

# 《经典力学》讲义

徐晓华

整理：张大鹏<sup>①</sup>

Email:[13110290004@fudan.edu.cn](mailto:13110290004@fudan.edu.cn)

2017 年 4 月 19 日

<sup>①</sup> 有修改和删节。所有插图均为重新绘制。



# 目 录

第零章 引言	1	2.1.2 约束对质点系的限制 • 自由度	30
0.1 经典力学的发展	1	2.2 虚位移与广义坐标	32
0.2 经典力学的适用范围	1	2.2.1 实位移与虚位移 • 等时变分	32
第一章 Newton 力学	2	2.2.2 广义坐标与位形空间	34
1.1 正交曲线坐标系	2	2.2.3 广义速度、广义加速度与广义虚位移	36
1.1.1 直角坐标系	2	2.3 约束反力与理想约束	37
1.1.2 球坐标系	3	2.3.1 主动力与约束反力	37
1.1.3 柱坐标系	4	2.3.2 理想约束	37
1.1.4 一般正交曲线坐标系	5	2.4 微分变分原理	40
1.1.5 正交曲线坐标系中速度与加速度的表示	6	2.4.1 动力学普遍方程 • d’Alambert-Lagrange 原理	40
1.1.6 自然坐标系	7	2.4.2 Jordan 原理	41
1.2 Newton 运动定律	9	2.4.3 Gauss 原理	42
1.2.1 质点	9	2.5 分析静力学的虚功原理	44
1.2.2 Newton 运动定律	9	2.5.1 静力学普遍方程 • 虚功原理	44
1.2.3 基本相互作用	9	2.5.2 广义坐标下的静力学普遍方程 • 广义力	44
1.2.4 伽利略变换	9	2.5.3 完整系的平衡条件	44
1.3 运动定理与守恒定律	10	2.6 Lagrange 方程	46
1.3.1 质点系	10	2.6.1 广义坐标形式的动力学普遍方程	46
1.3.2 动量及其守恒定律	10	2.6.2 理想完整系的 Lagrange 方程	47
1.3.3 角动量及其守恒定律	11	2.6.3 系统动能的数学结构 • Lagrange 方程的确定性	48
1.3.4 能量及其守恒定律	12	2.6.4 有势系的 Lagrange 函数	50
1.3.5 质心参考系	15	2.6.5 完整有势系统的机械能	51
1.3.6 质心参考系的运动定理	15	2.6.6 陀螺力	52
1.4 变质量系统	25		
1.4.1 变质量系统的概念	25		
1.4.2 变质量系统的动量定理和角动量定理	25		
1.4.3 变质量质点的运动微分方程	26		
第二章 Lagrange 动力学	29		
2.1 约束	29		
2.1.1 约束及其分类	29		

2.6.7	广义势·广义势系统的 Lagrange 函数 . . . . .	53	3.4.4	Coulomb 势弹性散射 . . . . .	87
2.6.8	电磁场中带电粒子的 广义势 . . . . .	54	<b>第四章</b>	<b>微振动与阻尼运动</b>	90
2.7	求解系统的约束反力 . . . . .	55	4.1	微振动近似与求解 . . . . .	90
2.7.1	利用 Lagrange 乘子法 求解全部约束反力 . . . . .	55	4.2	多自由度微振动系统 . . . . .	93
2.7.2	利用 Lagrange 乘子法 求解部分约束反力 . . . . .	57	4.2.1	微振动近似 . . . . .	93
2.8	守恒定律 . . . . .	60	4.2.2	运动求解 . . . . .	94
2.8.1	广义动量及其守恒定律 . . . . .	60	4.2.3	简正坐标与简正振动 . . . . .	95
2.8.2	广义能量及其守恒定律 . . . . .	60	4.3	阻尼运动 . . . . .	97
2.8.3	Lagrange 函数和广义 能量的数学结构 . . . . .	61	4.3.1	阻尼的一般性质 . . . . .	97
2.8.4	自然系统与非自然系统 . . . . .	64	4.3.2	恒力作用下的阻尼直 线运动 . . . . .	98
2.9	时空对称性与守恒量 . . . . .	65	4.3.3	一维阻尼振动 . . . . .	98
2.9.1	时空对称性 . . . . .	65	4.3.4	耗散函数 . . . . .	101
2.9.2	动量、角动量与能量守恒 . . . . .	65	<b>第五章</b>	<b>刚体</b>	103
2.10	位形时空的 Lagrange 方程 . . . . .	68	5.1	刚体运动学 . . . . .	103
2.10.1	位形时空 . . . . .	68	5.1.1	刚体的自由度与运动 . . . . .	103
2.10.2	推广的 Lagrange 方程 . . . . .	68	5.1.2	定点运动的矩阵表示 . . . . .	104
<b>第三章</b>	<b>两体问题</b>	70	5.1.3	无限小定点运动的矢 量表示 . . . . .	105
3.1	两体问题约化与中心力场 . . . . .	70	5.1.4	刚体上各点的速度与 加速度 . . . . .	106
3.1.1	Lagrange 函数及其分 离变量 . . . . .	70	5.1.5	定轴转动 . . . . .	109
3.1.2	两体中心力场 . . . . .	71	5.1.6	刚体定点转动的 Euler 角·万向锁 . . . . .	110
3.2	等效势、运动解与轨道方程 . . . . .	72	5.1.7	四元数与三维空间旋转 . . . . .	114
3.2.1	运动方程 . . . . .	72	5.2	惯量矩阵 . . . . .	116
3.2.2	守恒定律 . . . . .	72	5.2.1	刚体定点转动的角动 量、动能与转动惯量 . . . . .	116
3.2.3	运动解 . . . . .	72	5.2.2	平行轴定理 . . . . .	117
3.2.4	轨道方程 . . . . .	73	5.2.3	会聚轴定理 . . . . .	117
3.2.5	圆轨道的存在性与稳 定性 . . . . .	74	5.2.4	惯量主轴与主轴系 . . . . .	118
3.3	距离反比势场与 Kepler 问题 . . . . .	76	5.2.5	主轴系的求法 . . . . .	119
3.3.1	轨道方程 . . . . .	77	5.2.6	惯量椭球 . . . . .	121
3.3.2	Laplace-Runge-Lenz 矢量 . . . . .	81	5.2.7	主惯量的性质 . . . . .	123
3.3.3	Kepler 行星运动定律 . . . . .	82	5.3	Euler 动力学方程 . . . . .	123
3.4	粒子弹性散射 . . . . .	83	5.3.1	刚体运动方程 . . . . .	123
3.4.1	弹性散射 . . . . .	83	5.3.2	Euler 动力学方程 . . . . .	125
3.4.2	质心系散射角 . . . . .	84	5.4	刚体的定轴转动 . . . . .	126
3.4.3	散射截面 . . . . .	85	5.4.1	运动方程与约束反力 . . . . .	126
			5.4.2	动约束反力等于静约 束反力的条件 . . . . .	128

5.5	刚体定点运动的 Euler 情形 . . .	129	6.5.3	Gauss 原理 . . . . .	171
5.5.1	运动方程与守恒量 . . .	129	6.5.4	撞击运动的 Lagrange 方程 . . . . .	174
5.5.2	Euler 情形下的永久转动	130			
5.5.3	Euler 情形下动力学对 称刚体的运动 . . . . .	130	第七章	非惯性系	178
5.5.4	Euler 情形下一般刚体 的运动 . . . . .	133	7.1	非惯性系的 Newton 第二定律	178
5.5.5	Poinsot 几何图像 . . .	140	7.1.1	不同参考系的速度、加 速度变换 . . . . .	178
5.6	重刚体的定点运动 . . . . .	141	7.1.2	非惯性系的运动方程 与惯性力 . . . . .	180
5.6.1	重刚体定点运动方程 及其守恒量 . . . . .	141	7.2	非惯性系的 Lagrange 动力学 .	180
5.6.2	陀螺 . . . . .	143	7.2.1	非惯性系质点运动的 Lagrange 函数 . . . . .	180
5.7	刚体定点运动的 Lagrange 情形	144	7.2.2	非惯性系质点运动的 Lagrange 方程 . . . . .	181
5.7.1	Lagrange 函数与运动 积分 . . . . .	144	7.3	地球自转的动力学效应 . . . .	185
5.7.2	Lagrange 情形下的运 动求解 . . . . .	146	7.3.1	重力加速度 $g$ 随纬度 $\lambda$ 的变化 . . . . .	185
5.7.3	Lagrange 情形下刚体 规则进动的条件 . . . .	149	7.3.2	落体偏东 . . . . .	186
5.8	重刚体沿水平面的运动 . . . .	153	7.3.3	地转偏向力 . . . . .	188
5.8.1	摩擦 . . . . .	153	7.3.4	Foucault (傅科) 摆 .	190
5.8.2	存在摩擦时均匀球在 平面上的运动 . . . . .	154	第八章	Hamilton 动力学	193
第六章	撞击运动理论	155	8.1	正则方程 . . . . .	193
6.1	撞击的基本概念 . . . . .	155	8.1.1	Legendre 变换 • Ha- milton 函数 . . . . .	193
6.2	撞击运动的动力学普遍方程 .	156	8.1.2	Hamilton 正则方程 . .	195
6.3	刚体的撞击运动 . . . . .	158	8.1.3	Hamilton 函数的物理 意义 • 广义能量积分 .	196
6.3.1	自由刚体的撞击 . . . .	158	8.1.4	正则方程的矩阵形式 .	197
6.3.2	定点运动刚体的撞击 .	159	8.1.5	Whittaker 方程与 Ja- cobi 方程 . . . . .	198
6.3.3	定轴转动刚体的撞击 .	160	8.1.6	数学摆和物理摆 • 单自 由度保守系统的运动 .	200
6.4	刚体碰撞 . . . . .	163	8.2	Routh 方程 . . . . .	204
6.4.1	恢复系数 . . . . .	163	8.2.1	Routh 函数 . . . . .	204
6.4.2	两个光滑刚体相撞的 一般问题 . . . . .	165	8.2.2	Routh 方程 . . . . .	204
6.4.3	光滑刚体碰撞的动能 变化 . . . . .	167	8.2.3	利用 Routh 方程对带 有循环坐标的系统降阶	205
6.4.4	两个光滑刚体的对心 正碰撞 . . . . .	167	8.3	非完整系统的运动方程 . . . .	209
6.5	撞击运动的微分变分原理 . . .	168	8.3.1	Lagrange 乘子法求解 线性非完整系统 . . . .	209
6.5.1	撞击运动的动力学普 遍方程 . . . . .	168	8.3.2	Appell 方程 . . . . .	212
6.5.2	Jordan 原理 . . . . .	171			

8.4 Poisson 括号 . . . . .	217	10.1.4 母函数 . . . . .	246
8.4.1 Poisson 括号的定义 . .	217	10.1.5 无穷小正则变换 . . . .	250
8.4.2 Poisson 括号的性质 . .	217	10.1.6 正则变换条件的辛表示	252
8.4.3 正则方程的 Poisson 括 号形式 . . . . .	218	10.1.7 正则变换的不变量 . .	255
8.4.4 Poisson 定理 • 系统的 可积性 . . . . .	219	10.2 Hamilton-Jacobi 方程 . . . .	256
8.4.5 量子 Poisson 括号 . . .	221	10.2.1 Hamilton-Jacobi 方程 .	257
第九章 积分变分原理 . . . . .	222	10.2.2 Hamilton 主函数 . . .	257
9.1 泛函与变分法 . . . . .	222	10.2.3 Hamilton-Jacobi 方程 的分离变量 . . . . .	259
9.1.1 泛函 . . . . .	222	10.2.4 利用 Hamilton-Jacobi 方程求解 Kepler 问题 .	264
9.1.2 泛函极值问题与变分法	222	10.3 作用-角变量 . . . . .	272
9.1.3 Euler-Lagrange 方程 .	224	10.3.1 单自由度系统的作 用-角变量 . . . . .	272
9.1.4 多元泛函极值问题 . .	227	10.3.2 单摆运动问题的作 用-角变量 . . . . .	274
9.1.5 约束条件下的变分问题	228	10.3.3 多自由度系统的作 用-角变量 . . . . .	277
9.2 Hamilton 原理 . . . . .	229	10.3.4 Kepler 问题中的作 用-角变量 . . . . .	278
9.2.1 理想完整系统的正路 和旁路 . . . . .	229	10.3.5 Delaunay 元素 . . . . .	280
9.2.2 Hamilton 原理 . . . . .	231	10.4 从“几何力学”到“波动力学”	281
9.2.3 有势系统的 Hamilton 原理 . . . . .	232	10.4.1 作用波与作用波面 . .	281
9.2.4 Hamilton 作用量的极 值性质 . . . . .	233	10.4.2 波动光学与几何光学 的关系 . . . . .	282
9.2.5 Lagrange 方程的规范 不定性与完整系统的 规范不变性 . . . . .	237	10.4.3 物质波假说与 Schrö- dinger 方程 . . . . .	283
9.2.6 相空间与 Hamilton 方程	238	10.5 Hamilton 理论在物理学中的 应用 . . . . .	284
9.2.7 位形时空与推广的 La- grange 方程 . . . . .	239	10.5.1 连续系统的 Lagrange 方程 . . . . .	284
9.3 Lagrange 原理 . . . . .	240	10.5.2 电磁场的 Lagrange 方程	288
9.3.1 一般形式的力学变分 原理 . . . . .	240	10.5.3 Schrödinger 方程的建立	288
9.3.2 等能变分与 Maupertuis- Lagrange 原理 . . . . .	241	附录 A 习题及解答 . . . . .	291
9.3.3 Jacobi-Lagrange 原理 .	243	A.1 课后习题解答 . . . . .	291
第十章 正则变换与 Hamilton-Jacobi 方 程 . . . . .	244	A.1.1 牛顿力学 . . . . .	291
10.1 正则变换 . . . . .	244	A.1.2 Lagrange 力学 . . . . .	295
10.1.1 点变换 . . . . .	244	A.1.3 两体问题 . . . . .	299
10.1.2 正则变换 . . . . .	245	A.1.4 多自由度微振动与阻尼	304
10.1.3 正则变换的条件 . . . .	245	A.1.5 刚体 . . . . .	308
		A.1.6 Hamilton 力学 . . . . .	310
		A.2 理论力学习题集 (部分) . . .	313

---

A.2.1 平面力系 . . . . .	313	圆函数 . . . . .	333
A.2.2 空间力系 . . . . .	322	B.1 Legendre 椭圆积分 . . . . .	333
A.2.3 点的运动学 . . . . .	324	B.2 Jacobi 椭圆函数 . . . . .	334
A.2.4 刚体的运动学 . . . . .	326		
A.2.5 质点动力学 . . . . .	329	插图目录 . . . . .	336
附录 B Legendre 椭圆积分与 Jacobi 椭圆函数 . . . . .		参考文献 . . . . .	337





## 第零章 引言

### 0.1 经典力学的发展

17 世纪由 Galileo 和 Newton 奠基。1687 年发表的《自然哲学之数学原理》标志着经典力学体系的建立，即 Newton 力学。

- 核心概念：质点、力、加速度；
- 基本原理：Newton 三大定律；
- 数学方法：三维实空间几何、矢量代数。

18 至 19 世纪，d'Alembert、Euler、Lagrange、Hamilton、Jacobi、Gauss、Poisson 等建立力学的后 Newton 形式——分析力学。

- 核心概念：能量、作用量；
- 基本原理：Hamilton 原理（最小作用量原理）；
- 数学方法：抽象空间、数学分析；
- Lagrange 形式：广义坐标的引入使力学具备描述其它非力学体系的潜力。
- Hamilton 形式或正则形式：力学体系内在对称性的揭示开始支配物理学思维，从而完成从力学到相对论和量子力学的升华。

分析力学给出了动量、角动量和能量的普适定义，使力学成为整个物理学的原型（量子力学、统计物理和量子场论的理论基石），为物理理论的统一奠定基础。

分析力学当代的发展结果：非线性物理与混沌、随机性、宿命论因果律破产。

### 0.2 经典力学的适用范围

宏观物体在弱引力场中的低速运动。

- 高速运动：狭义相对论
- 强引力场：广义相对论
- 微观体系：量子力学

# 第一章 Newton 力学

运动学，描述运动现象；动力学，揭示运动规律。

## 1.1 正交曲线坐标系

定量描述动点的运动必须选择作为基准的参考系，并在其上建立坐标系。

### 1.1.1 直角坐标系

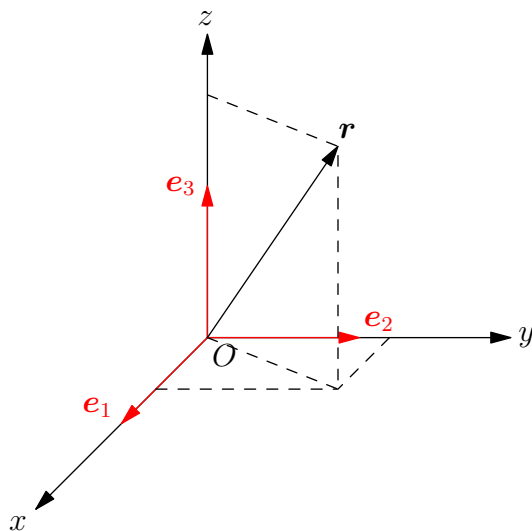


图 1.1: 直角坐标系

直角坐标系的基矢量是常矢量，即

$$de_{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

直角坐标系是正交坐标系，它的基矢量满足

$$e_{\alpha} \cdot e_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

直角坐标系是右手系，它的基矢量之间满足

$$e_{\alpha} \times e_{\beta} = \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma} \quad (1.3)$$

其中  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  为 Levi-Civita 反对称符号，它满足

$$\varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} \quad (1.4)$$

直角坐标系中的位矢可以表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (1.5)$$

位移元素为

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_1 + dy\mathbf{e}_2 + dz\mathbf{e}_3 \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

距离元素为

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (1.8)$$

## 1.1.2 球坐标系

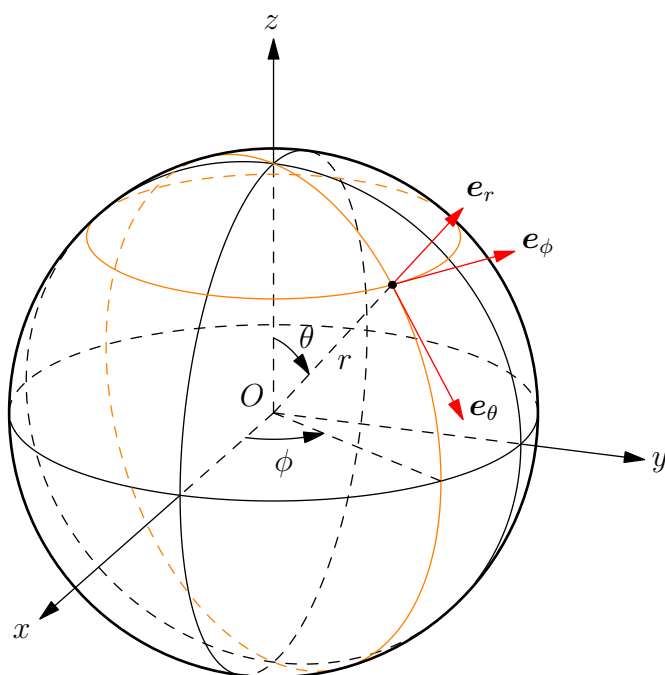


图 1.2: 球坐标系

球坐标  $(r, \theta, \phi)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的转换关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.9)$$

在此转换关系下，位矢可以表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}(r, \theta, \phi) \quad (1.10)$$

形如  $r = C_1$ 、 $\theta = C_2$  或  $\phi = C_3$  的曲面称为**坐标面**，而坐标面两两相交形成**坐标线**，在坐标在线只有一个坐标可变。取坐标线切线方向为坐标轴，正方向为相应坐标增大的方向。因此球坐标系的基矢量可以表示为

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}, \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \quad (1.11)$$

其中

$$\begin{cases} h_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1 \\ h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r \\ h_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = r \sin \theta \end{cases} \quad (1.12)$$

称为度规系数。球坐标系的基矢量可以具体计算如下：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) + \cos \theta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_\theta = \cos \theta (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) - \sin \theta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (1.13)$$

球坐标系为正交系，也是右手系。其位移元素和距离元素分别为

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\phi = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi \\ (ds)^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \end{aligned}$$

### 1.1.3 柱坐标系

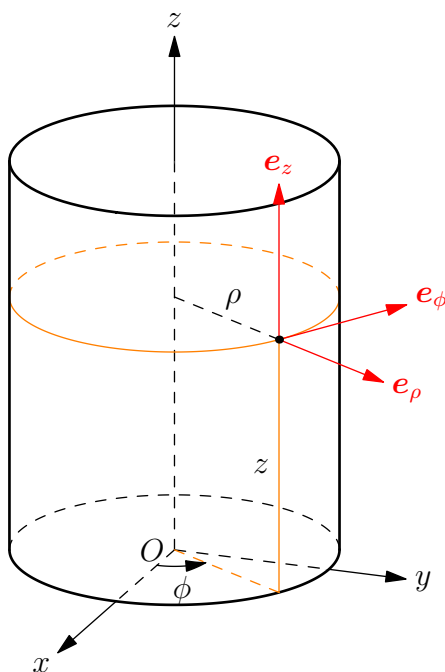


图 1.3: 柱坐标系

柱坐标  $(\rho, \phi, z)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的转换关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad (1.14)$$

在此转换关系下，位矢可以表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}(\rho, \phi, z) \quad (1.15)$$

柱坐标系的坐标面为  $\rho = C_1$ 、 $\phi = C_2$  和  $z = C_3$ 。柱坐标系的基矢量可以表示为

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}, \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}, \quad \mathbf{e}_z = \frac{1}{h_z} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \quad (1.16)$$

其中度规系数为

$$\begin{cases} h_\rho = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right| = 1 \\ h_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = \rho \\ h_z = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = 1 \end{cases} \quad (1.17)$$

柱坐标系的基矢量可以具体计算如下：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (1.18)$$

柱坐标系为正交系，也是右手系。其位移元素和距离元素分别为

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\phi \mathbf{e}_\phi + dz \mathbf{e}_z \quad (1.19)$$

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2 \quad (1.20)$$

### 1.1.4 一般正交曲线坐标系

设曲线坐标系的坐标为  $(q_1, q_2, q_3)$ ，其与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的转换关系为

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad (1.21)$$

在此转换关系下，位矢可以表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) \quad (1.22)$$

此曲线坐标系的单位基矢量可以表示为

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \quad (1.23)$$

其中度规系数表示为

$$h_\alpha = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \right| \quad (1.24)$$

而曲线坐标系的正交性要求

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.25)$$

由此，位移元素和距离元素分别为

$$d\mathbf{r} = h_1 \mathbf{e}_1 dq_1 + h_2 \mathbf{e}_2 dq_2 + h_3 \mathbf{e}_3 dq_3 \quad (1.26)$$

$$ds^2 = h_1^2 (dq_1)^2 + h_2^2 (dq_2)^2 + h_3^2 (dq_3)^2 \quad (1.27)$$

### 1.1.5 正交曲线坐标系中速度与加速度的表示

速度定义为  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$ , 因此在曲线坐标系中有

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.28)$$

记  $\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} =: \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , 以及

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 (h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha})^2 =: T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (1.29)$$

加速度  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$ , 在此曲线坐标系下可以分解为

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$$

加速度的分量为

$$a_{\alpha} = \frac{1}{h_{\alpha}} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] \quad (1.30)$$

式(1.30)称为 Lagrange 公式。为了证明式(1.30), 首先考虑

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \quad (1.31)$$

因此有

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\beta}} \frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \quad (1.32)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_{\beta}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \right) \dot{q}_{\beta} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\beta}} \right) \dot{q}_{\beta} = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\beta} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_{\alpha}} \quad (1.33)$$

根据式(1.32)和(1.33), 即有

$$\begin{aligned} h_{\alpha} a_{\alpha} &= \ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} \right) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_{\alpha}} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left( \frac{v^2}{2} \right) \end{aligned}$$

例 1.1 (球坐标系中的速度、加速度表示) 在球坐标中,  $h_r = 1, h_{\theta} = r, h_{\phi} = r \sin \theta$ , 因此

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + r \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_{\phi} \quad (1.34)$$

所以

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta$$

故加速度的各个分量为

$$\begin{cases} a_r = \frac{1}{h_r} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \end{cases} \quad (1.35a)$$

$$\begin{cases} a_{\theta} = \frac{1}{h_{\theta}} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (1.35b)$$

$$\begin{cases} a_{\phi} = \frac{1}{h_{\phi}} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \end{cases} \quad (1.35c)$$

例 1.2 (柱坐标系中的速度、加速度表示) 柱坐标中,  $h_\rho = 1, h_\phi = r, h_z = 1$ , 因此

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha \dot{q}_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z \quad (1.36)$$

所以

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

故加速度的各个分量为

$$\begin{cases} a_\rho = \frac{1}{h_\rho} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\rho}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \end{cases} \quad (1.37a)$$

$$\begin{cases} a_\phi = \frac{1}{h_\phi} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = \rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi} \end{cases} \quad (1.37b)$$

$$\begin{cases} a_z = \frac{1}{h_z} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = \ddot{z} \end{cases} \quad (1.37c)$$

## 1.1.6 自然坐标系

动点的轨道记作  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , 此处  $s$  为起点到当前位置的弧长。速度为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \dot{s} \boldsymbol{\tau} \quad (1.38)$$

式中  $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  为切矢量。弧长可以计算为

$$s(t) = \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(\tau) \right| d\tau \quad (1.39)$$

因此  $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ 。计算切矢量的长度

$$|\boldsymbol{\tau}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{1}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = 1$$

因此,  $\boldsymbol{\tau}(s)$  为单位切矢量。考虑到

$$\frac{d(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})}{ds} = 2 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

即有  $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \perp \boldsymbol{\tau}$ 。定义  $\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\tau}'(s)}{|\boldsymbol{\tau}'(s)|} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|}$  为主法向单位矢量, 其中  $\kappa(s) = |\boldsymbol{\tau}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)|$

为曲率, 其倒数  $R = \frac{1}{\kappa(s)}$  称为曲率半径, 主法向单位矢量也可记作

$$\mathbf{n} = R \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \quad (1.40)$$

定义  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$  为副法向单位矢量。

有了速度, 就可以计算加速度

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + v \dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + v \dot{s} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n} \quad (1.41)$$

其中切向加速度

$$a_\tau = \dot{v} \quad (1.42)$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1.43)$$

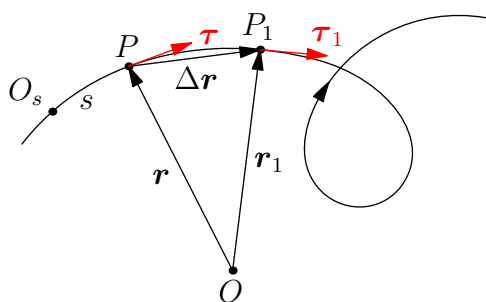


图 1.4: 动点的轨迹

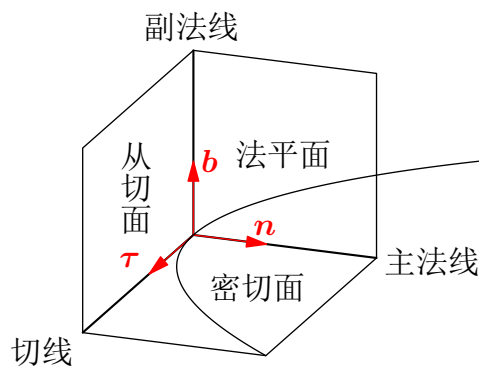


图 1.5: 切线、主法线和副法线

例 1.3 已知  $y = \frac{x^2}{2p}$ , 切向加速度与法向加速度之比为  $\frac{a_\tau}{a_n} = \alpha$ , 经过  $A$  点的速度为  $v_A = u$ , 求动点经过  $B$  点的速度  $v_B$ 。

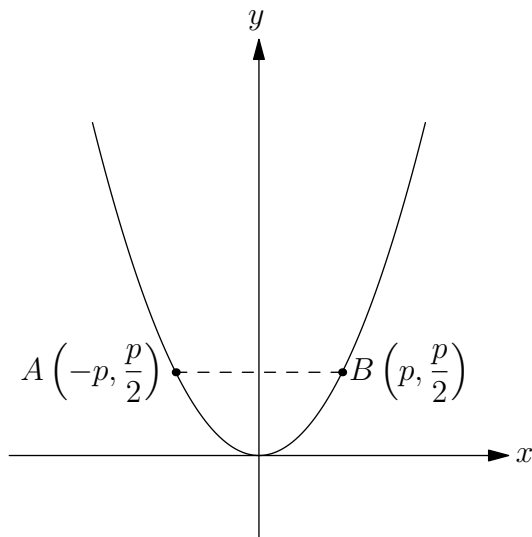


图 1.6: 例 1.3

解 切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

故有

$$\frac{a_\tau}{a_n} = \frac{R}{v} \frac{dv}{ds} = \frac{R}{v} \frac{dv}{dx} \frac{dx}{ds} = \alpha$$

其中

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

故有微分方程

$$\frac{dv}{v} = \frac{\alpha y'' dx}{1 + y'^2} = \frac{\alpha p}{p^2 + x^2} dx$$



对其进行积分，即有

$$\int_u^{v_B} \frac{dv}{v} = \int_{-p}^p \frac{\alpha p}{p^2 + x^2} dx$$

可得

$$\ln v \Big|_u^{v_B} = \alpha \arctan \frac{x}{p} \Big|_{-p}^p$$

所以

$$v_B = ue^{\frac{\alpha\pi}{2}}$$

## 1.2 Newton 运动定律

质点动力学的基本原理，实验事实通过理性思维后的抽象概括。

### 1.2.1 质点

质点是一个理想模型，忽略形状和大小，保留力学性质的物体。

适用条件：平动物体或物体体积远小于运动范围。

### 1.2.2 Newton 运动定律

- **Newton 第一定律：**不受外力作用的质点始终保持静止或匀速直线运动状态。  
建立了力和惯性的概念，指出静止与匀速直线运动等价。物理经验的极限外推：物体越孤立，越接近惯性运动。  
第一定律的实质：定义惯性系（第一定律成立的参考系），断言其存在。等价于孤立系的动量守恒定律。
- **Newton 第二定律：** $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 。通过加速度规定惯性和力的度量。Newton 第二定律是运动定律，而非单纯定义。Newton 第二定律只适用于惯性系，非惯性系必须引入虚拟的惯性力。
- **Newton 第三定律：**作用力与反作用力共线，大小相等，方向相反，即  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ 。  
适用条件：物体运动速度远低于相互作用传播速度。

### 1.2.3 基本相互作用

- **强力、弱力：**只在围观世界起作用。
- **引力、电磁力：**经典力学研究的作用力。

摩擦力、弹性力等是电磁力的宏观表现。

### 1.2.4 伽利略变换

伽利略变换可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t \\ t' = t \end{cases} \quad (1.44)$$

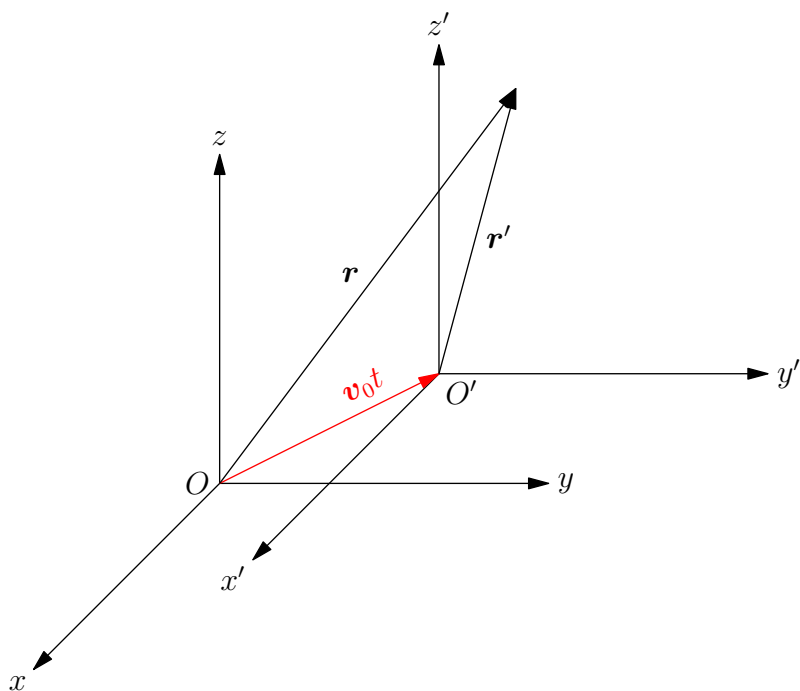


图 1.7: 伽利略变换

在此变换下, 可有

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a} \quad (1.45)$$

力决定于质点间的相对位矢, 故有  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ 。相对速度是伽利略变换下的不变量。

如果  $Oxyz$  参考系为惯性参考系, 即满足  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , 则  $O'x'y'z'$  也满足  $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$ , 因此也是惯性参考系。

上述说明中的隐含假定: 长度、时间和质量是伽利略变换下的不变量。

**伽利略相对性原理** 力学定理在所有惯性系中形式相同。一切惯性系等价, 无法通过力学实验区分哪个惯性系更基本。

相对性原理推广到一切物理现象将导致狭义相对论的诞生。

## 1.3 运动定理与守恒定律

### 1.3.1 质点系

质点系即指两个以上相互作用的质点组成的系统。在质点系中, **外力**指质点系外物体对质点系内任一质点的作用力, 记作  $\mathbf{F}_i$ 。**内力**指质点系内任意一对质点之间的相互作用力, 质点  $j$  对质点  $i$  的作用力记作  $\mathbf{f}_{ij}$ 。

### 1.3.2 动量及其守恒定律

质点的**动量**定义为

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (1.46)$$

根据 Newton 第二定律, 有

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.47)$$

或者

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt \quad (1.48)$$

式(1.47)或(1.48)表示的关系称为**动量定理**。

质点系的动量定义为各个质点动量之和, 即

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \quad (1.49)$$

则有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} \right)$$

式中

$$\sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} = \sum_{i=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n (\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}) = \mathbf{0}$$

因此可有质点系的动量定理

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{F}^{(e)} \quad (1.50)$$

即, 质点系总动量的时间变化率等于合外力。

如果质点系所受合外力为零, 则质点系的总动量保持不变。此即为**动量守恒定律**。即如有  $\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{0}$ , 根据质点系的动量定理, 有

$$\mathbf{F}^{(e)} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0}$$

即总动量  $\mathbf{p} = \text{常矢量}$ 。

如果质点系在某方向上合外力为零, 则质点系的总动量在该方向上的分量保持不变。即如果有常单位矢量  $\mathbf{e}$ , 满足  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}^{(e)} = 0$ , 则有

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{e} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})}{dt} = 0$$

即总动量在该方向上的分量  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{p} = \text{常数}$ 。

动量守恒定律在纯质点力学系统中由 Newton 第三定律保证。

### 1.3.3 角动量及其守恒定律

质点的**角动量**<sup>①</sup>定义为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.51)$$

**力矩**<sup>②</sup>定义为

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1.52)$$

则有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M} \quad (1.53)$$

<sup>①</sup> 此处为对原点的角动量。

<sup>②</sup> 此处为对原点的力矩。

或者

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M} dt \quad (1.54)$$

式(1.53)和式(1.54)表示的关系称为角动量定理。

质点系的角动量定义为各个质点角动量之和, 即

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i \quad (1.55)$$

则有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \left( \mathbf{F}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} \right)$$

式中

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} &= \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

此处利用了  $\mathbf{f}_{ij} \parallel \mathbf{r}_{ij}$ 。由此即有质点系的角动量定理

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}^{(e)} \quad (1.56)$$

即, 质点系的总角动量时间变化率等于合外力矩。

如果质点系所受合外力矩为零, 则质点系的总角动量保持不变。此即为角动量守恒定律。即如有  $\mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{0}$ , 根据质点系的角动量定理, 有

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}$$

即总角动量  $\mathbf{L} =$  常矢量。

如果质点系在某方向上合外力矩为零, 则质点系的总角动量在该方向上的分量保持不变。即如果有常单位矢量  $\mathbf{e}$ , 满足  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}^{(e)} = 0$ , 则有

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{e} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\mathbf{e} \cdot \mathbf{L})}{dt} = 0$$

即总角动量在该方向上的分量  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{L} =$  常数。

角动量守恒定律在纯质点力学系统中由 Newton 第三定律保证。

### 1.3.4 能量及其守恒定律

质点的动能定义为

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.57)$$

则有

$$\frac{dT}{dt} = m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (1.58)$$

或者

$$dT = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.59)$$

式(1.58)和式(1.59)表示的关系称为**动能定理**。

质点系的动能定义为各个质点动能之和, 即

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \quad (1.60)$$

则有

$$dT = \sum_{i=1}^n dT_i = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} \right) \cdot d\mathbf{r}_i$$

式中

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n (\mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{f}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} \end{aligned}$$

由此有质点系的动能定理

$$dT = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} \quad (1.61)$$

即, 质点系总动能增加量等于外力与内力的总功, 内力共决定于质点间的相对运动。

如果力  $\mathbf{F}$  可以写作某标量函数的梯度, 即

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (1.62)$$

则该力称为**保守力**。根据保守力的定义, 可有

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dV \quad (1.63)$$

所以

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r})$$

即, 保守力做功与路径无关。由此也可得

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.64)$$

即, 对任意闭合路径  $C$ , 保守力做功为零。

对于质点系, 如果外力是保守力, 即满足

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V_i(\mathbf{r}_i) \quad (1.65)$$

其中

$$\nabla_i = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y_i} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (1.66)$$

所以有

$$\mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -dV_i \quad (1.67)$$

定义质点系外势能为

$$V^{(e)} = \sum_{i=1}^n V_i \quad (1.68)$$

将有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = - \sum_{i=1}^n dV_i = -dV^{(e)} \quad (1.69)$$

即，保守外力总功等于外势能减少。

如果质点系的内力是保守力，即有

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ij} &= -\nabla_i V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \\ \mathbf{f}_{ji} &= -\nabla_j V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \end{aligned}$$

