Em 项，不等号会再次反向。综上所述，在采用测试粒子验证弱宇宙监督假设的情况下，负质量情形仍然会得到相同的结论。

2.4 四维爱因斯坦-高斯-博尼特引力

弦理论的低能有效理论，其中包含了高阶曲率项。洛夫洛克定理认为，爱因斯坦的广义相对论是满足以下条件的唯一的引力理论[30–32]

1. 有着 $3+1$ 维时空；

2. 微分同胚不变性；

3. 度规的协变导数为 0（metricity）；

4. 运动方程为二阶。

但是最近 Lin 和 Glavan 的一项工作，找到了一个新的四维时空引力理论，被称为“四维爱因斯坦-高斯-博尼特引力（4D Einstein Gauss-Bonnet gravity）”，同样满足了以上的条件[33]。一般认为四维时空中高斯-博尼特引力是平凡的，但是 Lin et al 通过使用 $\alpha \to \alpha/(D-4)$，将四维时空定义为 $D \to 4$，从而在运动方程中消去了 $(D-4)$ 这一因子。

通常认为，四维爱因斯坦-高斯-博尼特引力有如下特点

$$\frac{g_{\nu\rho}}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{GB}}{\delta g_{\mu\rho}}=(D-4)\times\frac{\alpha}{2}\mathcal{G} \tag{2.46}$$

其中 $\mathcal{G}=6R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}-4R^{\mu}{}_{\nu}R^{\nu}{}_{\mu}+R^2=6R^{\mu\nu}{}_{[\mu\nu}R^{\rho\sigma}{}_{\rho\sigma]}$，可以看到由于 $(D-4)$ 的存在，四维的情况为平凡的。

但是，Lin 和 Glavan 提出以下过程

$$\alpha\to\alpha/\left(D-4\right) \tag{2.47}$$

$$\frac{g_{\nu\rho}}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{GB}}{\delta g_{\mu\rho}}=\frac{\alpha}{D-4}\times\frac{\left(D-2\right)\left(D-3\right)\left(D-4\right)}{2\left(D-1\right)M_P^4}\times\Lambda^2\delta^{\mu}_{\nu} \tag{2.48}$$

可以看到通过式(2.47)的替换过程，成功得到了式(2.48)，即 GB 项对运动方程有非平凡的贡献[1]。

2.4.1 渐近德西特带电黑洞

即便有一些反对意见，我们依然能讨论在四维时空的高斯-博尼特引力下反德西特时空中带电黑洞是否满足弱宇宙监督假设。Fernandes 给出了这种情况下黑洞的视界半径为下式的解[34]

$$1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2+\alpha}{r^2}+\frac{r^2}{l^2}=0 \tag{2.49}$$

若采用 $Q^2+\alpha\to\tilde{Q}^2$，将 $\tilde{Q}$ 作为电荷参数，那么此时情况回归 RN-AdS 黑洞。此时通过式(2.25)，我们再次回到了熟悉的 RN-AdS 黑洞情况。

黑洞的视界半径为

$$r_+=r+r_* \tag{2.50}$$

$$r_-=r-r_* \tag{2.51}$$

其中

$$\begin{aligned}
r&=\frac{1}{2}\gamma\\
r_*&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4l^2M}{\gamma}-\gamma^2-\frac{2l^2}{3}\right)}\\
\gamma&=\sqrt{\frac{\sqrt[3]{\sqrt{\beta^2-4\alpha^3}+\beta}}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2}\alpha}{3\sqrt[3]{\sqrt{\beta^2-4\alpha^3}+\beta}}-\frac{2l^2}{3}}\\
\alpha&=12l^2\tilde{Q}^2+l^4\\
\beta&=2l^6+108l^4M^2-72l^4\tilde{Q}^2
\end{aligned}$$

