

# 《经典力学》讲义

徐晓华

整理：张大鹏<sup>①</sup>

Email:[13110290004@fudan.edu.cn](mailto:13110290004@fudan.edu.cn)

2016 年 6 月 26 日

<sup>①</sup> 有修改和删节。所有插图均为重新绘制。



# 目 录

第零章 引言	1	2.3.1 虚功原理	35
0.1 经典力学的发展	1	2.3.2 广义虚位移和广义力	35
0.2 经典力学的适用范围	1	2.3.3 完整系的平衡条件	35
第一章 Newton 力学	2	2.4 d’Alambert 原理与 Lagrange 方程	37
1.1 正交曲线坐标系	2	2.4.1 d’Alambert 原理	37
1.1.1 直角坐标系	2	2.4.2 理想完整系的 Lagrange 方程	38
1.1.2 球坐标系	3	2.4.3 理想完整系 Lagrange 方程的数学结构	39
1.1.3 柱坐标系	4	2.4.4 有势系的 Lagrange 函数	40
1.1.4 一般正交曲线坐标系	5	2.5 广义势	41
1.1.5 正交曲线坐标系中速度与加速度的表示	6	2.5.1 广义势	41
1.1.6 自然坐标系	7	2.5.2 广义势体系的 Lagrange 函数	42
1.2 Newton 运动定律	9	2.5.3 电磁场中带电粒子的广义势能	42
1.2.1 质点	9	2.6 守恒定律	43
1.2.2 Newton 运动定律	9	2.6.1 广义动量及其守恒定律	43
1.2.3 基本相互作用	9	2.6.2 广义能量及其守恒定律	43
1.2.4 伽利略变换	10	2.6.3 广义能量的数学结构	44
1.3 运动定理与守恒定律	10	2.7 时空对称性与守恒量	48
1.3.1 质点系	10	2.7.1 时空对称性	48
1.3.2 动量及其守恒定律	11	2.7.2 动量、角动量与能量守恒	48
1.3.3 角动量及其守恒定律	11	2.8 位形时空的 Lagrange 方程	51
1.3.4 能量及其守恒定律	13	2.8.1 位形时空	51
1.3.5 质心参考系	15	2.8.2 推广的 Lagrange 方程	51
1.3.6 质心参考系的运动定理	16	第三章 Hamilton 动力学	53
1.4 变质量体系	25	3.1 正则方程	53
第二章 Lagrange 动力学	29	3.1.1 Legendre 变换	54
2.1 约束与广义坐标	29	3.1.2 Hamilton 正则方程	54
2.1.1 约束及其分类	29	3.1.3 守恒定律	56
2.1.2 自由度	30	3.1.4 正则方程的矩阵形式	56
2.1.3 广义坐标	30	3.2 泛函与变分	57
2.2 虚位移与约束力	31		
2.2.1 虚位移	31		
2.2.2 约束力	33		
2.3 分析静力学的虚功原理	34		

3.2.1	泛函 . . . . .	57	3.7.3	Hamilton-Jacobi 方程 的分离变量 . . . . .	97
3.2.2	变分 . . . . .	57	3.7.4	利用 Hamilton-Jacobi 方程求解 Kepler 问题 .	102
3.2.3	变分问题(泛函极值问 题) . . . . .	58	3.7.5	从“几何力学”到“波 动力学” . . . . .	109
3.2.4	Euler-Lagrange 方程 .	58	3.8	Hamilton 理论在物理学中的 应用 . . . . .	113
3.2.5	多元泛函极值问题 . .	60	3.8.1	连续体系的 Lagrange 方程 . . . . .	113
3.3	力学变分原理 . . . . .	61	3.8.2	电磁场的 Lagrange 方程	116
3.3.1	Hamilton 原理 . . . . .	61	3.8.3	Schrödinger 方程的建立	116
3.3.2	位形空间与 Lagrange 方程 . . . . .	63	第四章	两体问题 . . . . .	119
3.3.3	相空间与 Hamilton 方程	65	4.1	两体问题约化与中心力场 . . .	119
3.3.4	位形时空与推广的 La- grange 方程 . . . . .	66	4.1.1	Lagrange 函数及其分 离变量 . . . . .	119
3.3.5	其它形式的力学变分 原理 . . . . .	67	4.1.2	两体中心力场 . . . . .	120
3.4	Lagrange 乘子法 . . . . .	70	4.2	等效势、运动解与轨道方程 .	121
3.4.1	Lagrange 乘子法 . . .	70	4.2.1	运动方程 . . . . .	121
3.4.2	Lagrange 乘子法求解 全部约束力 . . . . .	71	4.2.2	守恒定律 . . . . .	121
3.4.3	Lagrange 乘子法求解 部分约束力 . . . . .	73	4.2.3	运动解 . . . . .	121
3.4.4	Lagrange 乘子法求解 线性非完整体系的运动	76	4.2.4	轨道方程 . . . . .	122
3.5	Poisson 括号 . . . . .	79	4.2.5	圆轨道的存在性与稳 定性 . . . . .	123
3.5.1	Poisson 括号的定义 . .	79	4.3	距离反比势场与 Kepler 问题 .	125
3.5.2	Poisson 括号的性质 . .	79	4.3.1	轨道方程 . . . . .	126
3.5.3	力学的 Poisson 括号形式	79	4.3.2	Laplace-Runge-Lenz 矢量 . . . . .	130
3.5.4	运动积分与 Poisson 定理	81	4.3.3	Kepler 行星运动定律 .	131
3.5.5	量子 Poisson 括号 . . .	82	4.4	粒子弹性散射 . . . . .	132
3.6	正则变换 . . . . .	82	4.4.1	弹性散射 . . . . .	132
3.6.1	点变换 . . . . .	82	4.4.2	质心系散射角 . . . . .	133
3.6.2	正则变换 . . . . .	83	4.4.3	散射截面 . . . . .	134
3.6.3	正则变换的条件 . . . .	84	4.4.4	Coulomb 势弹性散射 .	135
3.6.4	母函数 . . . . .	85	第五章	多自由度微振动与阻尼 . . . . .	139
3.6.5	无穷小正则变换 . . . .	89	5.1	微振动近似与求解 . . . . .	139
3.6.6	运动方程的无穷小正 则变换表示 . . . . .	90	5.2	多自由度微振动体系 . . . . .	142
3.6.7	正则变换条件的辛表示	90	5.2.1	微振动近似 . . . . .	142
3.6.8	正则变换的不变量 . .	92	5.2.2	运动求解 . . . . .	143
3.7	Hamilton-Jacobi 方程 . . . . .	94	5.2.3	简正坐标与简正振动 .	144
3.7.1	Hamilton-Jacobi 方程 .	94	5.3	阻尼运动 . . . . .	146
3.7.2	Hamilton 主函数 . . .	95			

5.3.1	阻尼的一般性质 . . . .	146	6.6	Legendre 椭圆积分与 Jacobi 椭圆函数 . . . . .	190
5.3.2	恒力作用下的阻尼直线运动 . . . . .	147	6.6.1	Legendre 椭圆积分 . .	190
5.3.3	一维阻尼振动 . . . . .	147	6.6.2	Jacobi 椭圆函数 . . . .	191
5.3.4	耗散函数 . . . . .	150	第七章	非惯性系	193
第六章	刚体	152	7.1	非惯性系的 Newton 第二定律	193
6.1	刚体运动学 . . . . .	152	7.1.1	不同参考系的速度、加速度变换 . . . . .	193
6.1.1	刚体的自由度 . . . . .	152	7.1.2	非惯性系的运动方程与惯性力 . . . . .	195
6.1.2	刚体的运动 . . . . .	152	7.2	非惯性系的 Lagrange 动力学 .	195
6.1.3	定点运动的矩阵表示 .	153	7.2.1	非惯性系质点运动的 Lagrange 函数 . . . . .	195
6.1.4	无限小定点运动的矢量表示 . . . . .	154	7.2.2	非惯性系质点运动的 Lagrange 方程 . . . . .	196
6.1.5	刚体运动的矢量-矩阵描述 . . . . .	155	7.3	地球自转的动力学效应 . . . .	198
6.1.6	刚体上各点的速度与加速度 . . . . .	157	7.3.1	重力加速度 $g$ 随纬度 $\lambda$ 的变化 . . . . .	199
6.1.7	刚体的定轴转动 . . . .	157	7.3.2	落体偏东 . . . . .	200
6.1.8	刚体定点转动的 Euler 角 . . . . .	159	7.3.3	Foucault (傅科) 摆 .	201
6.2	惯量矩阵 . . . . .	162	第八章	习题及解答	205
6.2.1	刚体定点转动的角动量、动能与转动惯量 .	162	8.1	金尚年《理论力学》习题(部分) . . . . .	205
6.2.2	平行轴定理 . . . . .	163	8.1.1	牛顿力学 . . . . .	205
6.2.3	会聚轴定理 . . . . .	164	8.1.2	Lagrange 力学 . . . . .	209
6.2.4	惯量主轴与主轴系 . .	165	8.1.3	Hamilton 力学 . . . . .	211
6.2.5	主轴系的求法 . . . . .	165	8.1.4	两体问题 . . . . .	213
6.2.6	惯量椭球 . . . . .	168	8.1.5	多自由度微振动与阻尼	215
6.3	Euler 动力学方程 . . . . .	169	8.1.6	刚体 . . . . .	219
6.3.1	刚体运动方程 . . . . .	169	8.2	理论力学习题集(部分) . . .	221
6.3.2	Euler 动力学方程 . .	170	8.2.1	平面力系 . . . . .	221
6.4	无力矩陀螺(Euler 陀螺) .	172	8.2.2	空间力系 . . . . .	229
6.4.1	运动方程与守恒量 . .	172	8.2.3	点的运动学 . . . . .	230
6.4.2	对称 Euler 陀螺 . . . .	173	8.2.4	刚体的运动学 . . . . .	233
6.4.3	非对称 Euler 陀螺 . .	176	8.2.5	质点动力学 . . . . .	235
6.4.4	Poinsot 几何图像 . .	182	插图目录		240
6.5	对称重陀螺(Lagrange 陀螺)	183	参考文献		241
6.5.1	Lagrange 函数与守恒量	183			
6.5.2	等效势与求解 . . . . .	184			
6.5.3	定性图像 . . . . .	184			



## 第零章 引言

### 0.1 经典力学的发展

17 世纪由 Galileo 和 Newton 奠基。1687 年发表的《自然哲学之数学原理》标志着经典力学体系的建立，即 Newton 力学。

- 核心概念：质点、力、加速度；
- 基本原理：Newton 三大定律；
- 数学方法：三维实空间几何、矢量代数。

18 至 19 世纪，d'Alembert、Euler、Lagrange、Hamilton、Jacobi、Gauss、Poisson 等建立力学的后 Newton 形式——分析力学。

- 核心概念：能量、作用量；
- 基本原理：Hamilton 原理（最小作用量原理）；
- 数学方法：抽象空间、数学分析；
- Lagrange 形式：广义坐标的引入使力学具备描述其它非力学体系的潜力。
- Hamilton 形式或正则形式：力学体系内在对称性的揭示开始支配物理学思维，从而完成从力学到相对论和量子力学的升华。

分析力学给出了动量、角动量和能量的普适定义，使力学成为整个物理学的原型（量子力学、统计物理和量子场论的理论基石），为物理理论的统一奠定基础。

分析力学当代的发展结果：非线性物理与混沌、随机性、宿命论因果律破产。

### 0.2 经典力学的适用范围

宏观物体在弱引力场中的低速运动。

- 高速运动：狭义相对论
- 强引力场：广义相对论
- 微观体系：量子力学

# 第一章 Newton 力学

运动学，描述运动现象；动力学，揭示运动规律。

## 1.1 正交曲线坐标系

定量描述动点的运动必须选择作为基准的参考系，并在其上建立坐标系。

### 1.1.1 直角坐标系

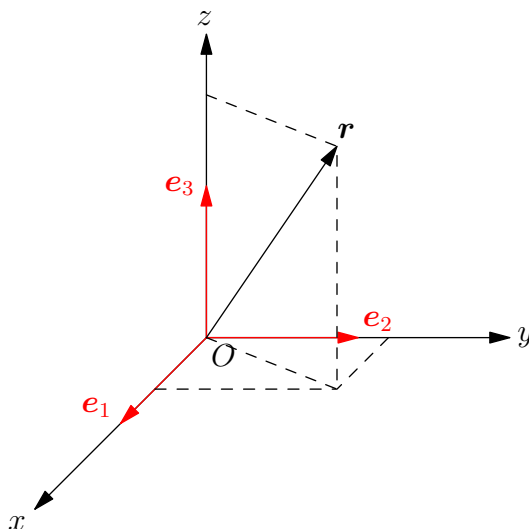


图 1.1: 直角坐标系

直角坐标系的基矢量是常矢量，即

$$d\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{0}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

直角坐标系是正交坐标系，它的基矢量满足

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

直角坐标系是右手系，它的基矢量之间满足

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_\gamma \quad (1.3)$$

其中  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  为 Levi-Civita 反对称符号，它满足

$$\varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} \quad (1.4)$$



直角坐标系中的位矢可以表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (1.5)$$

位移元素为

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_1 + dy\mathbf{e}_2 + dz\mathbf{e}_3 \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

距离元素为

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (1.8)$$

## 1.1.2 球坐标系

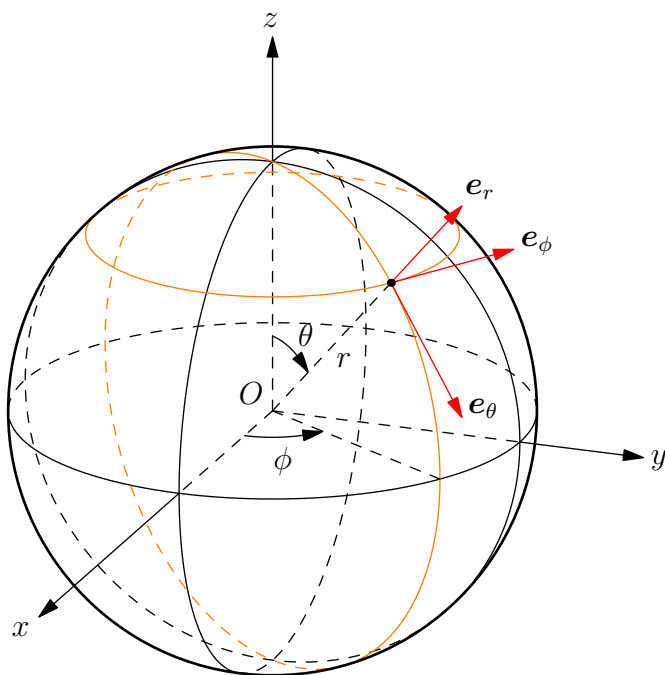


图 1.2: 球坐标系

球坐标  $(r, \theta, \phi)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的转换关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.9)$$

在此转换关系下，位矢可以表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}(r, \theta, \phi) \quad (1.10)$$

形如  $r = C_1$ 、 $\theta = C_2$  或  $\phi = C_3$  的曲面称为**坐标面**，而坐标面两两相交形成**坐标线**，在坐标线只有一个坐标可变。取坐标线切线方向为坐标轴，正方向为相应坐标增大的方向。因此球坐标系的基矢量可以表示为

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}, \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \quad (1.11)$$

其中

$$\begin{cases} h_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1 \\ h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r \\ h_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = r \sin \theta \end{cases} \quad (1.12)$$

称为度规系数。球坐标系的基矢量可以具体计算如下：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) + \cos \theta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_\theta = \cos \theta (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) - \sin \theta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (1.13)$$

球坐标系为正交系，也是右手系。其位移元素和距离元素分别为

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\phi = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi \\ (ds)^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \end{aligned}$$

### 1.1.3 柱坐标系

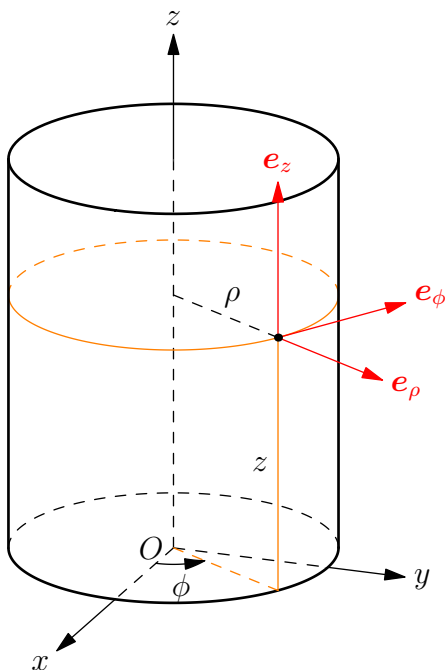


图 1.3: 柱坐标系

柱坐标  $(\rho, \phi, z)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的转换关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad (1.14)$$

在此转换关系下，位矢可以表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}(\rho, \phi, z) \quad (1.15)$$

柱坐标系的坐标面为  $\rho = C_1$ 、 $\phi = C_2$  和  $z = C_3$ 。柱坐标系的基矢量可以表示为

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}, \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}, \quad \mathbf{e}_z = \frac{1}{h_z} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \quad (1.16)$$

其中度规系数为

$$\begin{cases} h_\rho = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right| = 1 \\ h_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = \rho \\ h_z = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = 1 \end{cases} \quad (1.17)$$

柱坐标系的基矢量可以具体计算如下：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (1.18)$$

柱坐标系为正交系，也是右手系。其位移元素和距离元素分别为

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\phi \mathbf{e}_\phi + dz \mathbf{e}_z \quad (1.19)$$

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2 \quad (1.20)$$

### 1.1.4 一般正交曲线坐标系

设曲线坐标系的坐标为  $(q_1, q_2, q_3)$ ，其与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的转换关系为

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad (1.21)$$

在此转换关系下，位矢可以表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) \quad (1.22)$$

此曲线坐标系的单位基矢量可以表示为

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \quad (1.23)$$

其中度规系数表示为

$$h_\alpha = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \right| \quad (1.24)$$

而曲线坐标系的正交性要求

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.25)$$

由此，位移元素和距离元素分别为

$$d\mathbf{r} = h_1 \mathbf{e}_1 dq_1 + h_2 \mathbf{e}_2 dq_2 + h_3 \mathbf{e}_3 dq_3 \quad (1.26)$$

$$ds^2 = h_1^2 (dq_1)^2 + h_2^2 (dq_2)^2 + h_3^2 (dq_3)^2 \quad (1.27)$$

## 1.1.5 正交曲线坐标系中速度与加速度的表示

速度定义为  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$ , 因此在曲线坐标系中有

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.28)$$

记  $\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} =: \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , 以及

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 (h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha})^2 =: T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (1.29)$$

加速度  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$ , 在此曲线坐标系下可以分解为

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$$

加速度的分量为

$$a_{\alpha} = \frac{1}{h_{\alpha}} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] \quad (1.30)$$

式(1.30)称为 Lagrange 公式。为了证明式(1.30), 首先考虑

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \quad (1.31)$$

因此有

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\beta}} \frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \quad (1.32)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_{\beta}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \right) \dot{q}_{\beta} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\beta}} \right) \dot{q}_{\beta} = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\beta} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_{\alpha}} \quad (1.33)$$

根据式(1.32)和(1.33), 即有

$$\begin{aligned} h_{\alpha} a_{\alpha} &= \ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \right) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_{\alpha}} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left( \frac{v^2}{2} \right) \end{aligned}$$

例 1.1 (球坐标系中的速度、加速度表示) 在球坐标中,  $h_r = 1, h_{\theta} = r, h_{\phi} = r \sin \theta$ , 因此

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + r \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_{\phi} \quad (1.34)$$

所以

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta$$

故加速度的各个分量为

$$\begin{cases} a_r = \frac{1}{h_r} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \end{cases} \quad (1.35a)$$

$$\begin{cases} a_{\theta} = \frac{1}{h_{\theta}} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (1.35b)$$

$$\begin{cases} a_{\phi} = \frac{1}{h_{\phi}} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \end{cases} \quad (1.35c)$$

例 1.2 (柱坐标系中的速度、加速度表示) 柱坐标中,  $h_\rho = 1, h_\phi = r, h_z = 1$ , 因此

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha \dot{q}_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z \quad (1.36)$$

所以

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

故加速度的各个分量为

$$\begin{cases} a_\rho = \frac{1}{h_\rho} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\rho}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \end{cases} \quad (1.37a)$$

$$\begin{cases} a_\phi = \frac{1}{h_\phi} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = \rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi} \end{cases} \quad (1.37b)$$

$$\begin{cases} a_z = \frac{1}{h_z} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = \ddot{z} \end{cases} \quad (1.37c)$$

## 1.1.6 自然坐标系

动点的轨道记作  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , 此处  $s$  为起点到当前位置的弧长。速度为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \dot{s} \boldsymbol{\tau} \quad (1.38)$$

式中  $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  为切矢量。弧长可以计算为

$$s(t) = \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(\tau) \right| d\tau \quad (1.39)$$

因此  $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ 。计算切矢量的长度

$$|\boldsymbol{\tau}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{1}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = 1$$

因此,  $\boldsymbol{\tau}(s)$  为单位切矢量。考虑到

$$\frac{d(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})}{ds} = 2 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

即有  $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \perp \boldsymbol{\tau}$ 。定义  $\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\tau}'(s)}{|\boldsymbol{\tau}'(s)|} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|}$  为主法向单位矢量, 其中  $\kappa(s) = |\boldsymbol{\tau}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)|$

为曲率, 其倒数  $R = \frac{1}{\kappa(s)}$  称为曲率半径, 主法向单位矢量也可记作

$$\mathbf{n} = R \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \quad (1.40)$$

定义  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$  为副法向单位矢量。

有了速度, 就可以计算加速度

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + v \dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + v \dot{s} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n} \quad (1.41)$$

其中切向加速度

$$a_\tau = \dot{v} \quad (1.42)$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1.43)$$

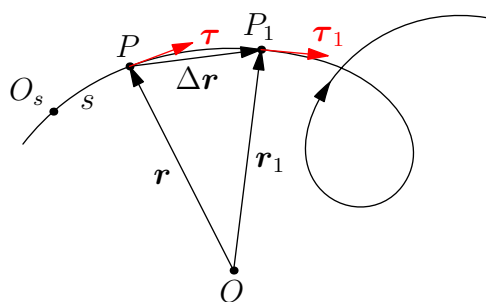


图 1.4: 动点的轨迹

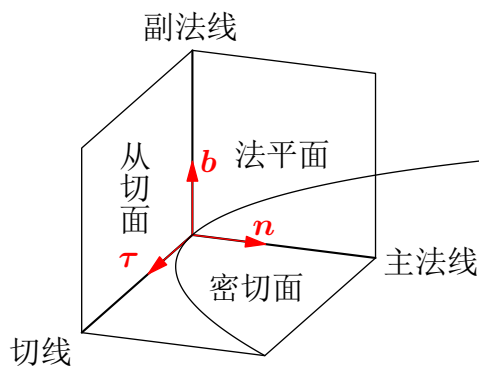


图 1.5: 切线、主法线和副法线

例 1.3 已知  $y = \frac{x^2}{2p}$ , 切向加速度与法向加速度之比为  $\frac{a_\tau}{a_n} = \alpha$ , 经过  $A$  点的速度为  $v_A = u$ , 求动点经过  $B$  点的速度  $v_B$ 。

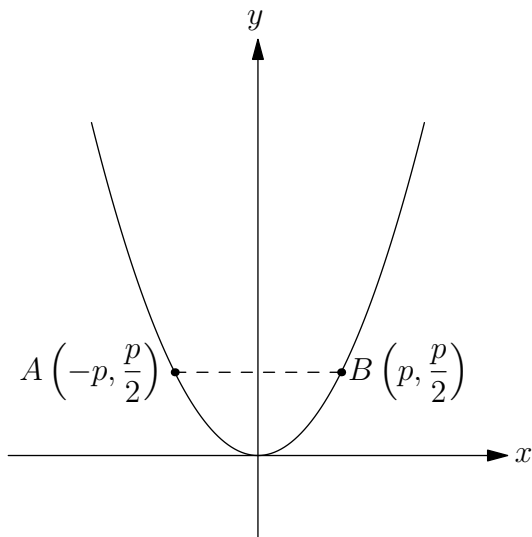


图 1.6: 例 1.3

解 切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

故有

$$\frac{a_\tau}{a_n} = \frac{R}{v} \frac{dv}{ds} = \frac{R}{v} \frac{dv}{dx} \frac{dx}{ds} = \alpha$$

其中

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

故有微分方程

$$\frac{dv}{v} = \frac{\alpha y'' dx}{1 + y'^2} = \frac{\alpha p}{p^2 + x^2} dx$$

对其进行积分，即有

$$\int_u^{v_B} \frac{dv}{v} = \int_{-p}^p \frac{\alpha p}{p^2 + x^2} dx$$

可得

$$\ln v \Big|_u^{v_B} = \alpha \arctan \frac{x}{p} \Big|_{-p}^p$$

所以

$$v_B = ue^{\frac{\alpha\pi}{2}}$$

## 1.2 Newton 运动定律

质点动力学的基本原理，实验事实通过理性思维后的抽象概括。

### 1.2.1 质点

质点是一个理想模型，忽略形状和大小，保留力学性质的物体。

适用条件：平动物体或物体体积远小于运动范围。

### 1.2.2 Newton 运动定律

- **Newton 第一定律：**不受外力作用的质点始终保持静止或匀速直线运动状态。

建立了**力和惯性**的概念，指出静止与匀速直线运动等价。物理经验的极限外推：物体越孤立，越接近惯性运动。

第一定律的实质：定义惯性系（第一定律成立的参考系），断言其存在。等价于孤立系的动量守恒定律。

- **Newton 第二定律：** $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 。通过加速度规定惯性和力的度量。**Newton 第二定律**是运动定律，而非单纯定义。**Newton 第二定律**只适用于惯性系，非惯性系必须引入虚拟的惯性力。

- **Newton 第三定律：**作用力与反作用力共线，大小相等，方向相反，即  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ 。

适用条件：物体运动速度远低于相互作用传播速度。

### 1.2.3 基本相互作用

- **强力、弱力：**只在围观世界起作用。
- **引力、电磁力：**经典力学研究的作用力。

摩擦力、弹性力等是电磁力的宏观表现。

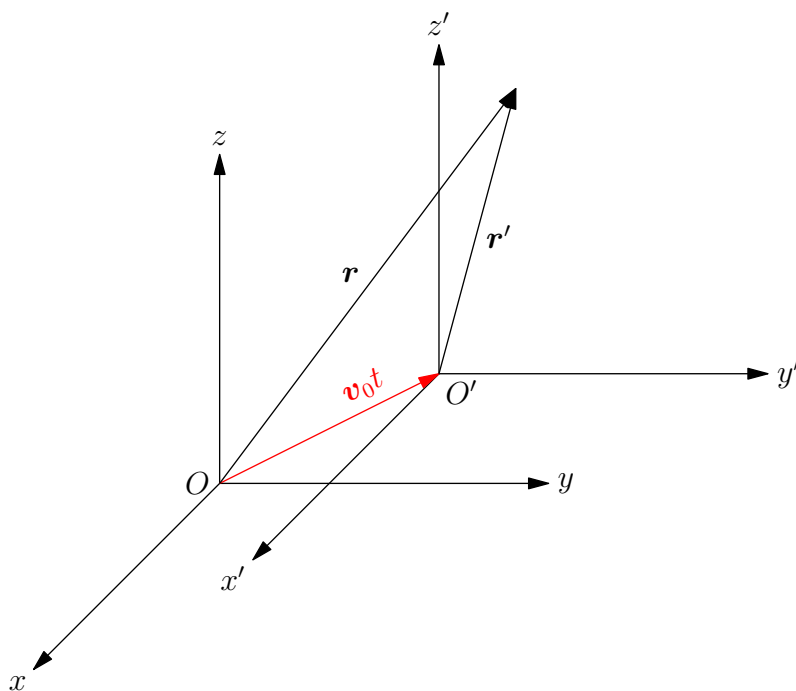


图 1.7: 伽利略变换

### 1.2.4 伽利略变换

伽利略变换可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t \\ t' = t \end{cases} \quad (1.44)$$

在此变换下, 可有

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a} \quad (1.45)$$

力决定于质点间的相对位矢, 故有  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ 。相对速度是伽利略变换下的不变量。

如果  $Oxyz$  参考系为惯性参考系, 即满足  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , 则  $O'x'y'z'$  也满足  $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$ , 因此也是惯性参考系。

上述说明中的隐含假定: 长度、时间和质量是伽利略变换下的不变量。

**伽利略相对性原理** 力学定理在所有惯性系中形式相同。一切惯性系等价, 无法通过力学实验区分哪个惯性系更基本。

相对性原理推广到一切物理现象将导致狭义相对论的诞生。

## 1.3 运动定理与守恒定律

### 1.3.1 质点系

质点系即指两个以上相互作用的质点组成的体系。在质点系中, **外力**指质点系外物体对质点系内任一质点的作用力, 记作  $\mathbf{F}_i$ 。**内力**指质点系内任意一对质点之间的相互作用力, 质点  $j$  对质点  $i$  的作用力记作  $\mathbf{f}_{ij}$ 。



### 1.3.2 动量及其守恒定律

质点的动量定义为

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (1.46)$$

根据 Newton 第二定律, 有

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.47)$$

或者

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt \quad (1.48)$$

式(1.47)或(1.48)表示的关系称为动量定理。

质点系的动量定义为各个质点动量之和, 即

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \quad (1.49)$$

则有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} \right)$$

式中

$$\sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} = \sum_{i=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n (\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}) = 0$$

因此可有质点系的动量定理

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{F}^{(e)} \quad (1.50)$$

即, 质点系总动量的时间变化率等于合外力。

如果质点系所受合外力为零, 则质点系的总动量保持不变。此即为动量守恒定律。即如有  $\mathbf{F}^{(e)} = 0$ , 根据质点系的动量定理, 有

$$\mathbf{F}^{(e)} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$$

即总动量  $\mathbf{p} =$  常矢量。

如果质点系在某方向上合外力为零, 则质点系的总动量在该方向上的分量保持不变。即如果有常单位矢量  $\mathbf{e}$ , 满足  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}^{(e)} = 0$ , 则有

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{e} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})}{dt} = 0$$

即总动量在该方向上的分量  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{p} =$  常数。

动量守恒定律在纯质点力学体系中由 Newton 第三定律保证。

### 1.3.3 角动量及其守恒定律

质点的角动量<sup>①</sup>定义为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.51)$$

<sup>①</sup> 此处为对原点的角动量。

力矩<sup>①</sup>定义为

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1.52)$$

则有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M} \quad (1.53)$$

或者

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M} dt \quad (1.54)$$

式(1.53)和式(1.54)表示的关系称为角动量定理。

质点系的角动量定义为各个质点角动量之和, 即

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i \quad (1.55)$$

则有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \left( \mathbf{F}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} \right)$$

式中

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} &= \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

此处利用了  $\mathbf{f}_{ij} \parallel \mathbf{r}_{ij}$ 。由此即有质点系的角动量定理

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}^{(e)} \quad (1.56)$$

即, 质点系的总角动量时间变化率等于合外力矩。

如果质点系所受合外力矩为零, 则质点系的总角动量保持不变。此即为角动量守恒定律。即如有  $\mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{0}$ , 根据质点系的角动量定理, 有

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}$$

即总角动量  $\mathbf{L} =$  常矢量。

如果质点系在某方向上合外力矩为零, 则质点系的总角动量在该方向上的分量保持不变。即如果有常单位矢量  $\mathbf{e}$ , 满足  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}^{(e)} = 0$ , 则有

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{e} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\mathbf{e} \cdot \mathbf{L})}{dt} = 0$$

即总角动量在该方向上的分量  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{L} =$  常数。

角动量守恒定律在纯质点力学体系中由 Newton 第三定律保证。

---

<sup>①</sup> 此处为对原点的力矩。

### 1.3.4 能量及其守恒定律

质点的动能定义为

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.57)$$

则有

$$\frac{dT}{dt} = m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (1.58)$$

或者

$$dT = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.59)$$

式(1.58)和式(1.59)表示的关系称为动能定理。

质点系的动能定义为各个质点动能之和, 即

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \quad (1.60)$$

则有

$$dT = \sum_{i=1}^n dT_i = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} \right) \cdot d\mathbf{r}_i$$

式中

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n (\mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{f}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} \end{aligned}$$

由此有质点系的动能定理

$$dT = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} \quad (1.61)$$

即, 质点系总动能增加量等于外力与内力的总功, 内力共决定于质点间的相对运动。

如果力  $\mathbf{F}$  可以写作某标量函数的梯度, 即

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (1.62)$$

则该力称为保守力。根据保守力的定义, 可有

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dV \quad (1.63)$$

所以

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r})$$

即, 保守力做功与路径无关。由此也可得

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.64)$$

即, 对任意闭合路径  $C$ , 保守力做功为零。

对于质点系，如果外力是保守力，即满足

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V_i(\mathbf{r}_i) \quad (1.65)$$

其中

$$\nabla_i = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y_i} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (1.66)$$

所以有

$$\mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -dV_i \quad (1.67)$$

定义质点系外势能为

$$V^{(e)} = \sum_{i=1}^n V_i \quad (1.68)$$

将有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -\sum_{i=1}^n dV_i = -dV^{(e)} \quad (1.69)$$

即，保守外力总功等于外势能减少。

如果质点系的内力是保守力，即有

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ij} &= -\nabla_i V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \\ \mathbf{f}_{ji} &= -\nabla_j V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \end{aligned}$$

为一对保守内力，其中

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ij} &= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \\ \nabla_i &= \nabla_{ij} = -\nabla_j \end{aligned}$$

由此内力可以表示为

$$\mathbf{f}_{ij} = -\nabla_{ij} V_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$$

即有

$$\mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{f}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j = -dV_{ij} \quad (1.70)$$

定义质点系内势能为

$$V^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n V_{ij} \quad (1.71)$$

则有

$$\sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n dV_{ij} = -dV^{(i)} \quad (1.72)$$

即，保守内力总功等于内势能减少。

质点系的总势能定义为

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = V^{(e)} + V^{(i)} \quad (1.73)$$

则有

$$\begin{aligned} -\nabla_i V^{(e)} &= -\sum_{j=1}^n \nabla_i V_j = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \mathbf{F}_j = \mathbf{F}_i \\ -\nabla_i V^{(i)} &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1(j \neq k)}^n \nabla_i V_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1(j \neq k)}^n (\delta_{ij} \mathbf{f}_{jk} + \delta_{ik} \mathbf{f}_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1(k \neq i)}^n \mathbf{f}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} = \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} \end{aligned}$$

所以有

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} = -\nabla_i V \quad (1.74)$$

当所有力都为保守力（或者非保守力不做功）时，将有

$$dT = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -dV^{(e)} - dV^{(i)} = -dV \quad (1.75)$$

定义总能量<sup>①</sup>为

$$E = T + V \quad (1.76)$$

则在所有力都为保守力（或者非保守力不做功）时，将有

$$dE = 0 \quad (1.77)$$

式(1.77)即为能量守恒定律。

### 1.3.5 质心参考系

质点系的质心定义为

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1.78)$$

质心的速度为

$$\mathbf{v}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{M} \quad (1.79)$$

加速度为

$$\mathbf{a}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i}{M} \quad (1.80)$$

显然质点系的总动量可以用质心速度表示为

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v}_C$$

由此可有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = M\mathbf{a}_C = \mathbf{F}^{(e)} \quad (1.81)$$

<sup>①</sup> 此处仅指机械能。

式(1.81)表示的关系即为**质心运动定理**。即，质点系的整体运动可视为全部质量集中于质心的单质点运动。

质心运动定理是引进质点概念的动力学基础。

### 1.3.6 质心参考系的运动定理

以质心为原点，并随之平动的参考系称为**质心参考系**或**质心系**。一般为非惯性系。

在质心系中，各质点的位矢和速度为

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C \quad (1.82)$$

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C \quad (1.83)$$

即为各质点相对质心的运动（质点系的内部运动）。

#### 1.3.6.1 质心系动量定理

在质心系中，总动量为

$$\mathbf{p}' = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C) = \mathbf{p} - M \mathbf{v}_C = \mathbf{0} \quad (1.84)$$

即，在质心系中质点系的总动量为零。

#### 1.3.6.2 质心系角动量定理

在质心系中，质点系的总角动量

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \quad (1.85)$$

即为质点系的**内秉角动量**或**自旋角动量**。质心的角动量

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C \quad (1.86)$$

称为质点系的**轨道角动量**。在实验室参考系中的总角动量为

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i) \\ &= \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times \mathbf{p}' + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \end{aligned}$$

所以有

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + \mathbf{L}' \quad (1.87)$$

即，质点系的总角动量等于轨道角动量与内秉角动量之和。对于力矩，可有

$$\mathbf{M}^{(e)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{M}'^{(e)} \quad (1.88)$$

式中,  $\mathbf{M}'^{(e)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$  表示外力对质心的力矩。考虑到轨道角动量  $\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_C \times M\mathbf{v}_C$ , 则有

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{v}_C \times M\mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times M\mathbf{a}_C = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}^{(e)} \quad (1.89)$$

即, 质点系的轨道角动量时间变化率等于外力集中于质心产生的合力矩。根据角动量定理  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(e)}$ , 以及  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + \mathbf{L}'$ , 可有

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'^{(e)} \quad (1.90)$$

即, 质点系的内秉角动量时间变化率等于相对于质心的合外力矩。式(1.89)和式(1.90)表示的关系即为质心系角动量定理。

### 1.3.6.3 质心系动能定理

定义质点系整体运动动能为

$$T_C = \frac{1}{2}Mv_C^2 \quad (1.91)$$

以及质点系内动能为

$$T' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v_i'^2 \quad (1.92)$$

则有

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i) = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{p}' + \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 \\ &= T_C + T' \end{aligned} \quad (1.93)$$

式(1.93)表示的关系称为 König (柯尼希) 定理。即, 质点系总动能等于整体运动动能与内动能之和。

根据整体运动动能的定义, 有

$$\frac{dT_C}{dt} = M\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{a}_C = \mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{v}_C \quad (1.94)$$

或者

$$dT_C = \mathbf{F}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_C \quad (1.95)$$

即, 质点系整体运动动能增量等于外力集中于质心做的总功。又考虑到相对位矢是伽利略变换的不变量, 即有

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j = \mathbf{r}'_{ij}$$

可得

$$\begin{aligned} dT &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_C + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}'_{ij} \\ &= \mathbf{F}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_C + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}'_{ij} \end{aligned}$$

所以有

$$dT' = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}'_{ij} \quad (1.96)$$

式(1.95)和式(1.96)表示的关系称为质心系动能定理。即，质点系内动能增量等于外力与内力在质心系内做的总功。

如果内力均为保守力，则有

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}'_{ij} = -dV^{(i)}$$

式中  $V^{(i)}$  称为质点系内势能。定义质点系内能为

$$E' = T' + V^{(i)} \quad (1.97)$$

由式(1.3.6.3)和式(1.96)可得

$$dE' = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}'_i \quad (1.98)$$

即，质点系内能增量等于外力在质心系内做的总功。

**例 1.4** 光滑水平面上有一质量为  $m$  的质点，用一轻绳系着，绳子完全绕在半径为  $R$  的圆柱上，使质点贴在圆柱体的边缘上。 $t=0$  时给质点以一径向速度  $v_0$ ，据此求任意时刻绳上的张力大小  $T(t)$ 。

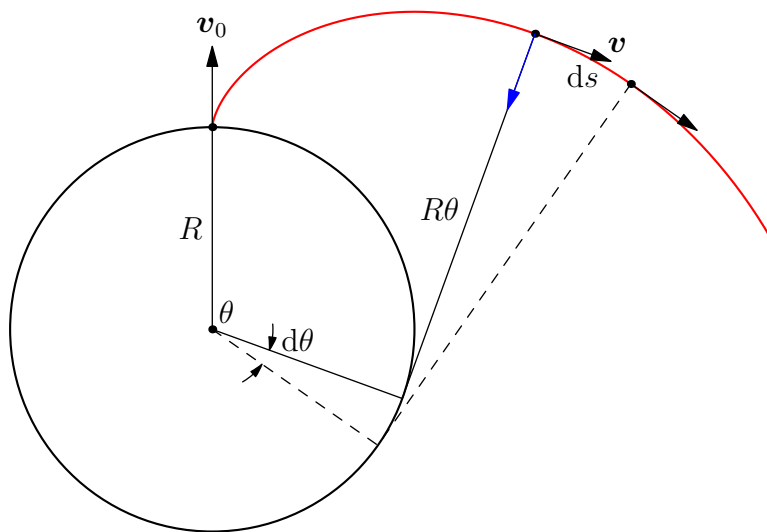


图 1.8: 例 1.4

**解** 由题意，小球的轨道为圆的渐开线。即任意时刻绳子与圆相切，绳子的不可伸长性要求质点速度正交于绳子。轨道的参数方程可以表示为

$$\mathbf{r}(\theta) = R \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{pmatrix} + R\theta \begin{pmatrix} \cos(\pi - \theta) \\ \sin(\pi - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin \theta - R\theta \cos \theta \\ R \cos \theta + R\theta \sin \theta \end{pmatrix}$$

在切线方向上有

$$m\dot{v} = F_{\tau} = 0$$



即有

$$v = v_0$$

在法线方向上有

$$m \frac{v^2}{\rho} = T$$

式中  $\rho$  为该点的曲率半径。根据轨道的方程可得

$$\rho = \left| \frac{[(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2]^{\frac{3}{2}}}{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)} \right| = R\theta$$

再考虑到

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} = \frac{v}{R\theta}$$

可得

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{2v_0 t}{R}}$$

因此有

$$T = m \frac{v^2}{\rho} = m \frac{v^2}{R\theta} = mv_0 \sqrt{\frac{v_0}{2Rt}}$$

**例 1.5 (计入空气阻力的斜抛运动)** 设空气阻力  $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ , 重力加速度为  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_2$ , 初始速度  $\mathbf{v}_0 = v_0(\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2)$ , 初始位矢  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ , 求物体的轨迹。

**解** 根据 Newton 第二定律, 可有矢量形式的微分方程

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} - k\mathbf{v}$$

整理可得

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} = \mathbf{g}$$

此处  $\tau = \frac{m}{k}$ 。首先解齐次方程

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} = \mathbf{0}$$

将其写成分量形式即为

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_x}{\tau} \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{v_y}{\tau} \end{cases}$$

其解为

$$\begin{cases} v_x = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v_y = C_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

或者写作矢量形式为

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

利用常数变易法, 令  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{C}(t) e^{-\frac{t}{\tau}}$ , 代入原方程, 可得

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{g} e^{\frac{t}{\tau}}$$

即有  $\mathbf{C}(t) = \mathbf{g}\tau e^{\frac{t}{\tau}} + \mathbf{C}_1$ , 因此

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{C}_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathbf{g}\tau$$

利用  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ , 可得

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathbf{g}\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

再对时间积分一次, 可得轨迹

$$\mathbf{r}(t) = -\mathbf{v}_0 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathbf{g}\tau \left(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \mathbf{C}_2$$

利用  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ , 可得

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \mathbf{g}\tau \left[t - \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]$$

即

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \tau \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ y(t) = -g\tau t + \tau(v_0 \sin \alpha + g\tau) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{cases}$$

消去时间可以得到轨道方程

$$y = \left(\tau \alpha + \frac{g\tau}{v_0 \cos \alpha}\right) x g \tau^2 \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha}\right)$$

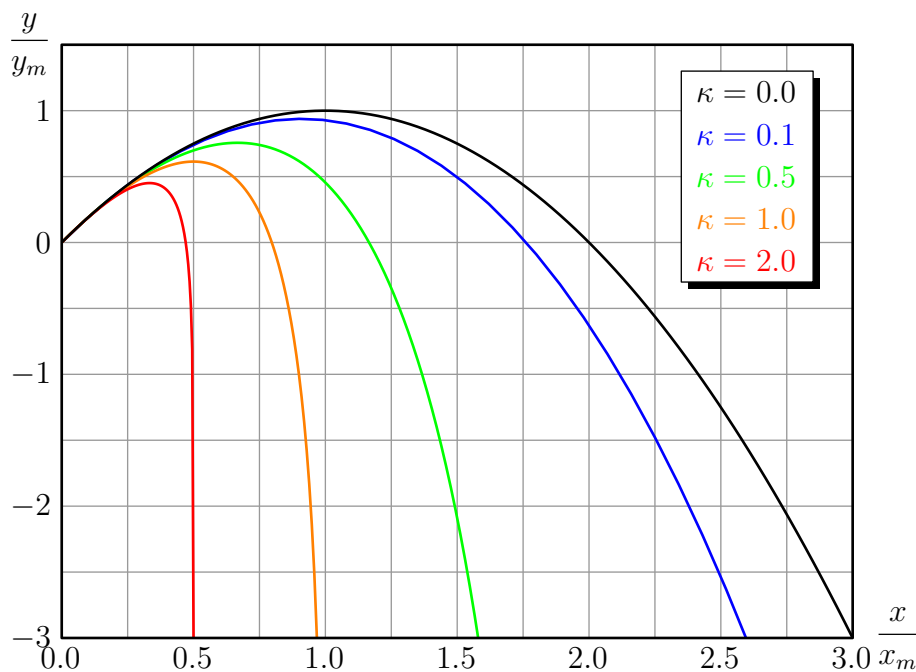


图 1.9: 不同阻尼系数下的轨道曲线图

考虑无阻尼极限  $k = 0$ , 即  $\tau = \frac{m}{k} \rightarrow +\infty$  的情况。根据当  $u \rightarrow 0$  时, 有

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$$

当  $\tau \rightarrow +\infty$  时, 轨道变为

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

由此, 令

$$\kappa = \frac{kv_0 \sin \alpha}{mg} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g\tau}, \quad x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

则在无阻尼的情形, 即  $\kappa = 0$  时, 轨道可以表示为

$$\frac{y}{y_m} = 2\frac{x}{x_m} - \left(\frac{x}{x_m}\right)^2$$

当  $\kappa \neq 0$  时, 轨道方程为

$$\frac{y}{y_m} = 2\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)\frac{x}{x_m} + \frac{2}{\kappa^2} \ln\left(1 - \kappa\frac{x}{x_m}\right)$$

上式这种形式称为**无量纲形式**。不同阻尼系数  $\kappa$  下的轨道曲线如图1.9所示。由图可见阻力越大, 越早的接近竖直运动。

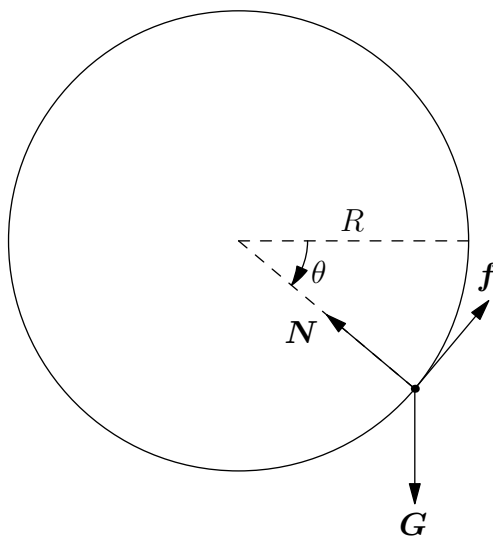


图 1.10: 例 1.6

**例 1.6** 设有竖直圆环轨道上串有钢珠, 将钢珠置于  $\theta = 0$  处释放, 已知  $v|_{\theta=0} = v|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ , 求轨道与钢珠之间的摩擦系数  $\mu$ 。

**解** 速度和加速度为

$$v = R\dot{\theta}, \quad a_\tau = R\ddot{\theta}, \quad a_n = R\dot{\theta}^2$$

根据 Newton 第二定律以及摩擦力的关系, 可有方程组

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = mg \cos \theta - f \\ mR\dot{\theta}^2 = N - mg \sin \theta \\ f = \mu N \end{cases}$$

从中消去  $N$ , 可得

$$R(\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta}^2) = g(\cos \theta - \mu \sin \theta)$$

再考虑到

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$$

可有

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + 2\mu\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(\cos \theta - \mu \sin \theta)$$

可用常数变易法解此微分方程, 得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{(1+4\mu^2)R} [(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta] + Ce^{-2\mu\theta}$$

再考虑到  $\dot{\theta}|_{\theta=0} = 0$ , 可得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{(1+4\mu^2)R} [(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu(\cos\theta - e^{-2\mu\theta})]$$

最后利用  $\dot{\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ , 可得  $\mu$  满足的方程为

$$1 - 2\mu^2 - 3\mu e^{-\mu\pi} = 0$$

整理为

$$\mu = \sqrt{\frac{1 - 3\mu e^{-\mu\pi}}{2}} =: f(\mu)$$

即  $\mu$  为函数  $f(\mu)$  的不动点。求此不动点可用压缩映射定理证明中的迭代法, 即  $\mu^{(n+1)} = f(\mu^{(n)})$  来求解。具体如下

$$\begin{aligned}\mu^{(0)} &= 0.000 \\ \mu^{(1)} &= f(\mu^{(0)}) = 0.707\dots \\ \mu^{(2)} &= f(\mu^{(1)}) = 0.620\dots \\ \mu^{(3)} &= f(\mu^{(2)}) = 0.606\dots \\ &\vdots \\ \mu &\doteq 0.603\end{aligned}$$

**例 1.7** 在铅直平面内有一光滑的半圆形管道 (如图 1.12 所示), 半径为  $R$ , 管道内有一长为  $\pi R$ , 质量线密度为  $\rho$  的均匀链条。假定链条由于轻微扰动而从管口向外滑出, 试用角动量定理求出链条位于任意角度  $\theta$  时的速度  $v$ 。

**解** 由于链条不可伸长, 因此其各点速度相等, 即

$$v = R\dot{\theta}$$

由此可得链条的角动量

$$\mathbf{L} = \int_C \mathbf{r} \times \mathbf{v} dl = \rho\pi R(R\dot{\theta}\mathbf{e}) = \rho\pi R^3\dot{\theta}\mathbf{e}$$

式中  $\mathbf{e}$  为垂直纸面向里的单位矢量。

由于  $\mathbf{r} \times d\mathbf{N} = \mathbf{0}$ , 故只需计算重力力矩。对于直线段, 可有

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r} \times \mathbf{G}_1 = (\rho R\theta)Rg\mathbf{e} = \rho g R^2 \theta \mathbf{e}$$

对于圆弧段, 可有

$$\mathbf{M}_2 = \int_C \mathbf{r} \times \rho g d\mathbf{l} = \int_0^{\pi-\theta} Rg \cos\alpha \rho R d\alpha \mathbf{e} = \rho g R^2 \sin\theta \mathbf{e}$$

由此可得总力矩为

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \rho g R^2 (\theta + \sin\theta) \mathbf{e}$$

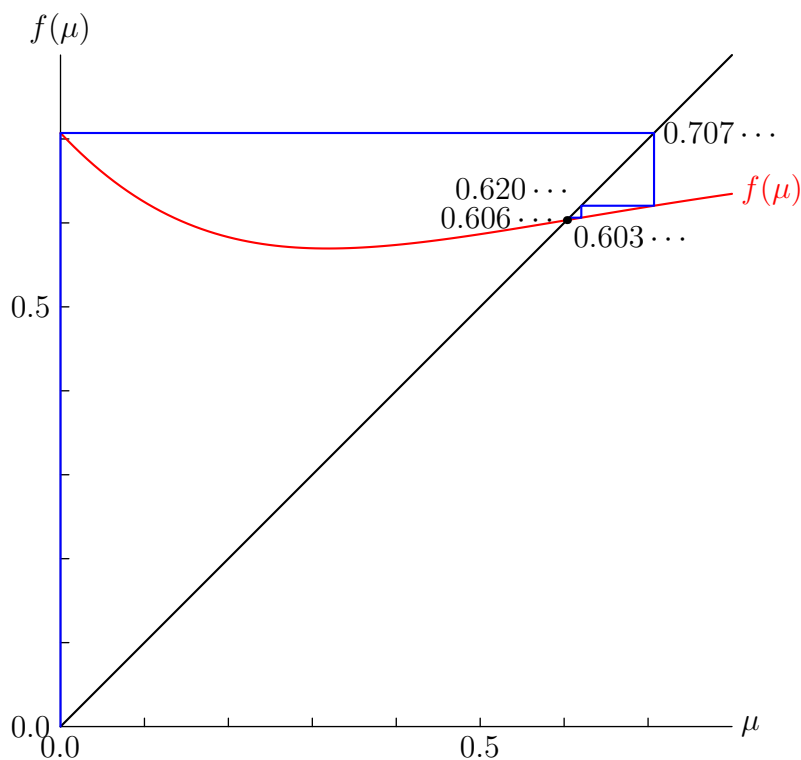


图 1.11: 求解示意

根据角动量定理  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$ , 可得

$$\rho\pi R^3\ddot{\theta} = \rho g R^2(\theta + \sin\theta)$$

根据

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$$

可得

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \frac{2g}{\pi R}(\theta + \sin\theta)$$

积分即可得到

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{\pi R} \left( \frac{1}{2}\theta^2 - \cos\theta + 1 \right)} = 2\sqrt{\frac{g}{\pi R} \left[ \left( \frac{\theta}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}$$

所以速度为

$$v = R\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{Rg}{\pi} \left[ \left( \frac{\theta}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}$$

本体也可使用机械能守恒来求解。此系统中, 非保守力(弹力)不做功, 因此系统机械能守恒。在初始状态下, 链条的动能

$$T = 0$$

以半圆柱的底面为零势能面, 可求得初始状态下链条的重力势能为

$$V = \int_C \rho g h dl = \int_0^\pi \rho g R \sin \alpha R d\alpha = 2\rho g R^2$$

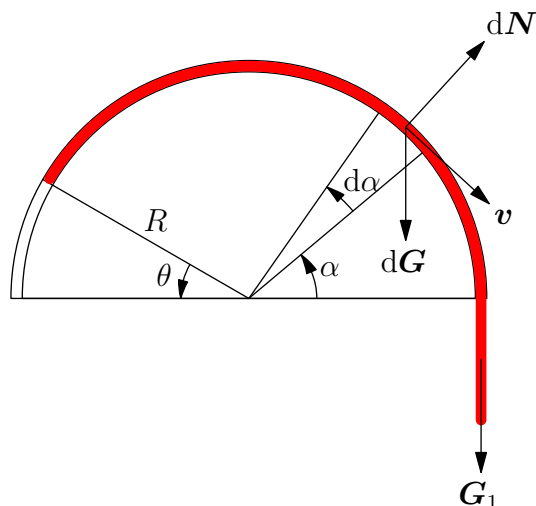


图 1.12: 例 1.7

在图1.12所示的状态下，由于链条上各处速度大小相等，故链条的动能为

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho\pi Rv^2$$

直线的重力势能为

$$V_1 = \rho R\theta g \cdot \left(-\frac{1}{2}R\theta\right) = -\frac{1}{2}\rho g R^2\theta^2$$

曲线段的重力势能为

$$V_2 = \int_C \rho g h dl = \int_0^{\pi-\theta} \rho g R \sin \alpha R d\alpha = \rho g R^2 (\cos \theta + 1)$$

根据机械能守恒可得

$$2\rho g R^2 = \frac{1}{2}\rho\pi Rv^2 - \frac{1}{2}\rho g R^2\theta^2 + \rho g R^2 (\cos \theta + 1)$$

由此同样可以解得链条处于任意角度处的速度为

$$v = 2\sqrt{\frac{Rg}{\pi} \left[ \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}$$

**例 1.8** 质量为  $m$  的质点沿一半球形光滑碗的内侧以初速度  $v_0$  沿水平方向运动，碗的内半径为  $r$ ，初位置离碗边缘的高度为  $h$ 。求质点上升到碗口而又不至于飞出碗外时  $v_0$  和  $h$  应满足的关系式。

**解** 建立球坐标系，考虑到  $v_r = \dot{r} = 0$ ，则

$$\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi$$

弹力沿径向，故  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = 0$ ，即系统中只有重力做功，机械能守恒。

而  $\mathbf{r} \times \mathbf{N} = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{e}_3 \cdot [\mathbf{r} \times (-mg\mathbf{e}_3)] = 0$ ，故  $z$  方向力矩为零，即  $z$  方向角动量守恒。计算  $z$  方向的角动量

$$L_z = \mathbf{e}_3 \cdot [\mathbf{r} \times m(v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi)] = mr\mathbf{e}_3 \cdot (v_\theta \mathbf{e}_\phi - v_\phi \mathbf{e}_\theta) = mr \sin \theta v_\phi$$

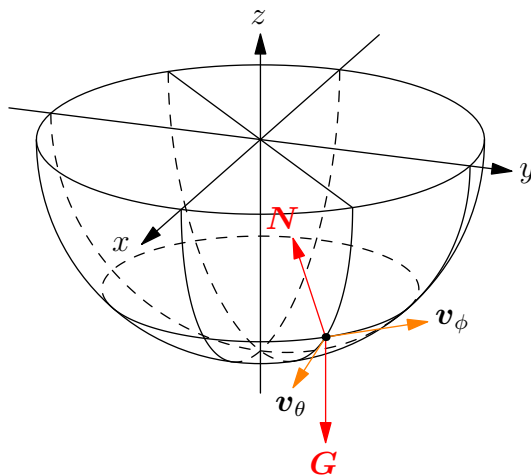


图 1.13: 例 1.8

考虑到  $\mathbf{v}|_{z=-h} = v_0 \mathbf{e}_\phi$ , 可以列出守恒方程

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m(v_\theta^2 + v_\phi^2) + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh \\ mv_\phi\sqrt{r^2 - z^2} = mv_0\sqrt{r^2 - h^2} \end{cases}$$

将末状态取为  $z = 0$  时, 此时  $v_\theta|_{z=0} = 0$ , 可有

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_\phi^2|_{z=0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh \\ mrv_\phi|_{z=0} = mv_0\sqrt{r^2 - h^2} \end{cases}$$

由此, 可解出

$$v_0 = r\sqrt{\frac{2g}{h}}$$

即为  $v_0$  和  $h$  应满足的关系。

## 1.4 变质量体系

质量随时间渐变的体系, 例如

- **增质量:** 主体吸附物质, 如形成中的雨滴;
- **减质量:** 主体排放物质, 如发射中的火箭。

首先计算小物体  $\Delta m$  粘附前后的动量差, 即

$$\Delta \mathbf{p} = m' \mathbf{v}' - m \mathbf{v} - \Delta m \mathbf{u} = \Delta(m \mathbf{v}) - \Delta m \mathbf{u}$$

根据动量定理, 有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} - \frac{dm}{dt} \mathbf{u} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (1.99)$$

式(1.99)即为变质量体系的运动微分方程。

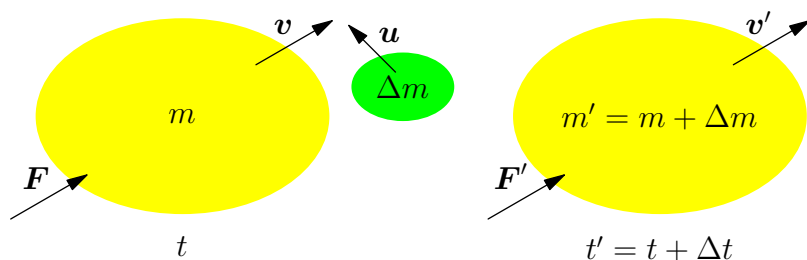


图 1.14: 变质量体系

对于火箭, 式(1.99)中  $\mathbf{v}$  为火箭的速度,  $\mathbf{u}$  为排出废气的速度。在火箭理论中, 有意义的不是废气的绝对速度  $\mathbf{u}$ , 而是废气相对于火箭的相对速度  $\mathbf{v}_r$ 。 $\mathbf{v}_r$  的方向和火箭前进的方向相反, 如果令  $\mathbf{e}_t$  为火箭前进方向 (轨道切线) 的单位矢量, 则  $\mathbf{v}_r$  可以表示为

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{u} - \mathbf{v} = -v_r \mathbf{e}_t$$

于是火箭的运动方程可以写作

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + v_r \frac{dm}{dt} \mathbf{e}_t = \mathbf{F}$$

或者

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_R \quad (1.100)$$

式中

$$\mathbf{F}_R = -\frac{dm}{dt} v_r \mathbf{e}_t = \mu v_r \mathbf{e}_t$$

其中  $\mu = \left| \frac{dm}{dt} \right|$  是单位时间内消耗的燃料。式(1.100)是火箭运动的基本方程式, 称为 Meshcherskii (密歇尔斯基) 方程。

**例 1.9 (重力场中的火箭)** 在假设火箭竖直运动, 以及外力只有恒定重力  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_3$  的情况下求解密歇尔斯基方程。

**解** 相对火箭的喷气速度

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = -v_r \mathbf{e}_3$$

此时密歇尔斯基方程即为

$$m \frac{dv}{dt} + v_r \frac{dm}{dt} = -mg$$

化简为

$$dv = -v_r \frac{dm}{m} - gdt$$

直接积分, 即可得末速度

$$v_f = v_i + v_r \ln \frac{M_i}{M_f} - gt_f = v_i + v_r \ln \left( 1 + \frac{|\Delta M|}{M_f} \right) - gt_f$$

提高火箭末速度的方法:

- 提高喷气速度;
- 用级连法提高燃料所占质量比;
- 提高燃烧速度, 减少加速时间。



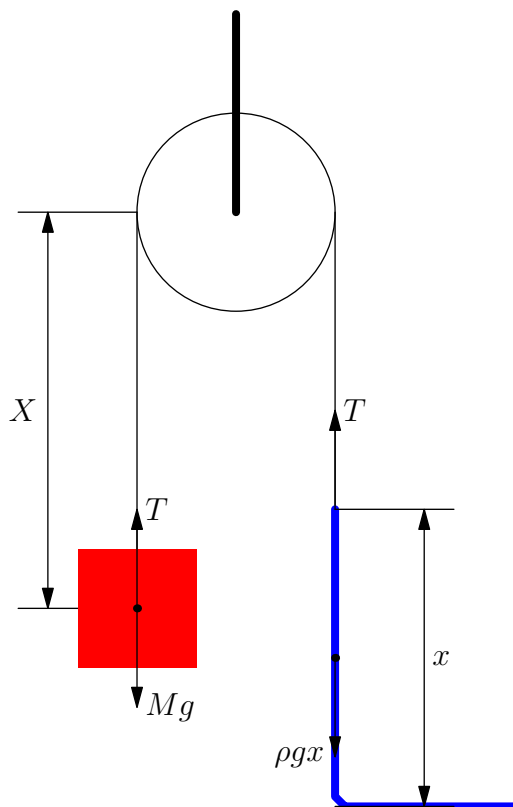


图 1.15: 例 1.10

**例 1.10** 一轻绳跨过定滑轮的两端，一端挂着质量为  $m$  的重物，另一端和线密度为  $\rho$  的软链相连。开始时软链全部静止在地上，重物亦静止，后来重物下降，并将软链向上提起。问软链最后可提起多高？

**解** 地面上的软链在被提起时的速度为  $u = 0$ ，根据变质量体系的运动微分方程(1.99)即有

$$\rho x \ddot{x} + \rho \dot{x} \dot{x} = T - \rho g x$$

对左端物体有

$$M \ddot{X} = Mg - T$$

约束为

$$\dot{X} = \dot{x}$$

消去无关变量即有

$$\rho x \ddot{x} + \rho \dot{x} \dot{x} + M \ddot{x} = Mg - \rho g x$$

可化为

$$\frac{d}{dt}[(M + \rho x)\dot{x}] = (M - \rho x)g$$

即

$$\dot{x} \frac{d}{dx}[(M + \rho x)\dot{x}] = (M - \rho x)g$$

因此

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx}[(M + \rho x)\dot{x}]^2 = (M - \rho x)(M + \rho x)g$$

积分，并考虑到  $\dot{x}|_{x=0} = 0$ ，即得

$$\frac{1}{2} [(M + \rho x)\dot{x}]^2 = \left(M^2 - \frac{1}{3}\rho^2 x^2\right) gx$$

当软链升到最高时，有  $\dot{x}|_{t=t_{max}} = 0$ ，即有

$$\left(M^2 - \frac{1}{3}\rho^2 x_{max}^2\right) gx_{max} = 0$$

由此得最大高度

$$x_{max} = \frac{\sqrt{3}M}{\rho}$$

## 第二章 Lagrange 动力学

1788 年, Lagrange 发表名著《分析力学》。全书无图, 藉助数学分析建立运动方程。

### 2.1 约束与广义坐标

#### 2.1.1 约束及其分类

在运动过程中, 质点的位置和速度受到的限制称为**约束**。对于质点系, 其中各质点的位置矢为  $\mathbf{r}_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 其约束方程可以表示为

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n; t) = 0 \quad (2.1)$$

约束可以分为以下两类:

- **几何约束:** 与速度无关, 仅对几何位形加以限制。即

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; t) = 0 \quad (2.2)$$

一个几何约束减少一个独立坐标与一个独立速度分量。例如, 单摆 (如图2.1所示) 的约束可以表示为

$$|\mathbf{r}|^2 - l^2 = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

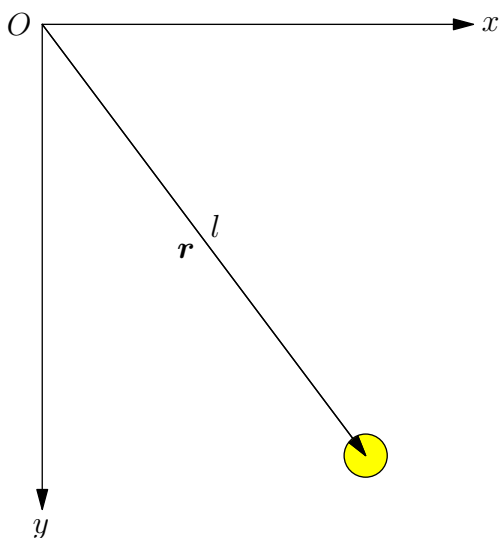


图 2.1: 单摆的几何约束

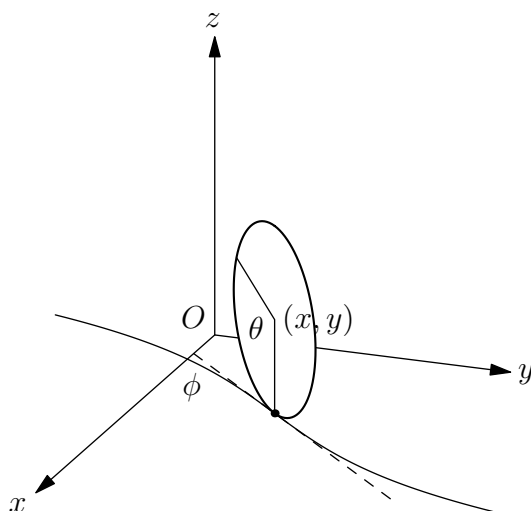


图 2.2: 作曲线运动的纯滚动直立圆盘

- **运动约束**: 涉及体系运动情况 (即涉及质点的速度)。运动约束条件对坐标取值无限制, 只对坐标变动有限制, 不减少独立坐标个数。但一个运动约束减少一个独立速度分量。例如, 作曲线运动的纯滚动直立圆盘 (如图2.2所示) 的约束可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} - R\dot{\theta} \cos \phi = 0 \\ \dot{y} - R\dot{\theta} \sin \phi = 0 \end{cases}$$

圆盘可由任一指定初位形出发, 到达任一指定末位形。但如果圆盘作直线运动, 此时  $\phi = \phi_0$  (常数), 则运动约束可积<sup>①</sup> (此时即称为**可积运动约束**), 即

$$\begin{cases} x - R\theta \cos \phi_0 + C_1 = 0 \\ y - R\theta \sin \phi_0 + C_2 = 0 \end{cases}$$

可积运动约束实质上等价于几何约束。

几何约束与可积运动约束称为**完整约束**, 一个完整约束方程同时减少一个独立坐标与一个独立速度分量。不可积运动约束则称为**非完整约束**, 一个非完整约束方程只减少一个独立速度分量。如果一个体系的所有约束皆为完整约束, 则该体系称为**完整体系**, 否则称为**非完整体系**。