为一对保守内力，其中

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ij} &= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \\ \nabla_i &= \nabla_{ij} = -\nabla_j \end{aligned}$$

由此内力可以表示为

$$\mathbf{f}_{ij} = -\nabla_{ij} V_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$$

即有

$$\mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{f}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j = -dV_{ij} \quad (1.70)$$

定义质点系内势能为

$$V^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n V_{ij} \quad (1.71)$$

则有

$$\sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n dV_{ij} = -dV^{(i)} \quad (1.72)$$

即，保守内力总功等于内势能减少。

质点系的总势能定义为

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = V^{(e)} + V^{(i)} \quad (1.73)$$

则有

$$\begin{aligned} -\nabla_i V^{(e)} &= -\sum_{j=1}^n \nabla_i V_j = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \mathbf{F}_j = \mathbf{F}_i \\ -\nabla_i V^{(i)} &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1(j \neq k)}^n \nabla_i V_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1(j \neq k)}^n (\delta_{ij} \mathbf{f}_{jk} + \delta_{ik} \mathbf{f}_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1(k \neq i)}^n \mathbf{f}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} = \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} \end{aligned}$$

所以有

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{f}_{ij} = -\nabla_i V \quad (1.74)$$

当所有力都为保守力（或者非保守力不做功）时，将有

$$dT = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -dV^{(e)} - dV^{(i)} = -dV \quad (1.75)$$

定义总能量<sup>①</sup>为

$$E = T + V \quad (1.76)$$

则在所有力都为保守力（或者非保守力不做功）时，将有

$$dE = 0 \quad (1.77)$$

式(1.77)即为能量守恒定律。

### 1.3.5 质心参考系

质点系的质心定义为

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1.78)$$

质心的速度为

$$\mathbf{v}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{M} \quad (1.79)$$

加速度为

$$\mathbf{a}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i}{M} \quad (1.80)$$

显然质点系的总动量可以用质心速度表示为

$$\mathbf{p} = M \mathbf{v}_C$$

由此可有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = M \mathbf{a}_C = \mathbf{F}^{(e)} \quad (1.81)$$

式(1.81)表示的关系即为**质心运动定理**。即，质点系的整体运动可视为全部质量集中于质心的单质点运动。

质心运动定理是引进质点概念的动力学基础。

### 1.3.6 质心参考系的运动定理

以质心为原点，并随之平动的参考系称为**质心参考系**或**质心系**。一般为非惯性系。

在质心系中，各质点的位矢和速度为

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C \quad (1.82)$$

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C \quad (1.83)$$

即为各质点相对质心的运动（质点系的内部运动）。

<sup>①</sup> 此处仅指机械能。

## 1.3.6.1 质心系动量定理

在质心系中，总动量为

$$\mathbf{p}' = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C) = \mathbf{p} - M \mathbf{v}_C = \mathbf{0} \quad (1.84)$$

即，在质心系中质点系的总动量为零。

## 1.3.6.2 质心系角动量定理

在质心系中，质点系的总角动量

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \quad (1.85)$$

即为质点系的内秉角动量或自旋角动量。质心的角动量

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C \quad (1.86)$$

称为质点系的轨道角动量。在实验室参考系中的总角动量为

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i) \\ &= \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times \mathbf{p}' + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \end{aligned}$$

所以有

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + \mathbf{L}' \quad (1.87)$$

即，质点系的总角动量等于轨道角动量与内秉角动量之和。对于力矩，可有

$$\mathbf{M}^{(e)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{M}'^{(e)} \quad (1.88)$$

式中， $\mathbf{M}'^{(e)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$  表示外力对质心的力矩。考虑到轨道角动量  $\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C$ ，则有

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{v}_C \times M \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times M \mathbf{a}_C = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}^{(e)} \quad (1.89)$$

即，质点系的轨道角动量时间变化率等于外力集中于质心产生的合力矩。根据角动量定理  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(e)}$ ，以及  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + \mathbf{L}'$ ，可有

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'^{(e)} \quad (1.90)$$

即，质点系的内秉角动量时间变化率等于相对于质心的合外力矩。式(1.89)和式(1.90)表示的关系即为质心系角动量定理。



## 1.3.6.3 质心系动能定理

定义质点系整体运动动能为

$$T_C = \frac{1}{2} M v_C^2 \quad (1.91)$$

以及质点系内动能为

$$T' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad (1.92)$$

则有

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_i') = \frac{1}{2} M v_C^2 + \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{p}' + \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 \\ &= T_C + T' \end{aligned} \quad (1.93)$$

式(1.93)表示的关系称为 König (柯尼希) 定理。即, 质点系总动能等于整体运动动能与内动能之和。

根据整体运动动能的定义, 有

$$\frac{dT_C}{dt} = M \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{a}_C = \mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{v}_C \quad (1.94)$$

或者

$$dT_C = \mathbf{F}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_C \quad (1.95)$$

即, 质点系整体运动动能增量等于外力集中于质心做的总功。又考虑到相对位矢是伽利略变换的不变量, 即有

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i' - \mathbf{r}_j' = \mathbf{r}_{ij}'$$

可得

$$\begin{aligned} dT &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_C + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i' + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}' \\ &= \mathbf{F}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_C + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i' + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}' \end{aligned}$$

所以有

$$dT' = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i' + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}' \quad (1.96)$$

式(1.95)和式(1.96)表示的关系称为质心系动能定理。即, 质点系内动能增量等于外力与内力在质心系内做的总功。

如果内力均为保守力, 则有

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}' = -dV^{(i)}$$

式中  $V^{(i)}$  称为质点系内势能。定义质点系内能为

$$E' = T' + V^{(i)} \quad (1.97)$$

由式(1.3.6.3)和式(1.96)可得

$$dE' = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}'_i \quad (1.98)$$

即, 质点系内能增量等于外力在质心系内做的总功。

**例 1.4** 光滑水平面上有一质量为  $m$  的质点, 用一轻绳系着, 绳子完全绕在半径为  $R$  的圆柱上, 使质点贴在圆柱体的边缘上。  $t = 0$  时给质点以一径向速度  $v_0$ , 据此求任意时刻绳上的张力大小  $T(t)$ 。

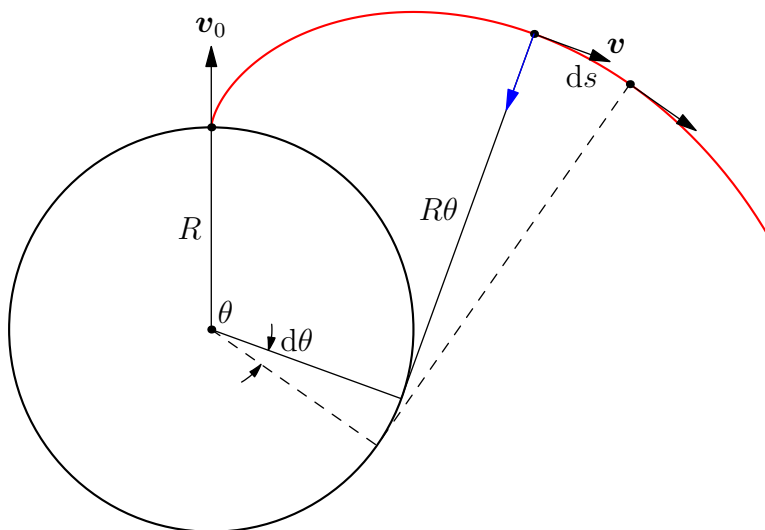


图 1.8: 例 1.4

**解** 由题意, 小球的轨道为圆的渐开线。即任意时刻绳子与圆相切, 绳子的不可伸长性要求质点速度正交于绳子。轨道的参数方程可以表示为

$$\mathbf{r}(\theta) = R \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{pmatrix} + R\theta \begin{pmatrix} \cos(\pi - \theta) \\ \sin(\pi - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin \theta - R\theta \cos \theta \\ R \cos \theta + R\theta \sin \theta \end{pmatrix}$$

在切线方向上有

$$m\dot{v} = F_\tau = 0$$

即有

$$v = v_0$$

在法线方向上有

$$m \frac{v^2}{\rho} = T$$

式中  $\rho$  为该点的曲率半径。根据轨道的方程可得

$$\rho = \left| \frac{[(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2]^{\frac{3}{2}}}{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)} \right| = R\theta$$

再考虑到

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} = \frac{v}{R\theta}$$

可得

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{2v_0 t}{R}}$$

因此有

$$T = m \frac{v^2}{\rho} = m \frac{v^2}{R\theta} = mv_0 \sqrt{\frac{v_0}{2Rt}}$$

例 1.5 (计入空气阻力的斜抛运动) 设空气阻力  $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ , 重力加速度为  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_2$ , 初始速度  $\mathbf{v}_0 = v_0(\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2)$ , 初始位矢  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ , 求物体的轨迹。

解 根据 Newton 第二定律, 可有矢量形式的微分方程

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} - k\mathbf{v}$$

整理可得

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} = \mathbf{g}$$

此处  $\tau = \frac{m}{k}$ 。首先解齐次方程

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} = \mathbf{0}$$

将其写成分量形式即为

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_x}{\tau} \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{v_y}{\tau} \end{cases}$$

其解为

$$\begin{cases} v_x = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v_y = C_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

或者写作矢量形式为

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

利用常数变易法, 令  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{C}(t) e^{-\frac{t}{\tau}}$ , 代入原方程, 可得

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{g} e^{\frac{t}{\tau}}$$

即有  $\mathbf{C}(t) = \mathbf{g}\tau e^{\frac{t}{\tau}} + \mathbf{C}_1$ , 因此

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{C}_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathbf{g}\tau$$

利用  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ , 可得

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathbf{g}\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

再对时间积分一次, 可得轨迹

$$\mathbf{r}(t) = -\mathbf{v}_0 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathbf{g}\tau(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}) + \mathbf{C}_2$$

利用  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ , 可得

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \mathbf{g}\tau \left[t - \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]$$

即

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \tau \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ y(t) = -g\tau t + \tau(v_0 \sin \alpha + g\tau) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{cases}$$

消去时间可以得到轨道方程

$$y = \left( \tau \alpha + \frac{g\tau}{v_0 \cos \alpha} \right) x g \tau^2 \ln \left( 1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right)$$

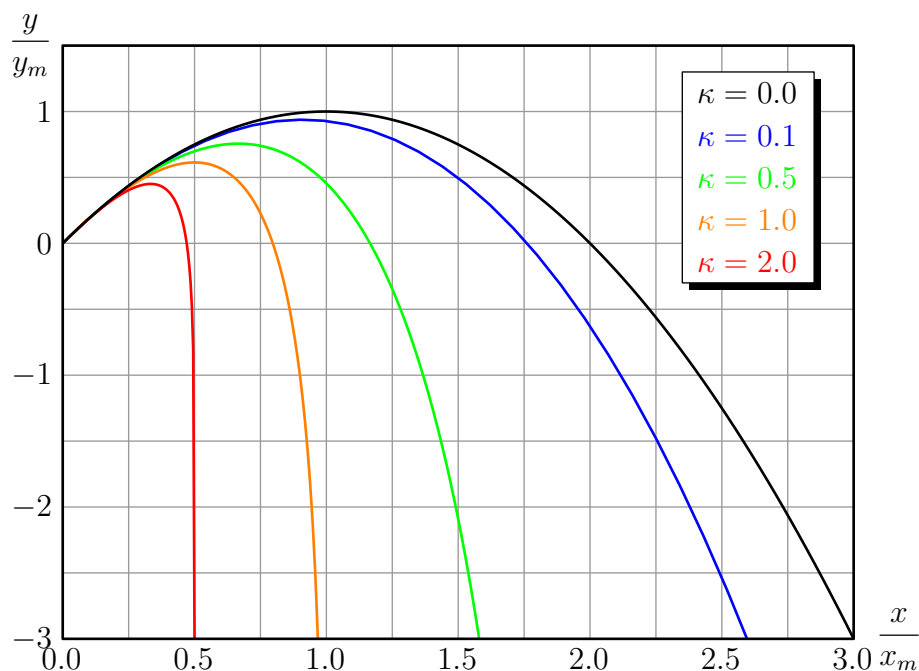


图 1.9: 不同阻尼系数下的轨道曲线图

考虑无阻尼极限  $k = 0$ , 即  $\tau = \frac{m}{k} \rightarrow +\infty$  的情况。根据当  $u \rightarrow 0$  时, 有

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$$

当  $\tau \rightarrow +\infty$  时, 轨道变为

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

由此, 令

$$\kappa = \frac{kv_0 \sin \alpha}{mg} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g\tau}, \quad x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

则在无阻尼的情形, 即  $\kappa = 0$  时, 轨道可以表示为

$$\frac{y}{y_m} = 2\frac{x}{x_m} - \left( \frac{x}{x_m} \right)^2$$

当  $\kappa \neq 0$  时, 轨道方程为

$$\frac{y}{y_m} = 2 \left( 1 + \frac{1}{\kappa} \right) \frac{x}{x_m} + \frac{2}{\kappa^2} \ln \left( 1 - \kappa \frac{x}{x_m} \right)$$

上式这种形式称为无量纲形式。不同阻尼系数  $\kappa$  下的轨道曲线如图1.9所示。由图可见阻力越大, 越早的接近竖直运动。

**例 1.6** 设有竖直圆环轨道上串有钢珠, 将钢珠置于  $\theta = 0$  处释放, 已知  $v|_{\theta=0} = v|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ , 求轨道与钢珠之间的摩擦系数  $\mu$ 。

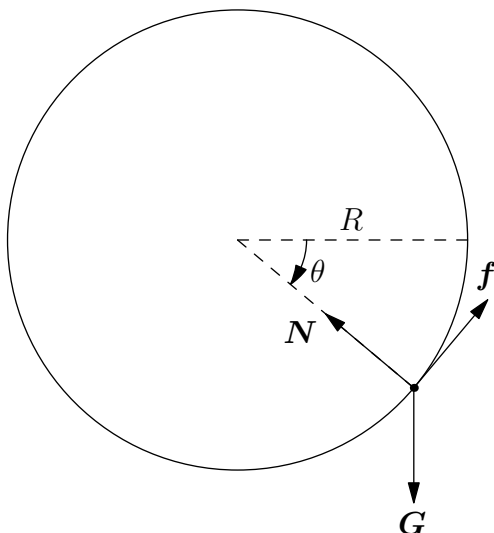


图 1.10: 例 1.6

解 速度和加速度为

$$v = R\dot{\theta}, \quad a_{\tau} = R\ddot{\theta}, \quad a_n = R\dot{\theta}^2$$

根据 Newton 第二定律以及摩擦力的关系, 可有方程组

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = mg \cos \theta - f \\ mR\dot{\theta}^2 = N - mg \sin \theta \\ f = \mu N \end{cases}$$

从中消去  $N$ , 可得

$$R(\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta}^2) = g(\cos \theta - \mu \sin \theta)$$

再考虑到

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$$

可有

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + 2\mu\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(\cos \theta - \mu \sin \theta)$$

可用常数变易法解此微分方程, 得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{(1+4\mu^2)R} [(1-2\mu^2) \sin \theta + 3\mu \cos \theta] + Ce^{-2\mu\theta}$$

再考虑到  $\dot{\theta}|_{\theta=0} = 0$ , 可得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{(1+4\mu^2)R} [(1-2\mu^2) \sin \theta + 3\mu(\cos \theta - e^{-2\mu\theta})]$$

最后利用  $\dot{\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ , 可得  $\mu$  满足的方程为

$$1 - 2\mu^2 - 3\mu e^{-\mu\pi} = 0$$

整理为

$$\mu = \sqrt{\frac{1 - 3\mu e^{-\mu\pi}}{2}} =: f(\mu)$$

即  $\mu$  为函数  $f(\mu)$  的不动点。求此不动点可用压缩映射定理证明中的迭代法，即  $\mu^{(n+1)} = f(\mu^{(n)})$  来求解。具体如下

$$\begin{aligned}\mu^{(0)} &= 0.000 \\ \mu^{(1)} &= f(\mu^{(0)}) = 0.707\dots \\ \mu^{(2)} &= f(\mu^{(1)}) = 0.620\dots \\ \mu^{(3)} &= f(\mu^{(2)}) = 0.606\dots \\ &\vdots \\ \mu &\doteq 0.603\end{aligned}$$

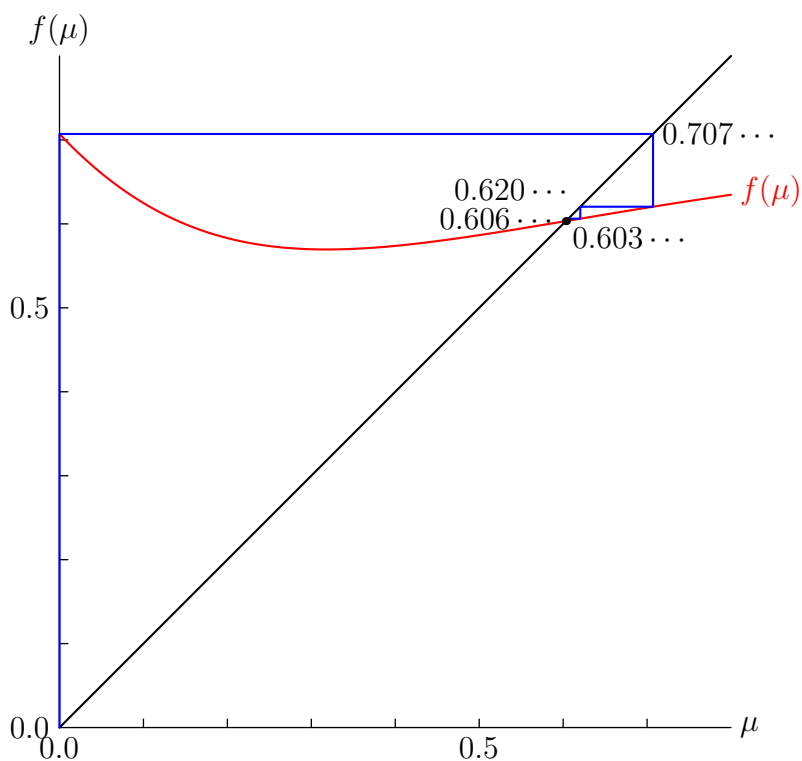


图 1.11: 求解示意

**例 1.7** 在铅直平面内有一光滑的半圆形管道（如图1.12所示），半径为  $R$ ，管道内有一长为  $\pi R$ ，质量线密度为  $\rho$  的均匀链条。假定链条由于轻微扰动而从管口向外滑出，试用角动量定理求出链条位于任意角度  $\theta$  时的速度  $v$ 。

**解** 由于链条不可伸长，因此其各点速度相等，即

$$v = R\dot{\theta}$$

由此可得链条的角动量

$$\mathbf{L} = \int_C \mathbf{r} \times \mathbf{v} dl = \rho\pi R(R\dot{\theta}\mathbf{e}) = \rho\pi R^3\dot{\theta}\mathbf{e}$$

式中  $\mathbf{e}$  为垂直纸面向里的单位矢量。

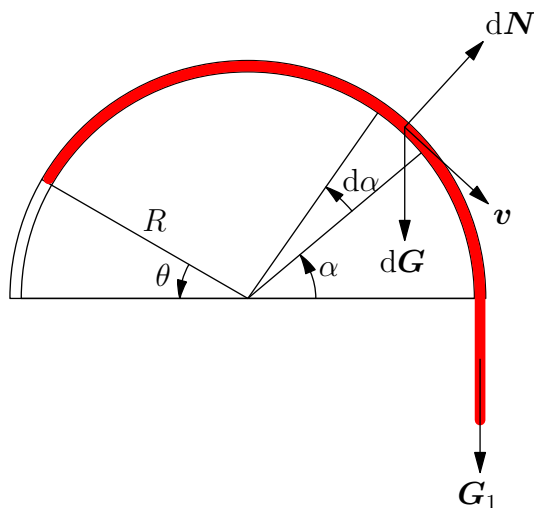


图 1.12: 例 1.7

由于  $\mathbf{r} \times d\mathbf{N} = \mathbf{0}$ , 故只需计算重力力矩。对于直线段, 可有

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r} \times \mathbf{G}_1 = (\rho R \theta) R g \mathbf{e} = \rho g R^2 \theta \mathbf{e}$$

对于圆弧段, 可有

$$\mathbf{M}_2 = \int_C \mathbf{r} \times \rho g d\mathbf{l} = \int_0^{\pi-\theta} R g \cos \alpha \rho R d\alpha \mathbf{e} = \rho g R^2 \sin \theta \mathbf{e}$$

由此可得总力矩为

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \rho g R^2 (\theta + \sin \theta) \mathbf{e}$$

根据角动量定理  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$ , 可得

$$\rho \pi R^3 \ddot{\theta} = \rho g R^2 (\theta + \sin \theta)$$

根据

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$$

可得

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \frac{2g}{\pi R} (\theta + \sin \theta)$$

积分即可得到

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{\pi R} \left( \frac{1}{2} \theta^2 - \cos \theta + 1 \right)} = 2 \sqrt{\frac{g}{\pi R} \left[ \left( \frac{\theta}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}$$

所以速度为

$$v = R \dot{\theta} = 2 \sqrt{\frac{Rg}{\pi} \left[ \left( \frac{\theta}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}$$

本体也可使用机械能守恒来求解。此系统中, 非保守力 (弹力) 不做功, 因此系统机械能守恒。在初始状态下, 链条的动能

$$T = 0$$

以半圆柱的底面为零势能面，可求得初始状态下链条的重力势能为

$$V = \int_C \rho g h dl = \int_0^\pi \rho g R \sin \alpha R d\alpha = 2\rho g R^2$$

在图1.12所示的状态下，由于链条上各处速度大小相等，故链条的动能为

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho\pi Rv^2$$

直线段的重力势能为

$$V_1 = \rho R \theta g \cdot \left(-\frac{1}{2}R\theta\right) = -\frac{1}{2}\rho g R^2 \theta^2$$

曲线段的重力势能为

$$V_2 = \int_C \rho g h dl = \int_0^{\pi-\theta} \rho g R \sin \alpha R d\alpha = \rho g R^2 (\cos \theta + 1)$$

根据机械能守恒可得

$$2\rho g R^2 = \frac{1}{2}\rho\pi Rv^2 - \frac{1}{2}\rho g R^2 \theta^2 + \rho g R^2 (\cos \theta + 1)$$

由此同样可以解得链条处于任意角度处的速度为

$$v = 2\sqrt{\frac{Rg}{\pi} \left[ \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}$$

**例 1.8** 质量为  $m$  的质点沿一半球形光滑碗的内侧以初速度  $v_0$  沿水平方向运动，碗的内半径为  $r$ ，初位置离碗边缘的高度为  $h$ 。求质点上升到碗口而又不至于飞出碗外时  $v_0$  和  $h$  应满足的关系式。

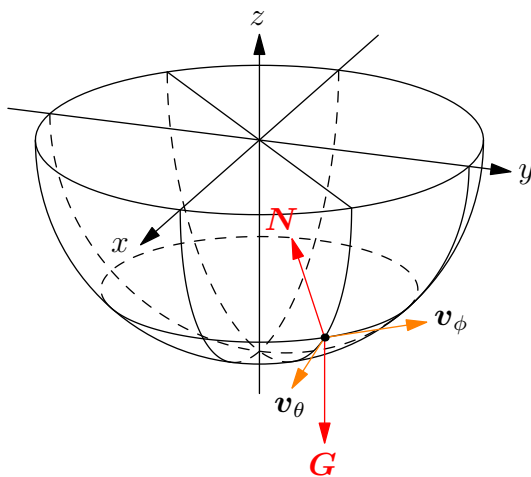


图 1.13: 例 1.8

**解** 建立球坐标系，考虑到  $v_r = \dot{r} = 0$ ，则

$$\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi$$

弹力沿径向，故  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = 0$ ，即系统中只有重力做功，机械能守恒。

而  $\mathbf{r} \times \mathbf{N} = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{e}_3 \cdot [\mathbf{r} \times (-mg\mathbf{e}_3)] = 0$ ，故  $z$  方向力矩为零，即  $z$  方向角动量守恒。计算  $z$  方向的角动量

$$L_z = \mathbf{e}_3 \cdot [\mathbf{r} \times m(v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi)] = mr\mathbf{e}_3 \cdot (v_\theta \mathbf{e}_\phi - v_\phi \mathbf{e}_\theta) = mr \sin \theta v_\phi$$



考虑到  $\mathbf{v}|_{z=-h} = v_0 \mathbf{e}_\phi$ , 可以列出守恒方程

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m(v_\theta^2 + v_\phi^2) + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh \\ mv_\phi\sqrt{r^2 - z^2} = mv_0\sqrt{r^2 - h^2} \end{cases}$$

将末状态取为  $z = 0$  时, 此时  $v_\theta|_{z=0} = 0$ , 可有

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_\phi^2|_{z=0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh \\ mrv_\phi|_{z=0} = mv_0\sqrt{r^2 - h^2} \end{cases}$$

由此, 可解出

$$v_0 = r\sqrt{\frac{2g}{h}}$$

即为  $v_0$  和  $h$  应满足的关系。

## 1.4 变质量系统

### 1.4.1 变质量系统的概念

如果系统的质量或者组成系统的质点其中之一, 或者两者同时随时间变化, 这个系统就称为变质量系统。

在自然现象中, 变质量系统很常见。例如浮冰由于融化而减少质量, 又由于结冰或者落雪而增加质量。在工程技术中, 最常提到的变质量系统就是火箭了。

对于变质量系统的研究, 总是做这样的假设: 系统分离或并入的质量是小量, 而且每次并入或分离质量的时间间隔是小量。在这样的假设下, 离开系统和进入系统的质量都是时间的连续可微的函数。

如果将系统的质量记作  $M(t)$ , 将  $t = 0$  时的质量记作  $M_0$ , 则它随时间的变化规律为

$$M(t) = M_0 - M_1(t) + M_2(t) \quad (1.99)$$

其中  $M_1(t)$  表示累计离开系统的质量, 而  $M_2(t)$  表示累计进入系统的质量,  $M_1, M_2$  都是随时间的非递减的非负连续可微函数。

### 1.4.2 变质量系统的动量定理和角动量定理

设某个质点系相对惯性参考系  $Oxyz$  运动, 研究相对  $Oxyz$  运动和变形的封闭曲面  $S$ 。系统内的各个质点按照各自的运动可以进入或者离开曲面  $S$  围成的空间区域, 那么曲面  $S$  围成的质点即组成一个变质量系统, 将其动量用  $\mathbf{p}$  表示。

设在时刻  $t = t'$ , 系统的动量为  $\mathbf{p}$ 。而在  $t = t'' = t' + \Delta t$  的时刻, 系统的动量记作  $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$ 。显然有

$$\Delta\mathbf{p} = \Delta\mathbf{p}^* - \Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 \quad (1.100)$$

其中,  $\Delta\mathbf{p}_1$  为在  $\Delta t$  时间内离开变质量系统的所有质点带走的动量,  $\Delta\mathbf{p}_2$  为在这段时间内进入系统的所有质点带来的动量, 而  $\Delta\mathbf{p}^*$  则表示在这段时间内一直在系统内的所有质点本身的动量改变。

设  $\mathbf{F}^{(e)}$  是  $t'$  时刻作用在系统上的合外力, 那么根据动量定理可得

$$\frac{d\mathbf{p}^*}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} \quad (1.101)$$

在式(1.100)两端除以  $\Delta t$  并取  $\Delta t \rightarrow 0$  的极限可得

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(\text{ex})} \quad (1.102)$$

其中  $\mathbf{F}^{(\text{ex})} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , 而

$$\mathbf{F}_1 = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{\Delta t}, \quad \mathbf{F}_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{\Delta t} \quad (1.103)$$

矢量  $\mathbf{F}_1$  和  $\mathbf{F}_2$  具有力的量纲, 称为**反推力**。反推力  $\mathbf{F}_1$  是由质点分离引起的, 反推力  $\mathbf{F}_2$  是由质点并入引起的。

设惯性参考系  $Oxyz$  中的固定参考点为  $A$ , 则类似前面的讨论可得变质量系统的角动量定理

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \mathbf{M}_A^{(e)} + \mathbf{M}_A^{(\text{ex})} \quad (1.104)$$

其中  $\mathbf{L}_A$  为系统对  $A$  点的角动量,  $\mathbf{M}_A^{(e)}$  为系统受到的对  $A$  点的合外力矩, 而  $\mathbf{M}_A^{(\text{ex})} = \mathbf{M}_{A1} + \mathbf{M}_{A2}$  是变质量系统的附加力矩, 其中

$$\mathbf{M}_{A1} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{L}_{A1}}{\Delta t}, \quad \mathbf{M}_{A2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{L}_{A2}}{\Delta t} \quad (1.105)$$

这里的  $\Delta \mathbf{L}_{A1}$  为在  $\Delta t$  时间内离开变质量系统的所有质点的角动量,  $\Delta \mathbf{L}_{A2}$  为在这段时间内进入系统的所有质点的角动量。

### 1.4.3 变质量质点的运动微分方程

作为变质量系统的一种特殊情况, 现在来考虑变质量质点的运动微分方程。其质量变化同样满足式(1.99), 即

$$M(t) = M_0 - M_1(t) + M_2(t) \quad (1.106)$$

如果记  $\mathbf{u}_1$  为  $t'$  时刻离开变质量质点的微粒的速度,  $\mathbf{u}_2$  为  $t'$  时刻并入质点的微粒的速度, 那么精确到  $\Delta t$  和  $\Delta M$  的一阶小量, 可有

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \Delta M_1 \mathbf{u}_1, \quad \Delta \mathbf{p}_2 = \Delta M_2 \mathbf{u}_2 \quad (1.107)$$

由此可得

$$\mathbf{F}_1 = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{\Delta t} = - \frac{dM_1}{dt} \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{F}_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{\Delta t} = \frac{dM_2}{dt} \mathbf{u}_2 \quad (1.108)$$

设  $\mathbf{v}$  为变质量质点的速度, 则其动量为

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v} \quad (1.109)$$

则有

$$\frac{dM}{dt} \mathbf{v} + M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} - \frac{dM_1}{dt} \mathbf{u}_1 + \frac{dM_2}{dt} \mathbf{u}_2 \quad (1.110)$$

将式(1.106)代入方程(1.110)中可得

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} - \frac{dM_1}{dt} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}) + \frac{dM_2}{dt} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}) \quad (1.111)$$

方程(1.111)即为变质量质点的运动微分方程,称为**广义 Meshcherskii 方程**<sup>①</sup>。在方程(1.111)中,  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v} = \mathbf{u}_{1r}$  是分离微粒相对质点的速度, 而  $\mathbf{u}_2 - \mathbf{v} = \mathbf{u}_{2r}$  是并入微粒相对质点的速度。

如果只有分离微粒而没有并入微粒, 此时  $M_2(t) \equiv 0$ , 此时方程(1.111)变为

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} + \frac{dM}{dt} \mathbf{u}_{1r} \quad (1.112)$$

方程(1.112)称为 **Meshcherskii 方程**。由 Meshcherskii 方程(1.112)可以看出, 微粒分离等效于在质点上作用附加的反推力  $\mathbf{F}_1 = \frac{dM}{dt} \mathbf{u}_{1r}$ 。

**例 1.9 (重力场中的火箭)** 在假设火箭竖直运动且喷气速度恒定, 其所受外力只有恒定重力  $\mathbf{F}^{(e)} = -Mg\mathbf{e}_3$  的情况下求解火箭的运动。

**解** 相对火箭的喷气速度

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = -u_r \mathbf{e}_3$$

此时火箭的运动方程即为 Meshcherskii 方程(1.112)

$$M \frac{dv}{dt} = -Mg - \frac{dM}{dt} u_r$$

化简为

$$dv = -gdt - u_r \frac{dM}{M}$$

直接积分, 即可得末速度

$$v_f = v_i + v_r \ln \frac{M_i}{M_f} - gt_f = v_i + v_r \ln \left( 1 + \frac{|\Delta M|}{M_f} \right) - gt_f$$

提高火箭末速度的方法:

- 提高喷气速度;
- 用级连法提高燃料所占质量比;
- 提高燃烧速度, 减少加速时间。

**例 1.10** 一轻绳跨过定滑轮的两端, 一端挂着质量为  $m$  的重物, 另一端和线密度为  $\rho$  的软链相连。开始时软链全部静止在地上, 重物亦静止, 后来重物下降, 并将软链向上提起。问软链最后可提起多高?

**解** 地面上的软链在被提起时的速度为  $u = 0$ , 根据变质量系统的运动微分方程(1.112)即有

$$\rho x \ddot{x} + \rho \dot{x} \dot{x} = T - \rho g x$$

对左端物体有

$$M \ddot{X} = Mg - T$$

约束为

$$\dot{X} = \dot{x}$$

消去无关变量即有

$$\rho x \ddot{x} + \rho \dot{x} \dot{x} + M \ddot{x} = Mg - \rho g x$$

可化为

$$\frac{d}{dt} [(M + \rho x) \dot{x}] = (M - \rho x) g$$

<sup>①</sup> Meshcherskii, 密歇尔斯基, 前苏联力学家。

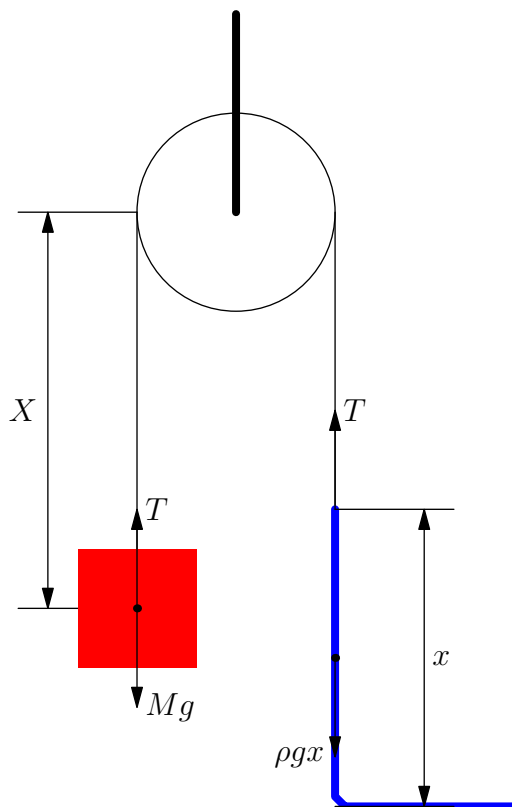


图 1.14: 例 1.10

即

$$\dot{x} \frac{d}{dx} [(M + \rho x) \dot{x}] = (M - \rho x)g$$

因此

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [(M + \rho x) \dot{x}]^2 = (M - \rho x)(M + \rho x)g$$

积分, 并考虑到  $\dot{x}|_{x=0} = 0$ , 即得

$$\frac{1}{2} [(M + \rho x) \dot{x}]^2 = \left( M^2 - \frac{1}{3} \rho^2 x^2 \right) gx$$

当软链升到最高时, 有  $\dot{x}|_{t=t_{max}} = 0$ , 即有

$$\left( M^2 - \frac{1}{3} \rho^2 x_{max}^2 \right) gx_{max} = 0$$

由此得最大高度

$$x_{max} = \frac{\sqrt{3}M}{\rho}$$

## 第二章 Lagrange 动力学

### 2.1 约束

#### 2.1.1 约束及其分类

在质点系的运动过程中，各质点的位置和速度受到的限制称为**约束**。如果系统不受约束，则称系统是**自由的**或者为**自由系统**，相应地，如果系统受到一个或更多约束的作用，则称系统是**非自由的**。

如果系统中各质点的位矢为  $\mathbf{r}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，那么各质点的速度可以表示为  $\dot{\mathbf{r}} (i = 1, 2, \dots, n)$ ，约束可以用方程表示为

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) = 0 \quad (2.1)$$

或者

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) \geq 0 \quad (2.2)$$

类似式(2.1)只有等号成立的约束称为**双面约束**，而类似式(2.2)等号和不等号都可以成立的约束称为**单面约束**。

约束可以按其是否与质点的速度有关而分为以下两类：

1. **几何约束**：约束与速度无关，仅对几何位形加以限制。即

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 \quad (2.3)$$

一个几何约束减少一个独立坐标与一个独立速度分量。例如，单摆（如图2.1所示）的约束可以表示为

$$|\mathbf{r}|^2 - l^2 = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

2. **运动约束**：约束与速度有关，同时对系统的几何位形和运动情况加以限制。运动约束条件不减少独立坐标个数，但每个运动约束减少一个独立速度分量。例如，作曲线运动的纯滚动直立圆盘（如图2.2所示）的约束可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} - R\dot{\theta} \cos \phi = 0 \\ \dot{y} - R\dot{\theta} \sin \phi = 0 \end{cases}$$

圆盘可由任一指定初位形出发，到达任一指定末位形。但如果圆盘作直线运动，此时  $\phi = \phi_0$  (常数)，则运动约束可积<sup>①</sup>（此时即称为**可积运动约束**），即

$$\begin{cases} x - R\theta \cos \phi_0 + C_1 = 0 \\ y - R\theta \sin \phi_0 + C_2 = 0 \end{cases}$$

<sup>①</sup> 在求解运动前。

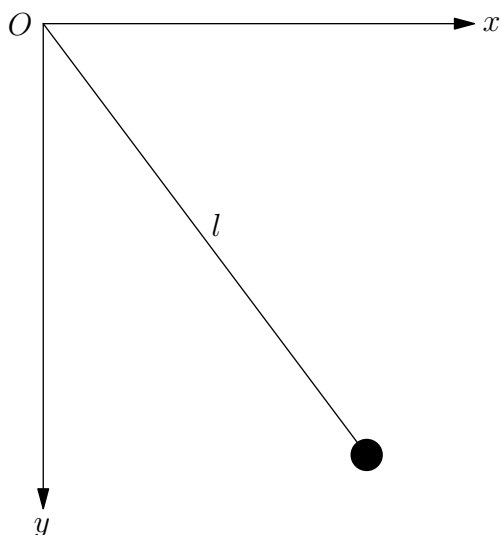


图 2.1: 单摆的几何约束

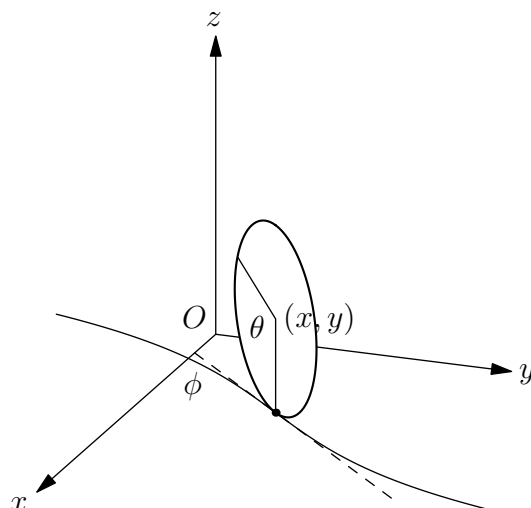


图 2.2: 作曲线运动的纯滚动直立圆盘

可积运动约束实质上等价于几何约束。

几何约束与可积运动约束称为**完整约束**，一个完整约束方程同时减少一个独立坐标与一个独立速度分量。不可积运动约束则称为**非完整约束**，一个非完整约束方程只减少一个独立速度分量。如果一个系统的所有约束皆为完整约束，则该系统称为**完整系统**，否则称为**非完整系统**。