[1]但也有评论称这种方法只是在代数上解决了问题，经不起深入分析并且也不物理。

2.4.2 测试粒子的思想实验

此时按照 RN-AdS 黑洞中的过程，最后依然可以得到由于静电斥力的原因，可以摧毁黑洞视界的粒子不能被黑洞捕获。

2.5 本章小结

本章考虑试图使极端黑洞捕获一个测试粒子来创造出一个“裸奇点”的思想实验，通过分析例子运动中的守恒能量，无需具体求解粒子运动轨道的情况下讨论了可以被黑洞捕获的例子的能量和电荷条件。得出，由于满足可以摧毁黑洞视界的粒子，不能被黑洞捕中，其中的物理原因为静电斥力保证了这一过程。尽管我们可以任意的接近极端黑洞的情况，但永远不能破坏这一情况，测试粒子总会“错过”黑洞。弱宇宙监督监督假设得到支撑。

3 总结与展望

本文采用了测试粒子的方法对三种黑洞进行了弱宇宙监督假设的验证，发现静电斥力保证了假设不被违反。这是支持宇宙监督假设的一类很直接的证据。

在黑洞概念问世之初，英国物理学家埃丁顿曾认为大自然将会阻止黑洞出现，就像宇宙监督假设的支持者们认为大自然将会阻止裸奇点出现一样；在量子力学问世之初, 爱因斯坦曾像霍金那样猜测过“上帝”的喜好，认为“上帝”不会掷骰子，结果爱因斯坦错了。历史是否会在宇宙监督假设这里重演，还是另谋篇章？我们不得而知。既然奇点应该携带有关量子引力的信息，那么来自奇点的任何信号都应该受到欢迎。它们是机会之窗，让我们进入至今还无法到达的量子引力领域[7]。

参考文献

[1] MICHELL J. Vii. on the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose. by the rev. john michell, bdfrs in a letter to henry cavendish, esq. frs and as[J]. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1784(74) : 35 – 57.

[2] AKIYAMA K, ALGABA J C, ALBERDI A, et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2021, 910(1) : L12.

[3] SCHWARZSCHILD K. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie[J]. Sitzungsberichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1916 : 424 – 434.

[4] BIRKHOFF G D, LANGER R E. Relativity and modern physics[M]. [S.l.] : Harvard University Press, 1923.

[5] PENROSE R. The question of cosmic censorship[J]. Journal of Astrophysics and Astronomy, 1999, 20(3-4) : 233 – 248.

[6] 陈斌. 广义相对论 [M]. [S.l.] : 北京大学出版社, 2018.

[7] ONG Y C. Space–time singularities and cosmic censorship conjecture: A Review with some thoughts[J]. International Journal of Modern Physics A, 2020, 35(14) : 2030007.

[8] CHOPTUIK M W. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field[J]. Physical Review Letters, 1993, 70(1) : 9.

[9] WALD R. Gedanken experiments to destroy a black hole[J]. Annals of Physics, 1974, 82(2) : 548 – 556.

[10] HOROWITZ G T, IQBAL N, SANTOS J E, et al. Hovering black holes from charged defects[J]. Classical and Quantum Gravity, 2015, 32(10) : 105001.

[11] CRISFORD T, SANTOS J E. Violating the weak cosmic censorship conjecture in four-dimensional Anti–de Sitter space[J]. Physical review letters, 2017, 118(18) : 181101.

[12] HUBENY V E. Overcharging a black hole and cosmic censorship[J]. Physical Review D, 1999, 59(6) : 064013.

[13] HOD S. Cosmic censorship, area theorem, and self-energy of particles[J]. Physical Review D, 2002, 66(2) : 024016.

[14] BARAUSSE E, CARDOSO V, KHANNA G. Test bodies and naked singularities: is the self-force the cosmic censor?[J]. Physical review letters, 2010, 105(26) : 261102.

[15] COLLEONI M, BARACK L. Overspinning a Kerr black hole: The effect of the self-force[J].

Physical Review D, 2015, 91(10) : 104024.

[16] WALD R M. Kerr–Newman black holes cannot be over-charged or over-spun[J]. International Journal of Modern Physics D, 2018, 27(11) : 1843003.

[17] SORCE J, WALD R M. Gedanken experiments to destroy a black hole. II. Kerr-Newman black holes cannot be overcharged or overspun[J]. Physical Review D, 2017, 96(10) : 104014.