## 2.1.2 自由度

体系可独立变动 (并非取值) 坐目标个数, 即独立速度分量个数, 称为体系的**自由度**。

设某  $n$  质点体系具有完整约束

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2.3)$$

和非完整约束

$$f_{j'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n; t) = 0, \quad j' = 1, 2, \dots, k' \quad (2.4)$$

则体系的独立坐标数  $s = 3n - k$ , 自由度  $f = 3n - k - k'$ 。对于完整体系,  $k' = 0$ , 自由度与独立坐标数相等  $f = s$ 。对于非完整体系,  $k' > 0$ , 则有  $f < s$ 。

## 2.1.3 广义坐标

以双摆为例 (如图2.3所示), 其约束为

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0 \end{cases}$$

因此, 体系的自由度为 2, 可以在四个坐标中任选独立的两个确定位形。但如此做并不方便, 因此任选两个独立参量确定位形, 如两个角度  $(\theta_1, \theta_2)$ , 其转换关系为

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cos \theta_1 \\ y_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

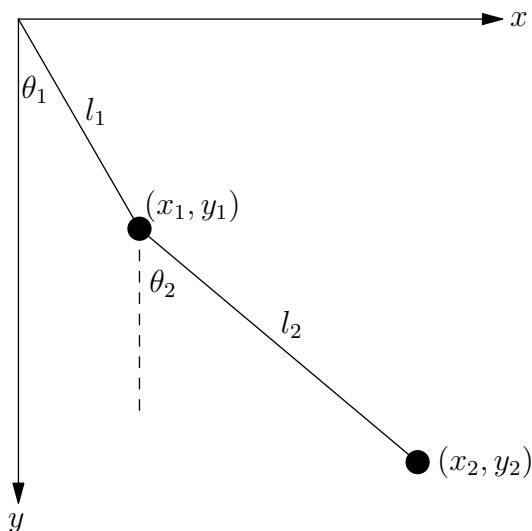


图 2.3: 双摆系统

此处，确定力学体系位形的任意一组独立变量，称为**广义坐标**。各质点坐标与广义坐标间的函数关系称为**坐标变换方程**，其使得约束方程自动满足。广义坐标引入使完整约束方程与不独立坐标一起消去。

广义坐标特点：

1. 可任选，一般要求相互独立，并能确定体系的位形；
2. 不必具有长度量纲或明显的几何意义；
3. 属于整个体系，而非个别质点，因而任一广义坐标变化一般会引起全部质点的位移，反之亦然。

由广义坐标张成的  $s$  维抽象空间，称为**位形空间**。体系的位形及其随时间的演化分别对应该空间的一点与一条曲线。

## 2.2 虚位移与约束力

### 2.2.1 虚位移

实时的、约束允许的任意虚拟无限小位置变动，称为**虚位移**，记作  $\delta \mathbf{r}$  以区别于实位移  $d\mathbf{r}$ 。力与虚位移之内积相应地称为**虚功**。

考虑于约束在曲面（曲面可移动，可变形）上运动的质点，曲面的方程表示为  $f(\mathbf{r}, t) = 0$ ，则  $t$  时刻该质点的位矢满足方程

$$f(\mathbf{r}, t) = 0$$

设质点具有虚位移  $\delta \mathbf{r}$  则有<sup>①</sup>

$$f(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t) = 0$$

<sup>①</sup> 在求解运动前。

<sup>②</sup> 此处需考虑到虚位移是“实时”的无限小位置变动。

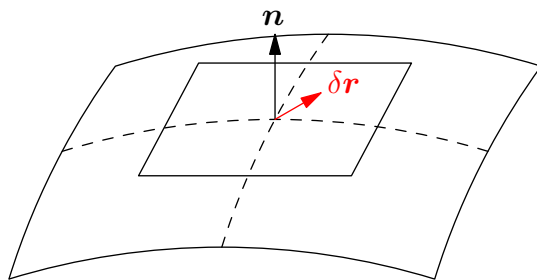


图 2.4: 约束在曲面上的质点

所以

$$0 = f(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t) - f(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r}$$

由于  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \parallel \mathbf{n}^{\text{①}}$ , 所以有  $\delta \mathbf{r} \perp \mathbf{n}$ 。此时虚位移即为质点所在处曲面切平面内的无限小位移。  
对于实位移则有

$$\begin{cases} f(\mathbf{r}, t) = 0 \\ f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt) = 0 \end{cases}$$

所以

$$0 = f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt) - f(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

即有

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial f}{\partial t} dt$$

如果约束为**稳定约束**（约束方程不显含时间），则有  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ，所以

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

即  $d\mathbf{r} \in \{\delta \mathbf{r}\}$ ，实位移是全体虚位移中的一个。如果约束为**不稳定约束**（约束方程显含时间），则有  $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ ，所以

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

即  $d\mathbf{r} \notin \{\delta \mathbf{r}\}$ ，实位移不在虚位移集合中。

引入等时变分  $\delta$  运算，其运算规则等同于微分运算  $d$ ，但作用于时间时结果为零，即  $\delta t = 0$ 。考虑

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

可知，位矢的等时变分即为虚位移。

对于完整约束

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

则有

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

<sup>①</sup> 此处，算符  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$  定义为

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} = \nabla$$

后文不再特别说明。

即各虚位移分量线性相关,  $k$  个方程共减少  $k$  独立分量。对于线性非完整约束 (只含有速度一次项)

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + A_{j0}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k'$$

或者

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}_i + A_{j0}(\mathbf{r}, t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k'$$

则有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji}(\mathbf{r}, t) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k'$$

即  $k'$  个方程共减少  $k'$  个独立虚位移分量。因此, 系统的独立虚位移分量 (即坐标变分) 数为  $3n - k - k' = f$ 。体系自由度即等于独立坐标变分个数。

## 2.2.2 约束力

起约束作用的物体对被约束质点施加的作用力  $\mathbf{R}_i$  称为**约束力**, 而体系质点除约束力之外的受力  $\mathbf{F}_i$  称为**主动力**。一般情况下, 主动力是已知力, 约束力是未知力, 由主动力和质点运动情况决定。

约束力总虚功为零的约束称为**理想约束**, 下列几种常见的约束都是理想约束。

1. 质点沿光滑曲面运动, 如图2.5所示。此时约束力  $\mathbf{R}$  沿曲面在该点的法线方向, 而虚位移  $\delta \mathbf{r}$  根据上节讨论则在切平面内, 即有

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

2. 刚性联结的两质点 (包括刚体中任意两点), 如图2.6所示。此时约束力  $\mathbf{R}_1$  和  $\mathbf{R}_2$  沿联机方向, 根据 Newton 第三定律可有  $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1$ 。考虑到

$$\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} = l^2$$

所以

$$2\mathbf{r}_{12} \cdot \delta \mathbf{r}_{12} = 0$$

即有

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot (\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2) = \mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_{12} = 0$$

此处考虑到了  $\mathbf{R}_1 \parallel \mathbf{r}_{12}$ 。

3. 两个物体以完全粗糙的表面相接触 (不滑动, 只能作纯滚动), 如图2.7所示。此时接触点上的约束力满足  $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1$ , 相对速度  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ , 即有  $\delta \mathbf{r}_2 - \delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ , 因此

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot (\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2) = 0$$

4. 两个质点以柔软而不可伸长的绳子相联结, 如图2.8所示。此时约束力  $\mathbf{R}_1$  和  $\mathbf{R}_2$  都沿相应质点处的绳子方向, 且大小相等记作  $T$ 。将两个质点的虚位移  $\delta \mathbf{r}_1$  和  $\delta \mathbf{r}_2$  按沿绳和正交于绳的方向进行分解, 将沿绳方向的虚位移记作  $\delta \mathbf{r}_1^{\parallel} = \delta l_1 \mathbf{e}_1$  和  $\delta \mathbf{r}_2^{\parallel} = \delta l_2 \mathbf{e}_2$ 。正交于绳方向的虚位移对应的虚功自然为零, 考虑沿绳方向虚位移对应的虚功

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = T \delta l_1 + T \delta l_2$$

由于绳不可伸长，所以有  $\delta l_1 + \delta l_2 = 0$ ，故有

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0$$

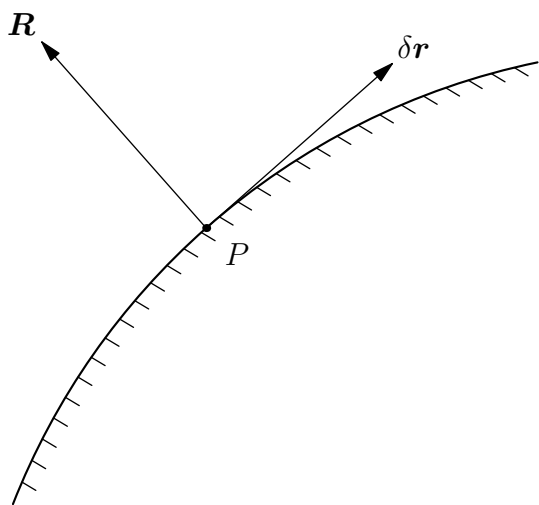


图 2.5: 质点沿光滑曲面运动

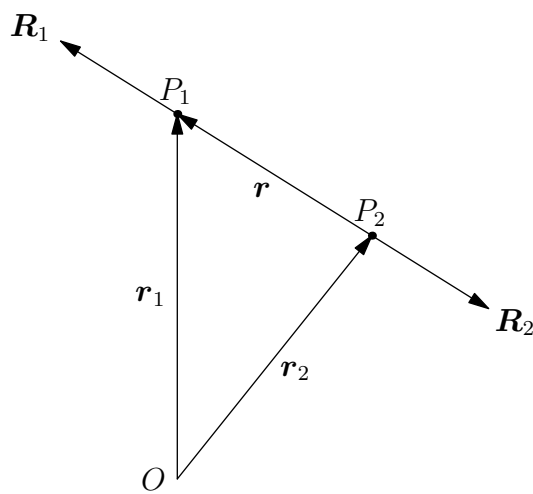


图 2.6: 刚性联结的两质点

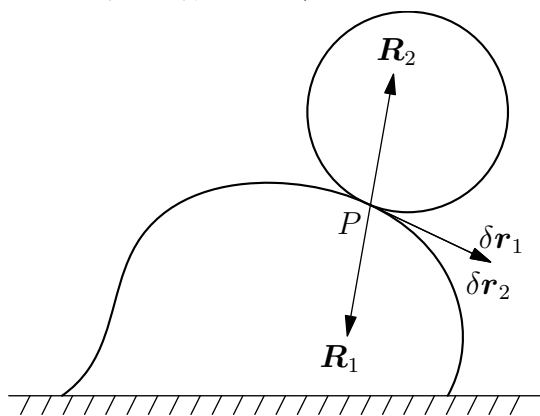


图 2.7: 两个物体以完全粗糙的表面相接触

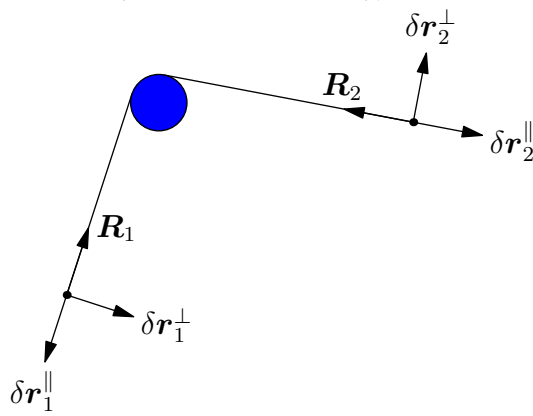


图 2.8: 两个质点以柔软而不可伸长的绳子相联结

所有约束皆为理想约束的系统称为**理想系统**，即理想系统需满足

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

对于非理想体系，可将摩擦力等虚功非零的约束力看作未知的主动力，而认为约束仍然是理想的，缺少的方程则由实验定律来补充。

下面可以看到，虚位移和虚功的引入将使未知的约束力自动消去。

## 2.3 分析静力学的虚功原理

### 2.3.1 虚功原理



如果理想体系处于静平衡状态，其中每个质点所受合力为零，即

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由此可有

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

由于体系是理想的，故约束力的总虚功为零，由此可有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.5)$$

式(2.5)表示的关系称为**虚功原理**。即，平衡位形处，对任意虚位移，主动力的总虚功为零。

### 2.3.2 广义虚位移和广义力

约束<sup>①</sup>使得各质点的虚位移之间彼此不相互独立，设体系自由度为  $s$ ，则可以引入  $s$  个广义坐标表征体系的位形，坐标转换关系表示为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

由此可有

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (2.7)$$

此处  $\delta q_\alpha$  称为**广义虚位移**。由此可有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha$$

定义

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (2.8)$$

称为与广义坐标  $q_\alpha$  对应的**广义主动力**，则虚功原理可以用广义坐标表示为

$$\sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha = 0 \quad (2.9)$$

### 2.3.3 完整系的平衡条件

广义坐标使全部完整约束方程自动满足，所有广义坐标可以独立取值与变动，因此完整系的所有广义虚位移独立，因此由式(2.9)可得完整系的平衡条件

$$Q_\alpha|_{q_0} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (2.10)$$

即，完整系平衡位形处，各广义主动力分量为零。

如果系统为保守体系，所有主动力均对应有势能

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

<sup>①</sup> 在静平衡条件下，所有的约束都是完整约束。

则有

$$V = V(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t))$$

此时，广义主动力可以表示为

$$Q_\alpha = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (2.12)$$

此时平衡条件可以表示为

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right|_{\mathbf{q}_0} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (2.13)$$

即完整保守体系在平衡位形处势能取驻值。可以证明，势能取极小值，平衡为**稳定平衡**；势能取极大值，平衡为**不稳定平衡**；势能取常数值，平衡为**随遇平衡**。

**例 2.1** 质量为  $m$ ，固有半径为  $a$ ，弹性系数为  $k$  的弹性圈置于半顶角  $\alpha$  的光滑直立圆锥上，求弹性圈的平衡半径与张力。

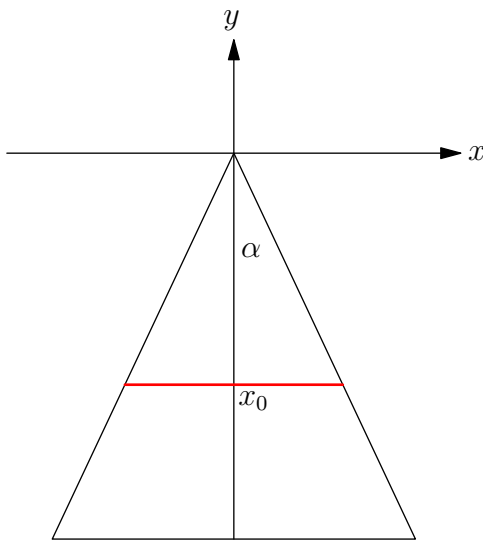


图 2.9: 例 2.1

**解** 光滑锥面的完整约束为

$$y = -x \cot \alpha$$

主动力包括重力和弹性力，均为保守力。广义坐标取为  $x$ ，则体系的势能表示为

$$V(x) = \frac{1}{2} k [2\pi(x - a)]^2 - mgx \cot \alpha$$

平衡条件为

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_0} = 4\pi^2 k (x_0 - a) - mg \cot \alpha = 0$$

解得平衡位置为

$$x_0 = a + \frac{mg \cot \alpha}{4\pi^2 k}$$

平衡时的弹性力为

$$T = 2\pi k (x_0 - a) = \frac{mg \cot \alpha}{2\pi}$$

**例 2.2** 重新设计例2.1中旋转面的形状，使弹性圈可平衡于任意高度。

**解** 设旋转面由曲线  $y = f(x)$  绕  $y$  轴旋转形成, 此时系统的势能

$$V(x) = \frac{1}{2}k[2\pi(x-a)]^2 + mgf(x)$$

随遇平衡要求  $V(x) = \text{常数}$ , 即

$$\frac{1}{2}k[2\pi(x-a)]^2 + mgf(x) = C$$

由此有

$$f(x) = C - \frac{2\pi^2 k}{mg}(x-a)^2$$

**例 2.3** 将例 2.1 中的弹性圈改为刚性圈, 求其在圆锥面上平衡时的张力。

**解** 此问题有两个约束: 约束  $y = -x \cot \alpha$ , 约束力为正压力; 约束  $x = a$ , 约束力为张力。虚功原理只能求平衡位形, 而不涉及约束力。

因此, 此处解除第二个约束, 将张力视为主动力。问题归结为已知平衡位形, 求部分未知主动力。根据虚功原理, 有

$$-T(2\pi\delta x) - mg\delta y = 0$$

根据约束, 可有

$$\delta y = -\delta x \cot \alpha$$

所以有

$$(mg \cot \alpha - 2\pi T)\delta x = 0$$

$\delta x$  是独立的广义虚位移, 因此有

$$mg \cot \alpha - 2\pi T = 0$$

所以, 张力为

$$T = \frac{mg \cot \alpha}{2\pi}$$

## 2.4 d'Alembert 原理与 Lagrange 方程

### 2.4.1 d'Alembert 原理

对质点系中的每个质点应用 Newton 第二定律, 可有

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

将上式整理为

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

将上式中的  $-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$  看作一个主动力, 称为 d'Alembert 惯性力, 即主动力、约束力与惯性力构成平衡力系<sup>①</sup>, 由此根据虚功原理可以得到

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.14)$$

式(2.14)表示的关系称为 d'Alembert 原理。即理想力学体系的实际运动使任意虚位移下的主动力与惯性力的总虚功为零——此为与 Newton 定律等价的力学基本原理。

<sup>①</sup> 这种将动力学问题转化为静力学问题考虑的方法, 称为动静法。

## 2.4.2 理想完整系的 Lagrange 方程

在理想完整体系中，质点位矢与广义坐标之间的坐标转换关系为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

所以

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha}$$

质点的速度为

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.15)$$

式中， $\dot{q}_{\alpha}$  称为广义速度。在式(2.15)两端的微分，可得

$$\begin{aligned} d\dot{\mathbf{r}}_i &= \sum_{\alpha=1}^s d\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}}\right) \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} + d\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (2.16)$$

此处将  $\mathbf{q}$  和  $\dot{\mathbf{q}}$  作为相互独立的变量来处理。又考虑到  $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ，其全微分为

$$d\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t} dt \quad (2.17)$$

对比式(2.16)和式(2.17)的各项可得如下的经典 Lagrange 关系：

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \quad (2.18)$$

根据 d'Alembert 原理，可有

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \left[ \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right] \delta q_{\alpha} \quad (2.19)$$

其中主动力满足关系  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t)$ ，因此式(2.19)的第一项即为广义力

$$Q_{\alpha} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

现在考虑式(2.19)的第二项

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) - \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_{\alpha}} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^2}{\partial q_{\alpha}} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} \end{aligned}$$

式中应用了经典 Lagrange 关系(2.18), 而

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_\alpha} = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

为系统的总动能。由此 d'Alembert 原理式变为

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \left( Q_\alpha + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0$$

由于  $\delta q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, s$ ) 相互独立, 则有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (2.20)$$

式(2.20)即为理想完整系的 Lagrange 方程, 其为  $s$  个广义坐标二阶常微分方程组 (约束力已经被消去)。

### 2.4.3 理想完整系 Lagrange 方程的数学结构

速度可以表示为

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

由此, 动能可以表示为

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^s \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \dot{q}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^s P_\alpha(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha + T_0(\mathbf{q}, t) \end{aligned}$$

其中

$$M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta}, \quad P_\alpha(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad T_0(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

则可将动能  $T$  按广义速度的次数分为三项, 即

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^s P_\alpha(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha + T_0(\mathbf{q}, t) = T_2 + T_1 + T_0 \quad (2.21)$$

其中

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \\ T_1 &= \sum_{\alpha=1}^s P_\alpha(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha \\ T_0 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

由此可有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^s M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\beta + P_\alpha(\mathbf{q}, t)$$

即有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^s M_{\alpha\beta} \ddot{q}_\beta + \sum_{\beta, \gamma=1}^s \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma + \sum_{\beta=1}^s \left( \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_\beta + \frac{\partial P_\alpha}{\partial t}$$

以及

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s \frac{\partial M_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial P_\beta}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha}$$

## 2.4.4 有势系的 Lagrange 函数

如果外力是有势力<sup>①</sup>，即

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中  $V(\mathbf{r}, t)$  为势函数。考虑  $V = V(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), t)$ ，可有

$$Q_\alpha = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

由此，定义

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t) \quad (2.22)$$

则有理想完整有势系的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (2.23)$$

如果体系中部分主动力为有势力，则将其势归入 Lagrange 函数  $L$ ，非势力表示为广义力，则同样可有 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (2.24)$$

**例 2.4** 质量为  $m$  的质点被约束在一光滑的水平平台上运动，质点上系着一根长为  $l$  的轻绳，绳子穿过平台上的小孔  $O$ ，另一端挂着另一个质量为  $M$  的质点，写出系统的运动方程。

**解** 广义坐标取为  $r$  和  $\theta$ ，则有

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} M \dot{r}^2, \quad V = Mg(r - l)$$

<sup>①</sup> 保守力与有势力是不同的，考虑

$$dV = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

因此有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -dV + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

所以仅当势函数不显含时间  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$  时，有势力才是保守力。

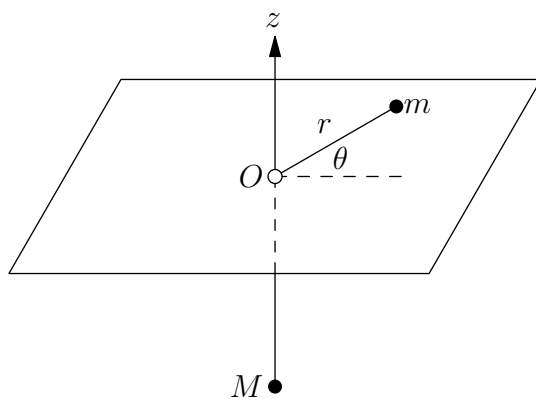


图 2.10: 例 2.4

Lagrange 函数为

$$L(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2 - Mg(r - l)$$

计算

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= (m + M)\dot{r}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\theta}^2 - Mg, & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

所以系统的运动方程为

$$\begin{cases} (m + M)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Mg = 0 \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

## 2.5 广义势

理想完整有势系的外力与速度无关，即

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

此时系统存在相应的 Lagrange 函数。那么对于速度相关的外力，是否也存在类似的 Lagrange 函数？

### 2.5.1 广义势

如果质点系中的质点所受外力可以用标量函数  $U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  表示为<sup>①</sup>

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.25)$$

则标量函数  $U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  称为体系的广义势。

<sup>①</sup> 与  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$  的含义类似，此处  $\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}$  定义为

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i}$$

## 2.5.2 广义势体系的 Lagrange 函数

在广义坐标变换下, 广义势函数满足

$$U = U(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t)$$

则广义力可以表示为

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \quad (2.26)$$

式中利用了经典 Lagrange 关系(2.18)。由此可定义广义势系统的 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.27)$$

则系统的 Lagrange 方程与式(2.23)相同, 即

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (2.28)$$

考虑动能  $T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$  满足

$$-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial(-T)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial(-T)}{\partial \mathbf{r}_i}$$

即, 惯性力的广义势是负动能。由此, Lagrange 函数即 (除负号) 惯性力与主动力广义势能之和, 又称为体系的动势。

## 2.5.3 电磁场中带电粒子的广义势能

电磁场中的带电粒子受到 Lorentz 力, 即

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.29)$$

根据 Maxwell 方程组中的  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , 可令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.30)$$

此处, 式(2.30)中的矢量函数  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  称为电磁场的矢势。再根据 Maxwell 方程组中的  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , 可得

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

由此可令

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.31)$$



此处, 式(2.31)中的标量函数  $\phi(\mathbf{r}, t)$  称为**电磁场的标势**。

由此, Lorentz 力可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= e \left[ -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = e \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})}{\partial \mathbf{r}} \right] \\ &= e \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{\partial(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})}{\partial \mathbf{r}} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial(e\phi - e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial(e\phi - e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

由此, 广义势为

$$U = e(\phi - \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \quad (2.33)$$

在电磁场中运动的自由带电粒子的 Lagrange 函数为

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} - e\phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.34)$$

## 2.6 守恒定律

### 2.6.1 广义动量及其守恒定律

定义与广义坐标  $q_\alpha$  共轭的**广义动量**

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (2.35)$$

则理想完整有势系的 Lagrange 方程(2.23)变为

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (2.36)$$

式(2.36)表示的关系称为**广义动量定理**。

如果某体系的 Lagrange 函数不显含某个广义坐标, 即

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

则称坐标  $q_\alpha$  为**循环坐标**或**可遗坐标**, 根据广义动量定理(2.36), 可有

$$\dot{p}_\alpha = 0 \quad (2.37)$$

即, 与循环坐标共轭的广义动量守恒。

### 2.6.2 广义能量及其守恒定律

考虑 Lagrange 函数  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  的时间导数

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - \sum_{i=1}^s \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= - \sum_{\alpha=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right] \dot{q}_\alpha + \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.38)$$

利用理想完整有势系的 Lagrange 方程, 式(2.38)中的第一项为零。由此可令

$$H = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L \quad (2.39)$$

称为广义能量, 由此式(2.38)化为

$$\dot{H} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.40)$$

式(2.40)表示的关系称为广义能量定理。如果系统的 Lagrange 函数不显含时间, 即

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

则有

$$\dot{H} = 0 \quad (2.41)$$

即, 系统的广义能量守恒。

### 2.6.3 广义能量的数学结构

定理 2.6.1 (齐次函数的 Euler 定理) 如果  $n$  元函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  对  $\forall \lambda \neq 0$  满足

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

则称为  $m$  次齐次函数。其满足

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.42)$$

证明 将式

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

两端对  $\lambda$  求偏导数, 可得

$$\sum_{i=1}^n x_i f'_i = m \lambda^{m-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

由此, 令  $\lambda = 1$ , 即得证齐次函数的 Euler 定理

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \square$$

根据动能的表达式(2.21), 可有

$$L = T - V = T_2 + T_1 + (T_0 - V) = L_2 + L_1 + L_0$$

由此, 根据广义速度  $\dot{q}_{\alpha}$  的次数, 可将 Lagrange 函数  $L$  分为三项, 即

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} \\ L_1 &= \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_{\alpha} \\ L_0 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 - V \end{aligned}$$

显然,  $L_2, L_1$  分别为广义速度  $\dot{q}_\alpha$  的 2 次、1 次齐次函数, 根据 Euler 定理, 它们满足

$$\sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2L_2, \quad \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_\alpha} = L_1$$

因此, 广义能量为

$$H = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L = 2L_2 + L_1 - (L_2 + L_1 + L_0) = L_2 - L_0 = T_2 - T_0 + V$$

对于完整稳定约束系统, 即

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad f_j(\mathbf{r}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

可根据约束取广义坐标  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q})$ , 此时即有

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

此时  $T_1 = T_0 = 0$ ,  $T = T_2$ , 所以

$$H = T + V$$

稳定约束力实功为零, 因为实位移属于虚位移集合。即, 对稳定约束体系, 广义能量即惯性系内的体系总能量。

对于完整非稳定约束系统, 此时广义坐标取为  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)$ , 即有

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \neq \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

此时有

$$H = T_2 - T_0 + V$$

记  $T' = T_2$ ,  $V' = V - T_0$  分别为广义曲线坐标系的等效动能与势能, 则有

$$H = T' + V'$$

即, 对非稳定约束体系, 广义能量即广义坐标系 (如非惯性系) 内的体系总能量。

**例 2.5** 半径为  $R$  的光滑圆环以匀角速度  $\Omega$  绕铅直直径旋转。质量为  $m$  的质点穿在圆环上, 求其平衡位置。

**解** 选择  $\theta$  作为广义坐标, 则体系的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\Omega^2 \sin^2 \theta + R^2\dot{\theta}^2) + mgR(1 - \cos \theta)$$

Lagrange 函数不显含时间, 故广义能量守恒, 即

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \sin^2 \theta + mgR(1 - \cos \theta) = H_0$$

根据此广义能量的数学结构, 可得旋转系中的动能为

$$T' = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

惯性离心力与重力总势能 (等效势能) 为

$$V' = -\frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \sin^2 \theta + mgR(1 - \cos \theta)$$

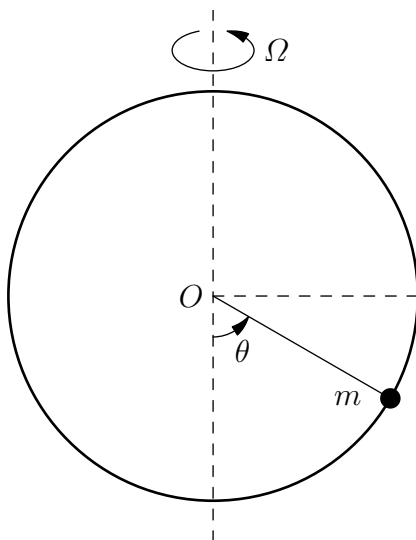


图 2.11: 例 2.5

体系的势能曲线如图2.12所示。

平衡位置需满足

$$\left. \frac{\partial V'}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = -mR^2\Omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + mgR \sin \theta_0 = 0$$

平衡是否稳定需考察

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_0} = mgR \cos \theta_0 - mR^2\Omega^2 (2 \cos^2 \theta_0 - 1)$$

当  $\Omega^2 < \frac{g}{R}$  时, 平衡位置为  $\theta_0 = 0$  和  $\theta_0 = \pi$ 。当  $\theta_0 = 0$  时,

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_0 = mR^2 \left( \frac{g}{R} - \Omega^2 \right) > 0$$

平衡是稳定的。当  $\theta_0 = \pi$  时,

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_{\pi} = -mR^2 \left( \frac{g}{R} + \Omega^2 \right) < 0$$

平衡是不稳定的。

当  $\Omega^2 > \frac{g}{R}$  时, 平衡位置为  $\theta_0 = 0$ 、 $\theta_0 = \pm \arccos \frac{g}{R\Omega^2}$  和  $\theta_0 = \pi$ 。当  $\theta_0 = 0$  时,

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_0 = mR^2 \left( \frac{g}{R} - \Omega^2 \right) < 0$$

平衡是不稳定的。当  $\theta_0 = \pm \arccos \frac{g}{R\Omega^2}$  时,

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_{\pm \arccos \frac{g}{R\Omega^2}} = \frac{mR^2}{\Omega^2} \left( \Omega^4 - \frac{g^2}{R^2} \right) > 0$$

平衡是稳定的。当  $\theta_0 = \pi$  时,

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_{\pi} = -mR^2 \left( \frac{g}{R} + \Omega^2 \right) < 0$$

平衡是不稳定的。

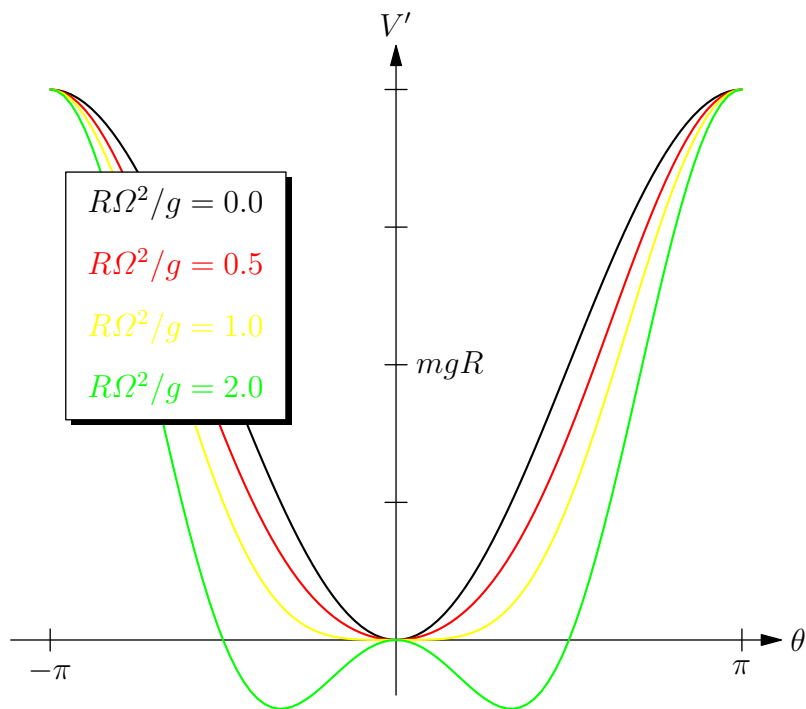


图 2.12: 势能曲线

例 2.6 (电磁场中自由带电粒子的动量、能量及其守恒定律) 设电磁场的标势和矢势分别为

$$\phi = \phi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

则该电磁场中的自由粒子 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} - e\phi \quad (2.43)$$

因此其动量为

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A} \quad (2.44)$$

其中  $m\dot{\mathbf{r}}$  可称为机械动量,  $e\mathbf{A}$  可称为电磁动量。其能量为

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = L_2 - L_0 = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\phi \quad (2.45)$$

其中  $\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$  可称为机械动能,  $e\phi$  可称为电磁势能。

对于稳恒电磁场, 此时标势和矢势与时间无关, 即

$$\phi = \phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

此时 Lagrange 函数不显含时间, 即

$$\dot{H} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

粒子的能量守恒。

例 2.7 (稳恒均匀电磁场中的自由带电粒子) 设空间中存在稳恒、均匀的电磁场  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ , 取磁场方向为  $z$  方向, 则可取

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}B(-ye_x + xe_y) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}, \quad \phi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

此时, 该粒子的 Lagrange 函数可表示为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}e\dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}e\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

根据 Lagrange 方程, 可得稳恒均匀电磁场中的自由带电粒子的运动微分方程为

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + e\mathbf{E}$$

上式右端即为该粒子受到的 Lorentz 力。

## 2.7 时空对称性与守恒量

### 2.7.1 时空对称性

某物理定律或物理量在某变换下形式或量值保持不变, 则称该变换为**对称变换**, 此物理定律或物理量具有该变换下的**对称性** (不变性)。

Lagrange 函数是决定体系力学性质的特征函数, 其变换不变性又称为体系对称性。力学体系在时空变换下的对称性称为**时空对称性**, 包括

- **空间平移对称性**: 体系作任意整体平移, Lagrange 函数不变;
- **空间转动对称性**: 体系作任意整体转动, Lagrange 函数不变;
- **时间平移对称性**: 体系时间作任意平移, Lagrange 函数不变。

### 2.7.2 动量、角动量与能量守恒

#### 2.7.2.1 空间平移对称性与动量守恒

在平移方向上取广义坐标  $q_1$ , 满足

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \mathbf{e}, i = 1, 2, \dots, n$$

固定其它广义坐标, 只改变广义坐标  $q_1$ , 即令

$$\delta q_\alpha = 0, \quad \alpha = 2, 3, \dots, n$$

则有

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \delta q_1 \mathbf{e}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

因此, 广义坐标  $q_1$  的变化将导致体系的整体平移。体系的 Lagrange 函数在平移变换下不变, 因此 Lagrange 函数不显含  $q_1$ , 即

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

由广义动量定理, 可有

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

又考虑到

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \end{aligned}$$

由此，体系沿  $\mathbf{e}$  方向平移对称，则体系总动量的  $\mathbf{e}$  分量守恒。

空间平移对称性又称空间均匀性，即绝对位置不可测。

### 2.7.2.2 空间转动对称性与角动量守恒

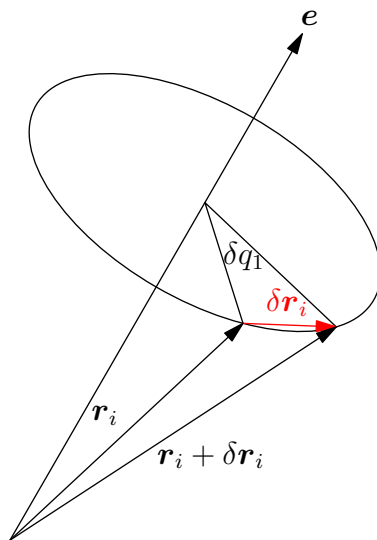


图 2.13: 空间转动

在转动方向上取广义坐标  $q_1$ ，满足

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \mathbf{e} \times \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

固定其它广义坐标，只改变广义坐标  $q_1$ ，即令

$$\delta q_\alpha = 0, \quad \alpha = 2, 3, \dots, n$$

则有

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \delta q_1 \mathbf{e} \times \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

因此，广义坐标  $q_1$  的变化将导致体系的整体转动。体系的 Lagrange 函数在转动变换下不变，因此 Lagrange 函数不显含  $q_1$ ，即

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

由广义动量定理，可有

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

又考虑到

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{e} \cdot (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{L} \end{aligned}$$

由此, 体系绕  $\mathbf{e}$  整体转动对称, 则体系总角动量的  $\mathbf{e}$  分量守恒。

空间转动对称性又称空间各项同性, 即绝对方向不可测。

### 2.7.2.3 时间平移对称性与能量守恒

体系的 Lagrange 函数在时间平移变换下不变, 因此 Lagrange 函数不显含  $t$ , 即

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

由广义能量定理有

$$\dot{H} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

由此, 体系时间平移对称, 则体系总能量守恒。

时间平移对称性又称时间均匀性, 即绝对时间不可测。

守恒定律与时空对称性有关, 全部结论适用于整个物理学。循环坐标反映体系的对称性(变换不变性), 可用其共轭动量守恒定律(只含广义速度和广义坐标)取代运动方程(含广义加速度)。对称性使体系的求解简化。

对称性是体系的客观属性, 不依赖于主观描述。广义坐标选取适当, 可使对称性通过循环坐标直观呈现。根据体系的对称性选择广义坐标, 使循环坐标越多越好。

**例 2.8** 自由质点受势场作用, 场源均匀分布在以  $z$  轴为轴线、螺距为  $h$  的无限长圆柱螺旋线上。找出体系的守恒量。

**解** 选取广义坐标  $(\rho, \phi, \zeta)$  满足

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = \zeta + \frac{h\phi}{2\pi} \end{cases}$$

此处,  $\begin{cases} \rho = C_1 \\ \zeta = C_3 \end{cases}$  表示的即为圆柱螺旋线族。此体系具有对称性: 将质点沿任意螺距为  $h$  的螺旋线移动, Lagrange 函数不变, 即  $\phi$  为循环坐标, 因此有

$$\dot{p}_\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

为了了解此处  $p_\phi$  的物理含义, 考虑柱坐标系  $(\rho, \psi, z)$ , 则广义坐标与柱坐标之间的关系为

$$\begin{cases} \rho = \rho \\ \psi = \phi \\ z = \zeta + \frac{h\phi}{2\pi} \end{cases}$$



如果取柱坐标  $(\rho, \psi, z)$  作为广义坐标, 其与广义坐标共轭的广义动量物理意义比较清晰, 即有

$$p_\psi = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\psi}} = L_z, \quad p_z = \frac{\partial L'}{\partial \dot{z}}$$

此处  $L_z$  即为质点对  $z$  轴的角动量,  $p_z$  为沿  $z$  方向的动量。由此可有

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{z}} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{\phi}} = p_\psi + \frac{h}{2\pi} p_z = L_z + \frac{h}{2\pi} p_z$$

由此可得, 此体系的守恒量为

$$p_\phi = L_z + \frac{h}{2\pi} p_z$$

## 2.8 位形时空的 Lagrange 方程

### 2.8.1 位形时空

理想完整有势系的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (2.46)$$

是  $s$  个二阶常微分方程构成的常微分方程组, 给定  $2s$  个初始条件, 即

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0$$

可以唯一确定位形空间轨道的参数方程

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$$

此处,  $t$  为参数。另选参数  $\tau$ , 将时间看作第  $s+1$  个广义坐标  $q_{s+1}$ , 则  $-H$  即为与  $q_{s+1}$  共轭的广义动量  $p_{s+1} = p_t = -H$ 。由此广义动量定理和广义能量定理将统一为

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, s+1$$

由广义坐标与时间张成的  $s+1$  维抽象空间称为**位形时空**。位形时空中的点称为**世界点**, 代表体系的物理事件。世界点在位形时空运动而描出的轨道称为**世界线**, 反映体系物理过程的演化史。

### 2.8.2 推广的 Lagrange 方程

引入新的参数  $\tau$ , 则有

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}(t(\tau)) \\ t = t(\tau) \end{cases}$$

得到的对应 Lagrange 函数的状态函数可以表示为

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t'; \tau)$$

由此可有关系<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} t' &= \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{d}{d\tau} &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} = t' \frac{d}{dt} \\ \mathbf{q}' &= \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = t' \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

考虑

$$dL = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{\alpha=1}^s \dot{p}_{\alpha} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} d\dot{q}_{\alpha} - \dot{H} dt$$

可有

$$t' dL = \sum_{\alpha=1}^s p'_{\alpha} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} t' d\dot{q}_{\alpha} - H' dt$$

所以

$$\begin{aligned} d(Lt') &= Ldt' + t'dL = \sum_{\alpha=1}^s p'_{\alpha} dq_{\alpha} - H' dt + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} t' (d\dot{q}'_{\alpha} - \dot{q}_{\alpha} dt') + Ldt' \\ &= \sum_{\alpha=1}^s p'_{\alpha} dq_{\alpha} + p'_t dt + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} t' d\dot{q}'_{\alpha} + p_t dt' \end{aligned} \quad (2.47)$$

由此, 定义

$$\Lambda(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t'; \tau) = L\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{q}'}{t'}, t\right) t'$$

求其全微分, 可有

$$d\Lambda = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} dt + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}} dq'_{\alpha} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} dt' + \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau} d\tau$$

将上式与(2.47)对比, 可得

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}}, & p_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} \\ p'_{\alpha} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha}}, & p'_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau} = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

消去式(2.48)中的广义动量, 即可得到位形时空的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s+1 \quad (2.49)$$

由此,  $\mathbf{q}, t$  统一为地位平等的坐标,  $\mathbf{p}, H$  统一为地位平等的动量, 时间均匀性与空间均匀性得到统一。

这个过程对经典力学过渡为相对论力学具有启发性, 有助于建立满足相对性原理 (Lorentz 变换不变性或对称性) 的理论体系。时空作为统一体同时变换, 时间不再具有绝对参数地位, 需另选 Lorentz 变换下的不变量作为参数。此时  $\Lambda$  在 Lorentz 变换下不变即能保证体系满足相对性原理 (惯性系变换对称性)。

<sup>①</sup> 此处, 用  $t'$  来表示  $t$  对  $\tau$  的导数, 今后不再特别说明。

## 第三章 Hamilton 动力学

理想完整有势体系的 Lagrange 函数可以表示为

$$L = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

则有理想完整有势系的 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

利用体系的对称性可以简化求解上述常微分方程组。

Lagrange 力学有如下不足：

1. 运动学：速度  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$  作为坐标衍生变量出现；
2. 动力学：坐标、速度的初值  $\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)$  独立，不能体现坐标、速度在因果律上的独立性；
3. 在位形空间描述运动，方程为二阶常微分方程组，同一点可能代表体系的不同状态（速度不同的状态），导致运动轨道的不同。

1835 年，Hamilton 发表了两篇著名论文，将 Lagrange 方程化为更对称的一阶方程组，创立了 Hamilton 动力学，为量子力学、统计物理、量子场论奠定理论基础。

### 3.1 正则方程

广义动量和广义动量定理可以表示为

$$\begin{cases} p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \end{cases}$$

由此定义的广义动量具有

$$p_\alpha = p_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}, t)$$

的形式，则有

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

由此，可作力学状态参量变换  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{q}, \mathbf{p}$ ，找到新的特征函数，通过对  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  的偏导数生成力学方程。

### 3.1.1 Legendre 变换

设有函数  $f(x, y)$ , 考虑

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + v dy \\ &= d(ux) - x du + v dy \end{aligned}$$

此处

$$\begin{cases} u = \frac{\partial f}{\partial x} = u(x, y) \\ v = \frac{\partial f}{\partial y} = v(x, y) \end{cases}$$

由此定义以  $u, y$  为自变量的新函数

$$g = ux - f = ux(u, y) - f(x(u, y), y) = g(u, y) \quad (3.1)$$

则有

$$dg = x du - v dy = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

此时有

$$\begin{cases} x = \frac{\partial g}{\partial u} = x(u, y) \\ v = -\frac{\partial g}{\partial y} = \bar{v}(u, y) \end{cases} \quad (3.2)$$

式(3.2)给出的变换称为 Legendre 变换。

### 3.1.2 Hamilton 正则方程

Lagrange 函数具有形式

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

考虑做 Legendre 变换

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} d\dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \dot{p}_{\alpha} dq_{\alpha} - \dot{H} dt \\ &= d\left(\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}\right) - \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \dot{p}_{\alpha} dq_{\alpha} - \dot{H} dt \end{aligned}$$

由此可有

$$H = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (3.3)$$

即

$$H = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \dot{p}_{\alpha} dq_{\alpha} + \dot{H} dt$$

由此可得

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (3.4)$$

以及

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.5)$$

式(3.4)称为 Hamilton 正则方程,  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  称为正则变量。函数  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  称为 Hamilton 函数, 其为以正则变量表示的广义能量。

由正则变量张成了一个  $2s$  维空间, 称为相空间。相空间中的点称为相点, 代表体系的力学状态。相点在相空间运动而描述的轨道称为相轨道, 反映了体系状态的演化。

正则方程是由  $2s$  个一阶常微分方程构成的常微分方程组, 决定了相点的速度。给定正则变量的  $2s$  个初始值, 可以唯一确定正则变量的时间演化关系。

**例 3.1 (一维谐振子)** 写出一维谐振子的正则方程和相空间轨迹。

**解** 一维谐振子的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

考虑  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$ , 则有

$$\dot{q} = \frac{p}{m}$$

所以 Hamilton 函数为

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

正则方程为

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \end{cases}$$

消去广义动量  $p$  即可得到系统的动力学方程

$$m\ddot{q} + kq = 0$$

由于

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

所以  $H = E$ (常数), 相空间轨迹即为

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/k} = 1$$

是一个椭圆。

**例 3.2 (电磁场中带电粒子的 Hamilton 函数)** 求电磁场中带电粒子的 Hamilton 函数。

**解** 电磁场中带电粒子的 Lagrange 函数为

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} - e\phi(\mathbf{r}, t)$$

则有

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}$$

所以

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p} - e\mathbf{A}}{m}$$

由此可得 Hamilton 函数

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi$$

### 3.1.3 守恒定律

根据正则方程, 如果 Hamilton 函数中不显含坐标  $q_\alpha$ , 则有

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0$$

即有与该坐标共轭的动量  $p_\alpha$  守恒。如果 Hamilton 函数中不显含时间  $t$ , 则有

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

即有广义能量守恒。

在 Hamilton 力学中, 体系的对称性表现为  $H$  的变换不变性。

### 3.1.4 正则方程的矩阵形式

记

$$\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \\ p_1 \\ \vdots \\ p_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_s} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_s} \end{pmatrix}$$

则正则方程可以表示为

$$\dot{\xi} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad (3.6)$$

式(3.6)称为正则方程的矩阵形式或正则方程的辛 (symplectic) 形式。

可通过直接计算的方式验证矩阵  $\mathbf{J}$  满足如下性质：

$$\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}_{2s}, \quad \mathbf{J}^T = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}, \quad \det \mathbf{J} = 1 \quad (3.7)$$

## 3.2 泛函与变分

### 3.2.1 泛函

依赖于函数关系的变量，即函数之函数，称为**泛函**，一般记作  $J = J[y(x)]$ 。常见的泛函一般具有形式

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

### 3.2.2 变分

自变函数发生无限小变动后的新函数与原函数之差，称为**自变函数的变分**，即

$$\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$$

当  $y(x)$  可微时，总是假定  $\delta y(x)$  也是可微的。考虑自变函数导数的变分，即

$$\delta \frac{dy}{dx}(x) = \frac{d\tilde{y}}{dx}(x) - \frac{dy}{dx}(x) = \frac{d}{dx} [\tilde{y}(x) - y(x)] = \frac{d}{dx} \delta y(x)$$

因此，对任意函数  $f$  均有

$$\delta \frac{d}{dx} f = \frac{d}{dx} \delta f \quad (3.8)$$

下面考虑函数的变分，首先有

$$\Delta F = F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')$$

其中一级变动称为函数的变分，即

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'$$

现在考虑泛函的变分，首先有

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)]$$

其中一级变动即为泛函的变分，即

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_a^b \delta F(x, y, y') dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \\ &= \int_a^b \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \right] dx \\ &= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \end{aligned}$$

### 3.2.3 变分问题（泛函极值问题）

变分问题始于最速降线问题（1696, J. Bernoulli）：给定重力场中两端点，求从一点到另一点用时最短的光滑轨道。即求自变函数  $y(x)$ ，使泛函  $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx$  在边界条件  $y(a) = y_A, y(b) = y_B$  下取得极值。

可以证明，泛函极值的必要条件即为

$$\delta J = 0 \quad (3.9)$$

### 3.2.4 Euler-Lagrange 方程

如果给定边界条件，则有

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0 \quad (3.10)$$

所以有变分

$$\delta J = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right|_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

由于  $\delta y$  是任意的，可有

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (3.11)$$

式(3.11)称为 Euler-Lagrange 方程<sup>①</sup>。

下面考虑

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} y' - F \right) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) - \left( \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \\ &= \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) y' - \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned}$$

如果函数  $F$  不显含  $x$ ，则 Euler-Lagrange 方程有初积分

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = C \quad (3.12)$$

**例 3.3 (最速降线问题)** 给定重力场中两端点，求从一点到另一点用时最短的光滑轨道。

**解** 所求的时间可以表示为

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx$$

即此时

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

由于  $F$  不显含  $x$ ，利用 Euler-Lagrange 方程的初积分

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = -\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{2C_1}}$$

<sup>①</sup> 可以看到，Euler-Lagrange 方程与理想完整有势系的 Lagrange 方程(2.20)具有完全相同的形式。因此可以想见，理想完整有势系的 Lagrange 方程也是某种变分原理（即 Hamilton 原理）的结果。



所以有

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2C_1 - y}{y}}$$

做换元  $y = C_1(1 - \cos \theta)$ , 可得

$$\begin{cases} x = C_1(\theta - \sin \theta) + C_2 \\ y = C_1(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

这是一条倒置的旋轮线（摆线），如图3.1所示，其中的常数  $C_1, C_2$  由边界条件决定。

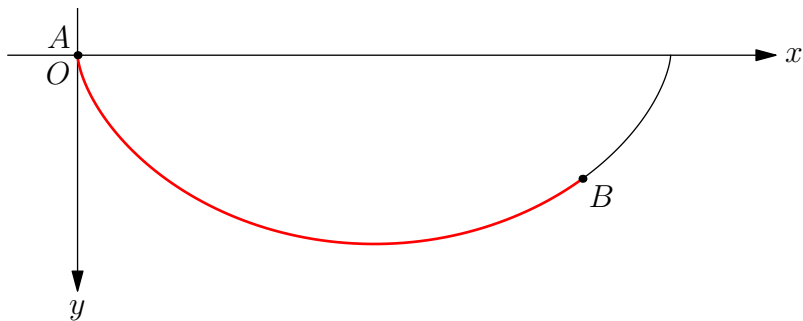


图 3.1: 最速降线

例 3.4 (球面短程线（测地线）) 求球面上连接任意两点之间的最短曲线。

解 在球面上取球面坐标，则球面上的曲线可以表示为

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \theta(\phi) \end{cases}$$

根据球坐标系的距离元素表达式可得球面上曲线的弧长元素为

$$ds = R\sqrt{(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2} = R\sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta} d\phi$$

所以，球面上曲线的弧长为

$$s = R \int_{\phi_A}^{\phi_B} \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta} d\phi$$

即此时

$$F(\phi, \theta, \theta') = \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta}$$

由于  $F$  不显含  $\phi$ ，利用 Euler-Lagrange 方程的初积分

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} \theta' - F = -\frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta}} = -\cos \theta_0 (\text{常数})$$

由此可得

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \sin^2 \theta \sqrt{\tan^2 \theta_0 - \cot^2 \theta}$$

解得

$$\phi - \arccos(-\cot \theta_0 \cot \theta) = \phi_0 (\text{常数}) \quad (3.13)$$

整理可得

$$\cos \phi \cos \phi_0 + \sin \phi \sin \phi_0 + \cot \theta \cot \theta_0 = 0$$

在上式两端乘  $R \sin \theta \sin \theta_0$ ，并考虑到球坐标系的坐标转换关系，可得

$$x \sin \theta_0 \cos \phi_0 + y \sin \theta_0 \sin \phi_0 + z \cos \theta_0 = 0$$

此处，记  $\mathbf{e}_n = \sin \theta_0 \cos \phi_0 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_0 \sin \phi_0 \mathbf{e}_2 + \cos \theta_0 \mathbf{e}_3$ ，则上式可记作

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n = 0$$

边界条件为

$$\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{e}_n = 0$$

由此，短程线即为  $OAB$  平面与球面的交线之间较短的弧，即大圆弧。此处  $\mathbf{e}_n$  即为  $OAB$  平面的法向量。

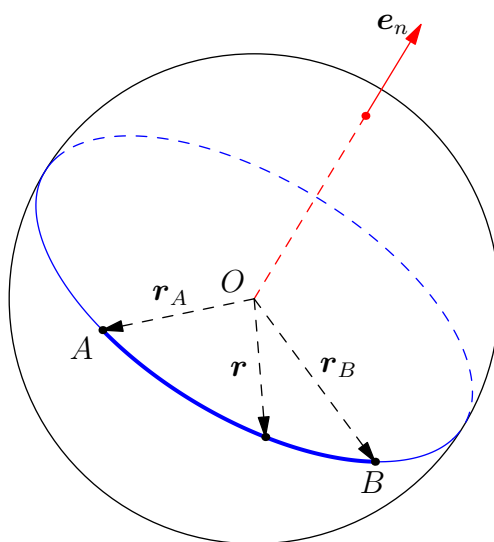


图 3.2: 球面短程线示意图

### 3.2.5 多元泛函极值问题

考虑多元泛函

$$J[y_1(x), y_2(x), \dots, y_s(x)] = \int_a^b F(x; y_1, y_2, \dots, y_s; y'_1, y'_2, \dots, y'_s) dx$$

在固定边界条件

$$\delta y_\alpha(a) = \delta y_\beta(b) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

下, 泛函的变分为

$$\begin{aligned}
 \delta J &= \delta \int_a^b F(x; y_1, y_2, \dots, y_s; y'_1, y'_2, \dots, y'_s) dx \\
 &= \int_a^b \delta F(x; y_1, y_2, \dots, y_s; y'_1, y'_2, \dots, y'_s) dx \\
 &= \int_a^b \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} \delta y_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \delta y'_\alpha \right) dx \\
 &= \int_a^b \left[ \frac{d}{dx} \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \delta y_\alpha \right) + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \right) \delta y_\alpha \right] dx \\
 &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \delta y_\alpha \Big|_a^b + \int_a^b \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \right) \delta y_\alpha dx \\
 &= \int_a^b \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \right) \delta y_\alpha dx = 0
 \end{aligned}$$

由于  $\delta y_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, s$ ) 之间相互独立, 可得

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (3.14)$$

当  $F$  不显含  $x$  时, 式(3.14)同样有初积分

$$\sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} y'_\alpha - F = C$$

## 3.3 力学变分原理

d'Alembert 原理的形式为

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

式中,  $\delta \mathbf{r}_i$  为  $t$  时刻实际运动所达位形处的虚位移, 即由约束限定的位矢等时变分, 因而与实际运动  $\mathbf{r}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  相对, 称

$$\tilde{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{r}_i(t) + \delta \mathbf{r}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

为虚拟运动。力学变分原理指出实际运动与近邻虚拟运动相比所具有的极值性。

### 3.3.1 Hamilton 原理

考虑 d'Alembert 原理

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i - m_i \frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i) - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \\
 &= \delta T + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0
 \end{aligned}$$

将上式对时间积分, 可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) dt = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (3.15)$$

式(3.15)表示的关系为 d'Alambert 原理的积分形式。对于有势系, 即有广义势  $U = U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ , 则有

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) - \delta U \end{aligned}$$

由此可有

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (3.16)$$

式(3.16)表示的关系为有势系 d'Alambert 原理的积分形式。

如果采用固定边界条件, 即

$$\mathbf{r}_i(t_1) = \mathbf{r}_{i1}, \mathbf{r}_i(t_2) = \mathbf{r}_{i2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

则有

$$\delta \mathbf{r}_i(t_1) = \delta \mathbf{r}_i(t_2) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

因此, 对于有势系满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

由此, 可定义 Hamilton 作用量

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (3.17)$$

则对于有势系有

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (3.18)$$

式(3.18)表示的关系称为 Hamilton 原理<sup>①</sup>。即与始末时间和位形均相同的虚拟运动相比, 有势系实际运动使体系的作用量取驻值。对于一般体系, 则有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) dt = 0 \quad (3.19)$$

称为一般体系的 Hamilton 原理。对于完整系, 可有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \delta q_{\alpha}$$

故有一般完整系的 Hamilton 原理

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T + \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} \right) dt = 0 \quad (3.20)$$

Hamilton 原理是积分变分原理, 与此相对应的 d'Alambert 原理是微分变分原理。变分原理具有如下特点:

<sup>①</sup> 有些文献中称为最小作用量原理。

1. 不涉及具体坐标选取, 形式统一;
2. 作用量是标量, 形式简单, 高度概括;
3. 易于推广至无限自由度体系(场)和非力学体系。

### 3.3.2 位形空间与 Lagrange 方程

对于完整系, 可取广义坐标  $q_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, s$  通过广义坐标变换

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

使得完整约束自动满足。完整有势系下的 Hamilton 作用量可以表示为

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (3.21)$$

在固定边界条件  $\delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = 0$  下, 根据 Hamilton 原理以及 Euler-Lagrange 方程, 可有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (3.22)$$

Lagrange 函数  $L$  具有规范不定性, 即作定域规范变换

$$\tilde{L} = L + \frac{df}{dt}(\mathbf{q}, t) \quad (3.23)$$

可有

$$\delta \tilde{S} = \delta S + \delta f(\mathbf{q}, t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \delta S + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} = \delta S$$

即在定域规范变换下, Hamilton 作用量的变分不变, 进而体系的 Lagrange 方程也不变。因此规范变换下, 体系的运动规律不变, 此即为体系的规范不变性。

$L$  的不定性来自广义势的规范不定性, 即  $\tilde{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{df}{dt}(\mathbf{q}, t)$  与  $U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  表示的是同一个势场。下面证明这一点, 首先考虑  $f = f(\mathbf{q}, t)$ , 则有

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{q}, t) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

以及

$$df = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

在上式两端求对时间  $t$  的导数, 可有

$$\begin{aligned} d\dot{f} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

再考虑函数  $\dot{f} = \dot{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , 可有

$$d\dot{f} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \dot{f}}{\partial t} dt \quad (3.25)$$

对比式(3.24)和(3.25)可得推广经典 Lagrange 关系

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (3.26)$$

据此考虑广义力

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\alpha &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_\alpha} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \end{aligned}$$

在规范变换下体系的力场不变, 故势  $\tilde{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{df}{dt}(\mathbf{q}, t)$  与  $U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  表示的是同一个势场。

在规范变换下, 广义动量为

$$\tilde{p}_\alpha = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$$

广义能量为

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - \tilde{L} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - \frac{df}{dt} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha - \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = H - \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

即, 与坐标共轭的广义动量, 与时间共轭的广义能量均具有不定性, 取决于 Lagrange 函数的规范选择。

对于一般完整系的 Hamilton 原理

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T + \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha \right) dt = 0$$

考虑到  $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , 有

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T + \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha \right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) - \sum_{\alpha=1}^s \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha \right] dt \\ &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + Q_\alpha \right) \delta q_\alpha dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + Q_\alpha \right) \delta q_\alpha dt \end{aligned}$$

因为  $\delta q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, s$ ) 相互独立, 所以可得一般完整系的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (3.27)$$

### 3.3.3 相空间与 Hamilton 方程

在位形空间, 考虑 Hamilton 函数的定义, 有

$$L = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - H = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

根据 Hamilton 原理, 可有

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s (\dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} + p_{\alpha} \delta \dot{q}_{\alpha}) - \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \delta p_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} \right) \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right] dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \delta q_{\alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right] dt \end{aligned}$$

由于  $S = S[\mathbf{q}(t)]$ , 独立变分只有  $\delta q_{\alpha}$ , 动量由坐标定义, 其变分不独立。考虑

$$H = \sum_{\beta=1}^s p_{\beta} \dot{q}_{\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)$$

所以有

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} = \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^s p_{\beta} \frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} - \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\beta}} \frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} = \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^s \left( p_{\beta} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\beta}} \right) \frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial p_{\alpha}}$$

考虑到动量的定义  $p_{\beta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\beta}}$ , 即有

$$\dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}$$

因此有

$$\sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} = 0$$

故有

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} dt = 0$$

由此可有

$$\dot{p}_{\alpha} = - \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}$$

即, 在位形空间中考察 Hamilton 方程一半是动量定义, 另一半是运动方程。

上节已经指出, 与坐标共轭的动量具有规范不定性, 据此, 可以将动量视为与坐标地位平等、完全独立的正则变量。由此在相空间中即可将 Hamilton 作用量写作

$$S[\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right] dt \quad (3.28)$$

在固定边界条件下, 应用 Hamilton 原理, 有

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \delta p_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \delta \dot{q}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \right) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \delta q_\alpha \right) - \sum_{\alpha=1}^s \dot{p}_\alpha \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \delta p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \right] dt \\
 &= \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] dt
 \end{aligned}$$

据此即可得到 Hamilton 正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad (3.29)$$

将 Hamilton 原理视为相空间力学变分原理, 则 Hamilton 方程全体均为运动方程。坐标和动量在满足相空间 Hamilton 原理的前提下可以独立变换, 扩大了变换的自由度。

### 3.3.4 位形时空与推广的 Lagrange 方程

作参数变换  $t = t(\tau)$ , 则有推广的 Lagrange 函数为

$$\Lambda(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t') = L\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{q}'}{t'}, t\right) t'$$

此时 Hamilton 作用量变换为

$$S[\mathbf{q}(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{q}'}{t'}, t\right) t' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Lambda(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t') d\tau \quad (3.30)$$

在固定边界条件下, 即

$$\delta \mathbf{q}(\tau_1) = \delta \mathbf{q}(\tau_2) = 0, \quad \delta t(\tau) = 0$$

可有

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \delta q'_\alpha \right) d\tau \\
 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \frac{d}{d\tau} \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] d\tau \\
 &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) \delta q_\alpha d\tau \\
 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) \delta q_\alpha d\tau = 0
 \end{aligned}$$

由此可得以  $\tau$  为参数的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (3.31)$$



以上讨论限于位形空间，仅将参数  $t$  通过确定的对应关系变换成新参数  $\tau$ 。

在位形时空中， $\tau$  为参数， $t$  视为变量，记作  $q_{s+1}$ 。即此时  $\delta\tau = 0$ ，但  $\delta t(\tau) \neq 0$ ，Hamilton 作用量为

$$S[\mathbf{q}(\tau), t(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Lambda(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t') d\tau$$

同样在固定边界条件下

$$\delta\mathbf{q}(\tau_1) = \delta\mathbf{q}(\tau_2) = 0, \quad \delta t(\tau_1) = \delta t(\tau_2) = 0$$

考虑 Hamilton 原理，即

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{\alpha=1}^{s+1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) \delta q_\alpha d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) \delta q_\alpha d\tau = 0 \end{aligned}$$

由此可以得到位形时空（ $s+1$  维空间）中的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s+1 \quad (3.32)$$

### 3.3.5 其它形式的力学变分原理

为了导出其他形式的力学变分原理，首先考虑在位形时空中，Hamilton 原理可以表示为

$$\delta S = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) \delta q_\alpha d\tau$$

其他形式的力学变分原理应同样满足系统的 Lagrange 方程，因此如果此处不附加边界条件，将 Lagrange 方程代入，可得力学变分原理的一种形式如下

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta \Lambda d\tau = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = \sum_{\alpha=1}^{s+1} p_\alpha \delta q_\alpha \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}$$

或者

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \delta \Lambda - \frac{d}{d\tau} \sum_{\alpha=1}^{s+1} p_\alpha \delta q_\alpha \right) d\tau = 0 \quad (3.33)$$

若实际运动与虚拟运动同时同位形出发且同时同位形到达，即

$$\delta q_\alpha(\tau_1) = \delta q_\alpha(\tau_2) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s+1$$

即得到位形时空（ $s+1$  维）的 Hamilton 原理

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta \Lambda d\tau = 0 \quad (3.34)$$

若实际运动与虚拟运动同位形出发且同位形到达，但出发、到达时间不同，即

$$\delta q_\alpha(\tau_1) = \delta q_\alpha(\tau_2) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad \delta t(\tau) \neq 0$$

即得到位形空间（ $s$  维）的 Hamilton 原理

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \delta \Lambda + \frac{d}{d\tau} (H \delta t) \right] d\tau = 0 \quad (3.35)$$

现在, 考虑满足时间平移对称性的体系, 此时有

$$H' = -p'_t = -\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0$$

此时体系广义能量守恒<sup>①</sup>。可比较具有相同能量、相同始末位形的实际运动与虚拟运动, 此时变分相应地称为**等能变分**。等能变分  $\delta$  满足

$$\delta H = 0, \quad \delta t \neq 0, \quad \delta \tau = 0$$

等能条件限制了位形轨道每一点的速度, 使得实际运动与虚拟运动不能同时出发与到达。此时有

$$\frac{d}{d\tau}(H\delta t) = H'\delta t + H\delta t' = \delta(Ht) - t'\delta H = \delta(Ht')$$

由此, 式(3.34)可化为

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta(\Lambda + Ht')d\tau = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\Lambda + Ht')d\tau = 0$$

定义

$$W[\mathbf{q}(\tau), t(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (L + H)t'd\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha}q'_{\alpha}d\tau$$

称为 Lagrange 作用量<sup>②</sup>, 相应的式(3.34)化为

$$\delta W[\mathbf{q}(\tau), t(\tau)] = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha}q'_{\alpha}d\tau = 0$$

称为**位形时空的 Lagrange 原理**。在 Lagrange 作用量的表达式中作变量代换  $t = t(\tau)$  消去参数  $\tau$ , 可有

$$W[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} (L + H)dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha}\dot{q}_{\alpha}dt \quad (3.36)$$

此时可有**位形空间的 Lagrange 原理**

$$\Delta W[\mathbf{q}(t)] = \Delta \int_{t_1}^{t_2} (L + H)dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha}\dot{q}_{\alpha}dt = 0 \quad (3.37)$$

此处,  $\Delta$  为位形空间中的等时变分。由于位形空间与位形时空的参数不同, 因此他们的变分规则不同, 此处引入记号  $\Delta$  以示区别。在位形空间中, 取任意函数  $f(t)$ , 则等能变分满足

$$\begin{aligned} \Delta f &= \delta f(t) + \dot{f}\Delta t \\ \frac{d}{dt}\Delta f &= \delta \dot{f}(t) + \ddot{f}\Delta t + \dot{f}\frac{d\Delta t}{dt} = \Delta \dot{f} + \dot{f}\frac{d\Delta t}{dt} \\ \Delta \int_{t_1}^{t_2} f dt &= \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} f t' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( t' \delta f + f \frac{d\delta t}{d\tau} \right) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \left( \Delta f + f \frac{d\Delta t}{dt} \right) dt \end{aligned}$$

Lagrange 原理(3.37)可改写为

$$\Delta W = \Delta \int_{q_1}^{q_2} \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} = 0 \quad (3.38)$$

式(3.38)称为 Lagrange 原理的 Maupertuis (莫培督) 形式。

<sup>①</sup> 大部分的力学体系都能满足此条件。

<sup>②</sup> 有些文献上称为简约作用量。

例 3.5 (由位形空间的 Lagrange 原理导出 Lagrange 方程) 由位形空间的 Lagrange 原理, 即

$$\Delta W = \Delta \int_{t_1}^{t_2} (L + H) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \Delta(L + H) + (L + H) \frac{d\Delta t}{dt} \right] dt = 0$$

现在来考察上面积分中的各项, 首先根据等能变分的定义, 有  $\Delta H = 0$ 。考虑到体系的能量守恒, 即有

$$\dot{H} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

由此可有

$$\begin{aligned} \Delta L + (L + H) \frac{d\Delta t}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \Delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \Delta \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \frac{d\Delta t}{dt} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \Delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left( \frac{d\Delta q_{\alpha}}{dt} - \dot{q}_{\alpha} \frac{d\Delta t}{dt} \right) + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \frac{d\Delta t}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \Delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \Delta q_{\alpha} \end{aligned}$$

综上, 可得

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \Delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \Delta q_{\alpha} \right] dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \Delta q_{\alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \Delta q_{\alpha} dt \end{aligned}$$

对始末位形可有

$$\Delta \mathbf{q}(t_1) = \Delta \mathbf{q}(t_2) = 0$$

因此, 有

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \Delta q_{\alpha} dt = 0$$

根据  $\Delta q_{\alpha}$  的独立性, 即可得到 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

若体系的约束为完整稳定约束, 根据节 2.6.3 的讨论, 此时有

$$L = T - V = T_2 - V$$

$$H = L_2 - L_0 = T_2 + V$$

其中

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}, \quad M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\beta}}$$

此时 Lagrange 原理为

$$\Delta W = \Delta \int_{t_1}^{t_2} (L + H) dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} dt = 0$$

定义位形空间线元

$$ds^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \frac{1}{M} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta} dq_{\alpha} dq_{\beta}$$

其中  $M = \sum_{i=1}^n m_i$ , 此时动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2}M \left( \frac{ds}{dt} \right)^2$$

此处,  $\frac{ds}{dt}$  即为体系位形代表点沿位形轨道运动的速度, 方向即为轨道的切线方向。再考虑到体系的能量守恒, 将总能量记作  $E$ , 则有

$$2Tdt = \sqrt{2MT}ds = \sqrt{2M[E - V(\mathbf{r})]}ds$$

此时, Lagrange 原理形式为

$$\Delta W = \Delta \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2M[E - V(\mathbf{r})]}ds = 0 \quad (3.39)$$

式(3.39)称为 Lagrange 原理的 Jacobi 形式。此原理不涉及时间, 它从所有满足能量守恒的虚拟轨道中选出 Lagrange 作用量取极值的实际轨道。

## 3.4 Lagrange 乘子法

对于完整体系, 运动方程中不含约束力。因此对于不要求解约束力的问题, 可直接求解运动。如何求解完整体系中的约束力?