根据前面对约束的分类，今后在研究质点系的运动时，我们只考虑完整系统，或者具有线性非完整约束的非完整系统。即系统的约束为

$$\begin{cases} f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 & (j = 1, 2, \dots, k) \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) \cdot \mathbf{v}_i + A_{j0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 & (j = 1, 2, \dots, k') \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.4a) \\ (2.4b) \end{matrix}$$

其中  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ ，在特殊情况下  $k$  和  $k'$  可以等于零。

如果在完整约束(2.4a)中不显含时间  $t$ ，则该完整约束称为**定常的**或**稳定的**。如果在非完整约束(2.4b)中矢量函数  $\mathbf{A}_{ji}$  不显含时间  $t$ ，且标量函数  $A_{j0}$  恒等于零，则该非完整约束称为**定常的**或**稳定的**。如果一个系统是自由的或者所有约束都是定常约束，则该系统称为**定常系统**，如果至少有一个约束是非定常的，则称为**非定常系统**。

### 2.1.2 约束对质点系的限制 · 自由度

非自由系统的质点不能在空间中任意运动，约束允许的位矢、速度和加速度应该满足约束方程(2.4a)和(2.4b)，或者它们的导出形式。

设给定某个时刻  $t = t^*$ ，如果该时刻内系统内各质点的位矢  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^*$  满足完整约束(2.4a)，则称在该给定时刻系统处于**可能位形**。

约束同样限制了系统中质点的速度。将式(2.4a)两端对时间求导, 可得<sup>①</sup>

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (2.5)$$

当然速度还需满足非完整约束(2.4b), 即

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i + A_{j0} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k') \quad (2.6)$$

当系统处于给定时刻的可能位形时, 满足线性方程组(2.5)、(2.6)的矢量  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^*$  集合称为该时刻的**可能速度**。

约束也将限制系统中质点的加速度, 将式(2.5)和(2.6)分别对时间求导, 可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{a}_i + \sum_{i,l=1}^n \left( \frac{\partial^2 f_j}{\partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{r}_l} \cdot \mathbf{v}_l \right) \cdot \mathbf{v}_i + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_j}{\partial \mathbf{r}_i \partial t} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (2.7)$$

和

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \mathbf{a}_i + \sum_{i,l=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{A}_{ji}}{\partial \mathbf{r}_l} \cdot \mathbf{v}_l \right) \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{j0}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{\partial A_{j0}}{\partial t} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k') \quad (2.8)$$

当系统处于给定时刻的可能位形并且具有可能速度时, 满足线性方程组(2.7)、(2.8)的矢量  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i^*$  集合称为该时刻的**可能加速度**。

由于可能速度和可能加速度分别需要满足线性方程组(2.5)、(2.6)和方程组(2.7)、(2.8), 每个方程组中都有  $k + k'$  个方程, 因此整数  $3n - k - k'$  应该是一个正数, 否则约束的限制过强, 将使得系统不可能运动或者只能按照约束给定的规律运动。这个正数, 记作  $f = 3n - k - k'$ , 称为系统的**自由度**。

由此可以看出, 确定系统可能速度和可能加速度的方程数 ( $k + k'$  个) 小于它们的分量数 ( $3n$  个), 因此在给定时刻系统将存在无穷多组满足约束的可能速度  $\mathbf{v}_i^*$  和可能加速度  $\mathbf{a}_i^*$ 。

设在给定时刻  $t = t^*$  系统处于可能位形  $\mathbf{r}_i^*$ , 并且具有可能速度  $\mathbf{v}_i^*$  和可能加速度  $\mathbf{a}_i^*$ , 而在  $t = t^* + \Delta t$  时刻系统相应的可能位形为  $\mathbf{r}_i^* + \Delta \mathbf{r}_i$ , 则  $\Delta \mathbf{r}_i$  称为系统从时刻  $t = t^*$  的给定位置  $\mathbf{r}_i^*$  在  $\Delta t$  时间内的**可能位移**。对于充分小的  $\Delta t$ , 系统的可能位移可以写作

$$\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^* (\Delta t)^2 + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

忽略式(2.9)中高于  $\Delta t$  的项, 由式(2.5)和(2.6)可得可能位移满足的相对  $\Delta t$  的线性方程组:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \Delta \mathbf{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} \Delta t = 0 & (j = 1, 2, \dots, k') \end{cases} \quad (2.10a)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \Delta \mathbf{r}_i + A_{j0} \Delta t = 0 & (j = 1, 2, \dots, k') \end{cases} \quad (2.10b)$$

式中各系数都是在时刻  $t = t^*$  以及可能位形  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^*$  处取值的。

<sup>①</sup> 此处, 算符  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$  定义为

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} = \nabla$$

后文不再特别说明。

## 2.2 虚位移与广义坐标

### 2.2.1 实位移与虚位移 · 等时变分

当在可能位移(2.9)中取  $\Delta t \rightarrow 0$  的极限时, 可得  $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i^* dt$ , 此处的  $d\mathbf{r}_i$  是无穷小位移, 称为**实位移**或**真实位移**。实位移满足类似(2.10a)和(2.10b)的方程组:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 & (j = 1, 2, \dots, k') \end{cases} \quad (2.11a)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i + A_{j0} dt = 0 & (j = 1, 2, \dots, k') \end{cases} \quad (2.11b)$$

式中各系数都是在时刻  $t = t^*$  以及可能位形  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^*$  处取值的。需要注意的是, 实位移满足的方程组(2.11a)、(2.11b)与可能位移的一阶近似方程组(2.10a)、(2.10b)形式上完全一致, 但它们的物理意义是完全不同的。实位移是系统真实发生的位移, 其不仅与约束有关, 还与系统的受力状态等外部条件相关, 而可能位移仅是在约束允许下可能产生的位移。所有实位移构成的集合必然包含于可能位移构成的集合中。

由于当自由度  $f > 0$  时, 实位移分量数  $3n$  多于确定实位移方程组(2.11a)、(2.11b)的方程数, 因此无法仅通过约束唯一确定系统的实位移。

与实位移相对应, **虚位移**在分析力学中有着十分重要的地位。设在  $t = t^*$  时刻, 系统处于可能位形  $\mathbf{r}_i^*$  上, 虚位移是指满足下面线性齐次方程组的  $\delta\mathbf{r}_i$  集合:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 & (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (2.12a)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 & (j = 1, 2, \dots, k') \end{cases} \quad (2.12b)$$

式中各系数都是在时刻  $t = t^*$  以及可能位形  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^*$  处取值的。显然所有虚位移分量共有  $3n$  个, 大于方程组(2.12a)、(2.12b)的方程数, 因此虚位移有无数多个。对比方程组(2.12a)、(2.12b)和(2.11a)、(2.11b)可知, 对于定常系统, 实位移是虚位移的一个。

通常假设虚位移  $\delta\mathbf{r}_i$  是无穷小量, 由虚位移满足的方程组(2.12a)、(2.12b)和可能位移满足的方程组(2.10a)、(2.10b)可知, 对于定常系统, 与  $\Delta t$  成线性关系的可能位移集合与虚位移集合完全相同, 可以说, 虚位移是在约束“冻结”在  $t = t^* = \text{常数}$  情况下的可能位移。

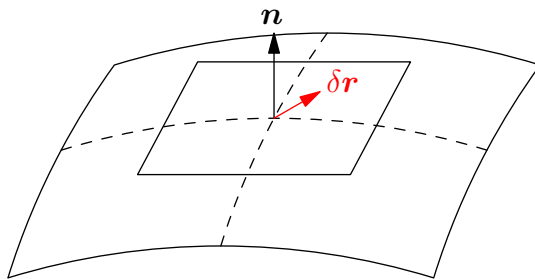


图 2.3: 约束在曲面上的质点

**例 2.1** 考虑被约束在曲面 (曲面可移动, 可变形) 上运动的质点 (如图2.3所示), 曲面的



方程表示为  $f(\mathbf{r}, t) = 0$ , 则  $t$  时刻该质点的位矢满足方程

$$f(\mathbf{r}, t) = 0$$

设质点具有虚位移  $\delta\mathbf{r}$ , 则虚位移满足

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$$

由于  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \parallel \mathbf{n}$ , 所以有  $\delta\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$ 。此时虚位移即为质点所在处曲面切平面内的无限小位移。  
对于实位移则有

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

即有

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial f}{\partial t} dt$$

当约束为定常约束时,  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , 即有

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

此时  $d\mathbf{r} \in \{\delta\mathbf{r}\}$ , 实位移是全体虚位移中的一个。如果约束为非定常约束, 则  $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ , 所以

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

即  $d\mathbf{r} \notin \{\delta\mathbf{r}\}$ , 实位移不在虚位移集合中。

无穷小增量  $\delta\mathbf{r}_i$ <sup>①</sup>是在  $t = t^*$  固定时, 从位矢  $\mathbf{r}_i^*$  确定的位置, 变化到无限接近由位矢  $\mathbf{r}_i^* + \delta\mathbf{r}_i$  确定的位置过程中的无穷小增量, 称为等时变分。在等时变分中我们不考虑系统的运动过程, 而是比较系统在给定时刻约束允许的无限接近的构型。

前面也提到, 虚位移 (或者称为坐标的等时变分) 满足的方程组与实位移 (它是位矢的普通微分) 满足的方程组形式十分相似, 只是缺少了所有对应于  $dt$  的项。因此不妨将等时变分同时也作为一种操作, 当其作用在函数上时, 与普通微分运算规则完全相同, 但是附加一个条件: 等时变分作用在时间上结果为零, 即  $\delta t = 0$ 。例如对函数  $f = f(\mathbf{r}, t)$  做等时变分将得到

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r}$$

下面考虑一些满足其他条件的等时变分。考虑两个在相同  $\Delta t$  内的可能位移, 根据式(2.9)可得

$$\begin{cases} \Delta_1 \mathbf{r}_i = \mathbf{v}_{i1}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_{i1} (\Delta t)^2 + \cdots \\ \Delta_2 \mathbf{r}_i = \mathbf{v}_{i2}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_{i2} (\Delta t)^2 + \cdots \end{cases}$$

其中可能速度  $\mathbf{v}_{is}^* (s = 1, 2)$  和可能加速度  $\mathbf{a}_{is}^* (s = 1, 2)$  分别满足方程组(2.5)、(2.6)和方程组(2.7)、(2.8)。将两组可能位移相减, 可得

$$\Delta_1 \mathbf{r}_i - \Delta_2 \mathbf{r}_i = (\mathbf{v}_{i1}^* - \mathbf{v}_{i2}^*) \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{i1}^* - \mathbf{a}_{i2}^*) (\Delta t)^2 + \cdots \quad (2.13)$$

① 实际上就是坐标  $x_i, y_i$  和  $z_i$  的无穷小增量  $\delta x_i, \delta y_i$  和  $\delta z_i$ 。

如果  $\delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i1}^* - \mathbf{v}_{i2}^* \neq \mathbf{0}$ , 则式(2.13)中的主要部分是  $\Delta t$  的线性项, 它等于  $\delta \mathbf{v}_i \Delta t$ , 并且根据方程组(2.5)、(2.6)可以证明它满足虚位移方程组(2.12a)、(2.12b), 即

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{v}_i \Delta t \quad (2.14)$$

是虚位移。在  $\mathbf{v}_{i1} \neq \mathbf{v}_{i2}$  的假设下, 等时变分(2.14)称为 Jordan 变分。

如果  $\mathbf{v}_{i1}^* = \mathbf{v}_{i2}^*$  但  $\delta \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i1}^* - \mathbf{a}_{i2}^* \neq \mathbf{0}$ , 则式(2.13)中的主要部分是  $\frac{1}{2} \delta \mathbf{a}_i (\Delta t)^2$ , 并且根据方程组(2.7)、(2.8)可以证明它满足虚位移方程组(2.12a)、(2.12b), 即

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \delta \mathbf{a}_i (\Delta t)^2 \quad (2.15)$$

是虚位移。在  $\mathbf{v}_{i1} = \mathbf{v}_{i2}$  但  $\mathbf{a}_{i1}^* \neq \mathbf{a}_{i2}^*$  的假设下, 等时变分(2.15)称为 Gauss 变分。

## 2.2.2 广义坐标与位形空间

假设质点系的约束可以用式(2.4a)和(2.4b)来表示, 而且其中的  $k$  个函数  $f_j (j = 1, 2, \dots, k)$  之间是相互独立的。

能够确定系统位形的参数的最小数目称为**独立广义坐标数**, 可以唯一确定系统位形的一组参数则称为**广义坐标**。由于函数  $f_j (j = 1, 2, \dots, k)$  之间是相互独立的, 所以此时独立广义坐标数  $s = 3n - k$ 。广义坐标可以从各质点的  $3n$  个笛卡尔坐标  $x_i, y_i, z_k$  中选取  $s$  个, 使得其他坐标可以利用方程(2.4a)解出。但一般来说, 广义坐标没有必要取为笛卡尔坐标, 可以选取任意  $s$  个独立的可以确定系统位形的量  $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ , 它们可以是距离、角度、面积, 也可以是没有直接几何意义的, 只需要它们互相之间相互独立, 并且可以将各质点的位矢  $\mathbf{r}_i$  用  $\mathbf{q}^0$  和时间  $t$  表示出来:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.16)$$

式(2.16)称为**广义坐标变换方程**, 这些变换将使得式(2.4a)所表示的  $k$  个完整约束自动满足, 而且由于  $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$  之间互相独立, 所以矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_s} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_s} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

是满秩的。

我们假设选择广义坐标  $\mathbf{q}$  使得系统的任意位形都能在  $\mathbf{q}$  取某个值的时候利用坐标变换方程(2.16)得到。如果不能得到所有可能的位置, 则可以局部地引入广义坐标, 对于不同的可能位置集引入不同的广义坐标。并且假设坐标变换方程(2.16)右端的函数对其所有自变量都是二阶连续可微的。另外, 如果系统是定常的, 则总可以通过选择广义坐标使得坐标变换方程(2.16)中同样不显含时间。

在实际操作时, 通常完全不需要首先建立约束方程(2.4a)<sup>①</sup>, 而根据问题的物理意义可以知道需要确定系统可能位形所必须的广义坐标的数量, 并利用几何关系直接设出广义坐标。

<sup>①</sup> 此处用  $\mathbf{q}$  来形式上表示由所有广义坐标作为分量的一个向量, 其各个分量的量纲不必相同, 因此任何试图计算  $\mathbf{q}$  内积的运算(例如求其长度)都是不合法的, 后文不再解释。

<sup>②</sup> 尤其是几何约束。

对于每个时刻  $t$ , 系统的可能位形与  $s$  维抽象空间  $(q_1, q_2, \dots, q_s)$  之间一一对应, 这个  $s$  维抽象空间  $(q_1, q_2, \dots, q_s)$  称为**位形空间**或**广义坐标空间**。系统的每个可能位形都对应于位形空间的某个点, 该点称为**映射点**。系统的运动即对应于映射点在位形空间中的运动。

**例 2.2 (单摆)** 由不可伸长、不计质量的细绳悬挂于固定点的一个质点在竖直平面内的运动即构成一个单摆 (数学摆), 如图 2.4 所示。单摆有一个几何约束, 可选择摆角  $\theta$  作为单摆的广义坐标, 由此单摆的位形由摆角  $\theta$  唯一确定。此时单摆的坐标变换方程为

$$\begin{cases} x = l \cos \theta \\ y = l \sin \theta \end{cases}$$

由于数轴上不同的点  $\theta$  和  $\theta + 2k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$  对应着单摆的同一个位形, 因此单摆的位形和整个数轴不是一一对应。但我们可以在数轴上划分出一个半开区间  $0 \leq \theta < 2\pi$ <sup>①</sup>, 即可实现与单摆位置的一一对应。

但上面的做法又破坏了连续性, 因为单摆的两个临近位置  $\theta = 0 + 0$  和  $\theta = 2\pi - 0$  不是相邻点。为了保持连续性, 需要认为  $\theta = 0$  和  $\theta = 2\pi$  是同一点<sup>②</sup>。直观上可以这样操作: 将区间的  $\theta = 0$  和  $\theta = 2\pi$  “粘接”起来, 得到的几何形状——单位圆周  $S^1$  就是单摆的坐标空间。

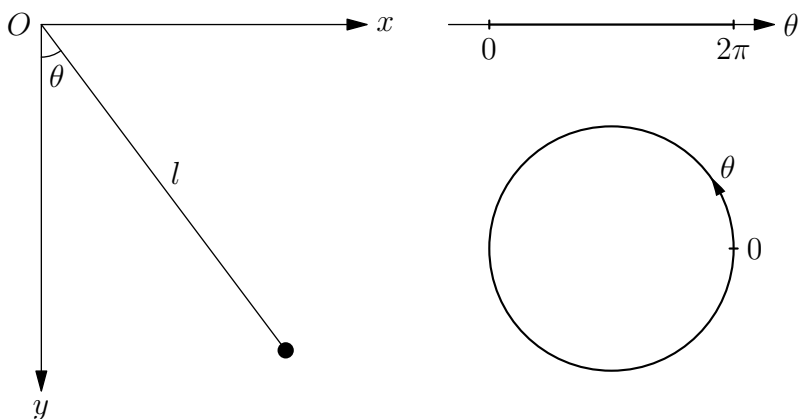


图 2.4: 单摆系统和单摆的位形空间

**例 2.3 (双摆)** 在一个单摆的质点上再悬挂另外一个单摆, 并限制两个单摆都只能在竖直平面内运动, 由此构成的系统称为双摆系统。双摆系统有两个几何约束, 因此可选择两个摆与竖直方向的夹角  $\theta_1, \theta_2$  作为广义坐标。

基于与单摆中类似的原因, 广义坐标  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的取值应该限制在  $0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_2 < 2\pi$  上<sup>③</sup>, 并认为  $\theta_1 = 0$  的线段和  $\theta_1 = 2\pi$  的线段是同一条线段,  $\theta_2 = 0$  的线段和  $\theta_2 = 2\pi$  的线段也是同一条线段, 即得到双摆系统的位形空间。直观上可以这样做: 将正方形的对边“粘接”在一起, 第一次粘接得到圆柱, 第二次粘接则得到圆环面  $S^1 \times S^1$ 。

### 2.2.3 广义速度、广义加速度与广义虚位移

① 任意长度为  $2\pi$  的半开区间都可以。

② 这种条件又称为“周期性边界条件”。

③ 取法不唯一。

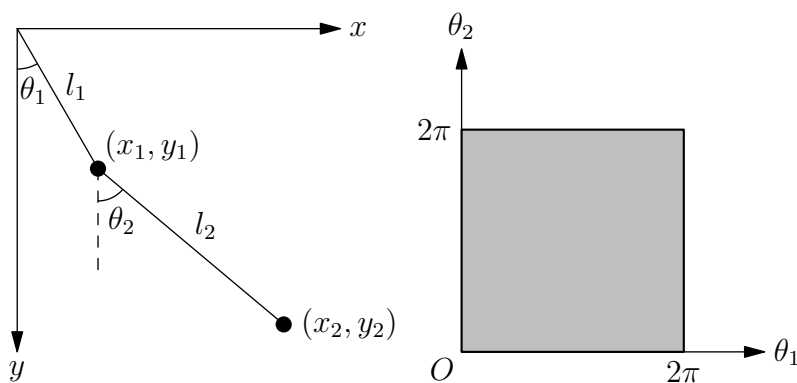


图 2.5: 双摆系统和双摆的位形空间

广义坐标的导数  $\dot{q}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$  称为**广义速度**, 广义速度的导数  $\ddot{q}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$  称为**广义加速度**。利用广义速度  $\dot{q}_\alpha$  和广义加速度  $\ddot{q}_\alpha$  可以表示出系统中各个质点的速度和加速度:

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{a}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha + \sum_{\alpha, \beta=1}^s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + 2 \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha \partial t} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

式中  $i = 1, 2, \dots, n$ 。将  $\dot{\mathbf{r}}_i$  看作是广义坐标和广义速度的函数, 即  $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , 则可由式(2.18)导出两个十分重要的关系式, 称为**经典 Lagrange 关系**:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (2.20)$$

式(2.20)中的第一个式子可以通过(2.18)直接求偏导数得到。下面推导式(2.20)中的另一式。注意到  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}(\mathbf{q}, t)$  与广义速度无关, 所以有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left( \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha}$$

在上面的推导中, 完全没有用到任何关于函数  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$  的具体性质, 因此将其中的  $\mathbf{r}$  替换为任何关于广义坐标  $\mathbf{q}$  和时间  $t$  的函数, 经典 Lagrange 关系都成立, 即对于任意函数  $f = f(\mathbf{q}, t)$  都有

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (2.21)$$

式(2.21)表示的关系称为**推广经典 Lagrange 关系**。

下面将非完整约束方程(2.4b)写成广义坐标的形式。将坐标变换方程(2.16)和式(2.18)代入非完整约束方程(2.4b)中, 可得

$$\sum_{\alpha=1}^s B_{j\alpha}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha + B_{j0}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k') \quad (2.22)$$

其中的系数  $B_{j\alpha}$  和  $B_{j0}$  为

$$B_{j\alpha}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad B_{j0}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + A_{j0} \quad (2.23)$$

对于完整系统, 广义速度  $\dot{q}_\alpha$  之间相互独立且可任意取值。对于非完整系统, 广义坐标与完整系统一样可以任意取值, 但广义速度不是独立的, 它们受  $k'$  个关系式(2.22)限制。

广义坐标的等时变分  $\delta q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$  称为**广义虚位移**, 根据第2.2.1节所述的等时变分运算规则可得

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.24)$$

对于完整系统, 广义虚位移  $\delta q_\alpha$  之间相互独立, 可以任意取值。对于非完整系统, 将式(2.22)两端乘以  $dt$ , 将  $dq_\alpha$  替换为  $\delta q_\alpha$ , 并去掉含有  $dt$  的项<sup>①</sup>, 可得

$$\sum_{\alpha=1}^s B_{j\alpha}(\mathbf{q}, t) \delta q_\alpha = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k') \quad (2.25)$$

由此可知, 非完整系统中可以独立取值的广义虚位移数要比完整系统少  $k'$  个。

## 2.3 约束反力与理想约束

### 2.3.1 主动力与约束反力

在一个系统中, 设  $m_i$  是其中第  $i$  个质点的质量,  $\mathbf{r}_i$  为其位矢, 如果系统是自由的, 则第  $i$  个质点的加速度由 Newton 第二定律确定, 即  $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$ , 其中  $\mathbf{F}_i$  为作用在第  $i$  个质点上的合力。

如果系统不是自由的, 则系统中每个质点的加速度都将受到约束的限制, 此时, 一般来说, 加速度  $\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}$  将不能满足可能加速度的方程(2.7)和(2.8), 即非自由系统中第  $i$  个质点的加速度  $\mathbf{a}_i$  不同于自由系统情况下的加速度  $\ddot{\mathbf{r}}_i$ , 因此约束导致出现了附加的加速度  $\mathbf{a}_i - \ddot{\mathbf{r}}_i$ 。Newton 第二定律表明, 质点的任何加速度都是由其上作用的某些力而产生的, 这个产生附加加速度的力是由于约束的存在才出现的, 称为**约束反力**。为了不混淆约束反力和作用在非自由系统上的其他力, 将其他力称为**主动力**。前面所述的  $\mathbf{F}_i$  实际上是质点  $i$  所有主动力的合力。

主动力也可以称为**给定力**, 如果约束瞬间消失, 这些力仍然保持作用在系统上。而约束反力有时也称为**被动力**, 它们不是事先已知的, 不仅依赖于实现约束的物理机制, 而且依赖于主动力和系统的运动。

如果用  $\mathbf{R}_i$  表示作用在质点  $m_i$  上的约束反力的合力, 则可得到系统的运动方程

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.26)$$

这个方程表明, 在动力学中, 非自由系统可以看作主动力和约束反力共同作用下的自由系统。

### 2.3.2 理想约束

如果约束反力在任意虚位移上所做的功都等于零, 即

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.27)$$

<sup>①</sup> 可以如此处理是由于等时变分的运算规则与普通微分完全相同, 但对时间结果为零。

则该约束称为**理想约束**。理想约束的条件不是由约束方程得到的，是附加条件。

下列几种常见的约束都是理想约束。

1. 质点沿光滑（固定或运动的）曲面运动：如图2.6所示。此时约束反力  $\mathbf{R}$  沿曲面在该点的法线方向，而虚位移  $\delta\mathbf{r}$  则在切平面内，即有

$$\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$$

2. 刚性联结的两质点（包括刚体<sup>①</sup>中任意两点）：此时约束反力  $\mathbf{R}_1$  和  $\mathbf{R}_2$  沿联结方向，根据 Newton 第三定律可有  $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1$ 。考虑到

$$\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} = l^2$$

所以

$$2\mathbf{r}_{12} \cdot \delta\mathbf{r}_{12} = 0$$

即有

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot (\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2) = \mathbf{R}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_{12} = 0$$

此处考虑到了  $\mathbf{R}_1 \parallel \mathbf{r}_{12}$ 。

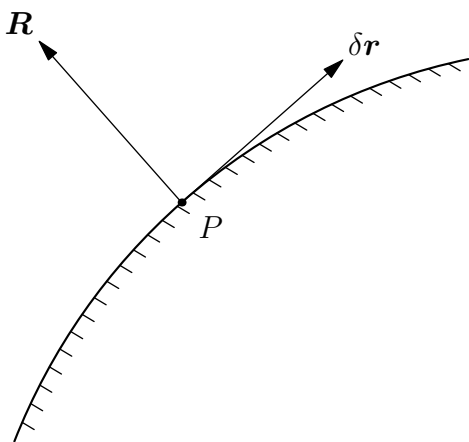


图 2.6: 质点沿光滑曲面运动

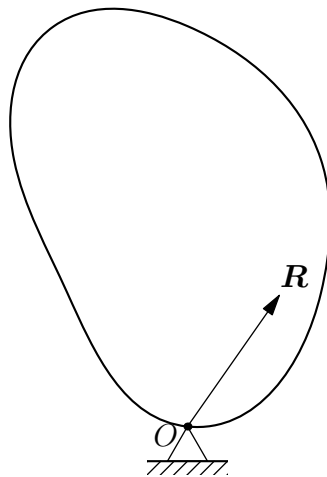


图 2.7: 定点运动的刚体

3. 定点运动的刚体：如图2.7所示。因为  $\delta\mathbf{r} = 0$ （因为约束反力  $\mathbf{R}$  的作用点不运动），因此有

$$\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$$

4. 定轴转动的刚体：定轴转动相当于刚体上有两个固定点，因此必然有  $\mathbf{R}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0$ 。

5. 两个刚体用铰链连接于一点：如图2.8所示。因为  $\mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2$ ， $\delta\mathbf{r}_1 = \delta\mathbf{r}_2$ ，所以

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot (\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2) = 0$$

6. 两个刚体以光滑表面相切：如图2.9所示。两个刚体的切点之间的相对速度位于公共切平面内，因此  $\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2$  也在切平面内。而且约束反力  $\mathbf{R}_1$  和  $\mathbf{R}_2$  都垂直于这个切平面，并且  $\mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2$ ，所以

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot (\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2) = 0$$

<sup>①</sup> 刚体是一种理想模型，指任何情况下都不会发生形变的物体。

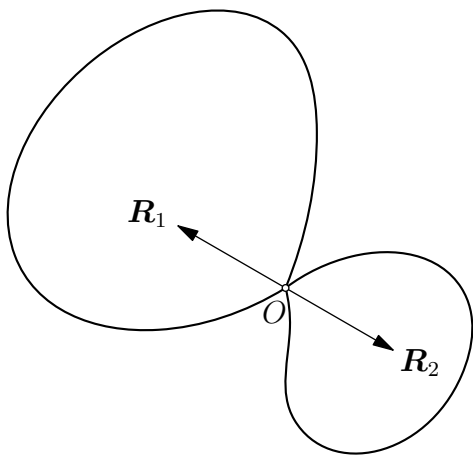


图 2.8: 两个刚体用铰链连接于一点

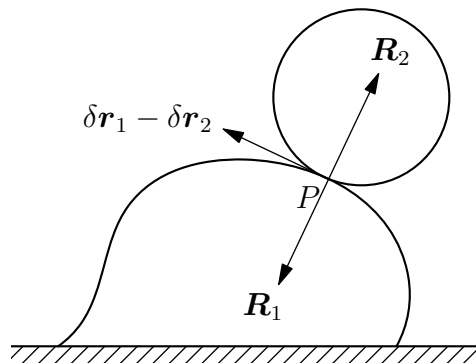


图 2.9: 两个刚体以光滑表面相切

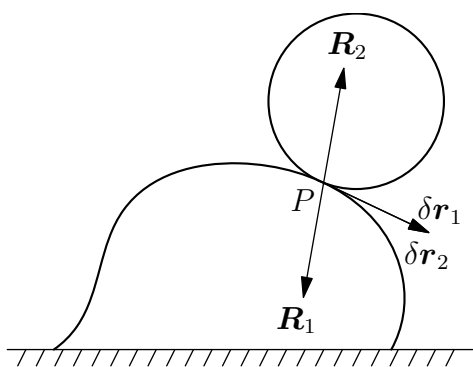


图 2.10: 两个刚体以粗糙表面相切

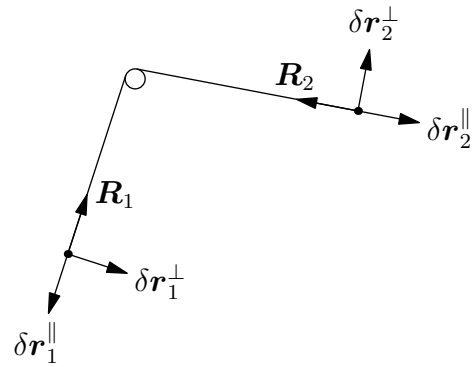


图 2.11: 两个质点以柔软而不可伸长的绳子相联结

7. 两个刚体以粗糙表面相切（不滑动，只能作纯滚动）：如图2.10所示。此时接触点上的约束反力满足  $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1$ ，相对速度  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ ，即有  $\delta \mathbf{r}_2 - \delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ ，因此

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot (\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2) = 0$$

8. 两个质点以柔软而不可伸长的绳子相联结：如图2.11所示。此时约束反力  $\mathbf{R}_1$  和  $\mathbf{R}_2$  都沿相应质点处的绳子方向，且大小相等记作  $T$ 。将两个质点的虚位移  $\delta \mathbf{r}_1$  和  $\delta \mathbf{r}_2$  按沿绳和正交于绳的方向进行分解，将沿绳方向的虚位移记作  $\delta \mathbf{r}_1^{\parallel} = \delta l_1 \mathbf{e}_1$  和  $\delta \mathbf{r}_2^{\parallel} = \delta l_2 \mathbf{e}_2$ 。正交于绳方向的虚位移对应的虚功自然为零，考虑沿绳方向虚位移对应的虚功

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = T \delta l_1 + T \delta l_2$$

由于绳不可伸长，所以有  $\delta l_1 + \delta l_2 = 0$ ，故有  $\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0$ 。

很多机构可以看作是上面提到的几种简单“零件”的组合。但是实际上不存在绝对光滑和绝对粗糙的曲面，也不存在绝对刚体和不可伸长的绳，因此实际问题中约束反力的功不等于零，通常这些功很小，可以在允许的近似意义下认为等于零。

所有约束皆为理想约束的系统称为理想系统，即理想系统需满足

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

很多情况下约束不能看作理想的，例如，刚体在粗糙的表面上进行带有滑动的滚动，这

时仍然可以将约束看作理想的，而将摩擦力看作未知的主动力。新的未知数的出现要求附加新的由实验给出的经验定律。

以后将主要讨论理想系统。提出的问题一般可以表述为：给定质点系统和约束，已知每个质点的质量  $m_i$  和作用在它们上的主动力  $\mathbf{F}_i$ ，并且给定每个质点的初位置  $\mathbf{r}_{i0}$  和初速度  $\mathbf{v}_{i0}$ ，求作为时间函数的位矢  $\mathbf{r}_i(t)$  和约束反力  $\mathbf{R}_i(t)$ 。这要求  $6n$  个未知数。

## 2.4 微分变分原理

### 2.4.1 动力学普遍方程 · d’Alambert-Lagrange 原理

将非自由系统的 Newton 第二定律方程(2.26)与自由系统的 Newton 第二定律方程  $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$  相比较，可以发现它们的形式是不同的。这是由于方程(2.26)的右端有未知函数——约束反力  $\mathbf{R}_i$ ，这个力对于不同的约束将具有不同的形式、不同的性质，这是十分不便于求解的。

现在将非自由系统的 Newton 第二定律方程(2.26)重写如下

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.28)$$

现在寻求一种方式将其中的约束反力消去，而自由系统的方程中本来就不含有约束反力，进而达到统一两种系统求解方式的目的。

如果系统所有的约束都是双面的、理想的，即对任意虚位移  $\delta \mathbf{r}_i$  都满足

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.29)$$

将式(2.28)改写为

$$\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\mathbf{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

将上式两端点乘虚位移  $\delta \mathbf{r}_i$  之后对  $i$  求和，可得

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.30)$$

式(2.30)为相应于主动力  $\mathbf{F}_i$  的理想约束允许的系统运动的充分必要条件，称为动力学普遍方程或 d’Alambert-Lagrange 微分变分原理<sup>①</sup>。相应于主动力的名字，式(2.30)左端的  $-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$  项称为惯性力，据此，d’Alambert-Lagrange 微分变分原理可以表述为：在给定时刻的所有可能运动中，只有真实运动使主动力和惯性力在任意虚位移上的虚功等于零。

动力学普遍方程(2.30)是在理想约束假设(2.29)下得到的。如果全部或者部分约束反力  $\mathbf{G}_i$  不满足式(2.29)，可以在主动力中附加  $\mathbf{G}_i$ ，将方程(2.30)改写为

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{G}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.31)$$

一般情况下，力  $\mathbf{G}_i$ （或其中的一部分）是未知的，这需要根据产生  $\mathbf{G}_i$  的约束的物理性质和特征来补充实验定律方程。

动力学普遍方程(2.30)实际上所包含的方程数等于自由度数  $f$ （即  $3n$  个虚位移分量  $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \dots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$  中独立的个数），每一个方程中都不包含约束反力。

<sup>①</sup> 或者简称为 d’Alambert 原理。



例 2.4 两个质量为  $m_1$  和  $m_2$  的质点以理想的细绳相连，细绳跨过光滑的杆，两个质点在重力的作用下在竖直平面内运动（如图 2.12 所示），求两个质点的加速度。

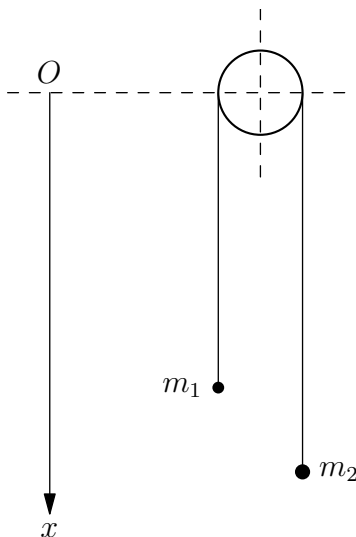


图 2.12: 例 2.4

解 设  $x_1$  和  $x_2$  是  $m_1$  和  $m_2$  的坐标，由动力学普遍方程(2.30)可得

$$(m_1 g - m_1 \ddot{x}_1) \delta x_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{x}_2) \delta x_2 = 0$$

根据细绳不可伸长，有几何约束  $x_1 + x_2 + \pi R = L$ ，其中  $L$  和  $R$  分别表示细绳总长和杆的横截面半径，因此有  $\delta x_1 = -\delta x_2$ ,  $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$ ，可将上式变为

$$[(m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)\ddot{x}_2] \delta x_2 = 0$$

由于  $\delta x_2$  是任意的，因此有

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = -\ddot{x}_1$$

## 2.4.2 Jordan 原理

动力学普遍方程(2.30)是将系统给定位置和在任意固定时刻的变分位置相比较，如果考虑从可能位形  $\mathbf{r}_i^*$  出发，具有不同可能速度  $\mathbf{v}_i^*$  的可能运动集合，将它们与在相同时刻相同位形出发的真实运动相比较，就可以得到 Jordan 变分（见第 2.2.1 节），此时  $\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{v}_i \Delta t$ ，其中  $\delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i1}^* - \mathbf{v}_{i2}^*$  是被比较运动的可能速度之差<sup>①</sup>。将这个虚位移代入动力学普遍方程(2.30)并整理可得

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i = 0 \quad (2.32)$$

式(2.32)称为 Jordan 微分变分原理。

## 2.4.3 Gauss 原理

<sup>①</sup> 这个差值不一定是无穷小量。

## 2.4.3.1 最小拘束原理 · Gauss 原理

考虑在某时刻具有可能位形  $\mathbf{r}_i^*$  和可能速度  $\mathbf{v}_i^*$  的运动同真实运动相比较, 它们的加速度可能式不同的<sup>①</sup>, 这种等时变分称为 Gauss 变分 (见第2.2.1节)。

将两个可能运动的加速度之差表示为  $\delta \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i1}^* - \mathbf{a}_{i2}^*$ , 则有 Gauss 变分为