[18] FRIEDMAN J L, SCHLEICH K, WITT D M. Topological censorship[J]. Physical Review Letters, 1993, 71(10) : 1486.

[19] CAI R-G, WANG A. Thermodynamics and stability of hyperbolic charged black holes[J]. Physical Review D, 2004, 70(6) : 064013.

[20] BANADOS M, TEITELBOIM C, ZANELLI J. Black hole in three-dimensional spacetime[J]. Physical Review Letters, 1992, 69(13) : 1849.

[21] CAI R-G, SOH K-S. Topological black holes in the dimensionally continued gravity[J]. Physical Review D, 1999, 59(4) : 044013.

[22] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论 [M]. [S.l.] : 科学出版社, 2006.

[23] WITTEN E. Quantum gravity in de Sitter space[R]. 2001.

[24] MALDACENA J. The large-N limit of superconformal field theories and supergravity[J]. International journal of theoretical physics, 1999, 38(4) : 1113 – 1133.

[25] AHARONY O, GUBSER S S, MALDACENA J, et al. Large N field theories, string theory and gravity[J]. Physics Reports, 2000, 323(3-4) : 183 – 386.

[26] CARTER B. Global structure of the Kerr family of gravitational fields[J]. Physical Review, 1968, 174(5) : 1559.

[27] CURRY C, LAKE K. Vacuum solutions of Einstein’s equations in double-null coordinates[J]. Classical and Quantum Gravity, 1991, 8(1) : 237.

[28] MANN R. Black holes of negative mass[J]. Classical and Quantum Gravity, 1997, 14(10) : 2927.

[29] SMITH W, MANN R B. Formation of topological black holes from gravitational collapse[J]. Physical Review D, 1997, 56(8) : 4942.

[30] LANCZOS C. A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions[J]. Annals of Mathematics, 1938 : 842 – 850.

[31] LOVELOCK D. The Einstein tensor and its generalizations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1971, 12(3) : 498 – 501.

[32] LOVELOCK D. The four-dimensionality of space and the Einstein tensor[J]. Journal of Mathematical Physics, 1972, 13(6) : 874 – 876.

[33] GLAVAN D, LIN C. Einstein-Gauss-Bonnet gravity in four-dimensional spacetime[J]. Physical review letters, 2020, 124(8) : 081301.

[34] FERNANDES P G. Charged black holes in AdS spaces in 4D Einstein Gauss-Bonnet gravity[J]. Physics Letters B, 2020, 805 : 135468.

声　明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得四川大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

本学位论文成果是本人在四川大学读书期间在导师指导下取得的，论文成果归四川大学所有，特此声明。

学位论文作者（签名）＿＿＿＿＿＿＿＿＿

论文指导教师（签名）＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2021 年　　月　　日

致　谢

在四年的学习生活中，有很多一直关心和帮助我的同学和老师，让我在求知的路上不断前行，在此对他们表示深深的感谢。

成功完成本论文，离不开宁波老师的悉心指导。几个月的论文设计中，从选题、研究以及撰写过程，宁老师始终给了最大的帮助。困难的概念、推导，宁老师总是不厌其烦的耐心讲解。撰写过程中，也一字一字的修改我的论文。宁老师严谨求实和一丝不苟的学术态度，激励着我在未来的学习中更加努力。同时还要感谢陈少永老师，在他实验室的一年中，陈老师教会了我做学术的很多基本方法，无论是文献阅读、查找方法，还是计算机的使用技巧。都是在跟随陈老师学习时候的收获，无论以后从事什么方向或职业，这些技能都会是我的宝贵财富。

特别感谢我的母亲，一个人将我抚养成材，却没有让我尝到任何的苦难与辛酸。也感谢我的女朋友晓楠同学，一年以来一直陪伴着我、支持我、相信我。

再向和我进行讨论问题，让彼此相互帮助和学习工作的同学表示感谢；向四川大学图书馆的一直以来无私帮助大家查阅文献的老师表示感谢。

最后感谢 ScuThesis 对论文的采用 LaTeX 排版提供了支持，同时卢昌海博士的博客对我的论文有很多启发。

在成都的时光将使我终身受益。