### 3.4.1 Lagrange 乘子法

多元函数在约束下的极值问题, 可以用 Lagrange 乘子法来解决。即已知多元函数

$$J = J(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

求其在约束条件

$$f_j(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m < n$$

下的极值。根据极值条件, 取极值时要求

$$dJ = \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial y_i} dy_i = 0 \quad (3.40)$$

但此时  $dy_i$  之间并不独立, 还需满足

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y_i} dy_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.41)$$

由此, 可引入  $m$  个不定乘子  $\lambda_i$ , 则有

$$d \left( J + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial J}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right) dy_i = 0 \quad (3.42)$$

即有驻点满足的方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ f_j(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, & j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (3.43)$$

据此可以解出极值点  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  和乘子  $\lambda_j$ 。这种方法称为 **Lagrange 乘子法**。

一般地, **Lagrange 乘子法**可按如下操作: 首先定义 **Lagrange 函数**

$$\bar{J}(y_1, y_2, \dots, y_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = J(y_1, y_2, \dots, y_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (3.44)$$

然后按无条件极值的方法求解极值点

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{J}}{\partial y_i} = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial \bar{J}}{\partial \lambda_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (3.45)$$

解此方程组, 即可得到条件极值点  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  (以及  $m$  个 **Lagrange 乘子**)。

### 3.4.2 Lagrange 乘子法求解全部约束力

理想完整有势体系的约束可以表示为

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3.46)$$

**Hamilton 作用量**可以表示为

$$S[\mathbf{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) dt$$

在固定边界条件下, 其变分为

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \right] dt \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i dt = 0 \end{aligned}$$

再考虑到约束条件

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

引入不定乘子  $\lambda_j(t)$  即有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( L + \sum_{j=1}^k \lambda_j(t) f_j \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i dt = 0 \quad (3.47)$$

由此可有

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i}, & i = 1, 2, \dots, n \\ f_j(\mathbf{r}, t) = 0, & j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (3.48)$$

据此可以解出系统的运动  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ , 以及不定乘子  $\lambda_j = \lambda_j(t)$ 。

根据 Lagrange 公式(1.30)可有

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i}$$

再考虑到

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$$

根据 Newton 第二定律, 约束力满足

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

所以有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i &= m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i} \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \end{aligned} \quad (3.49)$$

于是, 记

$$\mathbf{R}_{ij} = \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (3.50)$$

为第  $j$  个约束施于第  $i$  个质点的力, 其方向决定于  $\nabla_i f_j$ , 大小则与  $\lambda_j$  成正比。约束力可以写作

$$\mathbf{R}_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left( - \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j \right)$$

所以, 标量函数

$$W(\mathbf{r}, t) = - \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\mathbf{r}, t) \quad (3.51)$$

可称为约束力势。

于是可将约束力势视作外力的势能加入 Lagrange 函数中, 即

$$\bar{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t; \boldsymbol{\lambda}) = T - U - W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\mathbf{r}, t) \quad (3.52)$$

应用 Hamilton 原理可得

$$\begin{aligned} \delta \bar{S}[\mathbf{r}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)] &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \bar{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j \right] dt \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^s \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ - \sum_{i=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j \right] dt \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{r}_i} = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (3.53)$$

对于一般理想完整体系，可构造

$$\bar{L} = T - W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\mathbf{r}, t) \quad (3.54)$$

由一般完整体系的 Hamilton 原理

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left( \delta \bar{L} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ - \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{r}_i} - \mathbf{F}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ - \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{r}_i} - \mathbf{F}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j \right] dt \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{F}_i, & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (3.55)$$

### 3.4.3 Lagrange 乘子法求解部分约束力

设有完整约束

$$\begin{cases} f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; t) = 0, & j = 1, 2, \dots, l \\ f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; t) = 0, & j = l+1, l+2, \dots, k \end{cases}$$

求前  $l$  个约束的约束力，可以除去约束中的前  $l$  个，根据后  $k-l$  个选择广义坐标  $q_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, r = 3n - k + l$ 。广义坐标使得后面  $k-l$  个约束自动满足，余下前  $l$  个约束方程变为

$$f_j(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), t) = \bar{f}_j(\mathbf{q}, t), \quad j = 1, 2, \dots, l$$

即

$$\delta \bar{f}_j = \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0$$

根据 Hamilton 原理，有

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt = 0 \end{aligned}$$

此处  $q_\alpha$  不相互独立，因而不能通过上式直接得出系统方程。引入不定乘子  $\lambda_j(t)$  可有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( L + \sum_{j=1}^l \lambda_j(t) \bar{f}_j \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^r \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt = 0$$

由此可得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha}, & \alpha = 1, 2, \dots, r \\ \bar{f}_j(\mathbf{q}, t) = 0, & j = 1, 2, \dots, l \end{cases} \quad (3.56)$$

同样可以通过 Newton 第二定律得到广义约束力的表达式为

$$R_\alpha = \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha}$$

则有

$$R_{\alpha j} = \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha} \quad (3.57)$$

为第  $j$  个约束条件对应约束力的第  $\alpha$  个广义力分量。改写约束力为

$$R_\alpha = \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left( - \sum_{j=1}^l \lambda_j \bar{f}_j \right)$$

故标量函数

$$W(\mathbf{q}, t) = - \sum_{j=1}^l \lambda_j \bar{f}_j(\mathbf{q}, t) \quad (3.58)$$

称为约束力势。

此时也可以将约束力势当作外力的势能加入 Lagrange 函数中, 即

$$\bar{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t; \boldsymbol{\lambda}) = T - U - W = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{j=1}^l \lambda_j \bar{f}_j(\mathbf{q}, t)$$

于是, 根据 Hamilton 原理, 可有

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha + \sum_{j=1}^l \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ - \sum_{\alpha=1}^r \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha + \sum_{j=1}^l \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} \delta \lambda_j \right] dt = 0 \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\alpha} = 0, & \alpha = 1, 2, \dots, r \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, l \end{cases} \quad (3.59)$$

例 3.6 质量为  $m$  的质点从半径为  $R$  的光滑半球面顶端零初速滑下, 求脱离球面时的位置。

解 本例约束为可解约束  $r - R \geq 0$ 。未解时约束为  $r - R = 0$ , 约束力为  $\mathbf{N}$ , 约束解除的条件为  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ 。

除去约束, 选择广义坐标为  $r, \theta$ , 则 Lagrange 函数为

$$\bar{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta + \lambda(r - R)$$



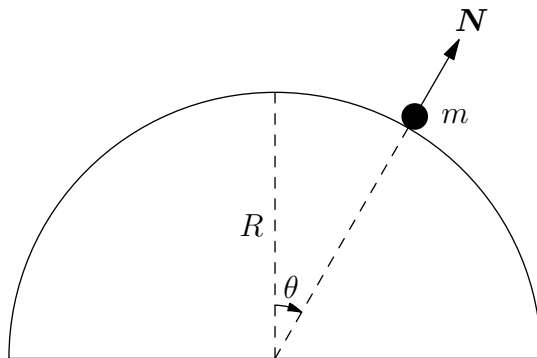


图 3.3: 例 3.6

则有系统方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial r} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + mg \cos \theta - \lambda = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mgr \sin \theta = 0 \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda} = r - R = 0 \end{cases}$$

由第三式可得  $r = R$ ，再由前两式消去  $r$ ，可得

$$\begin{cases} mR\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda = 0 \\ mR^2\ddot{\theta} - mgR \sin \theta = 0 \end{cases}$$

根据  $\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ ，上面第二式可以化为

$$d \left( \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta \right) = 0$$

根据初始条件  $\dot{\theta}|_{\theta=0} = 0$  可得

$$\frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta = mgR$$

由此可解得

$$\lambda = mg(3 \cos \theta - 2)$$

约束力为

$$\begin{cases} N_r = \lambda \frac{\partial}{\partial r}(r - R) = \lambda \\ N_\theta = \lambda \frac{\partial}{\partial \theta}(r - R) = 0 \end{cases}$$

由此脱离条件为

$$\lambda = mg(3 \cos \theta - 2) = 0$$

即  $\theta = \arccos \frac{2}{3}$  时，此时高度为  $h = R \cos \theta = \frac{2}{3}R$ 。

### 3.4.4 Lagrange 乘子法求解线性非完整体系的运动

设非完整体系有完整约束

$$f_j(\mathbf{r}, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

以及非完整约束

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + A_{j0}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k'$$

引入广义坐标  $q_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, s = 3n - k$  消去完整约束, 即

$$f_j(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), t) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

考虑

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

则非完整约束变换为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + A_{j0}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) + A_{j0}(\mathbf{r}, t) \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \bar{A}_{j\alpha}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha + \bar{A}_{j0}(\mathbf{q}, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k' \end{aligned} \quad (3.60)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{A}_{j\alpha}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji}(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ \bar{A}_{j0}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji}(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + A_{j0}(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), t) \end{cases}$$

式(3.60)所示的非完整约束可以等价的表示为

$$\sum_{\alpha=1}^s \bar{A}_{j\alpha}(\mathbf{q}, t) dq_\alpha + \bar{A}_{j0}(\mathbf{q}, t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k' \quad (3.61)$$

或者

$$\sum_{\alpha=1}^s \bar{A}_{j\alpha}(\mathbf{q}, t) \delta q_\alpha = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k' \quad (3.62)$$

Hamilton 作用量可以表示为

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

同样可以根据 Hamilton 原理得到

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt = 0$$

由于此处  $\delta q_\alpha$  不是互相独立的, 还要满足式(3.62), 由此可引入不定乘子  $\lambda_j$ , 即有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta L + \sum_{j=1}^{k'} \lambda_j \sum_{\alpha=1}^s \bar{A}_{j\alpha} \delta q_\alpha \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_{j=1}^{k'} \lambda_j \bar{A}_{j\alpha} \right) \delta q_\alpha dt = 0$$

由此可有系统方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{j=1}^{k'} \lambda_j \bar{A}_{j\alpha}, & \alpha = 1, 2, \dots, s \\ \sum_{\alpha=1}^s \bar{A}_{j\alpha} \dot{q}_\alpha + \bar{A}_{j0} = 0, & j = 1, 2, \dots, k' \end{cases} \quad (3.63)$$

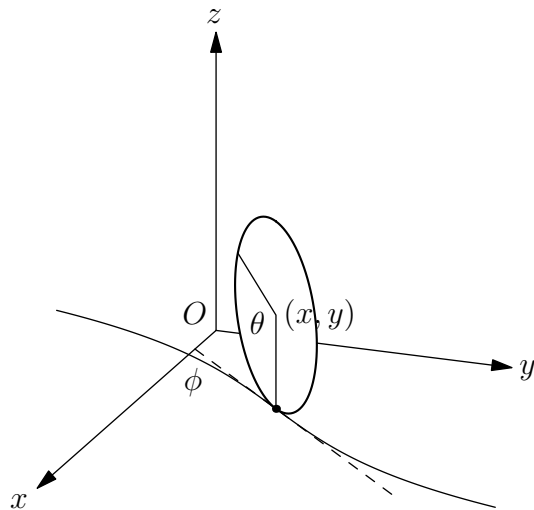


图 3.4: 例 3.7

例 3.7 (直立圆盘在水平面上的纯滚动)

解 此非完整体系有完整约束

$$z - R = 0$$

以及非完整约束

$$\begin{cases} \dot{x} - R\dot{\theta} \cos \phi = 0 \\ \dot{y} - R\dot{\theta} \sin \phi = 0 \end{cases}$$

由此可将广义坐标取为  $x, y, \theta, \phi$ , 体系的 Lagrange 函数为

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\phi}^2$$

考虑到

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= 1, & \bar{A}_{12} &= 0, & \bar{A}_{13} &= -R \cos \phi, & \bar{A}_{14} &= 0 \\ \bar{A}_{21} &= 0, & \bar{A}_{22} &= 1, & \bar{A}_{23} &= -R \sin \phi, & \bar{A}_{24} &= 0 \end{aligned}$$

由此可以写出系统方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda_1 & (3.64a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{y} = \lambda_2 & (3.64b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1\ddot{\theta} = -R(\lambda_1 \cos \phi + \lambda_2 \sin \phi) & (3.64c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2\ddot{\phi} = 0 & (3.64d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} - R\dot{\theta} \cos \phi = 0 & (3.64e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} - R\dot{\theta} \sin \phi = 0 & (3.64f) \end{cases}$$

由式(3.64d)可得

$$\phi = \omega_2 t + \phi_0$$

考虑 式(3.64a)  $\times R \cos \phi$  + 式(3.64b)  $\times R \sin \phi$  + 式(3.64c) 可得

$$mR(\ddot{x} \cos \phi + \ddot{y} \sin \phi) + I_1 \ddot{\theta} = 0 \quad (3.65)$$

再考虑  $\cos \phi \times \frac{d}{dt}$  式(3.64e) +  $\sin \phi \times \frac{d}{dt}$  式(3.64f) 可得

$$\ddot{x} \cos \phi + \ddot{y} \sin \phi - R \ddot{\theta} = 0 \quad (3.66)$$

由式(3.65)和式(3.66)可解得

$$\theta = \omega_1 t + \theta_0$$

于是根据式(3.64e)和式(3.64f)可得

$$\begin{cases} \dot{x} = R\omega_1 \cos(\omega_2 t + \phi_0) \\ \dot{y} = R\omega_1 \sin(\omega_2 t + \phi_0) \end{cases}$$

下面分两种情况讨论圆盘的运动,

1.  $\omega_2 = 0$ , 系统的解为

$$\begin{cases} x = R\omega_1 t \cos \phi_0 + x_0 \\ y = R\omega_1 t \sin \phi_0 + y_0 \\ \theta = \omega_1 t + \theta_0 \\ \phi = \phi_0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (3.67)$$

可见, 圆盘沿直线匀速滚动。运动过程自动保证约束条件, 约束力为零。

2.  $\omega_2 \neq 0$ , 系统的解为

$$\begin{cases} x = \frac{R\omega_1}{\omega_2} \sin(\omega_2 t + \phi_0) - \frac{R\omega_1}{\omega_2} \sin \phi_0 + x_0 \\ y = -\frac{R\omega_1}{\omega_2} \cos(\omega_2 t + \phi_0) + \frac{R\omega_1}{\omega_2} \cos \phi_0 + y_0 \\ \theta = \omega_1 t + \theta_0 \\ \phi = \omega_2 t + \phi_0 \\ \lambda_1 = -R\omega_1 \omega_2 \sin \phi \\ \lambda_2 = R\omega_1 \omega_2 \cos \phi \end{cases} \quad (3.68)$$

可见, 圆盘沿圆周匀速滚动, 纯滚动条件自动保证, 约束力垂直盘面, 提供向心力。

## 3.5 Poisson 括号

### 3.5.1 Poisson 括号的定义

对两个系统状态函数  $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  和  $g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , 定义

$$[f, g] = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \right) = \sum_{\alpha=1}^s \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} & \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \\ \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} & \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} \end{array} \right| = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial(f, g)}{\partial(q_{\alpha}, p_{\alpha})} \quad (3.69)$$

称为 Poisson 括号。

$$[q_{\alpha}, q_{\beta}] = 0, \quad [p_{\alpha}, p_{\beta}] = 0, \quad [q_{\alpha}, p_{\beta}] = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.70)$$

称为基本 Poisson 括号。根据 Poisson 括号的定义, 容易得到

$$[q_{\alpha}, f] = \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}}, \quad [p_{\alpha}, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \quad (3.71)$$

### 3.5.2 Poisson 括号的性质

利用 Poisson 括号的定义和行列式的性质很容易得到 Poisson 括号的以下性质:

1. 反对称性:

$$[f, g] = -[g, f]$$

特别地, 可有  $[f, f] = 0$ ;

2. 线性性:

$$[f, C_1 g + C_2 h] = C_1 [f, g] + C_2 [f, h], \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3.  $[f, gh] = [f, g]h + g[f, h]$ ;

4. Leibniz 性:

$$\frac{\partial}{\partial x} [f, g] = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial x} \right], \quad x \in \{\mathbf{q}, \mathbf{p}, t\}$$

5. Jacobi 恒等式:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

### 3.5.3 力学的 Poisson 括号形式

设有函数  $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , 考虑

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \dot{p}_{\alpha} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right)$$

此处利用了 Hamilton 正则方程, 由此得到

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] \quad (3.72)$$

如果函数  $f$  不显含时间, 即  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , 则有

$$\frac{df}{dt} = [f, H] \quad (3.73)$$

分别将函数  $f$  取为  $q_\alpha$  和  $p_\alpha$  可得正则方程的 Poisson 括号形式

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = [q_\alpha, H] \\ \dot{p}_\alpha = [p_\alpha, H] \end{cases} \quad (3.74)$$

将函数  $f$  取为  $H$  则得到

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.75)$$

如果将  $[f, H]$  记作  $\hat{H}f$ , 此处  $\hat{H}$  称为算子, 它代表一种操作——即求该函数与 Hamilton 函数的 Poisson 括号。如果  $f$  不显含时间, 可有

$$\frac{df}{dt} = [f, H] = \hat{H}f$$

依次可有

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dt^2} &= \frac{d}{dt}[f, H] = [\hat{H}f, H] = \hat{H}(\hat{H}f) = \hat{H}^2 f \\ &\vdots \\ \frac{d^n f}{dt^n} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} \right) = [\hat{H}^{n-1} f, H] = \hat{H}(\hat{H}^{n-1} f) = \hat{H}^n f \end{aligned}$$

如果不考虑收敛的问题, 任何正则变量的函数可以用 Taylor 级数表示为

$$f(q(t), p(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dt^n}(0) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{H}^n f(0) = e^{t\hat{H}} f(0)$$

由此, 可以得到运动的算子形式解。

例 3.8 利用算子形式求解一维谐振子, 其 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

解 根据基本 Poisson 括号

$$[q, q] = 0, \quad [p, p] = 0, \quad [q, p] = 1$$

可得

$$\begin{aligned} [q, H] &= \frac{1}{2m}[q, p^2] + \frac{1}{2}m\omega^2[q, q^2] = \frac{1}{2m}([q, p]p + p[q, p]) = \frac{p}{m} \\ [p, H] &= \frac{1}{2m}[p, p^2] + \frac{1}{2}m\omega^2[p, q^2] = \frac{1}{2}m\omega^2([p, q]q + q[p, q]) = -m\omega^2 q \end{aligned}$$

由此可以依次计算

$$\begin{aligned} \hat{H}q &= [q, H] = \frac{p}{m} \\ \hat{H}^2 q &= \frac{1}{m}[p, H] = -\omega^2 q \\ \hat{H}^3 q &= -\omega^2 [q, H] = -\omega^2 \frac{p}{m} \\ \hat{H}^4 q &= -\frac{\omega^2}{m}[p, H] = (-\omega^2)^2 q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\hat{H}^{2m-1}q &= (-\omega^2)^{m-1} \frac{p}{m} \\
\hat{H}^{2m}q &= (-\omega^2)^m q \\
& \vdots
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
q(t) &= \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} \hat{H}^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{2m-1}}{(2m-1)!} \hat{H}^{2m-1} \right] q(0) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\omega t)^{2m}}{(2m)!} q(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (\omega t)^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{p(0)}{m\omega} \\
&= q(0) \cos \omega t + \frac{p(0)}{m\omega} \sin \omega t
\end{aligned}$$

### 3.5.4 运动积分与 Poisson 定理

体系力学状态随时间演变时不变的力学量称为运动积分，即满足

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 \quad (3.76)$$

定理 3.5.1 (Poisson 定理) 两个运动积分的 Poisson 括号仍为运动积分。即如有  $\frac{df}{dt} = 0, \frac{dg}{dt} = 0$ ，则有

$$\frac{d}{dt}[f, g] = 0$$

证明 由于

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$$

所以有  $\frac{\partial f}{\partial t} = -[f, H]$ ，同理可有  $\frac{\partial g}{\partial t} = -[g, H]$ 。由此可有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[f, g] &= \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + [[f, g], H] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + [[f, g], H] \\
&= [-[f, H], g] + [f, -[g, H]] + [[f, g], H] \\
&= -[f, [g, H]] - [g, [H, f]] - [H, [f, g]] = 0
\end{aligned}$$

□

例 3.9 (角动量的 Poisson 括号) 角动量可以表示为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned}
[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] = [yp_z, zp_x] + [zp_y, xp_z] \\
&= y[p_z, z]p_x + x[z, p_z]p_y = xp_y - yp_x = L_z
\end{aligned}$$

同理可有

$$[L_y, L_z] = L_x, \quad [L_z, L_x] = L_y$$

考虑

$$\begin{aligned} [L_z, L^2] &= [L_z, L_x^2] + [L_z, L_y^2] + [L_z, L_z^2] \\ &= [L_z, L_x]L_x + L_x[L_z, L_x] + [L_z, L_y]L_y + L_y[L_z, L_y] \\ &= L_yL_x + L_xL_y - L_xL_y - L_yL_x = 0 \end{aligned}$$

同理可有

$$[L_x, L^2] = [L_y, L^2] = [L_z, L^2] = 0$$

由此可得, 若角动量任意两分量守恒, 则第三分量亦守恒。角动量三分量变化不独立, 这与两次异轴转动可合成绕第三轴转动的事实相照应。

### 3.5.5 量子 Poisson 括号

量子 Poisson 括号定义为

$$[f, g]_- = fg - gf \quad (3.77)$$

在量子力学中, 将正则方程中的 Poisson 括号  $[f, g]$  替换为  $\frac{1}{i\hbar}[f, g]_-$  的过程, 称为正则量子化。力学量的乘积一般非对易, 可用算符或矩阵表示。

基本 Poisson 括号表示为

$$[q_i, p_j]_- = i\hbar\delta_{ij}, \quad [q_i, q_j]_- = 0, \quad [p_i, p_j]_- = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.78)$$

可有 Heisenberg 方程

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[f, H]_- \quad (3.79)$$

取宏观极限

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar}[f, g]_- = [f, g]$$

时, 动力学过渡为经典力学。

## 3.6 正则变换

对称性越高, 方程的求解越简便。对称性可以通过变换发现。

### 3.6.1 点变换

设在一组广义坐标  $\mathbf{q}$  下, Lagrange 函数形式为

$$L = L_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

系统方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$



做广义坐标变换

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t)$$

则有

$$L = L_Q(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L_q(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t)$$

所以有

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha} \\ \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\beta} \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial Q_\alpha} \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha} \right) - \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\beta} \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial Q_\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \right) \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\beta} \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} \right] + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} - \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial Q_\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial L}{\partial q_\beta} \right) \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} = 0 \end{aligned}$$

此处利用了经典 Lagrange 关系

$$\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}, \quad \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial Q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}$$

可见, 做广义坐标变换, Lagrange 方程不变。

### 3.6.2 正则变换

在 Hamilton 力学中, 正则变量处于平等地位, 变换的自由度更大。做正则变量变换

$$\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \\ P_\alpha = P_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (3.80)$$

在变换(3.80)下, Hamilton 函数将变换为

$$K = K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t)$$

一般情况下, 在变换之后正则方程将不能保持原来的形式。如果在变换(3.80)下, 新的 Hamilton 函数  $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  仍然满足正则方程

$$\begin{cases} \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha}, \\ \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha}, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

这种变换称为正则变换。

### 3.6.3 正则变换的条件

由于正则方程与 Hamilton 原理是等价的, 因此只要变换(3.80)可以满足 Hamilton 原理的要求, 就可以保证新的正则方程形式保持不变。

在变换前后, 正则变量都需要满足固定边界条件, 即

$$\begin{cases} \delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = 0, \\ \delta \mathbf{p}(t_1) = \delta \mathbf{p}(t_2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \delta \mathbf{Q}(t_1) = \delta \mathbf{Q}(t_2) = 0, \\ \delta \mathbf{P}(t_1) = \delta \mathbf{P}(t_2) = 0, \end{cases}$$

根据相空间 Hamilton 原理, 有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right] dt = 0 \quad (3.81)$$

由于  $L$  具有规范不定性, 即  $L$  和  $L + \frac{df}{dt}(\mathbf{q}, t)$  是等价的, 而且考虑到式(3.81)中的被积函数加上一项全微分之后, 定积分  $\int_{t_1}^{t_2} df$  只和端点的值有关, 而端点的变分恒为零, 因此  $f$  不仅可以是  $\mathbf{q}$  和  $t$  的函数, 还可以将  $\mathbf{p}$  作为参数包含在内。即正则变换前的 Hamilton 原理应该表达为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{df_1}{dt}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right] dt = 0 \quad (3.82)$$

因此正则变换之后的 Hamilton 原理应该表达为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \frac{df_2}{dt}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right] dt = 0 \quad (3.83)$$

因此, 可有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \lambda \left( \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H \right) - \left( \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - K \right) + \lambda \frac{df_1}{dt} - \frac{df_2}{dt} \right] dt = 0 \quad (3.84)$$

记

$$F_1 = f_2(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - \lambda f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (3.85)$$

则有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \lambda \left( \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) - \left( \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right) - \frac{dF_1}{dt}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right] dt = 0$$

要使上式成立, 只要取

$$\lambda \left( \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) = \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \dot{F}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = 0 \quad (3.86)$$

式(3.86)中  $\lambda$  称为**标度因子**, 表示不同的单位度量引起的数值放大, 不影响物理实质, 因此可取  $\lambda = 1$ , 则有

$$dF_1 = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} + (K - H)dt \quad (3.87)$$

满足式(3.87)的变换即为**正则变换**。如果  $\lambda \neq 1$ , 则为**拓展正则变换**。

### 3.6.4 母函数

#### 3.6.4.1 第一类母函数

考虑式(3.87)的右端, 同时出现新旧两组正则变量  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  和  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ , 但这  $4s$  个变量之间由于存在  $2s$  个变换方程(3.80), 因此独立的变量只有  $2s$  个。在式(3.87)中, 独立的变量是正则坐标  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{Q}$ , 因此函数  $F_1$  也应取  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{Q}$  加上时间  $t$  作为自己的变量, 即

$$dF_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} + (K - H)dt \quad (3.88)$$

函数  $F_1 = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  称为**第一类母函数**。考虑

$$dF_1 = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial F_1}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}} dQ_{\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

与式(3.87)对比, 可得变换的具体形式

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_1}{\partial q_{\alpha}} = \bar{p}_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \\ P_{\alpha} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}} = \bar{P}_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases} \quad (3.89)$$

#### 3.6.4.2 第二类母函数

考虑

$$\sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} = d\left(\sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} Q_{\alpha}\right) - \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} dP_{\alpha}$$

因此可以将式(3.87)改写为

$$d\left(F_1 + \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} Q_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} dP_{\alpha} + (K - H)dt$$

定义函数

$$F_2 = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = F_1 + \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} Q_{\alpha} \quad (3.90)$$

于是得到

$$dF_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} dP_{\alpha} + (K - H)dt \quad (3.91)$$

由此可得变换的具体形式

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases} \quad (3.92)$$

### 3.6.4.3 第三类母函数

考虑

$$\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} = d \left( \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha}$$

因此可以将式(3.87)改写为

$$d \left( F_1 - \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \right) = - \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} + (K - H) dt$$

定义函数

$$F_3 = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) = F_1 - \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \quad (3.93)$$

于是得到

$$dF_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) = - \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} + (K - H) dt \quad (3.94)$$

由此可得变换的具体形式

$$\begin{cases} q_{\alpha} = - \frac{\partial F_3}{\partial p_{\alpha}} \\ P_{\alpha} = - \frac{\partial F_3}{\partial Q_{\alpha}} \\ K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases} \quad (3.95)$$

### 3.6.4.4 第四类母函数

考虑

$$\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} = d \left( \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha}$$

因此可以将式(3.87)改写为

$$d \left( F_2 - \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \right) = - \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} dP_{\alpha} + (K - H) dt$$

定义函数

$$F_4 = F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = F_2 - \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \quad (3.96)$$

于是得到

$$dF_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = - \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} dP_{\alpha} + (K - H) dt \quad (3.97)$$

由此可得变换的具体形式

$$\begin{cases} q_{\alpha} = - \frac{\partial F_4}{\partial p_{\alpha}} \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial F_4}{\partial P_{\alpha}} \\ K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases} \quad (3.98)$$

特别地, 如果母函数  $F_i$  不显含时间  $t$ , 即  $\frac{\partial F_i}{\partial t} = 0$ , 则有

$$K = H$$

例 3.10 (恒等变换) 恒等变换可以用第二类母函数表示为

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{\beta=1}^s q_{\beta} P_{\beta}$$

则有

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} = P_{\alpha} \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} = q_{\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H \end{cases}$$

用第三类母函数可以表示为

$$F_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = - \sum_{\beta=1}^s p_{\beta} Q_{\beta}$$

则有

$$\begin{cases} q_{\alpha} = - \frac{\partial F_3}{\partial p_{\alpha}} = Q_{\alpha} \\ P_{\alpha} = - \frac{\partial F_3}{\partial Q_{\alpha}} = p_{\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} = H \end{cases}$$

例 3.11 (平移变换) 平移变换可以用第二类母函数表示为

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{\beta=1}^s (q_{\beta} P_{\beta} + a_{\beta} P_{\beta} - b_{\beta} q_{\beta})$$

则有

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} = P_{\alpha} - b_{\alpha} \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} = q_{\alpha} + a_{\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H \end{cases}$$

例 3.12 (对偶变换) 对偶变换可以用第一类母函数表示为

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \sum_{\beta=1}^s q_{\beta} Q_{\beta}$$

则有

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_1}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha} \\ P_{\alpha} = - \frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}} = -q_{\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H \end{cases}$$

即此变换可以将广义坐标变换为广义动量，将广义动量变换为广义坐标，相当于在相空间做了一个旋转。

例 3.13 (点变换) 点变换可以用第二类母函数表示为

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{\beta=1}^s Q_{\beta}(\mathbf{q}, t) P_{\beta}$$

则有

$$\begin{cases} p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = \sum_{\beta=1}^s P_\beta \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} \\ Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = Q_\alpha(q, t) \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + \sum_{\beta=1}^s P_\beta \frac{\partial Q_\beta}{\partial t} \end{cases}$$

例 3.14 (一维谐振子的正则变换求解) 一维谐振子的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

构造正则变换, 使得

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = 0$$

进而使得新正则方程的求解简化。构造母函数  $F_1 = F_1(q, Q, t)$ , 则有

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \\ P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

考虑到  $\frac{dP}{dt} = 0$ , 则  $P$  为运动积分。由于  $H$  不显含时间, 则  $H$  也为运动积分 (为常数), 即能量守恒, 于是可以令

$$p = f(P) \cos Q, \quad q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q \quad (3.99)$$

并假设母函数  $F_1$  不显含时间, 则

$$K = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{[f(P)]^2}{2m}$$

根据变换关系式可得

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}(q, Q)$$

根据式(3.99)可得

$$p = m\omega q \cot Q$$

则可得到

$$F_1 = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q$$

根据变换关系式可得

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}$$

所以有

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ f(P) &= \sqrt{2m\omega P} \end{aligned}$$

此时

$$K = H = \omega P$$

将体系总能量记作  $E$ , 可有

$$P = \frac{E}{\omega}$$

再由

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega$$

可得

$$Q = \omega t + \phi$$

因此, 系统的解为

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi) \\ p = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

### 3.6.5 无穷小正则变换

考虑第二类母函数

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} P_{\alpha} + \varepsilon G(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.100)$$

则有

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} = P_{\alpha} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_{\alpha}} \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} = q_{\alpha} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_{\alpha}} \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} \end{cases}$$

其中

$$\varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_{\alpha}} = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial P_{\alpha}} = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_{\alpha}} + o(\varepsilon)$$

略去高阶小量, 可得无穷小正则变换

$$\begin{cases} Q_{\alpha} - q_{\alpha} = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_{\alpha}} \end{cases} \quad (3.101a)$$

$$\begin{cases} P_{\alpha} - p_{\alpha} = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_{\alpha}} \end{cases} \quad (3.101b)$$

$$\begin{cases} K - H = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} \end{cases} \quad (3.101c)$$

式中函数  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  则称为无穷小正则变换生成元。

无穷小正则变换为对称变换, 变换后正则方程结构相同, 因而运动规律也是相同的。亦即, 对体系操作前后, 运动是完全相同的。

考虑变换

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = (\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}, t)$$

因此有

$$\begin{cases} \delta q_{\alpha} = Q_{\alpha} - q_{\alpha} = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_{\alpha}} \\ \delta p_{\alpha} = P_{\alpha} - p_{\alpha} = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_{\alpha}} \\ K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} \end{cases}$$

由第三式即有

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} = \delta H - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

而

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \delta p_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_{\alpha}} \right) \\ &= \varepsilon [H, G] \end{aligned}$$

所以有

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} = -\varepsilon \left( [G, H] + \frac{\partial G}{\partial t} \right) = -\varepsilon \frac{dG}{dt} = 0$$

因此, 体系对称则无穷小正则变换生成元守恒; 以运动积分为生成元的无穷小正则变换为体系对称变换。

### 3.6.6 运动方程的无穷小正则变换表示

将无穷小正则变换生成元取为  $G = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , 以及  $\varepsilon = dt$ , 则有

$$\begin{cases} Q_{\alpha}(t) - q_{\alpha}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} dt \\ P_{\alpha}(t) - p_{\alpha}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} dt \\ K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{cases}$$

根据正则方程, 可有

$$\begin{cases} Q_{\alpha}(t) = q_{\alpha}(t) + \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} dt = q_{\alpha}(t) + \dot{q}_{\alpha} dt = q_{\alpha}(t + dt) \\ P_{\alpha}(t) = p_{\alpha}(t) - \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} dt = p_{\alpha}(t) + \dot{p}_{\alpha} dt = p_{\alpha}(t + dt) \\ \hat{K}(t) = \hat{H}(t) + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \hat{H}(t) + \dot{H} dt = \hat{H}(t + dt) \end{cases}$$

由此, 体系随时间的演化可视为一系列无穷小正则变换的累积, 其生成元为 Hamilton 函数。

### 3.6.7 正则变换条件的辛表示

设变换前后的正则变量分别为

$$\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \\ p_1 \\ \vdots \\ p_s \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_s \\ P_1 \\ \vdots \\ P_s \end{pmatrix}$$

设正则变换可以表示为

$$\Xi = \Xi(\xi, t), \quad \xi = \xi(\Xi, t) \quad (3.102)$$



则有

$$\delta \Xi = M \delta \xi, \quad \delta \xi = W \delta \Xi$$

其中 Jacobi 矩阵以及逆变换的 Jacobi 矩阵可以表示为

$$M = \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}, \quad W = \frac{\partial \xi}{\partial \Xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = M^{-1} \quad (3.103)$$

用第一类母函数  $F_1 = F_1(q, Q, t)$  可以将正则变换的条件表示为

$$dF_1 = \sum_{\gamma=1}^s p_\gamma dq_\gamma - \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta dQ_\zeta + (K - H)dt$$

考虑到  $Q = Q(q, p, t)$ , 可有

$$dQ_\zeta = \sum_{\gamma=1}^s \left( \frac{\partial Q_\zeta}{\partial q_\gamma} dq_\gamma + \frac{\partial Q_\zeta}{\partial p_\gamma} dp_\gamma \right) + \frac{\partial Q_\zeta}{\partial t} dt$$

所以

$$\begin{aligned} d\bar{F}_1(q, p, t) &= \sum_{\gamma=1}^s \left[ \left( p_\gamma - \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta \frac{\partial Q_\zeta}{\partial q_\gamma} \right) dq_\gamma - \left( \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta \frac{\partial Q_\zeta}{\partial p_\gamma} \right) dp_\gamma \right] \\ &\quad + \left( K - H - \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta \frac{\partial Q_\zeta}{\partial t} \right) dt \end{aligned}$$

此处, 函数  $\bar{F}_1(q, p, t) = F_1(q, Q(q, p, t), t)$ , 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_\alpha} &= p_\alpha - \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta \frac{\partial Q_\zeta}{\partial q_\alpha}, & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_\beta} &= p_\beta - \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta \frac{\partial Q_\zeta}{\partial q_\beta} \\ \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial p_\alpha} &= - \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta \frac{\partial Q_\zeta}{\partial p_\alpha}, & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial p_\beta} &= - \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta \frac{\partial Q_\zeta}{\partial p_\beta} \end{aligned}$$

根据  $\frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} = \frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}$  可得

$$- \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_\zeta}{\partial q_\beta} \frac{\partial Q_\zeta}{\partial q_\alpha} - \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta \frac{\partial^2 Q_\zeta}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} = - \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_\zeta}{\partial q_\alpha} \frac{\partial Q_\zeta}{\partial q_\beta} - \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta \frac{\partial^2 Q_\zeta}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}$$

所以有

$$\sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_\zeta}{\partial q_\beta} \frac{\partial Q_\zeta}{\partial q_\alpha} = \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_\zeta}{\partial q_\alpha} \frac{\partial Q_\zeta}{\partial q_\beta}$$

用矩阵表示即

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial q} \right)^T \frac{\partial P}{\partial q} - \left( \frac{\partial P}{\partial q} \right)^T \frac{\partial Q}{\partial q} = 0 \quad (3.104)$$

再根据  $\frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial q_\alpha \partial p_\beta} = \frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial p_\beta \partial q_\alpha}$  可得

$$- \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_\zeta}{\partial q_\alpha} \frac{\partial Q_\zeta}{\partial p_\beta} - \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta \frac{\partial^2 Q_\zeta}{\partial q_\alpha \partial p_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_\zeta}{\partial p_\beta} \frac{\partial Q_\zeta}{\partial q_\alpha} - \sum_{\zeta=1}^s P_\zeta \frac{\partial^2 Q_\zeta}{\partial p_\beta \partial q_\alpha}$$

所以有

$$\sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} = \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial q_{\alpha}} - \delta_{\alpha\beta}$$

用矩阵表示即

$$\left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} - \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{I} \quad (3.105)$$

最后根据  $\frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial p_{\alpha} \partial p_{\beta}} = \frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial p_{\beta} \partial p_{\alpha}}$  可得

$$-\sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial^2 Q_{\zeta}}{\partial p_{\alpha} \partial p_{\beta}} = -\sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\alpha}} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial^2 Q_{\zeta}}{\partial p_{\beta} \partial p_{\alpha}}$$

所以有

$$\sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} = \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\alpha}}$$

用矩阵表示即

$$\left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} - \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (3.106)$$

综合式(3.104)、式(3.105)和式(3.106)可得

$$\begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T & \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \right)^T & \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_s \\ -\mathbf{I}_s & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_s \\ -\mathbf{I}_s & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

或者

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J} \quad (3.107)$$

式(3.107)称为正则变换的辛条件, 反映了正则方程的对称性。所有正则变换的 Jacobi 矩阵构型辛群。

由式(3.107)可有

$$\det(\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M}) = \det \mathbf{J} = 1$$

所以可有

$$|\det \mathbf{M}| = 1 \quad (3.108)$$

即, 正则变换 Jacobi 行列式的绝对值为 1。有限正则变换是一系列无限小正则变换的累积, 即

$$\mathbf{M} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{M}_i(\varepsilon_i, G_i), \quad \varepsilon_i \rightarrow 0$$

## 3.6.8 正则变换的不变量

### 3.6.8.1 相体积元不变

在正则变换前, 相体积元为

$$\prod_{i=1}^{2s} d\xi_i = \prod_{\alpha=1}^s dq_{\alpha} dp_{\alpha}$$

因此, 正则变换之后的相体积元为

$$\prod_{j=1}^{2s} d\Xi_j = \prod_{\beta=1}^s dQ_\beta dP_\beta = \left| \det \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right| \prod_{i=1}^{2s} d\xi_i = |\det M| \prod_{i=1}^{2s} d\xi_i = \prod_{i=1}^{2s} d\xi_i$$

因此, 相体积为不依赖于正则变量选取的绝对量。这是经典统计物理的理论基础。

### 3.6.8.2 Poisson 括号不变

设有

$$f = f_\xi(\xi, t) = f_\Xi(\Xi, t)$$

$$g = g_\xi(\xi, t) = g_\Xi(\Xi, t)$$

变换之前的 Poisson 括号为

$$[f, g]_\xi = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial(f, g)}{\partial(q_\alpha, p_\alpha)} = \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^T J \frac{\partial g}{\partial \xi}$$

正则变换之后的 Poisson 括号为

$$\begin{aligned} [f, g]_\Xi &= \left( \frac{\partial f}{\partial \Xi} \right)^T J \frac{\partial g}{\partial \Xi} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial \Xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^T J \frac{\partial \xi}{\partial \Xi} \frac{\partial g}{\partial \xi} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^T M^{-T} J M^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi} \end{aligned}$$

由式(3.107)可有

$$M^{-T} J M^{-1} = J$$

所以有

$$[f, g]_\Xi = \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^T J \frac{\partial g}{\partial \xi} = [f, g]_\xi$$

因此, Poisson 括号为不依赖于正则变量选取的绝对量。力学 Poisson 括号形式为不依赖于相坐标系的绝对表示。因此相应地, 基本 Poisson 括号在正则变换下不变, 此可作为正则变换的判据。

角动量分量不符合基本泊松括号, 因此不可能同时选为正则变量。

**例 3.15** 若新旧正则变量的变换关系为

$$Q = q^\alpha \cos \beta p, \quad P = q^\alpha \sin \beta p$$

当  $\alpha, \beta$  为何值时, 这个变换是正则变换? 并找出其母函数。

**解** 考虑基本泊松括号

$$[Q, P]_\xi = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \alpha \beta q^{2\alpha-1} = 1 = [Q, P]_\Xi$$

由此可得  $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2$ 。所以

$$\begin{cases} Q = \sqrt{q} \cos 2p \\ P = \sqrt{q} \sin 2p \end{cases}$$

因此有

$$\begin{cases} q = \frac{Q^2}{\cos^2 2p} \\ P = Q \tan 2p \end{cases}$$

考虑第三类母函数  $F_3 = F_3(p, Q)$ , 则有

$$dF_3 = -qdp - PdQ = -\frac{Q^2}{\cos^2 2p}dp - Q \tan 2p dQ = d\left(-\frac{1}{2}Q^2 \tan 2p\right)$$

即有第三类母函数

$$F_3(p, Q) = -\frac{1}{2}Q^2 \tan 2p$$

## 3.7 Hamilton-Jacobi 方程

通过适当的正则变换可使新的哈密顿函数  $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  的结构简化, 从而使正则方程易于求解。最理想的情况是使得  $K = 0$ , 此时新的正则方程就变为

$$\begin{cases} \dot{Q}_\alpha = 0, \\ \dot{P}_\alpha = 0, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

于是所有正则变量都是可遗变量, 即有

$$\begin{cases} Q_\alpha = C_\alpha = \text{常数}, \\ P_\alpha = D_\alpha = \text{常数}, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

然后再利用变换关系

$$\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \\ P_\alpha = P_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

即可得到原来正则方程的解

$$\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(\mathbf{C}, \mathbf{D}, t) \\ p_\alpha = p_\alpha(\mathbf{C}, \mathbf{D}, t) \end{cases}$$

对于四类正则变换母函数, 新旧 Hamilton 函数间的关系都是

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

此处将母函数记作  $S$ , 欲使  $K = 0$ , 则要求母函数  $S$  满足关系式

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (3.109)$$

由此, 力学问题便归结为求  $S$ 。

### 3.7.1 Hamilton-Jacobi 方程

考虑第二类母函数  $F_2 = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ , 则由变换关系可有

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}$$

并根据变换需满足的条件, 令

$$P_\alpha = D_\alpha$$

即有

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (3.110)$$

式(3.110)称为 Hamilton-Jacobi 方程。它是函数  $S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t)$  的一阶偏微分方程, 它有  $s+1$  个自变量 ( $\mathbf{q}$  和  $t$ ), 所以应有  $s+1$  个独立的积分常数, 其中一个为相加常数, 不影响变换, 可略去; 其余的  $s$  个即为  $D_\alpha$ 。含有  $s$  个任意常数 (不包括相加常数) 的函数  $S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t)$  称为 Hamilton-Jacobi 方程的完全积分。

### 3.7.2 Hamilton 主函数

在 Hamilton-Jacobi 方程(3.110)中, 函数  $S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t)$  称为 Hamilton 主函数。下面来讨论 Hamilton 主函数的物理意义。考虑

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - H = L$$

由此可得

$$S = \int L dt \quad (3.111)$$

函数  $S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t)$  即为积分限不定的 Hamilton 作用量, 因此也称为 Hamilton 作用函数。

当 Hamilton 函数不显含时间  $t$ , 即体系广义能量守恒时<sup>①</sup>, 这种情况下方程(3.110)可以表示为

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = E + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (3.112)$$

此情况下 Hamilton 作用函数可分离变量

$$S = S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t) = W(\mathbf{q}, \mathbf{D}) + T(t)$$

由此即有

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t) = W(\mathbf{q}, \mathbf{D}) - Et \quad (3.113)$$

Hamilton-Jacobi 方程变为

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = E \quad (3.114)$$

式(3.114)称为不含时 Hamilton-Jacobi 方程。其中函数

$$W = W(\mathbf{q}, \mathbf{D}) = W(\mathbf{q}, E, D_2, \dots, D_s)$$

称为 Hamilton 特征函数。

考虑到  $H = E$ , 可有

$$S = \int L dt = \int \left( \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - H \right) dt = \int \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha dq_\alpha - Et + D_0$$

上式中  $D_0$  是相加常数, 可略去, 由此可得 Hamilton 特征函数的具体形式

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{D}) = \int \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha dq_\alpha \quad (3.115)$$

<sup>①</sup> 纯力学问题都属于这一类问题。

下面来考虑 Hamilton-Jacobi 方程的完全积分  $S = S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t)$  与体系运动轨迹  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t), \mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$  之间的关系。首先有

$$\begin{cases} p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t), & \alpha = 1, 2, \dots, s \\ C_\alpha = \frac{\partial S}{\partial D_\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t), & \alpha = 1, 2, \dots, s \end{cases} \quad (3.116a)$$

$$(3.116b)$$

由方程(3.116b)的  $s$  个方程中（这是代数方程组）可以解出  $s$  个广义坐标与时间的关系

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$$

再由方程(3.116a)即可得

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$$

由此便得到完整的相空间轨迹。当体系广义能量守恒时，记  $E = D_1$ ，则有

$$\begin{cases} p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t) = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{D}), & \alpha = 1, 2, \dots, s \end{cases} \quad (3.117a)$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\partial S}{\partial D_1}(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t) = \frac{\partial W}{\partial E}(\mathbf{q}, \mathbf{D}) - t \end{cases} \quad (3.117b)$$

$$\begin{cases} C_\alpha = \frac{\partial S}{\partial D_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial D_\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{D}), & \alpha = 2, 3, \dots, s \end{cases} \quad (3.117c)$$

由此可有

$$C_\alpha = C_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_s; E, D_2, \dots, D_s), \quad \alpha = 2, 3, \dots, s \quad (3.118)$$

由式(3.118)的  $s-1$  个方程，可以以  $q_1$  为参数，解出  $q_2, \dots, q_s$  的表达式为

$$q_\alpha = f_\alpha(q_1; C_2, \dots, C_s; E, D_2, \dots, D_s), \quad \alpha = 2, 3, \dots, s \quad (3.119)$$

此即为位形空间的轨道曲线。

**例 3.16 (一维谐振子的 Hamilton-Jacobi 方程求解)** 一维谐振子的 Hamilton 函数为

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

用 Hamilton-Jacobi 方程求解此体系的运动。

**解** 体系的 Hamilton 函数不显含时间，故根据不含时 Hamilton-Jacobi 方程(3.114)可有

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E$$

即

$$\frac{\partial W}{\partial q} = m\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2} = p$$

因此

$$W = m\omega \int \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2} dq$$

由此即有

$$C = \frac{\partial W}{\partial E} - t = \frac{1}{\omega} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2}} - t = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q\right) - t$$

由此可得体系的解

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin [\omega(t + C)] \\ p = m\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2} = \sqrt{2mE} \cos [\omega(t + C)] \end{cases}$$

$C, E$  是积分常数, 故有

$$C = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q_0 \right) - t_0, \quad E = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_0^2$$

Hamilton-Jacobi 理论将常微分方程组求解转化为偏微分方程的全积分问题, 在具体应用方面并无方便之处, 但是提供了一种全新的力学运动图像。

### 3.7.3 Hamilton-Jacobi 方程的分离变量

在某些特殊情况下, Hamilton-Jacobi 方程的完全积分可以通过分离变量的方法求得。假设某一个坐标, 将其记作  $q_1$ , 与其相应的导数  $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ , 在 Hamilton-Jacobi 方程中仅以某种组合  $\phi \left( q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1} \right)$  的方式出现, 而这个组合中不包含任何其他坐标, 即 Hamilton-Jacobi 方程(3.110)具有如下形式:

$$\Phi \left( \mathbf{q}', t, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}'}, \frac{\partial S}{\partial t}, \phi \left( q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1} \right) \right) = 0 \quad (3.120)$$

其中  $\mathbf{q}'$  表示除了  $q_1$  以外的所有坐标。

假设解具有如下形式

$$S(\mathbf{q}, t) = S_0(\mathbf{q}', t) + S_1(q_1) \quad (3.121)$$

将(3.121)代入式(3.120)中, 即有

$$\Phi \left( \mathbf{q}', t, \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{q}'}, \frac{\partial S_0}{\partial t}, \phi \left( q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right) \right) = 0 \quad (3.122)$$

如果式(3.121)是方程的解, 那么在  $q_1$  变化时, 式(3.122)应为恒等式。而式(3.122)中, 只有  $\phi \left( q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right)$  项含有  $q_1$ , 因此  $\phi \left( q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right)$  项应为常数。于是将方程(3.120)分为两个方程

$$\phi \left( q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right) = D_1 \quad (3.123)$$

$$\Phi \left( \mathbf{q}', t, \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{q}'}, \frac{\partial S_0}{\partial t}, D_1 \right) = 0 \quad (3.124)$$

方程(3.123)是一个常微分方程, 而方程(3.124)虽然仍为偏微分方程, 但其独立变量数目较之原来减少了一个。

对于循环坐标的情形, 由于循环坐标  $q_1$  不显含于 Hamilton 函数中, 此时  $\phi \left( q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1} \right)$  项即为  $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ , 因此可有

$$S_1(q_1) = D_1 q_1$$

而此处常数  $D_1$  即为与  $q_1$  共轭的广义动量  $p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = D_1$ 。对于保守系统而言,  $-Et$  这一项即对应着“循环坐标”时间  $t$  的分离。

为了能够在 Hamilton-Jacobi 方程中分离变量, 适当选择坐标系非常关键。

例 3.17 (球坐标系中 Hamilton-Jacobi 方程的分离变量) 在球坐标系中, Hamilton 函数为

$$H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi, t) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r, \theta, \phi, t) \quad (3.125)$$

如果势函数  $V(r, \theta, \phi, t)$  具有如下形式

$$V(r, \theta, \phi, t) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\phi)}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (3.126)$$

其中  $a(r), b(\theta), c(\phi)$  是任意函数, 则分离变量是可能的。此时关于函数  $W(r, \theta, \phi)$  的不含时 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right] \\ + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + 2mc(\phi) \right] = E \end{aligned} \quad (3.127)$$

假设解具有形式

$$S(r, \theta, \phi, t) = -Et + W(r, \theta, \phi) = -Et + S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\phi) \quad (3.128)$$

则有

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dS_3}{d\phi} \right)^2 + 2mc(\phi) &= \alpha \end{aligned} \right. \quad (3.129a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{\alpha}{\sin^2 \theta} &= \beta \end{aligned} \right. \quad (3.129b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} &= E \end{aligned} \right. \quad (3.129c)$$

依次积分可得

$$\left\{ \begin{aligned} S_3(\phi) &= \pm \int \sqrt{\alpha - 2mc(\phi)} d\phi \end{aligned} \right. \quad (3.130a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} S_2(\theta) &= \pm \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{\alpha}{\sin^2 \theta}} d\theta \end{aligned} \right. \quad (3.130b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} S_1(r) &= \pm \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}} dr \end{aligned} \right. \quad (3.130c)$$

便得到 Hamilton-Jacobi 方程的完全积分

$$\begin{aligned} S(r, \theta, \phi, t) &= -Et \pm \int \sqrt{\alpha - 2mc(\phi)} d\phi \pm \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{\alpha}{\sin^2 \theta}} d\theta \\ &\pm \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}} dr \end{aligned} \quad (3.131)$$

其中  $\alpha, \beta, E$  是任意积分常数, 将式(3.132)对这三个任意常数求导并使之等于新常数, 即可得到运动方程的通解。

在一般的问题中, 式(3.126)所表示的势场其第三项未必有物理意义, 因此在  $c(\phi) = 0$  的情形下, 可有 Hamilton-Jacobi 方程的完全积分为

$$S(r, \theta, \phi, t) = -Et + p_\phi \phi \pm \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \pm \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}} dr \quad (3.132)$$



例 3.18 (抛物线坐标系中 Hamilton-Jacobi 方程的分离变量) 抛物线坐标  $(u, v, \phi)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的关系由如下变换公式给出

$$\begin{cases} x = uv \cos \phi \\ y = uv \sin \phi \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases} \quad (0 \leq u, v < +\infty, 0 \leq \phi < 2\pi) \quad (3.133)$$

$u$  和  $v$  为常数的曲面是两族以  $z$  轴为对称轴的旋转抛物面, 如图 3.5 所示。

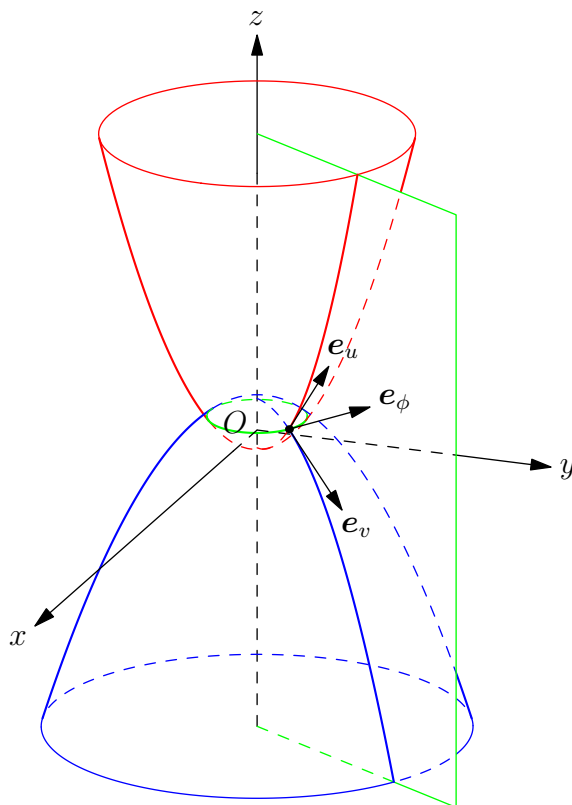


图 3.5: 抛物线坐标系的坐标面

在这个坐标系下, 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(u^2 + v^2)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m(u^2 + v^2)\dot{v}^2 + \frac{1}{2}mu^2v^2\dot{\phi}^2 - V(u, v, \phi) \quad (3.134)$$

此时, 广义动量为

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m(u^2 + v^2)\dot{u}, \quad p_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = m(u^2 + v^2)\dot{v}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mu^2v^2\dot{\phi}$$

由此可得体系的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2m(u^2 + v^2)} + \frac{p_\phi^2}{2mu^2v^2} + V(u, v, \phi) \quad (3.135)$$

在这种坐标下, 物理上有意义的可分离变量情况对应于以下形式的势能:

$$V(u, v, \phi) = \frac{a(u) + b(v)}{u^2 + v^2} \quad (3.136)$$

所以我们得到关于  $W(\mathbf{q}, \mathbf{D})$  的方程

$$\frac{1}{2m(u^2 + v^2)} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \right] + \frac{1}{2mu^2v^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{a(u) + b(v)}{u^2 + v^2} = E \quad (3.137)$$

在式(3.137)两端乘以  $2m(u^2 + v^2)$  并整理, 可得

$$\left( \frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + a(u) - 2mEu^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 + b(v) - 2mEv^2 + \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 = 0$$

此处注意到坐标  $\phi$  是循环坐标, 因此可令

$$S(u, v, \phi, t) = -Et + p_\phi \phi + S_1(u) + S_2(v) \quad (3.138)$$

由此得到两个方程

$$\begin{cases} \left( \frac{dS_2}{dv} \right)^2 - 2mEv^2 + b(v) + \frac{p_\phi^2}{v^2} = \beta \\ \left( \frac{dS_1}{du} \right)^2 - 2mEu^2 + a(u) + \frac{p_\phi^2}{u^2} = -\beta \end{cases} \quad (3.139a)$$

$$(3.139b)$$

由此即有

$$S = -Et + p_\phi \phi \pm \int \sqrt{2mEv^2 - \frac{p_\phi^2}{v^2} - b(v) + \beta} dv \pm \int \sqrt{2mEu^2 - \frac{p_\phi^2}{u^2} - a(u) - \beta} du$$

其中  $E, p_\phi, \beta$  为任意积分常数。

**例 3.19 (椭圆坐标系中 Hamilton-Jacobi 方程的分离变量)** 椭圆坐标  $(\xi, \eta, \phi)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的关系由如下变换公式给出

$$\begin{cases} x = \sigma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \phi \\ y = \sigma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \phi \\ z = \sigma \xi \eta \end{cases} \quad (1 \leq \xi < +\infty, -1 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi) \quad (3.140)$$

其中  $\sigma$  为常数。设  $z$  轴上两个点  $A_1$  和  $A_2$  的坐标为  $z = \sigma$  和  $z = -\sigma$ , 则  $\xi$  为常数的坐标面为以  $A_1$  和  $A_2$  为焦点的一族旋转椭球面

$$\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2(\xi^2 - 1)} + \frac{z^2}{\sigma^2\xi^2} = 1$$

而  $\eta$  为常数的坐标面为以  $A_1$  和  $A_2$  为焦点的一族旋转双叶双曲面

$$-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2(1 - \eta^2)} + \frac{z^2}{\sigma^2\eta^2} = 1$$

此坐标系即为图3.6所示的二维椭圆坐标系绕其  $z$  轴旋转而成。

记  $r_1$  和  $r_2$  是点  $(\xi, \eta, \phi)$  到  $A_1$  和  $A_2$  的距离, 则有

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \sigma)^2} = \sigma(\xi - \eta) \\ r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + \sigma)^2} = \sigma(\xi + \eta) \end{cases} \quad (3.141a)$$

$$(3.141b)$$

在这个坐标系下, 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} \right) + \frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)\dot{\phi}^2 - V(\xi, \eta, \phi) \quad (3.142)$$

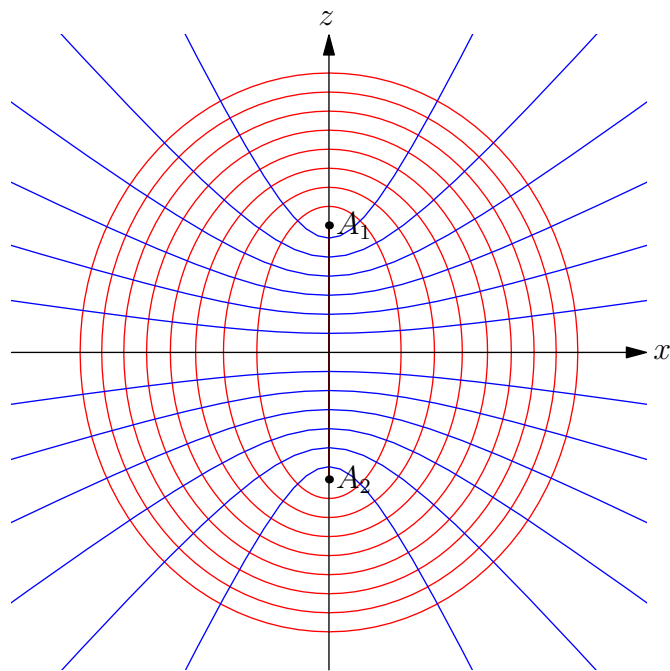


图 3.6: 二维椭圆坐标系

此时，广义动量为

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m\sigma^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \dot{\xi}, \quad p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = m\sigma^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} \dot{\eta}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\sigma^2 (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \dot{\phi}$$

由此可得体系的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) p_\phi^2 \right] + V(\xi, \eta, \phi) \quad (3.143)$$

在这种坐标下，物理上有意义的可分离变量情况对应于势能为

$$V(\xi, \eta, \phi) = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\sigma^2}{r_1 r_2} \left[ a \left( \frac{r_1 + r_2}{2\sigma} \right) + b \left( \frac{r_1 - r_2}{2\sigma} \right) \right] \quad (3.144)$$

所以我们得到关于  $W(\mathbf{q}, \mathbf{D})$  的方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1) \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + (1 - \eta^2) \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 \right] \\ + \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = E \end{aligned} \quad (3.145)$$

在式(3.145)两端乘以  $2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)$  并整理，可得

$$\begin{aligned} (\xi^2 - 1) \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + 2m\sigma^2 a(\xi) - 2m\sigma^2 E \xi^2 + (1 - \eta^2) \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 + 2m\sigma^2 b(\eta) + 2m\sigma^2 E \eta^2 \\ + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

注意到坐标  $\phi$  是循环坐标，因此可令

$$S(\xi, \eta, \phi, t) = -Et + p_\phi \phi + S_1(\xi) + S_2(\eta) \quad (3.146)$$

由此得到两个方程

$$\begin{cases} (1 - \eta^2) \left( \frac{dS_2}{d\eta} \right)^2 + 2m\sigma^2 b(\eta) - 2m\sigma^2 E(1 - \eta^2) + \frac{p_\phi^2}{1 - \eta^2} = \beta & (3.147a) \\ (\xi^2 - 1) \left( \frac{dS_1}{d\xi} \right)^2 + 2m\sigma^2 a(\xi) - 2m\sigma^2 E(\xi^2 - 1) + \frac{p_\phi^2}{\xi^2 - 1} = -\beta & (3.147b) \end{cases}$$

由此即有

$$\begin{aligned} S = -Et + p_\phi \phi \pm \int \sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma^2 b(\eta)}{1 - \eta^2} - \frac{p_\phi^2}{(1 - \eta^2)^2}} d\eta \\ \pm \int \sqrt{2m\sigma^2 E - \frac{\beta + 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\phi^2}{(\xi^2 - 1)^2}} d\xi \end{aligned} \quad (3.148)$$

其中  $E, p_\phi, \beta$  为任意积分常数。

### 3.7.4 利用 Hamilton-Jacobi 方程求解 Kepler 问题

本节利用 Hamilton-Jacobi 方程求解 Kepler 问题, 即求解质量为  $m$  的质点在势场  $V = -\frac{\alpha}{r}$  ( $\alpha > 0$ ) 中的运动。

在球坐标系中, 此系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} - \frac{\alpha}{r} \quad (3.149)$$

系统的 Hamilton 函数不显含时间, 故根据不含时 Hamilton-Jacobi 方程(3.114)可有

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 \right] - \frac{\alpha}{r} = E \quad (3.150)$$

注意到  $\phi$  是循环坐标, 因此可令

$$S(r, \theta, \phi, t) = -Et + p_\phi \phi + S_1(r) + S_\theta(\theta) \quad (3.151)$$

由此得到两个方程

$$\left\{ \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = \beta^2 \right. \quad (3.152a)$$

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \frac{\beta^2}{r^2} \right] - \frac{\alpha}{r} = E \right. \quad (3.152b)$$

由此即有

$$S = -Et + p_\phi \phi \pm \int \sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}} dr \pm \int \sqrt{\beta^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \quad (3.153)$$

其中  $E, p_\phi, \beta$  为任意积分常数。为了使结果更具有几何意义, 现在用坐标  $r$  和  $\theta$  的初始值  $r_0$  和  $\theta_0$  来取代积分常数  $E$  和  $p_\phi$ , 令

$$\begin{cases} p_\phi^2 = \beta^2 \sin^2 \theta_0 \\ E = \frac{\beta^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \end{cases} \quad (3.154)$$

此时可有

$$S = - \left( \frac{\beta^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) t \pm \beta \sin \theta_0 \phi \pm \sqrt{2m} \int \sqrt{\frac{\beta^2}{2m} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)} dr \\ \pm \beta \int \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}} d\theta \quad (3.155)$$

于是, 质点在空间中的轨迹由如下方程决定

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial r_0} = -p_{r_0} \end{cases} \quad (3.156a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \theta_0} = -p_{\theta_0} \end{cases} \quad (3.156b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \beta} = -\gamma \end{cases} \quad (3.156c)$$

首先假设在(3.155)中都取正号, 则式(3.156a)化为

$$- \left( -\frac{\beta^2}{mr_0^3} + \frac{\alpha}{r_0^2} \right) t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{-\frac{\beta^2}{mr_0^3} + \frac{\alpha}{r_0^2}}{\sqrt{\frac{\beta^2}{2m} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}} dr = -p_{r_0}$$

整理可得<sup>①</sup>

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \left[ \frac{\beta^2}{2m} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r} \right) - \alpha \right]}} = t - t_0 \quad (3.157)$$