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \delta \mathbf{a}_i (\Delta t)^2 \quad (2.33)$$

将式(2.33)代入动力学普遍方程(2.30)中可得

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{a}_i = 0 \quad (2.34)$$

注意到其中  $m_i$  是常数, 而  $\mathbf{F}_i$  不依赖于加速度  $\mathbf{a}_i$ , 由于等时变分满足与普通微分类似的运算规则, 可以将式(2.34)改写为

$$\delta Z = 0 \quad (2.35)$$

其中

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \mathbf{a}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2 \quad (2.36)$$

称为拘束度。由此, 式(2.35)表明, 拘束度  $Z$  在真实运动的加速度处取驻值。

实际上, 拘束度  $Z$  不仅在真实运动的加速度处取驻值, 而且是取最小值。设  $\mathbf{a}_{i0}$  是系统真实运动的加速度,  $Z_0$  是相应的拘束度, 在与其相比较的可能运动中有  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i0} + \delta \mathbf{a}_i$ , 于是有

$$\begin{aligned} Z - Z_0 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \mathbf{a}_{i0} + \delta \mathbf{a}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \mathbf{a}_{i0} - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{a}_{i0} - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{a}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\delta \mathbf{a}_{i0})^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

根据方程(2.34), 式(2.37)的第一项等于零, 由于不是所有的  $\delta \mathbf{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  都等于零<sup>②</sup>, 因此式(2.37)第二项严格为正, 因此拘束度  $Z$  在真实运动的加速度处取最小值。

由此就得到了最小拘束原理或 Gauss 原理: 在比较的给定时刻运动学可能运动 ( $\mathbf{r}_{i1}^* = \mathbf{r}_{i2}^*, \mathbf{v}_{i1}^* = \mathbf{v}_{i2}^*, \delta \mathbf{a}_i \neq 0$ ) 中, 真实运动的拘束度最小。

例 2.5 利用 Gauss 原理求例2.4中两个质点的加速度。

解 设  $m_2$  的加速度为  $a$ , 则  $m_1$  的加速度为  $-a$ , 拘束度为

$$Z = \frac{1}{2} m_1 (-a - g)^2 + \frac{1}{2} m_2 (a - g)^2$$

求其最小值, 即

$$\frac{dZ}{da} = m_1 (a + g) + m_2 (a - g) = 0$$

所以

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

<sup>①</sup> 这个加速度的差值不一定是无穷小量。

<sup>②</sup> 只有真实运动才满足这一点。

## 2.4.3.2 Gauss 原理的物理意义

设在  $t$  时刻, 非自由系统的质点  $m_i$  所在位置记作  $P_i$ , 其位矢为  $\mathbf{r}_i$ , 速度为  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{F}_i$  为作用在其上所有主动力的合力。如果记该质点在  $t + dt$  时刻的位置为  $A_i$  (如图2.13所示), 则这时应该有

$$\overrightarrow{P_i A_i} = \mathbf{v}_i dt + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i (dt)^2 + \dots$$

如果在  $t$  时刻, 约束被解除 (解除约束的过程是瞬间的, 且不改变  $\mathbf{F}_i, m_i, \mathbf{v}_i$  和  $\mathbf{r}_i$ ), 则在  $t + dt$  时刻, 质点  $m_i$  所在的位置将偏离  $A_i$  点, 记作  $B_i$ , 则有

$$\overrightarrow{P_i B_i} = \mathbf{v}_i dt + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} (dt)^2 + \dots$$

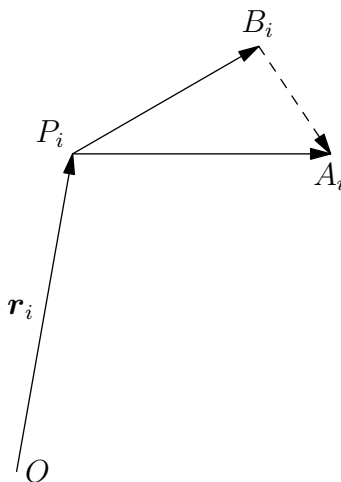


图 2.13: Gauss 原理的物理意义

质点偏离其自由运动位置的位移  $\overrightarrow{B_i A_i}$  是由约束引起的, 约束迫使质点的运动偏离自由系统的运动。显然对于质量相同的质点, 偏离长度  $|\overrightarrow{B_i A_i}|$  越大, 约束的强制作用也就越强。另一方面, 为了使质点具有偏离自由运动位置的加速度, 其质量越大, 所需约束的强制作用也需要更强。因此, 约束对质点的作用应该用量  $m_i |\overrightarrow{B_i A_i}|^2$  来衡量。对于这个系统, 略去  $(dt)^4$  以上的项, 可有

$$m_i |\overrightarrow{B_i A_i}|^2 = m_i (\overrightarrow{P_i A_i} - \overrightarrow{P_i B_i})^2 = \frac{1}{4} m_i (dt)^4 \left( \mathbf{a}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2$$

将其对所有质点求和, 并略去  $\frac{1}{2}(dt)^4$  的系数, 于是可得系统的拘束度

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \mathbf{a}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2$$

$Z$  是用来衡量系统的真实运动偏离其自由运动的量。Gauss 原理指出,  $Z$  在真实运动时取最小值, 这就是说, 非自由系统的真实运动是所有约束允许的虚拟运动中最接近自由运动的。

如果考虑到式(2.28), 可以将拘束度表示为

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{R}_i^2}{m_i} \quad (2.38)$$

则  $Z$  对真实运动取最小值的条件变为约束反力的极值性质: 真实运动的约束反力最小。

## 2.5 分析静力学的虚功原理

### 2.5.1 静力学普遍方程 · 虚功原理

如果理想系统处于静平衡状态, 则有  $\ddot{\mathbf{r}}_i \equiv \mathbf{0}$ , 根据动力学普遍方程(2.30)可得

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.39)$$

式(2.39)称为静力学普遍方程或虚功原理。即, 系统在平衡位形处在任意虚位移上主动力的功为零。

### 2.5.2 广义坐标下的静力学普遍方程 · 广义力

约束<sup>①</sup>使得各质点的虚位移之间彼此不相互独立, 设系统自由度为  $s$ , 则可以引入  $s$  个广义坐标表征系统的位形, 坐标转换关系表示为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.40)$$

由此可有虚位移

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (2.41)$$

将式(2.41)代入静力学普遍方程(2.39)中, 可得

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha$$

定义

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (2.42)$$

称为与广义坐标  $q_\alpha$  对应的广义力, 则静力学普遍方程可以用广义坐标表示为

$$\sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha = 0 \quad (2.43)$$

### 2.5.3 完整系的平衡条件

广义坐标使全部完整约束方程自动满足, 所有广义坐标可以独立取值与变动, 因此完整系的所有广义虚位移之间相互独立, 因此由式(2.43)可得完整系的平衡条件

$$Q_\alpha|_{\mathbf{q}_0} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (2.44)$$

即, 完整系平衡位形处, 各广义力分量为零。

如果系统为保守系统, 所有主动力均对应有势能

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.45)$$

<sup>①</sup> 在静平衡条件下, 所有的约束都是完整约束。

则有

$$V = V(\mathbf{r}(\mathbf{q}))$$

此时, 广义力可以表示为

$$Q_\alpha = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (2.46)$$

此时平衡条件可以表示为

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right|_{\mathbf{q}_0} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (2.47)$$

即完整保守系统在平衡位形处势能取驻值。可以证明, 势能取极小值, 平衡为**稳定平衡**; 势能取极大值, 平衡为**不稳定平衡**; 势能取常数值, 平衡为**随遇平衡**。

**例 2.6** 质量为  $m$ , 固有半径为  $a$ , 弹性系数为  $k$  的弹性圈置于半顶角  $\alpha$  的光滑直立圆锥上, 求弹性圈的平衡半径与张力。

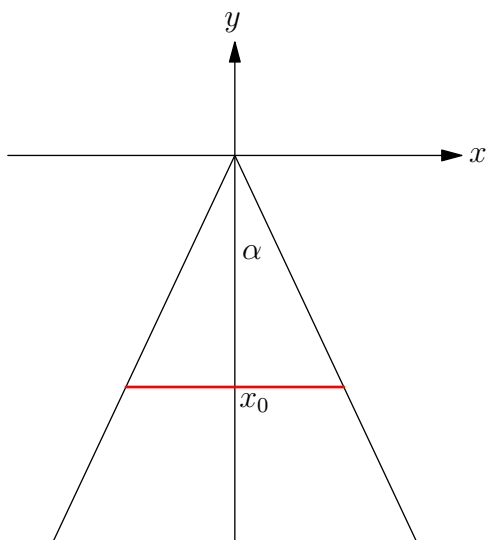


图 2.14: 例 2.6

**解** 光滑锥面的完整约束为

$$y = -x \cot \alpha$$

主动力包括重力和弹性力, 均为保守力。广义坐标取为  $x$ , 则系统的势能表示为

$$V(x) = \frac{1}{2} k [2\pi(x - a)]^2 - mgx \cot \alpha$$

平衡条件为

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_0} = 4\pi^2 k (x_0 - a) - mg \cot \alpha = 0$$

解得平衡位置为

$$x_0 = a + \frac{mg \cot \alpha}{4\pi^2 k}$$

平衡时的弹性力为

$$T = 2\pi k (x_0 - a) = \frac{mg \cot \alpha}{2\pi}$$

**例 2.7** 重新设计例2.6中旋转面的形状, 使弹性圈可平衡于任意高度。

解 设旋转面由曲线  $y = f(x)$  绕  $y$  轴旋转形成, 此时系统的势能

$$V(x) = \frac{1}{2}k[2\pi(x-a)]^2 + mgf(x)$$

随遇平衡要求  $V(x) = \text{常数}$ , 即

$$\frac{1}{2}k[2\pi(x-a)]^2 + mgf(x) = C$$

由此有

$$f(x) = C - \frac{2\pi^2 k}{mg}(x-a)^2$$

例 2.8 将例 2.6 中的弹性圈改为刚性圈, 求其在圆锥面上平衡时的张力。

解 此问题有两个约束: 约束  $y = -x \cot \alpha$ , 约束反力为正压力; 约束  $x = a$ , 约束反力为张力。虚功原理只能求平衡位形, 而不涉及约束反力。

因此, 此处解除第二个约束, 将张力视为主动力。问题归结为已知平衡位形, 求部分未知主动力。根据虚功原理, 有

$$-T(2\pi\delta x) - mg\delta y = 0$$

根据约束, 可有

$$\delta y = -\delta x \cot \alpha$$

所以有

$$(mg \cot \alpha - 2\pi T)\delta x = 0$$

$\delta x$  是独立的广义虚位移, 因此有

$$mg \cot \alpha - 2\pi T = 0$$

所以, 张力为

$$T = \frac{mg \cot \alpha}{2\pi}$$

## 2.6 Lagrange 方程

### 2.6.1 广义坐标形式的动力学普遍方程

设包含  $n$  个质点的理想系统有  $k$  个完整约束和  $k'$  个不完整约束,  $q_1, q_2, \dots, q_s (s = 3n - k)$  是它的广义坐标, 则有坐标变换方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t) \quad (2.48)$$

这些函数是二阶连续可微的。由坐标变换方程(2.48)可得系统内各质点的速度表达式(2.18)和虚位移表达式(2.24)如下:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (2.49)$$

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (2.50)$$

将式(2.49)和(2.50)代入动力学普遍方程(2.30)中, 可得

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \left[ \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha \quad (2.51)$$

式(2.51)的第一部分为

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha \quad (2.52)$$

此处  $Q_\alpha$  即为第2.5.2节中定义的广义力。由于力  $\mathbf{F}_i$  可能是各质点位矢和速度的函数, 因此广义力  $Q_\alpha$  一般是广义坐标  $\mathbf{q}$  和广义速度  $\dot{\mathbf{q}}$  的函数, 即

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.53)$$

式(2.51)中小括号内的第二项为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \quad (2.54)$$

此处利用了经典 Lagrange 关系 (见式(2.20)):

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

如果利用系统动能表达式

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.55)$$

则式(2.54)可以进一步写为

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \quad (2.56)$$

由此可得式(2.51)的第二部分为

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = - \sum_{\alpha=1}^s \left( \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \quad (2.57)$$

将式(2.52)和(2.57)代入方程(2.51)中, 并稍作整理, 可得广义坐标形式的动力学普遍方程

$$\sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha \right) \delta q_\alpha = 0 \quad (2.58)$$

## 2.6.2 理想完整系的 Lagrange 方程

假设理想系统是完整的, 那么  $\delta q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$  是相互独立的, 此时广义坐标数等于自由度 (当  $k' = 0$  时,  $s = f = 3n - k$ )。利用  $\delta q_\alpha$  的独立性, 广义坐标形式的动力学普遍方程(2.58)当且仅当每个虚位移  $\delta q_\alpha$  的系数都等于零, 所以方程(2.58)等价于下面的  $s$  个方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (2.59)$$

方程(2.59)称为理想完整系的**第二类 Lagrange 方程**<sup>①</sup>，这是关于  $s$  个广义坐标函数  $q_\alpha(t)$  的  $s$  个的二阶常微分方程组。

为了得到 Lagrange 方程，必须将系统的动能  $T$  表示为广义坐标  $\mathbf{q}$  和广义速度  $\dot{\mathbf{q}}$  的函数，并求出作为广义坐标  $\mathbf{q}$  和广义速度  $\dot{\mathbf{q}}$  函数的广义力  $Q_\alpha$ ，再像方程(2.59)中那样对  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  求导。Lagrange 方程的形式不依赖于广义坐标的选择，选取其他的广义坐标只会改变函数  $T$  和  $Q$ ，但方程(2.59)的形式不会改变，即 Lagrange 方程具有**不变性**。

Lagrange 方程中不包含理想约束的约束反力，如果想求出约束反力，需要在求解 Lagrange 方程后，将广义坐标与时间的关系  $\mathbf{q}(t)$  代入坐标变换方程(2.48)中，得到各个质点位矢与时间的关系

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\mathbf{q}(t), t)$$

然后利用关系式

$$\mathbf{R}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i$$

求出作用在第  $i$  个质点上所有约束反力的合力。

### 2.6.3 系统动能的数学结构 · Lagrange 方程的确定性

利用式(2.49)，动能可以用广义速度  $\dot{\mathbf{q}}$  表示为

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^s \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \dot{q}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^s P_\alpha(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha + T_0(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (2.60)$$

这里

$$M_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta}, \quad P_\alpha = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (2.61)$$

此处  $M_{\alpha\beta}$ ,  $P_\alpha$  和  $T_0$  都是  $\mathbf{q}$  和  $t$  的函数，与广义速度  $\dot{\mathbf{q}}$  无关。式(2.60)表明动能  $T$  是广义速度的二次多项式，即

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^s P_\alpha \dot{q}_\alpha + T_0 = T_2 + T_1 + T_0 \quad (2.62)$$

其中

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad T_1 = \sum_{\alpha=1}^s P_\alpha \dot{q}_\alpha, \quad T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (2.63)$$

对于定常系统，有  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}(\mathbf{q}, t) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ <sup>②</sup>，此时有  $P_\alpha = 0 (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ ,  $T_0 = 0$ ，所以

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad (2.64)$$

<sup>①</sup> 方程(2.59)经常简称为 Lagrange 方程。

<sup>②</sup> 事实上，对于任意的广义坐标选取，这个式子并不成立，但我们总是选取广义坐标使得坐标变换方程不显含时间，这个式子在这个意义下成立。



即定常系统的动能是广义速度的二次型，并且式(2.64)中的系数  $M_{\alpha\beta}$  不显含时间。

下面将证明不论在定常还是非定常系统中，二次型  $T_2$  都是正定的。事实上，根据式(2.60)中的计算过程可以看出

$$T_2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right)^2 \quad (2.65)$$

这说明  $T_2 \geq 0$ 。二次型正定还需要满足非退化性，即要求当且仅当所有  $\dot{q}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$  都等于零的时候才有  $T_2 = 0$ 。假设不然，即在某些不完全为零的  $\dot{q}_1^*, \dot{q}_2^*, \dots, \dot{q}_s^*$  下， $T_2$  可以等于零，那么式(2.65)中的每个括号内都应该等于零，即

$$\sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha^* = 0 \quad (2.66)$$

等式(2.66)表明坐标变换方程的 Jacobi 矩阵(2.17)的各列线性相关，即这个矩阵的秩小于  $s$ ，这与广义坐标的选取需使得矩阵(2.17)满秩相矛盾。于是便证明了二次型  $T_2$  是正定的。由此也可以顺便得到

$$\det(M_{\alpha\beta}) > 0 \quad (2.67)$$

这说明，如果选定的广义坐标  $\mathbf{q}$  对于系统的某个位置使得不等式(2.67)不成立，则意味着不适合用这一组广义坐标  $\mathbf{q}$  研究系统在这个位置附近的运动，在这个位置附近的邻域内需要引进其它广义坐标。一个具体的例子请见第5.1.6节和第5.2.4节中关于万向锁的讨论。

根据式(2.62)和式(2.63)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^s M_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta + P_\alpha \\ \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s \frac{\partial M_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial P_\beta}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} \end{aligned}$$

所以有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^s M_{\alpha\beta} \ddot{q}_\beta + \sum_{\beta, \gamma=1}^s \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma + \sum_{\beta=1}^s \left( \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_\beta + \frac{\partial P_\alpha}{\partial t}$$

由此可知，Lagrange 方程可以表示为

$$\sum_{\beta=1}^s M_{\alpha\beta} \ddot{q}_\beta = g_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.68)$$

根据式(2.67)可知，这个关于广义加速度  $\ddot{q}_\alpha$  的线性方程组(2.68)有唯一解

$$\ddot{q}_\alpha = G_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (2.69)$$

由微分方程理论可知，当函数  $G_\alpha$  满足某些限制条件时，对任意初始条件：当  $t = t_0$  时， $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0$ ，常微分方程组(2.69)都有唯一解，因此 Lagrange 方程满足运动确定性条件。

## 2.6.4 有势系的 Lagrange 函数

如果外力是有势力<sup>①</sup>，即

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.70)$$

其中  $V(\mathbf{r}, t)$  为势函数。考虑  $V = V(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), t)$ ，可有广义力

$$Q_\alpha = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (2.71)$$

由此，定义 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t) \quad (2.72)$$

则有理想完整有势系的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (2.73)$$

例 2.9 质量为  $m$  的质点被约束在一光滑的水平平台上运动，质点上系着一根长为  $l$  的轻绳，绳子穿过平台上的小孔  $O$ ，另一端挂着另一个质量为  $M$  的质点，写出系统的运动方程。

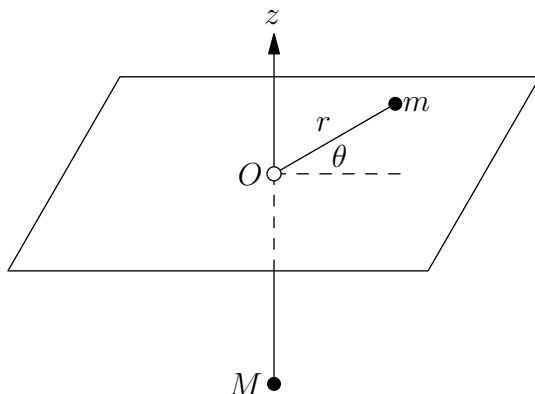


图 2.15: 例 2.9

解 广义坐标取为  $r$  和  $\theta$ ，则有

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2, \quad V = Mg(r - l)$$

Lagrange 函数为

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2 - Mg(r - l)$$

计算

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= (m + M)\dot{r}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\theta}^2 - Mg, & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

<sup>①</sup> 保守力与有势力是不同的，考虑  $dV = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{\partial V}{\partial t} dt$ ，因此有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -dV + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

所以仅当势函数不显含时间  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$  时，有势力才是保守力。

所以系统的运动方程为

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Mg = 0 \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

## 2.6.5 完整有势系统的机械能

设系统中只有部分主动力为有势力，除有势力之外还受某些非有势力作用，则可将势归入 Lagrange 函数  $L$ ，非有势力表示为广义力  $Q_\alpha^*$ ，则根据(2.59)有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^* \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (2.74)$$

首先证明下面的定理。

**定理 2.6.1 (齐次函数的 Euler 定理)** 如果  $n$  元函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  对  $\forall \lambda \neq 0$  满足

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

则称为  $m$  次齐次函数。其满足

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.75)$$

**证明** 将式

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

两端对  $\lambda$  求偏导数，可得

$$\sum_{i=1}^n x_i f'_i = m \lambda^{m-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

由此，令  $\lambda = 1$ ，即得证齐次函数的 Euler 定理

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \square$$

动能  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  对时间的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha + \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) - \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha + \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.76)$$

利用式(2.62)和齐次函数的 Euler 定理，可得

$$\sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = 2T_2 + T_1$$

将上式和 Lagrange 方程(2.74)代入式(2.76)中，可得

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1) + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha^* \dot{q}_\alpha + \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1) + \frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha^* \dot{q}_\alpha + \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

考虑到  $2T_2 + 2T_1 + 2T_0 = 2T$  以及机械能  $E = T + V$ , 稍作整理可得如下机械能对时间导数的表达式

$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.77)$$

其中

$$N^* = \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha}^* \dot{q}_{\alpha} \quad (2.78)$$

称为非有势力功率。公式(2.77)给出了完整系统机械能随时间变化的关系。如下几种特殊情况是通常能够满足的:

1. 如果系统是定常的, 则  $T_1 = T_0 = 0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , 此时

$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.79)$$

2. 如果系统是定常的且势能不显含时间, 此时

$$\frac{dE}{dt} = N^* \quad (2.80)$$

3. 设系统满足如下条件: (a) 定常; (b) 系统中所有主动力有势; (c) 势能不显含时间, 满足这些条件的系统称为保守系统。对保守系统有

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (2.81)$$

即保守系统的机械能守恒, 系统有能量积分

$$E = T + V = \text{常数} \quad (2.82)$$

## 2.6.6 陀螺力

如果非有势力的功率等于零, 则称之为陀螺力。

设非有势力是广义速度的线性函数<sup>①</sup>, 即

$$Q_{\alpha}^* = \sum_{\beta=1}^s \gamma_{\alpha\beta} \dot{q}_{\beta} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

如果系数矩阵  $(\gamma_{\alpha\beta})$  是反对称的  $\gamma_{\alpha\beta} = -\gamma_{\beta\alpha}$ , 那么必然有

$$N^* = \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha}^* \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha, \beta=1}^s \gamma_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = 0$$

即力  $Q_{\alpha}^*$  是陀螺力。根据式(2.80)可知, 势能不显含时间的定常系统当非有势力都是陀螺力时, 机械能也同样守恒, 也有能量积分。

然后考虑

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_{\alpha=1}^s \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \right) \dot{q}_{\alpha} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha}^* \dot{q}_{\alpha} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \end{aligned}$$

<sup>①</sup> 一般的非有势力可能还与广义坐标有关。

定常系统有  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{0}$ , 所以

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha}^* \dot{q}_{\alpha} = N^*$$

因此在定常的情况下, 作用在系统上的非有势力  $\mathbf{F}_i^*$  是陀螺力的条件为

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad (2.83)$$

例 2.10 在定常系统中, Coriolis 惯性力<sup>①</sup>

$$\mathbf{F}_{ic} = -2m_i \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_i$$

是陀螺力。根据式(2.83), 可得

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{ic} \cdot \mathbf{v}_i = -2m_i \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{v}_i = 0$$

于是说明 Coriolis 惯性力是陀螺力。

例 2.11 作用在旋转陀螺上保证其规则进动的力矩<sup>②</sup>

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s \left[ I_3 + (I_3 - I_1) \frac{\omega_p}{\omega_s} \cos \theta_0 \right]$$

是陀螺力。根据式(2.83), 可得

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \cdot (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_s) = 0$$

于是说明这个力矩是陀螺力, 陀螺力也是以此得名。

例 2.12 作用在静磁场中运动带电粒子上的 Lorentz 力<sup>③</sup>

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

是陀螺力。根据式(2.83), 可得

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (e\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

于是说明 Lorentz 力是陀螺力。

## 2.6.7 广义势 · 广义势系统的 Lagrange 函数

如果质点系中的质点所受外力可以用标量函数  $U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  表示为<sup>④</sup>

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.84)$$

① 关于 Coriolis 惯性力, 请见第7.1.2节。

② 关于规则进动陀螺, 请见第5.6.2节。

③ 关于 Lorentz 力, 请见第2.6.8节。

④ 与  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$  的含义类似, 此处  $\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}$  定义为

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i}$$

则标量函数  $U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  称为系统的广义势。

在广义坐标下，广义势函数满足

$$U = U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = U(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t)$$

则广义力可以表示为

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \quad (2.85)$$

式中利用了经典 Lagrange 关系(2.20)。由此可定义广义势系统的 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.86)$$

则系统的 Lagrange 方程与式(2.73)相同，即

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (2.87)$$

另外注意到动能  $T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$  满足

$$-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial(-T)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial(-T)}{\partial \mathbf{r}_i}$$

即，惯性力的广义势是负动能。由此，Lagrange 函数即（除负号）惯性力与主动力广义势能之和，又称为系统的动势。

## 2.6.8 电磁场中带电粒子的广义势

电磁场中的带电粒子受到 Lorentz 力，即

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.88)$$

根据 Maxwell 方程组中的  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，可令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.89)$$

此处，式(2.89)中的矢量函数  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  称为电磁场的矢势。再根据 Maxwell 方程组中的  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ，可得

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

由此可令

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.90)$$

此处, 式(2.90)中的标量函数  $\phi(\mathbf{r}, t)$  称为**电磁场的标势**。

由此, Lorentz 力可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= e \left[ -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = e \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})}{\partial \mathbf{r}} \right] \\ &= e \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{\partial(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})}{\partial \mathbf{r}} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial(e\phi - e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial(e\phi - e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.91)$$

由此, 广义势为

$$U = e(\phi - \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \quad (2.92)$$

在电磁场中运动的自由带电粒子的 Lagrange 函数为

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} - e\phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.93)$$

## 2.7 求解系统的约束反力

### 2.7.1 利用 Lagrange 乘子法求解全部约束反力

在完整系统的动力学普遍方程(2.30)中, 约束反力已经被全部消去, 进而可以不必求解约束反力即可直接求解运动。在第2.6.2节已经提到, 在求解出系统的运动之后, 可以再根据非自由系统的 Newton 第二定律方程(2.26)得到

$$\mathbf{R}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i \quad (2.94)$$

将求解出的运动规律代入, 即可求得全部约束反力。

如果希望能够同时求解出系统的运动和全部约束反力, 则可以通过 Lagrange 乘子法来解决。设理想完整系统的约束表示为

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (2.95)$$

解除所有约束, 则根据动力学普遍方程(2.30)可有

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.96)$$

但式(2.96)中的  $3n$  个虚位移分量之间并不是相互独立的, 而是由  $k$  个约束方程(2.95)相联系。对方程(2.95)求变分, 可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (2.97)$$

引入  $k$  个不定乘子  $\lambda_j(t)$ , 将其分别与方程(2.97)相乘, 并与动力学普遍方程(2.96)相加, 可得

$$\sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.98)$$

再根据 Lagrange 公式(1.30)可得

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} + \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.99)$$

在式(2.99)中的  $3n$  个虚位移分量中, 只有  $s$  个是独立的, 而此处引入的  $k = 3n - s$  个不定乘子是可以任意取值的, 那么总是可以选择这样的不定乘子  $\lambda_j(t)$ , 使得式(2.99)中前  $k = 3n - s$  个虚位移分量的系数为零, 那么这样式(2.99)就只剩下相互独立的  $s$  个虚位移分量, 它们的系数必须为零。综上可得系统的运动微分方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} & (i = 1, 2, \dots, n) \\ f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 & (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (2.100)$$

根据式(2.100)的  $n + k$  个方程可以解出系统的运动  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$  (共  $3n$  个分量), 以及  $k$  个不定乘子  $\lambda_j = \lambda_j(t)$ 。

下面来讨论所引入的  $k$  个不定乘子的物理意义。注意到 Lagrange 公式(1.30)

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (2.101)$$

将方程(2.100)的第一部分代入约束反力的定义式(2.94)中, 可得质点  $m_i$  所受约束反力的合力为

$$\mathbf{R}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (2.102)$$

于是, 记

$$\mathbf{R}_{ij} = \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (2.103)$$

为第  $j$  个约束施于第  $i$  个质点的力, 其方向决定于  $\nabla_i f_j$ , 大小则与  $\lambda_j$  成正比。约束反力可以写作

$$\mathbf{R}_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left( - \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j \right) \quad (2.104)$$

所以, 标量函数

$$W(\mathbf{r}, t) = - \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) \quad (2.105)$$

称为约束力势。这时可以形式上将约束力势视作外力的势能加入 Lagrange 函数中, 即引入新的 Lagrange 函数

$$\bar{L} = T - W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) \quad (2.106)$$

则可以将方程(2.100)利用新的 Lagrange 函数在形式上写为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{F}_i & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} = 0 & (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (2.107)$$

如果系统具有广义势  $U = U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ , 即有

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (2.108)$$



此时方程(2.100)可用 Lagrange 函数  $L = T - U$  改写为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} & (i = 1, 2, \dots, n) \\ f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 & (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (2.109)$$

其中不定乘子  $\lambda_j$  的物理意义与前文相同, 且约束反力同样可以用式(2.102)和(2.103)表示, 约束力势仍然具有式(2.105)的形式。于是在这种情况下可以形式上将约束力势视作外力的势能加入 Lagrange 函数中, 即引入新的 Lagrange 函数

$$\bar{L} = T - U - W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) \quad (2.110)$$

则可以将方程(2.109)利用新的 Lagrange 函数形式上写为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{r}_i} = 0 & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} = 0 & (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (2.111)$$

## 2.7.2 利用 Lagrange 乘子法求解部分约束反力

本节利用 Lagrange 乘子法求解完整系统的前  $l$  个约束对应的约束反力。将完整系统的约束分为两组

$$\begin{cases} f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 & (j = 1, 2, \dots, l) \\ f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 & (j = l+1, l+2, \dots, k) \end{cases}$$

为了求解前  $l$  个约束对应的约束反力, 解除前  $l$  个约束, 根据后  $k-l$  个约束选择广义坐标  $q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, r = 3n - k + l$ )。这些广义坐标将使得后面  $k-l$  个约束自动满足, 余下前  $l$  个约束方程变为

$$f_j(\mathbf{r}(\mathbf{q}, t), t) = \bar{f}_j(\mathbf{q}, t) \quad (j = 1, 2, \dots, l) \quad (2.112)$$

根据广义坐标形式的动力学普遍方程(2.58)可有

$$\sum_{\alpha=1}^r \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha \right) \delta q_\alpha = 0 \quad (2.113)$$

但此处式(2.113)中的  $r$  个广义虚位移之间并不是相互独立的, 而是由  $l$  个约束方程(2.112)相联系。对方程(2.112)求变分, 可得

$$\delta \bar{f}_j = \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0 \quad (2.114)$$

引入  $l$  个不定乘子  $\lambda_j(t)$ , 将其分别与方程(2.114)相乘, 并与广义坐标形式的动力学普遍方程(2.113)相减<sup>①</sup>可得

$$\sum_{\alpha=1}^r \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha - \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0 \quad (2.115)$$

<sup>①</sup> 此处相减而不是相加是为了后文得到的约束力势能够与上一节具有相同的形式。

在式(2.115)中的  $r$  个广义虚位移中, 只有  $r - l = 3n - k$  个是相互独立的, 而此处引入的  $l$  个不定乘子是可以任意取值的, 那么总是可以选择这样的不定乘子  $\lambda_j(t)$ , 使得式(2.115)中前  $l$  个广义虚位移的系数为零, 那么这样式(2.115)就只剩下相互独立的  $r - l$  个广义虚位移, 它们的系数必须为零。综上可得系统的运动微分方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha} & (\alpha = 1, 2, \dots, r) \\ \bar{f}_j(\mathbf{q}, t) = 0 & (j = 1, 2, \dots, l) \end{cases} \quad (2.116)$$

同样可以约束反力的定义式得到广义约束反力的表达式为

$$R_\alpha = \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha} \quad (2.117)$$

则可以记

$$R_{\alpha j} = \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha} \quad (2.118)$$

为第  $j$  个约束条件对应约束反力的第  $\alpha$  个广义力分量。改写约束反力为

$$R_\alpha = \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left( - \sum_{j=1}^l \lambda_j \bar{f}_j \right) \quad (2.119)$$

故标量函数

$$W(\mathbf{q}, t) = - \sum_{j=1}^l \lambda_j \bar{f}_j(\mathbf{q}, t) \quad (2.120)$$

称为**约束力势**。与上节的讨论类似, 这时也可以形式上将约束力势视作外力的势能加入 Lagrange 函数中, 即引入新的 Lagrange 函数

$$\bar{L} = T - W = T + \sum_{j=1}^l \lambda_j \bar{f}_j(\mathbf{q}, t) \quad (2.121)$$

由此方程(2.116)利用新的 Lagrange 函数形式上写为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha & (\alpha = 1, 2, \dots, r) \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} = 0 & (j = 1, 2, \dots, l) \end{cases} \quad (2.122)$$

如果理想完整系统具有广义势  $U = U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , 则相应地可以将方程(2.116)利用 Lagrange 函数改写为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial q_\alpha} & (\alpha = 1, 2, \dots, r) \\ \bar{f}_j(\mathbf{q}, t) = 0 & (j = 1, 2, \dots, l) \end{cases} \quad (2.123)$$

此时也可以形式上将约束力势当作外力的势能加入 Lagrange 函数中, 即引入新的 Lagrange 函数

$$\bar{L} = T - U - W = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{j=1}^l \lambda_j \bar{f}_j(\mathbf{q}, t) \quad (2.124)$$

由此方程(2.123)可以用新的 Lagrange 函数形式上写为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\alpha} = 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, r) \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_j} = 0 & (j = 1, 2, \dots, l) \end{cases} \quad (2.125)$$

例 2.13 质量为  $m$  的质点从半径为  $R$  的光滑半球面顶端零初速滑下, 求脱离球面时的位置。

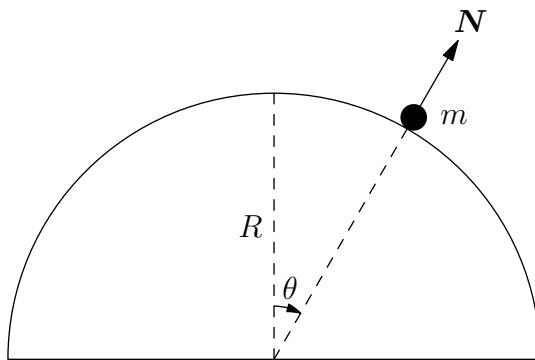


图 2.16: 例 2.13

解 本例约束为可解约束  $r - R \geq 0$ 。未解时约束为  $r - R = 0$ , 约束反力为  $N$ , 约束解除的条件为  $N = 0$ 。

除去约束, 选择广义坐标为  $r, \theta$ , 则 Lagrange 函数为

$$\bar{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta + \lambda(r - R)$$

则有系统方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial r} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + mg \cos \theta - \lambda = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mgr \sin \theta = 0 \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda} = r - R = 0 \end{cases}$$

由第三式可得  $r = R$ , 再由前两式消去  $r$ , 可得

$$\begin{cases} mR\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda = 0 \\ mR^2\ddot{\theta} - mgR \sin \theta = 0 \end{cases}$$

根据  $\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ , 上面第二式可以化为

$$d \left( \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta \right) = 0$$

根据初始条件  $\dot{\theta}|_{\theta=0} = 0$  可得

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta = mgR$$

由此可解得

$$\lambda = mg(3 \cos \theta - 2)$$

约束反力为

$$\begin{cases} N_r = \lambda \frac{\partial}{\partial r}(r - R) = \lambda \\ N_\theta = \lambda \frac{\partial}{\partial \theta}(r - R) = 0 \end{cases}$$

由此脱离条件为

$$\lambda = mg(3 \cos \theta - 2) = 0$$

即  $\theta = \arccos \frac{2}{3}$  时, 此时高度为  $h = R \cos \theta = \frac{2}{3}R$ 。

## 2.8 守恒定律

### 2.8.1 广义动量及其守恒定律

定义与广义坐标  $q_\alpha$  共轭的广义动量

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (2.126)$$

则理想完整有势系的 Lagrange 方程(2.73)变为

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (2.127)$$

式(2.127)表示的关系称为广义动量定理。

如果某系统的 Lagrange 函数不显含某个广义坐标, 即

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

则称坐标  $q_\alpha$  为循环坐标或可遗坐标, 根据广义动量定理(2.127), 可有

$$\dot{p}_\alpha = 0 \quad (2.128)$$

即, 与循环坐标共轭的广义动量守恒。

### 2.8.2 广义能量及其守恒定律

考虑 Lagrange 函数  $L = L(q, \dot{q}, t)$  的时间导数

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - \sum_{i=1}^s \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= - \sum_{\alpha=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right] \dot{q}_\alpha + \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.129)$$

利用理想完整有势系的 Lagrange 方程, 式(2.129)中的第一项为零。由此可令

$$H = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L \quad (2.130)$$

称为广义能量, 由此式(2.129)化为

$$\dot{H} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.131)$$

式(2.131)表示的关系称为广义能量定理。如果系统的 Lagrange 函数不显含时间, 即

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

则有

$$\dot{H} = 0 \quad (2.132)$$

即, 系统的广义能量守恒。

### 2.8.3 Lagrange 函数和广义能量的数学结构

首先考虑普通势系统, 由于  $V$  与广义速度无关, 因此根据动能的表达式(2.62), 可有

$$L = T - V = T_2 + T_1 + (T_0 - V) = L_2 + L_1 + L_0 \quad (2.133)$$

由此, 根据广义速度  $\dot{q}_{\alpha}$  的次数, 可将 Lagrange 函数  $L$  分为三项, 即

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} \\ L_1 &= \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \\ L_0 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 - V \end{aligned}$$

显然,  $L_2, L_1$  分别为广义速度  $\dot{q}_{\alpha}$  的 2 次、1 次齐次函数, 根据 Euler 定理, 可得广义能量为

$$H = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L = 2L_2 + L_1 - (L_2 + L_1 + L_0) = L_2 - L_0 = T_2 - T_0 + V \quad (2.134)$$

如果系统是定常的, 则有  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。此时  $T_1 = T_0 = 0$ ,  $T = T_2$ , 所以

$$H = T + V \quad (2.135)$$

即对定常系统, 广义能量即惯性系内的系统总能量。

对于非定常系统, 此时  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \neq \mathbf{0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 所以

$$H = T_2 - T_0 + V \quad (2.136)$$

记  $T' = T_2$ ,  $V' = V - T_0$  分别为广义曲线坐标系的等效动能与势能, 则有

$$H = T' + V' \quad (2.137)$$

即对非定常系统, 广义能量即广义坐标系 (如非惯性系) 内的系统总能量。

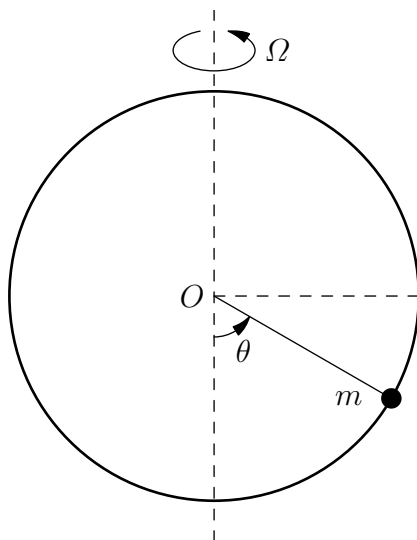


图 2.17: 例 2.14

**例 2.14** 半径为  $R$  的光滑圆环以匀角速度  $\Omega$  绕铅直直径旋转。质量为  $m$  的质点穿在圆环上，求其平衡位置。

**解** 选择  $\theta$  作为广义坐标，则系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\Omega^2 \sin^2 \theta + R^2\dot{\theta}^2) + mgR(1 - \cos \theta)$$

Lagrange 函数不显含时间，故广义能量守恒，即

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \sin^2 \theta + mgR(1 - \cos \theta) = H_0$$

根据此广义能量的数学结构，可得旋转系中的动能为

$$T' = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

惯性离心力与重力总势能（等效势能）为

$$V' = -\frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \sin^2 \theta + mgR(1 - \cos \theta)$$

系统的势能曲线如图 2.18 所示。

平衡位置需满足

$$\left. \frac{\partial V'}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = -mR^2\Omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + mgR \sin \theta_0 = 0$$

平衡是否稳定需考察

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_0} = mgR \cos \theta_0 - mR^2\Omega^2(2 \cos^2 \theta_0 - 1)$$

当  $\Omega^2 < \frac{g}{R}$  时，平衡位置为  $\theta_0 = 0$  和  $\theta_0 = \pi$ 。当  $\theta_0 = 0$  时，

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_0 = mR^2 \left( \frac{g}{R} - \Omega^2 \right) > 0$$

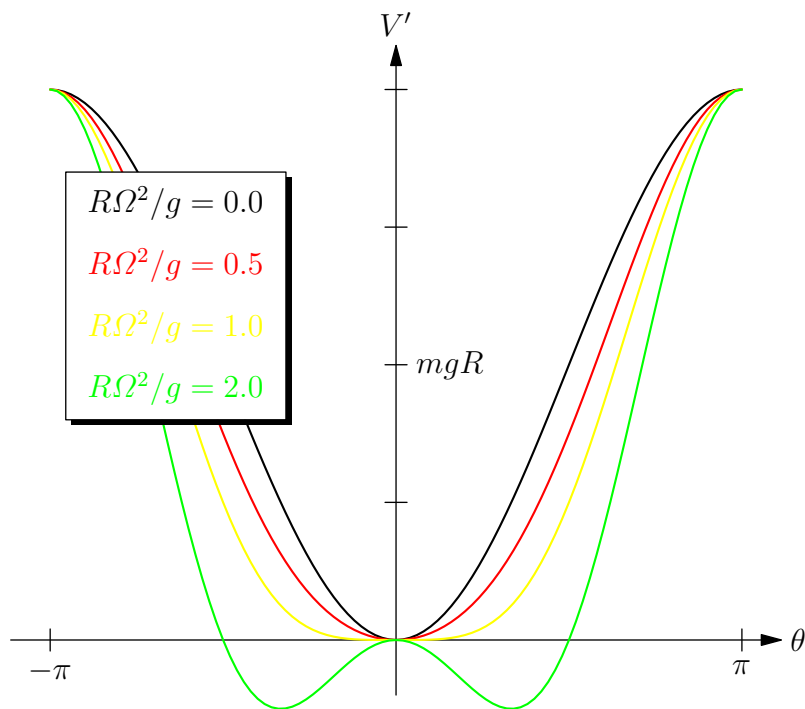


图 2.18: 势能曲线

平衡是稳定的。当  $\theta_0 = \pi$  时,

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_{\pi} = -mR^2 \left( \frac{g}{R} + \Omega^2 \right) < 0$$

平衡是不稳定的。

当  $\Omega^2 > \frac{g}{R}$  时, 平衡位置为  $\theta_0 = 0$ 、 $\theta_0 = \pm \arccos \frac{g}{R\Omega^2}$  和  $\theta_0 = \pi$ 。当  $\theta_0 = 0$  时,

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_0 = mR^2 \left( \frac{g}{R} - \Omega^2 \right) < 0$$

平衡是不稳定的。当  $\theta_0 = \pm \arccos \frac{g}{R\Omega^2}$  时,

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_{\pm \arccos \frac{g}{R\Omega^2}} = \frac{mR^2}{\Omega^2} \left( \Omega^4 - \frac{g^2}{R^2} \right) > 0$$

平衡是稳定的。当  $\theta_0 = \pi$  时,

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \theta^2} \right|_{\pi} = -mR^2 \left( \frac{g}{R} + \Omega^2 \right) < 0$$

平衡是不稳定的。

**例 2.15 (电磁场中自由带电粒子的动量、能量及其守恒定律)** 设电磁场的标势和矢势分别为

$$\phi = \phi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

则该电磁场中的自由粒子 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} - e\phi \quad (2.138)$$

因此其动量为

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A} \quad (2.139)$$

其中  $m\dot{\mathbf{r}}$  可称为机械动量,  $e\mathbf{A}$  可称为电磁动量。其能量为

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = L_2 - L_0 = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\phi \quad (2.140)$$

其中  $\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$  可称为机械动能,  $e\phi$  可称为电磁势能。

对于稳恒电磁场, 此时标势和矢势与时间无关, 即

$$\phi = \phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

此时 Lagrange 函数不显含时间, 即

$$\dot{H} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

粒子的能量守恒。

**例 2.16 (稳恒均匀电磁场中的自由带电粒子)** 设空间中存在稳恒、均匀的电磁场  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ , 取磁场方向为  $z$  方向, 则可取

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}B(-ye_x + xe_y) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}, \quad \phi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

此时, 该粒子的 Lagrange 函数可表示为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}e\dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}e\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

根据 Lagrange 方程, 可得稳恒均匀电磁场中的自由带电粒子的运动微分方程为

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + e\mathbf{E}$$

上式右端即为该粒子受到的 Lorentz 力。

## 2.8.4 自然系统与非自然系统

对于具有普通势或者广义势的系统, 系统的 Lagrange 函数可以表示为式(2.133)的形式, 即

$$L = L_2 + L_1 + L_0 \quad (2.141)$$

其中  $L_2$  是广义速度的二次齐次式,  $L_1$  是广义速度的一次齐次式,  $L_0$  与广义速度无关。如果一个系统的 Lagrange 函数具有式(2.141)的结构, 而且满足

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right) \neq 0 \quad (2.142)$$

这样的系统称为自然系统。对于根据系统的动能和势能构造出的 Lagrange 函数必定满足式(2.142)的条件, 因为在这种情况下, 实际上有

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} = M_{\alpha\beta}$$

其中  $M_{\alpha\beta}$  的定义为式(2.61), 它必定满足  $\det(M_{\alpha\beta}) \neq 0$  (见第2.6.3节)。



可以将 Lagrange 理论推广到不同于式(2.141)结构的 Lagrange 函数上, 只要这种不同结构的 Lagrange 函数所生成的 Lagrange 方程是所研究系统的动力学方程即可。这种不同形式的 Lagrange 函数也需要满足式(2.142), 这是 Lagrange 方程可解的条件。这种系统称为非自然系统, 这里的“非自然”并没有不现实的意思。

利用非自然系统的 Lagrange 函数可以将 Lagrange 理论推广到经典力学以外的物理学系统上。例如, 当质点的运动速度接近光速时, Newton 定律已经不再适用, 但可以定义一个非自然的 Lagrange 函数, 使得生成的 Lagrange 方程恰好是狭义相对论中的动力学方程, 即可定义 Lagrange 函数为

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V \quad (2.143)$$

式中  $m$  为质点的静止质量,  $c$  为光速。根据 Lagrange 方程(2.73)可得系统的动力学方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \mathbf{F} \quad (2.144)$$

这正是狭义相对论中质点运动的方程。

## 2.9 时空对称性与守恒量

### 2.9.1 时空对称性

某物理定律或某系统的某物理量在某变换下形式或量值保持不变, 则称该变换为对称变换, 此物理定律或物理量具有该变换下的对称性 (或称不变性), 该物理量则称为该系统的守恒量或运动积分。

Lagrange 函数是决定系统力学性质的特征函数, 其变换不变性又称为系统对称性。力学系统在时空变换下的对称性称为时空对称性, 包括

- 空间平移对称性: 系统作任意整体平移, Lagrange 函数不变;
- 空间转动对称性: 系统作任意整体转动, Lagrange 函数不变;
- 时间平移对称性: 系统时间作任意平移, Lagrange 函数不变。

### 2.9.2 动量、角动量与能量守恒

#### 2.9.2.1 空间平移对称性与动量守恒

在平移方向上取广义坐标  $q_1$ , 满足

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \mathbf{e}, i = 1, 2, \dots, n$$

固定其它广义坐标, 只改变广义坐标  $q_1$ , 即令

$$\delta q_\alpha = 0, \quad \alpha = 2, 3, \dots, n$$

则有

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \delta q_1 \mathbf{e}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

因此，广义坐标  $q_1$  的变化将导致系统的整体平移。系统的 Lagrange 函数在平移变换下不变，因此 Lagrange 函数不显含  $q_1$ ，即

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

由广义动量定理，可有

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

又考虑到

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \end{aligned}$$

由此，系统沿  $\mathbf{e}$  方向平移对称，则系统总动量的  $\mathbf{e}$  分量守恒。

空间平移对称性又称空间均匀性，即绝对位置不可测。

### 2.9.2.2 空间转动对称性与角动量守恒

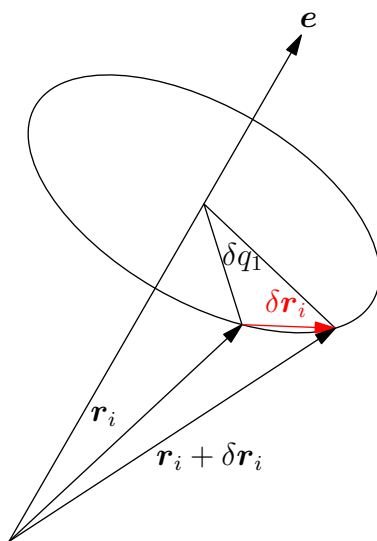


图 2.19: 空间转动

在转动方向上取广义坐标  $q_1$ ，满足

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \mathbf{e} \times \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

固定其它广义坐标，只改变广义坐标  $q_1$ ，即令

$$\delta q_\alpha = 0, \quad \alpha = 2, 3, \dots, n$$

则有

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \delta q_1 \mathbf{e} \times \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

因此, 广义坐标  $q_1$  的变化将导致系统的整体转动。系统的 Lagrange 函数在转动变换下不变, 因此 Lagrange 函数不显含  $q_1$ , 即

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

由广义动量定理, 可有

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

又考虑到

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{e} \cdot (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{L} \end{aligned}$$

由此, 系统绕  $\mathbf{e}$  整体转动对称, 则系统总角动量的  $\mathbf{e}$  分量守恒。

空间转动对称性又称空间各项同性, 即绝对方向不可测。

### 2.9.2.3 时间平移对称性与能量守恒

系统的 Lagrange 函数在时间平移变换下不变, 因此 Lagrange 函数不显含  $t$ , 即

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

由广义能量定理有

$$\dot{H} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

由此, 系统时间平移对称, 则系统总能量守恒。

时间平移对称性又称时间均匀性, 即绝对时间不可测。

守恒定律与时空对称性有关, 全部结论适用于整个物理学。循环坐标反映系统的对称性(变换不变性), 可用其共轭动量守恒定律(只含广义速度和广义坐标)取代运动方程(含广义加速度)。对称性使系统的求解简化。

对称性是系统的客观属性, 不依赖于主观描述。广义坐标选取适当, 可使对称性通过循环坐标直观呈现。根据系统的对称性选择广义坐标, 使循环坐标越多越好。

**例 2.17** 自由质点受势场作用, 场源均匀分布在以  $z$  轴为轴线、螺距为  $h$  的无限长圆柱螺旋线上。找出系统的守恒量。

**解** 选取广义坐标  $(\rho, \phi, \zeta)$  满足

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = \zeta + \frac{h\phi}{2\pi} \end{cases}$$

此处,  $\begin{cases} \rho = C_1 \\ \zeta = C_3 \end{cases}$  表示的即为圆柱螺旋线族。此系统具有对称性: 将质点沿任意螺距为  $h$

的螺旋线移动, Lagrange 函数不变, 即  $\phi$  为循环坐标, 因此有

$$\dot{p}_\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

为了了解此处  $p_\phi$  的物理含义, 考虑柱坐标系  $(\rho, \psi, z)$ , 则广义坐标与柱坐标之间的关系为

$$\begin{cases} \rho = \rho \\ \psi = \phi \\ z = \zeta + \frac{h\phi}{2\pi} \end{cases}$$

如果取柱坐标  $(\rho, \psi, z)$  作为广义坐标, 其与广义坐标共轭的广义动量物理意义比较清晰, 即有

$$p_\psi = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\psi}} = L_z, \quad p_z = \frac{\partial L'}{\partial \dot{z}}$$

此处  $L_z$  即为质点对  $z$  轴的角动量,  $p_z$  为沿  $z$  方向的动量。由此可有

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{z}} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{\phi}} = p_\psi + \frac{h}{2\pi} p_z = L_z + \frac{h}{2\pi} p_z$$

由此可得, 此系统的守恒量为

$$p_\phi = L_z + \frac{h}{2\pi} p_z$$

## 2.10 位形时空的 Lagrange 方程

### 2.10.1 位形时空

理想完整有势系的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (2.145)$$

是  $s$  个二阶常微分方程构成的常微分方程组, 给定  $2s$  个初始条件, 即

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0$$

可以唯一确定位形空间轨道的参数方程

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$$

此处,  $t$  为参数。另选参数  $\tau$ , 将时间看作第  $s+1$  个广义坐标  $q_{s+1}$ , 则  $-H$  即为与  $q_{s+1}$  共轭的广义动量  $p_{s+1} = p_t = -H$ 。由此广义动量定理和广义能量定理将统一为

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, s+1$$

由广义坐标与时间张成的  $s+1$  维抽象空间称为**位形时空**。位形时空中的点称为**世界点**, 代表系统的物理事件。世界点在位形时空运动而描出的轨道称为**世界线**, 反映系统物理过程的演化史。

### 2.10.2 推广的 Lagrange 方程

引入新的参数  $\tau$ , 则有

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}(t(\tau)) \\ t = t(\tau) \end{cases}$$

得到的对应 Lagrange 函数的系统状态函数可以表示为

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{q}, t, \mathbf{q}', t', \tau)$$

由此可有关系<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} t' &= \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{d}{d\tau} &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} = t' \frac{d}{dt} \\ \mathbf{q}' &= \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = t' \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

考虑

$$dL = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{\alpha=1}^s \dot{p}_{\alpha} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} d\dot{q}_{\alpha} - \dot{H} dt$$

可有

$$t' dL = \sum_{\alpha=1}^s p'_{\alpha} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} t' d\dot{q}_{\alpha} - H' dt$$

所以

$$\begin{aligned} d(Lt') &= Ldt' + t'dL = \sum_{\alpha=1}^s p'_{\alpha} dq_{\alpha} - H' dt + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} (dq'_{\alpha} - \dot{q}_{\alpha} dt') + Ldt' \\ &= \sum_{\alpha=1}^s p'_{\alpha} dq_{\alpha} + p'_t dt + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} t' dq'_{\alpha} + p_t dt' \end{aligned} \quad (2.146)$$

由此, 定义

$$\Lambda(\mathbf{q}, t, \mathbf{q}', t', \tau) = L\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{q}'}{t'}, t\right) t' \quad (2.147)$$

求其全微分, 可有

$$d\Lambda = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} dt + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}} dq'_{\alpha} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} dt' + \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau} d\tau \quad (2.148)$$

将式(2.148)与(2.146)对比, 可得

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}}, & p_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} \\ p'_{\alpha} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha}}, & p'_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau} = 0 \end{cases} \quad (2.149)$$

消去式(2.149)中的广义动量, 即可得到位形时空的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s+1 \quad (2.150)$$

<sup>①</sup> 此处, 用  $t'$  来表示  $t$  对  $\tau$  的导数, 今后不再特别说明。

由此,  $q, t$  统一为地位平等的坐标,  $p, H$  统一为地位平等的动量, 时间均匀性与空间均匀性得到统一。

这个过程对经典力学过渡为相对论力学具有启发性, 有助于建立满足相对性原理 (Lorentz 变换不变性或对称性) 的理论系统。时空作为统一体同时变换, 时间不再具有绝对参数地位, 需另选 Lorentz 变换下的不变量作为参数。此时  $\Delta$  在 Lorentz 变换下不变即能保证系统满足相对性原理 (惯性系变换对称性)。

## 第三章 两体问题

无外力的两质点系统在相互作用下的运动求解问题称为**两体问题**。

两体中心力是自然界最普遍、最典型的力场之一。中心力问题研究肇始于行星运动的理论解释，对原子核式模型的确立起了关键性的作用。

### 3.1 两体问题约化与中心力场

#### 3.1.1 Lagrange 函数及其分离变量

在两系统不受外力作用时，设两个质点之间的相互作用势表示为  $V = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ，则系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.1)$$

可见此 Lagrange 函数无循环坐标，两粒子的运动相互耦合。

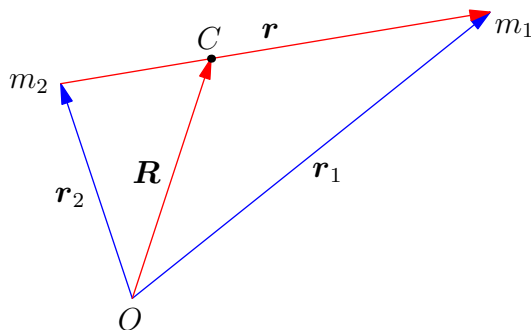


图 3.1: 两体问题

考虑取质心坐标

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.2)$$

和两个质点之间的相对位矢

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (3.3)$$

为广义坐标。记  $M = m_1 + m_2$  为系统的总质量， $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$  为两体约化质量，则有

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} = \mathbf{R} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r} = \mathbf{R} - \frac{\mu}{m_2}\mathbf{r} \end{cases} \quad (3.4)$$

由此, 系统的 Lagrange 方程可以表示为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1 \left( \dot{\mathbf{R}} + \frac{\mu}{m_1} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( \dot{\mathbf{R}} - \frac{\mu}{m_2} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 - V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

由此可以将两体问题等效为两个单体问题——解耦:

1. 整体运动: 质量为  $M$  的质点的运动。Lagrange 函数不显含  $\mathbf{R}$ , 故有  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$ , 即  $M$  做惯性运动。

2. 相对运动: 质量为  $\mu$  的质点的运动。

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$$

即质点  $\mu$  在势场  $V$  中的运动。

系统的动能  $T = T_C + T'$ , 其中  $T_C = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2$  为整体动能,  $T' = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2$  为两体内动能。系统的角动量  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + \mathbf{L}'$ , 其中  $\mathbf{L}_C = \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}}$  为轨道角动量,

$$\mathbf{L}' = \mathbf{r}'_1 \times m_1 \dot{\mathbf{r}}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times m_2 \dot{\mathbf{r}}'_2 = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

为内秉角动量。

由于两系统统的整体运动即为惯性运动, 因此后面的讨论集中于相对运动的求解。

### 3.1.2 两体中心力场

如果两体相互作用势能只与两个粒子的相对距离  $r$  有关, 而和它们的相对方向无关, 即  $V(\mathbf{r}) = V(r)$ , 这种势场称为**中心势场**。在中心势场中, 可有两个质点之间的相互作用力为<sup>①</sup>

$$\mathbf{f}_{12} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = -V'(r) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} = -V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = -\mathbf{f}_{21} \quad (3.6)$$

由此, 内力做功为

$$\mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2 = -V'(r)dr = -dV(r) \quad (3.7)$$

故  $\mu$  的运动能量守恒。再考虑内力矩

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}' = \mathbf{r} \times \left( -V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

故  $\mu$  的运动内秉角动量守恒, 而且有  $\mathbf{r} \perp \mathbf{L}'$ , 即  $\mu$  在垂直于内秉角动量的固定平面内运动。因此相对运动可用平面极坐标系来描述, 即取  $r, \theta$  为广义坐标, 则此时的 Lagrange 函数<sup>②</sup>为

$$L' = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r) \quad (3.9)$$

<sup>①</sup> 此处由于

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

可有

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} = \nabla r = \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{e}_3 = \frac{x}{r} \mathbf{e}_1 + \frac{y}{r} \mathbf{e}_2 + \frac{z}{r} \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

<sup>②</sup> 在本章中, Lagrange 函数和角动量得符号都是  $L$ , 但角动量是矢量, 所以并不会造成混淆。



## 3.2 等效势、运动解与轨道方程

### 3.2.1 运动方程

根据相对运动的 Lagrange 函数

$$L' = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

可得运动方程为

$$\begin{cases} \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -V'(r) = f(r) \\ \mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

### 3.2.2 守恒定律

$\theta$  为循环坐标, 故有  $p_\theta$  守恒, 即

$$p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} = l (\text{常数}) \quad (3.11)$$

此即为两体内秉角动量守恒。

Lagrange 函数  $L'$  不显含时间, 故

$$H = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E (\text{常数}) \quad (3.12)$$

即两体机械能守恒。

### 3.2.3 运动解

由式(3.11)可得

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$$

代入式(3.12)可得

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = E \quad (3.13)$$

令

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (3.14)$$

称为等效势, 则式(3.13)化为

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) = E \quad (3.15)$$

由此, 径向运动等效为质点  $\mu$  在等效势场  $U(r)$  中的一维运动。等效势中的惯性离心势来自可遗角坐标共轭动量效应。

在

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r)]} \quad (3.16)$$

两边积分可得

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}} \quad (3.17)$$

即有  $r = r(t)$ 。再在

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \quad (3.18)$$

两边积分可得

$$\theta - \theta_0 = \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt}{[r(t)]^2} \quad (3.19)$$

即有  $\theta = \theta(t)$ 。由此即得到了全部相对运动的解。

### 3.2.4 轨道方程

将式(3.16)与式(3.18)相除, 可得

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{\mu r^2}{l} \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r)]} \quad (3.20)$$

做变量代换  $u = \frac{1}{r}$ , 可得两体问题轨道微分方程

$$\frac{du}{d\theta} = \mp \frac{1}{l} \sqrt{2\mu \left[ E - U\left(\frac{1}{u}\right) \right]} \quad (3.21)$$

对于势场  $V(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$  和  $V(r) = \alpha r^2$ , 式(3.21)有解析解。如果  $r$  的变化区间有两个边界  $r_{\min}$  和  $r_{\max}$ , 则轨道位于两个圆  $r = r_{\min}$  和  $r = r_{\max}$  所限制的环形区域内, 但有限运动的轨道并不一定是闭合的。在  $r$  从  $r_{\max}$  变化到  $r_{\min}$  再变回  $r_{\max}$  的这段时间内, 矢径转过了一个角度  $\Delta\theta$ , 根据式(3.21)有

$$\Delta\theta = \mp 2 \int_{\frac{1}{r_{\max}}}^{\frac{1}{r_{\min}}} \frac{l du}{\sqrt{2\mu \left[ E - U\left(\frac{1}{u}\right) \right]}} \quad (3.22)$$

如果  $\Delta\theta$  与  $2\pi$  的比值是有理数, 轨道是闭合的。一般来说, 在任意形式的  $V(r)$  情况下, 轨道闭合的情况是罕见的。在任意形式的  $V(r)$  情况下,  $\Delta\theta$  与  $2\pi$  的比值并不是有理数, 因此在一般情况下, 有限运动的轨道并不是闭合的。在无限长的时间进程中, 轨道无数次经过  $r_{\max}$  和  $r_{\min}$  的位置而填满由两个圆所限制的整个圆环, 如图3.2所示。只有  $V(r) = \frac{\alpha}{r}$  和  $V(r) = \alpha r^2$  两种形式的势场中, 任意有限运动的轨道都是闭合的。

也可通过系统的运动方程(3.10)得到轨道满足的微分方程。考虑

$$\dot{r} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{l}{\mu} \frac{du}{d\theta}$$

所以

$$\ddot{r} = \dot{\theta} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{l}{\mu} \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{l^2 u^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

由此可得

$$-\frac{l^2 u^2}{\mu} \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \mu r \left( \frac{l}{\mu r^2} \right)^2 = f(r)$$

整理可得二阶常微分方程

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \quad (3.23)$$

称为 Binet 方程。

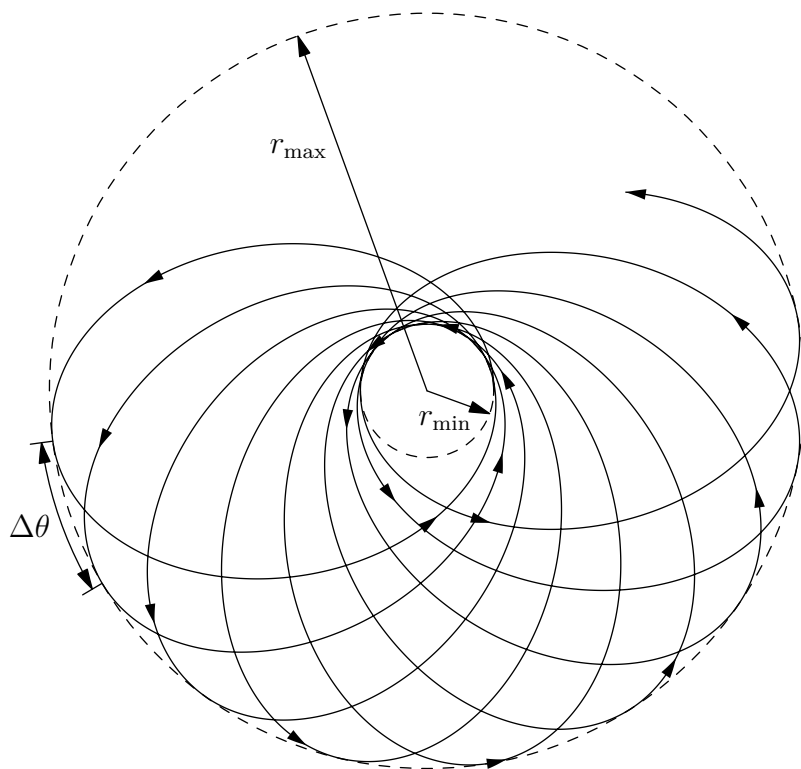


图 3.2: 非闭合轨道

### 3.2.5 圆轨道的存在性与稳定性

圆轨道存在，即径向运动处于静止状态，即可以表示为

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=r_m} = 0$$

稳定要求在圆轨道上等效势能取极小值，即

$$\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r=r_m} > 0$$

例 3.1 利用等效势定性分析质点在势场

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^n}, \quad \alpha, n > 0$$

中的运动。

解 势场对应的力

$$f(r) = -V'(r) = -\frac{\alpha n}{r^{n+1}} < 0$$

即势场为吸引势。则等效势为

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

径向运动方程

$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U(r) = E$$

需要满足  $\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 \geq 0$ ，即

$$U(r) \leq E$$

上面的不等式即决定了质点径向运动的范围。计算

$$U'(r) = -\frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha n}{r^{n+1}} = 0$$

可得  $U(r)$  的极值点为

$$r_m = \left( \frac{l^2}{n\alpha\mu} \right)^{\frac{1}{2-n}}$$

极值点存在要求  $n \neq 2$ , 因此势场分为  $0 < n < 2$ 、 $n > 2$  和  $n = 2$  三种情形。

1.  $0 < n < 2$ 。当  $E = E_0 = U_{\min}$  时, 质点沿圆轨道运动, 由于是极小值轨道是稳定的。

当  $E = E_1 < 0$  时, 运动被限制在  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  的范围内, 这种状态称为束缚态。按前面的讨论, 束缚态的轨道不一定是闭合的。

当  $E = E_2 = 0$  时, 粒子的运动范围为  $r \geq r_{\min}$ , 当  $r \rightarrow +\infty$  时, 粒子的速度趋于 0, 轨迹趋于直线。

当  $E = E_3 > 0$  时, 粒子的运动范围同样为  $r \geq r_{\min}$ , 但当  $r \rightarrow +\infty$  时, 粒子的动能趋于  $E$ , 轨迹趋于直线。这种状态称为散射态。

2.  $n > 2$ 。当  $E = E_0 = U_{\max}$  时, 质点沿圆轨道运动, 由于是极大值轨道是不稳定的。

当  $0 < E = E_1 < U_{\max}$  时, 粒子只能出现在  $r = r_{\min}$  的圆内或  $r = r_{\max}$  的圆外, 在中间的环形区域内粒子是禁戒的。若初始时刻粒子在  $r = r_{\min}$  的圆内, 则  $\dot{r} < 0$  时, 粒子被吸引至力心; 当  $\dot{r} > 0$  时, 粒子先飞到  $r = r_{\min}$  的圆周上, 然后折回到力心。而如果初始时刻粒子在  $r = r_{\max}$  的圆外, 则  $\dot{r} < 0$  时, 粒子先飞到  $r = r_{\max}$  的圆周上, 然后飞向无穷远处; 当  $\dot{r} > 0$  时, 粒子直接飞翔无穷远处最终成为自由粒子。

当  $E = E_2 = 0$  时或者  $E = E_4 < 0$  时, 粒子的运动范围为  $r = r_{\max}$  的圆内, 并最终被力心俘获。

当  $E = E_3 > U_{\max}$  时, 粒子可在全空间运动。当  $\dot{r} > 0$  时, 粒子飞向无穷远最终变为自由粒子; 当  $\dot{r} < 0$  时, 粒子飞向中心, 最后被力心俘获。

3.  $n = 2$  而且  $\alpha > \frac{l^2}{2\mu}$ 。当  $E = E_1 < 0$  时, 粒子只能出现在  $r = r_{\max}$  的圆内, 并最终被力心俘获。

当  $E = E_2 = 0$  时, 粒子可在全空间运动, 最终粒子将飞向无穷远处且趋于静止。

当  $E = E_3 > 0$  时, 粒子可在全空间运动, 最终将飞向无穷远处最终称为自由粒子。

4.  $n = 2$  而且  $\alpha < \frac{l^2}{2\mu}$ 。在这种情形下, 只能  $E > 0$ , 此时粒子只能出现在  $r = r_{\max}$  的圆外, 最终飞向无穷远而称为自由粒子。

### 例 3.2 求势场

$$V(r) = \alpha r^n$$

存在稳定圆轨道的条件。

解 等效势为

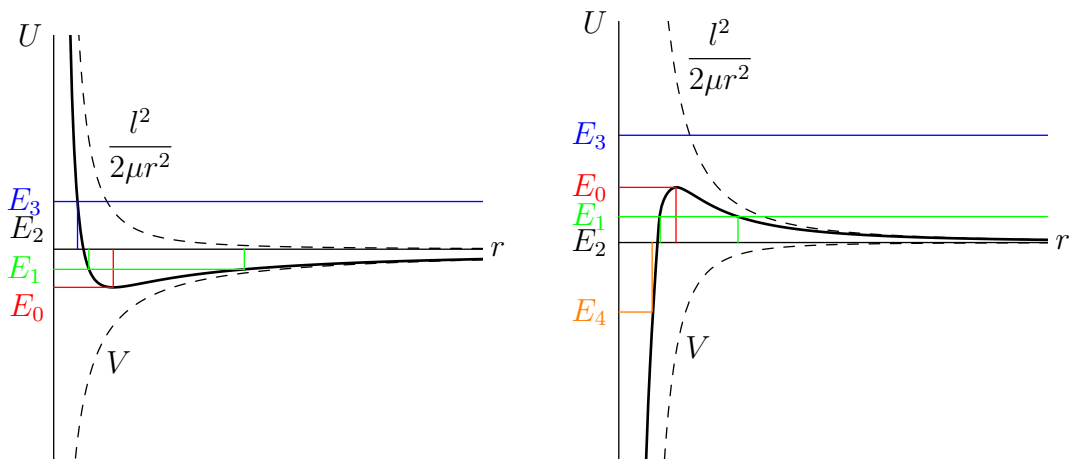
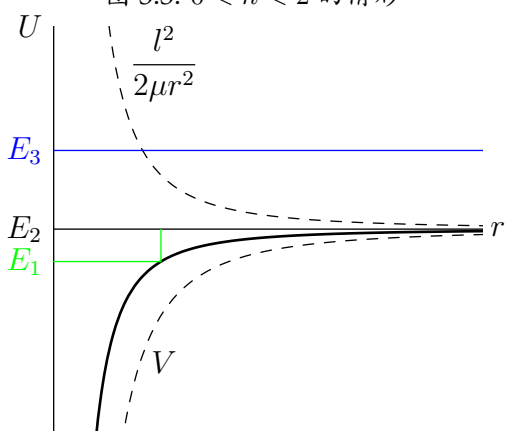
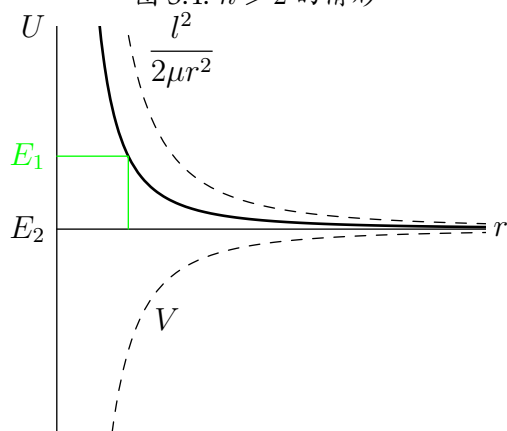
$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \alpha r^n$$

存在圆轨道要求

$$U'(r_m) = -\frac{l^2}{\mu r_m^3} + \alpha n r_m^{n-1} = 0$$

即有

$$\alpha n r_m^{n+2} = \frac{l^2}{\mu}$$

图 3.3:  $0 < n < 2$  的情形图 3.4:  $n > 2$  的情形图 3.5:  $n = 2$  的情形 ( $\alpha > \frac{l^2}{2\mu}$ )图 3.6:  $n = 2$  的情形 ( $\alpha < \frac{l^2}{2\mu}$ )

由此即要求  $\alpha n > 0$ 。此时

$$f(r) = -V'(r) = -\alpha n r^{n-1} < 0$$

即存在圆轨道要求势场为吸引力场。下面考虑稳定性，稳定性要求

$$U''(r_m) = \frac{1}{r_m^4} \left[ (n-1)\alpha n r_m^{n+2} + \frac{3l^2}{\mu} \right] = (n+2) \frac{l^2}{\mu r_m^4} > 0$$

即圆轨道稳定要求  $n > -2$ 。

综上，存在稳定圆轨道的条件为  $\alpha > 0, n > 0$  或者  $\alpha < 0, -2 < n < 0$ 。

### 3.3 距离反比势场与 Kepler 问题

距离反比势可以表示为

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad f(r) = -V'(r) = \frac{\alpha}{r^2}$$

此势场当  $\alpha < 0$  时表现为引力场，当  $\alpha > 0$  时表现为斥力场。其等效势为

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r} \quad (3.24)$$

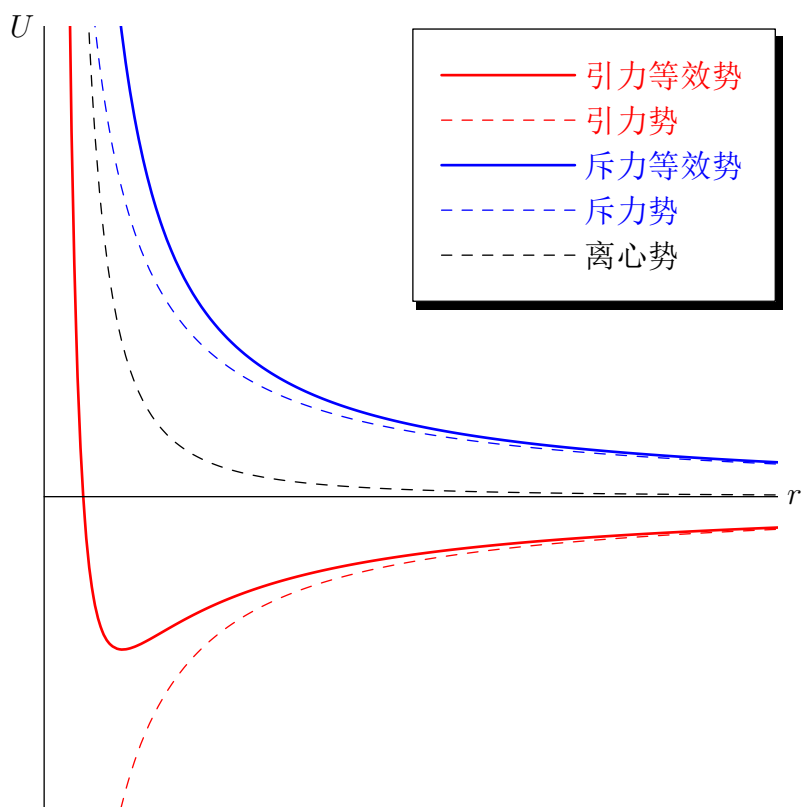


图 3.7: 距离反比势场势能曲线图

对于引力情形, 在

$$r_m = -\frac{l^2}{\mu\alpha} \quad (3.25)$$

时, 等效势有极小值

$$U_{\min} = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2} \quad (3.26)$$