其中  $t_0 = \frac{p_{r_0}}{-\frac{\beta^2}{mr_0^3} + \frac{\alpha}{r_0^2}}$ 。将式(3.157)改写为

$$\sqrt{\frac{mr_0}{2}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{(r - r_0) \left[ \left( \frac{\beta^2}{2mr_0} - \alpha \right) r + \frac{\beta^2}{2m} \right]}} = t - t_0$$

根据  $\frac{\beta^2}{2mr_0} - \alpha$  的符号, 可以分为以下三种情形:

1.  $\frac{\beta^2}{2mr_0} < \alpha$ , 此时  $E = \frac{\beta^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} < 0$ , 令

$$r_1 = \frac{\frac{\beta^2}{2m}}{\alpha - \frac{\beta^2}{2mr_0}} > 0 \quad (3.158)$$

则式(3.157)可以改写为

$$\frac{mr_0}{\sqrt{2mr_0\alpha - \beta^2}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{(r - r_0)(r_1 - r)}} = t - t_0 \quad (3.159)$$

对式(3.159)两端同时求对  $t$  的导数, 可得

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{2mr_0\alpha - \beta^2}}{mr_0 r} \sqrt{(r - r_0)(r_1 - r)} \quad (3.160)$$

<sup>①</sup> 积分下限的不同取值只会使式(3.157)右端多一个与该固定取值相关的常数, 此常数总可以通过选择时间起点来去除。此处将积分下限取为  $r_0$ , 下文会说明,  $r = r_0$  是  $\dot{r}$  变号的位置。

根据式(3.160)可得

$$\dot{r}|_{r=r_0} = 0, \quad \dot{r}|_{r=r_1} = 0 \quad (3.161)$$

即  $r = r_0$  和  $r = r_1$  是轨道的两个拱点。由式(3.160)中的根式非负也同时可得此运动的径向范围为  $r_0 \leq r \leq r_1$ , 是有界运动。

做变量代换  $r = \frac{r_0 + r_1}{2} - \frac{r_1 - r_0}{2} \cos \xi$ , 则有关于矢径长度的参数方程

$$\begin{cases} r = \frac{r_0 + r_1}{2} - \frac{r_1 - r_0}{2} \cos \xi \\ t = \frac{mr_0(r_0 + r_1)}{2\sqrt{2mr_0\alpha - \beta^2}} \left( \xi - \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0} \sin \xi \right) + t_0 \end{cases} \quad (3.162)$$

2.  $\frac{\beta^2}{2mr_0} = \alpha$ , 此时  $E = \frac{\beta^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} = 0$ , 则式(3.157)可以改写为

$$\frac{m\sqrt{r_0}}{\beta} \int_{r_0}^r \frac{rdr}{\sqrt{r - r_0}} = t - t_0 \quad (3.163)$$

对式(3.163)两端同时求对  $t$  的导数, 可得

$$\dot{r} = \frac{\beta}{mr} \sqrt{\frac{r - r_0}{r_0}} \quad (3.164)$$

即仅当  $r = r_0$  时, 才有  $\dot{r} = 0$ 。由式(3.164)中的根式非负可得此运动的径向范围为  $r \geq r_0$ , 是无界运动。

求出式(3.163)中的积分, 可得矢径长度与时间的关系

$$t = \frac{2m}{3\beta} \sqrt{r_0(r - r_0)}(r + 2r_0) + t_0 \quad (3.165)$$

由此可见, 当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $r \rightarrow +\infty$ 。

3.  $\frac{\beta^2}{2mr_0} > \alpha$ , 此时  $E = \frac{\beta^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} > 0$ , 令

$$r_1 = \frac{\frac{\beta^2}{2m}}{\frac{\beta^2}{2mr_0} - \alpha} > 0 \quad (3.166)$$

则式(3.157)可以改写为

$$\frac{mr_0}{\sqrt{\beta^2 - 2mr_0\alpha}} \int_{r_0}^r \frac{rdr}{\sqrt{(r - r_0)(r + r_1)}} = t - t_0 \quad (3.167)$$

对式(3.167)两端同时求对  $t$  的导数, 可得

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{\beta^2 - 2mr_0\alpha}}{mr_0r} \sqrt{(r - r_0)(r + r_1)} \quad (3.168)$$

在  $r > 0$  的范围内, 仅当  $r = r_0$  时, 才有  $\dot{r} = 0$ 。由式(3.168)中的根式非负可得此运动的径向范围为  $r \geq r_0$ , 是无界运动。

做变量代换  $r = -\frac{r_1 - r_0}{2} + \frac{r_0 + r_1}{2} \cosh \xi$ , 则有关于矢径长度的参数方程

$$\begin{cases} r = -\frac{r_1 - r_0}{2} + \frac{r_0 + r_1}{2} \cosh \xi \\ t = \frac{mr_0(r_1 - r_0)}{2\sqrt{\beta^2 - 2mr_0\alpha}} \left( \frac{r_1 + r_0}{r_1 - r_0} \sinh \xi - \xi \right) + t_0 \end{cases} \quad (3.169)$$



对比, 可知式(3.172)所表示的球面曲线为大圆, 即行星的轨迹是平面的。如图3.7所示, 作一个单位球面, 利用其上的点表示行星在空间中的角度坐标  $(\theta, \phi)$ 。考虑到当  $\phi = \Omega$  时,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 即  $\Omega$  表示轨道平面与  $xOy$  坐标平面的交叉线与  $Ox$  轴所成的角度。记大圆上任意一点  $P$ , 其球面坐标为  $(\theta, \phi)$ , 则单位向量  $\overrightarrow{OP} =: \mathbf{q}$  可以表示为

$$\mathbf{q} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \quad (3.174)$$

而轨道平面与  $xOy$  坐标平面交叉线  $\overrightarrow{ON}$  的方向向量  $\mathbf{n}$  可以表示为

$$\mathbf{n} = \cos \Omega \mathbf{e}_1 + \sin \Omega \mathbf{e}_2 \quad (3.175)$$

因此, 轨道平面的单位法向量可以表示为

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{q}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{q}|} \quad (3.176)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{q} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos \theta \sin \Omega \mathbf{e}_1 - \cos \theta \cos \Omega \mathbf{e}_2 + \sin \theta (\sin \phi \cos \Omega - \cos \phi \sin \Omega) \mathbf{e}_3 \\ &= \cos \theta \sin \Omega \mathbf{e}_1 - \cos \theta \cos \Omega \mathbf{e}_2 + \sin \theta \sin(\phi - \Omega) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (3.177)$$

将式(3.172)带入式(3.177)中, 可得

$$\mathbf{n} \times \mathbf{q} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} (\cos \theta_0 \sin \Omega \mathbf{e}_1 - \cos \theta_0 \cos \Omega \mathbf{e}_2 + \sin \theta_0 \mathbf{e}_3) \quad (3.178)$$

因此有

$$\mathbf{b} = \cos \theta_0 \sin \Omega \mathbf{e}_1 - \cos \theta_0 \cos \Omega \mathbf{e}_2 + \sin \theta_0 \mathbf{e}_3 \quad (3.179)$$

即向量  $\mathbf{b}$  为常向量, 亦即说明行星的运转轨道是平面曲线, 而该平面与  $xOy$  坐标平面之间的夹角为  $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ 。

最后考虑方程(3.156c)。假设在方程(3.156c)中都取正号, 则式(3.156c)化为

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{mr_0^2} t + \phi \sin \theta_0 + \sqrt{2m} \int_{r_0}^r \frac{\frac{\beta}{m} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right)}{2 \sqrt{\frac{\beta^2}{2m} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}} dr \\ + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}} d\theta = -\gamma \end{aligned}$$

整理可得<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}}{\sqrt{\frac{\beta^2}{2m} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}} dr + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \csc^2 \theta} d\theta \\ = -\gamma + \frac{\beta}{mr_0^2} t - \phi \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (3.180)$$

<sup>①</sup> 基于与前面相同的原因, 此处将积分下限取为  $r_0$  和  $\theta_0$ 。



在式(3.157)两端同时取微分, 可得

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{\beta^2}{2m} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} dt \quad (3.181)$$

将式(3.181)代入式(3.180)中, 可得

$$-\frac{\beta}{m} \int_{t_0}^t \frac{dt}{r^2(t)} + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \csc^2 \theta} d\theta = -\gamma + \frac{\beta}{mr_0^2} t_0 - \phi \sin \theta_0 \quad (3.182)$$

考虑式(3.172), 即

$$\cot \theta = \cot \theta_0 \sin(\phi - \Omega) = \cot \theta \cos \left( \phi - \Omega - \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.183)$$

当  $\theta = \theta_0$  时, 有  $\phi = \frac{\pi}{2} + \Omega =: \phi_0$ , 因此将式(3.182)代入式(3.182)中可得

$$-\frac{\beta}{m} \int_{t_0}^t \frac{dt}{r^2(t)} + \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\csc \theta_0}{1 + \cot^2 \theta_0 \cos^2(\phi - \phi_0)} d\phi = -\gamma + \frac{\beta}{mr_0^2} t_0 - \phi_0 \sin \theta_0 \quad (3.184)$$

计算式(3.184)中的积分如下

$$\begin{aligned} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\csc \theta_0}{1 + \cot^2 \theta_0 \cos^2(\phi - \phi_0)} d\phi &= \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\csc \theta_0}{\sin^2(\phi - \phi_0) + (1 + \cot^2 \theta_0) \cos^2(\phi - \phi_0)} d\phi \\ &= \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\csc \theta_0}{\sin^2(\phi - \phi_0) + \csc^2 \theta_0 \cos^2(\phi - \phi_0)} d\phi \\ &= \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\csc \theta_0 \csc^2(\phi - \phi_0)}{1 + \csc^2 \theta_0 \cot^2(\phi - \phi_0)} d\phi \\ &= -\arctan [\csc \theta_0 \cot(\phi - \phi_0)] \Big|_{\phi_0}^{\phi} \\ &= -\arctan [\csc \theta_0 \cot(\phi - \phi_0)] + \arctan(+\infty) \\ &= -\arctan [\csc \theta_0 \cot(\phi - \phi_0)] + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

记  $\Theta = -\arctan [\csc \theta_0 \cot(\phi - \phi_0)]$ , 则式(3.184)化为

$$\Theta = \frac{\beta}{m} \int_{t_0}^t \frac{dt}{r^2(t)} + \Theta_0 \quad (3.185)$$

其中  $\Theta_0 = -\frac{\pi}{2} - \gamma + \frac{\beta}{mr_0^2} t_0 - \phi_0 \sin \theta_0$ , 而  $(r_0, \theta_0, \phi_0)$  即为近日点的球坐标。此处  $\Theta$  的几何意义即为图3.7中的  $\angle NOP$ , 这是因为根据式(3.174)、式(3.175)和式(3.172)可得

$$\begin{aligned} \cos \angle NOP &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \sin \theta \cos \phi \cos \Omega + \sin \theta \sin \phi \sin \Omega \\ &= \sin \theta \cos(\phi - \Omega) = \frac{\cos(\phi - \Omega)}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta_0 \sin^2(\phi - \Omega)}} \end{aligned}$$

故

$$\tan \angle NOP = \csc \theta_0 \tan(\phi - \Omega) = -\csc \theta_0 \cot(\phi - \phi_0)$$

时间  $t_0$  代表行星经过近日点  $(r_0, \theta_0, \phi_0)$  的日期, 因此式(3.185)中的常数  $\Theta_0$  代表近日点与升交点  $N$  之间在单位球面上的角度差, 也常以  $\tilde{\omega}$  表示, 又叫做自升交点的近日点黄经。

下面来考虑行星运行轨道的具体形状。将式(3.185)两端求对  $t$  的导数可得

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\beta}{mr^2} \quad (3.186)$$

同理将式(3.157)两端求对  $t$  的导数可得

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{\beta^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{2mr^2} \right)} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{2mr^2} \right)} \quad (3.187)$$

由式(3.186)和(3.187)可得

$$\frac{dr}{d\Theta} = r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\beta^2} + \frac{2m\alpha}{\beta^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}} \quad (3.188)$$

如果令  $u = \frac{1}{r}$  可将式(3.188)化为

$$-\frac{du}{\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{\beta^4} \left( 1 + \frac{2\beta^2 E}{m\alpha^2} \right) - \left( u - \frac{m\alpha}{\beta^2} \right)^2}} = d\Theta$$

由此可得

$$r = \frac{\frac{\beta^2}{m\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\beta^2 E}{m\alpha^2}} \cos(\Theta - \Theta_0)}$$

记

$$p = \frac{\beta^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\beta^2 E}{m\alpha^2}} \quad (3.189)$$

即有

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\Theta - \Theta_0)} \quad (3.190)$$

由此可得当  $E < 0$  时,  $e < 1$ , 轨道为椭圆; 当  $E = 0$  时,  $e = 1$ , 轨道为抛物线; 当  $E > 0$  时,  $e > 1$ , 轨道为双曲线。他们分别对应式(3.162)、式(3.165)和式(3.169)的三种情况。

至此, 行星在空间中的绕日运动已经完全解决了。这个问题的六个积分常数分别为  $r_0, \theta_0, \beta, t_0, \Omega, \Theta_0$ , 而后面三个是常数  $p_{r_0}, p_{\theta_0}$  和  $\gamma$  的函数。

**例 3.20** 用 Hamilton-Jacobi 方程解平面谐振子问题。

**解** 平面谐振子的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \quad (3.191)$$

系统的 Hamilton 函数不显含时间, 故根据不含时 Hamilton-Jacobi 方程(3.114)可有

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) = E \quad (3.192)$$

将其分离变量可设

$$S(x, y, t) = -Et + W(x, y) = -Et + S_1(x) + S_2(y) \quad (3.193)$$

由此得到两个方程

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dS_2}{dy} \right)^2 + \frac{k}{2}y^2 &= \frac{k}{2}\beta^2 \end{aligned} \right. \quad (3.194a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dS_1}{dx} \right)^2 + \frac{k}{2}x^2 &= E - \frac{k}{2}\beta^2 \end{aligned} \right. \quad (3.194b)$$

由此即有

$$S(x, y, t) = -Et \pm \sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{2E}{k} - \beta^2 - x^2} dx \pm \int \sqrt{\beta^2 - y^2} dy \quad (3.195)$$

为了使式子更加具有对称性, 令

$$E = \frac{k}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \quad (3.196)$$

则有

$$S(x, y, t) = -\frac{k}{2}(\alpha^2 + \beta^2)t \pm \sqrt{mk} \int \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx \pm \sqrt{mk} \int \sqrt{\beta^2 - y^2} dy \quad (3.197)$$

于是质点在空间中的轨迹由如下方程决定

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -p_{x_0} \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = -p_{y_0} \end{cases} \quad (3.198a)$$

$$(3.198b)$$

由式(3.198a)可得

$$-k\alpha t \pm \sqrt{mk} \int_{\alpha}^x \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx = -p_{x_0} \quad (3.199)$$

由此即可得到

$$x = \alpha \cos \left[ \sqrt{\frac{k}{m}} \left( t - \frac{p_{x_0}}{\alpha k} \right) \right] \quad (3.200)$$

由式(3.198b)可得

$$-k\beta t \pm \sqrt{mk} \int_{\beta}^y \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - y^2}} dy = -p_{y_0} \quad (3.201)$$

由此即可得到

$$y = \beta \cos \left[ \sqrt{\frac{k}{m}} \left( t - \frac{p_{y_0}}{\beta k} \right) \right] \quad (3.202)$$

至此, 平面谐振子的问题就完全解决了, 此问题的四个积分常数分别为  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p_{x_0}$  和  $p_{y_0}$ , 其中能量和  $\alpha$ ,  $\beta$  之间的关系为

$$E = \frac{k}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \quad (3.203)$$

### 3.7.5 从“几何力学”到“波动力学”

#### 3.7.5.1 作用波与作用波面

考虑单粒子的 Hamilton 函数

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

则有

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} = \nabla S$$

考虑不含时 Hamilton-Jacobi 方程, 则有

$$S(\mathbf{r}, t) = W(\mathbf{r}) - Et$$

则不含时 Hamilton-Jacobi 方程可以写作

$$\frac{1}{2m}(\nabla W)^2 + V = E$$

此处

$$|\nabla W| = p = \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))}$$

由此可称

$$S(\mathbf{r}, t) = W(\mathbf{r}) - Et = S_0$$

为运动曲面。即在空间传播的等  $S$  面可视为作用波波面，其正交曲线族为粒子在不同初始条件（能量相同，初始动量不同）下的轨道。波面法向亦即轨道切向为粒子动量方向。初始条件决定运动表现为粒子在作用波波面引导下前进。

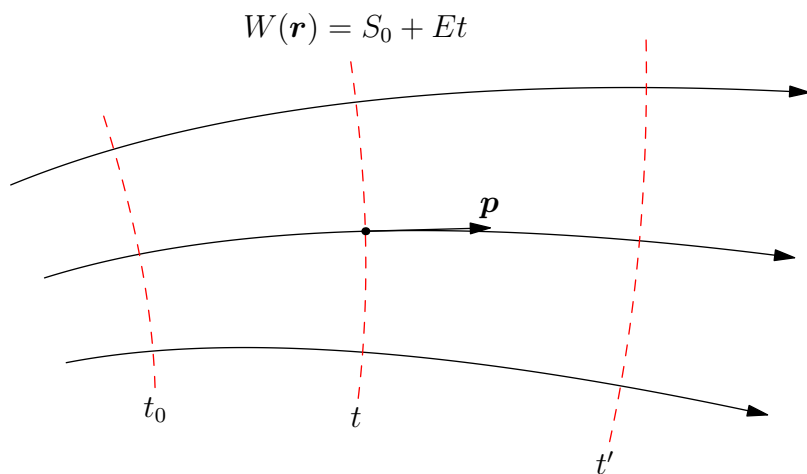


图 3.8: 作用波波面示意图

### 3.7.5.2 波动光学与几何光学的关系

光的“微粒说”与“波动说”的理论统一由 Hamilton 完成。考虑介质电磁波方程

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.204)$$

式中  $\Phi$  为电磁场的任一分量， $u(\mathbf{r}) = \frac{c}{n(\mathbf{r})}$  为非均匀介质中的波速。

对单色波，其波函数可表示为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

将其代入(3.204)中可得振幅  $\phi(\mathbf{r})$  应满足的方程为

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (3.205)$$

式中  $k = \frac{\omega}{u} = n \frac{\omega}{c} = nk_0$ ，其中  $k_0$  为此电磁波在真空中的波数。  
在均匀介质中，单色波的振幅为

$$\phi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = Ae^{ik_0 L(\mathbf{r})}$$

式中, 函数  $L(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot n\mathbf{r}$  称为**光程函数**。即单色波在均匀介质中的波函数为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(k_0 L(\mathbf{r}) - \omega t)}$$

波函数的等相位面即为**波面**, 单色波在均匀介质中的波面为平面族:

$$\theta = k_0 L(\mathbf{r}) - \omega t = \theta_0$$

波面的正交曲线族即为**光线**, 单色波在均匀介质中的光线为直线。

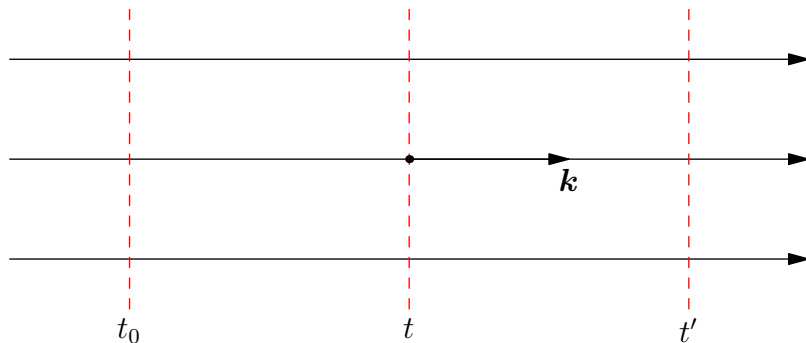


图 3.9: 均匀介质中单色波的波面和光线

在非均匀介质中, 单色波的振幅可以表示为

$$\phi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{ik_0 L(\mathbf{r})}$$

将其代入式(3.205)中, 可得

$$\nabla^2 \phi = e^{ik_0 L} [\nabla^2 A + ik_0 (A \nabla^2 L + 2 \nabla A \cdot \nabla L) - k_0^2 A (\nabla L)^2] = -k^2 A e^{ik_0 L}$$

即有

$$\frac{1}{k_0^2} \nabla^2 A + \frac{i}{k_0} (A \nabla^2 L + 2 \nabla A \cdot \nabla L) - [(\nabla L)^2 - n^2] A = 0 \quad (3.206)$$

在短波长极限 (几何光学极限) 下, 即  $\lambda_0 \rightarrow 0$  时, 此时  $k_0 \rightarrow +\infty$ , 在此近似下式(3.206)的前两项均为小量, 忽略之可得**程函方程**

$$(\nabla L)^2 = n^2 \quad (3.207)$$

在此情形下, 单色波的相位为

$$\psi(\mathbf{r}, t) = k_0 L(\mathbf{r}) - \omega t$$

波面 (即波函数的等相位面) 的方程为

$$\psi(\mathbf{r}, t) = k_0 L(\mathbf{r}) - \omega t = \psi_0$$

或者

$$k_0 L(\mathbf{r}) = \psi_0 + \omega t$$

根据程函方程(3.207)可得相位  $\psi(\mathbf{r}, t)$  满足

$$|\nabla \psi| = k_0 n = k$$

由此可有

$$\nabla \psi = \mathbf{k}$$

即, 光线 (波面的正交曲线族) 可视为 “光微粒” 的轨道。光的 “微粒说” 与 “波动说” 在短波长极限下统一。

### 3.7.5.3 物质波假说与 Schrödinger 方程

在  $\lambda \rightarrow 0$  时, 波动光学的极限即为几何光学。是否在某种极限下, 能够有某种波动力学, 其极限为经典力学?

de Broglie 提出物质波假说, 即质点所对应的“物质波”角频率和波数满足

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \end{cases} \quad (3.208)$$

假设“单色”物质波振幅同样满足方程(3.205)

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0$$

再考虑到

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))}}{\hbar}$$

可得物质波振幅应满足的方程为

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \phi = E\phi \quad (3.209)$$

方程(3.209)即为定态 Schrödinger 方程。

对于含时的情况下, 类比于光学的情况, 可设波函数的形式为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \phi(\mathbf{r})e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

其满足方程

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = E\Phi \quad (3.210)$$

将定态 Schrödinger 方程代入上式, 即有含时 Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \Phi \quad (3.211)$$

类比  $\nabla \frac{S}{\hbar} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar} = \mathbf{k}$  与波动光学的  $\nabla \psi = \mathbf{k}$ , 可知波函数的相位即为  $\frac{S}{\hbar}$ , 因此波函数又可表示为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = |\Phi(\mathbf{r}, t)| e^{i\frac{S(\mathbf{r}, t)}{\hbar}}$$

据此考虑含时 Schrödinger 方程(3.211)的实部, 即

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \left[ \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 |\Phi|}{|\Phi|} \right]$$

取上式在  $\hbar \rightarrow 0$  的极限, 可有

$$\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

此即为单粒子的 Hamilton-Jacobi 方程。因此, 量子力学在  $\hbar \rightarrow 0$  下的极限即为经典力学。

## 3.8 Hamilton 理论在物理学中的应用

### 3.8.1 连续体系的 Lagrange 方程

首先, 以一维轻质长弦的横振动为例导出一维弦的 Lagrange 函数。记弦的质量线密度为  $\rho$ , 各点相对其平衡位置的位移可以表示为  $\eta(x)$ 。首先将弦分为  $n$  等份, 记每段弦的长度为  $\Delta x$ , 作为  $n$  个质量为  $\rho\Delta x$  的质点处理。将这些质点的位移分别记作  $\eta_i$ , 则它们的动能可以表示为

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho \Delta x \dot{\eta}_i^2 \quad (3.212)$$

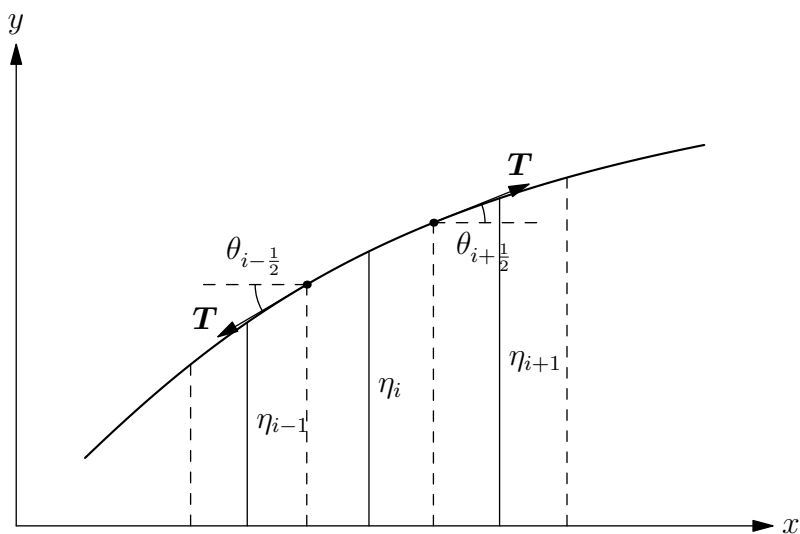


图 3.10: 一维弦的横振动

如图3.10所示, 在微振动假设下, 角  $\theta_{i-1/2}$  和  $\theta_{i+1/2}$  都很小, 故有第  $i$  个质点所受的横向力为

$$\begin{aligned} F_i &= T \sin \theta_{i+1/2} - T \sin \theta_{i-1/2} \approx T \tan \theta_{i+1/2} - T \tan \theta_{i-1/2} \approx T \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta x} - T \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\Delta x} \\ &= T \frac{\eta_{i+1} - \eta_{i-1}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (3.213)$$

由此可推知此体系的势能为

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} T \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \quad (3.214)$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 同时  $\Delta x \rightarrow 0$ , 则有

$$T \rightarrow \int \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.215)$$

$$V \rightarrow \int \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.216)$$

由此得到一维弦的 Lagrange 函数为

$$L = T - V = \int \left[ \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \int \mathcal{L} dx \quad (3.217)$$

其中

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2}\rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \quad (3.218)$$

称为该连续体系的 **Lagrange 密度**，而  $\mathcal{T}$  和  $\mathcal{V}$  则分别称为该连续体系的**动能密度**和**势能密度**。

由上面的讨论可以看出，连续体系的位置坐标  $x$  在 **Lagrange 函数**中并不是广义坐标<sup>①</sup>，而仅仅是取代了分离体系中的求和指标  $i$ 。对于每一个  $x$  和  $t$ ， $\eta(x, t)$  是广义坐标，而  $x$  和  $t$  同为 **Lagrange 函数**的参数。

对于一般的三维连续体系，其广义坐标可以取为  $\eta_1(\mathbf{x}, t), \eta_2(\mathbf{x}, t), \dots, \eta_s(\mathbf{x}, t)$ ，而体系的 **Lagrange 函数**则表示为

$$L = \int_V \mathcal{L} dV \quad (3.219)$$

而三维空间中的 **Lagrange 密度**的一般形式为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial t}, \frac{\partial \eta_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \eta_s}{\partial t}, \nabla \eta_1, \nabla \eta_2, \dots, \nabla \eta_s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s, \mathbf{x}, t \right)$$

或者简单地记作

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}, \nabla \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}, t \right) \quad (3.220)$$

由此，根据 **Hamilton 原理**，体系的 **Lagrange 方程**由式

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L} dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \delta \mathcal{L} dV dt = 0 \quad (3.221)$$

给出。由于此连续体系的广义坐标为  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ ，因此此处的变分运算不仅满足  $\delta t = 0$ ，而且满足  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。因此有

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{k=1}^s \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \frac{\partial \eta_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} \delta \eta_k \right] \quad (3.222)$$

由于此处变分是对  $\eta_k(\mathbf{x}, t)$  的，因此可有

$$\delta \frac{\partial \eta_k}{\partial t} = \frac{\partial(\delta \eta_k)}{\partial t}, \quad \delta \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} = \frac{\partial(\delta \eta_k)}{\partial x_j}$$

据此处理式(3.222)中的各项，可有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \frac{\partial \eta_k}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \frac{\partial(\delta \eta_k)}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \eta_k \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) \delta \eta_k \end{aligned} \quad (3.223)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \frac{\partial(\delta \eta_k)}{\partial x_j} \\ &= \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \eta_k \right) - \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) \delta \eta_k \end{aligned} \quad (3.224)$$

<sup>①</sup> 实际上，此连续体系的 **Lagrange 函数**与位置坐标  $x$  无关。



将式(3.223)和式(3.224)代入式(3.222)中, 可得

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \eta_k \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \eta_k \right) \right] \\ & - \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} \right] \delta \eta_k \end{aligned} \quad (3.225)$$

此处, 对函数  $f\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}, \nabla \eta, \eta, \mathbf{x}, t\right)$  的求导操作  $\frac{df}{dt}$  和  $\frac{df}{dx_j}$  分别表示对函数

$$g(\mathbf{x}, t) = f\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \nabla \eta(\mathbf{x}, t), \eta(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t\right)$$

求  $x_j$  和  $t$  的偏导数。将式(3.225)代入式(3.221)可得

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \eta_k \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \eta_k \right) \right] dV dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} \right] \delta \eta_k dV dt \\ = & \int_V \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \eta_k dV \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial V} \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \eta_k n_j dS dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} \right] \delta \eta_k dV dt \end{aligned} \quad (3.226)$$

由于在边界上有  $\delta \eta_k = 0$ , 即  $\delta \eta_k(\mathbf{x}, t_1) = \delta \eta_k(\mathbf{x}, t_2) = 0$  以及在  $\partial V$  上,  $\delta \eta_k(\mathbf{x}, t) = 0$ , 因此式(3.226)可化为

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} \right] \delta \eta_k dV dt \quad (3.227)$$

由于  $\delta \eta_k$  之间是相互独立的, 故可得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (3.228)$$

式(3.228)就是连续体系的 Lagrange 方程。

**例 3.21** 获得一维轻质长弦在微振动近似下的横振动方程。

**解** 前文已得出一维轻质长弦在此情形下的 Lagrange 密度如式(3.218)所示, 即

$$\mathcal{L} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \eta, x, t \right) = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2$$

将式(3.218)代入(3.228)中, 即可得到

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (3.229)$$

这就是一维轻质长弦微振动的方程。这是一个波动方程, 波速为  $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 。

### 3.8.2 电磁场的 Lagrange 方程

真空中的电磁场的运动规律由 Maxwell 方程组给出：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (3.230a) \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} & (3.230b) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & (3.230c) \\ \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} & (3.230d) \end{cases}$$

虽然  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  总共有 6 个分量，但其中只有 4 个分量是相互独立的<sup>①</sup>，因此它们并不适合取为电磁场的广义坐标。此处我们取电磁场的标量势  $\phi$  和矢量势  $\mathbf{A}$  作为电磁场的广义坐标。此处标量势  $\phi$  和矢量势  $\mathbf{A}$  与电磁场场变量  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  之间的关系可以由式(3.230a)和式(3.230b)决定，即

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.231)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.232)$$

因此，当用  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  描述电磁场时，式(3.230c)和式(3.230d)是场的运动方程，而式(3.230a)和式(3.230b)则只是  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  的定义而已。

下面来根据场的运动方程式(3.230c)和式(3.230d)来构造电磁场的 Lagrange 密度。首先，电磁场的 Lagrange 密度中需要包含场量  $\phi$ 、 $\mathbf{A}$  和他们的导数。根据电磁场的时间平移对称性和空间平移对称性，电磁场的 Lagrange 密度中不能显含时间  $t$  和空间坐标  $\mathbf{x}$ 。记  $x_0 = t$ ,  $A_0 = \phi$ ，则可设电磁场的 Lagrange 密度为<sup>②</sup>

$$\mathcal{L} = B_i A_i + C_{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + D_{ijk} A_i \frac{\partial A_j}{\partial x_k} + E_{ijkl} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \quad (3.233)$$

将式(3.233)代入 Lagrange 方程(3.228)中，并结合量纲分析可以确定电磁场的 Lagrange 密度可以取如下的形式<sup>③</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \rho\phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 \left( \nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] - \rho\phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.234)$$

### 3.8.3 Schrödinger 方程的建立

非相对论量子力学有三种不同的理论形式，它们正好和经典力学 Hamilton 理论的三种不同形式的动力学方程相对应。1925 年 10 月 Heisenberg 建立的通常被称为矩阵力学的量子力学，经 Dirac 研究可表示为量子 Poisson 括号表示的正则方程的形式；独立于 Heisenberg，1926 年 3 月 Schrödinger 所建立的量子力学的波动方程则是直接从 Hamilton-Jacobi 方程过渡而来的；1948-1950 年，Dirac 和 Fermi 建立的路径积分形式的量子力学，则与 Hamilton 原理的形式类似。

① 这一点可以用 Maxwell 方程组只有 4 个方程来印证。

② 此处利用了 Einstein 求和约定，用重复的指标表示求和，求和范围为 0 到 3。

③ 与 Lagrange 函数类似，Lagrange 密度的形式也是不唯一的，这里取了形式最简单的一种。

下面我们遵循 Schrödinger 的本意, 从氢原子核外电子的 Hamilton-Jacobi 方程出发, 导出定态 Schrödinger 方程。

对于氢原子核外电子, 其 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{\alpha}{r} \quad (3.235)$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ 。因此其 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\alpha}{r} = E \quad (3.236)$$

其中  $W = W(x, y, z)$  是经典 Hamilton 特征函数。作变换

$$W = \hbar \ln \psi \quad (3.237)$$

式中  $\hbar$  是一个常数。由于  $\ln \psi$  不带量纲, 因此  $\hbar$  与 Hamilton 特征函数  $W(x, y, z)$  具有相同的量纲, 即作用量的量纲。由此, Hamilton-Jacobi 方程(3.236)可以变换为

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi^2 = 0 \quad (3.238)$$

式(3.238)是完全经典的, 没有附加任何量子假设。

现在假设电子不是一个经典粒子, 是具有波粒二象性的。把电子看作是像电磁波那样的“物质波”, 取一个适当的 Lagrange 密度, 用 Hamilton 原理得出电子的波动方程。根据 Hamilton 原理可得

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (3.239)$$

为了使式(3.239)成立, 可令  $\delta L = 0$ , 即

$$\delta L = \delta \int_V \mathcal{L} dV \quad (3.240)$$

对于波动, 有一个普遍适用的结论: 体系的平均动能恒等于平均势能, 又考虑到  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ , 因此我们可以得到电子波的 Lagrange 函数应该是一个恒等于零的函数。而上面将电子考虑为一个经典粒子, 它的 Hamilton-Jacobi 方程就是式(3.238), 这就是一个恒等于零的表达式。因此要将波粒二象性结合起来, 最自然的选择就是取式(3.238)作为电子波的 Lagrange 密度<sup>①</sup>。即有

$$\delta J = \delta \int_V \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi^2 \right] dV = 0 \quad (3.241)$$

具体计算

$$\begin{aligned} \delta J &= 2 \int_V \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi \delta \psi \right] dV \\ &= 2 \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \psi \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \delta \psi + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \psi \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \delta \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta \psi \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \delta \psi \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi \delta \psi \right] dV \end{aligned}$$

<sup>①</sup> 准确的讲是令其与电子波的 Lagrange 密度成正比, 因为式(3.238)与 Lagrange 密度的量纲是不同的。

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \psi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \psi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta \psi \right) \right] dV \\
&\quad - 2 \int_V \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi \right] \delta \psi dV \\
&= 2 \oint_{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta \psi dS - 2 \int_V \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi \right] \delta \psi dV = 0
\end{aligned}$$

因此可得

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{\alpha}{r} \psi = E \psi \quad (3.242)$$

以及

$$\oint_{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta \psi dS = 0 \quad (3.243)$$

式(3.243)是一个面积分为零的表达式,由于  $\delta \psi$  是任意的,因此可以取  $\psi|_{\partial V} = 0$  以及  $\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\partial V} = 0$  作为偏微分方程(3.242)的边界条件。而偏微分方程(3.242)即为氢原子中电子的定态 Schrödinger 方程。

## 第四章 两体问题

无外力的两质点体系在相互作用下的运动求解问题称为**两体问题**。

两体中心力是自然界最普遍、最典型的力场之一。中心力问题研究肇始于行星运动的理论解释，对原子核式模型的确立起了关键性的作用。

### 4.1 两体问题约化与中心力场

#### 4.1.1 Lagrange 函数及其分离变量

在两体系统不受外力作用时，设两个质点之间的相互作用势表示为  $V = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ，则系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (4.1)$$

可见此 Lagrange 函数无循环坐标，两粒子的运动相互耦合。

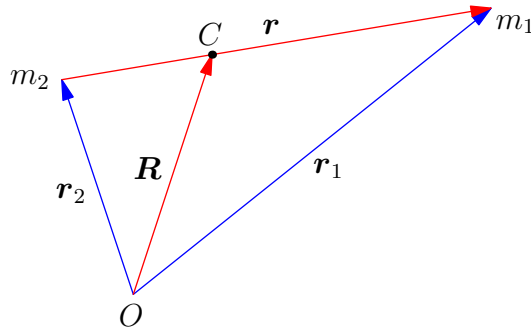


图 4.1: 两体问题

考虑取质心坐标

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.2)$$

和两个质点之间的相对位矢

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (4.3)$$

为广义坐标。记  $M = m_1 + m_2$  为体系的总质量， $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$  为两体约化质量，则有

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} = \mathbf{R} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r} = \mathbf{R} - \frac{\mu}{m_2}\mathbf{r} \end{cases} \quad (4.4)$$

由此, 系统的 Lagrange 方程可以表示为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1 \left( \dot{\mathbf{R}} + \frac{\mu}{m_1} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( \dot{\mathbf{R}} - \frac{\mu}{m_2} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 - V(r) \\ &= \frac{1}{2}M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) \end{aligned} \quad (4.5)$$

由此可以将两体问题等效为两个单体问题——解耦:

1. 整体运动: 质量为  $M$  的质点的运动。Lagrange 函数不显含  $\mathbf{R}$ , 故有  $\dot{P} = \mathbf{0}$ , 即  $M$  做惯性运动。

2. 相对运动: 质量为  $\mu$  的质点的运动。

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$$

即  $\mu$  在势场  $V$  中的运动。

系统的动能  $T = T_C + T'$ , 其中  $T_C = \frac{1}{2}M \dot{\mathbf{R}}^2$  为整体动能,  $T' = \frac{1}{2}\mu \dot{\mathbf{r}}^2$  为两体内动能。系统的角动量  $\mathbf{l} = \mathbf{l}_C + \mathbf{l}'$ , 其中  $\mathbf{l}_C = \mathbf{R} \times M \dot{\mathbf{R}}$  为轨道角动量,

$$\mathbf{l}' = \mathbf{r}'_1 \times m_1 \dot{\mathbf{r}}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times m_2 \dot{\mathbf{r}}'_2 = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}}$$

为内秉角动量。

由于两体系统的整体运动即为惯性运动, 因此后面的讨论集中于相对运动的求解。

## 4.1.2 两体中心力场

如果两体相互作用势能只与两个粒子的相对距离  $r$  有关, 而和它们的相对方向无关, 即  $V(\mathbf{r}) = V(r)$ , 这种势场称为**中心势场**。在中心势场中, 可有两个质点之间的相互作用力为<sup>①</sup>

$$\mathbf{f}_{12} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = -V'(r) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = -V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = -\mathbf{f}_{21} \quad (4.6)$$

由此, 内力做功为

$$\mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2 = -V'(r) dr = -dV(r) \quad (4.7)$$

故  $\mu$  的运动能量守恒。再考虑内力矩

$$\dot{\mathbf{l}}' = \mathbf{M}' = \mathbf{r} \times \left( -V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

故  $\mu$  的运动内秉角动量守恒, 而且有  $\mathbf{r} \perp \mathbf{l}'$ , 即  $\mu$  在垂直于内秉角动量的固定平面内运动。因此相对运动可用平面极坐标系来描述, 即取  $r, \theta$  为广义坐标, 则此时的 Lagrange 函数为

$$L' = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r) \quad (4.9)$$

<sup>①</sup> 此处由于

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

可有

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = \nabla r = \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{e}_3 = \frac{x}{r} \mathbf{e}_1 + \frac{y}{r} \mathbf{e}_2 + \frac{z}{r} \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

## 4.2 等效势、运动解与轨道方程

### 4.2.1 运动方程

根据相对运动的 Lagrange 函数

$$L' = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

可得运动方程为

$$\begin{cases} \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -V'(r) = f(r) \\ \mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

### 4.2.2 守恒定律

$\theta$  为循环坐标, 故有  $p_\theta$  守恒, 即

$$p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} = l (\text{常数}) \quad (4.11)$$

此即为两体内秉角动量守恒。

Lagrange 函数  $L'$  不显含时间, 故

$$H = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E (\text{常数}) \quad (4.12)$$

即两体内能守恒。

### 4.2.3 运动解

由式(4.11)可得

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$$

代入式(4.12)可得

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = E \quad (4.13)$$

令

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (4.14)$$

称为等效势, 则式(4.13)化为

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) = E \quad (4.15)$$

由此, 径向运动等效为质点  $\mu$  在等效势场  $U(r)$  中的一维运动。等效势中的惯性离心势来自可遗角坐目标共轭动量效应。

在

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r)]} \quad (4.16)$$

两边积分可得

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}} \quad (4.17)$$

即有  $r = r(t)$ 。再在

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \quad (4.18)$$

两边积分可得

$$\theta - \theta_0 = \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt}{[r(t)]^2} \quad (4.19)$$

即有  $\theta = \theta(t)$ 。由此即得到了全部相对运动的解。

## 4.2.4 轨道方程

将式(4.16)与式(4.18)相除, 可得

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{\mu r^2}{l} \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r)]} \quad (4.20)$$

做变量代换  $u = \frac{1}{r}$ , 可得两体问题轨道微分方程

$$\frac{du}{d\theta} = \mp \frac{1}{l} \sqrt{2\mu \left[ E - U\left(\frac{1}{u}\right) \right]} \quad (4.21)$$

对于势场  $V(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$  和  $V(r) = \alpha r^2$ , 式(4.21)有解析解。如果  $r$  的变化区间有两个边界  $r_{\min}$  和  $r_{\max}$ , 则轨道位于两个圆  $r = r_{\min}$  和  $r = r_{\max}$  所限制的环形区域内, 但有限运动的轨道并不一定是闭合的。在  $r$  从  $r_{\max}$  变化到  $r_{\min}$  再变回  $r_{\max}$  的这段时间内, 矢径转过了一个角度  $\Delta\theta$ , 根据式(4.21)有

$$\Delta\theta = \mp 2 \int_{\frac{1}{r_{\max}}}^{\frac{1}{r_{\min}}} \frac{l du}{\sqrt{2\mu \left[ E - U\left(\frac{1}{u}\right) \right]}} \quad (4.22)$$

如果  $\Delta\theta$  与  $2\pi$  的比值是有理数, 轨道是闭合的。一般来说, 在任意形式的  $V(r)$  情况下, 轨道闭合的情况是罕见的。在任意形式的  $V(r)$  情况下,  $\Delta\theta$  与  $2\pi$  的比值并不是有理数, 因此在一般情况下, 有限运动的轨道并不是闭合的。在无限长的时间进程中, 轨道无数次经过  $r_{\max}$  和  $r_{\min}$  的位置而填满由两个圆所限制的整个圆环, 如图4.2所示。只有  $V(r) = \frac{\alpha}{r}$  和  $V(r) = \alpha r^2$  两种形式的势场中, 任意有限运动的轨道都是闭合的。

也可通过系统的运动方程(4.10)得到轨道满足的微分方程。考虑

$$\dot{r} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{l}{\mu} \frac{du}{d\theta}$$

所以

$$\ddot{r} = \dot{\theta} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{l}{\mu} \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{l^2 u^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

由此可得

$$-\frac{l^2 u^2}{\mu} \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \mu r \left( \frac{l}{\mu r^2} \right)^2 = f(r)$$

整理可得二阶常微分方程

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \quad (4.23)$$

称为 Binet 方程。



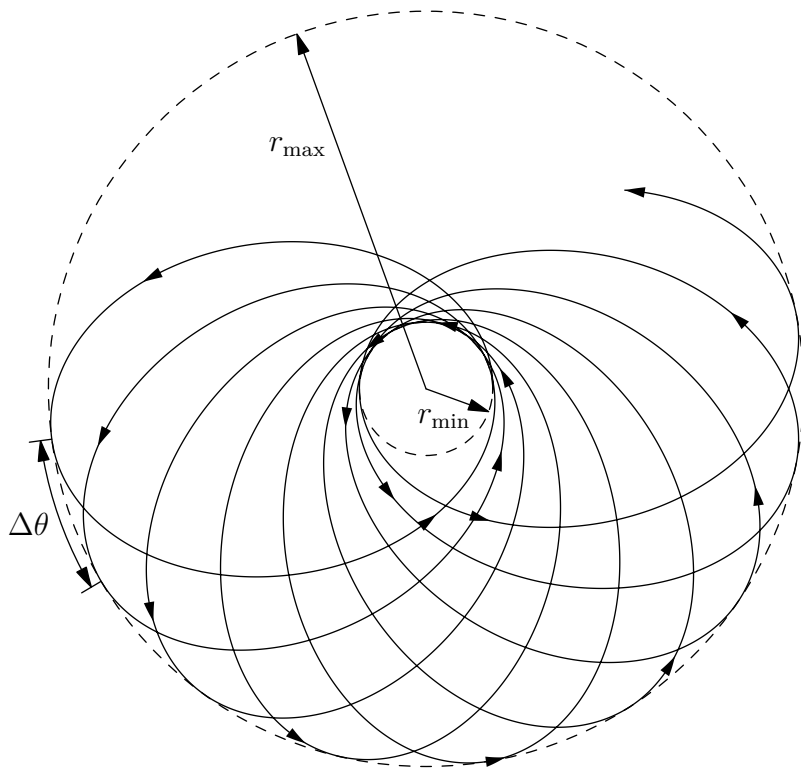


图 4.2: 非闭合轨道

### 4.2.5 圆轨道的存在性与稳定性

圆轨道存在，即径向运动处于静止状态，即可以表示为

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r_m} = 0$$

稳定要求在圆轨道上等效势能取极小值，即

$$\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r_m} > 0$$

例 4.1 利用等效势定性分析质点在势场

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^n}, \quad \alpha, n > 0$$

中的运动。

解 势场对应的力

$$f(r) = -V'(r) = -\frac{\alpha n}{r^{n+1}} < 0$$

即势场为吸引势。则等效势为

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

径向运动方程

$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U(r) = E$$

需要满足  $\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 \geq 0$ ，即

$$U(r) \leq E$$

上面的不等式即决定了质点径向运动的范围。计算

$$U'(r) = -\frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha n}{r^{n+1}} = 0$$

可得  $U(r)$  的极值点为

$$r_m = \left( \frac{l^2}{n\alpha\mu} \right)^{\frac{1}{2-n}}$$

极值点存在要求  $n \neq 2$ , 因此势场分为  $0 < n < 2$ 、 $n > 2$  和  $n = 2$  三种情形。

1.  $0 < n < 2$ 。当  $E = E_0 = U_{\min}$  时, 质点沿圆轨道运动, 由于是极小值轨道是稳定的。

当  $E = E_1 < 0$  时, 运动被限制在  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  的范围内, 这种状态称为束缚态。按前面的讨论, 束缚态的轨道不一定是闭合的。

当  $E = E_2 = 0$  时, 粒子的运动范围为  $r \geq r_{\min}$ , 当  $r \rightarrow +\infty$  时, 粒子的速度趋于 0, 轨迹趋于直线。

当  $E = E_3 > 0$  时, 粒子的运动范围同样为  $r \geq r_{\min}$ , 但当  $r \rightarrow +\infty$  时, 粒子的动能趋于  $E$ , 轨迹趋于直线。这种状态称为散射态。

2.  $n > 2$ 。当  $E = E_0 = U_{\max}$  时, 质点沿圆轨道运动, 由于是极大值轨道是不稳定的。

当  $0 < E = E_1 < U_{\max}$  时, 粒子只能出现在  $r = r_{\min}$  的圆内或  $r = r_{\max}$  的圆外, 在中间的环形区域内粒子是禁戒的。若初始时刻粒子在  $r = r_{\min}$  的圆内, 则  $\dot{r} < 0$  时, 粒子被吸引至力心; 当  $\dot{r} > 0$  时, 粒子先飞到  $r = r_{\min}$  的圆周上, 然后折回到力心。而如果初始时刻粒子在  $r = r_{\max}$  的圆外, 则  $\dot{r} < 0$  时, 粒子先飞到  $r = r_{\max}$  的圆周上, 然后飞向无穷远处; 当  $\dot{r} > 0$  时, 粒子直接飞翔无穷远处最终成为自由粒子。

当  $E = E_2 = 0$  时或者  $E = E_4 < 0$  时, 粒子的运动范围为  $r = r_{\max}$  的圆内, 并最终被力心俘获。

当  $E = E_3 > U_{\max}$  时, 粒子可在全空间运动。当  $\dot{r} > 0$  时, 粒子飞向无穷远最终变为自由粒子; 当  $\dot{r} < 0$  时, 粒子飞向中心, 最后被力心俘获。

3.  $n = 2$  而且  $\alpha > \frac{l^2}{2\mu}$ 。当  $E = E_1 < 0$  时, 粒子只能出现在  $r = r_{\max}$  的圆内, 并最终被力心俘获。

当  $E = E_2 = 0$  时, 粒子可在全空间运动, 最终粒子将飞向无穷远处且趋于静止。

当  $E = E_3 > 0$  时, 粒子可在全空间运动, 最终将飞向无穷远处最终称为自由粒子。

4.  $n = 2$  而且  $\alpha < \frac{l^2}{2\mu}$ 。在这种情形下, 只能  $E > 0$ , 此时粒子只能出现在  $r = r_{\max}$  的圆外, 最终飞向无穷远而称为自由粒子。

#### 例 4.2 求势场

$$V(r) = \alpha r^n$$

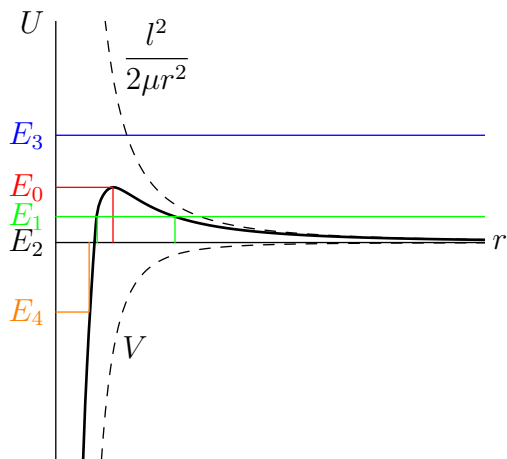
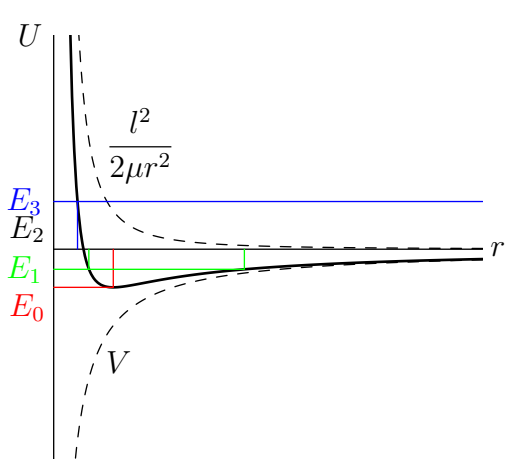
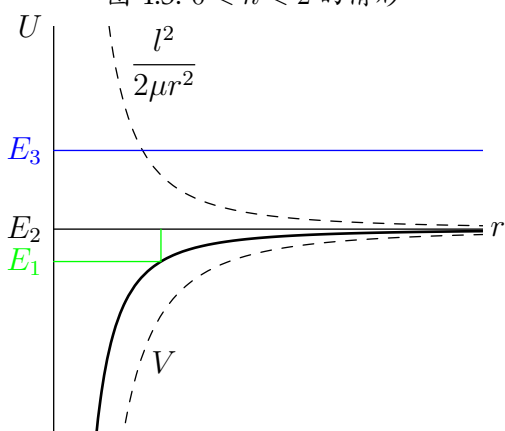
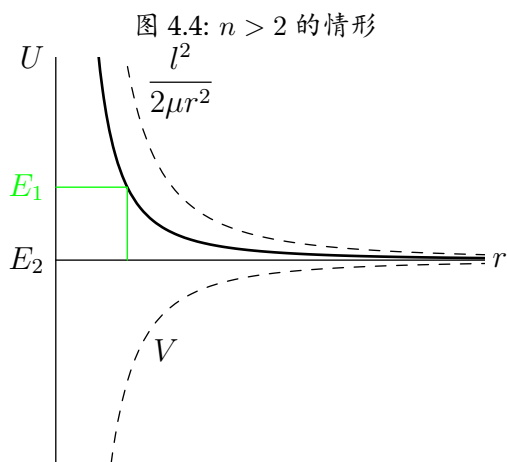
存在稳定圆轨道的条件。

解 等效势为

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \alpha r^n$$

存在圆轨道要求

$$U'(r_m) = -\frac{l^2}{\mu r_m^3} + \alpha n r_m^{n-1} = 0$$

图 4.3:  $0 < n < 2$  的情形图 4.5:  $n = 2$  的情形 ( $\alpha > \frac{l^2}{2\mu}$ )图 4.6:  $n = 2$  的情形 ( $\alpha < \frac{l^2}{2\mu}$ )

即有

$$\alpha n r_m^{n+2} = \frac{l^2}{\mu}$$

由此即要求  $\alpha n > 0$ 。此时

$$f(r) = -V'(r) = -\alpha n r^{n-1} < 0$$

即存在圆轨道要求势场为吸引力场。下面考虑稳定性，稳定性要求

$$U''(r_m) = \frac{1}{r_m^4} \left[ (n-1)\alpha n r_m^{n+2} + \frac{3l^2}{\mu} \right] = (n+2) \frac{l^2}{\mu r_m^4} > 0$$

即圆轨道稳定要求  $n > -2$ 。

综上，存在稳定圆轨道的条件为  $\alpha > 0, n > 0$  或者  $\alpha < 0, -2 < n < 0$ 。

## 4.3 距离反比势场与 Kepler 问题

距离反比势可以表示为

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad f(r) = -V'(r) = \frac{\alpha}{r^2}$$

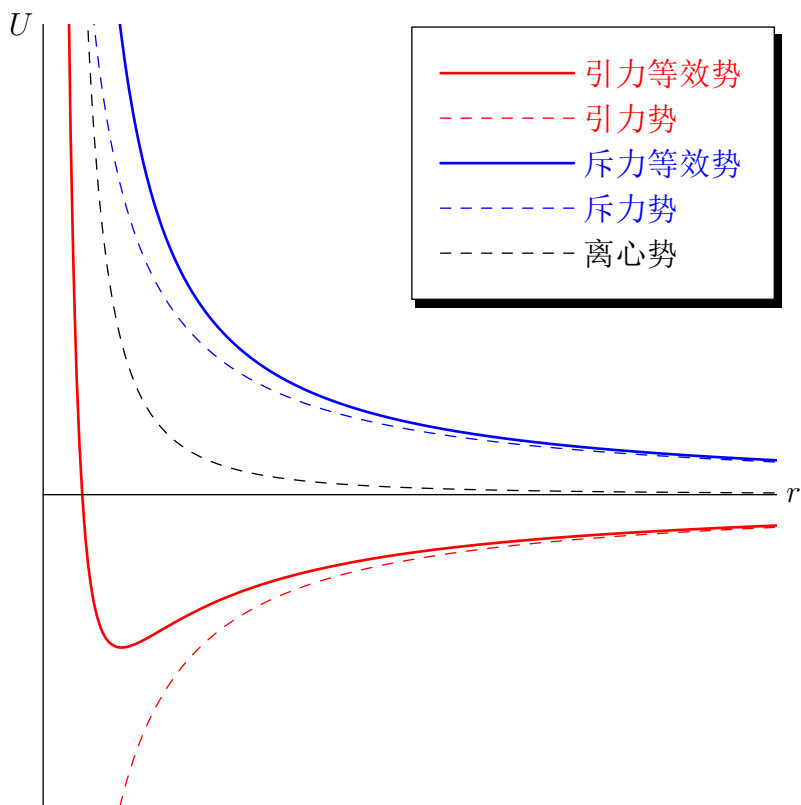


图 4.7: 距离反比势场势能曲线图

此势场当  $\alpha < 0$  时表现为引力场, 当  $\alpha > 0$  时表现为斥力场。其等效势为

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r} \quad (4.24)$$

对于引力情形, 在

$$r_m = -\frac{l^2}{\mu\alpha} \quad (4.25)$$

时, 等效势有极小值

$$U_{\min} = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2} \quad (4.26)$$

对于斥力情形, 等效势没有极值, 仍记

$$r_m = -\frac{l^2}{\mu\alpha}$$

当  $\alpha < 0$  时 (即引力情形) 称为 **Kepler 问题**。

### 4.3.1 轨道方程

对于 Kepler 问题, Binet 方程(4.23)为

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{r_m} \quad (4.27)$$

方程(4.27)的通解为

$$u = \frac{1}{r_m} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

即

$$r = \frac{r_m}{1 + Ar_m \cos(\theta - \theta_0)}$$

适当选取极轴的方向, 可以使得  $\theta_0 = 0$ , 此时轨道方程为

$$r = \frac{r_m}{1 + Ar_m \cos \theta}$$

记

$$p = |r_m| = \frac{l^2}{\mu|\alpha|}, \quad e = Ap$$

其中  $p$  为半通径,  $e$  为离心率, 由此可得 Kepler 问题的轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (4.28)$$

根据轨道方程可得质点与力心的最短距离为

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e}$$

此点一般称为近日点。在近日点有  $\dot{r}|_{r=r_{\min}} = 0$ , 因此  $r_{\min}$  满足

$$\frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2} + \frac{\alpha}{r_{\min}} = E$$

由此可得离心率与系统总能量的关系

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{U_{\min}}}$$

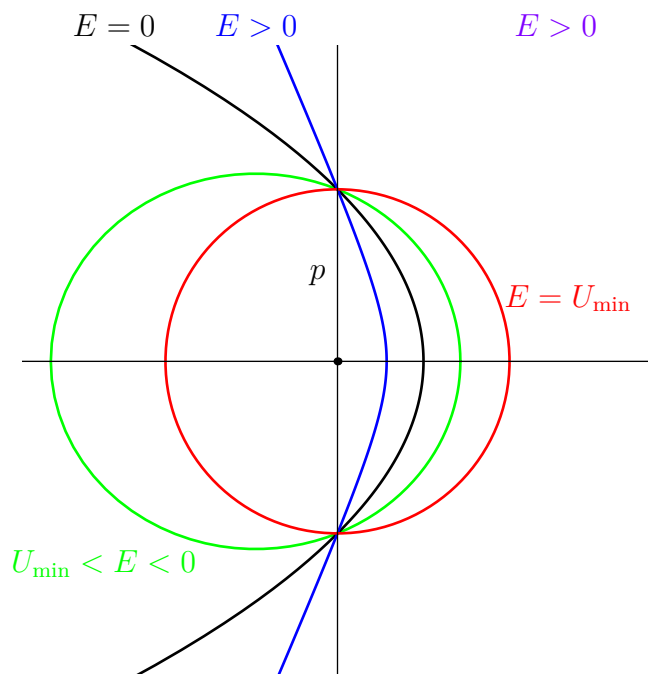


图 4.8: 各种情形下轨道的形状

在引力的情形下,  $\alpha < 0$ , 按照体系能量的区别可以分为以下 4 种情况:

1. 当  $E > 0$  时,  $e > 1$ , 轨道为双曲线;

2. 当  $E = 0$  时,  $e = 1$ , 轨道为抛物线;
3. 当  $U_{\min} < E < 0$  时,  $0 < e < 1$ , 轨道为椭圆;
4. 当  $E = U_{\min}$  时,  $e = 0$ , 轨道为圆。

各种情形下, 轨道的形状如图4.8所示。

当质点沿着轨道运动时, 坐标对时间的依赖关系可以用式(4.17)得到。它可以表示为下面所述的一种方便的参数形式。

首先研究椭圆轨道。对椭圆轨道, 质点与力心的最大距离为

$$r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

此点一般称为远日点。因此可有椭圆的半长轴为

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} \right) = \frac{\alpha}{2E} > 0$$

由此, 根据式(4.17)可得

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{\min}}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}} = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 - \frac{\alpha}{|E|}r - \frac{l^2}{2\mu|E|}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu a}{|\alpha|}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}} \end{aligned}$$

利用变换

$$r - a = -ae \cos \xi$$

可得

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} \int_0^\xi (1 - e \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (\xi - e \sin \xi)$$

如果将近日点的时刻取为  $t_0 = 0$ , 可得 Kepler 方程

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (\xi - e \sin \xi) \quad (4.29)$$

此时即可有关于到力心距离的参数方程

$$\begin{cases} r = a(1 - e \cos \xi) \\ t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (\xi - e \sin \xi) \end{cases} \quad (4.30)$$

再结合轨道方程(4.28), 可得轨道的参数方程

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = a(\cos \xi - e) \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} = a\sqrt{1 - e^2} \sin \xi \\ t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (\xi - e \sin \xi) \end{cases} \quad (4.31)$$

沿着椭圆轨道运动一整圈即对应着参数  $\xi$  从 0 到  $2\pi$ , 其中参数  $\xi$  称为椭圆的圆心角, 其几何意义如图4.9所示。

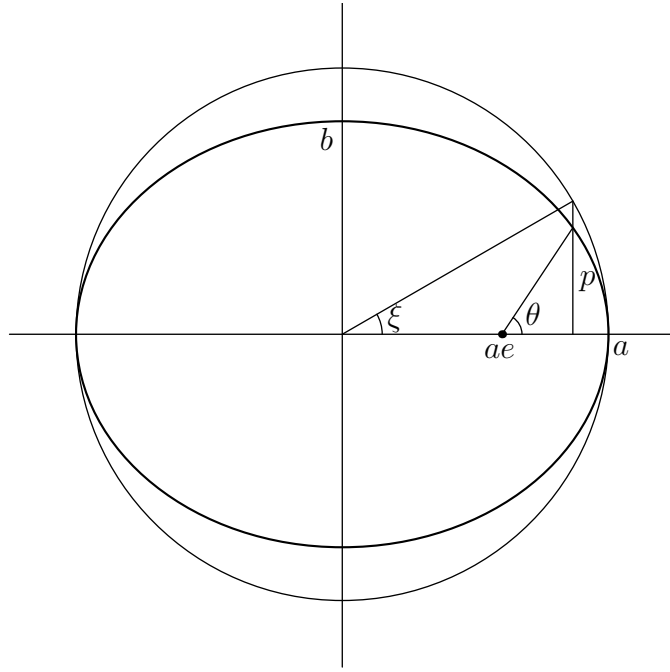


图 4.9: 圆心角的几何意义

对于双曲线轨道，同样有双曲线的半轴长为

$$a = \frac{|\alpha|}{2E}$$

同样，根据式(4.17)可得

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{\min}}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}} = \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 - \frac{\alpha}{E}r - \frac{l^2}{2\mu E}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu a}{|\alpha|}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{(r + a)^2 - a^2 e^2}} \end{aligned}$$

利用变换

$$r + a = ae \cosh \xi$$

可得

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} \int_0^\xi (e \cosh \xi - 1) d\xi = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (e \sinh \xi - \xi)$$

如果将近日点的时刻取为  $t_0 = 0$ ，可得

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (e \sinh \xi - \xi) \quad (4.32)$$

此时即可有关于到力心距离的参数方程

$$\begin{cases} r = a(e \cosh \xi - 1) \\ t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (e \sinh \xi - \xi) \end{cases} \quad (4.33)$$

再结合轨道方程(4.28), 可得轨道的参数方程

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = a(e - \cosh \xi) \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh \xi \\ t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (e \sinh \xi - \xi) \end{cases} \quad (4.34)$$

其中参数  $\xi$  的取值范围为  $(-\infty, +\infty)$ , 近日点即对应  $\xi = 0$ 。

对于抛物线轨道, 根据式(4.17)可得

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{\min}}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}} = \sqrt{\frac{\mu}{2|\alpha|}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{l^2}{2\mu|\alpha|}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2|\alpha|}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{p}{2}}} \end{aligned}$$

利用变换

$$r = \frac{p}{2}(1 + \eta^2)$$

可得

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu p^3}{|\alpha|}} \int_0^\eta \frac{1}{2} (1 + \eta^2) d\eta = \sqrt{\frac{\mu p^3}{|\alpha|}} \frac{\eta}{2} \left( 1 + \frac{\eta^3}{3} \right)$$

如果将近日点的时刻取为  $t_0 = 0$ , 可得

$$t = \sqrt{\frac{\mu p^3}{|\alpha|}} \frac{\eta}{2} \left( 1 + \frac{\eta^3}{3} \right) \quad (4.35)$$

此时即可有关于到力心距离的参数方程

$$\begin{cases} r = \frac{p}{2}(1 + \eta^2) \\ t = \sqrt{\frac{\mu p^3}{|\alpha|}} \frac{\eta}{2} \left( 1 + \frac{\eta^3}{3} \right) \end{cases} \quad (4.36)$$

再结合轨道方程(4.28), 可得轨道的参数方程

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = \frac{p}{2}(1 - \eta^2) \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} = p\eta \\ t = \sqrt{\frac{\mu p^3}{|\alpha|}} \frac{\eta}{2} \left( 1 + \frac{\eta^3}{3} \right) \end{cases} \quad (4.37)$$

其中参数  $\eta$  的取值范围为  $(-\infty, +\infty)$ , 近日点即对应  $\eta = 0$ 。

### 4.3.2 Laplace-Runge-Lenz 矢量

在任意有心力场  $V(r) = \frac{\alpha}{r}$  中存在其特有的运动积分, 称为 Laplace-Runge-Lenz 矢量

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{l} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r} \quad (4.38)$$



直接求其时间导数可得

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{l} + \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \\
 &= \dot{\mathbf{v}} \times (\mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \\
 &= \mu \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - \mu \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3}
 \end{aligned}$$

将运动方程  $\mu \dot{\mathbf{v}} = \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3}$  代入, 即可得

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{0}$$

由此便验证了 Laplace-Runge-Lenz 矢量  $\mathbf{A}$  是运动积分。

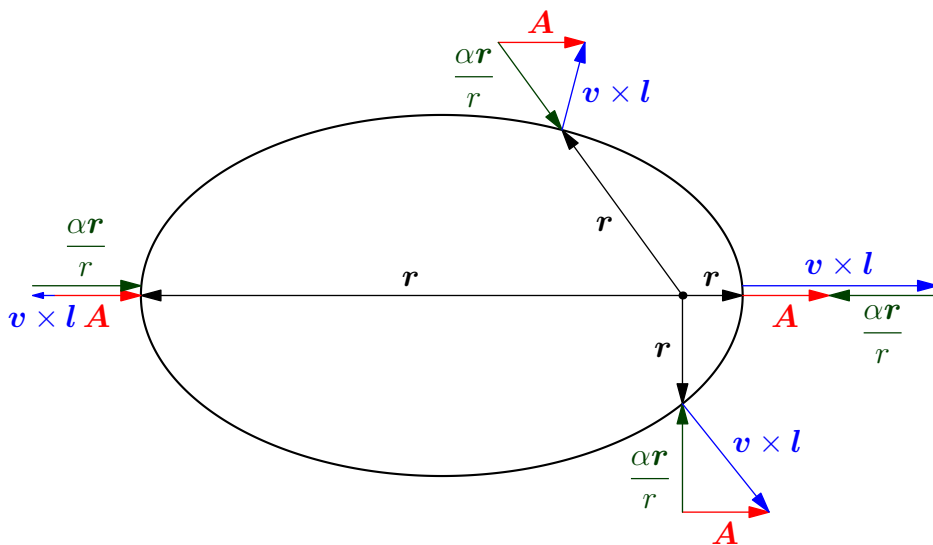


图 4.10: Laplace-Runge-Lenz 矢量

### 4.3.3 Kepler 行星运动定律

- Kepler 第一定律: 行星以太阳为焦点, 沿椭圆轨道运动。椭圆轨道的半长轴半短轴分别为

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{\alpha}{2E} \quad (4.39)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \quad (4.40)$$