对于斥力的情形, 等效势没有极值, 仍记

$$r_m = -\frac{l^2}{\mu\alpha}$$

当  $\alpha < 0$  时 (即引力情形) 称为 Kepler 问题。

### 3.3.1 轨道方程

对于 Kepler 问题, Binet 方程(3.23)为

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{r_m} \quad (3.27)$$

方程(3.27)的通解为

$$u = \frac{1}{r_m} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

即

$$r = \frac{r_m}{1 + Ar_m \cos(\theta - \theta_0)}$$

适当选取极轴的方向，可以使得  $\theta_0 = 0$ ，此时轨道方程为

$$r = \frac{r_m}{1 + Ar_m \cos \theta}$$

记

$$p = |r_m| = \frac{l^2}{\mu|\alpha|}, \quad e = Ap \quad (3.28)$$

其中  $p$  为轨道参数， $e$  为离心率，由此可得 Kepler 问题的轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (3.29)$$

根据轨道方程可得质点与力心的最短距离为

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e}$$

此点一般称为近日点或近心点。在近日点有  $\dot{r}|_{r=r_{\min}} = 0$ ，因此  $r_{\min}$  满足

$$\frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2} + \frac{\alpha}{r_{\min}} = E$$

由此可得离心率与系统总能量的关系

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{U_{\min}}} \quad (3.30)$$

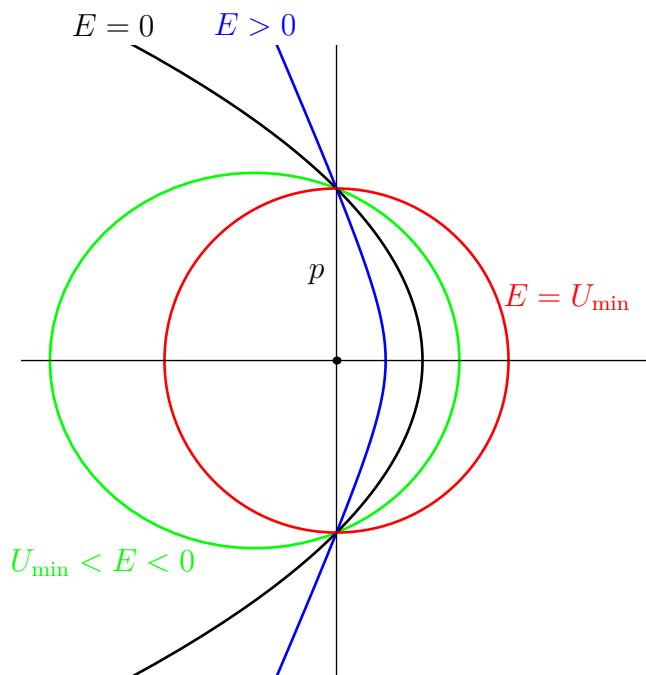


图 3.8: 各种情形下轨道的形状

在引力的情形下， $\alpha < 0$ ，按照系统能量的区别可以分为以下 4 种情况：

1. 当  $E > 0$  时， $e > 1$ ，轨道为双曲线；
2. 当  $E = 0$  时， $e = 1$ ，轨道为抛物线；
3. 当  $U_{\min} < E < 0$  时， $0 < e < 1$ ，轨道为椭圆；

4. 当  $E = U_{\min}$  时,  $e = 0$ , 轨道为圆。

各种情形下, 轨道的形状如图3.8所示。

当质点沿着轨道运动时, 坐标对时间的依赖关系可以用式(3.17)得到。它可以表示为下面所述的一种方便的参数形式。

首先研究椭圆轨道。对椭圆轨道, 质点与力心的最大距离为

$$r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

此点一般称为远日点或远心点。因此可有椭圆的半长轴为

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} \right) = \frac{\alpha}{2E} > 0$$

由此, 根据式(3.17)可得

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{\min}}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}} = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 - \frac{\alpha}{|E|}r - \frac{l^2}{2\mu|E|}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu a}{|\alpha|}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}} \end{aligned}$$

利用变换

$$r - a = -ae \cos \xi$$

可得

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} \int_0^\xi (1 - e \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (\xi - e \sin \xi)$$

如果将近日点的时刻取为  $t_0 = 0$ , 可得 Kepler 方程

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (\xi - e \sin \xi) \quad (3.31)$$

此时即可有关于到力心距离的参数方程

$$\begin{cases} r = a(1 - e \cos \xi) \\ t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (\xi - e \sin \xi) \end{cases} \quad (3.32)$$

再结合轨道方程(3.29), 可得轨道的参数方程

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = a(\cos \xi - e) \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} = a\sqrt{1 - e^2} \sin \xi \\ t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (\xi - e \sin \xi) \end{cases} \quad (3.33)$$

沿着椭圆轨道运动一整圈即对应着参数  $\xi$  从 0 到  $2\pi$ , 其中参数  $\xi$  称为椭圆的圆心角, 其几何意义如图3.9所示。

对于双曲线轨道, 同样有双曲线的半轴长为

$$a = \frac{|\alpha|}{2E}$$



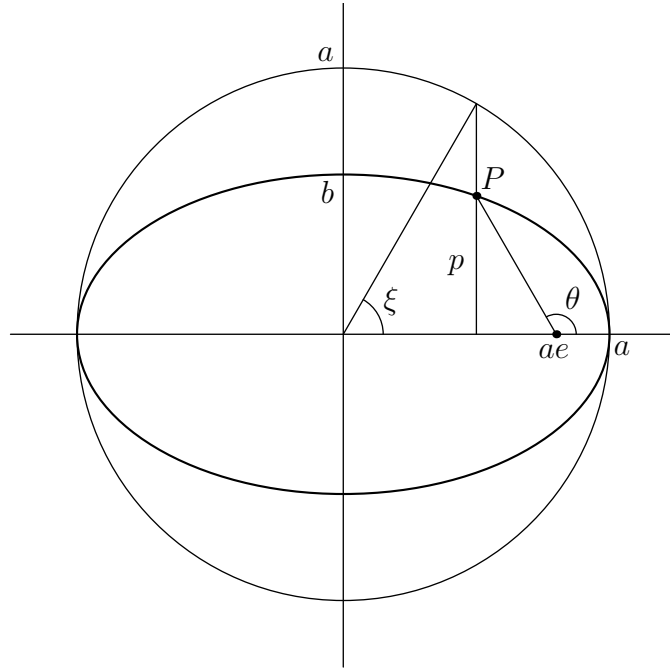


图 3.9: 圆心角的几何意义

同样, 根据式(3.17)可得

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{\min}}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}} = \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 - \frac{\alpha}{E}r - \frac{l^2}{2\mu E}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu a}{|\alpha|}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{(r + a)^2 - a^2 e^2}} \end{aligned}$$

利用变换

$$r + a = ae \cosh \xi$$

可得

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} \int_0^\xi (e \cosh \xi - 1) d\xi = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (e \sinh \xi - \xi)$$

如果将近日点的时刻取为  $t_0 = 0$ , 可得

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (e \sinh \xi - \xi) \quad (3.34)$$

此时即可有关于到力心距离的参数方程

$$\begin{cases} r = a(e \cosh \xi - 1) \\ t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (e \sinh \xi - \xi) \end{cases} \quad (3.35)$$

再结合轨道方程(3.29), 可得轨道的参数方程

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = a(e - \cosh \xi) \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh \xi \\ t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (e \sinh \xi - \xi) \end{cases} \quad (3.36)$$

其中参数  $\xi$  的取值范围为  $(-\infty, +\infty)$ , 近日点即对应  $\xi = 0$ 。

对于抛物线轨道, 根据式(3.17)可得

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{\min}}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}} = \sqrt{\frac{\mu}{2|\alpha|}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{l^2}{2\mu|\alpha|}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2|\alpha|}} \int_{r_{\min}}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{p}{2}}} \end{aligned}$$

利用变换

$$r = \frac{p}{2}(1 + \eta^2)$$

可得

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu p^3}{|\alpha|}} \int_0^\eta \frac{1}{2}(1 + \eta^2) d\eta = \sqrt{\frac{\mu p^3}{|\alpha|}} \frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{\eta^3}{3}\right)$$

如果将近日点的时刻取为  $t_0 = 0$ , 可得

$$t = \sqrt{\frac{\mu p^3}{|\alpha|}} \frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{\eta^3}{3}\right) \quad (3.37)$$

此时即可有关于到力心距离的参数方程

$$\begin{cases} r = \frac{p}{2}(1 + \eta^2) \\ t = \sqrt{\frac{\mu p^3}{|\alpha|}} \frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{\eta^3}{3}\right) \end{cases} \quad (3.38)$$

再结合轨道方程(3.29), 可得轨道的参数方程

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = \frac{p}{2}(1 - \eta^2) \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} = p\eta \\ t = \sqrt{\frac{\mu p^3}{|\alpha|}} \frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{\eta^3}{3}\right) \end{cases} \quad (3.39)$$

其中参数  $\eta$  的取值范围为  $(-\infty, +\infty)$ , 近日点即对应  $\eta = 0$ 。

### 3.3.2 Laplace-Runge-Lenz 矢量

在 Kepler 势场  $V(r) = \frac{\alpha}{r}$  中存在其特有的运动积分, 称为 Laplace-Runge-Lenz 矢量

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r} \quad (3.40)$$

直接求其时间导数可得

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{L} + \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \dot{\mathbf{v}} \times (\mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \\ &= \mu \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - \mu \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \end{aligned}$$

将运动方程  $\mu \dot{\mathbf{v}} = \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3}$  代入, 即可得

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{0}$$

由此便验证了 Laplace-Runge-Lenz 矢量  $\mathbf{A}$  是运动积分。再考虑

$$\begin{aligned} A^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{v} \times \mathbf{L} + \alpha \mathbf{e}_r) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L} + \alpha \mathbf{e}_r) = v^2 l^2 + 2\alpha \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) + \alpha^2 \\ &= v^2 l^2 + \frac{2\alpha}{\mu r} \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + \alpha^2 = v^2 l^2 + \frac{2\alpha}{\mu r} l^2 + \alpha^2 = \frac{2}{\mu} \left( \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{\alpha}{r} \right) l^2 + \alpha^2 \\ &= \frac{2El^2}{\mu} + \alpha^2 = \alpha^2 e^2 \end{aligned}$$

即 Laplace-Runge-Lenz 矢量的大小与离心率成正比。在椭圆轨道的特殊情形下, Laplace-Runge-Lenz 矢量如图3.10所示。

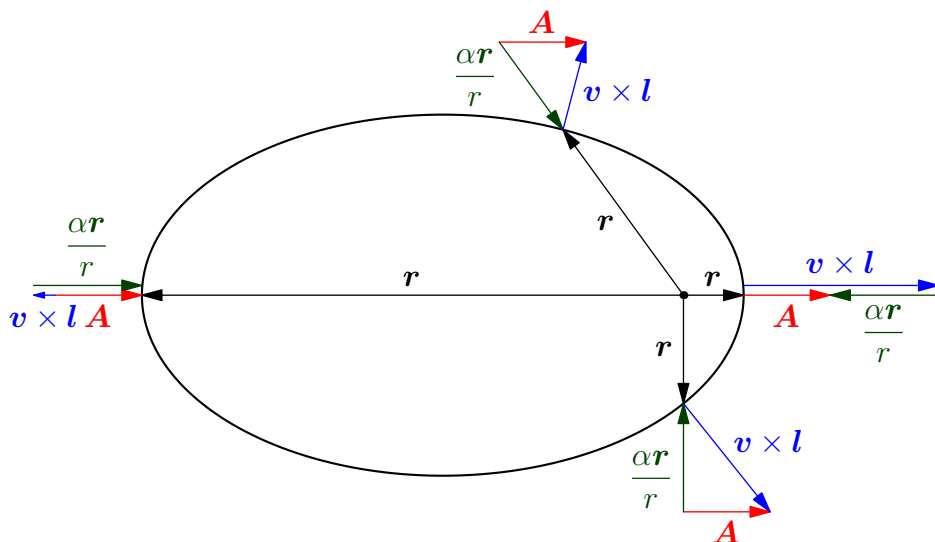


图 3.10: Laplace-Runge-Lenz 矢量

### 3.3.3 Kepler 行星运动定律

- Kepler 第一定律: 行星以太阳为焦点, 沿椭圆轨道运动。椭圆轨道的半长轴半短轴分别为

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{|\alpha|}{2|E|} \quad (3.41)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \quad (3.42)$$

由此可得, 能量取决于长轴, 与形状无关; 长轴相同, 短轴长的轨道角动量大。

- Kepler 第二定律: 太阳与行星连线的扫面速度为常量。即

$$dS = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

因此

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{L}}{2\mu} = \text{常矢量} \quad (3.43)$$

- Kepler 第三定律: 行星公转周期的平方正比于椭圆半长轴的立方。根据第二定律中求出的面积速度, 可以求出行星公转的周期

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{L}{2\mu}} = \pi |\alpha| \sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}} = \pi \sqrt{\frac{4\mu a^3}{|\alpha|}} \quad (3.44)$$

由此即

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{|\alpha|} \quad (3.45)$$

此处  $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ , 根据万有引力定律,  $\alpha = -GMm$ , 其中  $G$  为万有引力常数。所以有

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \approx \frac{4\pi^2}{GM} \quad (M \gg m) \quad (3.46)$$

Kepler 第三定律指出, 比值  $\frac{T^2}{a^3}$  是一个仅与中心天体性质相关的常数, 这实际上仅在中心天体的质量远大于行星的质量  $M \gg m$  时能够成立。

## 3.4 粒子弹性散射

粒子散射是获取粒子相互作用信息, 进而确定物质围观结构的实验手段之一。

散射前后, 两粒子相距无限远, 相互作用势可取为零。散射过程中不受外力, 或外力可忽略。粒子间的相互作用为两体中心力。

### 3.4.1 弹性散射

散射过程中, 粒子的内部状态不变, 因而静能不变。散射前后, 粒子的总动量与总动能守恒。

由于散射过程中不受外力作用, 因此质心系满足

$$\dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$$

质心系是惯性系。在质心系中, 动量守恒和能量守恒可以分别表示为

$$\begin{cases} m_1 \mathbf{v}'_{1i} + m_2 \mathbf{v}'_{2i} = m_1 \mathbf{v}'_{1f} + m_2 \mathbf{v}'_{2f} = \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}'_{1i}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}'_{2i}{}^2 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}'_{1f}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}'_{2f}{}^2 \end{cases} \quad (3.47a)$$

$$(3.47b)$$

由动量守恒(3.47a)可得

$$m_1 \mathbf{v}'_{1i} = -m_2 \mathbf{v}'_{2i}, \quad m_1 \mathbf{v}'_{1f} = -m_2 \mathbf{v}'_{2f}$$

由上式和动量守恒(3.47b)可得

$$v'_{1f} = v'_{1i}, \quad v'_{2f} = v'_{2i}$$

即质心系中, 两粒子动量大小相等, 方向相反。弹性散射后, 粒子的速率不变, 运动方向偏转, 偏转角度记作  $\theta$ , 称为**质心系散射角**。散射角由相互作用决定。由于在实验室坐标系中, 速度满足

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_1, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_2$$

因此, 两个粒子的相对速度在质心系和实验室系中相同, 记作

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2$$

下面考虑靶粒子初始时刻静止的情形, 即  $\mathbf{v}_{2i} = \mathbf{0}$ , 此时  $\mathbf{v}'_{2i} = -\mathbf{V}$ , 因此有

$$m_1 \mathbf{v}'_{1i} = -m_2 \mathbf{v}'_{2i} = m_2 \mathbf{V}$$

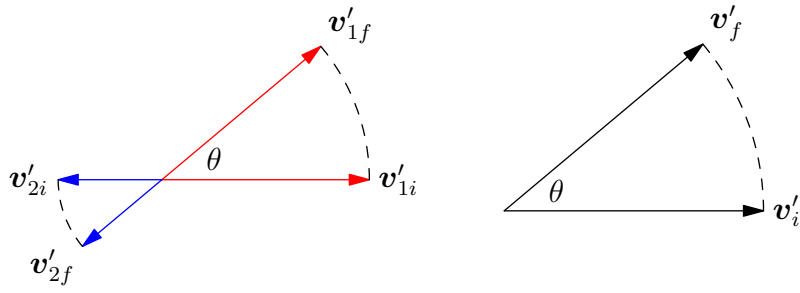


图 3.11: 质心坐标系中的散射

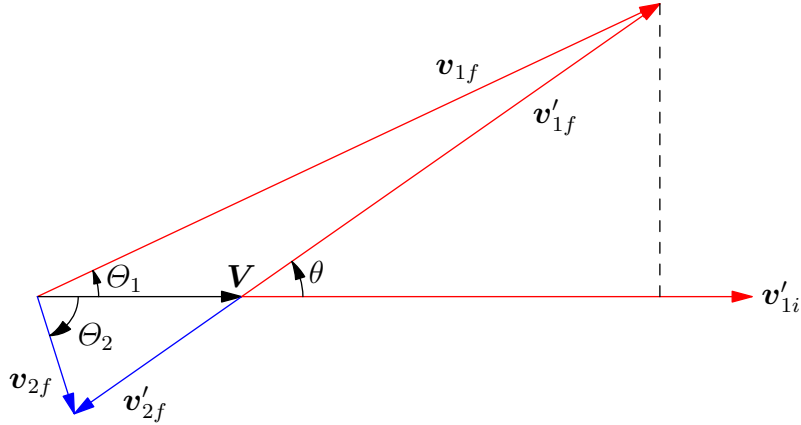


图 3.12: 静止靶粒子情形下的速度

速度合成如图3.12所示, 其中  $\Theta_1$  称为实验室系入射粒子**散射角**,  $\Theta_2$  称为实验室系靶粒子**反冲角**。它们与质心系散射角的关系如下

$$\begin{cases} \tan \Theta_1 = \frac{v'_{1i} \sin \theta}{V + v'_{1i} \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta} \\ \Theta_2 = \frac{\pi - \theta}{2} \end{cases} \quad (3.48)$$

### 3.4.2 质心系散射角

质心系散射角与碰撞前后粒子的相对速度偏转角相等。相对速度偏转角由入射粒子相对靶粒子的运动决定。

入射粒子初始速度与靶粒子之间的距离记作  $b$ , 称为**碰撞参数**或**瞄准距离**。由于靶粒子初始是静止的, 故系统的能量为

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2$$

角动量为

$$l = \mu b v$$

因此角动量  $l$  可以用能量  $E$  和瞄准距离  $b$  来表示

$$l^2 = 2\mu b^2 E$$

根据式(3.15), 可得

$$U(r_{\min}) = \frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2} + V(r_{\min}) = E$$

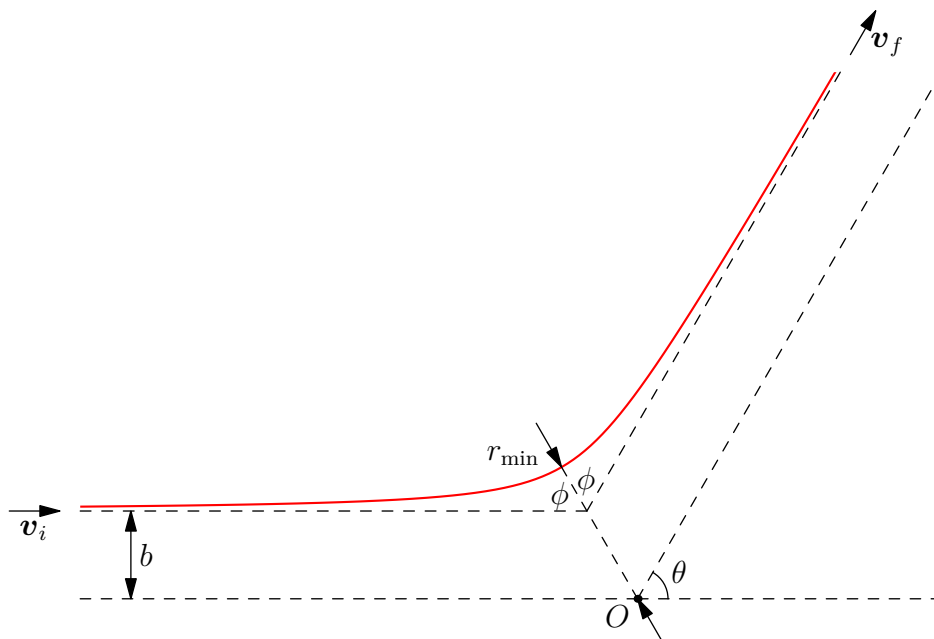


图 3.13: 弹性散射的几何参数

即有

$$1 - \frac{V(r_{\min})}{E} - \frac{b^2}{r_{\min}^2} = 0$$

据此可得  $r_{\min}$ 。再由式(3.20)可得

$$\phi = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{bdr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad (3.49)$$

由此即可得质心系散射角

$$\theta = \pi - 2\phi = \theta(b, E) \quad (3.50)$$

具体关系决定于  $V(r)$ 。

### 3.4.3 散射截面

散射实验一般是使得具有确定能量的粒子束均匀入射，然后对散射粒子的角分布进行测量以获得粒子之间作用势的信息。

设入射粒子流密度为  $I$ ，则入射粒子数按  $b$  的分布为

$$dN = 2\pi I b db$$

则散射粒子按  $\theta$  的分布可以表示为

$$dN = I \cdot 2\pi b(\theta) |b'(\theta)| d\theta$$

对  $\theta$  的分布并不是十分方便，因此需要使用对立体角  $\omega$  的分布。在球体的情形下，立体角元  $d\omega$  与  $d\theta$  的关系为

$$d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

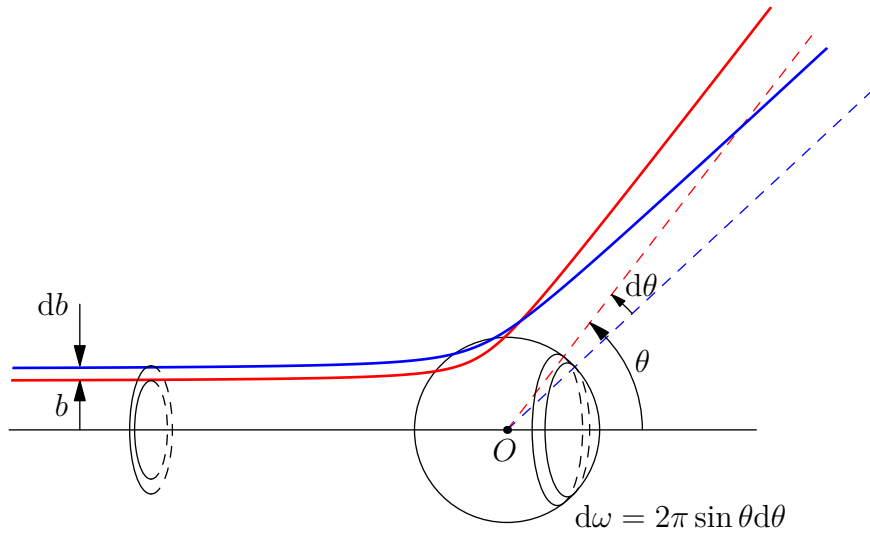


图 3.14: 散射截面

由此可有散射粒子按  $\omega$  的分布

$$dN = I \frac{b(\theta)}{\sin \theta} |b'(\theta)| d\omega$$

定义微分散射截面为

$$d\sigma = \frac{dN}{I} = 2\pi b db = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} |b'(\theta)| d\omega \quad (3.51)$$

同样有单位立体角散射截面为

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} |b'(\theta)| \quad (3.52)$$

根据式(3.50)可知, 上式中的  $b = b(\theta, E)$  决定于两体中心势的具体形式, 与实验条件无关。

前面的讨论都基于质心系, 在实验室系中, 有

$$d\Sigma = \frac{dN}{I} = \Sigma_1(\Theta_1) d\Omega_1, \quad d\Omega_1 = 2\pi \sin \Theta_1 d\Theta_1$$

所以有

$$\Sigma_1(\Theta_1) = \sigma(\theta) \frac{d\omega}{d\Omega_1} = \sigma(\theta) \frac{d \cos \theta}{d \cos \Theta_1}$$

其中  $\Theta_1$  满足

$$\tan \Theta_1 = \frac{\sin \theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta}$$

在实验中, 可实际测量的量为  $\Sigma_1(\Theta_1)$ 。

总散射截面可以计算为

$$\sigma_t = \int_S d\sigma = \int_0^\pi 2\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = \int_0^{b_{\max}} 2\pi b db = \pi b_{\max}^2 \quad (3.53)$$

式中  $b_{\max}$  为散射得以发生的最大瞄准距离, 即当  $b > b_{\max}$  时, 入射粒子始终在相互作用力程之外, 粒子将直线掠过。

### 3.4.4 Coulomb 势弹性散射

Coulomb 势可以表示为

$$V = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0$$

此时  $r_{\min}$  满足

$$1 - \frac{\alpha}{Er_{\min}} - \frac{b^2}{r_{\min}^2} = 0$$

由此可得

$$\frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{b^2} \left[ \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 + b^2} - \frac{\alpha}{2E} \right] \quad (3.54)$$

即有

$$\phi = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{Er} - \frac{b^2}{r^2}}} = \arccos \frac{\frac{b^2}{r} + \frac{\alpha}{2E}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 + b^2}} \Bigg|_{r_{\min}}^{+\infty} = \arccos \frac{\frac{\alpha}{2E}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 + b^2}}$$

所以有

$$\tan \phi = \frac{2Eb}{\alpha}$$

考虑到  $\theta = \pi - 2\phi$ , 可有

$$b = \frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (3.55)$$

由此可得 Coulomb 势下的微分散射截面

$$\sigma(\theta) = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} |b'(\theta)| = \frac{\left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (3.56)$$

式(3.56)称为 Rutherford 公式。总散射截面为

$$\sigma_t = \int_0^\pi 2\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta \rightarrow +\infty$$

此式说明 Coulomb 力为长程力。

例 3.3 (刚球势散射) 求粒子在刚球势

$$V(r) = \begin{cases} +\infty, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

中的散射截面。

解 对此问题, 可直接根据几何关系求出瞄准距离  $b$  与散射角  $\theta$  之间的关系为

$$b = a \sin \phi = a \cos \frac{\theta}{2}$$

由此可得微分散射截面

$$d\sigma = d(\pi b^2) = \frac{\pi a^2}{2} \sin \theta d\theta = \frac{a^2}{4} d\omega$$

所以有

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{a^2}{4}$$

总散射截面

$$\sigma_t = \frac{a^2}{4} \int d\omega = \frac{a^2}{4} 4\pi = \pi a^2$$



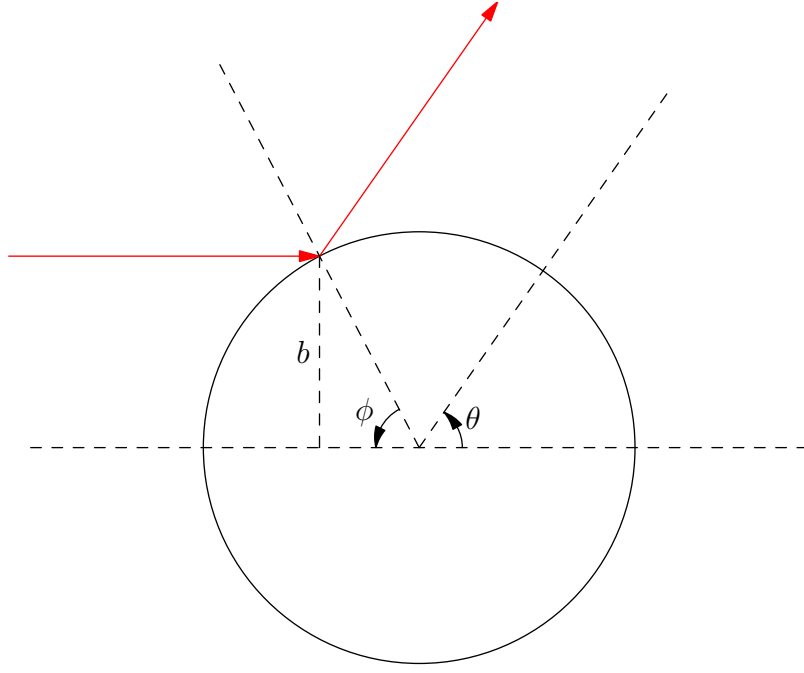


图 3.15: 例 3.3

例 3.4 (阶跃中心势散射) 求粒子在势场

$$V = \begin{cases} V_0, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

解 首先考虑  $V_0 > 0$  的情形。

当  $E < V_0$  时, 粒子无法进入  $r = a$  的内部, 结果等同于例3.3的刚球势散射。

当  $E > V_0$  时, 根据能量守恒, 可有粒子在  $r = a$  外部和内部满足如下关系式

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu v'^2 + V_0 = E$$

由此可得

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} =: n$$

其中  $n$  可称为折射率。再根据角动量守恒, 可有粒子在  $r = a$  外部和内部满足如下关系式<sup>①</sup>

$$\mu v b = \mu v' r_{\min}$$

由此可得

$$\frac{b}{r_{\min}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

所以

$$\sin \alpha = \frac{b}{a}, \quad \sin \beta = \frac{b}{na}$$

根据几何关系, 可有  $\theta = 2(\beta - \alpha)$ , 所以

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$$

<sup>①</sup> 此处考虑到粒子在常数势场中的运动轨迹必然为直线。

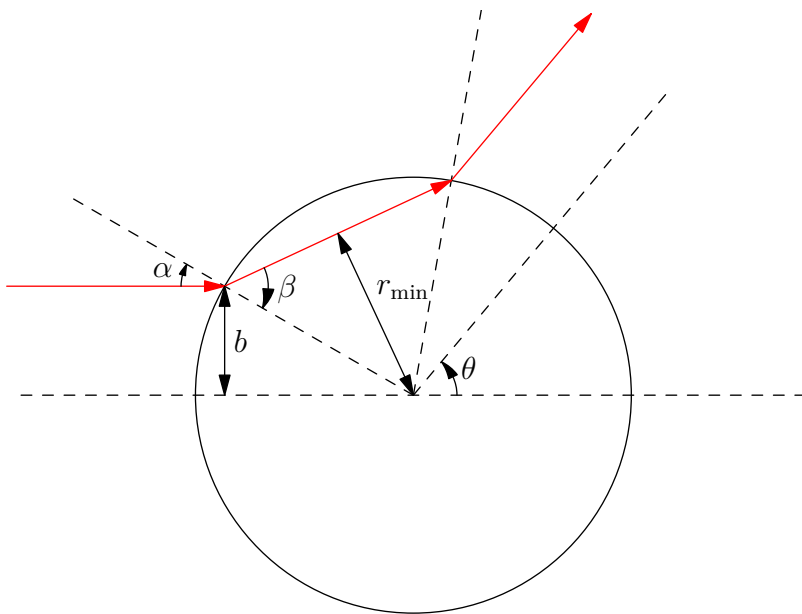


图 3.16: 阶跃中心势散射

所以有

$$\left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{b^2}{na^2} \right)^2 = \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{b^2}{na^2} \right)$$

由此解得

$$b^2 = \frac{n^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + n^2 - 2n \cos \frac{\theta}{2}}$$

根据

$$d\sigma = d(\pi b^2)$$

即可得到微分散射截面。

## 第四章 微振动与阻尼运动

### 4.1 微振动近似与求解

系统在稳定平衡位形附近的小幅振动即称为微振动。

例 4.1 (单摆) 对于单摆, 自由度  $s = 1$ 。取摆角  $\theta$  为广义坐标, 系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

势能为

$$V = mgl(1 - \cos \theta)$$

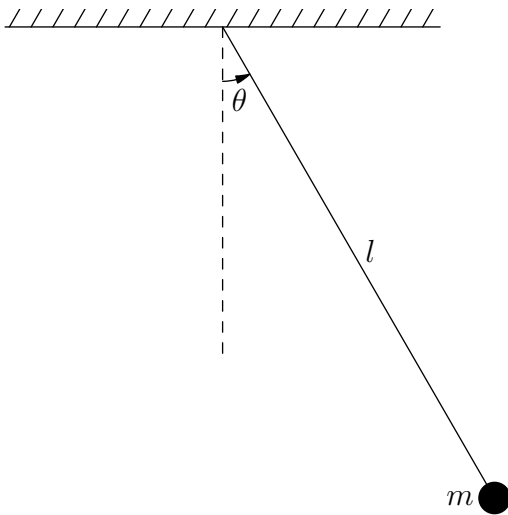


图 4.1: 单摆

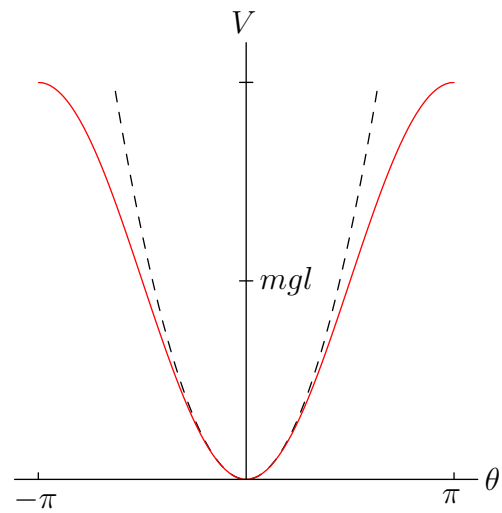


图 4.2: 单摆的势能曲线

作线性近似可以将势能在平衡位形附近展开为

$$V = \frac{1}{2}mgl\theta^2 + o(\theta^2)$$

由此在线性近似下系统的 Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

是广义坐标  $\theta$  和广义速度  $\dot{\theta}$  的二次型, 进而系统的运动方程

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$

是一个线性常微分方程, 解为

$$\theta = \theta_m \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi_0\right)$$

即, 单摆在小角度下可近似为谐振子。

例 4.2 (弹性耦合摆) 对于弹性耦合摆, 此时自由度  $s = 2$ 。

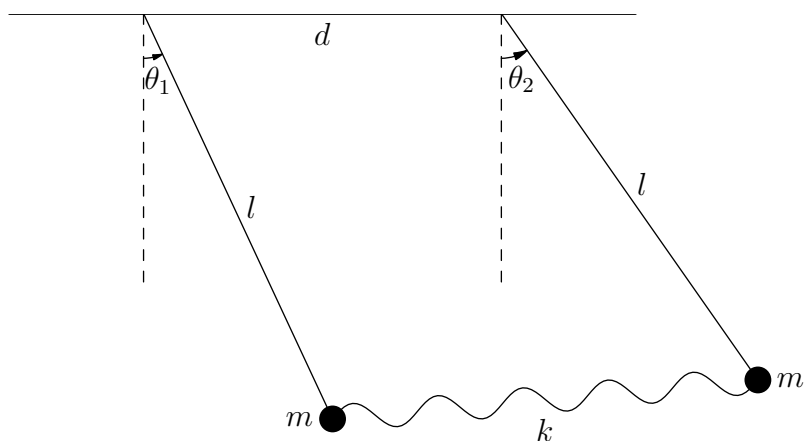


图 4.3: 弹性耦合摆

选两个摆角  $\theta_1, \theta_2$  为广义坐标, 则系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

势能为

$$V = mgl(1 - \cos \theta_1 + 1 - \cos \theta_2) + \frac{k}{2} \left[ \sqrt{(d + l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 + (l \cos \theta_2 - l \cos \theta_1)^2} - d \right]$$

作线性近似可以将势能在平衡位形处展开为

$$V = \frac{1}{2} mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2} kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2 + o(\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

取新的广义坐标  $x_1 = l\theta_1, x_2 = l\theta_2$ , 可有系统在线性近似下的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{mg}{2l}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2} k(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)$$

进而系统的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \left(k + \frac{mg}{l}\right)x_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + \left(k + \frac{mg}{l}\right)x_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

定义  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$ , 以及

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{l} + k & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k \end{pmatrix}$$

其中矩阵  $\mathbf{M}$  称为惯性矩阵,  $\mathbf{K}$  称为弹性矩阵, 由此系统的运动方程可以简单的表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

考虑取特解

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \cos(\omega t + \phi)$$

则可有线性方程组

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

或者

$$\begin{pmatrix} \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此为广义本征值问题。存在振动解  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  的条件为

$$\begin{vmatrix} \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

由此可以解得广义本征值

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$$

以及其对应的广义本征矢

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

方程的通解即为以上两个线性无关的特解的线性组合

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi_1\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}t + \phi_2\right)$$

通解中的四个任意常数  $C_1, C_2, \phi_1, \phi_2$  可以由  $x_1, x_2$  以及  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  的初始值来决定。

现在在上述例子中考虑变量代换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

可有

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{pmatrix}$$

此处得到的两个相互独立的简谐振动称为**简正振动**，其频率为本征频率，简正振动对应的坐标  $\xi_1, \xi_2$  称为**简正坐标**。在简正坐标下，系统的 Lagrange 函数  $L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$  可以转化为

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{S}^T \mathbf{K} \mathbf{S} \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M}' \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{K}' \boldsymbol{\xi}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \\ \mathbf{K}' &= \mathbf{S}^T \mathbf{K} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{mg}{l} + k & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2mg}{l} & 0 \\ 0 & \frac{2mg}{l} + 4k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

都为对角矩阵。因此，引入简正坐标，可以使  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  同时对角化，不同自由度的振动解耦，即简正振动模式。

## 4.2 多自由度微振动系统

### 4.2.1 微振动近似

考虑保守系统, 其广义坐标取为  $q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, s$ ), 不失一般性, 规定其稳定平衡位形处有  $q_{\alpha 0} = 0, V_0 = 0$ , 由此平衡条件可以表示为

$$\left( \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right)_0 = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (4.1)$$

在平衡位形附近, 可对势能  $V$  作 Taylor 展开, 即

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right)_0 q_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_0 q_\alpha q_\beta + o(|\mathbf{q}|^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_0 q_\alpha q_\beta \end{aligned}$$