由此可得, 能量取决于长轴, 与形状无关; 长轴相同, 短轴长的轨道角动量大。

- Kepler 第二定律: 太阳与行星连线的扫面速度为常量。即

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

因此

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{L}}{2\mu} = \text{常矢量} \quad (4.41)$$

- **Kepler 第三定律**：行星公转周期的平方正比于椭圆半长轴的立方。根据第二定律中求出的面积速度，可以求出行星公转的周期

$$T = \frac{\pi ab}{l/2\mu} = \pi|\alpha|\sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}} = \pi\sqrt{\frac{4\mu a^3}{|\alpha|}} \quad (4.42)$$

由此即

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{|\alpha|} \quad (4.43)$$

## 4.4 粒子弹性散射

粒子散射是获取粒子相互作用信息，进而确定物质围观结构的实验手段之一。

散射前后，两粒子相距无限远，相互作用势可取为零。散射过程中不受外力，或外力可忽略。粒子间的相互作用为两体中心力。

### 4.4.1 弹性散射

散射过程中，粒子的内部状态不变，因而静能不变。散射前后，粒子的总动量与总动能守恒。

由于散射过程中不受外力作用，因此质心系满足

$$\dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$$

质心系是惯性系。在质心系中，动量守恒和质量守恒可以分别表示为

$$\begin{cases} m_1 \mathbf{v}'_{1i} + m_2 \mathbf{v}'_{2i} = m_1 \mathbf{v}'_{1f} + m_2 \mathbf{v}'_{2f} = \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1i} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2i} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f} \end{cases} \quad (4.44a)$$

$$(4.44b)$$

由动量守恒(4.44a)可得

$$m_1 \mathbf{v}'_{1i} = -m_2 \mathbf{v}'_{2i}, \quad m_1 \mathbf{v}'_{1f} = -m_2 \mathbf{v}'_{2f}$$

由上式和动量守恒(4.44b)可得

$$v'_{1f} = v'_{1i}, \quad v'_{2f} = v'_{2i}$$

即质心系中，两粒子动量大小相等，方向相反。弹性散射后，粒子的速率不变，运动方向偏转，偏转角度记作  $\theta$ ，称为**质心系散射角**。散射角由相互作用决定。由于在实验室坐标系中，速度满足

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_1, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_2$$

因此，两个粒子的相对速度在质心系和实验室系中相同，记作

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2$$

下面考虑靶粒子初始时刻静止的情形，即  $\mathbf{v}_{2i} = \mathbf{0}$ ，此时  $\mathbf{v}'_{2i} = -\mathbf{V}$ ，因此有

$$m_1 \mathbf{v}'_{1i} = -m_2 \mathbf{v}'_{2i} = m_2 \mathbf{V}$$

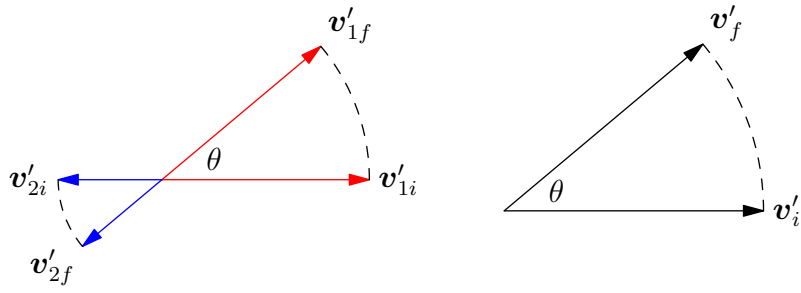


图 4.11: 质心坐标系中的散射

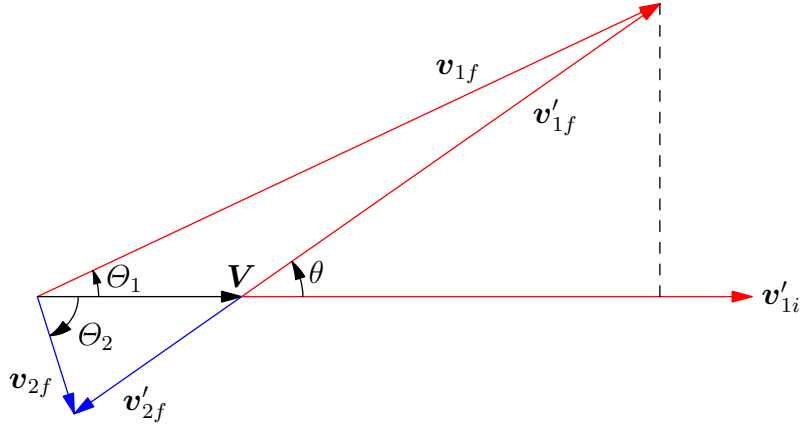


图 4.12: 静止靶粒子情形下的速度

速度合成如图4.12所示, 其中  $\Theta_1$  称为实验室系入射粒子**散射角**,  $\Theta_2$  称为实验室系靶粒子**反冲角**。它们与质心系散射角的关系如下

$$\begin{cases} \tan \Theta_1 = \frac{v'_{1i} \sin \theta}{V + v'_{1i} \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta} \\ \Theta_2 = \frac{\pi - \theta}{2} \end{cases} \quad (4.45)$$

#### 4.4.2 质心系散射角

质心系散射角与碰撞前后粒子的相对速度偏转角相等。相对速度偏转角由入射粒子相对靶粒子的运动决定。

入射粒子初始速度与靶粒子之间的距离记作  $b$ , 称为**碰撞参数**或**瞄准距离**。由于靶粒子初始是静止的, 故系统的能量为

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2$$

角动量为

$$l = \mu b v$$

因此角动量  $l$  可以用能量  $E$  和瞄准距离  $b$  来表示

$$l^2 = 2\mu b^2 E$$

根据式(4.15), 可得

$$U(r_{\min}) = \frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2} + V(r_{\min}) = E$$

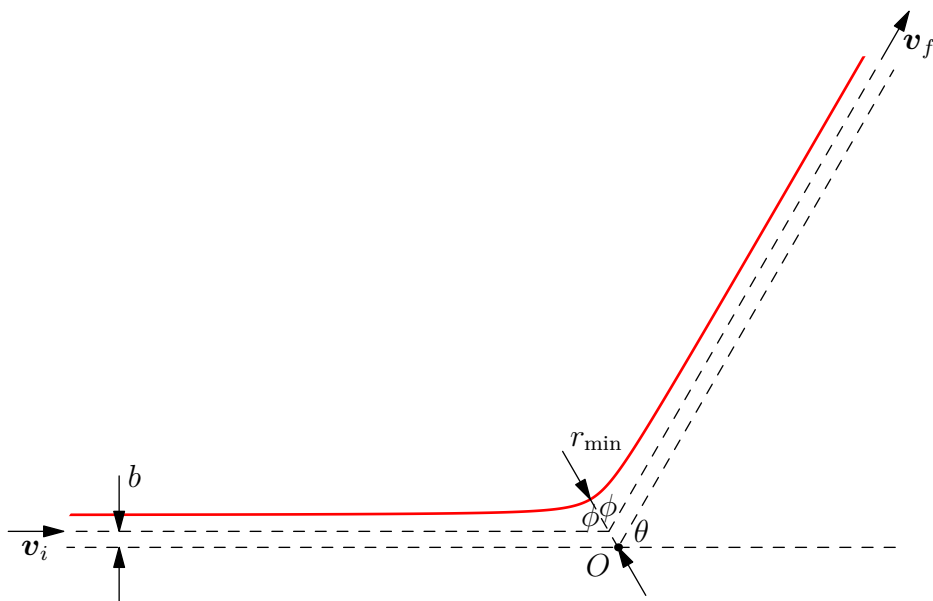


图 4.13: 弹性散射的几何参数

即有

$$1 - \frac{V(r_{\min})}{E} - \frac{b^2}{r_{\min}^2} = 0$$

据此可得  $r_{\min}$ 。再由式(4.20)可得

$$\phi = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad (4.46)$$

由此即可得质心系散射角

$$\theta = \pi - 2\phi = \theta(b, E) \quad (4.47)$$

具体关系决定于  $V(r)$ 。

### 4.4.3 散射截面

散射实验一般是使得具有确定能量的粒子束均匀入射，然后对散射粒子的角分布进行测量以获得粒子之间作用势的信息。

设入射粒子流密度为  $I$ ，则入射粒子数按  $b$  的分布为

$$dN = 2\pi I b db$$

则散射粒子按  $\theta$  的分布可以表示为

$$dN = I \cdot 2\pi b(\theta) |b'(\theta)| d\theta$$

对  $\theta$  的分布并不是十分方便，因此需要使用对立体角  $\omega$  的分布。在球体的情形下，立体角元  $d\omega$  与  $d\theta$  的关系为

$$d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

由此可有散射粒子按  $\omega$  的分布

$$dN = I \frac{b(\theta)}{\sin \theta} |b'(\theta)| d\omega$$

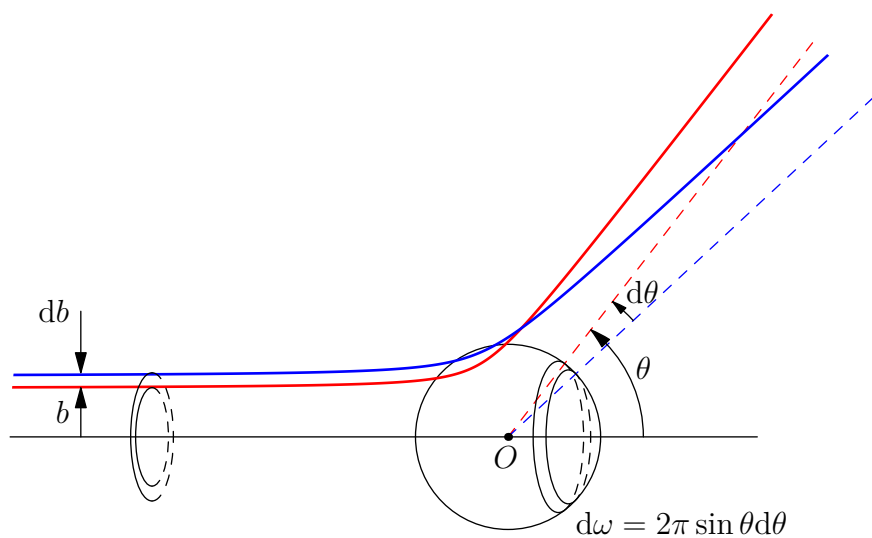


图 4.14: 散射截面

定义微分散射截面为

$$d\sigma = \frac{dN}{I} = 2\pi b db = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} |b'(\theta)| d\omega \quad (4.48)$$

同样有单位立体角散射截面为

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} |b'(\theta)| \quad (4.49)$$

根据式(4.47)可知, 上式中的  $b = b(\theta, E)$  决定于两体中心势的具体形式, 与实验条件无关。

前面的讨论都基于质心系, 在实验室系中, 有

$$d\Sigma = \frac{dN}{I} = \Sigma_1(\Theta_1) d\Omega_1, \quad d\Omega_1 = 2\pi \sin \Theta_1 d\Theta_1$$

所以有

$$\Sigma_1(\Theta_1) = \sigma(\theta) \frac{d\omega}{d\Omega_1} = \sigma(\theta) \frac{d \cos \theta}{d \cos \Theta_1}$$

其中  $\Theta_1$  满足

$$\tan \Theta_1 = \frac{\sin \theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta}$$

在实验中, 可实际测量的量为  $\Sigma_1(\Theta_1)$ 。

总散射截面可以计算为

$$\sigma_t = \int_S d\sigma = \int_0^\pi 2\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = \int_0^{b_{\max}} 2\pi b db = \pi b_{\max}^2 \quad (4.50)$$

式中  $b_{\max}$  为散射得以发生的最大瞄准距离, 即当  $b > b_{\max}$  时, 入射粒子始终在相互作用力程之外, 粒子将直线掠过。

#### 4.4.4 Coulomb 势弹性散射

Coulomb 势可以表示为

$$V = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0$$

此时  $r_{\min}$  满足

$$1 - \frac{\alpha}{Er_{\min}} - \frac{b^2}{r_{\min}^2} = 0$$

由此可得

$$\frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{b^2} \left[ \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 + b^2} - \frac{\alpha}{2E} \right] \quad (4.51)$$

即有

$$\phi = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{Er} - \frac{b^2}{r^2}}} = \arccos \frac{\frac{b^2}{r} + \frac{\alpha}{2E}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 + b^2}} \Bigg|_{r_{\min}}^{+\infty} = \arccos \frac{\frac{\alpha}{2E}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 + b^2}}$$

所以有

$$\tan \phi = \frac{2Eb}{\alpha}$$

考虑到  $\theta = \pi - 2\phi$ , 可有

$$b = \frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (4.52)$$

由此可得 Coulomb 势下的微分散射截面

$$\sigma(\theta) = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} |b'(\theta)| = \frac{\left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (4.53)$$

式(4.53)称为 Rutherford 公式。总散射截面为

$$\sigma_t = \int_0^\pi 2\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta \rightarrow +\infty$$

此式说明 Coulomb 力为长程力。

**例 4.3 (刚球势散射)** 求粒子在刚球势

$$V(r) = \begin{cases} +\infty, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

中的散射截面。

**解** 对此问题, 可直接根据几何关系求出瞄准距离  $b$  与散射角  $\theta$  之间的关系为

$$b = a \sin \phi = a \cos \frac{\theta}{2}$$

由此可得微分散射截面

$$d\sigma = d(\pi b^2) = \frac{\pi a^2}{2} \sin \theta d\theta = \frac{a^2}{4} d\omega$$

所以有

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{a^2}{4}$$

总散射截面

$$\sigma_t = \frac{a^2}{4} \int d\omega = \frac{a^2}{4} 4\pi = \pi a^2$$

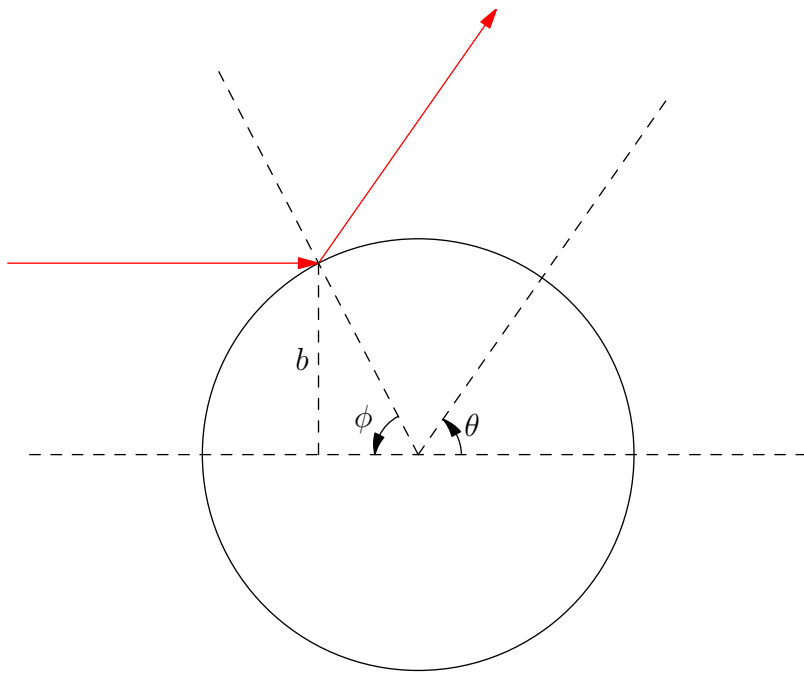


图 4.15: 例 4.3

例 4.4 (阶跃中心势散射) 求粒子在势场

$$V = \begin{cases} V_0, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

解 首先考虑  $V_0 > 0$  的情形。

当  $E < V_0$  时, 粒子无法进入  $r = a$  的内部, 结果等同于例4.3的刚球势散射。

当  $E > V_0$  时, 根据能量守恒, 可有粒子在  $r = a$  外部和内部满足如下关系式

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu v'^2 + V_0 = E$$

由此可得

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} =: n$$

其中  $n$  可称为折射率。再根据角动量守恒, 可有粒子在  $r = a$  外部和内部满足如下关系式<sup>①</sup>

$$\mu v b = \mu v' r_{\min}$$

由此可得

$$\frac{b}{r_{\min}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

所以

$$\sin \alpha = \frac{b}{a}, \quad \sin \beta = \frac{b}{na}$$

根据几何关系, 可有  $\theta = 2(\beta - \alpha)$ , 所以

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$$

<sup>①</sup> 此处考虑到粒子在常数势场中的运动轨迹必然为直线。

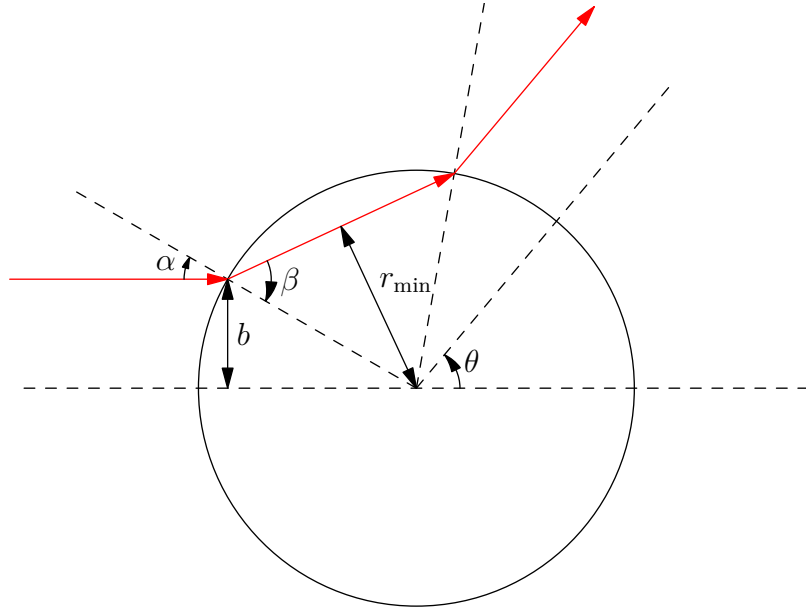


图 4.16: 阶跃中心势散射

所以有

$$\left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{b^2}{na^2} \right)^2 = \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{b^2}{na^2} \right)$$

由此解得

$$b^2 = \frac{n^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + n^2 - 2n \cos \frac{\theta}{2}}$$

根据

$$d\sigma = d(\pi b^2)$$

即可得到微分散射截面。



## 第五章 多自由度微振动与阻尼

体系在稳定平衡位形附近的小幅振动即称为微振动。

### 5.1 微振动近似与求解

例 5.1 (单摆) 对于单摆, 自由度  $s = 1$ 。取摆角  $\theta$  为广义坐标, 体系的动能为

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

势能为

$$V = mgl(1 - \cos \theta)$$

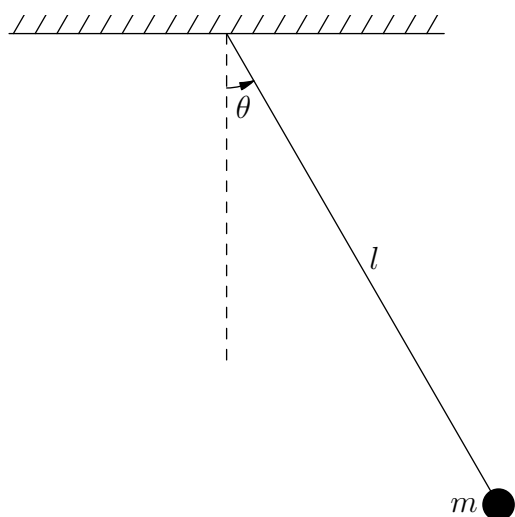


图 5.1: 单摆

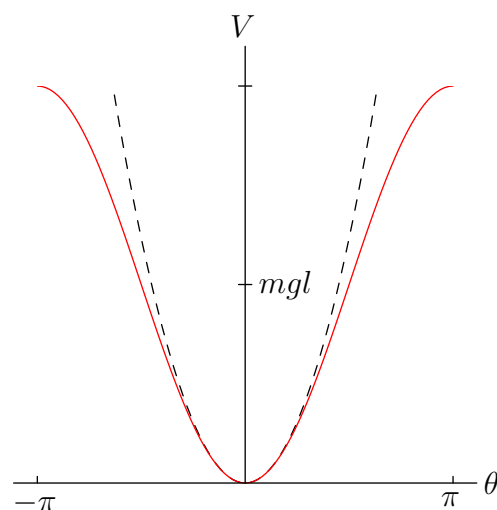


图 5.2: 单摆的势能曲线

作线性近似可以将势能在平衡位形附近展开为

$$V = \frac{1}{2}mgl\theta^2 + o(\theta^2)$$

由此在线性近似下体系的 Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

是广义坐标  $\theta$  和广义速度  $\dot{\theta}$  的二次型, 进而体系的运动方程

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$

是一个线性常微分方程, 解为

$$\theta = \theta_m \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi_0\right)$$

即，单摆在小角度下可近似为谐振子。

例 5.2 (弹性耦合摆) 对于弹性耦合摆，此时自由度  $s = 2$ 。

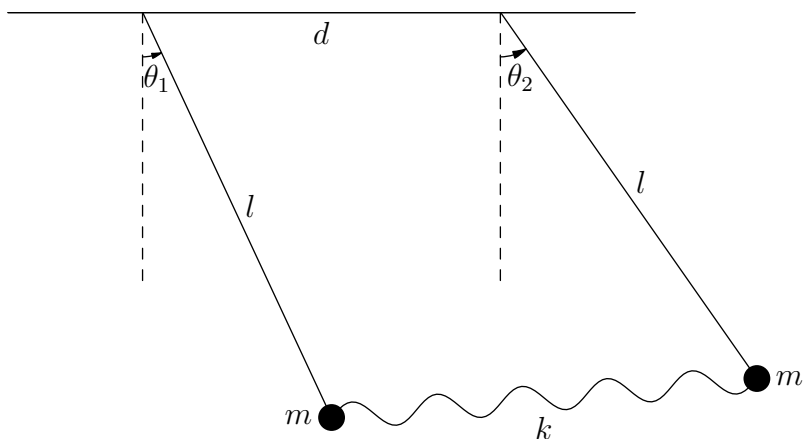


图 5.3: 弹性耦合摆

选两个摆角  $\theta_1, \theta_2$  为广义坐标，则体系的动能为

$$T = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

势能为

$$V = mgl(1 - \cos \theta_1 + 1 - \cos \theta_2) + \frac{k}{2} \left[ \sqrt{(d + l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 + (l \cos \theta_2 - l \cos \theta_1)^2} - d \right]$$

作线性近似可以将势能在平衡位形处展开为

$$V = \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2 + o(\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

取新的广义坐标  $x_1 = l\theta_1, x_2 = l\theta_2$ ，可有体系在线性近似下的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{mg}{2l}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)$$

进而体系的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \left(k + \frac{mg}{l}\right)x_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + \left(k + \frac{mg}{l}\right)x_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

定义  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$ ，以及

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{l} + k & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k \end{pmatrix}$$

其中矩阵  $\mathbf{M}$  称为惯性矩阵， $\mathbf{K}$  称为弹性矩阵，由此体系的运动方程可以简单的表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

考虑取特解

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \cos(\omega t + \phi)$$

则可有线性方程组

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

或者

$$\begin{pmatrix} \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此为广义本征值问题。存在振动解  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  的条件为

$$\begin{vmatrix} \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

由此可以解得广义本征值

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$$

以及其对应的广义本征矢

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

方程的通解即为以上两个线性无关的特解的线性组合

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi_1\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}t + \phi_2\right)$$

通解中的四个任意常数  $C_1, C_2, \phi_1, \phi_2$  可以由  $x_1, x_2$  以及  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  的初始值来决定。

现在在上述例子中考虑变量代换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

可有

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{pmatrix}$$

此处得到的两个相互独立的简谐振动称为**简正振动**，其频率为本征频率，简正振动对应的坐标  $\xi_1, \xi_2$  称为**简正坐标**。在简正坐标下，体系的 Lagrange 函数  $L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$  可以转化为

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{S}^T \mathbf{K} \mathbf{S} \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M}' \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{K}' \boldsymbol{\xi}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}' &= \mathbf{S}^T \mathbf{K} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{mg}{l} + k & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2mg}{l} & 0 \\ 0 & \frac{2mg}{l} + 4k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

都为对角矩阵。因此，引入简正坐标，可以使  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  同时对角化，不同自由度的振动解耦，即简正振动模式。

## 5.2 多自由度微振动体系

### 5.2.1 微振动近似

考虑保守体系, 其广义坐标取为  $q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, s$ ), 不失一般性, 规定其稳定平衡位形处有  $q_{\alpha 0} = 0, V_0 = 0$ , 由此平衡条件可以表示为

$$\left( \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right)_0 = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

在平衡位形附近, 可对势能  $V$  作 Taylor 展开, 即

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right)_0 q_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_0 q_\alpha q_\beta + o(|\mathbf{q}|^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_0 q_\alpha q_\beta \end{aligned}$$

令  $k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_0$ , 则有

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & \cdots & k_{ss} \end{pmatrix}$$

因此势能可以近似为

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s k_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (5.1)$$

考虑到  $\mathbf{q}_0$  为稳定平衡位形, 因此  $V$  在  $\mathbf{q}_0$  处取极小值, 即矩阵  $\mathbf{K}$  是正定的<sup>①</sup>。广义坐标变换可以表示为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由此可将速度展开至一阶, 即

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right)_0 \dot{q}_\alpha + \cdots$$

由此, 动能可表示为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \left[ \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right)_0 \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \right)_0 \right] \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \cdots$$

令  $m_{\alpha\beta} = m_{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right)_0 \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \right)_0$ , 则可得惯性矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{s1} & \cdots & m_{ss} \end{pmatrix}$$

<sup>①</sup> 如非严格极小值, 可以允许  $\mathbf{K}$  为半正定。

由此, 动能被表示为广义速度的二次型

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s m_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.2)$$

动能必然是非负的, 而且只有  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  时为零, 故矩阵  $\mathbf{M}$  正定。因此体系的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s (m_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\beta} \dot{q}_\gamma + m_{\beta\gamma} \dot{q}_\beta \delta_{\alpha\gamma}) = \frac{1}{2} \left( \sum_{\gamma=1}^s m_{\alpha\gamma} \dot{q}_\gamma + \sum_{\beta=1}^s m_{\beta\alpha} \dot{q}_\beta \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s (m_{\alpha\beta} + m_{\beta\alpha}) \dot{q}_\beta = \sum_{\beta=1}^s m_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \\ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} &= - \sum_{\beta=1}^s k_{\alpha\beta} q_\beta \end{aligned}$$

由此得到体系的运动方程为

$$\sum_{\beta=1}^s (m_{\alpha\beta} \ddot{q}_\beta + k_{\alpha\beta} q_\beta) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

用矩阵可以表示为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

即, Lagrange 函数在稳定平衡位形处取二阶近似, 可得线性振动方程。

## 5.2.2 运动求解

作试解

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} \cos(\omega t + \phi)$$

则体系的运动方程(5.3)可化为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

式(5.4)称为体系的本征方程, 体系有振动解要求本征方程(5.4)有非平凡解, 即要求

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (5.5)$$

式(5.5)称为体系的久期方程或频率方程, 它是  $\omega^2$  的  $s$  次方程。因为矩阵  $\mathbf{K}$  至少是半正定的, 矩阵  $\mathbf{M}$  是正定的, 所以方程(5.5)必然有  $s$  个非负的解, 即有

$$\omega^2 = \omega_\mu^2, \quad \mu = 1, 2, \dots, s$$

然后即可通过线性方程组

$$(\mathbf{K} - \omega_\mu^2 \mathbf{M}) \mathbf{a}_\mu = \mathbf{0}, \quad \mu = 1, 2, \dots, s$$

解出每个本征频率对应的本征矢量  $\mathbf{a}_\mu$ 。体系运动的通解即为上述  $s$  个特解的线性组合

$$\mathbf{q} = \sum_{\mu=1}^s \mathbf{a}_\mu C_\mu \cos(\omega_\mu t + \phi_\mu) \quad (5.6)$$

此处  $C_\mu$  和  $\phi_\mu$  是积分常数, 可以通过  $q_\alpha$  和  $\dot{q}_\alpha$  共  $2s$  个初始值确定<sup>①</sup>。

<sup>①</sup> 此处通解公式中没有考虑本征频率为零的情况, 因为当本征频率为零时, 其对应的不是振动解。

### 5.2.3 简正坐标与简正振动

将体系运动的通解(5.6)表示为

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \vdots \\ C_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \end{pmatrix}$$

做变量代换

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}$$

其中矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

则体系的解可以用新变量表示为

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \vdots \\ C_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

或者

$$\xi_\mu = C_\mu \cos(\omega_\mu t + \phi_\mu) \quad (5.8)$$

即, 新坐标可以将体系的运动表示为相互独立的简谐振动, 坐标  $\boldsymbol{\xi}$  称为体系的简正坐标。

**定理 5.2.1 (同时对角化)** 设  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  都是对称矩阵, 其中  $\mathbf{A}$  是正定矩阵, 则唯一存在一个非奇异方阵  $\mathbf{P}$  满足

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中  $\lambda_i$  满足

$$\det(\mathbf{B} - \lambda_i \mathbf{A}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

由上述定理, 矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_s \end{pmatrix}$  可以使得矩阵  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  同时对角化<sup>①</sup>, 即

$$\mathbf{M}' = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_s \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}' = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_s \end{pmatrix}$$

其中  $m_\alpha, k_\alpha$  满足

$$\det\left(\mathbf{K} - \frac{k_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{M}\right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s$$

<sup>①</sup> 此时得到的同时对角化是同时对角化定理的一个弱化形式, 此时的同时对角化形式不是唯一的。

即有

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M}' \dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s m_{\alpha} \dot{\xi}_{\alpha}^2$$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{K}' \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s k_{\alpha} \xi_{\alpha}^2$$

即，简正坐标使  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  同时对角化。简正坐标对应的运动方程为

$$m_{\mu} \ddot{\xi}_{\mu} + k_{\mu} \xi_{\mu} = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, s$$

以简正坐标表示的各自由度的振动相互独立。

**例 5.3 (双摆)** 双摆体系的自由度  $s = 2$ ，取两个摆角  $\theta_1, \theta_2$  为广义坐标，则两个摆球的坐标分别为

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \theta_1, & y_1 &= l \cos \theta_1 \\ x_2 &= l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2, & y_2 &= l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 \end{aligned}$$

体系的势能为

$$V = mg(2l - y_2) + mg(l - y_1) = mgl(3 - 2 \cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

由此可得稳定平衡位形为  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 。

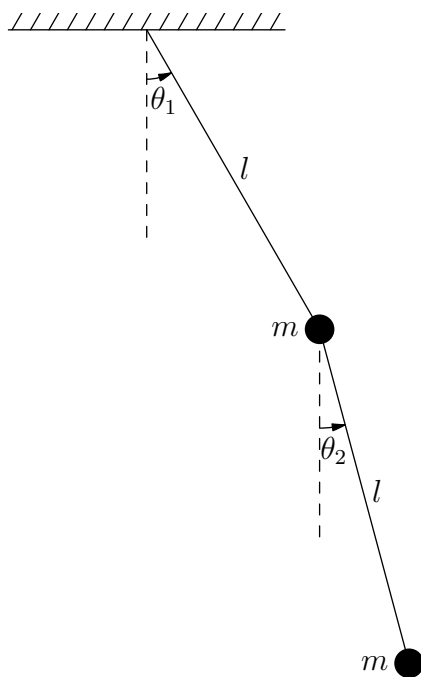


图 5.4: 双摆

两个摆球的速度分量分别为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, & \dot{y}_1 &= -l \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{x}_2 &= l \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, & \dot{y}_2 &= -l \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

体系的动能为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \left[ l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

将势能和动能在稳定平衡位形处展开至二阶，即

$$V = mgl \left[ 3 - 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_1^2 + o(\theta_1^2) \right) - \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_2^2 + o(\theta_2^2) \right) \right] = \frac{1}{2} mgl (2\theta_1^2 + \theta_2^2) + o(\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

由此即有弹性矩阵和惯性矩阵

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}$$

则有久期方程

$$\begin{vmatrix} 2mgl - 2ml^2\omega^2 & -ml^2\omega^2 \\ -ml^2\omega^2 & mgl - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解得频率

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}$$

其对应的本征向量为

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

因此，体系的运动解为

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

体系的简正坐标  $\xi_1, \xi_2$  满足

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

## 5.3 阻尼运动

### 5.3.1 阻尼的一般性质

物体在运动过程中收到的阻力  $\mathbf{f}$ ，通常可以分成以下四类：

1. **摩擦阻力**。固体和固体接触面间的阻力，即通常所说的摩擦力。
2. **粘滞阻力**。由流体的粘滞性产生的阻力。
3. **尾流阻力**。当物体穿过静止不动的介质，或者说，当流体流过静止不动的障碍物时，物体前后压力差产生的阻力。
4. **波阻力**。对于运动速度超过声速的物体，会形成自物体发射到周围介质中的波（激波），它要消耗物体的能量，由此产生的阻力即为波阻力。

产生以上各种阻力的根源是十分复杂的，而且各不相同。阻力总是消耗运动物体的能量，使物体的能量从运动物体向周围介质散逸出去最终转化为热，因此阻力也常被称为耗



**散力。**不过不论是哪一种阻力，其方向恒与物体的运动方向相反，其大小与物体的形状和尺寸、周围介质的物性以及物体的运动速度有关，因此阻力总是可以表达为

$$\mathbf{f} = -cf(v)\frac{\dot{\mathbf{r}}}{v} \quad (5.9)$$

其中函数  $f(v)$  反映阻力随速度的变化关系，系数  $c$  则和物体的形状、大小、表面状况及介质的物性有关。

### 5.3.2 恒力作用下的阻尼直线运动

最简单的一种阻尼运动是无其它外力或仅受恒力作用的阻尼直线运动，其运动方程可以表示为

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 - cf(v)$$

或者

$$\frac{dv}{dt} = \alpha - 2\beta f(v) \quad (5.10)$$

式中  $\alpha = \frac{F_0}{m}$  是由恒力  $F_0$  产生的加速度， $2\beta = \frac{c}{m}$  称为阻尼因子。当  $c$  不变时， $\beta$  也是一个常数，若  $c$  和速度有关，则  $\beta$  也是速度的函数，不论何种情形，式(5.10)的右端只是速度  $v$  的函数，对其进行分离变量，即有

$$t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{\alpha - 2\beta f(v)} \quad (5.11)$$

再根据  $v = \frac{dx}{dt}$ ，可有

$$x = \int_{v_0}^v \frac{v dv}{\alpha - 2\beta f(v)} \quad (5.12)$$

求出上面的两个积分并从中消去  $v$  即可得到物体的运动情况  $x = x(t)$ 。

### 5.3.3 一维阻尼振动

取体系的平衡位置为广义坐标原点，并假定阻力是速度的一次函数<sup>①</sup>，则物体的运动方程为

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

引入  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ，此方程可以表示为

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.13)$$

此处  $\omega_0$  即为没有阻尼时物体自由振动的角频率。方程(5.13)的通解为

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5.14)$$

式中  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是特征方程

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

的两个根，即

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (5.15)$$

下面分三种情况讨论解(5.14)的性质：

<sup>①</sup> 在微振动情况下，这个近似是可以接受的。

1.  $\beta < \omega_0$ 。此时通解可以表示为

$$x = ae^{-\beta t} \cos(\omega t - \phi) \quad (5.16)$$

式中

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega} + \frac{\beta}{\omega}\right), \quad a = x_0 \left[1 + \left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega} + \frac{\beta}{\omega}\right)^2\right]$$

均为实常数,  $x_0$  和  $\dot{x}_0$  为物体的初位置和初速度。此时振动的图像如图5.5所示。

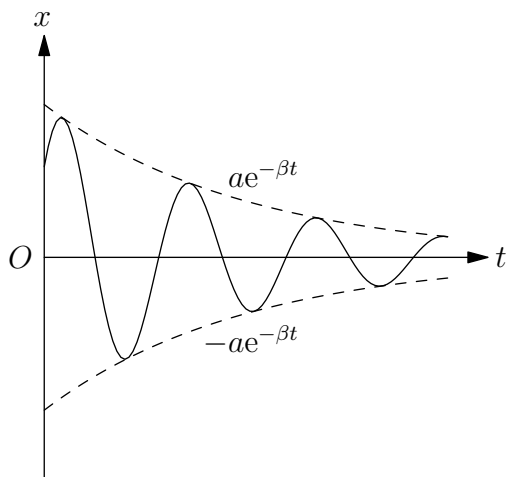


图 5.5:  $\beta < \omega_0$

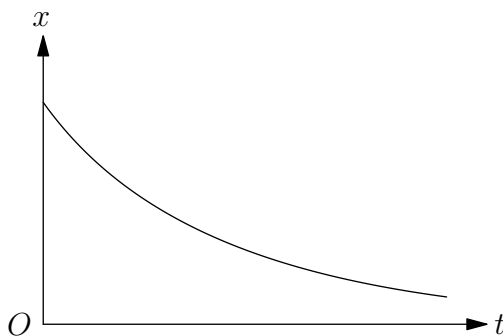


图 5.6:  $\beta > \omega_0$

2.  $\beta > \omega_0$ 。这是  $\lambda$  的两个值都是实数, 而且都是负数, 式(5.14)可改写为

$$x = c_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \quad (5.17)$$

这时  $x$  是  $t$  的单调减少函数, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $x$  趋向平衡位置而没有振动, 如图5.6所示。这种运动类型称为非周期性衰减。

3.  $\beta = \omega_0$ 。此时特征方程只有一个根  $\lambda = -\beta$ , 此时方程(5.13)的通解为

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-\beta t} \quad (5.18)$$

这是非周期性衰减的特殊情况, 虽然不一定是单调减少的运动, 但同样没有振动的性质。

现在讨论有阻尼时的强迫振动。在方程(5.13)中添加强迫力  $F \cos \omega_p t$  可得强迫振动的运动方程

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega_p t \quad (5.19)$$

采用复数求解比较简便, 即求解复变量微分方程

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} e^{i\omega_p t} \quad (5.20)$$

这个方程的通解就是对应的齐次方程的通解  $x_1$  和任意一个特解  $x_2$  的和。此处  $x_1$  已经在自由阻尼振动中讨论过了, 现在只需求一个特解  $x_2$  即可。由此, 可令

$$x_2 = B e^{i\omega_p t} = b e^{i(\omega_p t - \delta)} \quad (5.21)$$

此处  $B$  是复常数,  $b$  和  $-\delta$  分别是  $B$  的模和幅角, 它们都是实数。将式(5.21)代入方程(5.20)中, 可得

$$B = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega_p^2 + 2i\beta\omega_p)}$$

因此有

$$\begin{cases} b = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\beta^2\omega_p^2}} \\ \tan \delta = \frac{2\beta\omega_p}{\omega_0^2 - \omega_p^2} \end{cases} \quad (5.22)$$

现在只讨论有振动的情形, 即  $\omega_0 > \beta$  的情形, 此时方程(5.19)的通解为

$$x = ae^{-\beta t} \cos(\omega t - \phi) + b \cos(\omega_p t - \delta) \quad (5.23)$$

其中第一项随时间以指数规律衰减, 所以经过足够长时间后, 留下的只是第二项

$$x = b \cos(\omega_p t - \delta)$$

这是一个简谐运动, 其频率即为强迫力的频率  $\omega_p$ , 振幅  $b$  由式(5.22)决定。令

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}} \quad (5.24)$$

称为振幅的放大因子, 其中  $\gamma = \frac{2\beta}{\omega_0}$ , 则振幅  $b$  可以表示为

$$b = \kappa \frac{F}{k}$$

$\kappa$  随阻尼因子  $\gamma$  和频率比值  $\frac{\omega_p}{\omega_0}$  的变化如图5.7所示。

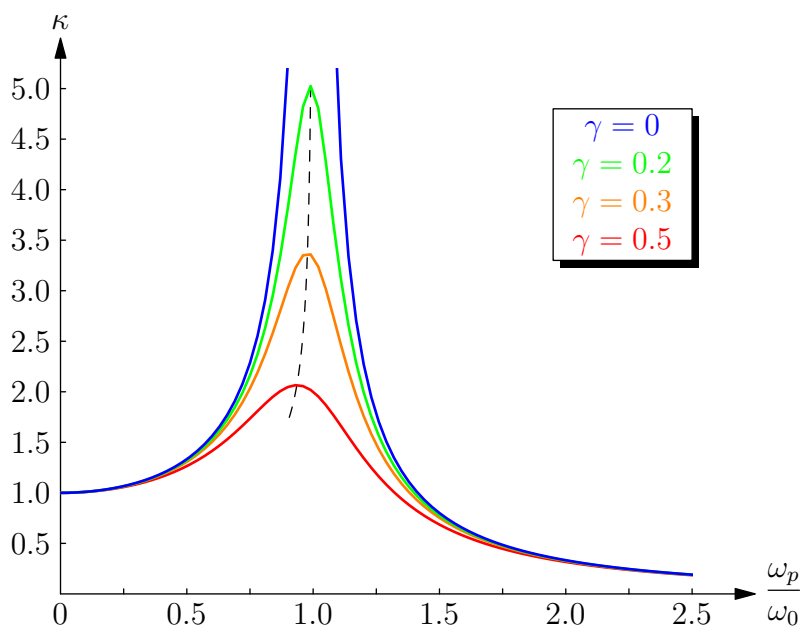


图 5.7:  $\kappa$  随阻尼因子  $\gamma$  和频率比值  $\frac{\omega_p}{\omega_0}$  的关系

强迫振动有相位差, 不同频率下相位差  $\delta$  随频率比值  $\frac{\omega_p}{\omega_0}$  的关系如图5.8所示。

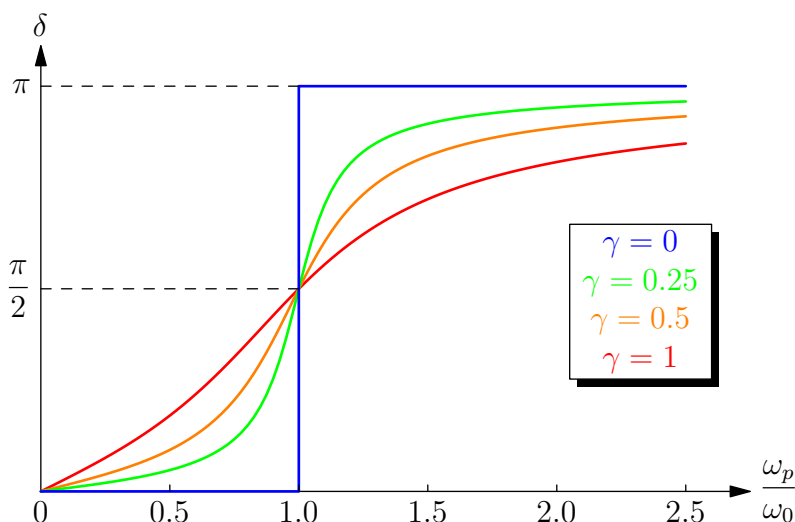


图 5.8: 相位差  $\delta$  随频率比值  $\frac{\omega_p}{\omega_0}$  的关系

### 5.3.4 耗散函数

在质点系中，每个质点都收到与速度方向相反的阻尼力

$$\mathbf{f}_i = -f_i(v_i) \frac{\dot{\mathbf{r}}_i}{v_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中  $f_i(v_i) > 0$ ，则其对应的广义力为

$$f_\alpha = - \sum_{i=1}^n f_i(v_i) \frac{\dot{\mathbf{r}}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = - \sum_{i=1}^n f_i(v_i) \frac{\dot{\mathbf{r}}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} = - \sum_{i=1}^n f_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha}$$

式中利用了经典 Lagrange 关系(2.18)。引入耗散函数

$$D(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^{v_i} f_i(v'_i) dv'_i \quad (5.25)$$

则广义阻尼力可以表示为

$$f_\alpha = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha}$$

如果体系内其余主动力皆为有势力，则可有系统方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

用耗散函数可以表示为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_\alpha} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (5.26)$$

对于线性阻尼力  $\mathbf{f}_i = -c_i \dot{\mathbf{r}}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 其中  $c_i > 0$ , 此时耗散函数可以表示为

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} c_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

这种形式的耗散函数称为 Rayleigh 耗散函数。根据坐标转换关系

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q})$$

可有

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

此时，可有

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha, \beta=1}^s c_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s c_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad (5.27)$$

式中

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta}$$

此处  $c_{\alpha\beta}$  只与广义坐标  $\mathbf{q}$  有关，而与广义速度  $\dot{\mathbf{q}}$  无关，因此 Rayleigh 耗散函数  $D$  是广义速度  $\dot{\mathbf{q}}$  的二次齐次函数。特别地，在微振动问题中， $T$  和  $V$  都只保留至二阶小量，因此  $D$  也只要保留到二阶小量即可，在这种情况下， $c_{\alpha\beta}$  可以看成常数。

耗散函数  $D$  具有能量变化率的量纲，它决定了力学体系能量的耗散率  $-\frac{dE}{dt}$ 。对于 Rayleigh 耗散函数，当  $c_{\alpha\beta}$  为常数时，可有

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L \right) = \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right)$$

考虑到式(5.26)，可有

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

由式(5.27)可知，Rayleigh 耗散函数  $D$  是广义速度  $\dot{\mathbf{q}}$  的二次齐次函数，根据齐次函数的 Euler 定理（定理2.6.1，第44页）可知

$$\sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2D$$

由此即有

$$-\frac{dE}{dt} = 2D \quad (5.28)$$

即单位时间内体系内耗散的能量等于耗散函数的两倍。

## 第六章 刚体

任意两点之间距离在运动过程中保持不变的体系即可称为**刚体**。刚体是一个理想模型，在研究问题的过程中，形变可忽略的体系都可以视为刚体。

### 6.1 刚体运动学

#### 6.1.1 刚体的自由度

首先将刚体看作多质点系，其中的质点满足约束

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = C_{ij}(\text{常数}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n (i \neq j)$$

因此，其中的任意不共线的三个质点的位置确定，其余各质点的位置也相应地确定。此三个质点之间有三个完整约束，即  $n = 3, k = 3$ ，因此自由度  $s = 3n - k = 6$ 。每增加一个质点，增加三个独立约束，因此自由度不变。

由此可得，仅有内部刚性约束而无外部附加约束的刚体的自由度  $s = 6$ 。

#### 6.1.2 刚体的运动

为了描述刚体的运动，需要引入三个坐标系：

- **空间系**：即实验室坐标系，为惯性系。
- **本体系**：以刚体上任选的一点（称为**基点**） $O$  为原点，并固定在刚体上的坐标系。刚体上各点相对本体系静止。
- **平动系**：以基点  $O$  为原点，相对空间系平动的坐标系。

则刚体在这三个坐标系中的运动为（见图6.1）：

- **本体系**：刚体静止。
- **平动系**：刚体做定点运动（基点固定）。
- **空间系**：刚体随基点平动的同时，绕基点做定点运动。

如果基点在空间系内不动，则平动系与空间系合一，刚体无平动，只有定点运动。即刚体平动自由度  $s_t = 3$ ，定点运动自由度  $s_r = 3$ 。

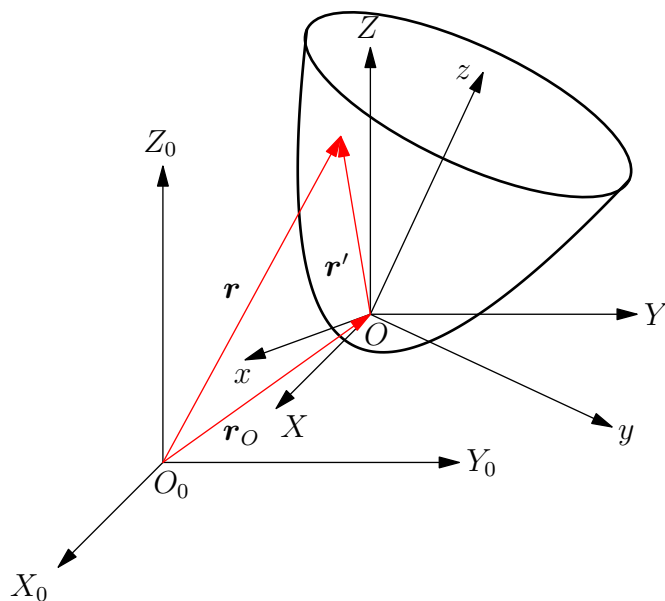


图 6.1: 刚体的运动

### 6.1.3 定点运动的矩阵表示

设有矢量  $\mathbf{R}$ , 则其在坐标系  $OX_1X_2X_3$  和  $Ox_1x_2x_3$  中可以分别表示为

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{E}_i = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}_j$$

同理可有

$$\mathbf{E}_i = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 u_{ij} \mathbf{e}_j$$

此处  $u_{ij} = \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{e}_j$ 。因此有

$$X_i = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{R} = \sum_{j=1}^3 u_{ij} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{R}) = \sum_{j=1}^3 u_{ij} x_j \quad (6.1)$$

式(6.1)用矩阵可以表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{x} \quad (6.2)$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

坐标系的定点运动需要满足矢量的长度不变, 即

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

所以有

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

即

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$$

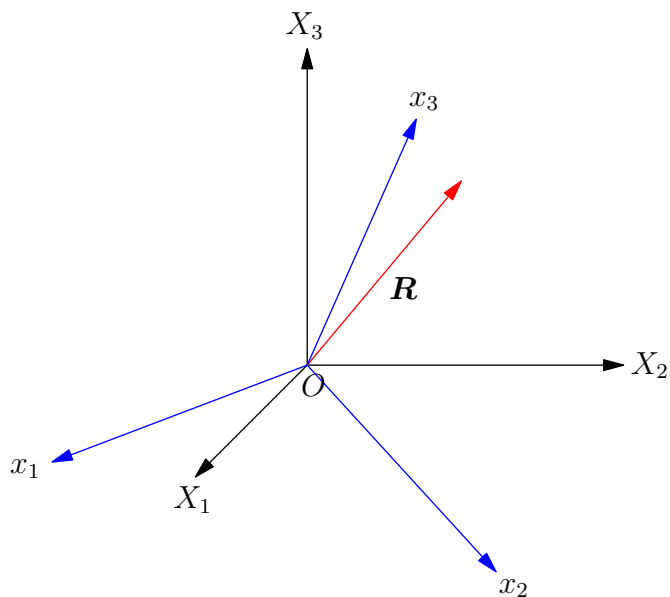


图 6.2: 坐标系的定点旋转

因此, 系数矩阵  $\mathbf{U}$  是正交矩阵, 其独立矩阵元有 3 个。

对于刚体的定点运动, 本体系内刚体的各点坐标不变, 将某参考点的坐标记作  $\mathbf{x}$ 。设在  $t_1, t_2$  时刻, 刚体上该参考点在平动系的坐标分别为  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ , 则有

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{x}, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{x}$$

此处,  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$  都是正交矩阵, 所以有

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{X}_1 = (\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^T) \mathbf{X}_1 = \mathbf{U} \mathbf{X}_1$$

其中矩阵  $\mathbf{U}$  满足

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^T = \mathbf{I}$$

因此, 矩阵  $\mathbf{U}$  也是正交矩阵。由此可得, 刚体的定点运动可用正交矩阵表示。

**例 6.1 (有限定点运动的非对易性)** 刚体的定点运动可用矩阵表示为

$$\mathbf{X}' = \mathbf{U} \mathbf{X}$$

如果再进行一次定轴运动, 那么可有

$$\mathbf{X}'' = \mathbf{U}' \mathbf{X}' = \mathbf{U}' \mathbf{U} \mathbf{X}$$

由于矩阵的乘积具有不可交换性, 因此有限定点运动一般不具有对易性, 从而有限定点转动不能用矢量表示。

#### 6.1.4 无限小定点运动的矢量表示

有限定点运动可以由连续的无限小定点运动合成。考虑

$$\mathbf{X}' = \mathbf{U} \mathbf{X}$$



满足

$$d\mathbf{X}' = \mathbf{X}' - \mathbf{X} = (\mathbf{U} - \mathbf{I})\mathbf{X}$$

是一阶无穷小量, 即有

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \mathbf{u}$$

此处  $\mathbf{u}$  为一阶无穷小量。  $\mathbf{U}$  应为正交矩阵, 即有

$$\mathbf{I} = (\mathbf{I} + \mathbf{u}^T)(\mathbf{I} + \mathbf{u}) = \mathbf{I} + \mathbf{u}^T + \mathbf{u} + \mathbf{u}^T\mathbf{u}$$

略去上式中的高阶无穷小量, 可以得到

$$\mathbf{u}^T = -\mathbf{u} \quad (6.3)$$

即无穷小定点运动的变换矩阵为反对称矩阵, 将其记作

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以有

$$d\mathbf{X} = \mathbf{u}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 X_3 - \varepsilon_3 X_2 \\ \varepsilon_3 X_1 - \varepsilon_1 X_3 \\ \varepsilon_1 X_2 - \varepsilon_2 X_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{R}$$

此处  $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$  称为无限小角位移矢量。

将无限小角位移矢量表示为  $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{n}$ , 其中  $\mathbf{n}$  是单位矢量, 取位矢  $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$ , 则在此无限小定点运动下的位移为

$$d\mathbf{R} = \varepsilon \mathbf{n} \times R\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

上式说明, 此定点运动下, 所有位于过定点方向为  $\mathbf{n}$  的直线上的点都是固定的, 即  $\mathbf{n}$  为转轴。因此无限小定点运动是绕瞬时轴的无限小转动, 定点运动即为定点转动。

### 6.1.5 刚体运动的矢量-矩阵描述

6.1.2节已指出, 刚体的运动可由平动系相对于空间坐标系的平动与本体系相对于平动系的定点转动, 即刚体中任意一点的位矢为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{r}' \quad (6.4)$$

设矢量  $\mathbf{r}'$  在平动系中的坐标为  $\mathbf{X}$ , 在本体系中的坐标为  $\mathbf{x}^{\textcircled{1}}$ , 则它们之间通过旋转矩阵可以表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{x}$$

此处矩阵  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$  是正交矩阵, 即矩阵  $\mathbf{U}$  满足

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (6.5)$$

<sup>①</sup> 需要注意到, 平动系中的坐标  $\mathbf{X}$  是与时间有关的, 而本体系中的坐标  $\mathbf{x}$  则与时间无关。

记平动系的基为  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ ，本体系的基为  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ <sup>①</sup>，则有

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}\mathbf{x}$$

由此可以得到

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}\mathbf{U}$$

综上，式(6.4)可以用矩阵表示为<sup>②</sup>

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{r}_O + \mathbf{E}\mathbf{U}\mathbf{x} \quad (6.6)$$

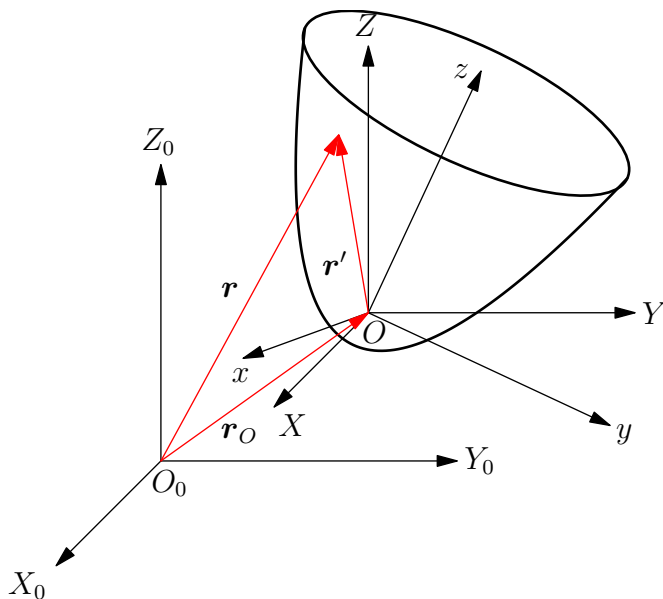


图 6.3: 刚体的运动

考虑刚体上的另外一点  $O'$ ，则有

$$\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}_O + \mathbf{E}\mathbf{U}\mathbf{x}_{O'}$$

于是可有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{E}\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{r}_{O'} - \mathbf{E}\mathbf{U}\mathbf{x}_{O'} + \mathbf{E}\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{E}\mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{O'}) \quad (6.7)$$

将  $O'$  取为基点，各坐标系坐标轴的方向不变，则同样有刚体中任意一点的位矢可以表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{E}\mathbf{U}'\mathbf{x}' \quad (6.8)$$

对比式(6.7)和(6.8)，并考虑到  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{O'}$ ，可有

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}'$$

即，刚体定点转动矩阵与基点的选取无关。

<sup>①</sup> 需要注意到，平动系中的基  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  是与时间无关的，而本体系中的基  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  则与时间有关。

<sup>②</sup> 在用矩阵表示矢量表达式时，如不同时乘以该坐标系基构成的矩阵，则容易造成谬误。

### 6.1.6 刚体上各点的速度与加速度

将式(6.6)两端对时间  $t$  求导数, 得

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{E}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{x} = \mathbf{v}_O + \mathbf{e}U^T\dot{\mathbf{U}}\mathbf{x}$$

将式(6.5)两端对时间  $t$  求导数, 得

$$\dot{\mathbf{U}}^T\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}} = (\mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}})^T + \mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$$

即矩阵  $\mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}}$  是反对称矩阵, 因此可以将其表示为

$$\mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

由此, 记矢量  $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$  称为刚体的角速度, 则有

$$\mathbf{e}U^T\dot{\mathbf{U}}\mathbf{x} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} \omega_2x_3 - \omega_3x_2 \\ \omega_3x_1 - \omega_1x_3 \\ \omega_1x_2 - \omega_2x_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

所以刚体上任意一点的速度可以表示为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \quad (6.9)$$

另取基点  $O'$ , 则当以  $O$  为基点时,  $O'$  的速度为

$$\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{O'} - \mathbf{r}_O)$$

于是, 以  $O'$  为基点表示刚体上各点的速度可有

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'})$$

上式说明刚体的角速度与基点的选取无关。

下面考虑刚体上各点的加速度。首先定义角加速度为

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (6.10)$$

将式(6.9)两端对时间  $t$  求导数, 得

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_O)$$

由此即有刚体上任意一点的加速度

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O)] \quad (6.11)$$

### 6.1.7 刚体的定轴转动

设刚体上有两个不动点  $O$  和  $O_1$ , 则过  $O$  和  $O_1$  的直线即为转轴, 平动系的  $OZ$  轴和本体系的  $Oz$  都沿着转轴。刚体在平动系中的位形由  $OX$  轴和  $Ox$  轴之间的夹角  $\phi$  确定, 刚体

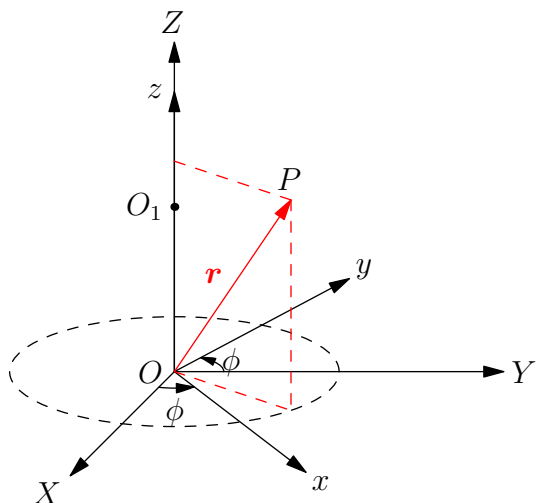


图 6.4: 刚体的定轴转动

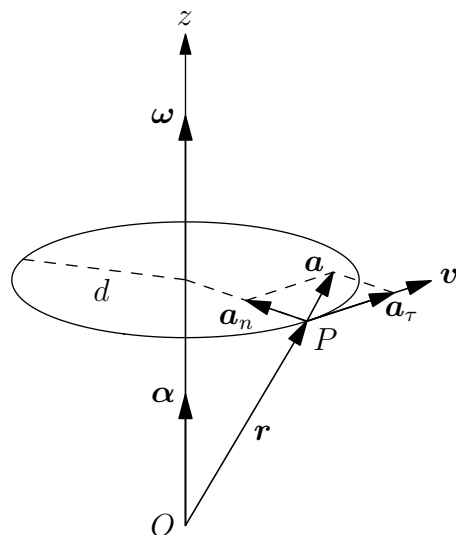


图 6.5: 向心加速度和切向加速度

上不在转动轴上的点沿着以转轴为圆心的圆周运动，设此时刚体上任意一点的矢径在本地系中的坐标为  $\mathbf{x}$ ，在平动系的坐标为  $\mathbf{X}$ ，则有

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{x}$$

此处转动矩阵为

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

直接计算可以验证

$$\mathbf{U}^T \dot{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此角速度和角加速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \dot{\phi} \mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = \ddot{\phi} \mathbf{e}_3$$

即角速度和角加速度都沿着转轴方向。由此根据式(6.9)可得刚体上任意一点的速度

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

根据式(6.11)可得刚体上任意一点的加速度

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

此处的加速度  $\mathbf{a}$  可以分解为向心加速度  $\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  和切向加速度  $\mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ 。

设转轴方向为  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  是单位向量)，转动角为  $\phi$  (顺时针方向)，则根据图6.6中的几何关系可有

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ} \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + [\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}] \cos \phi + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \phi \end{aligned}$$

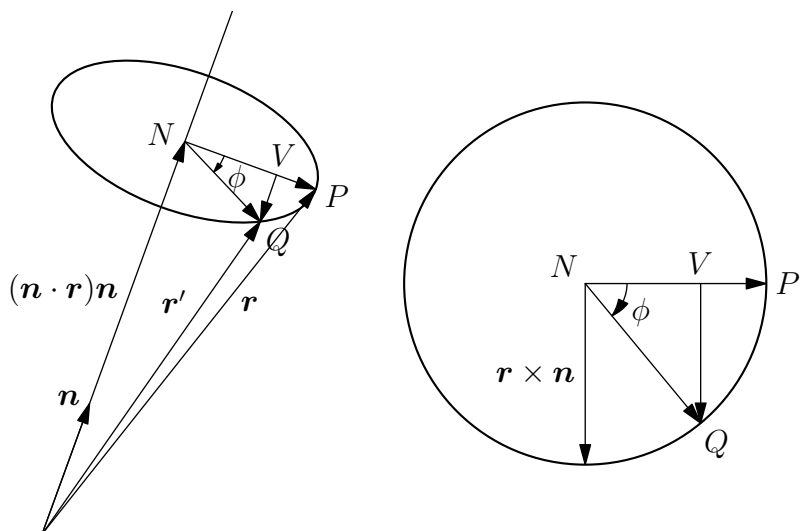


图 6.6: 定轴转动公式

由此可得 Rodrigues 公式

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \phi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}(1 - \cos \phi) + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \phi \quad (6.13)$$

### 6.1.8 刚体定点转动的 Euler 角

刚体定点转动的自由度  $s_r = 3$ , 可用 3 个广义坐标确定本体系统相对平动系的取向。

如图 6.7 所示, 其中  $XOY$  平面与  $xOy$  平面的交线  $ON$  称为节线。三个 Euler 角分别为进动 (precession) 角  $\phi$ , 章动 (nutation) 角  $\theta$  和自转 (spin) 角  $\psi$ 。

三个 Euler 角是相互独立的, 可以任意取值。如果给定三个角的值, 则唯一地确定了刚体定点转动位形, 通常假设  $0 \leq \phi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ 。刚体的连续转动表现为 Euler 角随时间连续变化。

从平动系  $OXYZ$  到本体系统  $Oxyz$  的转换可以通过下面的三个按顺序的转动实现:

1. 绕  $OZ$  轴旋转  $\phi$  角, 称为进动;
2. 绕  $ON$  旋转  $\theta$  角, 称为章动;
3. 绕  $Oz$  轴旋转  $\psi$  角, 称为自转。

如果从转轴的顶端看, 所有的转动都是逆时针方向。即定点转动可以由上面的进动、章动和自转运动来合成。由于刚体的有限定轴转动是不可交换的, 因此上面的三种转动的顺序也是不可交换的。

根据定轴转动的转动矩阵, 可以得到进动、章动和自转的旋转变换矩阵分别为

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

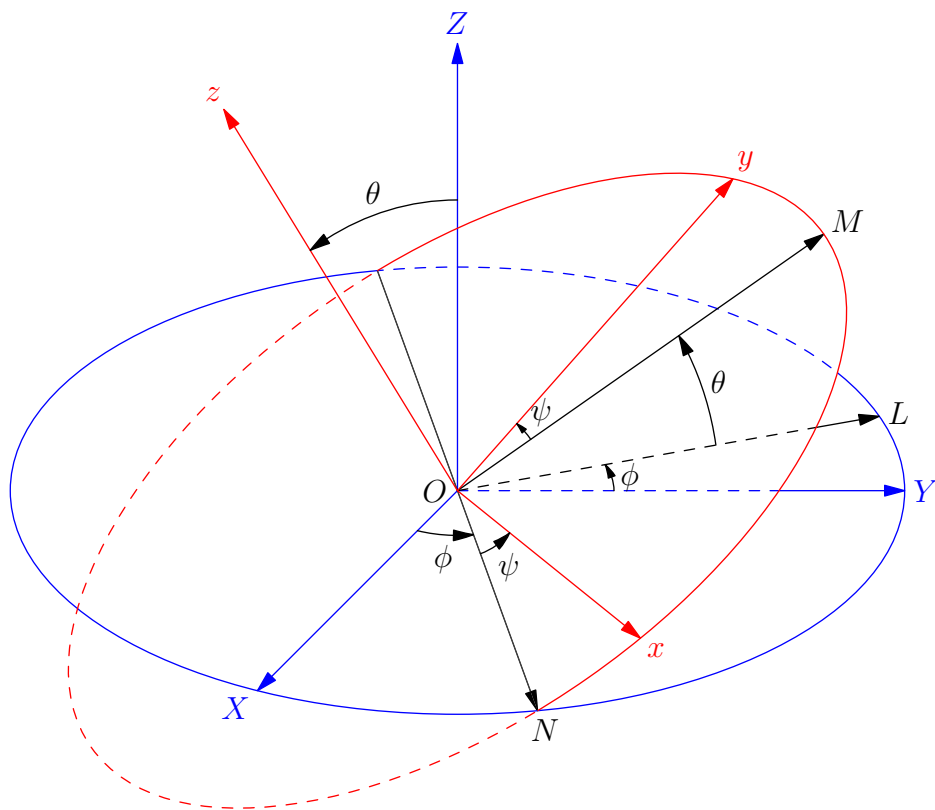


图 6.7: 刚体定点转动的 Euler 角

因此，定点转动的旋转变换矩阵为

$$\begin{aligned}
 U &= U_1 U_2 U_3 \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

直接求  $U^T \dot{U}$  的运算十分复杂，考虑到  $U_1, U_2, U_3$  都是正交矩阵，因此有

$$U_1^T \dot{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2^T \dot{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3^T \dot{U}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故有

$$\begin{aligned}
 U^T \dot{U} &= U_3^T U_2^T U_1^T (\dot{U}_1 U_2 U_3 + U_1 \dot{U}_2 U_3 + U_1 U_2 \dot{U}_3) \\
 &= U_3^T U_2^T U_1^T \dot{U}_1 U_2 U_3 + U_3^T U_2^T \dot{U}_2 U_3 + U_1^T \dot{U}_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\phi} \cos \theta - \dot{\psi} & \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} & 0 & -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi & \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (6.14)$$

式(6.14)称为 Euler 运动学方程，它给出了刚体在平动系中的角速度在本体系内的分量与广义坐标（即 Euler 角）、广义速度（即 Euler 角的导数）之间的关系。

例 6.2 半径为  $a$  的圆盘垂直于地面作纯滚动，圆盘中心  $C$  以速率  $v_C = \omega_1 R$  沿着半径为  $R$  的圆周运动，求圆盘边缘上任意一点  $P$  的速度。

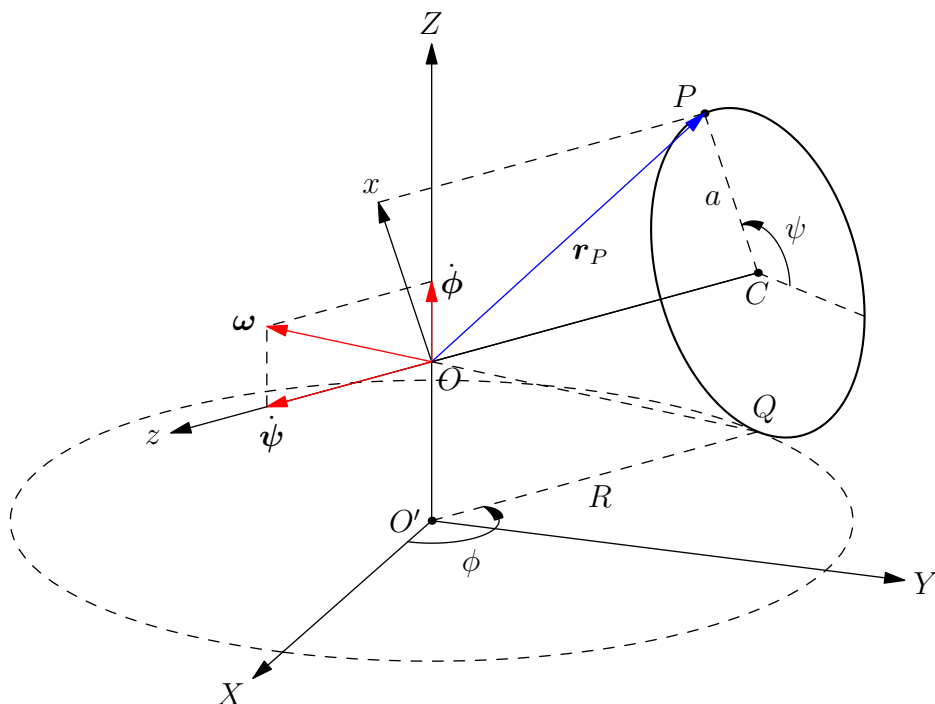


图 6.8: 例 6.2

解 方法一：如图6.8所示，圆盘在转动过程中，盘上各点和  $O$  点的相对距离保持不变，因此圆盘的运动可以看成是绕  $O$  点的定点转动。而纯滚动条件要求  $Q$  点的瞬时速度为零，因此  $OQ$  为瞬时转轴，即角速度沿此方向。由此可得圆盘绕  $O$  的角速度（进动） $\omega_1$  与圆盘自转的角速度  $\omega_2$  之间需要满足

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a}{R}$$

由此可有

$$\omega_2 = \frac{R}{a}\omega_1$$

由此即有

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1(\sin \psi \mathbf{e}_x + \cos \psi \mathbf{e}_y) - \omega_2 \mathbf{e}_z = \omega_1(\sin \psi \mathbf{e}_x + \cos \psi \mathbf{e}_y) + \frac{R}{a}\omega_1 \mathbf{e}_z$$

再考虑到  $\mathbf{r}_P = a\mathbf{e}_x + R\mathbf{e}_z$ ，此处的  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  为本体系中的基<sup>①</sup>。综上，即有

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \omega_1 R \cos \psi \mathbf{e}_x - \omega_1 R(1 + \sin \psi) \mathbf{e}_y + \omega_1 a \cos \psi \mathbf{e}_z$$

方法二：也可以用确定 Euler 角的方法通过 Euler 运动学方程直接得到角速度。进动角  $\phi$  即为  $O'Q$  与平动系（此时与空间系重合） $X$  轴之间的夹角，章动角  $\theta = \frac{\pi}{2}$  恒定不变，自转角

<sup>①</sup> 此处  $y$  轴的方向需通过右手规则来确定以保证本体系为右手系。

$\psi$  即为圆盘上水平线到本体系  $Ox$  轴的角。据此, 根据 Euler 运动学方程(6.14)可得圆盘的角速度  $\boldsymbol{\omega}$  在本体系中的坐标为

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \cos \psi \\ \omega_3 = \dot{\psi} \end{cases}$$

即有

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \sin \psi \mathbf{e}_x + \dot{\phi} \cos \psi \mathbf{e}_y + \dot{\psi} \mathbf{e}_z$$

现在需要得到  $\dot{\phi}, \dot{\psi}$  与  $\omega_1$  的关系, 考虑  $\mathbf{r}_C = -R\mathbf{e}_z$ , 则有

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = -R\dot{\phi} \cos \psi \mathbf{e}_x + R\dot{\phi} \sin \psi \mathbf{e}_y$$

易知  $\mathbf{v}_C$  的方向沿  $Q$  点处的切线方向, 并可得  $\dot{\phi}$ , 其大小为

$$R\dot{\phi} = \omega_1 R$$

即有  $\dot{\phi} = \omega_1$ 。再考虑  $\mathbf{r}_Q = -a \sin \psi \mathbf{e}_x - a \cos \psi \mathbf{e}_y - R\mathbf{e}_z$ , 则有

$$\mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_Q = (a\dot{\psi} - R\dot{\phi}) \cos \psi \mathbf{e}_x - (a\dot{\psi} - R\dot{\phi}) \sin \psi \mathbf{e}_y$$

纯滚动条件要求  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ , 即可得

$$\dot{\psi} = \frac{R}{a} \dot{\phi} = \frac{R}{a} \omega_1$$

由此可得圆盘边缘上任意一点的速度

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \omega_1 R \cos \psi \mathbf{e}_x - \omega_1 R(1 + \sin \psi) \mathbf{e}_y + \omega_1 a \cos \psi \mathbf{e}_z$$

## 6.2 惯量矩阵

### 6.2.1 刚体定点转动的角动量、动能与转动惯量

在平动系中, 刚体绕  $O$  点定点转动。设刚体任意一点的位矢为  $\mathbf{r}$ , 则其在平动系中的速度为  $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , 由此角动量可计算为<sup>①</sup>

$$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{r}} dV = \int_V \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV = \int_V \rho [r^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}] dV$$

<sup>①</sup> 此式可通过先将刚体分割为  $n$  块, 作为质点系处理, 其角动量为

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \rho_i \dot{\mathbf{r}}_i \Delta V_i$$

然后令  $n$  趋于无穷, 根据重积分的定义即得。



此处积分遍及刚体所在的空间,  $\rho$  为刚体的密度。将上式向任意直角坐标系投影, 即

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1 = \int_V \rho [r^2 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1)] dV \\
 &= \int_V \rho [(x^2 + y^2 + z^2)\omega_1 - (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)x] dV \\
 &= \int_V \rho [(y^2 + z^2)\omega_1 - xy\omega_2 - xz\omega_3] dV \\
 L_2 &= \int_V \rho [-xy\omega_1 + (x^2 + z^2)\omega_2 - yz\omega_3] dV \\
 L_3 &= \int_V \rho [-xz\omega_1 - yz\omega_2 + (x^2 + y^2)\omega_3] dV
 \end{aligned}$$

由此, 角动量矢量的分量可以表示为

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

其中

$$I_{ij} = \int_V \rho \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_k^2 - x_i x_j \right) dV, \quad x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z \quad (6.16)$$

称为刚体对  $O$  的惯量元素, 矩阵

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

称为刚体对  $O$  的惯量矩阵。由此, 角动量可以表示为

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (6.18)$$

刚体的动能可以表示为<sup>①</sup>

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{r}}) dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$$

考虑到式(6.18)可有

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (6.19)$$

动能的正定性表明惯量矩阵  $\mathbf{I}$  是正定矩阵。再考虑到惯量矩阵的定义, 可知惯量矩阵  $\mathbf{I}$  是对称正定矩阵。

在本体系中, 刚体静止, 因此在本体系中惯量元素为常量。

## 6.2.2 平行轴定理

设对  $O$  点, 惯量元素为

$$I_{ij} = \int_V \rho \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_k^2 - x_i x_j \right) dV$$

<sup>①</sup> 对于刚体, 角动量矢量是与空间位置无关的, 否则刚体将发生变形。

对质心  $C$ , 惯量元素为

$$I'_{ij} = \int_V \rho \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x'_k{}^2 - x'_i x'_j \right) dV$$

设刚体质心的坐标为  $X_i$ , 则有

$$x_i = X_i + x'_i$$

再考虑到质心坐标满足<sup>①</sup>

$$\int_V \rho x_i dV = M X_i$$

由此可得平行轴定理

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}' \quad (6.20)$$

其中

$$I_{Cij} = M \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 X_k^2 - X_i X_j \right) \quad (6.21)$$

即为总质量集中于质心的质点对  $O$  的惯量元素。

平行轴定理给出了对质心  $C$  点的惯量矩阵与对任意点  $O$  的惯量矩阵之间的关系。

### 6.2.3 会聚轴定理

角速度表示可以为  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$ , 此处  $\mathbf{n}$  为瞬时转轴方向单位矢量。由此可得角动量轴向投影分量为

$$L_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = \int_V \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dV = \int_V \rho (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \omega dV$$

即有

$$L_n = I_n \omega \quad (6.22)$$

此处

$$I_n = \int_V \rho |\mathbf{n} \times \mathbf{r}|^2 dV \quad (6.23)$$

为对  $\mathbf{n}$  轴的转动惯量,  $|\mathbf{n} \times \mathbf{r}|$  即为矢径  $\mathbf{r}$  末端点到转轴的距离。

设在某坐标系下,  $\mathbf{n}$  和  $\mathbf{L}$  的分量可以表示为

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

因此有

$$L_n = \mathbf{n}^T \mathbf{L} = \mathbf{n}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n} \omega$$

即有

$$I_n = \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n} \quad (6.24)$$

式(6.24)表示的关系即称为会聚轴定理。此时, 刚体的动能也可以简单的表示为

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I_n \omega^2 \quad (6.25)$$

对轴的转动惯量一般与取向有关, 是各向异性的。

<sup>①</sup> 此式可通过先将刚体分割为  $n$  块, 作为质点系处理, 然后令  $n$  趋于无穷, 根据重积分的定义即得。

### 6.2.4 惯量主轴与主轴系

刚体的动能是标量，因此是坐标变换的不变量。在不同的坐标系中，角动量的坐标之间将满足

$$\boldsymbol{\omega} = U\boldsymbol{\omega}'$$

因此，动能的形式将变为

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}'^T U^T \mathbf{I} U \boldsymbol{\omega}' = T' = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}'^T \mathbf{I}' \boldsymbol{\omega}'$$

因此，在不同的坐标系中，惯量矩阵将满足

$$\mathbf{I}' = U^T \mathbf{I} U$$

即，在不同的坐标系中，惯量矩阵是不同的。而能够使得惯量矩阵  $\mathbf{I}$  为对角矩阵的坐标系称为主轴系，其坐标轴称为惯量主轴，对相应主轴的转动惯量称为主惯量。

今后，我们约定本体系一律取为主轴系。在主轴系中，惯量矩阵为

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$$

此时，角动量和动能分别为

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i \mathbf{e}_i, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2$$

惯量矩阵的正定性保证主惯量都是正值，即  $I_i > 0, i = 1, 2, 3$ 。

### 6.2.5 主轴系的求法

考虑角速度沿主轴方向，即  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_j$  时，则

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I} \omega \mathbf{e}_j = I_j \omega \mathbf{e}_j$$

由此可得

$$\mathbf{I} \mathbf{e}_j = I_j \mathbf{e}_j$$

即惯量主轴为惯量矩阵的本征矢量，相应的本征值为主惯量<sup>①</sup>。

**例 6.3** 求边长为  $a$  质量为  $M$  的匀质立方体对顶点的惯量矩阵，并求出其惯量主轴和主惯量。

**解** 根据惯量矩阵中惯量元素的定义

$$I_{ij} = \int_V \rho \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_k^2 - x_i x_j \right) dV$$

<sup>①</sup> 实际上，根据矩阵正交相似对角化的条件，可以直接得出此结论。

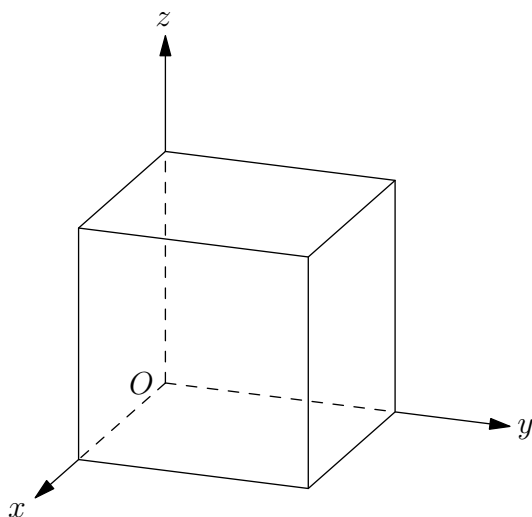


图 6.9: 例 6.3

可有

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \frac{M}{a^3} \int_V (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{M}{a^3} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (y^2 + z^2) dz = \frac{2}{3} Ma^2 \\
 I_{22} &= \frac{M}{a^3} \int_V (x^2 + z^2) dx dy dz = \frac{M}{a^3} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 + z^2) dz = \frac{2}{3} Ma^2 \\
 I_{33} &= \frac{M}{a^3} \int_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{M}{a^3} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 + y^2) dz = \frac{2}{3} Ma^2 \\
 I_{12} = I_{21} &= \frac{M}{a^3} \int_V (-xy) dx dy dz = -\frac{M}{a^3} \int_0^a x dx \int_0^a y dy \int_0^a dz = -\frac{1}{4} Ma^2 \\
 I_{23} = I_{32} &= \frac{M}{a^3} \int_V (-yz) dx dy dz = -\frac{M}{a^3} \int_0^a dx \int_0^a y dy \int_0^a z dz = -\frac{1}{4} Ma^2 \\
 I_{13} = I_{31} &= \frac{M}{a^3} \int_V (-xz) dx dy dz = -\frac{M}{a^3} \int_0^a x dx \int_0^a dy \int_0^a z dz = -\frac{1}{4} Ma^2
 \end{aligned}$$

因此，惯量矩阵为

$$\mathbf{I} = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

设矩阵  $\mathbf{I}$  的特征值为  $\frac{Ma^2}{12}\lambda$ ，则有

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & -3 & -3 \\ -3 & 8 - \lambda & -3 \\ -3 & -3 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得  $\lambda_1 = \lambda_2 = 11, \lambda_3 = 2$ ，因此有主惯量

$$I_1 = I_2 = \frac{11}{12} Ma^2, \quad I_3 = \frac{1}{6} Ma^2$$

相应的本征矢量可取为<sup>①</sup>

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

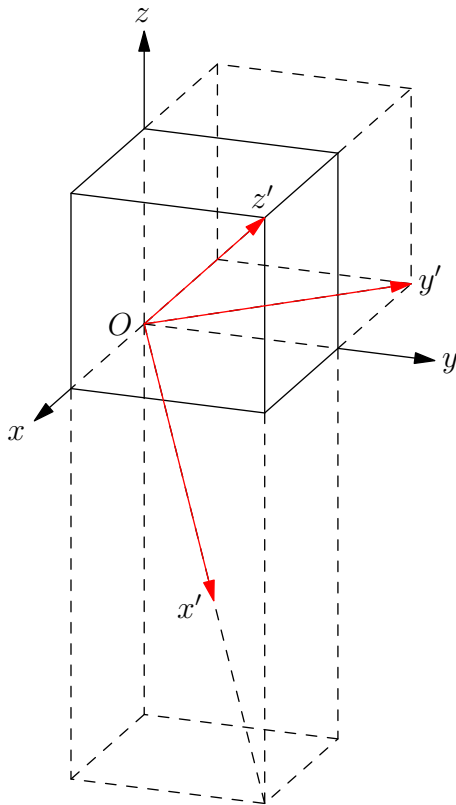


图 6.10: 例 6.3: 立方体对顶点的惯量主轴

质心的坐标为

$$\mathbf{X} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故对质量集中与质心对顶点的惯量元素为

$$I_{Cij} = M \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 X_k^2 - X_i X_j \right)$$

由此可得质量集中与质心对顶点的惯量矩阵为

$$\mathbf{I}_C = \frac{Ma^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

故有对质心  $C$  的惯量矩阵为

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I} - \mathbf{I}_C = \frac{Ma^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>①</sup> 其中  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  的取法不唯一。

故对质心  $C$  可选任意三个相互正交的方向为惯量主轴，主惯量为

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{6}Ma^2$$

即，匀质立方体对质心的转动惯性是球对称的。

## 6.2.6 惯量椭球

在刚体的转轴上取点  $P$ ，使得其坐标满足

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{I_n}}\mathbf{n}$$

所以有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} = \frac{1}{I_n} \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n} = 1$$

由于惯量矩阵  $\mathbf{I}$  对称正定，因此点  $P$  的集合为中心在原点的椭球面，此椭球面称为**惯量椭球**。它是刚体转动惯量的几何表示。

在主轴系中，惯量椭球为标准形式

$$I_1 x'^2 + I_2 y'^2 + I_3 z'^2 = 1$$

主轴是惯量椭球的对称轴。

当  $I_1 = I_2 = I_3$  时，惯量椭球退化为球，其主轴可以任选，物体呈转动各项同性。当  $I_1 = I_2 \neq I_3$  时，惯量椭球退化为旋转椭球面，两主轴可以在垂直于第三个主轴的平面内任选。

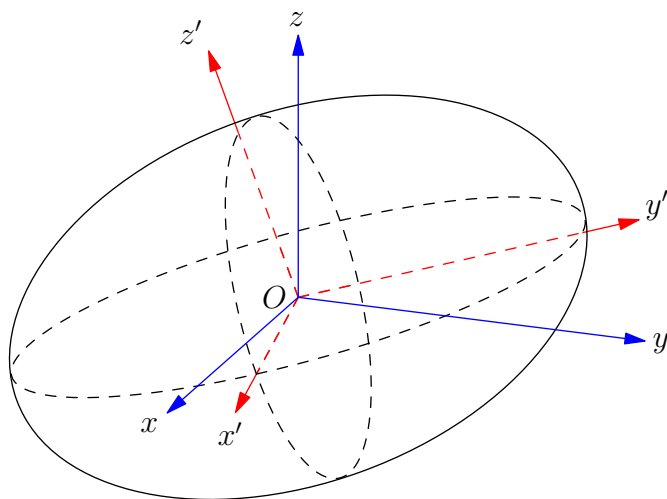


图 6.11: 惯量椭球和主轴系（红色坐标系为主轴系）

惯量椭球的几何意义为：

1. 给出对过定点的任意轴的转动惯量；
2. 给出主轴系；
3. 已知瞬时转动轴（即角速度  $\boldsymbol{\omega}$  的方向），确定角动量方向。

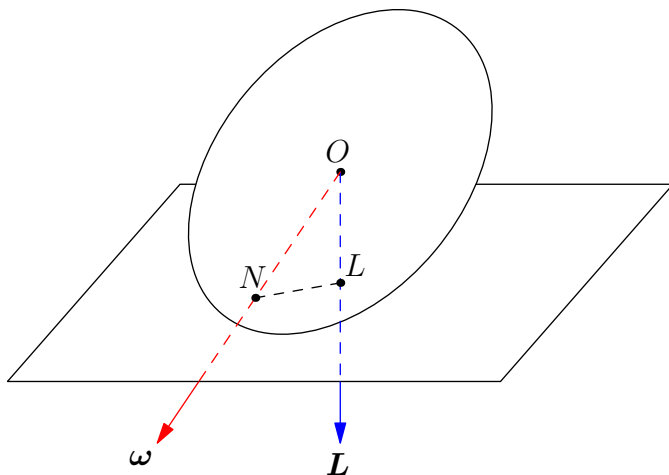


图 6.12: 角速度的方向与角动量的方向

下面考虑已知角速度  $\omega$  的方向，来求解角动量  $L$  的方向。首先刚体的动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2} I_n \omega^2$$

此处  $I_n$  为刚体绕瞬时转轴的转动惯量。则转轴与惯量椭球的交点  $N$ （称为极点）为

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{\sqrt{I_n}} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}}$$

则极点处，惯量椭球的切平面法向矢量可以表示为

$$\mathbf{n} = \nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} - 1) \Big|_N = 2\mathbf{I} \mathbf{x}_N = \frac{2\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}} = \frac{2\mathbf{L}}{\sqrt{2T}}$$

由此即可得角动量的方向沿惯量椭球过极点切平面的法向。

惯量椭球固定于刚体，其转动代表刚体的定点转动。

## 6.3 Euler 动力学方程

### 6.3.1 刚体运动方程

当刚体在空间系中作定点转动时（此时平动系与空间系重合），取定点为基点  $O$ ，根据角动量定理可有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(e)}$$

此处  $\mathbf{M}^{(e)}$  为刚体对  $O$  点的合外力矩，定义为<sup>①</sup>

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f}^{(e)} dV$$

式中  $\mathbf{f}^{(e)}$  为刚体所受的外力分布（单位体积刚体所受外力）。刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$$

<sup>①</sup> 此式同样可以通过将刚体分割为  $n$  个质点，然后令  $n$  趋于无穷大根据重积分的定义获得。

由于刚体的性质，刚体在运动过程中其内部任意两个质点间都没有相对位移，因此内约束力不做功。根据动能定理可有

$$\frac{dT}{dt} = \int_V \mathbf{f}^{(e)} \cdot \dot{\mathbf{r}} dV = \int_V \mathbf{f}^{(e)} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV = \int_V \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{f}^{(e)}) dV = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^{(e)}$$

对于刚体在空间系的一般运动，有如下定理。

**定理 6.3.1 (Chasles 定理<sup>①</sup>)** 刚体最一般的位移可以分解为随任选基点的平动位移和绕该基点的定点转动。

由此，可取质心为基点，刚体的运动则分解为随质心的平动与绕质心的定点转动，而且前面已说明刚体定点转动的角速度与基点的选取无关。对于刚体质心的平动运动，根据动量定理可有

$$M\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}^{(e)} \quad (6.26)$$

式中  $\mathbf{F}^{(e)}$  为刚体所受合外力，即

$$\mathbf{F}^{(e)} = \int_V \mathbf{f}^{(e)} dV$$

再考虑到刚体在运动过程中其内部任意两个质点间都没有相对位移，根据动能定理可有

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} MV^2 \right) = \mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{V} \quad (6.27)$$

对于刚体绕质心的定点转动，根据质心系的角动量定理可有

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'^{(e)} \quad (6.28)$$

式中  $\mathbf{M}'^{(e)}$  为对质心的合外力矩，即

$$\mathbf{M}'^{(e)} = \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{f}^{(e)} dV$$

根据质心系的动能定理可有

$$\frac{dT'}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}' \right) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}'^{(e)} \quad (6.29)$$

在空间系中，刚体对原点的角动量为

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{L}' \quad (6.30)$$

在空间系中，刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} MV^2 + T' = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}' \quad (6.31)$$

## 6.3.2 Euler 动力学方程

刚体质心的运动规律与质点是相同的，现在只考虑刚体绕质心的定点转动。为了更具一般性，我们考虑刚体对任意基点的定点运动方程。即考虑角动量定理

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \quad (6.32)$$

<sup>①</sup> 中文可作“沙勒定理”或“夏莱定理”。



的分量形式。式中  $\mathbf{L}$  为刚体在平动系（可以不是质心系）中的角动量， $\mathbf{M}$  为刚体对基点的外力矩。在本体系中，刚体的惯量矩阵是常数矩阵，因此下面考虑求得方程(6.32)在本体系中的分量形式。本体系的基矩阵  $\mathbf{e}$  与平动系的基矩阵  $\mathbf{E}$  之间满足

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}\mathbf{U}$$

在本体系中可有

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 L_i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e} \bar{\mathbf{L}}$$

式中  $\bar{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ 。由此可有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{e} \dot{\bar{\mathbf{L}}} + \dot{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{e} \dot{\bar{\mathbf{L}}} + \mathbf{E} \dot{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{e} \dot{\bar{\mathbf{L}}} + \mathbf{e} \mathbf{U}^T \dot{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{L}} \\ &= \frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \end{aligned} \quad (6.33)$$

式中  $\frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{L}_i \mathbf{e}_i$  称为相对变化率， $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$  称为转动牵连变化率。考虑到  $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ ，可以将式(6.33)写作分量形式。

如果本体系取为主轴系，则有

$$L_i = I_i \omega_i, \quad i = 1, 2, 3$$

此时可使式(6.33)的分量形式大为简化，即

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = M_1 & (6.34a) \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = M_2 & (6.34b) \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = M_3 & (6.34c) \end{cases}$$

式(6.34)称为 Euler 动力学方程，它是对角速度的一阶非线性常微分方程组。将 Euler 运动学方程(6.14)代入，可得对 Euler 角的二阶非线性常微分方程组。

**例 6.4 (偏斜的飞轮)** 设有半径为  $R$ ，质量为  $m$  的圆盘状飞轮安装在两个间距为  $l$  的轴承正中，但飞轮的法线方向与轴承之间有一夹角  $\alpha$ ，求飞轮以  $\omega$  的角速度匀速绕轴旋转时，轴承上受到的额外负荷。

**解** 圆盘的主惯量为

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} m R^2, \quad I_3 = \frac{1}{2} m R^2$$

在本体系中，角速度为

$$\omega_1 = \omega \sin \alpha, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega \cos \alpha$$

由于是匀速转动，可有

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$$

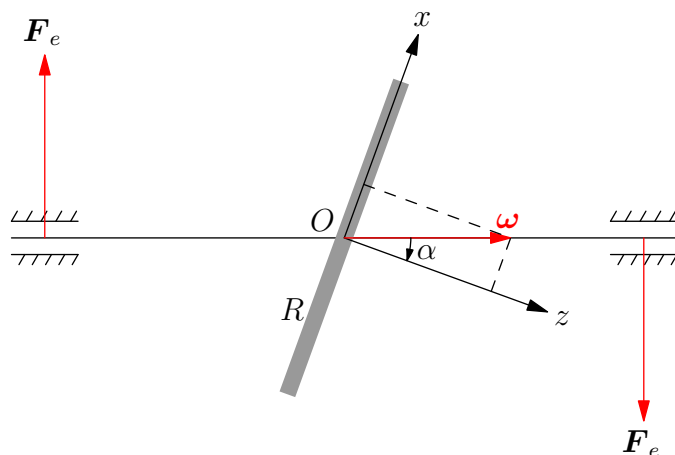


图 6.13: 例 6.4

Euler 动力学方程为

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases} M_1 = 0 \\ M_2 = -\frac{1}{8} m R^2 \omega^2 \sin 2\alpha \\ M_3 = 0 \end{cases}$$

因此轴承上受到的力（动反作用力）为

$$F_e = \frac{|M_2|}{l} = \frac{m R^2 \omega^2 \sin 2\alpha}{8l}$$

而轴承受到的静反作用力（重力负荷）为

$$F_g = \frac{1}{2} mg$$

当角速度  $\omega$  很大时，轴承受到的动反作用力可以远大于静反作用力。

## 6.4 无力矩陀螺（Euler 陀螺）

不受外力矩作用的定点转动刚体，又称为 Euler 陀螺。

### 6.4.1 运动方程与守恒量

Euler 陀螺的合外力矩恒为零，即  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ ，由 Euler 动力学方程(6.34)可得陀螺的运动方程为

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} \quad (6.35)$$

将(6.35)各式分别乘以  $I_1\omega_1$ 、 $I_2\omega_2$ 、 $I_3\omega_3$  相加, 得

$$I_1^2\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2^2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3^2\omega_3\dot{\omega}_3 = 0$$

即有角动量守恒<sup>①</sup>

$$\sum_{i=1}^3 I_i^2\omega_i^2 = L^2 \quad (\text{常数}) \quad (6.36)$$

将(6.35)各式分别乘以  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$  相加, 得

$$I_1\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3\omega_3\dot{\omega}_3 = 0$$

即有能量守恒<sup>②</sup>

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i\omega_i^2 = T \quad (\text{常数}) \quad (6.37)$$

## 6.4.2 对称 Euler 陀螺

至少有两个主惯量相等的刚体即可称为**对称刚体**。不妨设有  $I_1 = I_2$ , 此时 Euler 动力学方程化为

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0 \\ I_1\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \quad (6.38)$$

由方程(6.38)中的第三式可得

$$\omega_3 = \Omega \quad (\text{常数}) \quad (6.39)$$

记  $n = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\Omega$ , 则方程(6.38)的第一二式化为

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + n\omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - n\omega_1 = 0 \end{cases}$$

从中消去  $\omega_2$  可得

$$\ddot{\omega}_1 + n^2\omega_1 = 0$$

由此解得

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \cos(nt + \varepsilon) \\ \omega_2 = \omega_0 \sin(nt + \varepsilon) \end{cases} \quad (6.40)$$

综上可得刚体的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3 = \omega_0 \cos(nt + \varepsilon)\mathbf{e}_1 + \omega_0 \sin(nt + \varepsilon)\mathbf{e}_2 + \Omega\mathbf{e}_3 \quad (6.41)$$

角速度的大小为

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} \quad (\text{常数})$$

该角速度与主轴系  $z$  轴夹角是固定的  $\alpha = \arctan \frac{\omega_0}{\Omega}$ 。

对称 Euler 陀螺的角速度位于主轴系的一个半顶角为  $\alpha$ ,  $z$  轴为对称轴的锥面 (称为**本体极锥**) 上, 绕  $z$  轴以匀角速度  $n$  旋转。

<sup>①</sup> 也可同角动量定理得到。

<sup>②</sup> 也可同动能定理得到。

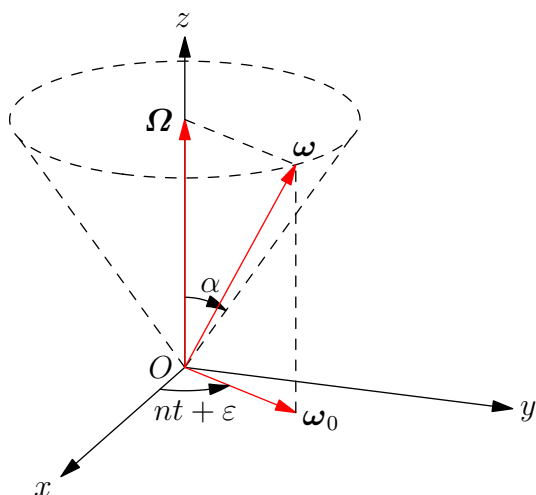


图 6.14: 对称 Euler 陀螺的角速度矢量

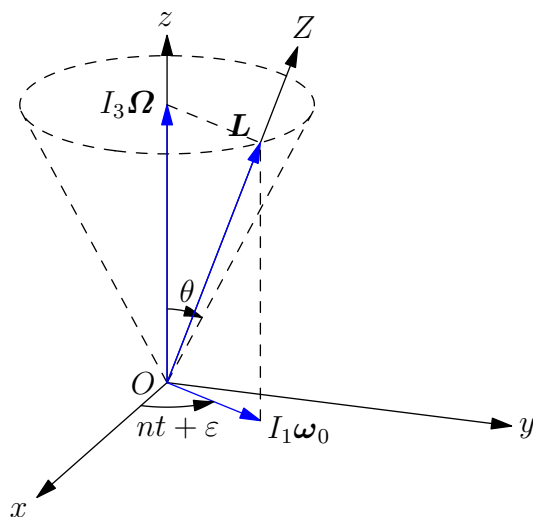


图 6.15: 对称 Euler 陀螺的角动量矢量

下面考虑角动量矢量  $\mathbf{L}$ 。根据角动量守恒,  $\mathbf{L}$  为常矢量, 方向不变, 可取平动系基矢量为  $\mathbf{E}_Z = \frac{\mathbf{L}}{L}$ 。具体可有

$$\mathbf{L} = I_1(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2) + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3 = I_1 \omega_0 [\cos(nt + \varepsilon) \mathbf{e}_1 + \sin(nt + \varepsilon) \mathbf{e}_2] + I_3 \Omega \mathbf{e}_3$$

由此可以看出矢量  $\mathbf{e}_3$ 、 $\boldsymbol{\omega}$  和  $\mathbf{L}$  共面, 角速度的大小

$$L = \sqrt{I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2} = \sqrt{I_1^2 \omega_0^2 + I_3^2 \Omega^2} \quad (\text{常数})$$

章动角  $\theta$  满足

$$\tan \theta = \frac{I_1 \omega_0}{I_3 \Omega} = \frac{I_1}{I_3} \tan \alpha \quad (\text{常数})$$

即有  $\dot{\theta} = 0$ , 无章动。

再由 Euler 运动学方程

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

由此可得自转角  $\psi$  满足

$$\tan \psi = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \cot(nt + \varepsilon)$$

即有自转角  $\psi = -nt + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ 。由此可得自转角速度以及进动角速度

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -n = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega \quad (\text{常数}) \\ \dot{\phi} = \frac{\omega_3 - \dot{\psi}}{\cos \theta} = \frac{L}{I_1} > 0 \quad (\text{常数}) \end{cases}$$

即有第三主轴绕角速度矢量以匀角速度逆时针进动。章动角恒定, 进动和自转角速度恒定的转动称为规则进动。考虑到  $\mathbf{e}_z$ 、 $\boldsymbol{\omega}$  和  $\mathbf{L}$  共面, 故角速度绕角动量矢量以匀角速度逆时针旋转, 由于

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\mathbf{L}}{L} = \frac{2T}{L} \quad (\text{常数})$$

故角速度位于空间系锥面 (称为**空间极锥**) 上。角  $\alpha$  和  $\theta$  满足

$$\frac{\tan \theta}{\tan \alpha} = \frac{I_1}{I_3}$$

它们决定了空间极锥与本体极锥之间的相对位置。**Euler** 陀螺可能的三种空间极锥与本体极锥之间的相对位置关系如图6.16、6.17和6.18所示。

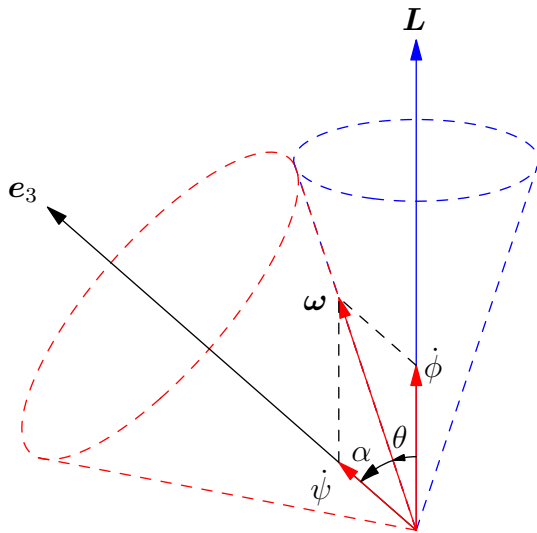


图 6.16:  $I_1 = I_2 > I_3$ ,  $\theta > \alpha$

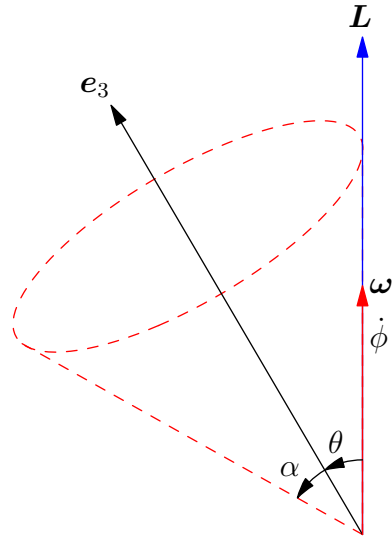


图 6.17:  $I_1 = I_2 = I_3$ ,  $\theta = \alpha$

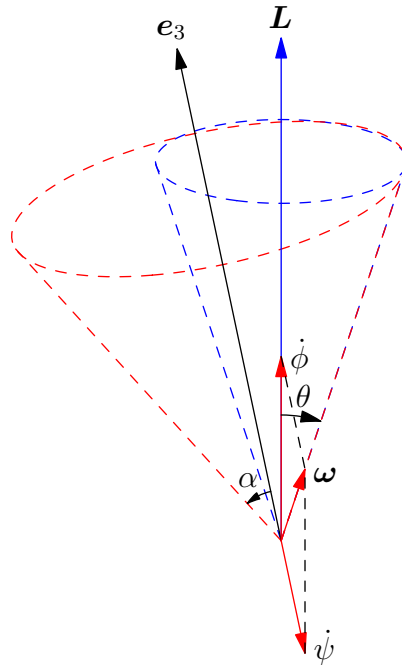


图 6.18:  $I_1 = I_2 < I_3$ ,  $\theta < \alpha$

由于本体极锥相对本体系静止, 故本体极锥的运动即代表了刚体额运动, 角速度线上的各点在平动系中瞬时静止, 即为瞬时转轴方向。对称 **Euler** 陀螺运动的几何图像即为本体极锥贴着空间极锥作纯滚动。

### 6.4.3 非对称 Euler 陀螺

现在利用 Euler 动力学方程研究三个主惯量各不相等的非对称陀螺的自由转动。为方便起见, 假定

$$I_3 > I_2 > I_1$$

由角动量守恒和能量守恒可得

$$\begin{cases} I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = L^2 \\ I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = 2T \end{cases} \quad (6.42a)$$

$$I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = 2T \quad (6.42b)$$

其中  $L$  和  $T$  为常数。这两个等式可以用  $\mathbf{L}$  的三个分量表示为

$$\begin{cases} L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2 \\ \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} = 2T \end{cases} \quad (6.43a)$$

$$\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} = 2T \quad (6.43b)$$

在以  $L_1, L_2, L_3$  为轴的坐标系中, 方程(6.43b)是半轴分别

$$\sqrt{2I_1T}, \sqrt{2I_2T}, \sqrt{2I_3T}$$

的椭球面, 而方程(6.43a)则为半径为  $L$  的球面方程。当矢量  $\mathbf{L}$  相对陀螺的主轴移动时, 其端点将沿着这两个曲面的交线运动。交线存在的条件由不等式

$$2I_1T < L^2 < 2I_3T \quad (6.44)$$

给出, 即表示球(6.43a)的半径介于椭球(6.43b)的最长半轴和最短半轴之间。图6.19画出了椭球与不同半径的球面的一系列这样的交线。

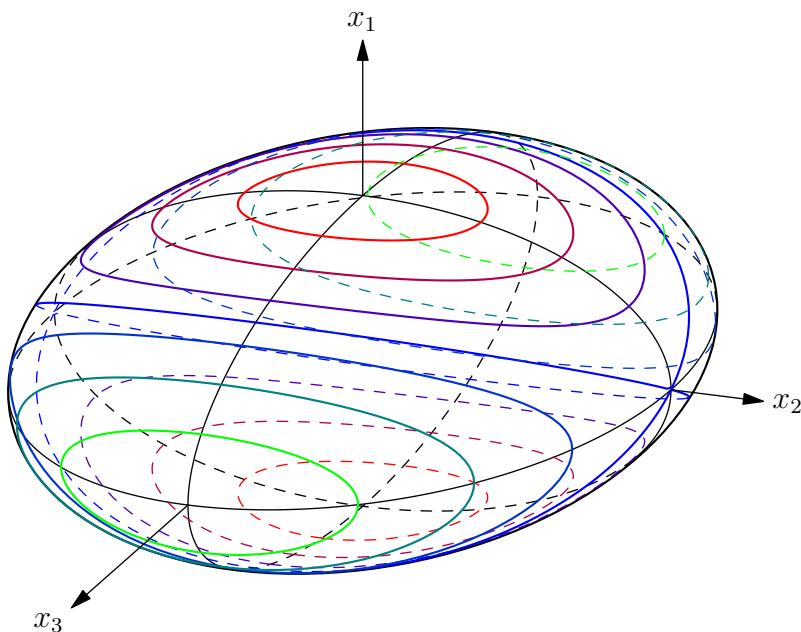


图 6.19: 不同情况下角动量矢量末端的轨迹

现在考虑在给定能量  $T$  时,  $L$  的变化引起矢量  $\mathbf{L}$  的端点的轨迹性质的变化。当  $L^2$  略大于  $2I_1T$  时, 球和椭球相交于椭球极点附近围绕  $x_1$  轴的两条很小的封闭曲线 (图6.19中红色线)。当  $L^2 \rightarrow 2I_1T$  时, 两条曲线分别收缩到极点。随着  $L^2$  的增大, 曲线也随之扩大,

当  $L^2 = 2I_2T$  时, 曲线变成两条平面曲线 (椭圆, 图6.19中蓝色线), 并相交于椭球在  $x_2$  轴上的极点。 $L^2$  再继续增大, 将再次出现两条分离的封闭曲线, 分别围绕  $x_3$  轴的两个极点 (图6.19中绿色线)。而当  $L^2 \rightarrow 2I_3T$  时, 这两条曲线再次收缩到两个极点。

首先, 轨迹的封闭性意味着矢量  $\mathbf{L}$  在本体系中的运动是周期性的。其次, 在椭球不同极点附近的轨迹性质具有本质的区别。在  $x_1$  轴和  $x_3$  轴附近, 轨迹完全位于相应的极点周围, 而在  $x_2$  轴极点附近的轨迹将远离这个极点。这种差别即相应于陀螺绕三个惯量主轴转动时有不同的稳定性。绕  $x_1$  轴和  $x_3$  轴 (对应于陀螺三个主惯量中的最小值和最大值) 的转动是稳定的, 即如果使陀螺稍微偏离这些状态时, 陀螺将继续在初始状态附近运动。而绕  $x_2$  轴的转动是不稳定的, 即任意小的偏离都足以引起陀螺远离其初始位置运动。关于稳定性的更多讨论请见下文。

为了得到  $\omega$  分量对时间的依赖关系, 利用方程(6.42)将  $\omega_1$  和  $\omega_3$  用  $\omega_2$  表示, 可得

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{(2I_3T - L^2) - I_2(I_3 - I_2)\omega_2^2}{I_1(I_3 - I_1)} & (6.45a) \\ \omega_3^2 = \frac{(L^2 - 2I_1T) - I_2(I_2 - I_1)\omega_2^2}{I_3(I_3 - I_1)} & (6.45b) \end{cases}$$

将上述两个关系代入 Euler 动力学方程(6.34b)中, 即有

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{\sqrt{[(2I_3T - L^2) - I_2(I_3 - I_2)\omega_2^2][(L^2 - 2I_1T) - I_2(I_2 - I_1)\omega_2^2]}}{I_2\sqrt{I_1I_3}} \quad (6.46)$$

方程(6.46)可以分离变量, 将其积分即可得到关系  $t(\omega_2)$ 。为了将其化为标准形式, 明确起见, 首先假设

$$L^2 > 2I_2T$$

作变量代换

$$\tau = \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}{I_1I_2I_3}}t, \quad s = \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{2I_3T - L^2}}\omega_2 \quad (6.47)$$

并引入参数

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2I_3T - L^2)}{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)} < 1 \quad (6.48)$$

可将方程(6.46)化为

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2s^2)}$$

将其分离变量并积分, 可得

$$\tau = \int_0^s \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}} = K(s, k) \quad (6.49)$$

此处选择  $\omega_2 = 0$  的时刻为时间起点。式(6.49)中右端的函数为第一类不完全椭圆积分<sup>①</sup>。求其反函数可得 Jacobi 椭圆函数

$$s = \operatorname{sn} \tau$$

即

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \tau = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}{I_1I_2I_3}}t \right) \quad (6.50)$$

<sup>①</sup> 关于椭圆积分和 Jacobi 椭圆函数的相关知识, 请见第6.6节。

由此可得如下公式

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \tau = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \left( \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}{I_1I_2I_3}} t \right) \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \tau = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}{I_1I_2I_3}} t \right) \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1T}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1T}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}{I_1I_2I_3}} t \right) \end{cases} \quad (6.51)$$

函数  $\operatorname{sn} \tau$  是周期的, 对变量  $\tau$  的周期为  $4K$ , 其中  $K$  可用第一类完全椭圆积分表示为

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

因而, 解(6.51)对时间  $t$  的周期为

$$T_0 = 4K \sqrt{\frac{I_1I_2I_3}{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}} \quad (6.52)$$

即经过时间  $T_0$  后, 矢量  $\boldsymbol{\omega}$  在本体系中回到原位置, 然而在空间系中, 陀螺自身则不见得会回到原位。

下面考虑陀螺在空间系中的绝对运动, 即相对于固定坐标系  $OXYZ$  的运动。令  $Z$  轴沿着矢量  $\boldsymbol{L}$  的方向, 由于方向  $Z$  相对  $x_1, x_2, x_3$  轴的极角和方位角分别为  $\theta$  和  $\frac{\pi}{2} - \psi^{\textcircled{1}}$ , 则矢量  $\boldsymbol{L}$  沿  $x_1, x_2, x_3$  的分量分别为

$$\begin{cases} I_1\omega_1 = L \sin \theta \sin \psi & (6.53a) \\ I_2\omega_2 = L \sin \theta \cos \psi & (6.53b) \\ I_3\omega_3 = L \cos \theta & (6.53c) \end{cases}$$

由此可得

$$\cos \theta = \frac{I_3\omega_3}{L}, \quad \tan \psi = \frac{I_1\omega_1}{I_2\omega_2} \quad (6.54)$$

将式(6.51)的结果代入, 即有

$$\begin{cases} \cos \theta = \sqrt{\frac{I_3(L^2 - 2I_1T)}{L^2(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau \\ \tan \psi = \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}} \frac{\operatorname{cn} \tau}{\operatorname{sn} \tau} \end{cases} \quad (6.55)$$

由此获得角  $\theta$  和  $\psi$  随时间的关系, 它们都是周期为  $T_0$  的函数。为了获得角  $\phi$  随时间的关系, 根据 Euler 运动学方程(6.14)可有

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\omega}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \end{cases}$$

<sup>①</sup> 可见图6.7。此处“极角”和“方位角”即为球坐标系

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

中的  $\theta$  和  $\phi$ 。



从中解得

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_1 \sin \psi + \omega_2 \cos \psi}{\sin \theta}$$

将式(6.53)代入, 即有

$$\frac{d\phi}{dt} = L \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{L^2 - I_3^2 \omega_3^2} = L \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2} \quad (6.56)$$

由此便可确定  $\phi$  与时间的关系  $\phi(t)$ , 这个解可以用  $\Theta$ -函数表示, 而且是非周期的, 因此, 陀螺在经过  $T_0$  时间后, 其角速度矢量  $\boldsymbol{\omega}$  相对本体系回到原位, 但陀螺本身在空间系中却不能回到它的初始位置。

当

$$L^2 < 2I_2 T$$

时, 作变量代换

$$\tau = \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(2I_3 T - L^2)}{I_1 I_2 I_3}} t, \quad s = \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{L^2 - 2I_1 T}} \omega_2 \quad (6.57)$$

并引入参数

$$k^2 = \frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1 T)}{(I_2 - I_1)(2I_3 T - L^2)} < 1 \quad (6.58)$$

可将方程(6.46)化为

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}$$

将其积分可得

$$s = \operatorname{sn} \tau$$

此时的解为

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{2I_3 T - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau = \sqrt{\frac{2I_3 T - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(2I_3 T - L^2)}{I_1 I_2 I_3}} t \right) \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1 T}{I_2(I_2 - I_1)}} \operatorname{sn} \tau = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1 T}{I_2(I_2 - I_1)}} \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(2I_3 T - L^2)}{I_1 I_2 I_3}} t \right) \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1 T}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \tau = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1 T}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \left( \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(2I_3 T - L^2)}{I_1 I_2 I_3}} t \right) \end{cases} \quad (6.59)$$

当  $I_1 = I_2$  时, 考虑当  $I_1 \rightarrow I_2$  时, 参数  $k^2 \rightarrow 0$ , 椭圆函数退化为三角函数, 级

$$\operatorname{sn} \tau \rightarrow \sin \tau, \quad \operatorname{cn} \tau \rightarrow \cos \tau, \quad \operatorname{dn} \tau \rightarrow 1$$

于是, 解(6.51)就变回到式(6.39)和式(6.40)的结果。

当  $L^2 = 2I_3 T$  时, 有

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2T}{I_3}} \text{ (常数)}$$

即矢量  $\boldsymbol{\omega}$  的方向总是沿着对称轴  $x_3$ , 即陀螺绕  $x_3$  轴匀速转动。类似地, 当  $L^2 = 2I_1 T$  时, 有

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2T}{I_1}} \text{ (常数)}, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0$$

当  $L^2 = 2I_2T$  时, 式(6.46)变为

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \sqrt{\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \left(1 - \frac{I_2}{I_3}\right) \left(\frac{2T}{I_2} - \omega_2^2\right)} \quad (6.60)$$

记  $\Omega = \sqrt{\frac{2T}{I_2}}$ , 作变量代换

$$\tau = \Omega \sqrt{\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \left(1 - \frac{I_2}{I_3}\right)} t, \quad s = \frac{\omega_2}{\Omega} \quad (6.61)$$

可将方程(6.60)化为

$$\frac{ds}{d\tau} = 1 - s^2$$

将其积分可得

$$s = \tanh \tau \quad (6.62)$$

由此可得

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}} \Omega \frac{1}{\cosh \tau} \\ \omega_2 = \Omega \tanh \tau \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \Omega \frac{1}{\cosh \tau} \end{cases} \quad (6.63)$$

其中  $\Omega = \sqrt{\frac{2T}{I_2}}$ ,  $\tau = \Omega \sqrt{\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \left(1 - \frac{I_2}{I_3}\right)} t$ . 如果我们令  $\mathbf{L}$  的方向为  $Z$  轴,  $\theta$  为  $Z$  轴与  $x_2$  轴之间的夹角, 则式(6.54)和式(6.56)中只要对下标做置换  $123 \rightarrow 312$  即有

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{I_2 \omega_2}{L} \\ \tan \psi = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \omega_1} \\ \dot{\phi} = L \frac{I_1 \omega_1^2 + I_3 \omega_3^2}{I_1^2 \omega_1^2 + I_3^2 \omega_3^2} \end{cases} \quad (6.64)$$

将式(6.63)带入即有

$$\begin{cases} \cos \theta = \tanh \tau \\ \tan \psi = \sqrt{\frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_1(I_3 - I_2)}} \\ \phi = \Omega t + \phi_0 \end{cases} \quad (6.65)$$

由上面各式可以看出, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 矢量  $\boldsymbol{\omega}$  渐近地趋于  $x_2$  轴, 同时  $x_2$  轴也渐近地趋于固定轴  $Z$ 。

当刚体的角动量  $\mathbf{L}$  与  $x_1$  轴有微小偏离时<sup>①</sup>, 那么  $L_2, L_3$  是一阶小量。根据 Euler 动力学方程(6.35)可得

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0 & (6.66a) \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 = 0 & (6.66b) \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0 & (6.66c) \end{cases}$$

<sup>①</sup> 此时即  $\sqrt{2I_3T - L^2}$  为一阶小量。

由于  $L_2, L_3$  是一阶小量, 故  $\omega_2, \omega_3$  也是一阶小量, 故由方程(6.66a)可得

$$I_1 \dot{\omega}_1 = 0$$

即有

$$\omega_1 = \Omega \quad (\text{常数})$$

而式(6.66b)和(6.66c)则可写作

$$\begin{cases} \dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega \omega_3 \\ \dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega \omega_2 \end{cases}$$

由此可以解得

$$\begin{cases} \omega_2 = \frac{La}{I_2} \sqrt{1 - \frac{I_1}{I_2}} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ \omega_3 = \frac{La}{I_2} \sqrt{1 - \frac{I_1}{I_3}} \cos(\omega_0 t + \phi_0) \end{cases}$$

其中  $a$  是一个小常数 (一阶小量),  $\omega_0 = \sqrt{\left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right) \left(1 - \frac{I_1}{I_3}\right)} \Omega$ 。由于

$$\mathbf{L} = I_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3$$

则有

$$\begin{cases} L_1 = I_1 \Omega \approx L \\ L_2 = La \sqrt{1 - \frac{I_1}{I_2}} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ L_3 = La \sqrt{1 - \frac{I_1}{I_3}} \cos(\omega_0 t + \phi_0) \end{cases} \quad (6.67)$$

式(6.67)表明, 矢量  $\mathbf{L}$  的端点, 以圆频率  $\omega_0$  绕着  $x_1$  轴上的极点画出小椭圆 (即图6.19中的红色线)。

对于刚体的角动量  $\mathbf{L}$  与  $x_3$  轴有微小偏离的情形, 根据类似的过程可以得到

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{La}{I_1} \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ \omega_2 = \frac{La}{I_2} \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ \omega_3 = \Omega \end{cases} \quad (6.68)$$

其中  $a$  是一个小常数 (一阶小量),  $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)} \Omega$ , 对角动量则有

$$\begin{cases} L_1 = La \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ L_2 = La \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ L_3 = I_3 \Omega \approx L \end{cases} \quad (6.69)$$

式(6.69)表明, 矢量  $\mathbf{L}$  的端点, 以圆频率  $\omega_0$  绕着  $x_3$  轴上的极点画出小椭圆 (即图6.19中的绿色线)。

以上的讨论表明, 非对称 Euler 陀螺绕其主惯量最大或最小的轴自由旋转的运动是稳定的。

而对于刚体的角动量  $\mathbf{L}$  与  $x_2$  轴有微小偏离的情形, 精确到一阶小量可得

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega \omega_3 \\ \dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega \omega_1 \end{cases} \quad (6.70a)$$

$$\quad (6.70b)$$

从中消去其中  $\omega_1$  或  $\omega_3$  可得

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 - \frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3} \Omega^2 \omega_1 = 0 \\ \ddot{\omega}_3 - \frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3} \Omega^2 \omega_3 = 0 \end{cases} \quad (6.71a)$$

$$\quad (6.71b)$$

由于  $I_1 < I_2 < I_3$ , 故有

$$-\frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3} \Omega^2 < 0$$

因此, 非对称 Euler 陀螺绕其主惯量取中间值的轴自由旋转的运动是不稳定的。

#### 6.4.4 Poinsot 几何图像

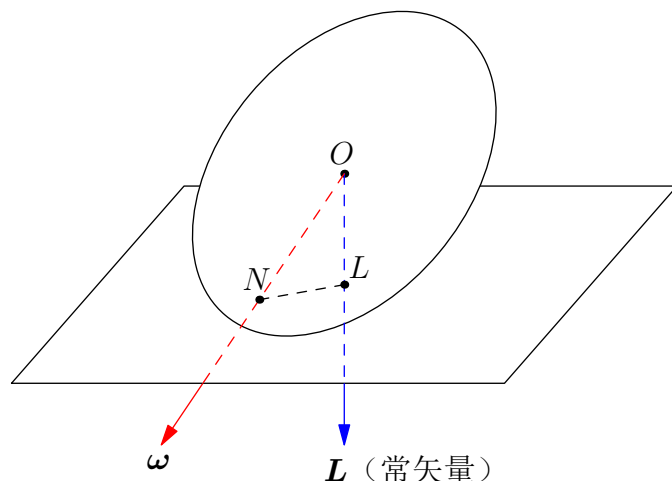


图 6.20: Poinsot 几何图像

根据惯量椭球的几何意义, 角动量  $\mathbf{L}$  沿角速度  $\boldsymbol{\omega}$  与惯量椭球交点处切平面的法线方向。对于 Euler 陀螺, 角动量守恒, 即  $\mathbf{L}$  为常矢量, 因此在 Euler 陀螺运动的过程中, 切平面在各个时刻是相互平行的。再考虑到惯量椭球中心到切平面的距离为

$$x_N = \mathbf{x}_N \cdot \frac{\mathbf{L}}{L} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}} \cdot \frac{\mathbf{L}}{L} = \frac{\sqrt{2T}}{L} \quad (\text{常数})$$

因此, Euler 陀螺在运动过程中, 惯量椭球极点处的切平面固定, 称为 Poinsot 平面。

于是得到 Euler 陀螺的 Poinsot 几何解释: 惯量椭球随着刚体的运动在 Poinsot 平面上纯滚动, 极点为瞬时接触点, 其瞬时速度为零<sup>①</sup>。

在刚体运动时, 极点在惯性椭球上画出的曲线称为**本体极迹**, 相应地极点在 Poinsot 平面上画出的曲线称为**空间极迹**。显然, 本体极迹是刚体定点运动中本体极锥的准线, 而空间极迹是刚体定点运动的空间极锥的准线。

<sup>①</sup> 由于极点在角速度矢量  $\boldsymbol{\omega}$  方向上, 故极点速度为零。

## 6.5 对称重陀螺 (Lagrange 陀螺)

满足如下条件的定点转动刚体称为对称重陀螺, 又称为 Lagrange 陀螺:

1. 对定点的两个主惯量相等, 即  $I_1 = I_2$ ;
2. 质心在第三主轴上, 且与定点不重合, 即  $l = OC \neq 0$ ;
3. 刚体仅受重力矩作用。

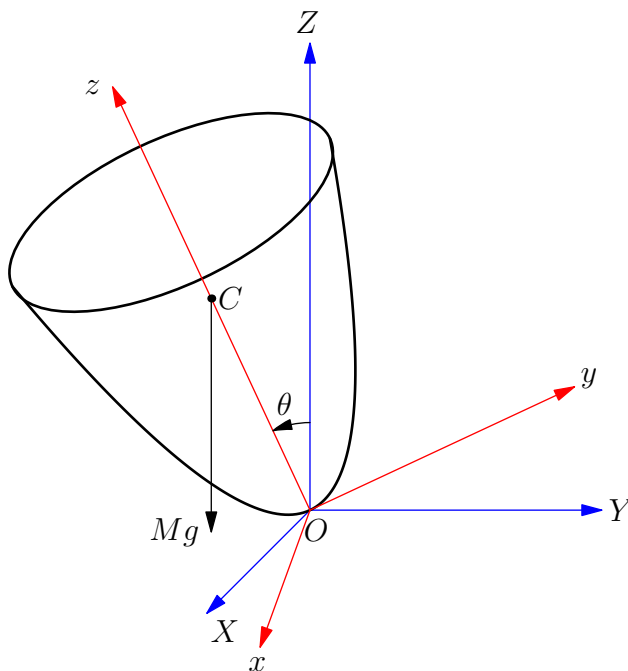


图 6.21: Lagrange 陀螺的运动

### 6.5.1 Lagrange 函数与守恒量

刚体的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2, \quad V = Mgl \cos \theta$$

其中角速度  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  与广义坐标和广义速度的关系由 Euler 运动学方程(6.14)给出

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

因此 Lagrange 陀螺的 Lagrange 函数<sup>①</sup>为

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta \quad (6.72)$$

<sup>①</sup> Lagrange 函数和角动量矢量的符号都是  $L$ , 但因为角动量为矢量, 是黑体的  $L$ , 因此不会产生混淆。

由  $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$  可得

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = L_Z \quad (\text{常数}) \quad (6.73)$$

由  $\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$  可得

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = L_3 \quad (\text{常数}) \quad (6.74)$$

由  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  可得

$$H = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta = E \quad (\text{常数}) \quad (6.75)$$

## 6.5.2 等效势与求解

由式(6.73)和式(6.74)中可以得到

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{L_Z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \\ \dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (6.76a)$$

$$(6.76b)$$

将式(6.76a)和式(6.76b)代入式(6.75)中, 可得

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + Mgl \cos \theta + \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} = E \quad (6.77)$$

令

$$U(\theta) = Mgl \cos \theta + \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} \quad (6.78)$$

为重力与惯性力合力矩的**等效势**, 由此对  $\theta$  的微分方程为

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U(\theta) = E \quad (6.79)$$

因此, Lagrange 陀螺的章动相当于在等效保守力矩作用下的定轴转动。

方程(6.79)可以分离变量为

$$\int_{t_0}^t dt = \pm \sqrt{\frac{I_1}{2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{E - U(\theta)}}$$

由此可得  $\theta = \theta(t)$ , 于是由(6.76)可有

$$\begin{cases} \phi - \phi_0 = \int_{t_0}^t \frac{L_Z - L_3 \cos \theta(t)}{I_1 \sin^2 \theta(t)} dt \\ \psi - \psi_0 = \int_{t_0}^t \left[ \frac{L_3}{I_3} - \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta(t)) \cos \theta(t)}{I_1 \sin^2 \theta(t)} \right] dt \end{cases}$$

## 6.5.3 定性图像

对等效势

$$U(\theta) = Mgl \cos \theta + \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

进行能图分析。

分以下几种情况考虑:

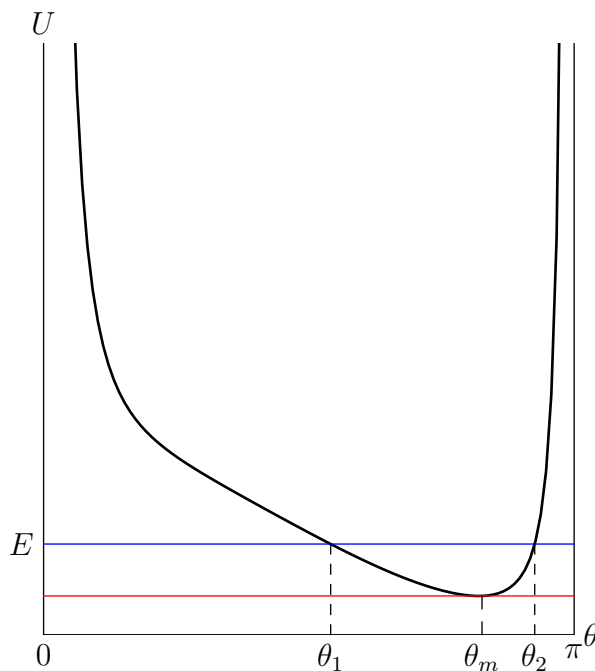


图 6.22: Lagrange 陀螺的等效势能曲线

1.  $\left| \frac{L_Z}{L_3} \right| \neq 1$ , 而且  $E > U_{\min}$ 。根据图6.22, 当  $E > U_{\min}$  时, 章动角的取值范围为  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , 此时章动为往复周期运动。进动角速度为

$$\dot{\phi} = \frac{L_Z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

(a)  $\left| \frac{L_Z}{L_3} \right| < 1$ 。令  $\theta_0 = \arccos \frac{L_Z}{L_3}$ , 则有

$$U(\theta) = Mgl \cos \theta + \frac{L_3^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

以及

$$\dot{\phi}(\theta_0) = 0, \quad U(\theta_0) = Mgl \cos \theta_0 + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

即, 如果  $\theta_0$  在章动的范围中, 进动角速度将在运动中不断改变符号。实际章动的范围由不等式  $E \geq U(\theta)$  决定。

i.  $U(\theta) \leq E < U(\theta_0)$ 。此时

$$Mgl \cos \theta + \frac{L_3^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} < Mgl \cos \theta_0 + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

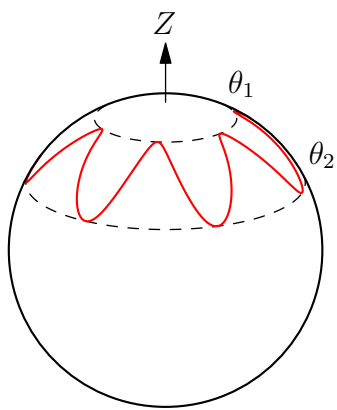
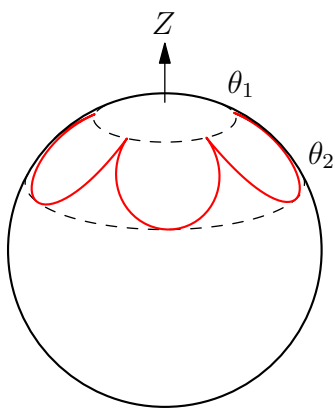
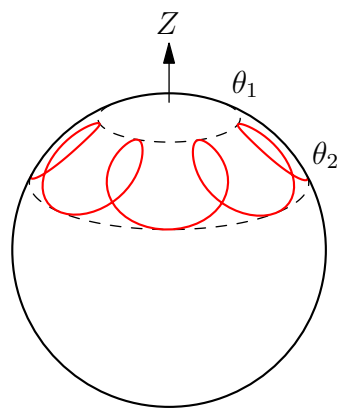
即有  $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2$ 。此时进动角速度在运动中不变号, 进动方向不变, 如图1a所示。

ii.  $U(\theta) \leq E = U(\theta_0)$ 。此时

$$Mgl \cos \theta + \frac{L_3^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} \leq Mgl \cos \theta_0 + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

即有  $\theta_0 = \theta_1 < \theta_2$ 。此时在最小章动角位置, 进动角速度为零, 如图1a所示。

iii.  $E > U(\theta_0)$ 。此时有  $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ , 进动角速度在运动中周期性改变符号, 进动方向周期性改变, 如图1a所示。

图 6.23:  $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2$ 图 6.24:  $\theta_0 = \theta_1 < \theta_2$ 图 6.25:  $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ 

(b)  $\left| \frac{L_Z}{L_3} \right| > 1$ 。进动角速度

$$\dot{\phi} = \frac{L_Z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

在章动角  $\theta$  取任何值时都不可能等于零，此时不存在进动角速度为零的章动角，进动方向始终不变。

2.  $E > U_{\min}$ 。此时  $\theta = \theta_m$  不变，无章动。因此进动角速度和自转角速度

$$\dot{\phi} = \frac{L_Z - L_3 \cos \theta_m}{I_1 \sin^2 \theta_m}, \quad \dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta_m$$

都是常数，因此此时 Lagrange 陀螺为规则进动。此时有  $U'(\theta_m) = 0$ ，由此可得  $\theta_m$  满足的方程为

$$\frac{(L_Z - L_3 \cos \theta_m)(L_Z \cos \theta_m - L_3)}{I_1 \sin^3 \theta_m} + Mgl \sin \theta_m = 0$$

由此，根据式(6.75)可得

$$\sin \theta_m (I_1 \dot{\phi}^2 \cos \theta_m - L_3 \dot{\phi} + Mgl) = 0$$

上式有解的条件为

$$L_3^2 \geq 4I_1 Mgl \cos \theta_m \quad (6.80)$$

式(6.80)即为 Lagrange 陀螺的规则进动条件。

3.  $\left| \frac{L_Z}{L_3} \right| = 1$ 。

(a)  $L_Z = L_3 \neq 0$ 。此时等效势能为

$$U(\theta) = \frac{L_3^2}{2I_3} + Mgl + \frac{L_3^2}{2I_1} \tan^2 \frac{\theta}{2} - 2Mgl \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

当  $\theta = 0$  时，有  $E = \frac{L_3^2}{2I_3} + Mgl$ ，因此在  $\theta = 0$  附近，等效势能可以展开为

$$U(\theta) = \frac{L_3^2}{2I_3} + Mgl + \frac{1}{4} \left( \frac{L_3^2}{2I_1} - 2Mgl \right) \theta^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{L_3^2}{2I_1} + Mgl \right) \theta^4 + o(\theta^4)$$