令  $k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_0$ , 则有

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & \cdots & k_{ss} \end{pmatrix}$$

因此势能可以近似为

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s k_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (4.2)$$

考虑到  $\mathbf{q}_0$  为稳定平衡位形, 因此  $V$  在  $\mathbf{q}_0$  处取极小值, 即矩阵  $\mathbf{K}$  是正定的<sup>①</sup>。广义坐标变换可以表示为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

由此可将速度展开至一阶, 即

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right)_0 \dot{q}_\alpha + \cdots$$

由此, 动能可表示为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s \left[ \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right)_0 \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \right)_0 \right] \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \cdots \quad (4.3)$$

令  $m_{\alpha\beta} = m_{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right)_0 \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \right)_0$ , 则可得惯性矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{s1} & \cdots & m_{ss} \end{pmatrix}$$

<sup>①</sup> 如非严格极小值, 可以允许  $\mathbf{K}$  为半正定。

由此, 动能被表示为广义速度的二次型

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s m_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.4)$$

动能必然是非负的, 而且只有  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  时为零, 故矩阵  $\mathbf{M}$  正定。因此系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (4.5)$$

由此可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s (m_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\beta} \dot{q}_\gamma + m_{\beta\gamma} \dot{q}_\beta \delta_{\alpha\gamma}) = \frac{1}{2} \left( \sum_{\gamma=1}^s m_{\alpha\gamma} \dot{q}_\gamma + \sum_{\beta=1}^s m_{\beta\alpha} \dot{q}_\beta \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s (m_{\alpha\beta} + m_{\beta\alpha}) \dot{q}_\beta = \sum_{\beta=1}^s m_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \\ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} &= - \sum_{\beta=1}^s k_{\alpha\beta} q_\beta \end{aligned}$$

由此得到系统的运动方程为

$$\sum_{\beta=1}^s (m_{\alpha\beta} \ddot{q}_\beta + k_{\alpha\beta} q_\beta) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (4.6)$$

用矩阵可以表示为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

即, Lagrange 函数在稳定平衡位形处取二阶近似, 可得线性振动方程。

## 4.2.2 运动求解

作试解<sup>①</sup>

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} \cos(\omega t + \phi) \quad (4.8)$$

则系统的运动方程(4.7)可化为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

式(4.9)称为系统的本征方程, 系统有振动解要求本征方程(4.9)有非平凡解, 即要求

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (4.10)$$

式(4.10)称为系统的久期方程或频率方程, 它是  $\omega^2$  的  $s$  次方程。因为矩阵  $\mathbf{K}$  至少是半正定的, 矩阵  $\mathbf{M}$  是正定的, 所以方程(4.10)必然有  $s$  个非负的解, 即有

$$\omega^2 = \omega_\mu^2 \quad (\mu = 1, 2, \dots, s)$$

然后即可通过线性方程组

$$(\mathbf{K} - \omega_\mu^2 \mathbf{M}) \mathbf{a}_\mu = \mathbf{0}, \quad \mu = 1, 2, \dots, s$$

解出每个本征频率对应的本征矢量  $\mathbf{a}_\mu$ 。系统运动的通解即为上述  $s$  个特解的线性组合

$$\mathbf{q} = \sum_{\mu=1}^s \mathbf{a}_\mu C_\mu \cos(\omega_\mu t + \phi_\mu) \quad (4.11)$$

此处  $C_\mu$  和  $\phi_\mu$  是积分常数, 可以通过  $q_\alpha$  和  $\dot{q}_\alpha$  共  $2s$  个初始值确定<sup>②</sup>。

<sup>①</sup> 试解也可以取为  $\mathbf{q} = \mathbf{a} e^{\lambda t}$ , 此处  $\mathbf{a}$  和  $\lambda$  都可以取复数值, 通过 Euler 恒等式整理后, 可以得到与下文完全相同的结果。

<sup>②</sup> 此处通解公式中没有考虑本征频率为零的情况, 因为当本征频率为零时, 其对应的不是振动解。

### 4.2.3 简正坐标与简正振动

将系统运动的通解(4.11)表示为

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \vdots \\ C_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \end{pmatrix}$$

做变量代换

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}$$

其中矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

则系统的解可以用新变量表示为

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \vdots \\ C_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

或者

$$\xi_\mu = C_\mu \cos(\omega_\mu t + \phi_\mu) \quad (4.13)$$

即, 新坐标可以将系统的运动表示为相互独立的简谐振动, 坐标  $\boldsymbol{\xi}$  称为系统的简正坐标。

**定理 4.2.1 (同时对角化)** 设  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  都是对称矩阵, 其中  $\mathbf{A}$  是正定矩阵, 则唯一存在一个非奇异方阵  $\mathbf{P}$  满足

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中  $\lambda_i$  满足

$$\det(\mathbf{B} - \lambda_i \mathbf{A}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

由上述定理, 矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_s \end{pmatrix}$  可以使得矩阵  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  同时对角化<sup>①</sup>, 即

$$\mathbf{M}' = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_s \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}' = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_s \end{pmatrix}$$

其中  $m_\alpha, k_\alpha$  满足

$$\det \left( \mathbf{K} - \frac{k_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{M} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s$$

<sup>①</sup> 此时得到的同时对角化是同时对角化定理的一个弱化形式, 此时的同时对角化形式不是唯一的。



即有

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M}' \dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s m_{\alpha} \dot{\xi}_{\alpha}^2$$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{K}' \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s k_{\alpha} \xi_{\alpha}^2$$

即，简正坐标使  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  同时对角化。简正坐标对应的运动方程为

$$m_{\mu} \ddot{\xi}_{\mu} + k_{\mu} \xi_{\mu} = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, s$$

以简正坐标表示的各自由度的振动相互独立。

**例 4.3 (双摆)** 双摆系统的自由度  $s = 2$ ，取两个摆角  $\theta_1, \theta_2$  为广义坐标，则两个摆球的坐标分别为

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \theta_1, & y_1 &= l \cos \theta_1 \\ x_2 &= l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2, & y_2 &= l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 \end{aligned}$$

系统的势能为

$$V = mg(2l - y_2) + mg(l - y_1) = mgl(3 - 2 \cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

由此可得稳定平衡位形为  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 。

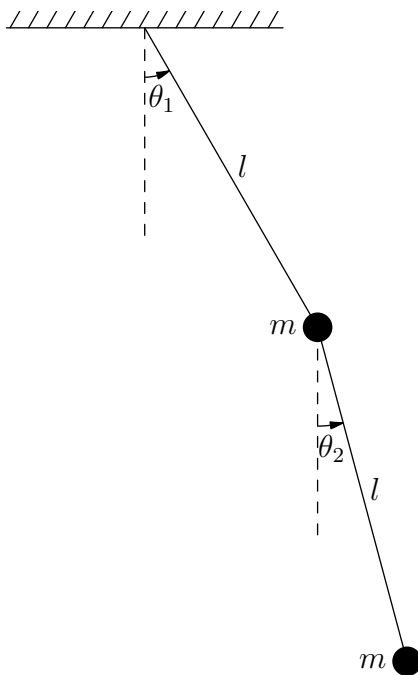


图 4.4: 双摆

两个摆球的速度分量分别为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, & \dot{y}_1 &= -l \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{x}_2 &= l \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, & \dot{y}_2 &= -l \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \left[ l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

将势能和动能在稳定平衡位形处展开至二阶, 即

$$V = mgl \left[ 3 - 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_1^2 + o(\theta_1^2) \right) - \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_2^2 + o(\theta_2^2) \right) \right] = \frac{1}{2} mgl (2\theta_1^2 + \theta_2^2) + o(\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \left( l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) = \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

由此即有弹性矩阵和惯性矩阵

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}$$

则有久期方程

$$\begin{vmatrix} 2mgl - 2ml^2\omega^2 & -ml^2\omega^2 \\ -ml^2\omega^2 & mgl - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解得频率

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}$$

其对应的本征矢量为

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

因此, 系统的运动解为

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

系统的简正坐标  $\xi_1, \xi_2$  满足

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

## 4.3 阻尼运动

### 4.3.1 阻尼的一般性质

物体在运动过程中收到的阻力  $\mathbf{f}$ , 通常可以分成以下四类:

1. **摩擦阻力**。固体和固体接触面间的阻力, 即通常所说的摩擦力。
2. **粘滞阻力**。由流体的粘滞性产生的阻力。
3. **尾流阻力**。当物体穿过静止不动的介质, 或者说, 当流体流过静止不动的障碍物时, 物体前后压力差产生的阻力。
4. **波阻力**。对于运动速度超过声速的物体, 会形成自物体发射到周围介质中的波(激波), 它要消耗物体的能量, 由此产生的阻力即为波阻力。

产生以上各种阻力的根源是十分复杂的, 而且各不相同。阻力总是消耗运动物体的能量, 使物体的能量从运动物体向周围介质散逸出去最终转化为热, 因此阻力也常被称为**耗散力**。不过不论是哪一种阻力, 其方向恒与物体的运动方向相反, 其大小与物体的形状和尺寸、周围介质的物性以及物体的运动速度有关, 因此阻力总是可以表达为

$$\mathbf{f} = -cf(v) \frac{\dot{\mathbf{r}}}{v} \quad (4.14)$$

其中函数  $f(v)$  反映阻力随速度的变化关系, 系数  $c$  则和物体的形状、大小、表面状况及介质的物性有关。

### 4.3.2 恒力作用下的阻尼直线运动

最简单的一种阻尼运动是无其它外力或仅受恒力作用的阻尼直线运动, 其运动方程可以表示为

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 - cf(v)$$

或者

$$\frac{dv}{dt} = \alpha - 2\beta f(v) \quad (4.15)$$

式中  $\alpha = \frac{F_0}{m}$  是由恒力  $F_0$  产生的加速度,  $2\beta = \frac{c}{m}$  称为阻尼因子。当  $c$  不变时,  $\beta$  也是一个常数, 若  $c$  和速度有关, 则  $\beta$  也是速度的函数, 不论何种情形, 式(4.15)的右端只是速度  $v$  的函数, 对其进行分离变量, 即有

$$t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{\alpha - 2\beta f(v)} \quad (4.16)$$

再根据  $v = \frac{dx}{dt}$ , 可有

$$x = \int_{v_0}^v \frac{v dv}{\alpha - 2\beta f(v)} \quad (4.17)$$

求出上面的两个积分并从中消去  $v$  即可得到物体的运动情况  $x = x(t)$ 。

### 4.3.3 一维阻尼振动

取系统的平衡位置为广义坐标原点, 并假定阻力是速度的一次函数<sup>①</sup>, 则物体的运动方程为

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

引入  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , 此方程可以表示为

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.18)$$

此处  $\omega_0$  即为没有阻尼时物体自由振动的角频率。方程(4.18)的通解为

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (4.19)$$

式中  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是特征方程

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

的两个根, 即

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (4.20)$$

下面分三种情况讨论解(4.19)的性质:

<sup>①</sup> 在微振动情况下, 这个近似是可以接受的。

1.  $\beta < \omega_0$ 。此时通解可以表示为

$$x = ae^{-\beta t} \cos(\omega t - \phi) \quad (4.21)$$

式中

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega} + \frac{\beta}{\omega}\right), \quad a = x_0 \left[1 + \left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega} + \frac{\beta}{\omega}\right)^2\right]$$

均为实常数,  $x_0$  和  $\dot{x}_0$  为物体的初位置和初速度。此时振动的图像如图4.5所示。

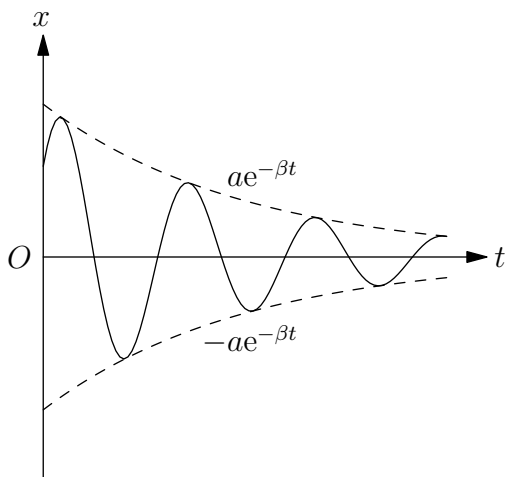


图 4.5:  $\beta < \omega_0$

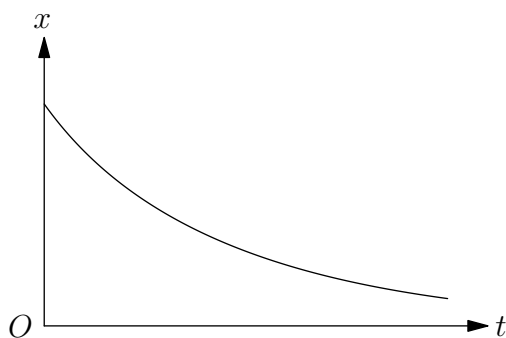


图 4.6:  $\beta > \omega_0$

2.  $\beta > \omega_0$ 。这是  $\lambda$  的两个值都是实数, 而且都是负数, 式(4.19)可改写为

$$x = c_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \quad (4.22)$$

这时  $x$  是  $t$  的单调减少函数, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $x$  趋向平衡位置而没有振动, 如图4.6所示。这种运动类型称为非周期性衰减。

3.  $\beta = \omega_0$ 。此时特征方程只有一个根  $\lambda = -\beta$ , 此时方程(4.18)的通解为

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t} \quad (4.23)$$

这是非周期性衰减的特殊情况, 虽然不一定是单调减少的运动, 但同样没有振动的性质。

现在讨论有阻尼时的强迫振动。在方程(4.18)中添加强迫力  $F \cos \omega_p t$  可得强迫振动的运动方程

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega_p t \quad (4.24)$$

采用复数求解比较简便, 即求解复变量微分方程

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} e^{i\omega_p t} \quad (4.25)$$

这个方程的通解就是对应的齐次方程的通解  $x_1$  和任意一个特解  $x_2$  的和。此处  $x_1$  已经在自由阻尼振动中讨论过了, 现在只需求一个特解  $x_2$  即可。由此, 可令

$$x_2 = B e^{i\omega_p t} = b e^{i(\omega_p t - \delta)} \quad (4.26)$$

此处  $B$  是复常数,  $b$  和  $-\delta$  分别是  $B$  的模和幅角, 它们都是实数。将式(4.26)代入方程(4.25)中, 可得

$$B = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega_p^2 + 2i\beta\omega_p)}$$

因此有

$$\begin{cases} b = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\beta^2\omega_p^2}} \\ \tan \delta = \frac{2\beta\omega_p}{\omega_0^2 - \omega_p^2} \end{cases} \quad (4.27)$$

现在只讨论有振动的情形, 即  $\omega_0 > \beta$  的情形, 此时方程(4.24)的通解为

$$x = ae^{-\beta t} \cos(\omega t - \phi) + b \cos(\omega_p t - \delta) \quad (4.28)$$

其中第一项随时间以指数规律衰减, 所以经过足够长时间后, 留下的只是第二项

$$x = b \cos(\omega_p t - \delta)$$

这是一个简谐运动, 其频率即为强迫力的频率  $\omega_p$ , 振幅  $b$  由式(4.27)决定。令

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}} \quad (4.29)$$

称为振幅的放大因子, 其中  $\gamma = \frac{2\beta}{\omega_0}$ , 则振幅  $b$  可以表示为

$$b = \kappa \frac{F}{k}$$

$\kappa$  随阻尼因子  $\gamma$  和频率比值  $\frac{\omega_p}{\omega_0}$  的变化如图4.7所示。

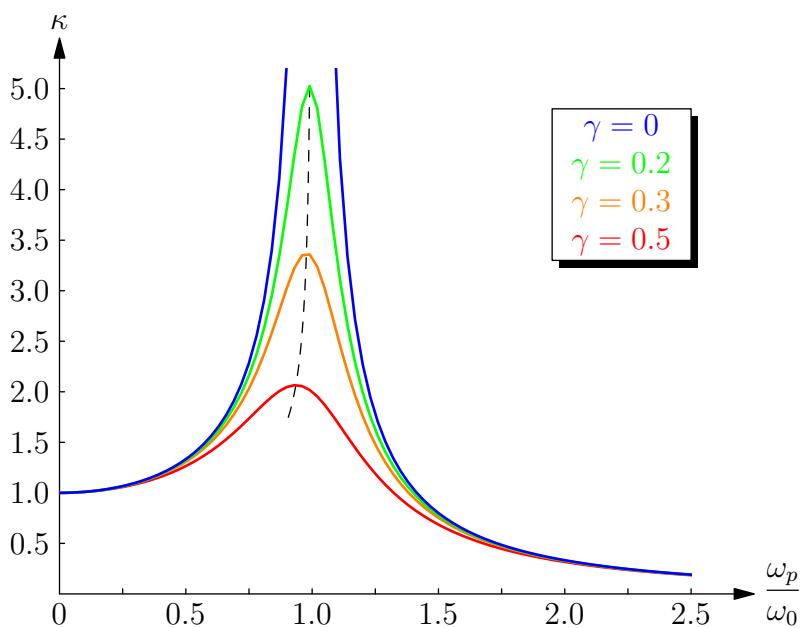


图 4.7:  $\kappa$  随阻尼因子  $\gamma$  和频率比值  $\frac{\omega_p}{\omega_0}$  的关系

强迫振动有相位差, 不同频率下相位差  $\delta$  随频率比值  $\frac{\omega_p}{\omega_0}$  的关系如图4.8所示。

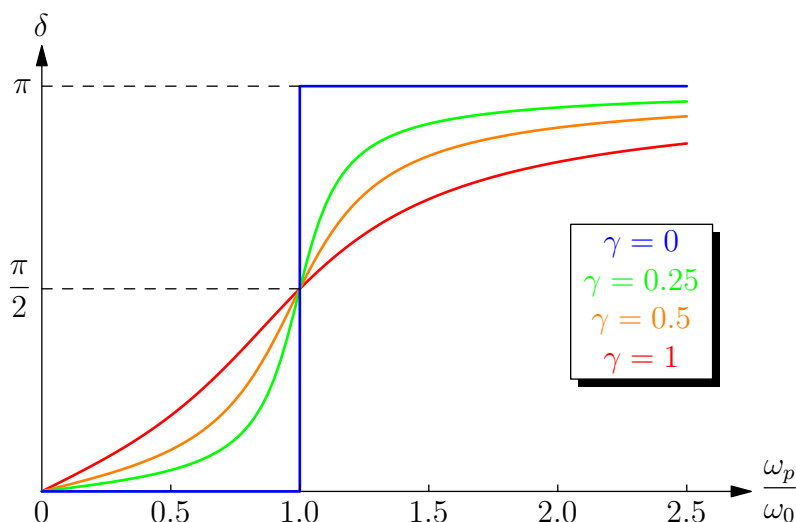


图 4.8: 相位差  $\delta$  随频率比值  $\frac{\omega_p}{\omega_0}$  的关系

### 4.3.4 耗散函数

在质点系中，每个质点都收到与速度方向相反的阻尼力

$$\mathbf{f}_i = -f_i(v_i) \frac{\dot{\mathbf{r}}_i}{v_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中  $f_i(v_i) > 0$ ，则其对应的广义力为

$$f_\alpha = - \sum_{i=1}^n f_i(v_i) \frac{\dot{\mathbf{r}}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = - \sum_{i=1}^n f_i(v_i) \frac{\dot{\mathbf{r}}_i}{v_i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} = - \sum_{i=1}^n f_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha}$$

式中利用了经典 Lagrange 关系(??)。引入耗散函数

$$D(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^{v_i} f_i(v'_i) dv'_i \quad (4.30)$$

则广义阻尼力可以表示为

$$f_\alpha = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha}$$

如果系统内其余主动力皆为有势力，则可有系统方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_\alpha} = f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

用耗散函数可以表示为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_\alpha} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (4.31)$$

对于线性阻尼力  $\mathbf{f}_i = -c_i \dot{\mathbf{r}}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 其中  $c_i > 0$ , 此时耗散函数可以表示为

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} c_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

这种形式的耗散函数称为 Rayleigh 耗散函数。根据坐标转换关系

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q})$$

可有

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_i &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \\ \dot{\mathbf{r}}_i^2 &= \sum_{\alpha, \beta=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta\end{aligned}$$

此时，可有

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha, \beta=1}^s c_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s c_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad (4.32)$$

式中

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta}$$

此处  $c_{\alpha\beta}$  只与广义坐标  $\mathbf{q}$  有关，而与广义速度  $\dot{\mathbf{q}}$  无关，因此 Rayleigh 耗散函数  $D$  是广义速度  $\dot{\mathbf{q}}$  的二次齐次函数。特别地，在微振动问题中， $T$  和  $V$  都只保留至二阶小量，因此  $D$  也只要保留到二阶小量即可，在这种情况下， $c_{\alpha\beta}$  可以看成常数。

耗散函数  $D$  具有能量变化率的量纲，它决定了力学系统能量的耗散率  $-\frac{dE}{dt}$ 。对于 Rayleigh 耗散函数，当  $c_{\alpha\beta}$  为常数时，可有

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L \right) = \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right)$$

考虑到式(4.31)，可有

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

由式(4.32)可知，Rayleigh 耗散函数  $D$  是广义速度  $\dot{\mathbf{q}}$  的二次齐次函数，根据齐次函数的 Euler 定理（定理2.6.1，第51页）可知

$$\sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2D$$

由此即有

$$-\frac{dE}{dt} = 2D \quad (4.33)$$

即单位时间内系统内耗散的能量等于耗散函数的两倍。

## 第五章 刚体

### 5.1 刚体运动学

#### 5.1.1 刚体的自由度与运动

**绝对刚体**是指任意两质点之间的距离在运动过程中保持不变的质点系，简称为**刚体**。刚体是一个理想模型，在研究问题的过程中，形变可忽略的系统都可以视为刚体。

根据刚体的定义，其中的质点满足约束

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = C_{ij}(\text{常数}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, \text{且} i \neq j)$$

因此，其中的任意不共线的三个质点的位置确定，其余各质点的位置也相应地确定。此三个质点之间有三个完整约束，即  $n = 3, k = 3$ ，因此自由度  $s = 3n - k = 6$ 。每增加一个质点，增加三个独立约束，因此自由度不变。由此可得，仅有内部刚性约束而无外部附加约束的刚体（称为**自由刚体**）的自由度  $s = 6$ 。

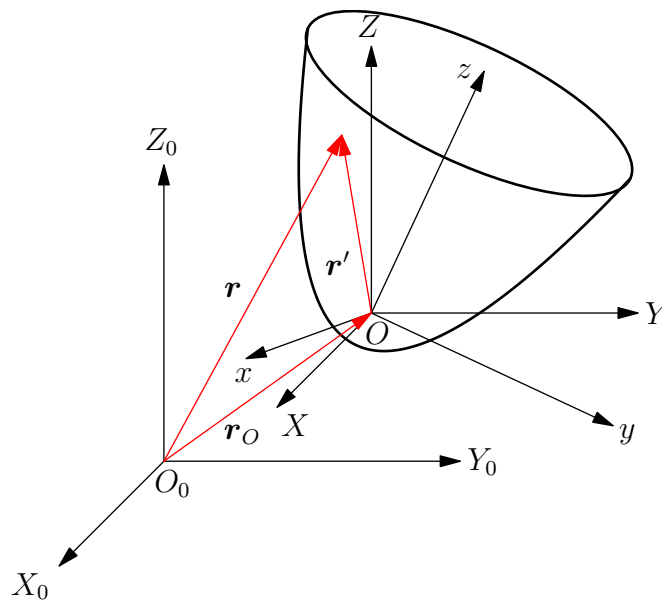


图 5.1: 刚体的运动

为了描述刚体的运动，需要引入三个坐标系：

- **空间系**：即实验室坐标系，为惯性系。
- **本体系**：以刚体上任选的一点（称为**基点**） $O$  为原点，并固定在刚体上的坐标系。
- **平动系**：以基点  $O$  为原点，相对空间系平动的坐标系。

则刚体在这三个坐标系中的运动为（见图5.1）：



- 本体系：刚体静止。
- 平动系：刚体做定点运动（基点固定）。
- 空间系：在基点运动的同时，刚体绕基点做定点运动。

即在这样的三个坐标系作用下，刚体的一般运动被分解为基点的运动和刚体绕基点的定点运动。而基点的运动就是质点的运动，前面几章已经做过详细说明，本章主要处理刚体的定点运动。

### 5.1.2 定点运动的矩阵表示

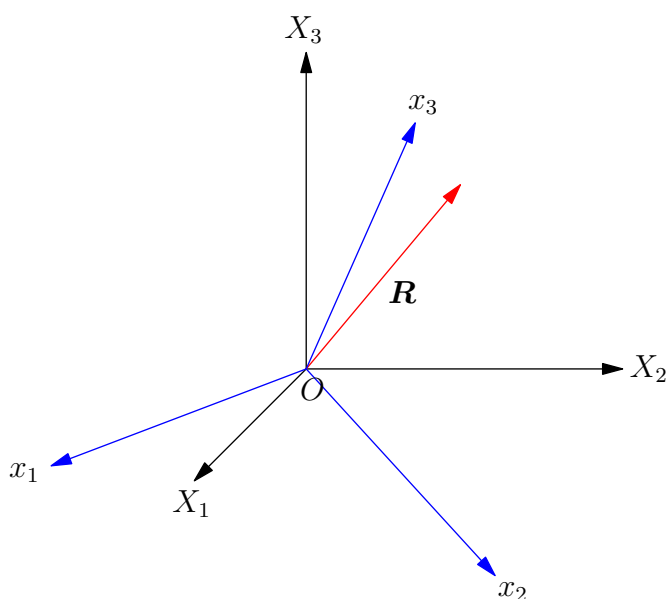


图 5.2: 坐标系的定点旋转

现在仅考虑刚体的定点运动，此时基点在空间系中是静止的，不妨将平动系取为与空间系重合。设有刚体上的某点位矢用  $\mathbf{R}$  来表示，则其在平动系  $OX_1X_2X_3$  和本体系  $Ox_1x_2x_3$  中可以分别表示为

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{E}_i = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}_j \quad (5.1)$$

其中  $\mathbf{E}_i$  和  $\mathbf{e}_i$  分别为平动系  $OX_1X_2X_3$  和本体系  $Ox_1x_2x_3$  中的一组单位正交基， $X_i$  和  $x_i$  分别称为矢量  $\mathbf{R}$  在平动系  $OX_1X_2X_3$  和本体系  $Ox_1x_2x_3$  中的坐标。根据基矢量的单位正交性，可得

$$X_i = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{R}, \quad x_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{R} \quad (5.2)$$

对于基矢量，式(5.1)也同样成立，即有

$$\mathbf{E}_i = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 u_{ij} \mathbf{e}_j \quad (5.3)$$

其中  $u_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_j$ 。因此，根据式(5.2)和式(5.3)可得

$$X_i = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{R} = \sum_{j=1}^3 u_{ij} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{R}) = \sum_{j=1}^3 u_{ij} x_j \quad (5.4)$$

式(5.4)用矩阵可以表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{x} \quad (5.5)$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

刚体中任意两质点之间的距离保持不变, 所以这一点与基点  $O$  之间的距离在两个坐标系中应该相等, 即有

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

所以有

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

即

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (5.6)$$

因此, 系数矩阵  $\mathbf{U}$  是正交矩阵, 其独立矩阵元有 3 个。

设刚体在定点运动过程中, 初始时刻时本体系与平动系重合, 将刚体上某参考点的坐标记作  $\mathbf{x}$ , 而在  $t_1, t_2$  时刻, 刚体上该参考点在平动系的坐标分别为  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ , 根据前文的讨论有

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{x}, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{x}$$

此处  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$  都是正交矩阵, 所以有

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{X}_1 = (\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^T) \mathbf{X}_1 = \mathbf{U} \mathbf{X}_1$$

其中矩阵  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^T$  满足

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^T = \mathbf{I}$$

因此, 矩阵  $\mathbf{U}$  也是正交矩阵。由此可得, 刚体的定点运动可用正交矩阵表示。

**例 5.1 (有限定点运动的非对易性)** 刚体的定点运动可用矩阵表示为

$$\mathbf{X}' = \mathbf{U} \mathbf{X}$$

如果再进行一次定点运动, 那么

$$\mathbf{X}'' = \mathbf{U}' \mathbf{X}' = \mathbf{U}' \mathbf{U} \mathbf{X}$$

由于矩阵的乘积一般是不可交换的, 因此有限定点运动一般不具有对易性。从而有限定点转动不能用矢量表示。

### 5.1.3 无限小定点运动的矢量表示

有限定点运动可以由连续的无限小定点运动合成。考虑

$$\mathbf{X}' = \mathbf{U} \mathbf{X}$$

满足

$$d\mathbf{X}' = \mathbf{X}' - \mathbf{X} = (\mathbf{U} - \mathbf{I})\mathbf{X}$$

是一阶无穷小量，即有

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \mathbf{u}$$

此处  $\mathbf{u}$  为一阶无穷小量。 $\mathbf{U}$  应为正交矩阵，即有

$$\mathbf{I} = (\mathbf{I} + \mathbf{u}^T)(\mathbf{I} + \mathbf{u}) = \mathbf{I} + \mathbf{u}^T + \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{u}$$

略去上式中的高阶无穷小量，可以得到

$$\mathbf{u}^T = -\mathbf{u} \quad (5.7)$$

即无穷小定点运动的变换矩阵为反对称矩阵，将其记作

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以有

$$d\mathbf{X} = \mathbf{u}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 X_3 - \varepsilon_3 X_2 \\ \varepsilon_3 X_1 - \varepsilon_1 X_3 \\ \varepsilon_1 X_2 - \varepsilon_2 X_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{R}$$

此处  $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$  称为无限小角位移矢量。

将无限小角位移矢量表示为  $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{n}$ ，其中  $\mathbf{n}$  是单位矢量，取位矢  $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$ ，则在此无限小定点运动下的位移为

$$d\mathbf{R} = \varepsilon \mathbf{n} \times R\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

上式说明，此定点运动下，所有位于过定点方向为  $\mathbf{n}$  的直线上的点都是固定的，即  $\mathbf{n}$  为转轴。因此无限小定点运动是绕瞬时轴的无限小转动，定点运动即为**定点转动**。

### 5.1.4 刚体上各点的速度与加速度

5.1.1节已指出，刚体的运动可分解为平动系相对于空间坐标系的平动与本体系相对于平动系的定点转动，即刚体中任意一点的位矢为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{r}' \quad (5.8)$$

设矢量  $\mathbf{r}'$  在平动系中的坐标为  $\mathbf{X}$ ，在本体系中的坐标为  $\mathbf{x}^{\textcircled{1}}$ ，则它们之间通过旋转矩阵可以表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{x}$$

此处矩阵  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$  是正交矩阵，即矩阵  $\mathbf{U}$  满足

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (5.9)$$

<sup>①</sup> 需要注意到，平动系中的坐标  $\mathbf{X}$  是与时间有关的，而本体系中的坐标  $\mathbf{x}$  则与时间无关。

记平动系的基为  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ ，本体系的基为  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ <sup>①</sup>，则有

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}\mathbf{x}$$

由此可以得到

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}\mathbf{U} \quad (5.10)$$

综上，式(5.8)可以用矩阵表示为<sup>②</sup>

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{r}_O + \mathbf{E}\mathbf{U}\mathbf{x} \quad (5.11)$$

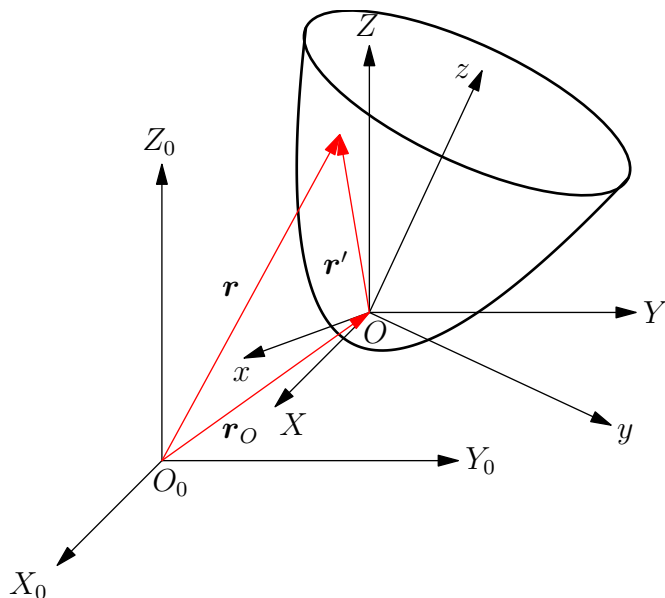


图 5.3: 刚体的运动

考虑刚体上的另外一点  $O'$ ，则有

$$\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}_O + \mathbf{E}\mathbf{U}\mathbf{x}_{O'}$$

于是可有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{E}\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{r}_{O'} - \mathbf{E}\mathbf{U}\mathbf{x}_{O'} + \mathbf{E}\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{E}\mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{O'}) \quad (5.12)$$

将  $O'$  取为基点，各坐标系坐标轴的方向不变，则同样有刚体中任意一点的位矢可以表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{E}\mathbf{U}'\mathbf{x}' \quad (5.13)$$

对比式(5.12)和(5.13)，并考虑到  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{O'}$ ，可有

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}'$$

即，刚体定点转动矩阵与基点的选取无关。

① 需要注意到，平动系中的基  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  是与时间无关的，因为其大小和方向都不随时间改变。而本体系中的基  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  则与时间有关，因为本体系与刚体固连在一起，在刚体做定点转动的过程中，它们的方向将随时间改变。

② 在用矩阵表示矢量表达式时，如不同时乘以该坐标系基构成的矩阵，则容易造成谬误。

将式(5.11)两端对时间求导，再根据式(5.10)可得

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{E}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{x} = \mathbf{v}_O + \mathbf{e}\mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}}\mathbf{x} \quad (5.14)$$

将式(5.9)两端对时间求导，得

$$\dot{\mathbf{U}}^T\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}} = (\mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}})^T + \mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$$

即矩阵  $\mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}}$  是反对称矩阵，因此可以将其表示为

$$\mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

由此，记矢量  $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$  称为刚体的角速度<sup>①</sup>，则有

$$\mathbf{e}\mathbf{U}^T\dot{\mathbf{U}}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2x_3 - \omega_3x_2 \\ \omega_3x_1 - \omega_1x_3 \\ \omega_1x_2 - \omega_2x_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

所以刚体上任意一点的速度可以表示为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \quad (5.15)$$

如果另取基点  $O'$ ，则当以  $O$  为基点时， $O'$  的速度为

$$\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{O'} - \mathbf{r}_O) \quad (5.16)$$

将式(5.16)代入式(5.15)中可得

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'}) \quad (5.17)$$

如果以  $O'$  为基点表示刚体上各点的速度则有

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'}) \quad (5.18)$$

其中  $\boldsymbol{\omega}'$  为以  $O'$  为基点的角速度。对比式(5.17)和式(5.18)可知

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' \quad (5.19)$$

这说明刚体的角速度与基点的选取无关。

下面考虑刚体上各点的加速度。将式(5.15)两端对时间求导，并注意到  $\dot{\mathbf{v}}_O = \mathbf{a}_O$ ,  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_O = \mathbf{v}_O$ ，可得

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_O)$$

定义角加速度为

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (5.20)$$

由此即有刚体上任意一点的加速度

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O)] \quad (5.21)$$

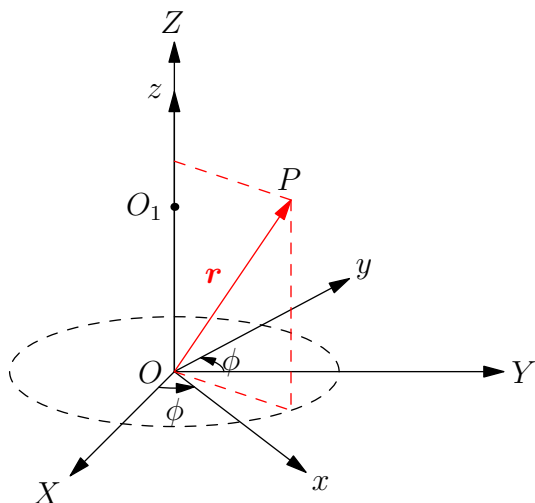


图 5.4: 刚体的定轴转动

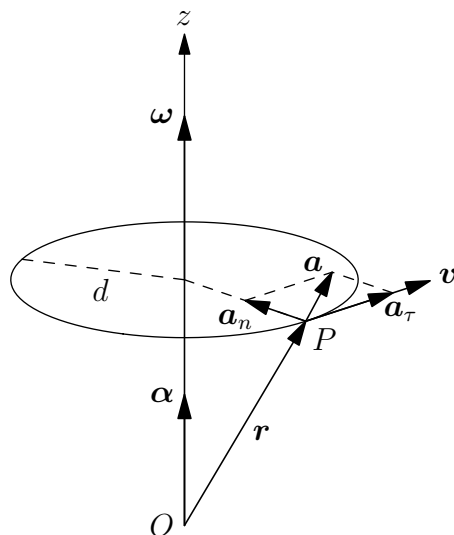


图 5.5: 向心加速度和切向加速度

### 5.1.5 定轴转动

设刚体上有两个不动点  $O$  和  $O_1$ , 则过  $O$  和  $O_1$  的直线即为转轴。方便起见, 将平动系的  $OZ$  轴和本体系的  $Oz$  都取为沿着转轴的方向。

刚体在平动系中的位形由  $OX$  轴和  $Ox$  轴之间的夹角  $\phi$  确定, 刚体上不在转动轴上的点沿着以转轴为圆心的圆周运动, 设此时刚体上任意一点的矢径在本体系中的坐标为  $\mathbf{x}$ , 在平动系的坐标为  $\mathbf{X}$ , 则有

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{x}$$

此处转动矩阵为

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

直接计算可以验证

$$\mathbf{U}^T \dot{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此角速度和角加速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \dot{\phi} \mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = \ddot{\phi} \mathbf{e}_3$$