因此，在  $\theta = 0$  点处，当



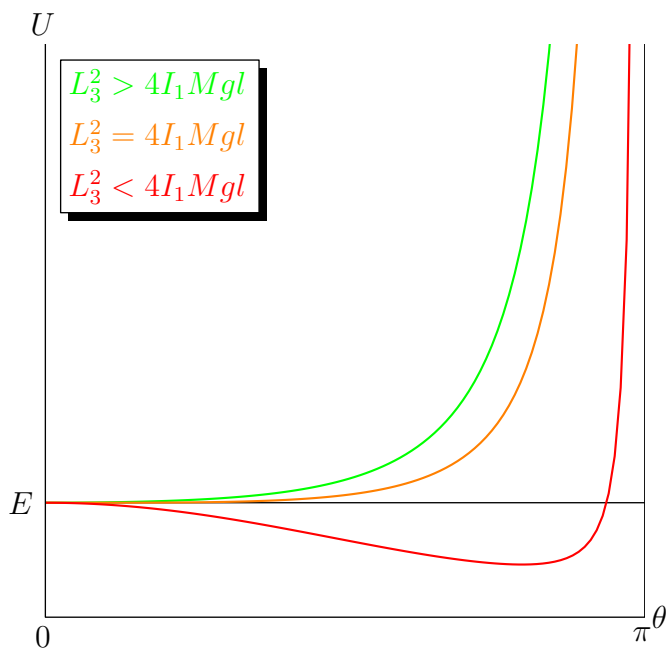


图 6.26: 直立转动 Lagrange 陀螺的等效势能曲线

- i.  $L_3^2 > 4I_1Mgl$  时, Lagrange 陀螺作稳定直立转动;
- ii.  $L_3^2 = 4I_1Mgl$  时, Lagrange 陀螺作次稳定直立转动;
- iii.  $L_3^2 < 4I_1Mgl$  时, Lagrange 陀螺作不稳定直立转动。

(b)  $L_Z = -L_3 \neq 0$ 。此时等效势能为

$$U(\theta) = \frac{L_3^2}{2I_3} - Mgl + \frac{L_3^2}{2I_1} \cot^2 \frac{\theta}{2} + 2Mgl \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

当  $\theta = \pi$  时, 有  $E = \frac{L_3^2}{2I_3} - Mgl$ , 因此在  $\theta = \pi$  附近, 等效势能可以展开为

$$U(\theta) = \frac{L_3^2}{2I_3} - Mgl + \frac{1}{4} \left( \frac{L_3^2}{2I_1} + 2Mgl \right) (\theta - \pi)^2 + o((\theta - \pi)^2)$$

此时 Lagrange 陀螺作稳定倒悬转动。

**例 6.5** 一陀螺由半径为  $2r$  的薄圆盘及通过圆盘中心  $C$ , 并和盘面垂直的长为  $r$  的杆轴所组成, 杆的质量可忽略不计。将杆的另一端  $O$  放在水平面上, 使其作无滑动的转动。如起始时杆  $OC$  与铅直线的夹角为  $\alpha$ , 起始时的总角速度为  $\omega$ , 方向沿着  $\alpha$  角的平分线, 证明经过

$$t = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\omega \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} + \frac{g}{r\omega^2} (\cos \alpha - \cos \theta)}}$$

后杆将直立起来, 式中  $\theta$  为任意瞬时杆轴与铅直线的夹角。

**解** 圆盘对  $C$  的惯量矩阵为

$$\mathbf{I}' = \begin{pmatrix} mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2mr^2 \end{pmatrix}$$

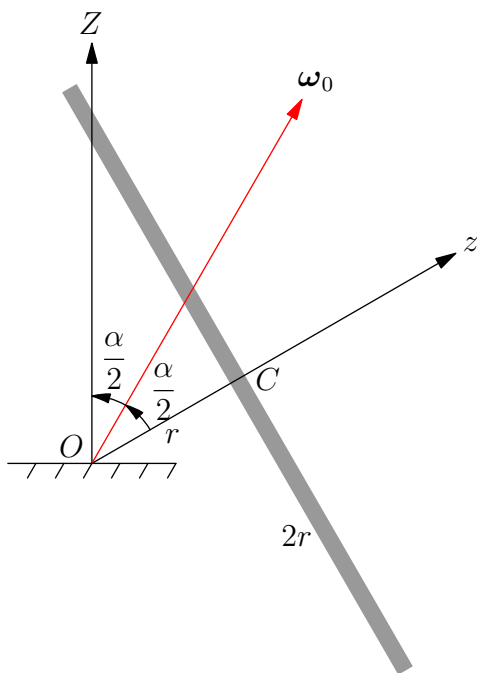


图 6.27: 例 6.5

质心对  $O$  点的坐标为  $\mathbf{X}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ , 因此有质心对  $O$  的转动惯量为

$$\mathbf{I}_C = \begin{pmatrix} mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

根据平行轴定理可得圆盘对  $O$  的转动惯量为

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}' = \begin{pmatrix} 2mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2mr^2 \end{pmatrix}$$

故圆盘为 Lagrange 陀螺。其转动惯量和动能分别为

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = 2mr^2\boldsymbol{\omega}, \quad T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = mr^2\omega^2$$

由此可得三个积分常数为

$$\begin{cases} L_Z = L_{Z0} = 2mr^2\omega_{Z0} = 2mr^2\omega \cos \frac{\alpha}{2} \\ L_3 = L_{30} = 2mr^2\omega_{30} = 2mr^2\omega \cos \frac{\alpha}{2} \\ E = E_0 = mr^2\omega^2 + mgr \cos \alpha \end{cases}$$

此时, 章动等效势为

$$U(\theta) = mr^2\omega^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} + mgr \cos \theta = mgr \left( \frac{r\omega^2}{g} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} + \cos \theta \right)$$

章动方程为

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + U(\theta) = E$$

初始时刻有

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_0^2 = E - U(\alpha) = 0$$

即初始章动角速度为零，章动处于极限角位置。下面按  $\frac{r\omega^2}{g}$  可能的取值分类讨论，每种情况对应的等效势能曲线如图6.28所示。

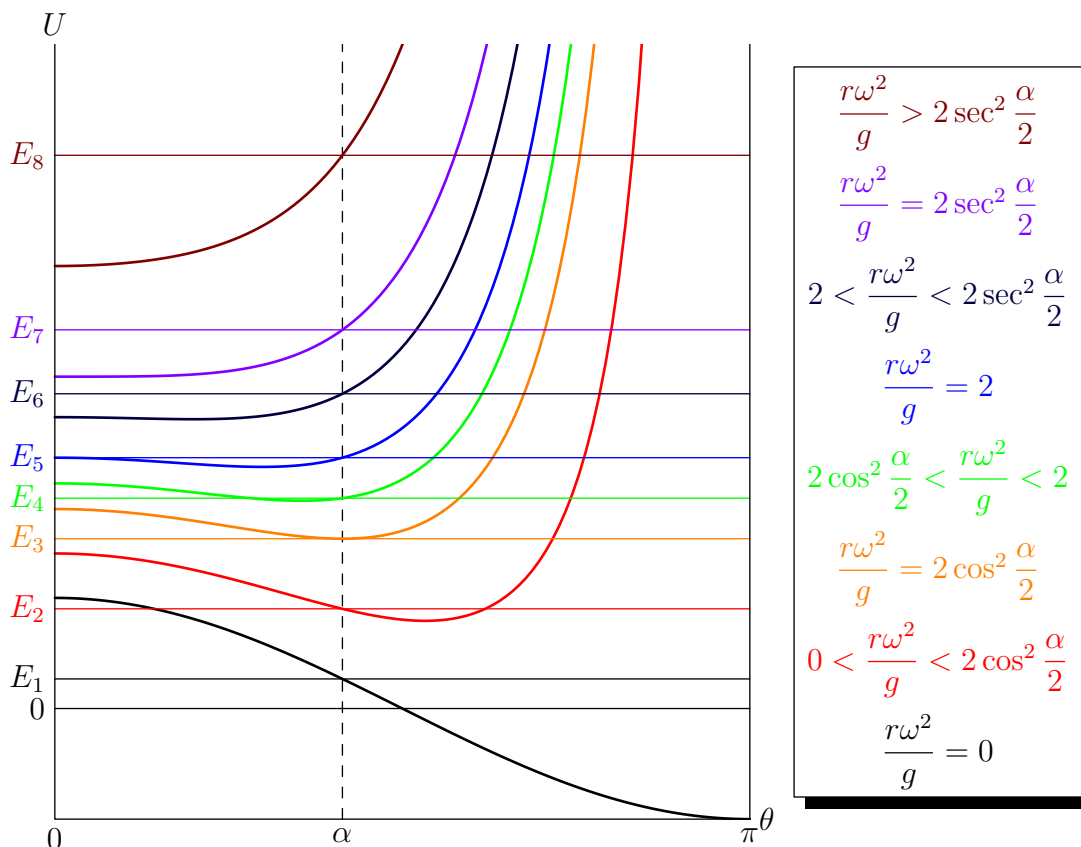


图 6.28: 例 6.5 势能曲线

1.  $\frac{r\omega^2}{g} = 0$ 。此时  $U(\theta) = mgr \cos \theta$ ，刚体为复摆，平衡位置在  $\theta = \pi$ ，不可能直立。
2.  $0 < \frac{r\omega^2}{g} < 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ 。此时  $U'(\alpha) < 0$ ，刚体进行初始向下的往复章动，不可能直立。
3.  $\frac{r\omega^2}{g} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ 。此时  $U'(\alpha) = 0$ ，刚体进行规则进动，不可能直立。
4.  $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} < \frac{r\omega^2}{g} < 2$ 。此时  $U'(\alpha) > 0$ ,  $U(0) > E$ ，刚体进行初始向上的往复章动，不可能直立。
5.  $\frac{r\omega^2}{g} = 2$ 。此时  $U(0) = E$ ，恰能直立，刚体将以无限小章动角速度趋于直立位置，所需时间为无穷大。
6.  $2 < \frac{r\omega^2}{g} < 2 \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 。此时  $U(0) < E$ ,  $U''(0) < 0$ ，章动角速度先增后减，渐趋匀速，故刚体可在有限时间之内直立起来。

7.  $\frac{r\omega^2}{g} = 2 \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 。此时  $U''(0) = 0$ ,  $U^{(4)}(0) > 0$ , 章动角速度递增, 较快趋于匀速, 故刚体可在有限时间之内直立起来。

8.  $\frac{r\omega^2}{g} > 2 \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 。此时  $U''(0) > 0$ , 章动角速度递增, 较慢趋于匀速, 故刚体可在有限时间之内直立起来。

综上, 刚体能够直立的条件为

$$\frac{r\omega^2}{g} \geq 2$$

由章动方程  $\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + U(\theta) = E$  可得

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2(E - U(\theta))}{I_1}}$$

此处, 由于直立过程中, 章动角随时间减小, 故开方取负。因此, 从初始章动角位置至直立所需时间为

$$t = -\sqrt{\frac{I_1}{2}} \int_{\alpha}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{E - U(\theta)}} = \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\omega \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} + \frac{g}{r\omega^2}(\cos \alpha - \cos \theta)}}$$

## 6.6 Legendre 椭圆积分与 Jacobi 椭圆函数

### 6.6.1 Legendre 椭圆积分

定义函数<sup>①</sup>

$$F(k, x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\arcsin x} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \quad (6.81)$$

为第一类椭圆积分。当  $x = 1$  时, 记

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \quad (6.82)$$

称为第一类完全椭圆积分。

第一类椭圆积分可以用级数表示为

$$\begin{aligned} F(k, x) &= \int_0^{\arcsin x} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \phi \right] d\phi \\ &= \arcsin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\arcsin x} \sin^{2n} \phi d\phi \end{aligned} \quad (6.83)$$

由此可得第一类完全椭圆积分的级数表示为

$$\begin{aligned} K(k) &= \arcsin 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \phi d\phi \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \right] \end{aligned} \quad (6.84)$$

<sup>①</sup> 本节提到的三类椭圆积分在不同的文献上可能会有不同的形式。

定义函数

$$E(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\arcsin x} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi \quad (6.85)$$

为第二类椭圆积分。当  $x = 1$  时, 记

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi \quad (6.86)$$

称为第二类完全椭圆积分。

第二类椭圆积分可以用级数表示为

$$\begin{aligned} E(k, x) &= \int_0^{\arcsin x} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \phi \right] d\phi \\ &= \arcsin x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\arcsin x} \sin^{2n} \phi d\phi \end{aligned} \quad (6.87)$$

由此可得第二类完全椭圆积分的级数表示为

$$\begin{aligned} E(k) &= \arcsin 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \phi d\phi \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \right] \end{aligned} \quad (6.88)$$

定义函数

$$\begin{aligned} \Pi(h, k, x) &= \int_0^x \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\ &= \int_0^{\arcsin x} \frac{d\phi}{(1+h \sin^2 \phi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned} \quad (6.89)$$

为第三类椭圆积分。当  $x = 1$  时, 记

$$\Pi(h, k) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1+h \sin^2 \phi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \quad (6.90)$$

称为第三类完全椭圆积分。

## 6.6.2 Jacobi 椭圆函数

第一类椭圆积分(6.81)

$$x = \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

的反函数记作

$$s = \operatorname{sn} x \quad (6.91)$$

称为椭圆正弦函数。

令

$$\sin \phi = \operatorname{sn} x \quad (6.92)$$

则称  $\phi$  为椭圆振幅函数, 记作  $\phi = \operatorname{am} x$ 。

定义

$$\operatorname{cn} x = \cos \phi = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 x} \quad (6.93)$$

称为椭圆余弦函数。定义

$$\operatorname{tn} x = \tan \phi = \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} = \frac{\operatorname{sn} x}{\sqrt{1 - \operatorname{cn}^2 x}} \quad (6.94)$$

称为椭圆正切函数。定义

$$\operatorname{dn} x = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x} \quad (6.95)$$

称为椭圆幅度函数。

当  $k \rightarrow 0$  时, 根据式(6.81)可得

$$F(0, s) = \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin s$$

由此, 当  $k \rightarrow 0$  时, 有

$$\operatorname{sn} x \rightarrow \sin x \quad (6.96)$$

根据其余椭圆函数的定义, 当  $k \rightarrow 0$  时, 有

$$\operatorname{cn} x \rightarrow \cos x, \quad \operatorname{dn} x \rightarrow 1 \quad (6.97)$$

## 第七章 非惯性系

由 Newton 第一定律定义的坐标系称为惯性系，在惯性系中 Newton 第二定律成立。

对实际问题，有时在非惯性系中描述运动比较方便。为使非惯性系的运动方程与 Newton 方程形式一致，必须引入虚拟的惯性力。

### 7.1 非惯性系的 Newton 第二定律

#### 7.1.1 不同参考系的速度、加速度变换

设  $S$  和  $S'$  是两个不同的参考系，设  $S$  是惯性系，而  $S'$  系相对与  $S$  系作一般运动。此处类似于刚体的一般运动， $S$  系相当于刚体运动中的空间系，而  $S'$  系即为固连于刚体的本体系。根据 Chasles 定理6.3.1， $S'$  系相对于  $S$  系的运动既可以分解为  $S'$  系原点  $O'$  相对于  $S$  系的平动，与  $S'$  系相对于原点同样在  $O'$  但坐标轴都与  $S$  系平行的参考系（相当于刚体运动中的平动系）的定点转动，如图7.1所示。

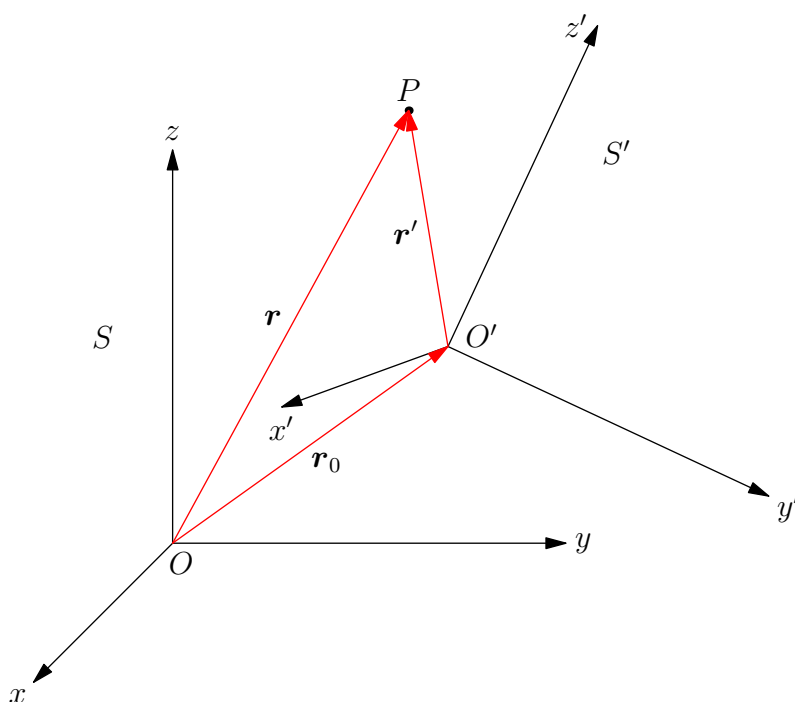


图 7.1: 惯性参考系与非惯性参考系

设  $S'$  系相对  $S$  系的平动为  $\mathbf{r}_0(t)$ ，转动角速度为  $\boldsymbol{\omega}_0(t)$ ，首先考虑任意矢量  $\mathbf{A}$  在  $S'$  系

下的分量表示有

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}' \tilde{\mathbf{A}}$$

式中,  $\mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1 \ \mathbf{e}'_2 \ \mathbf{e}'_3)$  为  $S'$  系的基矢量矩阵,  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  为  $S'$  系的基矢量,  $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix}$

为  $\mathbf{A}$  在  $S'$  系中的坐标。根据与第6.1.5节类似的方法, 可有

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}' \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{e} \mathbf{U} \tilde{\mathbf{A}}$$

式中,  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$  为  $S$  系的基矢量矩阵,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  为  $S$  系的基矢量,  $\mathbf{U}$  为  $S$  系与  $S'$  系基矢量之间的旋转变换矩阵, 即

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e} \mathbf{U}$$

因此可有

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{e}' \frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} + \mathbf{e} \dot{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{e}' \frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} + \mathbf{e}' \mathbf{U}^T \dot{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{A}}$$

记  $\frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{A}'_i \mathbf{e}'_i = \frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt}$ , 再根据第6.1.6节中的相关结论, 有  $\mathbf{e}' \mathbf{U}^T \dot{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{A}$ 。因此可有

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{A} \quad (7.1)$$

式中  $\frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{A}'_i \mathbf{e}'_i$  称为相对变化率,  $\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{A}$  称为转动牵连变化率, 与式(6.33)的结果相同。

对于  $S$  系和  $S'$  系, 首先有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

对上式求时间  $t$  的导数, 并对矢量  $\mathbf{r}'$  应用式(7.1)可有

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}' \quad (7.2)$$

式中  $\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$  称为相对速度,  $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$  称为平动牵连速度,  $\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}'$  称为转动牵连速度。

再对式(7.2)求时间  $t$  的导数, 可有

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'$$

考虑到

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0 = \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0}{dt}$$

由此可有

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}' \quad (7.3)$$

式中  $\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt}$  称为相对加速度,  $\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}$  称为平动牵连加速度,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}'$  称为转动牵连加速度,  $\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')$  称为向轴加速度,  $2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'$  称为 Coriolis 加速度。



## 7.1.2 非惯性系的运动方程与惯性力

$S$  系为惯性系，在其中 Newton 第二定律成立，即有

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

将此方程在非惯性系  $S'$  系中投影，可有

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}')$$

为了使得非惯性系中 Newton 第二定律与惯性系中具有相同的形式，将上式写作

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' \quad (7.4)$$

式中

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 - m\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}' \quad (7.5)$$

此处式(7.5)中除  $\mathbf{F}$  项外的其它项即称为惯性力，其中  $-m\mathbf{a}_0$  称为平动牵连惯性力， $-m\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}'$  称为转动牵连惯性力， $-m\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')$  称为惯性离心力， $-2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'$  称为 Coriolis 力。

## 7.2 非惯性系的 Lagrange 动力学

### 7.2.1 非惯性系质点运动的 Lagrange 函数

在非惯性系中，将广义坐标取为非惯性系中的坐标  $x', y', z'$ ，则有

$$\mathbf{r}(x', y', z', t) = \mathbf{r}_0(t) + \sum_{i=1}^3 x'_i \mathbf{e}'_i(t)$$

因此可得

$$\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x'_i} \dot{x}'_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0(t) + \boldsymbol{\omega}_0(t) \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_0(t) + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

即有 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)^2 + 2\mathbf{v}_0 \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + v_0^2 \right] - U(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \\ &= \frac{1}{2}m \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m v_0^2 + \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}') - m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - U(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \end{aligned}$$

项  $\frac{1}{2}m v_0^2$  不含有广义坐标和广义速度，因此对 Lagrange 方程无贡献，可以略去。项  $\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}')$  是广义坐目标函数对时间的全导数，同样对 Lagrange 方程无贡献，也可以略去。由此，Lagrange 函数简化为

$$L' = \frac{1}{2}m \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)^2 - m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - U(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$$

由于  $\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}_0(t) \times \mathbf{r}'$ , 可有

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2}m(\mathbf{v}'^2 + 2\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2) - m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - U(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 - \left( U + m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}' \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

定义非惯性系动能

$$T' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 \quad (7.7)$$

和非惯性系等效势能

$$U' = U + m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}' \quad (7.8)$$

则在非惯性系中, Lagrange 函数与惯性系具有相同的形式

$$L' = T' - U'$$

非惯性系等效势能中, 不仅包括真实主动力的势, 还包括虚拟惯性力的势。其中

$$U_1 = m\mathbf{a}_0(t) \cdot \mathbf{r}', \quad U_2 = -\frac{1}{2}m[\boldsymbol{\omega}_0(t) \times \mathbf{r}']^2$$

是速度无关势, 其对应的力分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_1 &= -\frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}'} = -m\mathbf{a}_0 \\ \mathbf{F}'_2 &= -\frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{r}'} = -m\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \end{aligned}$$

即  $U_1$  为平动牵连惯性势,  $U_2$  为惯性离心势。而

$$U_3 = -m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}' = -m(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}_0) \cdot \mathbf{r}'$$

是速度相关势, 其对应的力为

$$\mathbf{F}'_3 = \frac{\tilde{d}}{dt} \frac{\partial U_3}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{\partial U_3}{\partial \mathbf{r}'} = -m\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'$$

即  $U_3$  为转动牵连-Coriolis 惯性势。

## 7.2.2 非惯性系质点运动的 Lagrange 方程

在非惯性系中, Lagrange 函数与惯性系中的 Lagrange 函数具有相同的形式

$$L' = T' - V'$$

其中

$$T' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2, \quad U' = U + m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}'$$

因此, 在非惯性系中, Lagrange 方程也与惯性系中的 Lagrange 方程具有相同的形式, 即

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_i} - \frac{\partial L'}{\partial x'_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.9)$$

或者简单地记作

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = \mathbf{0} \quad (7.10)$$

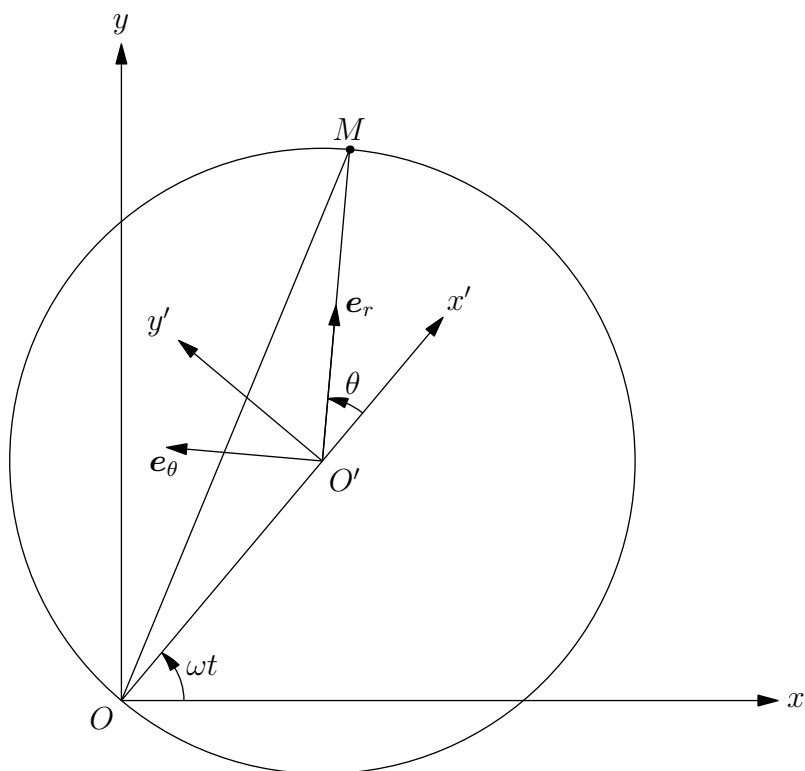


图 7.2: 例 7.1

例 7.1 质量为  $m$  的小环  $M$ ，套在半径为  $R$  的光滑圆圈上，并可沿着圆圈滑动。如圆圈在水平面内以角速度  $\omega$  绕圆圈上某点  $O$  转动，求小环沿圆周的运动微分方程。

解 取两个坐标系  $Oxy$  和  $O'x'y'$ （如图 7.2 所示），则旋转坐标系  $O'x'y'$  相对于固定坐标系  $Oxy$  的角速度为  $\omega$ 。取  $\theta$  作为小环  $M$  的广义坐标，因此在非惯性系  $O'x'y'$  中，体系的 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L'}{\partial \theta} = 0$$

体系的 Lagrange 函数即为式 (7.6)

$$L' = \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 - \left( U + m \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}' \right)$$

其中，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 &= \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}' = R \mathbf{e}_r \\ \mathbf{v}' &= \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = R \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{r}_0 = R \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{v}_0 &= \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \frac{d(R \mathbf{e}_1)}{dt} = \frac{d(R \mathbf{e}_1)}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times R \mathbf{e}_1 = R \omega \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_0 &= \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_0 = -R \omega^2 \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

由此可有

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 - \left( U + m \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}' \right) \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \left( \dot{\theta}^2 + 2 \omega \dot{\theta} + \omega^2 + 2 \omega^2 \cos \theta \right) \end{aligned}$$

然后由非惯性系的 Lagrange 方程, 即有小环  $M$  的运动微分方程为

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

如果不利用非惯性系, 此题目也同样可解。小环  $M$  的坐标为

$$\begin{cases} x_M = R \cos \omega t + R \cos(\omega t + \theta) \\ y_M = R \sin \omega t + R \sin(\omega t + \theta) \end{cases}$$

因此其速度为

$$\begin{cases} \dot{x}_M = -R\omega \sin \omega t - R(\omega + \dot{\theta}) \sin(\omega t + \theta) \\ \dot{y}_M = R\omega \cos \omega t + R(\omega + \dot{\theta}) \cos(\omega t + \theta) \end{cases}$$

因此体系的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) = \frac{1}{2}mR^2 [\dot{\theta}^2 + 2\omega\dot{\theta} + 2\omega^2 + 2\omega(\omega + \dot{\theta}) \cos \theta]$$

根据惯性系中理想完整系的 Lagrange 方程(2.20)可得相同的运动微分方程

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

## 7.3 地球自转的动力学效应

地球不是一个严格的惯性系, 地球自转的角速度为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{s}^{-1} \approx 7.29 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$$

地球的平均半径为  $R = 6.37 \times 10^6 \text{m}$ , 因此由于地球自转所引起的向心加速度

$$a_t \leq \omega^2 R = 0.0338 \text{m/s}^2 = 3 \times 10^{-3} g$$

式中  $g$  为重力加速度。因此在  $g$  起作用的问题中, 如果计算精度达到  $10^{-3}$  量级时, 必须考虑重力加速度的这一修正。由于地球自转所引起的 Coriolis 加速度为

$$a_C \leq 2\omega_0 v$$

由此引起的线偏离和角偏离分别为

$$\Delta s \leq \frac{1}{2} a_C t^2 = \omega_0 v t, \quad \Delta \theta = \frac{\Delta s}{vt} \leq \omega_0 t$$

对于段时间的运动, 由于  $\omega \approx 10 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ , 这一效应可以忽略, 但是对于长时间的运动, 这一效应就不能忽略了。

地球公转的角速度是地球自转角速度的  $\frac{1}{365}$ , 地球与太阳之间的距离是地球半径的  $2.5 \times 10^4$  倍, 因此地球公转的向心力与地球自转的向心力之比为

$$\left( \frac{1}{365} \right)^2 \times 2.5 \times 10^4 \approx 0.2$$

Coriolis 力大小之比为  $\frac{1}{365} \approx 0.03$ 。因此, 地球公转引起的非惯性效应比地球自转引起的非惯性效应要小一至两个数量级, 一般可忽略。

### 7.3.1 重力加速度 $g$ 随纬度 $\lambda$ 的变化

在纬度为  $\lambda$  处，地面上质量为  $m$  的物体，在地面参考系中受到地球的引力  $\mathbf{F}$  和惯性离心力  $\mathbf{F}_t$ ，实际观察到的重力  $m\mathbf{g}$  是  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{F}_t$  的合力

$$m\mathbf{g} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t$$

如果认为地球是均匀的刚性球体，则  $\mathbf{F}$  的值各地相同，但  $\mathbf{F}_t$  的值随纬度  $\lambda$  而改变，即

$$F_t = mR\omega_0^2 \cos \lambda \quad (7.11)$$

式中  $R$  为地球半径。因此， $m\mathbf{g}$  的大小和方向都随纬度  $\lambda$  而变化，大小的变化反映在重力加速度  $g$  随  $\lambda$  的变化，方向的变化反映在  $m\mathbf{g}$  的方向（即铅直方向）和引力  $\mathbf{F}$  方向（即地球半径的方向）之间的夹角  $\alpha$  随  $\lambda$  的变化。

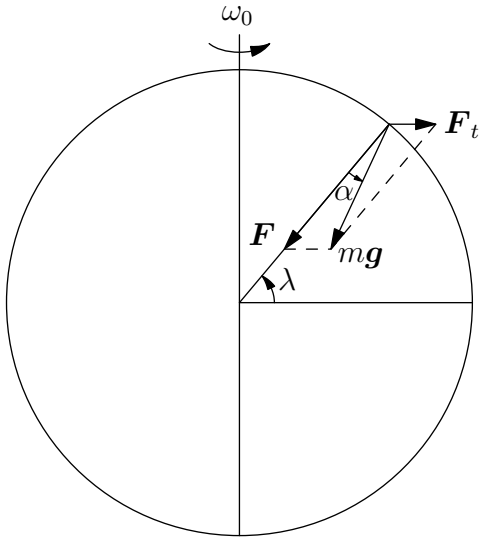


图 7.3: 惯性离心力对重力的影响

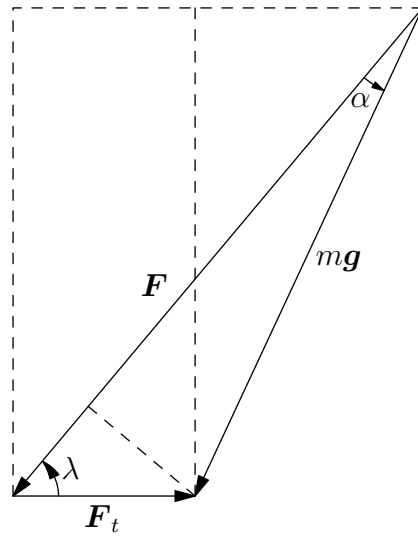


图 7.4:  $m\mathbf{g}$ 、 $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{F}_t$  之间的关系

根据图7.4可有

$$\begin{cases} F_t \sin \lambda = mg \sin \alpha \end{cases} \quad (7.12a)$$

$$\begin{cases} F \sin \lambda = mg \sin(\lambda + \alpha) \end{cases} \quad (7.12b)$$

$$\begin{cases} F = mg \cos \alpha + F_t \cos \alpha \end{cases} \quad (7.12c)$$

将式(7.11)代入式(7.12a)中可得

$$\sin \alpha = \frac{R\omega_0^2 \sin 2\lambda}{2g} \quad (7.13)$$

由此可以看出，当认为  $g$  的值不变时， $\alpha$  的值在  $45^\circ$  处最大，如果将  $\lambda = 45^\circ$  处实测的  $g = 9.8062 \text{ m/s}^2$  的值和  $\omega_0$  及  $R$  代入，可得

$$\alpha_{\max} \approx \frac{\omega_0^2 R}{2g} = 6'$$

所以偏角  $\alpha$  是很小的，当  $\omega_0$  作为一阶小量时， $\alpha$  是二阶小量。在赤道处， $\alpha = \lambda = 0$ ，由式(7.13)和式(7.12c)可得

$$F = m(g_0 + R\omega_0^2)$$

式中  $g_0$  是赤道地区重力加速度, 再将上式代入式(7.12b)中, 可得

$$g = \frac{(g_0 + R\omega_0^2) \sin 2\lambda}{\sin \lambda \cos \alpha + \cos \lambda \sin \alpha} \quad (7.14)$$

联立式(7.13)和(7.14)可得  $g$  作为  $\alpha$  和  $\lambda$  很复杂的函数关系。下面作些近似以简化之。首先根据式(7.13)可有近似

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{R\omega_0^2}{2g_0} \sin 2\lambda \quad (7.15)$$

然后将式(7.15)代入式(7.14)中, 并取  $\cos \alpha \approx 1$ , 略去其中的二阶以上的小量, 得

$$\begin{aligned} g &\approx \frac{(g_0 + R\omega_0^2) \sin \lambda}{\sin \lambda + \cos \lambda \frac{R\omega_0^2}{2g_0} \sin 2\lambda} = \frac{g_0 + R\omega_0^2}{1 + \frac{R\omega_0^2 \cos^2 \lambda}{g_0}} \\ &\approx g_0 \left( 1 + \frac{R\omega_0^2}{g_0} \sin^2 \lambda \right) \end{aligned} \quad (7.16)$$

式(7.16)和式(7.15)就是  $g$  和  $\alpha$  随  $\lambda$  改变的近似公式。如果再将地球半径随纬度的变化关系考虑进去, 可以得到更精确的计算公式。

### 7.3.2 落体偏东

考虑惯性力的情况下, 地球表面质点的运动方程为

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}') - 2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'$$

由于地球自转角速度  $\omega_0$  是一个小量, 略去上式中  $\omega_0^2$  项 (惯性离心力), 可得质点相对于地球的运动方程为

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}' \quad (7.17)$$

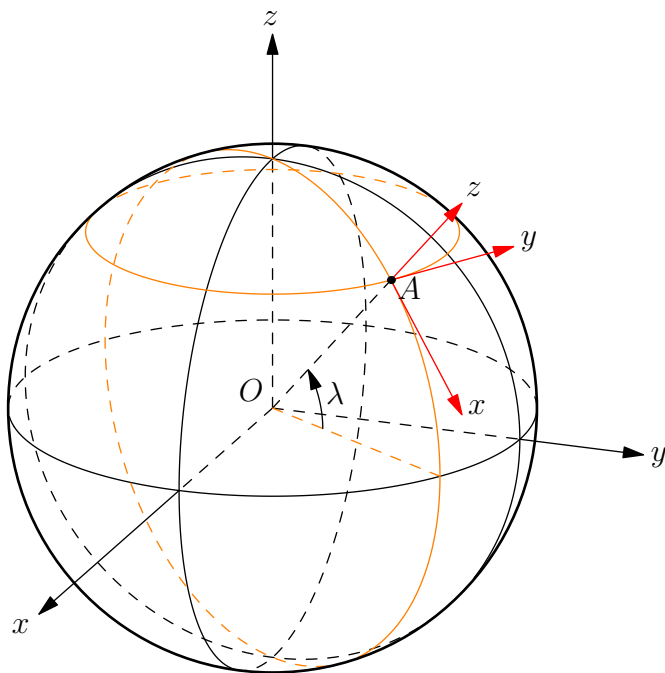


图 7.5: 地球表面的坐标系

取固定在地球上的参考系  $Axyz$ ,  $x$  轴向南,  $y$  轴向东,  $z$  轴垂直地面向上, 如图7.5所示。由于此处忽略了惯性离心力的作用, 因此重力方向和  $z$  轴平行, 而

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}_3 = \omega_0 (-\cos \lambda \mathbf{i} + \sin \lambda \mathbf{k})$$

式中  $\lambda$  为  $A$  点的纬度。由此运动方程(7.17)在  $Axyz$  系中的分量方程可以表示为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + 2m\omega_0 \dot{y} \sin \lambda \\ m\ddot{y} = F_y - 2m\omega_0 (\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \\ m\ddot{z} = F_z + 2m\omega_0 \dot{y} \cos \lambda \end{cases} \quad (7.18)$$

如果质点从有限高度  $h$  以初速度  $v' = 0$  自由下落, 不考虑阻力等其它力的作用, 重力  $mg$  看成常数, 则对式(7.18)积分可得

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\omega_0 y \sin \lambda \\ \dot{y} = -2\omega_0 [x \sin \lambda + (z - h) \cos \lambda] \\ \dot{z} = -gt + 2\omega_0 y \cos \lambda \end{cases} \quad (7.19)$$

将式(7.19)代入式(7.18)的右端, 并继续略去  $\omega_0$  的二阶项, 得

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 2g\omega_0 \cos \lambda \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

再对时间积分两次可得

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3}gt^3\omega_0 \cos \lambda \\ z = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (7.20)$$

消去  $t$  可得落体的轨道方程为

$$y^2 = -\frac{8}{9} \frac{\omega_0^2 \cos^2 \lambda}{g} (z - h)^3$$

这是位于东西铅直平面内的半三次抛物线。当落体落到地面时, 落体偏东的数值为

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \omega_0 h \sqrt{\frac{h}{g}} \cos \lambda \quad (7.21)$$

### 7.3.3 Foucault (傅科) 摆

假如在北极悬挂一单摆使之作微振动, 在惯性系中的观察者看来摆的振动面始终在铅直平面内, 但地球在以  $\omega_0$  的角速度自转, 因此在非惯性系的地球上的观察者看来, 摆的振动面应以  $-\omega_0$  的角速度转动。这是 Foucault 在 1860 年首先指出的, 藉此可以直接证实地球是具有自转的。除了赤道之外的各地都可以观察到这种效应, 下面对此问题作一近似分析。

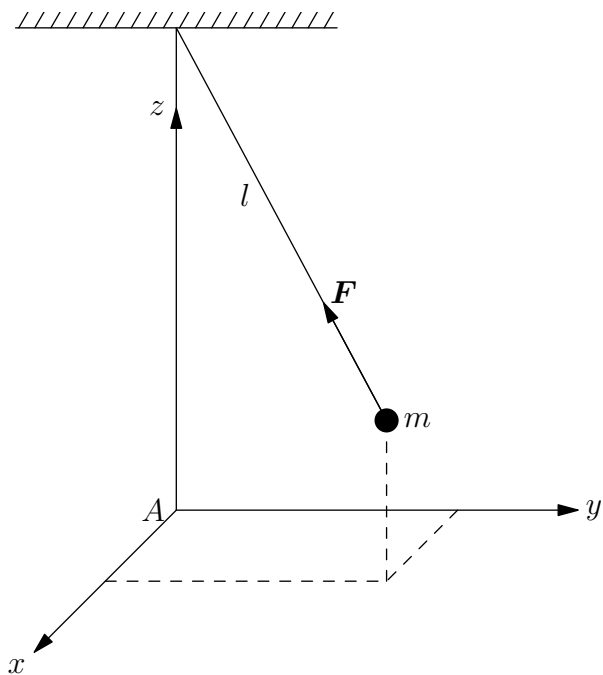


图 7.6: Foucault 摆

设摆长为  $l$ ，摆球的质量为  $m$ ，摆杆的张力为  $\mathbf{F}$ ，取与节7.3.2相同的坐标系  $Axyz$ ，其中  $A$  点为摆球的平衡位置。于是，张力  $\mathbf{F}$  的三个分量为

$$\begin{cases} F_x = -\frac{x}{l}F \\ F_y = -\frac{y}{l}F \\ F_z = -\frac{l-z}{l}F \end{cases}$$

代入式(7.17)可得摆球的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{x}{l}F + 2m\omega_0\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} = -\frac{y}{l}F - 2m\omega_0(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} = \frac{l-z}{l}F - mg + 2m\omega_0\dot{y}\cos\lambda \end{cases} \quad (7.22)$$

以及一个约束方程

$$x^2 + y^2 + (l-z)^2 = l^2 \quad (7.23)$$

通过解方程组(7.22)和(7.23)，即可得出摆的运动规律。但这组方程很难严格求解，但考虑到微振动条件下， $x$ 、 $y$  和  $\dot{x}$ 、 $\dot{y}$  都是小量，因而由式(7.23)得

$$l-z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} = l \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + o(x^2 + y^2) \right)$$

因此， $z$  是二阶小量， $\dot{z}$  和  $\ddot{z}$  也是二阶小量。在忽略二阶小量的情况下，由方程(7.22)的第三式可得  $F = mg$ ，代入另外两式中可得

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega_0\dot{y}\sin\lambda + \omega^2x = 0 \\ \ddot{y} + 2\omega_0\dot{x}\sin\lambda + \omega^2y = 0 \end{cases}$$



式中  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ 。将第二式乘以  $i$  再与第一式相加, 可得一个复变数方程

$$\ddot{\xi} + i2\omega_0\dot{\xi} \sin \lambda + \omega^2 \xi = 0 \quad (7.24)$$

其中  $\xi = x + iy$ , 方程(7.24)的通解为

$$\xi = Ae^{n_1 t} + Be^{n_2 t}$$

其中  $A$  和  $B$  为两个复常数, 由初始条件决定。 $n_1$  和  $n_2$  为特征方程

$$n^2 + i(2\omega_0 \sin \lambda)n + \omega^2 = 0$$

的两个根:

$$\begin{cases} n_1 = -i\omega_0 \sin \lambda + i\sqrt{\omega_0^2 \sin^2 \lambda + \omega^2} \approx -i\omega_0 \sin \lambda + i\omega \\ n_2 = -i\omega_0 \sin \lambda - i\sqrt{\omega_0^2 \sin^2 \lambda + \omega^2} \approx -i\omega_0 \sin \lambda - i\omega \end{cases}$$

因此可将通解表示为

$$\xi = e^{-i(\omega_0 \sin \lambda)t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \quad (7.25)$$

当地球没有自转, 即  $\omega_0 = 0$  时, 方程(7.22)的解为

$$\xi = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = (A + B) \cos \omega t + i(A - B) \sin \omega t = x' + iy'$$

所以

$$\begin{cases} x' = (A + B) \cos \omega t \\ y' = (A - B) \sin \omega t \end{cases} \quad (7.26)$$

由此可知, 当地球自转效应忽略时, 摆球走一椭圆轨道,  $x'$  和  $y'$  分别为椭圆的两个主轴。当考虑地球自转时, 即  $\omega_0 \neq 0$  时, 由式(7.25)可得

$$\begin{aligned} \xi = x + iy &= [\cos(\omega_0 t \sin \lambda) - i \sin(\omega_0 t \sin \lambda)](x' + iy') \\ &= [x' \cos(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \sin(\omega_0 t \sin \lambda)] + i[-x' \sin(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \cos(\omega_0 t \sin \lambda)] \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} x = x' \cos(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \sin(\omega_0 t \sin \lambda) \\ y = -x' \sin(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \cos(\omega_0 t \sin \lambda) \end{cases} \quad (7.27)$$

这表明, 摆球在作周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

的椭圆轨道运动, 同时此椭圆的轴  $x'$  和  $y'$  又以角速度  $-\omega_0 \sin \lambda$  绕  $Oz$  转动, 亦即摆的振动面以角速度  $-\omega_0 \sin \lambda$  旋转, 它们的几何关系如图7.7所示。

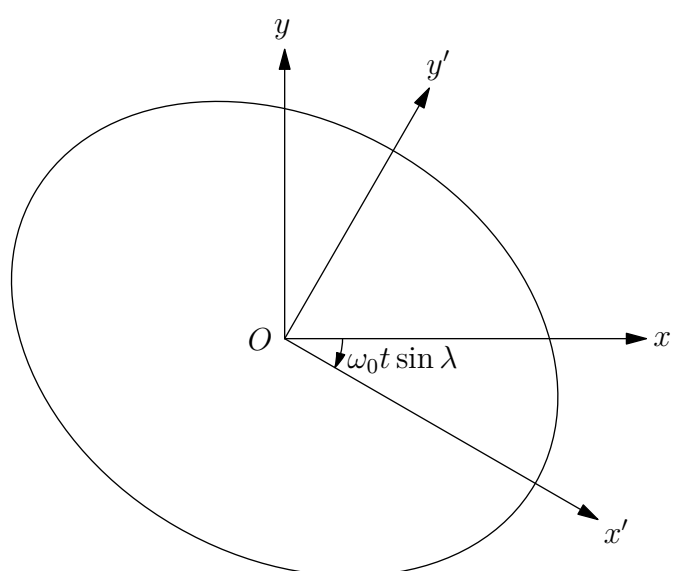


图 7.7: Foucault 摆振动面的旋转

## 第八章 习题及解答

### 8.1 金尚年《理论力学》习题（部分）

#### 8.1.1 牛顿力学

题 8.1.1 (30 页 1.13) 质点  $A$  约束在光滑水平平台上运动, 在此质点上系着一根长为  $l$  的轻绳, 绳子穿过平台上的小孔, 另一端垂直地挂着另一个质点  $B$ , 如图 8.1 所示。

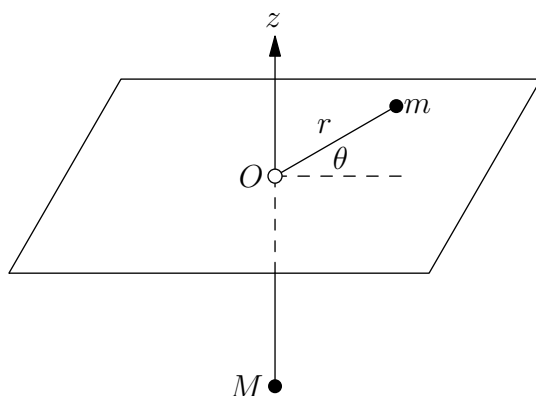


图 8.1: 题 8.1.1

1. 问此动力学体系的动量、角动量、能量是否守恒, 并解释之;
2. 用质点系动量定理写出体系的运动微分方程;
3. 若  $t = 0$  时, 质点  $A$  离  $O$  的距离为  $a$ , 速度为  $v_0 = \sqrt{\frac{9ag}{2}}$ , 其方向垂直于  $OA$ , 且  $m_A = m_B = m$ , 证明以后质点  $A$  离  $O$  点的距离始终在  $a$  和  $3a$  之间。

**解** 1. 体系合外力非零, 因此体系动量不守恒; 体系对  $O$  点力矩为零, 因此体系角动量守恒; 体系非保守外力 (绳子张力) 不做功, 其余外力 (重力) 为保守力, 因此体系能量守恒。

2. 首先求得体系的动量

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = m_A(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) + m_B\dot{z}\mathbf{e}_z$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= m_A(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + m_A(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + m_B\ddot{z}\mathbf{e}_z \\ &= m_A(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + m_A(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + m_B\ddot{z}\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

此处利用了

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r$$

以及约束  $r - z = \text{常数}$ 。体系受到的外力为

$$\mathbf{F} = -F_T \mathbf{e}_r + (F_T - m_B g) \mathbf{e}_z$$

因此根据质点系动量定理  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$  可得体系的运动微分方程为

$$\begin{cases} m_A(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F_T & (8.1a) \\ m_A(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 & (8.1b) \\ m_B\ddot{r} = F_T - m_B g & (8.1c) \end{cases}$$

3. 由式(8.1b)可得

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

即有

$$r^2\dot{\theta} = l = av_0 = a\sqrt{\frac{9ag}{2}} \quad (8.2)$$

再由式(8.1a)和式(8.1c)消去  $F_T$  可得

$$2\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g = 0$$

再由式(8.2)以及

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dr}\dot{r} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{r}^2)}{dr}$$

可得  $\dot{r}^2$  满足的微分方程为

$$\frac{d(\dot{r}^2)}{dr} - \frac{l^2}{r^3} + g = 0$$

分离变量可得

$$d(\dot{r}^2) = \left( \frac{l^2}{r^3} - g \right) dr$$

两端积分（注意到初始时刻  $\dot{r} = 0$ ）可得

$$\dot{r}^2 = \int_a^r \left( \frac{l^2}{r^3} - g \right) dr = \frac{l^2}{2a^2} + ga - \frac{l^2}{2r^2} - gr = g \frac{(r-a)(r-3a) \left( r + \frac{3}{4}a \right)}{r^2}$$

运动范围可由

$$\dot{r}^2 = g \frac{(r-a)(r-3a) \left( r + \frac{3}{4}a \right)}{r^2} \geq 0$$

确定，由此可解得

$$a \leq r \leq 3a$$

即质点  $A$  离  $O$  点的距离始终在  $a$  和  $3a$  之间。

**题 8.1.2 (30 页 1.20)** 一质量为  $m$  的质点约束在对称轴为铅直线，半顶角为  $\alpha$  的圆锥形漏斗的内表面运动。漏斗的上底半径为  $R_1$ ，下底半径为  $R_2$ 。开始时质点具有水平方向的初速度  $v_0$ ，离下底的高度为  $h$ （如图 8.2 所示），在运动过程中摩擦力可忽略不计。试问质点能飞出漏斗之外，落入漏斗下面和在漏斗内做圆周运动三种情况下  $v_0$  和  $h$  各应满足什么关系？

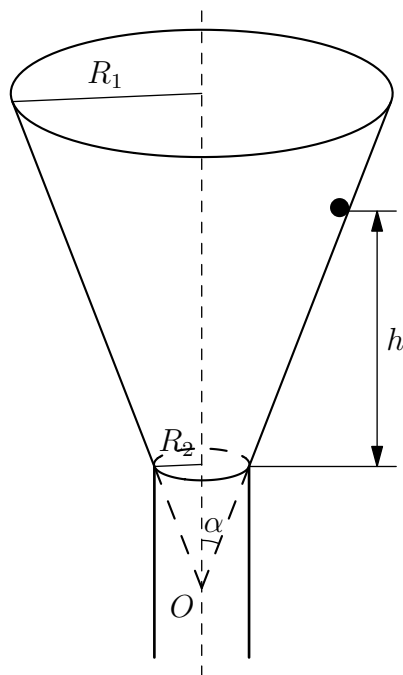


图 8.2: 题 8.1.2

**解** 考虑质点恰好不能飞出漏斗的情况，在漏斗边缘质点的速度将在水平面内。根据能量守恒，可有

$$mgH + \frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2$$

质点对  $O$  点的力矩方向恒在水平平面内，因此质点竖直方向角动量守恒，即有

$$R_1 v = (R_2 + h \tan \alpha) v_0$$

再考虑到

$$H = (R_1 - R_2) \cot \alpha$$

由此可解得

$$v_0^2 = \frac{2g[(R_1 - R_2) \cot \alpha - h] R_1^2}{R_1^2 - (R_2 + h \tan \alpha)^2}$$

故质点能飞出漏斗之外的条件为

$$v_0^2 \geq \frac{2g[(R_1 - R_2) \cot \alpha - h] R_1^2}{R_1^2 - (R_2 + h \tan \alpha)^2}$$

同理，考虑质点恰好不能落入漏斗下面的情况，在漏斗边缘质点的速度将在水平面内。同样根据能量守恒，可有

$$\frac{1}{2}mv'^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2$$

根据角动量守恒，可有

$$R_2 v' = (R_2 + h \tan \alpha) v_0$$

由此可解得

$$v_0^2 = \frac{2ghR_2^2}{(R_2 + h \tan \alpha)^2 - R_2^2}$$

故质点能落入漏斗下面的条件为

$$v_0^2 \leq \frac{2ghR_2^2}{(R_2 + h \tan \alpha)^2 - R_2^2}$$

在漏斗内做圆周运动时, 需满足

$$\begin{cases} N \cos \alpha = m \frac{v_0^2}{R_2 + h \tan \alpha} \\ N \sin \alpha - mg = 0 \end{cases}$$

由此可得质点在漏斗内做圆周运动的条件为

$$v_0^2 = g(h + R_2 \cot \alpha)$$

题 8.1.3 (31 页 1.23) 总长度为  $L$  的软链放在水平光滑的桌面上, 此时长为  $l$  的一部分链条从桌上下垂, 起始时链条是静止的, 求当链条末端滑倒桌子边缘时, 链的速度  $v$  和所需的时间。

解 设软链的线密度为  $\rho$ , 根据能量守恒, 可有

$$\frac{1}{2} \rho L v^2 - \rho L g \frac{L}{2} = -\rho l g \frac{l}{2}$$

由此可有

$$v = \sqrt{\frac{g(L^2 - l^2)}{L}}$$

为求所需时间, 在下垂长度为  $x$  时, 有

$$\frac{1}{2} \rho L v^2 - \rho x g \frac{x}{2} = -\rho l g \frac{l}{2}$$

即有

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g(x^2 - l^2)}{L}}$$

所以有

$$\sqrt{\frac{L}{g}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - l^2}} = dt$$

两端积分可得

$$t = \int_l^L \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - l^2}} = \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l}$$

题 8.1.4 (32 页 1.37) 质量相同的两个物体  $A$  和  $B$  用弹簧链接 (如图 8.3 所示), 垂直至于地面上, 原来静止。现给物体  $A$  以瞬间冲量  $I$ , 问  $I$  要多大才可使物体  $B$  跳起来?

解 以弹簧的平衡位置为重力势能零点, 设初始弹簧形变量为  $x_0$ , 则有

$$2kx_0 = m_A g$$

设冲量  $I$  给物体  $A$  的初始速度为  $v$ , 物体  $B$  在物体  $A$  运动到最高点时地面的支持力最小, 因此考虑当物体  $A$  运动到最高点时, 根据能量守恒可有

$$2 \cdot \frac{1}{2} k x^2 + m_A g x = 2 \cdot \frac{1}{2} k x_0^2 - m_A g x_0 + \frac{1}{2} m_A v^2$$

可得

$$x = \sqrt{\frac{m_A}{2k}} v - x_0$$

此时如果物体  $B$  恰好跳起来, 则有

$$2kx = m_B g$$

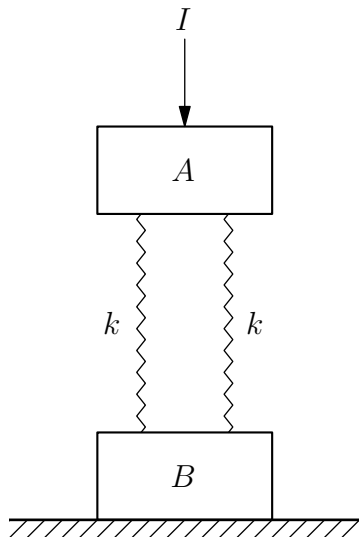


图 8.3: 题 8.1.4

由此可得

$$v = \frac{(m_A + m_B)g}{\sqrt{2km_A}}$$

根据动量定理

$$I = m_A v = (m_A + m_B)g \sqrt{\frac{m_A}{2k}}$$

## 8.1.2 Lagrange 力学

题 8.1.5 (64 页 2.12) 质量为  $m$  的质点约束在光滑的旋转抛物面  $x^2 + y^2 = az$  的内壁运动,  $z$  轴为铅直轴。写出:

1. 质点的运动方程;
2. 质点作圆周运动所应满足的条件。

解 质点的自由度为 2, 取柱坐标  $r, \theta$  作为广义坐标, 则有  $z = \frac{r^2}{a}$ 。

1. 质点的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \frac{1}{2}m\left[\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - \frac{mg}{a}r^2$$

$\theta$  是循环坐标, 故有

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = L(\text{常数})$$

Lagrange 函数不显含时间, 故有广义能量守恒, 即

$$\frac{1}{2}m\left[\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{mg}{a}r^2 = E(\text{常数})$$

因此质点的运动方程为

$$\begin{cases} mr^2\dot{\theta} = L \\ \frac{1}{2}m\left[\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{mg}{a}r^2 = E \end{cases}$$

2. 在运动方程中消去  $\dot{\theta}$  可得

$$\frac{1}{2}m \left( 1 + \frac{4r^2}{a^2} \right) \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{mg}{a}r^2 = E$$

即将此运动等效为一个一维运动, 其等效势能为

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{mg}{a}r^2$$

质点做圆周运动时, 要求初始时质点即处于平衡位置 (势能最低的位置), 即

$$\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r_0} = -\frac{L^2}{mr_0^3} + \frac{2mg}{a}r_0 = 0$$

考虑到  $L = mr_0 v_0$  以及  $r_0^2 = ah$ , 可得质点做圆周运动需要满足的条件为

$$v_0^2 = 2gh$$

题 8.1.6 (65 页 2.19) 由两个相同的重物  $P$  和用铰链链接着的四根长度为  $l$  的轻棒及一个质量可忽略的弹簧  $k$  所组成的力学体系, 其结构如图 8.4 所示。体系处于铅直平面内,  $O$  点是固定的, 当图中的  $\theta = 45^\circ$  时弹簧处于固有长度, 求平衡时体系的位置。

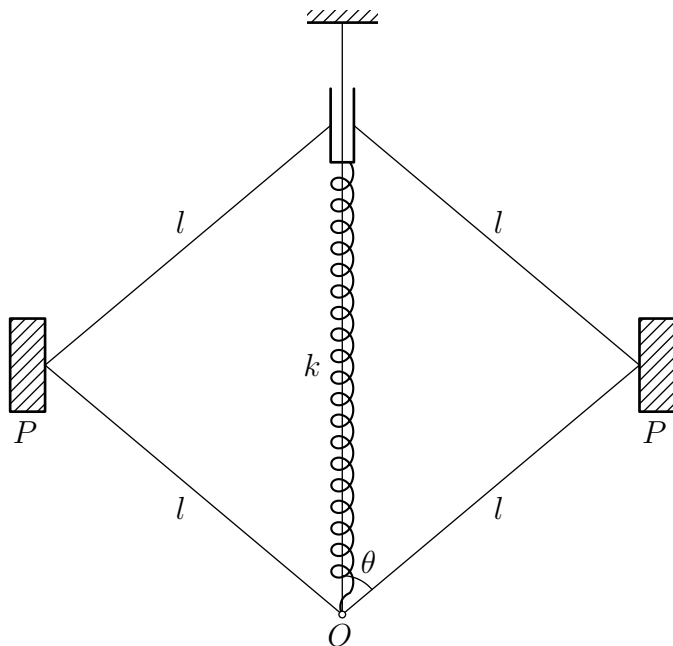


图 8.4: 题 8.1.6

解 以  $\theta$  为广义坐标, 可以求得体系的势能为

$$V = 2Pl \cos \theta + \frac{1}{2}k \left( 2l \cos \theta - \sqrt{2}l \right)^2$$

平衡位置  $\theta_0$  需满足

$$\left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0$$

可解得

$$\theta_0 = \arccos \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P}{2kl} \right)$$



题 8.1.7 (66 页 2.24) 一质点在螺旋面上运动, 螺旋面的方程为

$$x = R \cos \phi, \quad y = R \sin \phi, \quad z = b\phi$$

此质点并受辐向斥力, 其大小与质点到轴的距离成正比。写出此质点的 Lagrange 函数和运动方程。

解 辐向斥力可以表示为

$$\mathbf{F} = 2kR\mathbf{e}_r$$

此力对应的势能可表示为

$$V = -kR^2$$

质点的速度为

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{R} \cos \phi - R\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{R} \sin \phi + R\dot{\phi} \cos \phi \\ b\dot{\phi} \end{pmatrix}$$

因此, 质点的 Lagrange 函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + b^2\dot{\phi}^2) + kR^2$$

Lagrange 函数中不含坐标  $\phi$ , 故  $\phi$  是循环坐标, 即有

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(R^2 + b^2)\dot{\phi} = l_\phi (\text{常数})$$

再由  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} = 0$  可得

$$m\ddot{R} - mR\dot{\phi}^2 - 2kR = 0$$

综上, 质点的运动方程为

$$\begin{cases} m(R^2 + b^2)\dot{\phi} = l_\phi (\text{常数}) \\ m\ddot{R} - mR\dot{\phi}^2 - 2kR = 0 \end{cases}$$

### 8.1.3 Hamilton 力学

题 8.1.8 (272 页 8.1) 写出自由质点在柱坐标和球坐标中的 Hamilton 函数。

解 在球坐标系中, 质点的速度可以表示为

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi$$

因此自由质点的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$$

广义动量分别为

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

所以 Hamilton 函数为

$$H = \sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta}$$

题 8.1.9 (272 页 8.4) 假定在两个固定点  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  之间作一条曲线, 并让它绕  $y$  轴旋转而形成一个旋转曲面, 求使此旋转曲面的表面积为极小的曲线方程式。

解 设曲线的方程可以表示为  $x = f(y)$ , 则旋转体的表面积可以表示为

$$S[f(y)] = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi f(y) \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy$$

此旋转体表面积取极小值的条件为  $\delta S = 0$ , 根据 Euler-Lagrange 方程可有

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{\partial F}{\partial f} = 0$$

其中  $F(f, f', y) = 2\pi f(y) \sqrt{1 + [f'(y)]^2}$ , 由于  $F(f, f', y)$  中不含有自变量  $y$ , 故 Euler-Lagrange 方程有初积分

$$F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} = a (\text{常数})$$

由此方程整理可得

$$f'(y) = \sqrt{\frac{f^2(y)}{a^2} - 1} = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

分离变量可有

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} dy$$

两端积分, 可有

$$\operatorname{arcosh} \frac{x}{a} = \frac{1}{a} (y - b)$$

因此所求曲线的方程为

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a}$$

式中  $a, b$  是积分常数, 可由边界条件

$$\begin{cases} x_1 = a \cosh \frac{y_1 - b}{a} \\ x_2 = a \cosh \frac{y_2 - b}{a} \end{cases}$$

确定。

题 8.1.10 (273 页 8.10) 证明  $q = \sqrt{\frac{2Q}{k}} \cos P$ ,  $p = \sqrt{2kQ} \sin P$  ( $k$  为常数) 是一正则变换。

若原来的 Hamilton 函数为  $H = \frac{1}{2}(p^2 + k^2 q^2)$ , 求用新正则变量表示的正则方程。

解 正则变换保持基本 Poisson 括号不变, 因此考虑

$$[q, p] = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = 1$$

故此变换为正则变换。在此变换下, 新的 Hamilton 函数满足

$$K = \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{2kQ} \sin P \right)^2 + k^2 \left( \sqrt{\frac{2Q}{k}} \cos P \right)^2 \right] = kQ$$

由此, 新的正则方程为

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = k \end{cases}$$

## 8.1.4 两体问题

题 8.1.11 (98 页 3.6) 求粒子在中心力

$$F = -\frac{k}{r^2} + \frac{c}{r^3}$$

的作用下的轨道方程。

解 根据 Binet 方程(4.23)可有

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{m}{l^2}(-k + cu)$$

即有

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{cm}{l^2}\right)u = \frac{km}{l^2}$$

此方程的解为

$$u = \frac{km}{l^2 + cm} + A \cos\left(\sqrt{1 + \frac{cm}{l^2}}\theta + \theta_0\right)$$

其中  $A$  和  $\theta_0$  为积分常数。选择极角的起始点, 总可以使得  $\theta_0 = 0$ , 由此有轨道方程

$$r = \frac{1}{\frac{km}{l^2 + cm} + A \cos\left(\sqrt{1 + \frac{cm}{l^2}}\theta\right)}$$

考虑中心力

$$F = -\frac{k}{r^2} + \frac{c}{r^3}$$

对应的势能为

$$V = -\frac{k}{r} + \frac{c}{2r^2}$$

近日点的距离为  $r_{\min} = \frac{1}{\frac{km}{l^2 + cm} + A}$ , 而在近日点有  $\dot{r}|_{r=r_{\min}} = 0$ , 故有

$$U(r_{\min}) = \frac{l^2}{2mr_{\min}^2} + V(r_{\min}) = E$$

即

$$\frac{l^2 + cm}{2m}u_{\min}^2 - ku_{\min} - E = 0$$

由此可得

$$u_{\min} = \frac{km + \sqrt{k^2 m^2 - 2mE(l^2 + cm)}}{l^2 + cm}$$

所以有

$$A = u_{\min} - \frac{km}{l^2 + cm} = \sqrt{\left(\frac{km}{l^2 + cm}\right)^2 - \frac{2mE}{l^2 + cm}}$$

由此即得轨道方程

$$r = \frac{\frac{l^2 + cm}{km}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2E(l^2 + cm)}{km}} \cos\left(\sqrt{\frac{l^2 + cm}{l^2}}\theta\right)}$$

题 8.1.12 (98 页 3.7) 求粒子在题 8.1.11 中的势场中能作圆周运动的轨道半径, 并讨论在此轨道上粒子受到微小扰动后的运动情况。

解 考虑粒子径向运动的等效势能

$$U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{l^2 + cm}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

粒子做圆周运动需要其半径  $r_m$  满足

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=r_m} = -\frac{l^2 - cm}{mr_m^3} - \frac{k}{r_m^2} = 0$$

即圆轨道半径为

$$r_m = \frac{l^2 + 2m}{km}$$

再考虑

$$\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=r_m} = \frac{3(l^2 + cm)}{mr_m^4} - \frac{2k}{r_m^3} = \frac{l^2 + cm}{mr_m^4} > 0$$

故该圆轨道是稳定的。

题 8.1.13 (98 页 3.16) 初速度为  $v_\infty$  的粒子受到势场  $V = -\frac{\alpha}{r^2}$  的散射, 问在什么条件下粒子会被力心所俘获, 并求俘获的总散射截面。

解 粒子在此势场中的等效势能为

$$U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \left( \frac{l^2}{2m} - \alpha \right) \frac{1}{r^2}$$

粒子能被力心俘获的条件即为  $U(r) \leq 0$ , 即

$$\frac{l^2}{2m} - \alpha \leq 0$$

由于  $l = \mu b v_\infty$ , 所以粒子能被力心俘获的条件为

$$b \leq \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}$$

总散射截面为

$$\sigma_t = \pi b_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}$$

题 8.1.14 (99 页 3.20) 证明在中心势场  $V = \frac{\alpha}{r}$  中运动的粒子, 其 Laplace-Runge-Lenz 矢量  $\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} + \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}$  是守恒量, 并讨论  $\mathbf{A}$  的物理意义。式中  $\mathbf{v}$  是粒子的速度,  $\mathbf{L}$  是粒子的角动量。

解 考虑

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{L} + \alpha \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F} \times \mathbf{L} + \alpha \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

式中利用了角动量守恒, 即  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}$ 。又有

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{L} &= mr^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

故

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \alpha \dot{\theta} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_k + \alpha \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = \mathbf{0}$$

因此, Laplace-Runge-Lenz 矢量  $\mathbf{A}$  是守恒量。

当质点运动到极轴上时, 设质点的速度  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_2$ , 矢径  $\mathbf{r} = r_0 \mathbf{e}_1$ , 故角动量矢量可以表示为  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = mr_0 v_0 \mathbf{e}_3$ , 此时 Laplace-Runge-Lenz 矢量为

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} + \alpha \mathbf{e}_r = (mr_0 v_0^2 + \alpha) \mathbf{e}_1$$

故 Laplace-Runge-Lenz 矢量沿极轴方向。再考虑

$$\begin{aligned} A^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{v} \times \mathbf{L} + \alpha \mathbf{e}_r) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L} + \alpha \mathbf{e}_r) = v^2 L^2 + 2\alpha \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) + \alpha^2 \\ &= v^2 L^2 + \frac{2\alpha}{mr} \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + \alpha^2 = v^2 L^2 + \frac{2\alpha}{mr} L^2 + \alpha^2 = \frac{2}{m} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{\alpha}{r} \right) L^2 + \alpha^2 \\ &= \frac{2EL^2}{m} + \alpha^2 = \alpha^2 \epsilon^2 \end{aligned}$$

即 Laplace-Runge-Lenz 矢量的大小与离心率成正比, 可定义离心率矢量为

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{A}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{v} \times \mathbf{L} + \frac{\mathbf{r}}{r}$$

离心率矢量也是守恒量, 其方向沿极轴, 大小为轨道的离心率。

### 8.1.5 多自由度微振动与阻尼

题 8.1.15 (207 页 6.1) 质量为  $m$  的质点, 用一固有长度为  $l$ , 劲度系数为  $k$ , 质量可以忽略的弹簧悬挂于  $O$  点, 质点约束在铅直平面内运动 (如图 8.5 所示), 求体系作微振动时的振动频率。

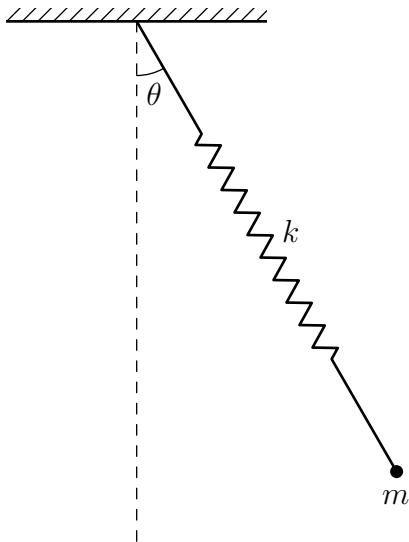


图 8.5: 题 8.1.15

解 此体系的自由度为 2, 取摆长  $x$  和摆动角  $\theta$  作为广义坐标, 则体系的 Lagrange 函数可以表示为

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\theta}^2) + mgx \cos \theta - \frac{1}{2} k (x - l)^2$$

体系的平衡位置可以通过

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0 \\ \left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \end{cases}$$

来确定, 即有

$$x_0 = l + \frac{mg}{k}, \quad \theta_0 = 0$$

在平衡位置附近将 Lagrange 函数展开至两阶并记  $q = x - x_0$ , 可有

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + (q + x_0)^2\dot{\theta}^2) + mg(q + x_0)\cos\theta - \frac{1}{2}k(q + x_0 - l)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}mx_0^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kq^2 - \frac{1}{2}mgx_0\theta^2 + mgx_0 - \frac{m^2g^2}{2k} \end{aligned}$$

由此, 体系微振动的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{q} + kq = 0 \\ mx_0^2\ddot{\theta} + mgx_0\theta = 0 \end{cases}$$

因此, 体系作微振动的频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{x_0}} = \sqrt{\frac{g}{l + \frac{mg}{k}}}$$

题 8.1.16 (208 页 6.6) 有一弹簧连着一个质量为  $m_1$  的滑块, 滑块可沿光滑水平直线自由滑动, 在滑块上系有一摆长为  $l$ , 质量为  $m_2$  的单摆, 求体系的振动频率。

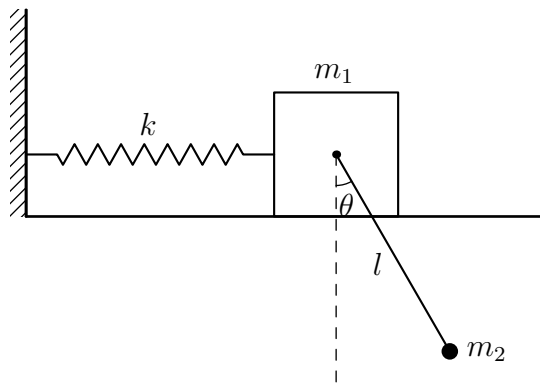


图 8.6: 题 8.1.16

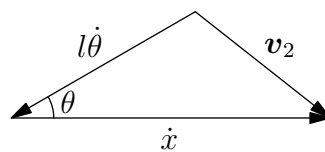


图 8.7:  $m_2$  的速度合成图

**解** 取弹簧伸长量  $x$  和单摆的摆动角  $\theta$  为广义坐标, 则根据相对运动的速度关系, 可得  $m_2$  的速度如图 8.7 所示, 因此有

$$v_2^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

因此, 此体系的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - \frac{1}{2}kx^2 + m_2gl\cos\theta$$

近似到二阶, 可有

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{x}\dot{\theta}\right) - \frac{1}{2}kx^2 + m_2gl\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - m_2l\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}m_2gl\theta^2 + m_2gl \end{aligned}$$

去掉 Lagrange 函数中对运动方程无任何影响的常数项, 记  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$ , 可将 Lagrange 函数表示为

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & -m_2l \\ -m_2l & m_2l^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m_2gl \end{pmatrix}$$

体系的运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

作试解  $\mathbf{q} = \mathbf{a} \cos(\omega t + \phi)$  代入方程中, 可得

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

此方程组有非平凡解的条件为

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = \begin{vmatrix} k - \omega^2(m_1 + m_2) & \omega^2 m_2 l \\ \omega^2 m_2 l & m_2 gl - \omega^2 m_2 l^2 \end{vmatrix} = 0$$

即体系的频率为方程

$$\omega^4 - \left(\frac{k}{m_1} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}\right) \omega^2 + \frac{kg}{m_1 l} = 0$$

的两个正实根。

题 8.1.17 (209 页 6.14) 设一体系的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(x^2 + y^2) + \alpha xy$$

它表示两个固有频率为  $\omega_0$  的一维振子以相互作用  $\alpha xy$  耦合起来, 求此体系的振动频率。

解 记  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , 则体系的 Lagrange 函数可以表示为

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & -\alpha \\ -\alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

体系的频率满足久期方程

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\alpha \\ -\alpha & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

由此可解得体系的频率为

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\omega_0^2}}, \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\omega_0^2}}$$

题 8.1.18 (209 页 6.18) 设具有三个广义坐标  $q_1, q_2, q_3$  的力学体系产生微振动, 其动能  $T$  和势能  $V$  可写作

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$$

$$V = -q_1q_2 - q_2q_3 + 2q_1^2 + \frac{5}{2}q_2^2 + 2q_3^2$$

已知  $t = 0$  时,  $q_1 = q_{10}, q_2 = q_{20}, q_3 = q_{30}, \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = 0$ , 求此体系的运动。

解 记  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ , 则体系的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - q_1q_2 + q_2q_3 - 2q_1^2 - \frac{5}{2}q_2^2 - 2q_3^2$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K}\mathbf{q}$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

于是, 体系的运动方程可以表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

作试解  $\mathbf{q} = \mathbf{a} \cos(\omega t + \phi)$ , 则方程可化为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

此方程具有非平凡解的条件为

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = \begin{vmatrix} 4 - \omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 - \omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

由此解得

$$\omega_1 = \sqrt{3}, \quad \omega_2 = 2, \quad \omega_3 = \sqrt{6}$$

其对应的振幅  $\mathbf{a}$  分别为

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此, 体系运动的通解为

$$\mathbf{q} = C_1 \mathbf{a}_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \mathbf{a}_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + C_3 \mathbf{a}_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3)$$

速度为

$$\dot{\mathbf{q}} = -\omega_1 C_1 \mathbf{a}_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \omega_2 C_2 \mathbf{a}_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) - \omega_3 C_3 \mathbf{a}_3 \sin(\omega_3 t + \phi_3)$$



由于  $t = 0$  时,  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , 即

$$-\omega_1 C_1 \mathbf{a}_1 \sin \phi_1 - \omega_2 C_2 \mathbf{a}_2 \sin \phi_2 - \omega_3 C_3 \mathbf{a}_3 \sin \phi_3 = \mathbf{0}$$

可得  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ 。再根据  $t = 0$  时, 有  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ , 可有

$$C_1 \mathbf{a}_1 + C_2 \mathbf{a}_2 + C_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{q}_0$$

解得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_{10} \\ q_{20} \\ q_{30} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}q_{10} + \frac{1}{3}q_{20} + \frac{1}{3}q_{30} \\ \frac{1}{2}q_{10} - \frac{1}{2}q_{30} \\ \frac{1}{6}q_{10} - \frac{1}{3}q_{20} + \frac{1}{6}q_{30} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

据此可得运动解为

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{3}(q_{10} + q_{20} + q_{30}) \cos \omega_1 t + \frac{1}{2}(q_{10} - q_{30}) \cos \omega_2 t + \frac{1}{6}(q_{10} - 2q_{20} + q_{30}) \cos \omega_3 t \\ q_2 = \frac{1}{3}(q_{10} + q_{20} + q_{30}) \cos \omega_1 t + \frac{1}{3}(q_{10} - 2q_{20} + q_{30}) \cos \omega_3 t \\ q_3 = \frac{1}{3}(q_{10} + q_{20} + q_{30}) \cos \omega_1 t - \frac{1}{2}(q_{10} - q_{30}) \cos \omega_2 t + \frac{1}{6}(q_{10} - 2q_{20} + q_{30}) \cos \omega_3 t \end{cases}$$

## 8.1.6 刚体

题 8.1.19 (146 页 4.7) 高为  $h$ , 顶角为  $2\alpha$  的圆锥在一平面上滚而不滑, 如此锥体以等角速度  $\omega$  绕  $OZ$  轴转动, 求此圆锥地面上最高点  $A$  的速度和加速度。

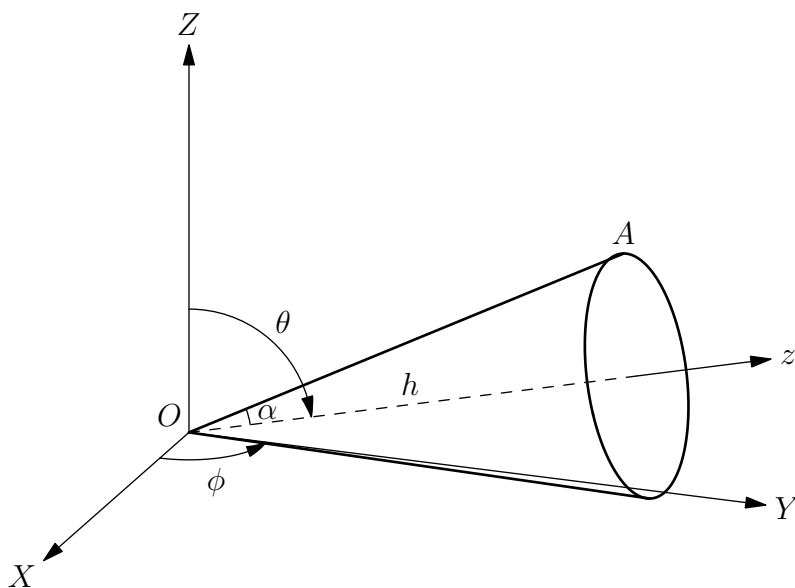


图 8.8: 题 8.1.19

解 首先有

$$\dot{\phi} = \omega, \quad \dot{\theta} = 0$$

根据纯滚动条件, 可有

$$\phi\sqrt{h^2 + r^2} = \psi r$$

即有

$$\dot{\psi} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \dot{\phi} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \omega = \frac{\omega}{\sin \alpha}$$

由此可得圆锥滚动的角速度

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_Z - \dot{\psi} \mathbf{e}_z$$

根据几何关系, 可得

$$\mathbf{e}_z = \cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y + \cos \theta \mathbf{e}_Z = \cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y + \sin \alpha \mathbf{e}_Z$$

所以, 可有

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_Z - \frac{\omega}{\sin \alpha} (\cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y + \sin \alpha \mathbf{e}_Z) = -\frac{\omega \cos \phi}{\sin \alpha} \mathbf{e}_X - \frac{\omega \sin \phi}{\sin \alpha} \mathbf{e}_Y$$

而

$$\mathbf{r}_A = \frac{h}{\cos \alpha} \cos 2\alpha (\cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y) + \frac{h}{\cos \alpha} \sin 2\alpha \mathbf{e}_Z$$

因此, A 点的速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A \\ &= \left( -\frac{\omega \cos \phi}{\sin \alpha} \mathbf{e}_X - \frac{\omega \sin \phi}{\sin \alpha} \mathbf{e}_Y \right) \times \left( \frac{h}{\cos \alpha} \cos 2\alpha (\cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y) + \frac{h}{\cos \alpha} \sin 2\alpha \mathbf{e}_Z \right) \\ &= -\frac{2\omega h}{\cos \alpha} (\sin \phi \mathbf{e}_X - \cos \phi \mathbf{e}_Y) \end{aligned}$$

A 点的加速度为

$$\mathbf{a}_A = \dot{\mathbf{v}}_A = -\frac{2\omega h}{\cos \alpha} (\dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}_X + \dot{\phi} \sin \phi \mathbf{e}_Y) = -\frac{2\omega^2 h}{\cos \alpha} (\cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y)$$

题 8.1.20 (148 页 4.27) 均匀椭球绕自己的一个对称轴 AB 以角速度  $\dot{\phi}$  转动, 并且 AB 轴又以角速度  $\dot{\theta}$  绕通过椭球中心并与 AB 垂直的 CD 轴转动, 写出椭球的动能和角动量。

解 建立主轴系, 以 BA 的方向为 z 轴, x 轴和 y 轴位于与 z 轴垂直的平面内。首先求出此主轴系中椭球的惯量矩阵, 即

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_V \rho(y^2 + z^2) dV \\ &= \rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (b^2 r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + c^2 r^2 \cos^2 \theta) abc r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{4\pi}{3} abc \rho \frac{b^2 + c^2}{5} = \frac{m}{5} (b^2 + c^2) \\ I_2 &= \int_V \rho(x^2 + z^2) dV \\ &= \rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (a^2 r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + c^2 r^2 \cos^2 \theta) abc r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{4\pi}{3} abc \rho \frac{a^2 + c^2}{5} = \frac{m}{5} (a^2 + c^2) \end{aligned}$$

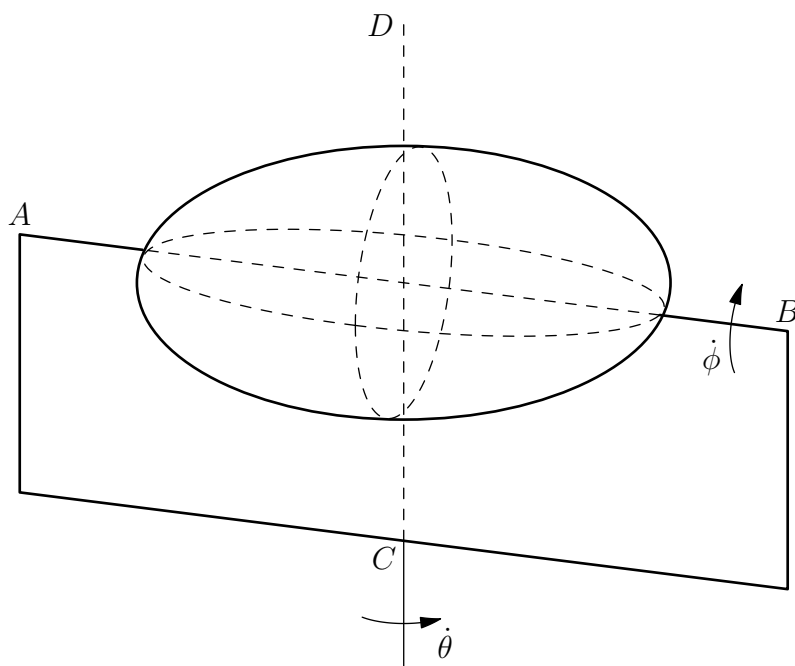


图 8.9: 题 8.1.20

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_V \rho(x^2 + y^2) dV \\
 &= \rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (a^2 r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + b^2 r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta) abc r^2 \sin \theta dr \\
 &= \frac{4\pi}{3} abc \rho \frac{a^2 + b^2}{5} = \frac{m}{5} (a^2 + b^2)
 \end{aligned}$$

在主轴系中, 角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \cos \phi \mathbf{e}_x + \dot{\theta} \sin \phi \mathbf{e}_y + \dot{\phi} \mathbf{e}_z$$

由此, 动能和角速度分别为

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\omega} = \frac{m}{10} \left[ (b^2 + c^2) \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + (a^2 + c^2) \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi + (a^2 + b^2) \dot{\phi}^2 \right] \\
 \mathbf{L} &= \mathbf{L} \boldsymbol{\omega} = \frac{m}{5} \left[ (b^2 + c^2) \dot{\theta} \cos \phi \mathbf{e}_x + (a^2 + c^2) \dot{\theta} \sin \phi \mathbf{e}_y + (a^2 + b^2) \dot{\phi} \mathbf{e}_z \right]
 \end{aligned}$$

## 8.2 理论力学习题集 (部分)

### 8.2.1 平面力系

题 8.2.1 (37 页 4.56) 在两光滑斜面  $OA$  和  $OB$  之间放置两个相互接触的光滑匀质圆柱。中心为  $C_1$  的圆柱重  $P_1 = 10 \text{ N}$ , 中心为  $C_2$  的圆柱中  $P_2 = 30 \text{ N}$ 。设  $\angle AOx_1 = 60^\circ$ ,  $\angle BOx = 30^\circ$ , 求直线  $C_1C_2$  与水平线  $xOx_1$  的夹角  $\phi$ 、两圆柱对鞋面的压力  $N_1$  和  $N_2$ , 以及两圆柱之间的压力  $N$ 。

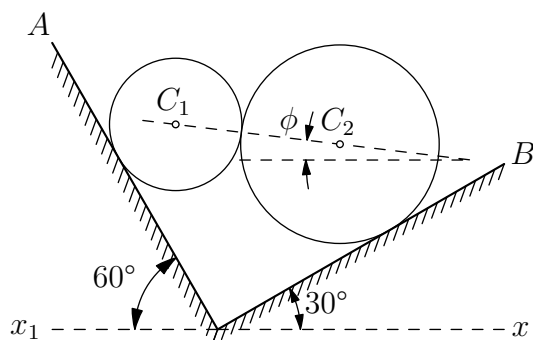


图 8.10: 题 8.2.1

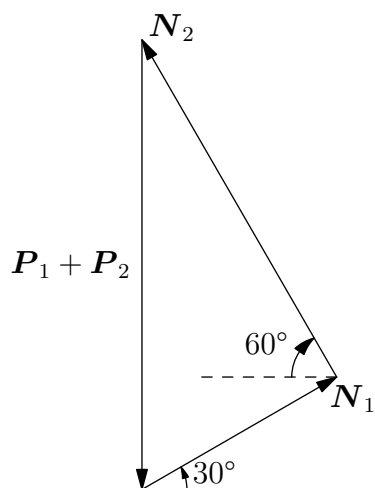


图 8.11: 题 8.2.1 受力分析 1

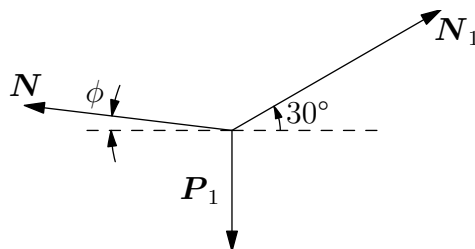


图 8.12: 题 8.2.1 受力分析 2

解 取两圆柱整体受力分析 (如图8.11), 可有

$$\begin{cases} N_1 = (P_1 + P_2) \sin 30^\circ = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = 20 \text{ N} \\ N_2 = (P_1 + P_2) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(P_1 + P_2) = 34.6 \text{ N} \end{cases}$$

然后取圆柱  $C_1$  受力分析 (如图8.12), 可有

$$\begin{cases} N \cos \phi = N_1 \cos 30^\circ \\ N \sin \phi + N_1 \sin 30^\circ = P_1 \end{cases}$$

可得  $\phi = 0$  以及  $N = 17.3 \text{ N}$ 。

题 8.2.2 (37 页 4.57) 两个光滑匀质球  $C_1$  和  $C_2$  的半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 重量分别为  $P_1$  和  $P_2$ 。这两球用绳子  $AB$  和  $AD$  挂在  $A$  点, 且  $AB = l_1$ ,  $AD = l_2$ ,  $l_1 + R_1 = l_2 + R_2$ ,  $\angle BAD = \alpha$ 。求绳子  $AD$  与水平面  $AE$  的夹角  $\theta$ 、绳子的张力  $T_1$  和  $T_2$ , 以及两球之间的压力。

解 取两圆柱整体受力分析 (如图8.14), 根据正弦定理可有

$$\frac{T_1}{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{T_2}{\sin\left(\alpha - \theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{P_1 + P_2}{\sin(\pi - \alpha)}$$

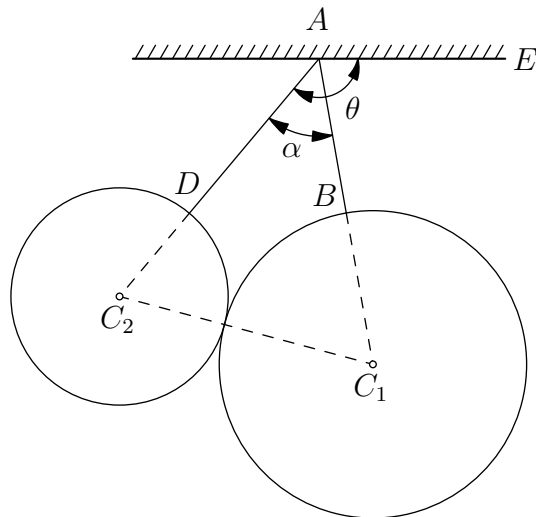


图 8.13: 题 8.2.2

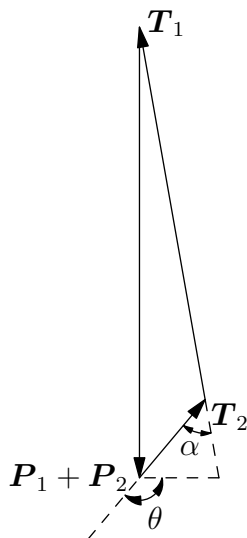


图 8.14: 题 8.2.2 受力分析 1

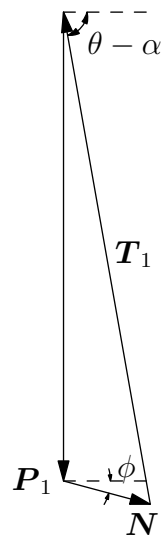


图 8.15: 题 8.2.2 受力分析 2

由此可得

$$\begin{cases} T_1 = -\frac{\cos \theta}{\sin \alpha} (P_1 + P_2) & (8.3a) \\ T_2 = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\sin \alpha} (P_1 + P_2) & (8.3b) \end{cases}$$

然后取圆柱  $C_1$  受力分析 (如图8.15), 记  $\phi = \theta - \alpha - \frac{\pi - \alpha}{2} = \theta - \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}$  为  $C_1C_2$  与水平方向的夹角, 则可有

$$\frac{P_1}{\sin(\theta - \alpha - \phi)} = \frac{T_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)} = \frac{N}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)}$$

由此可得

$$\begin{cases} T_1 = \frac{\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} P_1 \\ N = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} P_1 \end{cases} \quad (8.4a)$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} P_1 \\ N = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} P_1 \end{cases} \quad (8.4b)$$

由式(8.3a)和式(8.4a)可得

$$\tan \theta = -\frac{P_2 + P_1 \cos \alpha}{P_1 \sin \alpha}$$

绳子的张力  $T_1$  和  $T_2$  以及两球之间的压力  $N$  前面已求出。

题 8.2.3 (45 页 5.14) 重  $Q$  的圆柱放在支座  $A$  和  $B$  上, 这两支座关于圆柱中垂线对称。圆柱与支座之间的摩擦系数等于  $\mu$ 。问: 当切向力  $T$  多大时, 圆柱开始转动? 又当角  $\theta$  多大时该装置自锁?

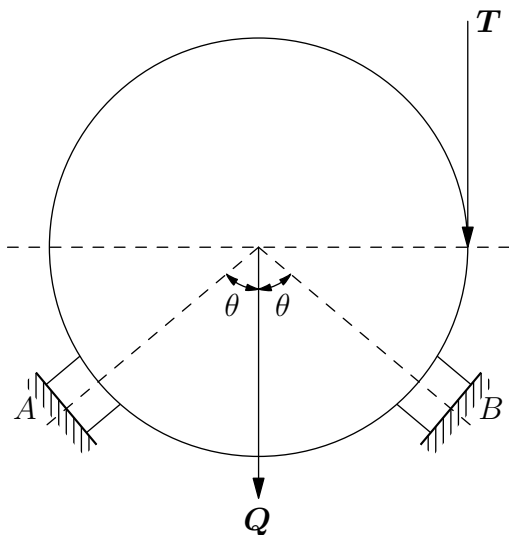


图 8.16: 题 8.2.3

解 根据受力平衡和力矩平衡, 可有

$$\begin{cases} Q + T + f_1 \sin \theta = N_1 \cos \theta + N_2 \cos \theta + f_2 \sin \theta \end{cases} \quad (8.5a)$$

$$\begin{cases} f_1 \cos \theta + f_2 \cos \theta + N_1 \sin \theta = N_2 \sin \theta \end{cases} \quad (8.5b)$$

$$\begin{cases} TR = f_1 R + f_2 R \end{cases} \quad (8.5c)$$

$$\begin{cases} f_1 = \mu N_1 \end{cases} \quad (8.5d)$$

$$\begin{cases} f_2 = \mu N_2 \end{cases} \quad (8.5e)$$

将式(8.5a)和式(8.5b)两端乘以  $\mu$ , 并考虑到式(8.5d)和式(8.5e), 可得

$$\begin{cases} f_1(\mu - \cos \theta + \mu \sin \theta) + f_2(\mu - \cos \theta - \mu \sin \theta) = -\mu Q \\ f_1(\sin \theta + \mu \cos \theta) - f_2(\sin \theta - \mu \cos \theta) = 0 \end{cases}$$

解此方程组可得

$$\begin{cases} f_1 = \frac{\mu Q(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{2 \sin \theta [(1 + \mu^2) \cos \theta - \mu]} \\ f_2 = \frac{\mu Q(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{2 \sin \theta [(1 + \mu^2) \cos \theta - \mu]} \end{cases}$$

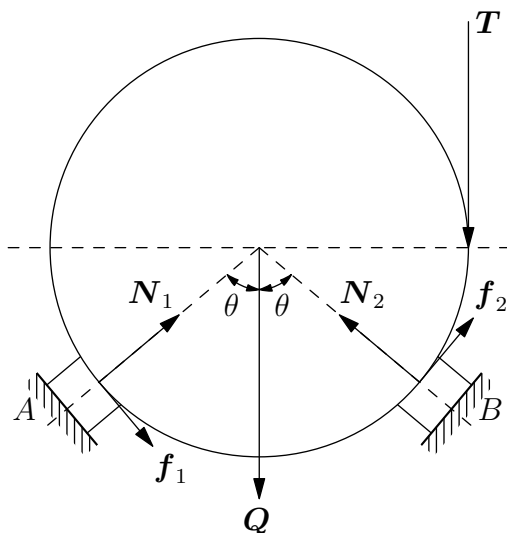


图 8.17: 题 8.2.3 受力分析

再由式(8.5c)可得

$$T = f_1 + f_2 = \frac{\mu Q}{(1 + \mu^2) \cos \theta - \mu}$$

该体系不会自锁的条件为

$$T = \frac{\mu Q}{(1 + \mu^2) \cos \theta - \mu} \geq 0$$

即

$$\theta \leq \arccos \frac{\mu}{1 + \mu^2}$$

题 8.2.4 (45 页 5.15) 不计曲柄机构的滑块 A 和导轨之间的摩擦, 也不计机构上所有铰链和轴承的摩擦, 机构在图标位置能提起重物 Q, 试求力 P 的大小。如果滑块 A 和导轨之间的摩擦系数是  $\mu$ , 为使重物 Q 不动, 求力 P 的最大值和最小值。

解 根据转轮对其中心的力矩平衡, 可有

$$Tr \cos \left( \frac{\pi}{2} - \phi - \theta \right) = Qa \quad (8.6)$$

考虑滑块 A 的受力, 如图 8.19 所示, 即有

$$\begin{cases} P + f = T \cos \phi \\ T \sin \phi = N \end{cases} \quad (8.7)$$

当不计曲柄机构的滑块 A 和导轨之间的摩擦时, 有  $f = 0$ , 此时可解得

$$P = \frac{Qa \cos \phi}{r \sin(\theta + \phi)}$$

当计及摩擦时, 可得摩擦力 f 的取值范围为

$$-\mu N \leq f \leq \mu N \quad (8.8)$$

由式(8.6)和式(8.7)解出 f 和 N 可有

$$\begin{cases} f = \frac{Qa \cos \phi}{r \sin(\phi + \theta)} - P \\ N = \frac{Qa \sin \phi}{r \sin(\phi + \theta)} \end{cases}$$

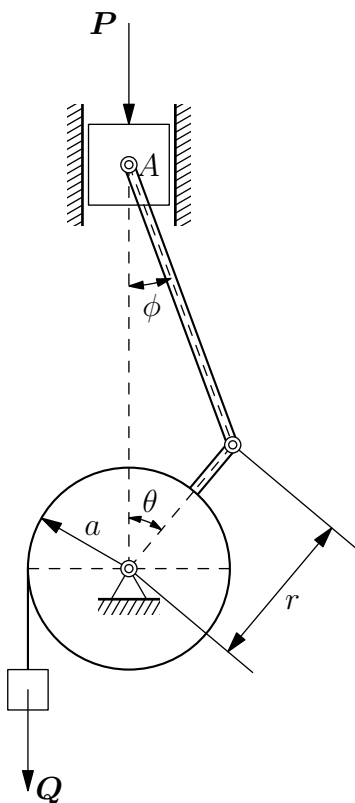


图 8.18: 题 8.2.4

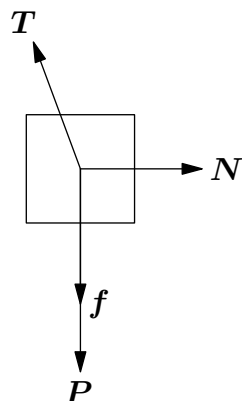


图 8.19: 题 8.2.4 受力分析

根据式(8.8)可有  $P$  的取值范围

$$\frac{Qa(\cos \phi - \mu \sin \phi)}{r \sin(\phi + \theta)} \leq P \leq \frac{Qa(\cos \phi + \mu \sin \phi)}{r \sin(\phi + \theta)}$$

题 8.2.5 (45 页 5.16) 沿不光滑曲面提升重为  $P$  的物体  $B$  过程中, 依靠绳索  $BAD$  保持平衡。该曲面是四分之一圆柱面。曲面和重物间的摩擦系数是  $\mu = \tan \phi$ , 其中  $\phi$  是摩擦角<sup>①</sup>。试以角  $\alpha$  的函数表示出绳索的张力  $T$ , 为使绳索中的张力取极值, 角  $\alpha$  必须满足什么条件? 重物 and 滑轮的尺寸不计。

解 摩擦系数为  $\mu = \tan \phi$ , 即摩擦角为  $\phi$ , 因此摩擦力与支持力的合力与支持力方向的夹角最大为  $\phi$ 。据此可作出矢量三角形关系如图8.21所示。

在图示条件下, 根据正弦定理可有

$$\frac{P}{\sin\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{T}{\sin(\alpha + \phi)}$$

所以有

$$T = P \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\sin\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

考虑

$$\frac{dT}{d\alpha} = P \frac{\cos(\alpha + \phi) \sin\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin(\alpha + \phi)}{\sin^2\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$$

<sup>①</sup> 全反力 (即法向反力与摩擦力的合力) 与接触面法线间夹角的最大值称为摩擦角。



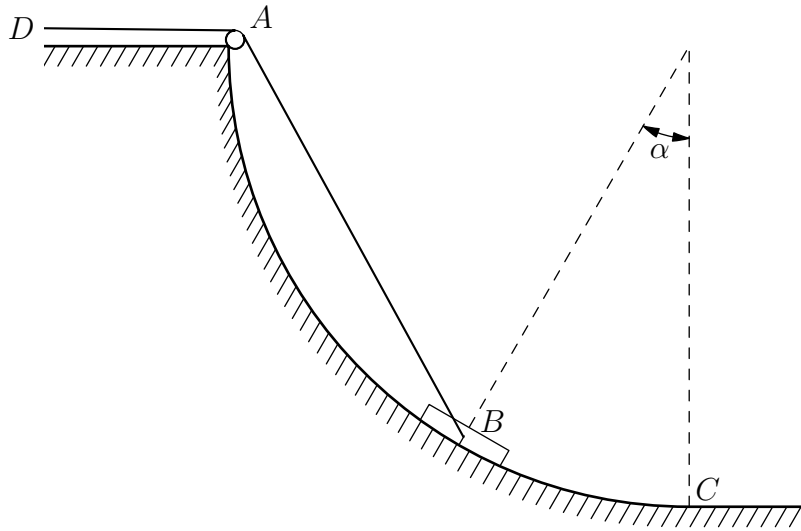


图 8.20: 题 8.2.5

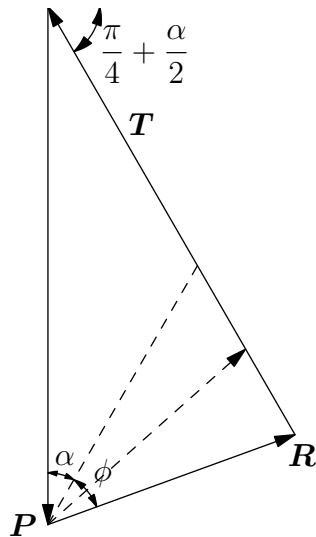


图 8.21: 题 8.2.5 的矢量三角形

即当

$$\frac{\tan(\alpha + \phi)}{\tan\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2$$

时,  $T$  取极值。

题 8.2.6 (48 页 5.27) 梯子  $AB$  靠在铅直墙上, 下端搁在水平地板上。梯子与墙、地板之间的摩擦系数分别为  $\mu_1, \mu_2$ 。梯子顶端站在上面的人共重  $P$ , 重力作用点  $C$  按比值  $m:n$  两分梯子的长度。在平衡状态下, 求梯子与墙之间的最大夹角, 并求当  $\alpha$  等于该值时墙和地板反力的法向分量  $N_A$  和  $N_B$ 。

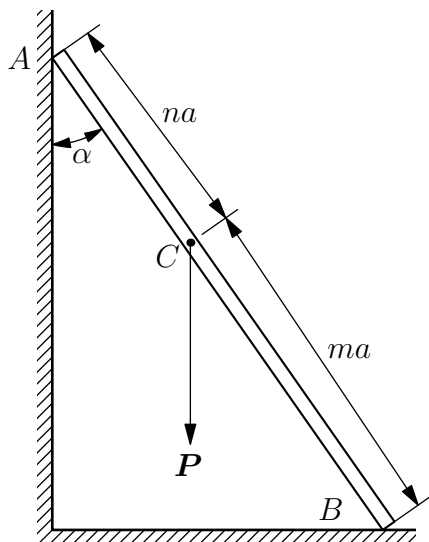


图 8.22: 题 8.2.6

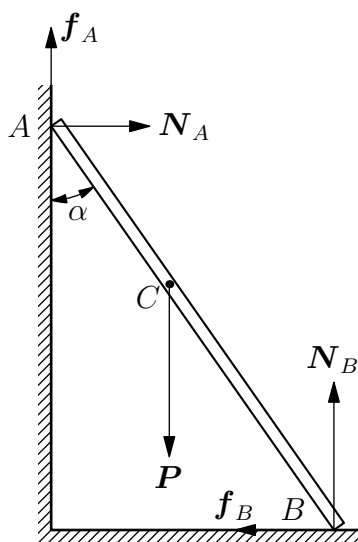


图 8.23: 题 8.2.6 受力分析

解 在夹角最大时, 梯子在该状态下恰不能滑动, 因此摩擦力均取最大值, 即有方程组

$$\begin{cases} N_A - f_B = 0 \end{cases} \quad (8.9a)$$

$$\begin{cases} f_A + N_B - P = 0 \end{cases} \quad (8.9b)$$

$$\begin{cases} N_A na \cos \alpha + f_A na \sin \alpha + f_B ma \cos \alpha - N_B ma \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (8.9c)$$

$$\begin{cases} f_A = \mu_1 N_A \end{cases} \quad (8.9d)$$

$$\begin{cases} f_B = \mu_2 N_B \end{cases} \quad (8.9e)$$

由式(8.9c)可得

$$\tan \alpha = \frac{nN_A + mf_B}{mN_B - nf_A}$$

由式(8.9a)、式(8.9d)和式(8.9e)可得

$$f_B = N_A, \quad N_B = \frac{1}{\mu_2} N_A, \quad f_A = \mu_1 N_A$$

由此可有

$$\tan \alpha = \frac{(m+n)\mu_2}{m - n\mu_1\mu_2}$$

再考虑到式(8.9b)即有

$$N_A = \frac{\mu_2 P}{1 + \mu_1\mu_2}, \quad N_B = \frac{P}{1 + \mu_1\mu_2}$$

题 8.2.7 (48 页 5.28) 重  $P$  的梯子  $AB$  靠在光滑的墙上, 并搁置在不光滑的水平地面上。梯子与地板的摩擦系数为  $\mu$ 。为使重  $p$  的人能沿梯子爬到顶端, 求梯子与地板的夹角  $\alpha$ 。

解 根据图8.25所示的受力分析, 可有

$$\begin{cases} N_A - f_B = 0 \end{cases} \quad (8.10a)$$

$$\begin{cases} N_B - p - P = 0 \end{cases} \quad (8.10b)$$

$$\begin{cases} N_A l \sin \alpha + f_B l \sin \alpha - N_B l \cos \alpha - pl \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (8.10c)$$

$$\begin{cases} f_B \leq \mu N_B \end{cases} \quad (8.10d)$$

由式(8.9a)和式(8.9b)可得

$$N_A = f_B, \quad N_B = p + P$$

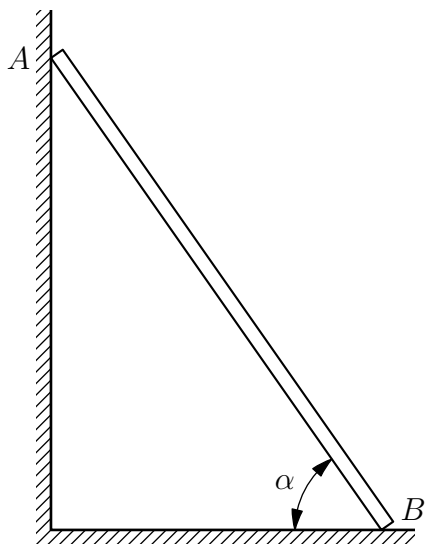


图 8.24: 题 8.2.7

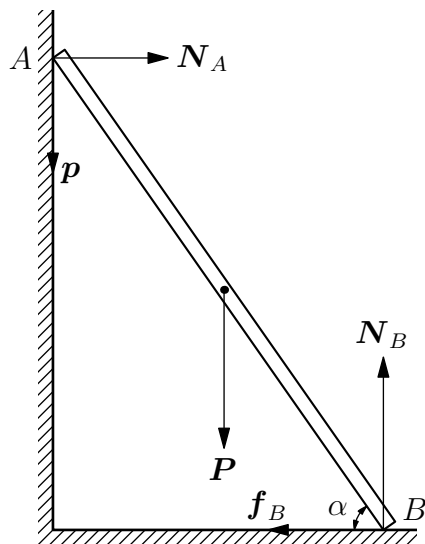


图 8.25: 题 8.2.7 受力分析

再根据式(8.9c)可得

$$f_B = \frac{1}{2}(2p + P) \cot \alpha$$

由此根据式(8.9d)可有

$$\frac{1}{2}(2p + P) \cot \alpha \leq \mu(p + P)$$

即有

$$\tan \alpha = \frac{2p + P}{2\mu(p + P)}$$

## 8.2.2 空间力系

题 8.2.8 (57 页 6.21) 在直角坐标轴上离原点  $O$  为  $l$  的  $A, B, C$  三点各自系有细绳  $AD = BD = CD = L$ , 这三根细绳的另一端结在点  $D$ , 其坐标为

$$x = y = z = \frac{1}{3} \left( l - \sqrt{3L^2 - 2l^2} \right)$$

在点  $D$  挂有重物  $Q$ , 设  $\sqrt{\frac{2}{3}}l < L < l$ , 求三根细绳的张力  $T_A$ ,  $T_B$  和  $T_C$ 。

解 首先写出各点的坐标为

$$A = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left( l - \sqrt{3L^2 - 2l^2} \right) \\ \frac{1}{3} \left( l - \sqrt{3L^2 - 2l^2} \right) \\ \frac{1}{3} \left( l - \sqrt{3L^2 - 2l^2} \right) \end{pmatrix}$$

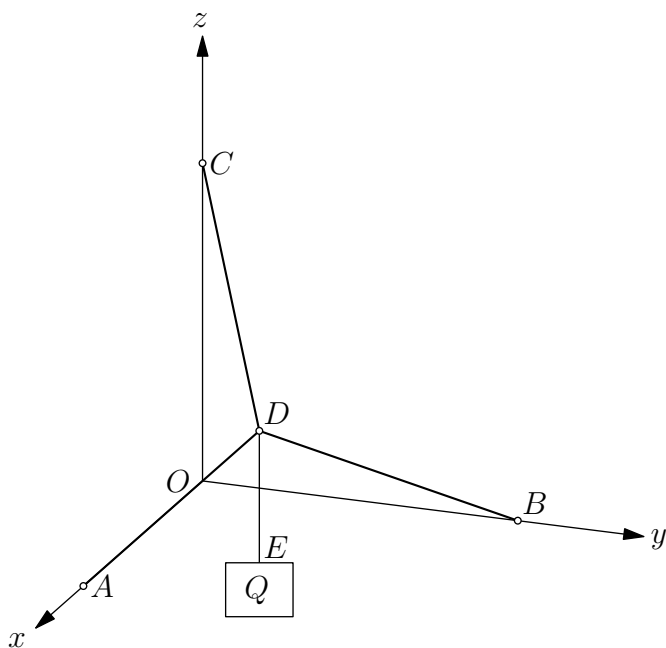


图 8.26: 题 8.2.8

据此求出四条线的方向矢量

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{l}_{DA} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \end{pmatrix}, & \boldsymbol{l}_{DB} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \end{pmatrix}, \\
 \boldsymbol{l}_{DC} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \end{pmatrix}, & \boldsymbol{l}_{DE} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

平衡方程为

$$\boldsymbol{T}_A + \boldsymbol{T}_B + \boldsymbol{T}_C + \boldsymbol{Q} = \mathbf{0}$$

即

$$T_A \boldsymbol{l}_{DA} + T_B \boldsymbol{l}_{DB} + T_C \boldsymbol{l}_{DC} + Q \boldsymbol{l}_{DE} = \mathbf{0}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix}$$

可解得

$$\begin{pmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}} LQ \\ \frac{l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}} LQ \\ \frac{l + 2\sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}} LQ \end{pmatrix}$$

### 8.2.3 点的运动学

题 8.2.9 (86 页 11.4) 如图 8.27 所示的曲柄连杆机构, 曲柄  $OA$  以匀角速度  $\omega$  运动, 求此机构的连杆中点  $M$  和滑块  $B$  的速度随时间的变化规律。已知长度  $OA = OB = a$ 。

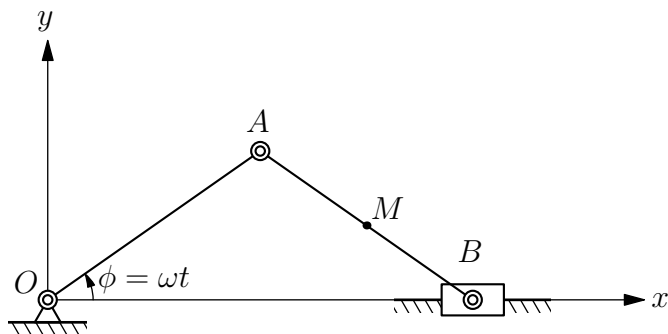


图 8.27: 题 8.2.9

解 根据几何关系, 可以求出  $A$  点、 $B$  点和  $M$  点的坐标

$$\begin{aligned} x_A &= a \cos \omega t, & y_A &= a \sin \omega t \\ x_B &= 2a \cos \omega t, & y_B &= 0 \\ x_M &= \frac{3}{2}a \cos \omega t, & y_M &= \frac{1}{2}a \sin \omega t \end{aligned}$$

由此可有  $B$  点和  $M$  点的速度

$$\begin{aligned} \dot{x}_B &= -2a\omega \sin \omega t, & \dot{y}_B &= 0 \\ \dot{x}_M &= -\frac{3}{2}a\omega \sin \omega t, & \dot{y}_M &= \frac{1}{2}a\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = 2a\omega \sin \omega t \\ v_M &= \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \frac{1}{2}a\omega \sqrt{8 \sin^2 \omega t + 1} \end{aligned}$$

题 8.2.10 (91 页 12.19) 在半径为  $r$  的铁丝圈上套有一个小环  $M$ , 杆  $OA$  穿过小环并绕铁丝圈上的点  $O$  匀速转动, 角速度为  $\omega$ 。求小环  $M$  的速度  $v$  和加速度  $a$ 。

解 以  $O$  为原点建立坐标系, 可得  $M$  点的坐标

$$\begin{cases} x_M = r + r \cos(\pi - 2\phi) = r - r \cos 2\phi = r - r \cos 2\omega t \\ y_M = r \sin(\pi - 2\phi) = r \sin 2\phi = r \sin 2\omega t \end{cases}$$

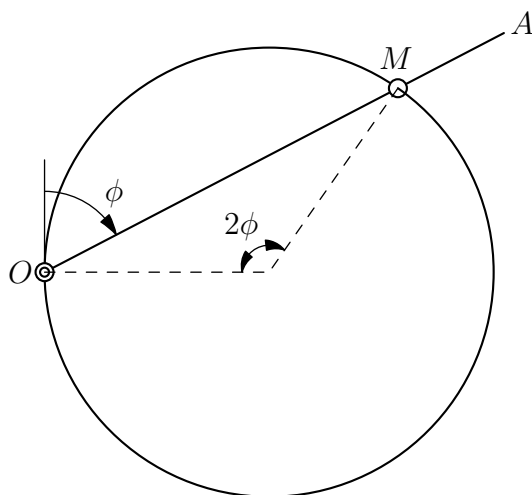


图 8.28: 题 8.2.10

因此可有

$$\begin{cases} \dot{x}_M = 2r\omega \sin 2\omega t \\ \dot{y}_M = 2r\omega \cos 2\omega t \end{cases}, \quad \begin{cases} \ddot{x}_M = 4r\omega^2 \cos 2\phi \\ \ddot{y}_M = -4r\omega^2 \sin 2\phi \end{cases}$$

因此, 可有

$$v = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = 2r\omega, \quad a = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = 4r\omega^2$$

实际上, 小环  $M$  在以  $2\omega$  的角速度做圆周运动。

题 8.2.11 (91 页 12.31) 杆  $AB$  的一段  $A$  以匀速  $v_A$  沿直线导轨  $CD$  移动, 杆  $AB$  始终穿过一个与导轨  $CD$  相距为  $a$  的可转动套筒  $O$ 。杆  $AB$  上点  $M$  至滑块  $A$  的距离是  $b$ 。取  $O$  为极点, 试用极坐标  $r, \phi$  表示点  $M$  的速度和加速度。

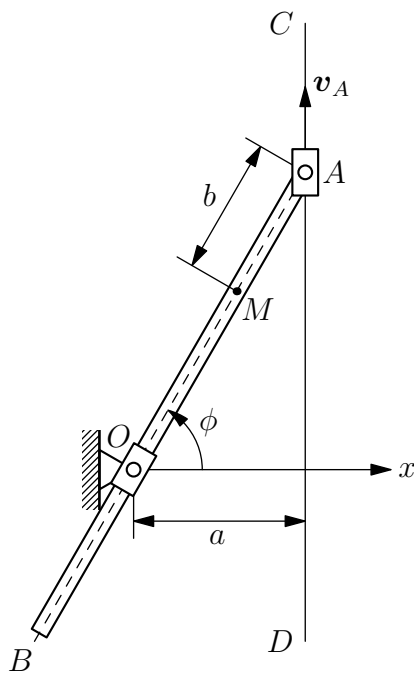


图 8.29: 题 8.2.11

解 首先计算  $A$  点的坐标为

$$x_A = a, \quad y_A = a \tan \phi$$

由此有

$$v_A = \dot{y}_A = a \sec^2 \phi \dot{\phi}$$

所以

$$\dot{\phi} = \frac{v_A}{a} \cos^2 \phi$$

点  $M$  的极坐标  $r = a \sec \phi - b$ 。因此, 由式(1.36)可得极坐标下的速度分量

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = a \dot{\phi} \sec \phi \tan \phi = v_A \sin \phi \\ v_\phi = r \dot{\phi} = \frac{v_A r}{a} \cos^2 \phi \end{cases}$$

因此,  $M$  点的速度为

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\phi^2} = \frac{v_A}{a} \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + r^2 \cos^4 \phi}$$

由式(1.37)可得极坐标下的加速度分量

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 = v_A \dot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 = \frac{b v_A^2}{a^2} \cos^4 \phi \\ a_\phi = r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi} = \frac{2 b v_A^2}{a^2} \sin \phi \cos^3 \phi \end{cases}$$

因此,  $M$  点的加速度为

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\phi^2} = \frac{b v_A^2}{a^2} \cos^3 \phi \sqrt{\cos^2 \phi + 4 \sin^2 \phi} = \frac{b v_A^2}{a^2} \cos^3 \phi \sqrt{1 + 3 \sin^2 \phi}$$

## 8.2.4 刚体的运动学

题 8.2.12 (100 页 14.8) 半长轴和半短轴分别为  $a$  和  $b$  的椭圆齿轮副中, 齿轮  $I$  的角速度  $\omega_1$  为常数, 求此椭圆齿轮副的传动规律。已知两齿轮轴间的距离是  $O_1 O_2 = 2a$ ,  $\phi$  是两转动轴的联机与椭圆齿轮  $I$  的长轴之间的夹角。两转动轴各自通过椭圆的一个焦点。

解 以  $O_1$  为极点,  $O_1 M_1$  方向为极径建立极坐标系, 则在此坐标系中, 椭圆  $I$  的方程可以表示为

$$r_1 = \frac{p}{1 - e \cos \xi}$$

其中  $p = \frac{a^2 - c^2}{a}$  为半通径,  $e = \frac{c}{a}$  为离心率,  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  为椭圆的焦距,  $\xi$  为极角。则椭圆的弧长可以表示为

$$s = \int_0^\phi \sqrt{\left(\frac{dr_1}{d\xi}\right)^2 + r_1^2} d\xi = \int_0^\phi p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \xi + e^2}}{(1 - e \cos \xi)^2} d\xi$$

由此可得  $M$  点的速度为

$$v_M = \dot{s} = p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \phi + e^2}}{(1 - e \cos \phi)^2} \dot{\phi} = p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \phi + e^2}}{(1 - e \cos \phi)^2} \omega_1$$

同样地, 以  $O_2$  为极点,  $O_2 N_2$  方向为极径建立极坐标系, 则在此坐标系中, 椭圆  $II$  的方程可以表示为

$$r_2 = \frac{p}{1 - e \cos \xi}$$

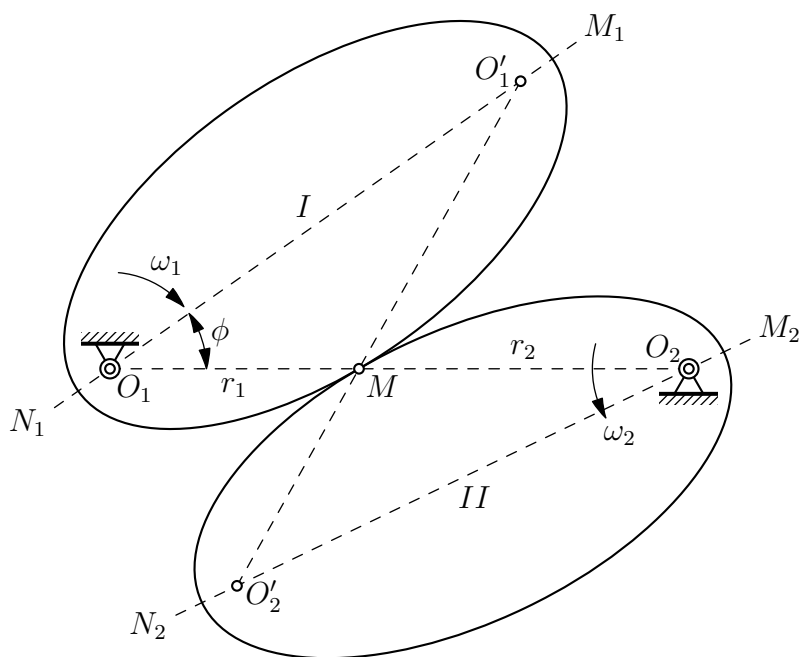


图 8.30: 题 8.2.12

记  $O_2N_2$  与  $O_1O_2$  的夹角为  $\theta$ , 则在此坐标系中可得椭圆的弧长可以表示为

$$s = \int_{-\theta}^0 p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \xi + e^2}}{(1 - e \cos \xi)^2} d\xi = - \int_0^{-\theta} p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \xi + e^2}}{(1 - e \cos \xi)^2} d\xi$$

由此可得  $M$  点的速度为

$$v_M = \dot{s} = -p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \theta + e^2}}{(1 - e \cos \theta)^2} (-\dot{\theta}) = p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \theta + e^2}}{(1 - e \cos \theta)^2} \omega_2$$

由此可得椭圆齿轮副之间的传动规律为

$$p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \phi + e^2}}{(1 - e \cos \phi)^2} \omega_1 = p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \theta + e^2}}{(1 - e \cos \theta)^2} \omega_2$$

即

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{1 - 2e \cos \phi + e^2}{1 - 2e \cos \theta + e^2}} \left( \frac{1 - e \cos \theta}{1 - e \cos \phi} \right)^2 = \sqrt{\frac{a^2 - 2ac \cos \phi + c^2}{a^2 - 2ac \cos \theta + c^2}} \left( \frac{a - c \cos \theta}{a - c \cos \phi} \right)^2 \quad (8.11)$$

角度  $\theta$  和  $\phi$  的关系由  $O_1O_2$  的长度来确定, 即

$$2a = r_1 + r_2 = \frac{p}{1 - e \cos \phi} + \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

所以有

$$\cos \theta = \frac{2ac - (a^2 + c^2) \cos \phi}{a^2 - 2ac \cos \phi + c^2} \quad (8.12)$$

将式(8.12)代入传动规律(8.11)中, 可得此椭圆齿轮副的传动关系为

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac \cos \phi + c^2}$$

题 8.2.13 (102 页 14.13) 偏心轮的直径  $d = 2r$ , 转轴  $O$  到轮心  $C$  的距离  $OC = a$ 。轴  $Ox$  沿着推杆的方向, 参考原点在转轴  $O$  上。求推杆的运动规律。



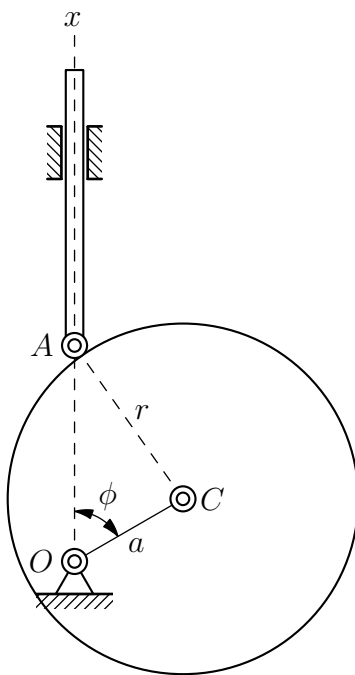


图 8.31: 题 8.2.13

**解** 推杆的坐标可用  $A$  点的坐标  $x$  表示, 记  $\angle OAC = \theta$ , 则在  $\triangle OAC$  中根据正弦定理可有

$$\frac{a}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin \phi}$$

即有

$$\sin \theta = \frac{a}{r} \sin \phi, \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \phi}$$

所以有

$$x = a \cos \phi + r \cos \theta = a \cos \phi + r \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \phi} = a \cos \phi + \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \phi}$$

**题 8.2.14** (106 页 15.6) 沿直线导轨滑动的套筒  $A$  和  $B$  与长为  $l$  的连杆  $AB$  连接, 套筒  $A$  以匀速  $v_A$  运动。设套筒  $A$  是从  $O$  点开始运动的, 以  $A$  为基点, 写出杆  $AB$  的运动方程。其中  $\angle BOA = \pi - \alpha$ 。

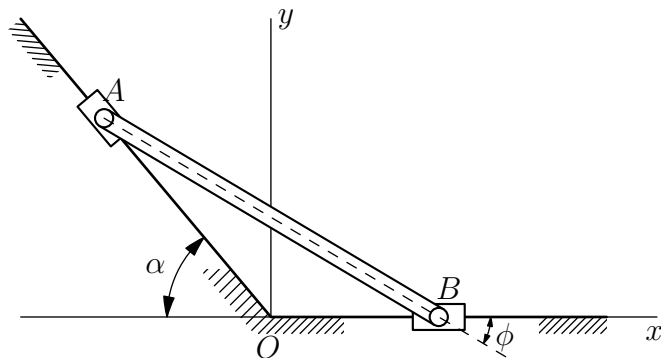


图 8.32: 题 8.2.14

解 点  $A$  的坐标为

$$x_A = -v_A t \cos \alpha, \quad y_A = v_A t \sin \alpha$$

在  $\triangle OAB$  中应用正弦定理可得

$$\frac{l}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{v_A t}{\sin \phi}$$

由此可得

$$\phi = \arcsin \left( \frac{v_A t}{l} \sin \alpha \right)$$

## 8.2.5 质点动力学

题 8.2.15 (209 页 31.28) 质点  $A$  在重力作用下沿粗糙的螺旋面运动。螺旋面的轴  $Oz$  是铅垂的, 方程为  $z = a\phi + f(r)$ 。螺旋面与质点的摩擦系数为  $k$ , 设  $a$  为常数。在什么条件下, 质点在运动时, 保持到轴  $Oz$  的距离  $AB = r_0$  不变, 即质点将沿螺旋线运动? 并求质点的速度。

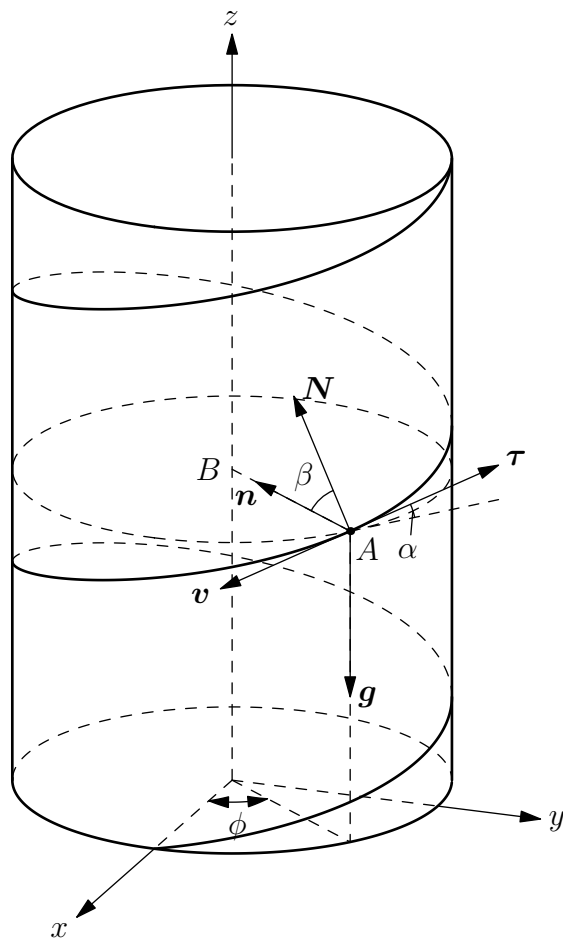


图 8.33: 题 8.2.15

解 质点  $A$  运动的螺旋线的柱坐标方程为

$$\begin{cases} r = r_0 \\ z = a\phi + f(r) \end{cases}$$

用直角坐标下的矢量可表示为

$$\mathbf{r}(\phi) = \begin{pmatrix} r_0 \cos \phi \\ r_0 \sin \phi \\ a\phi + f(r_0) \end{pmatrix}$$

因此，螺旋线的单位切矢量为

$$\boldsymbol{\tau}(\phi) = \frac{\mathbf{r}'(\phi)}{|\mathbf{r}'(\phi)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r_0^2}} \begin{pmatrix} -r_0 \sin \phi \\ r_0 \cos \phi \\ a \end{pmatrix}$$

主法线单位矢量为

$$\mathbf{n}(\phi) = \frac{\mathbf{r}''(\phi)}{|\mathbf{r}''(\phi)|} = \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

副法线单位矢量为

$$\mathbf{b}(\phi) = \boldsymbol{\tau}(\phi) \times \mathbf{n}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r_0^2}} \begin{pmatrix} a \sin \phi \\ -a \cos \phi \\ r_0 \end{pmatrix}$$

曲率半径为

$$\rho(\phi) = \frac{|\mathbf{r}'(\phi)|^3}{|\mathbf{r}'(\phi) \times \mathbf{r}''(\phi)|} = \frac{a^2 + r_0^2}{r_0}$$

螺旋面用矢量可以表示为

$$\boldsymbol{\Sigma}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ a\phi + f(r) \end{pmatrix}$$

由此可得螺旋面的法线单位矢量

$$\mathbf{n}_\Sigma = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \phi} \right|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + [(f'(r))^2 + 1]r^2}} \begin{pmatrix} a \sin \phi - r f'(r) \cos \phi \\ -a \cos \phi - r f'(r) \sin \phi \\ r \end{pmatrix}$$

直接计算可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\Sigma \cdot \boldsymbol{\tau} &= 0, \quad \mathbf{n}_\Sigma \cdot \mathbf{n} = \frac{r_0 f'(r_0)}{\sqrt{a^2 + [(f'(r_0))^2 + 1]r_0^2}} = \cos \beta \\ \mathbf{n}_\Sigma \cdot \mathbf{b} &= \frac{\sqrt{a^2 + r_0^2}}{\sqrt{a^2 + [(f'(r_0))^2 + 1]r_0^2}} = \sin \beta \end{aligned}$$

在  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  的方向上分解运动方程，记  $\tan \alpha = \frac{a}{r_0}$ ，可以得到

$$\begin{cases} kN - mg \sin \alpha = ma_\tau & (8.13a) \\ N \cos \beta = m \frac{v^2}{\rho} & (8.13b) \\ N \sin \beta - mg \cos \alpha = 0 & (8.13c) \end{cases}$$

由式(8.13c)可有

$$N = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} mg$$

是常数值, 因此由(8.13b), 速度的大小  $v$  也是常数值, 故  $a_r = 0$ 。由此可得速度的大小为

$$v = \sqrt{\frac{\cos \alpha}{\tan \beta} \rho g} = \sqrt{gr_0 f'(r_0)}$$

由式(8.13a)可得质点沿螺旋线运动的条件为

$$\tan \alpha = \frac{k}{\sin \beta} = k \sqrt{\frac{a^2 + [(f'(r_0))^2 + 1] r_0^2}{a^2 + r_0^2}} = k \sqrt{1 + (f'(r_0))^2 \cos^2 \alpha}$$

题 8.2.16 (215 页 32.31) 质量为  $m$  的物体  $A$  可在水平直线上移动, 系有劲度系数为  $k$  的弹簧, 弹簧的另一端固定在点  $B$ 。当  $\alpha = \alpha_0$  时, 弹簧没有变形。求物体微振动频率和周期。

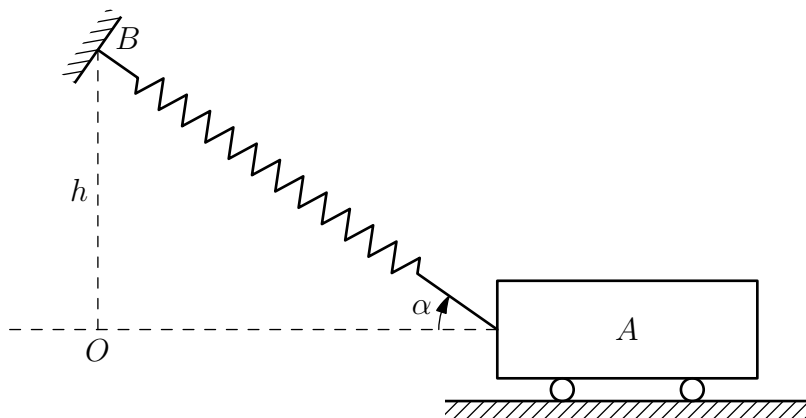


图 8.34: 题 8.2.16

解 体系的广义坐标为  $\alpha$ , 记  $B$  点的坐标为  $(0, h)$ , 则小车的坐标可以表示为

$$x_A = h \cot \alpha$$

由此, 体系的 Lagrange 函数可以表示为

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_A^2 - \frac{1}{2} k \left( \frac{h}{\sin \alpha} - \frac{h}{\sin \alpha_0} \right)^2 = \frac{mh^2}{2 \sin^4 \alpha} \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} k \left( \frac{h}{\sin \alpha} - \frac{h}{\sin \alpha_0} \right)^2$$

体系的平衡位置为  $\alpha = \alpha_0$ , 将 Lagrange 函数在该点附近展开至两阶, 可有

$$L = \frac{mh^2}{2 \sin^4 \alpha_0} \dot{\alpha}^2 - \frac{kh^2 \cos^2 \alpha_0}{2 \sin^4 \alpha_0} (\alpha - \alpha_0)^2$$

由此, 系统的运动方程为

$$\ddot{\alpha} + \frac{k \cos^2 \alpha_0}{m} (\alpha - \alpha_0) = 0$$

因此, 体系微振动的角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{k \cos^2 \alpha_0}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k \cos^2 \alpha_0}}$$

题 8.2.17 (216 页 32.34) 质量为  $m$  的重物  $M$  固定在杆上。杆在  $O$  点用铰链固连, 并用三根垂直弹簧与基础相连, 三个弹簧的劲度系数分别是  $k_1, k_2, k_3$ , 三弹簧在杆上的联结点 to 铰链的距离分别是  $a_1, a_2, a_3$ , 重物在杆上的联结点 to 铰链的距离是  $b$ 。杆平衡时沿水平方向。求重物微振动的频率。

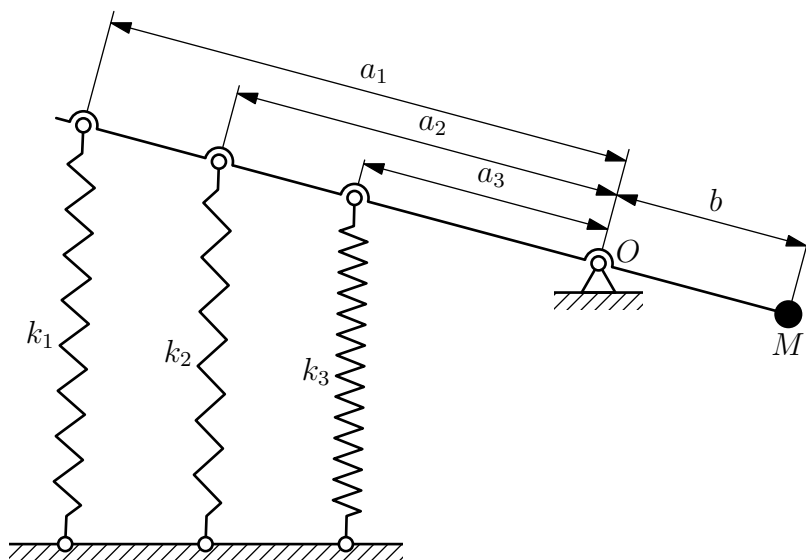


图 8.35: 题 8.2.17

解 体系的广义坐标为杆与水平方向的夹角  $\theta$ , 在此广义坐标下, 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(b\dot{\theta})^2 - \left( \frac{1}{2}k_1(a_1 \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(a_2 \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}k_3(a_3 \sin \theta)^2 \right)$$

保留到二阶小量的情形下, 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + k_3a_3^2)\theta^2$$

此时系统的运动方程为

$$\ddot{\theta} + \frac{k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + k_3a_3^2}{b^2}\theta = 0$$

因此重物微振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + k_3a_3^2}{mb^2}}$$

## 第八章 插图目录

## 第八章 参考文献

- [1] 金尚年, 马永利. 理论力学 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [2] 郎道, 栗弗席兹. 力学 (第五版). 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [3] 马尔契夫. 理论力学 (第三版). 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [4] 密歇尔斯基. 理论力学习题集 (第 50 版). 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [5] 郎道, 栗弗席兹. 场论 (第八版). 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [6] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程 (第八版). 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [7] 周培源. 理论力学. 北京: 科学出版社, 2015.