即角速度和角加速度都沿着转轴方向。由此根据式(5.15)可得刚体上任意一点的速度

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (5.23)$$

根据式(5.21)可得刚体上任意一点的加速度

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (5.24)$$

① 注意矢量叉积在计算时, 两个向量的分量必须取为在同一坐标系下的分量。

此处的加速度  $\mathbf{a}$  可以分解为向心加速度  $\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  和切向加速度  $\mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ 。

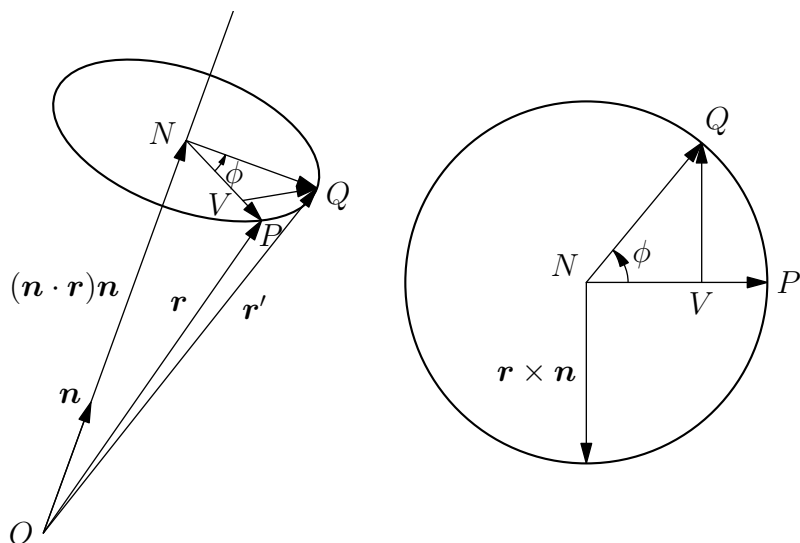


图 5.6: 定轴转动的 Rodrigues 公式

设沿转轴方向的单位矢量为  $\mathbf{n}$ , 转动角为  $\phi$  (转动方向与转轴指向  $\mathbf{n}$  之间满足右手螺旋法则), 则根据图5.6中的几何关系可有

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ'} \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + [\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}] \cos \phi - (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \phi\end{aligned}$$

由此可得定轴转动的 Rodrigues 公式

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \phi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}(1 - \cos \phi) - (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \phi \quad (5.25)$$

### 5.1.6 刚体定点转动的 Euler 角 · 万向锁

由于自由刚体的总自由度  $s = 6$ , 而质点的自由运动自由度  $s_t = 3$ , 所以刚体定点转动的自由度  $s_r = 3$ , 可用 3 个广义坐标确定本体系统相对平动系的取向。

如图5.7所示, 其中  $XOY$  平面与  $xOy$  平面的交线  $ON$  称为节线。三个 Euler 角分别为进动 (precession) 角  $\phi$ , 章动 (nutation) 角  $\theta$  和自转 (spin) 角  $\psi$ 。

三个 Euler 角是相互独立的, 可以任意取值。如果给定三个角的值, 则唯一地确定了刚体定点转动位形, 通常假设  $0 \leq \phi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ 。刚体的连续转动表现为 Euler 角随时间连续变化。

从平动系  $OXYZ$  到本体系统  $Oxyz$  的转换可以通过下面的三个按顺序的转动实现:

1. 绕  $OZ$  轴旋转  $\phi$  角, 称为进动;
2. 绕  $ON$  旋转  $\theta$  角, 称为章动;
3. 绕  $Oz$  轴旋转  $\psi$  角, 称为自转。

如果从转轴的顶端看, 所有的转动都是逆时针方向。即定点转动可以由上面的进动、章动和自转运动来合成。由于刚体的有限定轴转动是不可交换的, 因此上面的三种转动的顺序也是不可交换的。

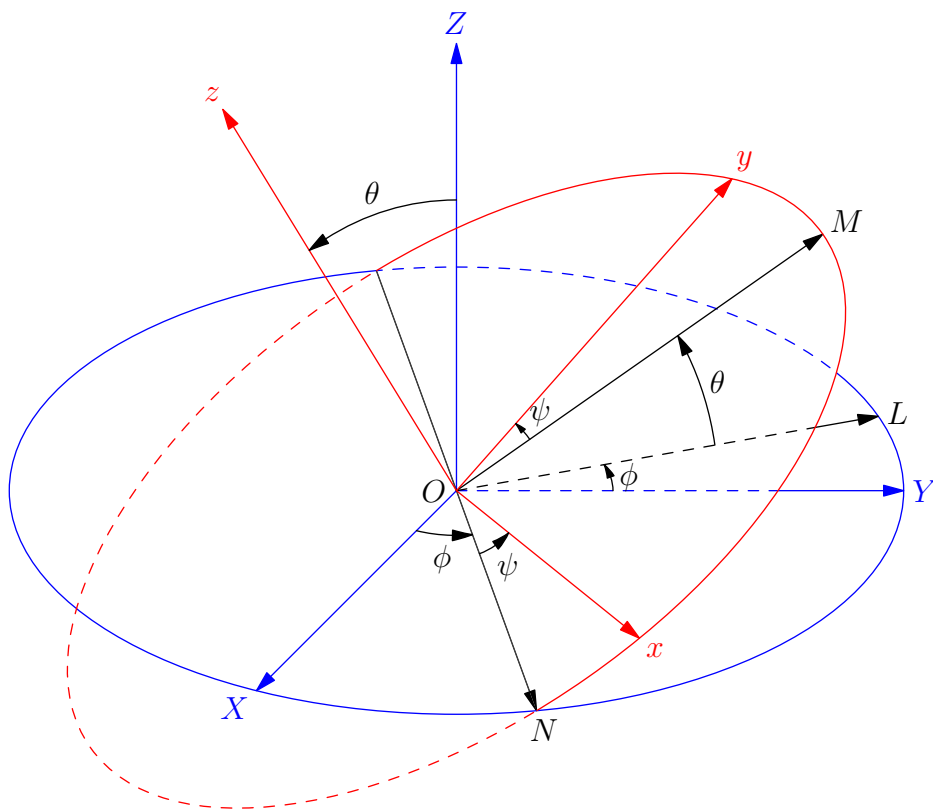


图 5.7: 刚体定点转动的 Euler 角

根据定轴转动的转动矩阵, 可以得到进动、章动和自转的旋转变换矩阵分别为

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此, 定点转动的旋转变换矩阵为

$$\begin{aligned} U &= U_1 U_2 U_3 \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.26)$$

直接求  $U^T \dot{U}$  的运算十分复杂, 但考虑到  $U_1, U_2, U_3$  都是正交矩阵, 因此有

$$U_1^T \dot{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2^T \dot{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3^T \dot{U}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故有

$$\begin{aligned} U^T \dot{U} &= U_3^T U_2^T U_1^T (\dot{U}_1 U_2 U_3 + U_1 \dot{U}_2 U_3 + U_1 U_2 \dot{U}_3) \\ &= U_3^T U_2^T U_1^T \dot{U}_1 U_2 U_3 + U_3^T U_2^T \dot{U}_2 U_3 + U_1^T \dot{U}_1 \end{aligned}$$



$$= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\phi} \cos \theta - \dot{\psi} & \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} & 0 & -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi & \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi & 0 \end{pmatrix}$$

因此有

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (5.27)$$

式(5.27)称为 Euler 运动学方程, 它给出了刚体的角速度在本体系内的分量与广义坐标 (即 Euler 角)、广义速度 (即 Euler 角的导数) 之间的关系。

这里需要注意的一点是, 由图5.7可以看出, 当  $\theta = 0$  或  $\pi$  时, 节线  $ON$  的位置将无法确定, 进而也无法单独确定 Euler 角  $\phi$  和  $\psi$ , 而只能得到它们的和或差。在式(5.26)中令  $\theta = 0$  或  $\pi$  时, 将得到

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\phi \pm \psi) & -\sin(\phi \pm \psi) & 0 \\ \sin(\phi \pm \psi) & \cos(\phi \pm \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这也说明此时无法分别确定  $\phi$  和  $\psi$ 。如果我们将 Euler 运动学方程(5.27)写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

其右端系数矩阵的行列式为  $\sin \theta$ , 当  $\theta = 0$  或  $\pi$  时, 这个行列式为零, 这也意味着, 当  $\theta = 0$  或  $\pi$  时, 无法通过刚体当时的角速度确定三个广义速度  $\dot{\theta}, \dot{\phi}$  和  $\dot{\psi}$ 。

这个现象称为万向锁 (Gimbal Lock), 当刚体的  $Oz$  轴接近  $OZ$  轴时, 广义坐标  $\theta, \phi, \psi$  所描述的刚体的运动缺少了一个自由度。因此此时需要选择其它的角度来确定刚体的取向, 或者改变角度  $\theta$  的定义, 例如将其改变为从  $OX$  轴或  $OY$  轴到  $Oz$  轴的角度。但这样做之后, 在刚体运动到相应的  $\theta$  角起始轴附近时, 仍然会出现万向锁现象。万向锁现象说明, 刚体的在某些区域的连续运动不能用 Euler 角的连续变化来表示。

**例 5.2** 半径为  $a$  的圆盘垂直于地面作纯滚动, 圆盘中心  $C$  以速率  $v_C = \omega_1 R$  沿着半径为  $R$  的圆周运动, 求圆盘边缘上任意一点  $P$  的速度。

**解 方法一:** 如图5.8所示, 圆盘在转动过程中, 盘上各点和  $O$  点的相对距离保持不变, 因此圆盘的运动可以看成是绕  $O$  点的定点转动。而纯滚动条件要求  $Q$  点的瞬时速度为零, 因此  $OQ$  为瞬时转轴, 即角速度沿此方向。由此可得圆盘绕  $O$  的角速度 (进动)  $\omega_1$  与圆盘自转的角速度  $\omega_2$  之间需要满足

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a}{R}$$

由此可有

$$\omega_2 = \frac{R}{a} \omega_1$$

由此即有

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 (\sin \psi \mathbf{e}_x + \cos \psi \mathbf{e}_y) - \omega_2 \mathbf{e}_z = \omega_1 (\sin \psi \mathbf{e}_x + \cos \psi \mathbf{e}_y) + \frac{R}{a} \omega_1 \mathbf{e}_z$$

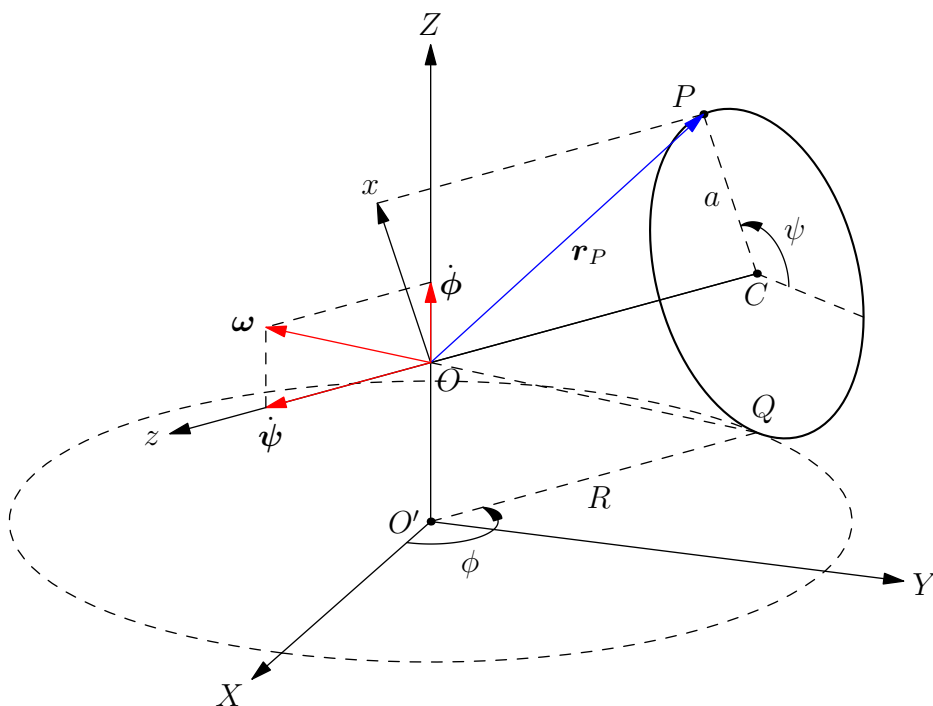


图 5.8: 例 5.2

再考虑到  $\mathbf{r}_P = a\mathbf{e}_x + R\mathbf{e}_z$ , 此处的  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  为本体系中的基<sup>①</sup>。综上, 即有

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \omega_1 R \cos \psi \mathbf{e}_x - \omega_1 R (1 + \sin \psi) \mathbf{e}_y + \omega_1 a \cos \psi \mathbf{e}_z$$

方法二: 也可以用确定 Euler 角的方法通过 Euler 运动学方程直接得到角速度。进动角  $\phi$  即为  $O'Q$  与平动系 (此时与空间系重合)  $X$  轴之间的夹角, 章动角  $\theta = \frac{\pi}{2}$  恒定不变, 自转角  $\psi$  即为圆盘上水平线到本体系  $Ox$  轴的角。据此, 根据 Euler 运动学方程(5.27)可得圆盘的角速度  $\boldsymbol{\omega}$  在本体系中的坐标为

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \cos \psi \\ \omega_3 = \dot{\psi} \end{cases}$$

即有

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \sin \psi \mathbf{e}_x + \dot{\phi} \cos \psi \mathbf{e}_y + \dot{\psi} \mathbf{e}_z$$

现在需要得到  $\dot{\phi}, \dot{\psi}$  与  $\omega_1$  的关系, 考虑  $\mathbf{r}_C = -R\mathbf{e}_z$ , 则有

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = -R\dot{\phi} \cos \psi \mathbf{e}_x + R\dot{\phi} \sin \psi \mathbf{e}_y$$

易知  $\mathbf{v}_C$  的方向沿  $Q$  点处的切线方向, 并可得  $\dot{\phi}$ , 其大小为

$$R\dot{\phi} = \omega_1 R$$

即有  $\dot{\phi} = \omega_1$ 。再考虑  $\mathbf{r}_Q = -a \sin \psi \mathbf{e}_x - a \cos \psi \mathbf{e}_y - R\mathbf{e}_z$ , 则有

$$\mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_Q = (a\dot{\psi} - R\dot{\phi}) \cos \psi \mathbf{e}_x - (a\dot{\psi} - R\dot{\phi}) \sin \psi \mathbf{e}_y$$

<sup>①</sup> 此处  $y$  轴的方向需通过右手规则来确定以保证本体系为右手系。

纯滚动条件要求  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ , 即可得

$$\dot{\psi} = \frac{R}{a} \dot{\phi} = \frac{R}{a} \omega_1$$

由此可得圆盘边缘上任意一点的速度

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \omega_1 R \cos \psi \mathbf{e}_x - \omega_1 R(1 + \sin \psi) \mathbf{e}_y + \omega_1 a \cos \psi \mathbf{e}_z$$

## 5.1.7 四元数与三维空间旋转

### 5.1.7.1 四元数的定义和运算性质

四元数是一种超复数, 其一般形式可以表示为

$$q = w + xi + yj + zk \quad (5.28)$$

其中

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

并且满足

$$\begin{aligned} ij &= k, jk = i, ki = j \\ ji &= -k, kj = -i, ik = -j \end{aligned}$$

这规则类似于空间中的矢量基, 因此四元数通常也可以利用一个标量  $w$  和一个矢量  $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  表示为

$$q = (w, \mathbf{v}) \quad (5.29)$$

在四元数中,  $w$  称为四元数的**实部**, 记作  $\text{Re } q$ ,  $xi + yj + zk$  称为四元数的**虚部**, 记作  $\text{Im } q$ 。如果四元数的虚部为零, 四元数就变成实数。如果四元数的实部等于零, 这样的四元数称为**纯四元数**。

设有两个四元数

$$q_1 = w_1 + x_1i + y_1j + z_1k = (w_1, \mathbf{v}_1), \quad q_2 = w_2 + x_2i + y_2j + z_2k = (w_2, \mathbf{v}_2)$$

它们的加法和减法定义为

$$q_1 \pm q_2 = (w_1 \pm w_2) + (x_1 \pm x_2)i + (y_1 \pm y_2)j + (z_1 \pm z_2)k = (w_1 + w_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \quad (5.30)$$

它们的乘法则可根据类似于复数的运算方式得到

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (w_1 + x_1i + y_1j + z_1k)(w_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\ &= (w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + (w_1 x_2 + w_2 x_1 + y_1 z_2 - y_2 z_1)i \\ &\quad + (w_1 y_2 + w_2 y_1 + z_1 x_2 - z_2 x_1)j + (w_1 z_2 + w_2 z_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1)k \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$= (w_1 w_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, w_1 \mathbf{v}_2 + w_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \quad (5.32)$$

特别需要指出的一点是, 与复数的乘积不同, 四元数的乘积是不可交换的。

四元数  $q = (w, \mathbf{v})$  的共轭四元数定义为

$$q^* = (w, -\mathbf{v}) \quad (5.33)$$

一个四元数与其共轭的乘积是一个非负的实数, 即

$$qq^* = (w^2 + v^2, \mathbf{0}) \quad (5.34)$$

四元数的模则定义为

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{w^2 + v^2} \quad (5.35)$$

由此可定义四元数的倒数为

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2} \quad (5.36)$$

显然满足  $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ 。

### 5.1.7.2 用四元数表示三维空间旋转

如果用一个纯四元数表示三维空间中的一个点, 例如  $p = i$ , 那么类似于复数的情形, 用一个单位四元数与其相乘, 例如

$$pj = k$$

确实达到了旋转的目的。但是只在一个纯四元数上乘以一个单位四元数在一般情况下并不能达到旋转的目的, 因为这种乘积一般没有办法保证所得的结果也是一个纯四元数 (见式(5.32)的实部)。受线性变换的启发, 可以考虑在纯四元数  $p = (0, \mathbf{r})$  上左乘一个单位四元数, 右乘一个单位四元数, 即考虑两个单位四元数

$$q = (w_1, \mathbf{v}_1), \quad r = (w_2, \mathbf{v}_2) \quad (5.37)$$

对四元数  $p$  作变换:

$$p' = qpr \quad (5.38)$$

根据变换的要求, 需要使得新的四元数  $p'$  仍然为纯四元数, 以便表示  $p$  变换之后在三维空间中的位置。为此, 计算  $p'$  的实部为

$$\text{Re } p = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 - w_1 \mathbf{v}_2 - w_2 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{r} \quad (5.39)$$

上式的结果需要对任意  $\mathbf{v}$  都为零, 即要求

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 - w_1 \mathbf{v}_2 - w_2 \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad (5.40)$$

一种最简单的取法为

$$w_1 = w_2, \quad \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \quad (5.41)$$

即将  $r$  取为  $q$  的共轭四元数。考虑到  $q$  和  $r$  都是单位四元数, 可以将变换式(5.38)表示为

$$p' = qpq^* = qpq^{-1} \quad (5.42)$$

记  $\mathbf{n}$  为任意单位向量, 则单位四元数可以表示为

$$q = \left( \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \right) \quad (5.43)$$

将  $q$  的表达式代入变换式(5.42)中计算, 对于结果一定有  $\text{Re } p = 0$ , 虚部为

$$\begin{aligned} \text{Im } p' &= \cos \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{r} - \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{n} \right) + \sin \frac{\theta}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \times \left( \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{n} \right) \\ &= \mathbf{r} \cos \theta + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} (1 - \cos \theta) - \mathbf{r} \times \mathbf{n} \sin \theta \end{aligned} \quad (5.44)$$

对照定轴转动的 Rodrigues 公式(5.25)，可知由单位四元数(5.43)定义的四元数变换(5.42)即表示对位矢为  $\mathbf{r}$  的点绕转轴  $\mathbf{n}$ ，按右手螺旋方向旋转  $\theta$  所得的点。

用四元数表示三维空间中的旋转可以有效避免万向锁的问题，又比矩阵法节约储存和运算量，因此这种方法被广泛应用于计算机图形学上。

## 5.2 惯量矩阵

### 5.2.1 刚体定点转动的角动量、动能与转动惯量

在平动系中，刚体绕  $O$  点定点转动。设刚体任意一点的位矢为  $\mathbf{r}$ ，则其在平动系中的速度为  $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ，由此角动量可计算为<sup>①</sup>

$$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{r}} dV = \int_V \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV = \int_V \rho [r^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}] dV$$

此处积分遍及刚体所在的空间， $\rho$  为刚体的密度。将上式向任意直角坐标系投影，即

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1 = \int_V \rho [r^2 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1)] dV \\ &= \int_V \rho [(x^2 + y^2 + z^2) \omega_1 - (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)x] dV \\ &= \int_V \rho [(y^2 + z^2) \omega_1 - xy\omega_2 - xz\omega_3] dV \\ L_2 &= \int_V \rho [-xy\omega_1 + (x^2 + z^2) \omega_2 - yz\omega_3] dV \\ L_3 &= \int_V \rho [-xz\omega_1 - yz\omega_2 + (x^2 + y^2) \omega_3] dV \end{aligned}$$

由此，角动量矢量的分量可以表示为

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

其中

$$I_{ij} = \int_V \rho \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_k^2 - x_i x_j \right) dV, \quad x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z \quad (5.46)$$

称为刚体对  $O$  的惯量元素，矩阵

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

称为刚体对  $O$  的惯量矩阵。由此，角动量可以表示为

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (5.48)$$

<sup>①</sup> 此式可通过先将刚体分割为  $n$  块，作为质点系处理，其角动量为

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \rho_i \dot{\mathbf{r}}_i \Delta V_i$$

然后令  $n$  趋于无穷，根据重积分的定义即得。

刚体的动能可以表示为<sup>①</sup>

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{r}}) dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$$

考虑到式(5.48)可有

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (5.49)$$

动能的正定性表明惯量矩阵  $\mathbf{I}$  是正定矩阵。再考虑到惯量矩阵的定义, 可知惯量矩阵  $\mathbf{I}$  是对称正定矩阵。

在本体系中, 刚体静止, 因此在本体系中惯量元素为常量。

## 5.2.2 平行轴定理

设对  $O$  点, 惯量元素为

$$I_{ij} = \int_V \rho \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_k^2 - x_i x_j \right) dV$$

对质心  $C$ , 惯量元素为

$$I'_{ij} = \int_V \rho \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x'_k{}^2 - x'_i x'_j \right) dV$$

设刚体质心的坐标为  $X_i$ , 则有

$$x_i = X_i + x'_i$$

再考虑到质心坐标满足<sup>②</sup>

$$\int_V \rho x_i dV = M X_i$$

由此可得平行轴定理

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}' \quad (5.50)$$

其中  $\mathbf{I}$  为刚体对  $O$  点的惯量矩阵,  $\mathbf{I}'$  为刚体对质心的惯量矩阵, 而

$$I_{Cij} = M \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 X_k^2 - X_i X_j \right) \quad (5.51)$$

即为总质量集中于质心的质点对  $O$  的惯量元素。

平行轴定理给出了对质心  $C$  点的惯量矩阵与对任意点  $O$  的惯量矩阵之间的关系。

## 5.2.3 会聚轴定理

角速度表示可以为  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$ , 此处  $\mathbf{n}$  为瞬时转轴方向单位矢量。由此可得角动量轴向投影分量为

$$L_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = \int_V \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dV = \int_V \rho (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \omega dV$$

即有

$$L_n = I_n \omega \quad (5.52)$$

<sup>①</sup> 对于刚体, 角动量矢量是与空间位置无关的, 否则刚体将发生变形。

<sup>②</sup> 此式可通过先将刚体分割为  $n$  块, 作为质点系处理, 然后令  $n$  趋于无穷, 根据重积分的定义即得。

此处

$$I_n = \int_V \rho |\mathbf{n} \times \mathbf{r}|^2 dV \quad (5.53)$$

为对  $\mathbf{n}$  轴的转动惯量,  $|\mathbf{n} \times \mathbf{r}|$  即为矢径  $\mathbf{r}$  末端点到转轴的距离。

设在某坐标系下,  $\mathbf{n}$  和  $\mathbf{L}$  的分量可以表示为

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

因此有

$$L_n = \mathbf{n}^T \mathbf{L} = \mathbf{n}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n} \omega$$

即有

$$I_n = \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n} \quad (5.54)$$

式(5.54)表示的关系即称为**会聚轴定理**。此时, 刚体的动能也可以简单的表示为

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I_n \omega^2 \quad (5.55)$$

对轴的转动惯量一般与取向有关, 是各向异性的。

## 5.2.4 惯量主轴与主轴系

刚体的动能是标量, 因此是坐标变换的不变量。在不同的坐标系中, 角动量的坐标向量之间将满足

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{U} \boldsymbol{\omega}'$$

因此, 动能的形式将变为

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'^T \mathbf{U}^T \mathbf{I} \mathbf{U} \boldsymbol{\omega}' = T' = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'^T \mathbf{I}' \boldsymbol{\omega}'$$

因此, 在不同的坐标系中, 惯量矩阵将满足

$$\mathbf{I}' = \mathbf{U}^T \mathbf{I} \mathbf{U}$$

即, 在不同的坐标系中, 惯量矩阵是不同的。而能够使得惯量矩阵  $\mathbf{I}$  为对角矩阵的坐标系称为**主轴系**, 其坐标轴称为**惯量主轴**, 对相应主轴的转动惯量称为**主惯量**。

今后, 我们约定本体系一律取为主轴系。在主轴系中, 惯量矩阵为

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$$

此时, 角动量和动能分别为

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i \mathbf{e}_i = I_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3 \quad (5.56)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad (5.57)$$

惯量矩阵的正定性保证主惯量都是正值, 即  $I_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ <sup>①</sup>。

在第5.1.6节提到了万向锁, 这里要说明的是, 万向锁即为在第2.6.3节中提到的选取的广义坐标使得系统的动能在广义坐标的某些区域内, 其动能不满足非退化性的一个例子。如果将 Euler 运动学方程(5.27)代入刚体动能(5.57)中并令  $\theta = 0$  或  $\pi$ , 可得

$$T = \frac{1}{2}(I_1 \cos^2 \psi + I_2 \sin^2 \psi) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \pm \dot{\psi})^2 \quad (5.58)$$

其中正号对应  $\theta = 0$ , 负号对应  $\theta = \pi$ 。这个二次型的行列式

$$\begin{vmatrix} I_1 \cos^2 \psi + I_2 \sin^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

这违反了第2.6.3节中的不等式(2.67), 因此在  $\theta$  接近 0 或  $\pi$  时, 通常定义的 Euler 角已不适合用于描述刚体的运动, 这个事实已经在第5.1.6节中指出了。

## 5.2.5 主轴系的求法

考虑角速度沿主轴方向, 即  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_j$  时, 则

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}\omega \mathbf{e}_j = I_j \omega \mathbf{e}_j$$

由此可得

$$\mathbf{I}\mathbf{e}_j = I_j \mathbf{e}_j$$

即惯量主轴为惯量矩阵的本征矢量, 相应的本征值为主惯量<sup>②</sup>。

**例 5.3** 求边长为  $a$  质量为  $M$  的匀质立方体对顶点的惯量矩阵, 并求出其惯量主轴和主惯量。

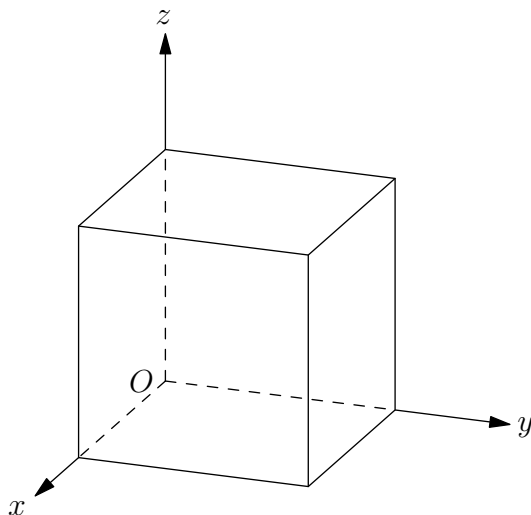


图 5.9: 例 5.3

<sup>①</sup> 这是对于通常的三维物体, 在足够的近似下, 可以认为二维物体 (如忽略厚度的平板) 的其中一个主惯量为零, 一维物体 (如忽略粗细的细绳) 的其中两个主惯量为零。

<sup>②</sup> 实际上, 根据矩阵正交相似对角化的条件, 可以直接得出此结论。



解 根据惯量矩阵中惯量元素的定义

$$I_{ij} = \int_V \rho \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_k^2 - x_i x_j \right) dV$$

可有

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{M}{a^3} \int_V (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{M}{a^3} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (y^2 + z^2) dz = \frac{2}{3} Ma^2 \\ I_{22} &= \frac{M}{a^3} \int_V (x^2 + z^2) dx dy dz = \frac{M}{a^3} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 + z^2) dz = \frac{2}{3} Ma^2 \\ I_{33} &= \frac{M}{a^3} \int_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{M}{a^3} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 + y^2) dz = \frac{2}{3} Ma^2 \\ I_{12} &= I_{21} = \frac{M}{a^3} \int_V (-xy) dx dy dz = -\frac{M}{a^3} \int_0^a x dx \int_0^a y dy \int_0^a dz = -\frac{1}{4} Ma^2 \\ I_{23} &= I_{32} = \frac{M}{a^3} \int_V (-yz) dx dy dz = -\frac{M}{a^3} \int_0^a dx \int_0^a y dy \int_0^a z dz = -\frac{1}{4} Ma^2 \\ I_{13} &= I_{31} = \frac{M}{a^3} \int_V (-xz) dx dy dz = -\frac{M}{a^3} \int_0^a x dx \int_0^a dy \int_0^a z dz = -\frac{1}{4} Ma^2 \end{aligned}$$

因此, 惯量矩阵为

$$\mathbf{I} = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

设矩阵  $\mathbf{I}$  的特征值为  $\frac{Ma^2}{12}\lambda$ , 则有

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & -3 & -3 \\ -3 & 8 - \lambda & -3 \\ -3 & -3 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得  $\lambda_1 = \lambda_2 = 11, \lambda_3 = 2$ , 因此有主惯量

$$I_1 = I_2 = \frac{11}{12} Ma^2, \quad I_3 = \frac{1}{6} Ma^2$$

相应的本征矢量可取为<sup>①</sup>

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

质心的坐标为

$$\mathbf{X} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故对质量集中于质心对顶点的惯量元素为

$$I_{Cij} = M \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 X_k^2 - X_i X_j \right)$$

<sup>①</sup> 其中  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  的取法不唯一。

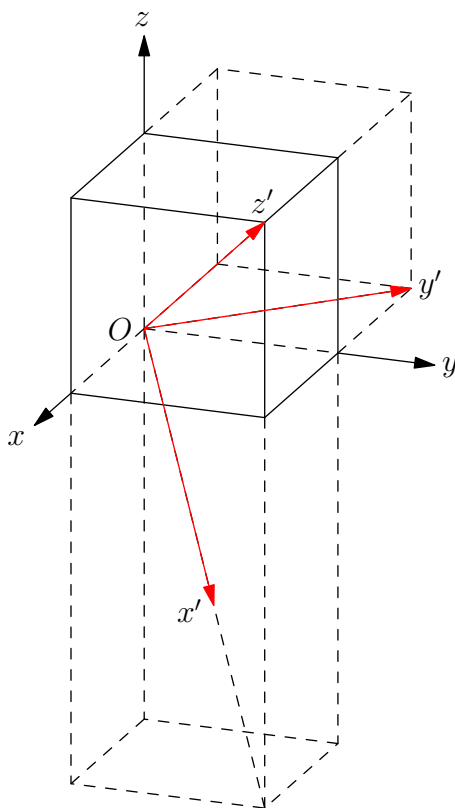


图 5.10: 例 5.3: 立方体对顶点的惯量主轴

由此可得质量集中与质心对顶点的惯量矩阵为

$$\mathbf{I}_C = \frac{Ma^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

故有对质心  $C$  的惯量矩阵为

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I} - \mathbf{I}_C = \frac{Ma^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故对质心  $C$  可选任意三个相互正交的方向为惯量主轴，主惯量为

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{6} Ma^2$$

即，匀质立方体对质心的转动惯性是球对称的。

## 5.2.6 惯量椭球

在刚体的转轴上取点  $P$ ，使得其坐标满足

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{I_n}} \mathbf{n}$$

所以有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} = \frac{1}{I_n} \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n} = 1$$

由于惯量矩阵  $\mathbf{I}$  对称正定，因此点  $P$  的集合为中心在原点的椭球面，此椭球面称为**惯量椭球**。它是刚体转动惯量的几何表示。

在主轴系中，惯量椭球为标准形式

$$I_1 x'^2 + I_2 y'^2 + I_3 z'^2 = 1$$

主轴是惯量椭球的对称轴。

当  $I_1 = I_2 = I_3$  时，惯量椭球退化为球，其主轴可以任选，物体呈转动各项同性。当  $I_1 = I_2 \neq I_3$  时，惯量椭球退化为旋转椭球面，两主轴可以在垂直于第三个主轴的平面内任选。

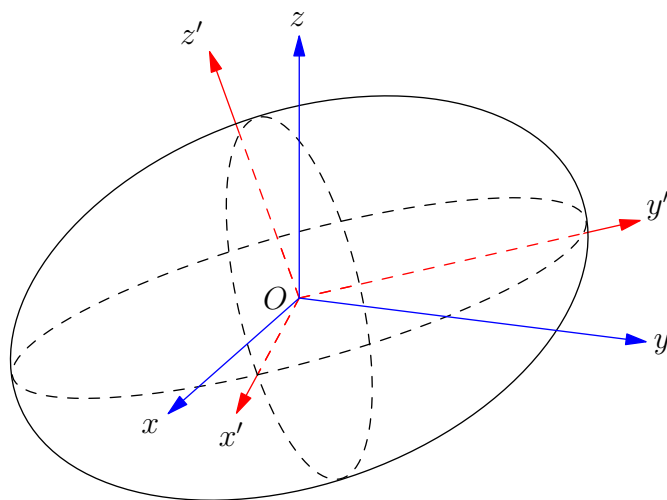


图 5.11: 惯量椭球和主轴系（红色坐标系为主轴系）

惯量椭球的几何意义为：

1. 给出对过定点的任意轴的转动惯量；
2. 给出主轴系；
3. 已知瞬时转动轴（即角速度  $\boldsymbol{\omega}$  的方向），确定角动量方向。

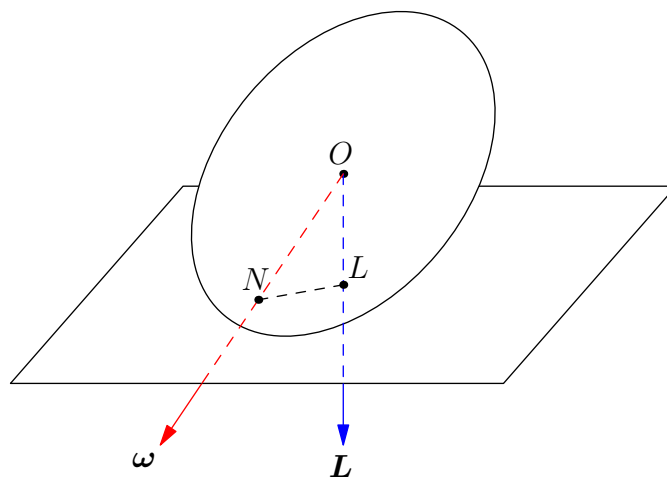


图 5.12: 角速度的方向与角动量的方向

下面考虑已知角速度  $\omega$  的方向, 来求解角动量  $L$  的方向。首先刚体的动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2} I_n \omega^2$$

此处  $I_n$  为刚体绕瞬时转轴的转动惯量。则转轴与惯量椭球的交点  $N$  (称为极点) 为

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{\sqrt{I_n}} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}}$$

则极点处, 惯量椭球的切平面法向矢量可以表示为

$$\mathbf{n} = \nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} - 1)|_N = 2\mathbf{I} \mathbf{x}_N = \frac{2\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}} = \frac{2\mathbf{L}}{\sqrt{2T}}$$

由此即可得角动量的方向沿惯量椭球过极点切平面的法向。

惯量椭球固定于刚体, 其转动代表刚体的定点转动。

### 5.2.7 主惯量的性质

当坐标系取为主轴系时, 根据惯量矩阵的定义式(5.46)同样也有

$$I_1 = \int_V \rho(y^2 + z^2) dV, \quad I_2 = \int_V \rho(z^2 + x^2) dV, \quad I_3 = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV$$

由此可得

$$I_1 + I_2 = \int_V \rho(x^2 + y^2 + 2z^2) dV = I_3 + 2 \int_V \rho z^2 dV \geq I_3$$

其中等号成立的条件为刚体仅位于  $Oxy$  平面内。即主惯量满足三角不等式

$$I_1 + I_2 \geq I_3, \quad I_3 + I_1 \geq I_2, \quad I_2 + I_3 \geq I_1 \quad (5.59)$$

对于一般的三维刚体, 等号是无法取得的。

利用参数  $\theta_1 = \frac{I_1}{I_3}, \theta_2 = \frac{I_2}{I_3}$  对主惯量进行无量纲化, 此时不等式(5.59)可以改写为

$$\theta_1 + \theta_2 \geq 1, \quad \theta_1 + 1 \geq \theta_2, \quad 1 + \theta_2 \geq \theta_1$$

参数允许的取值如图5.13中的阴影区域所示, 它是位于平行直线  $\theta_1 + 1 = \theta_2$  和  $1 + \theta_2 = \theta_1$  之间以及直线  $\theta_1 + \theta_2 = 1$  右上方的无穷大带状区域。参数允许取值区域的边界  $\theta_1 + \theta_2 = 1, \theta_1 + 1 = \theta_2$  和  $\theta_2 + 1 = \theta_1$  分别对应位于  $Oxy, Oxz$  和  $Oyz$  平面内的二维刚体 (或质点系)。而点  $(0, 1)$ 、点  $(1, 0)$  和无穷远点则对应位于  $Ox$  轴、 $Oy$  轴和  $Oz$  轴上的一维刚体 (或质点系)。

## 5.3 Euler 动力学方程

### 5.3.1 刚体运动方程

当刚体在空间系中作定点转动时 (此时平动系与空间系重合), 取定点为基点  $O$ , 根据角动量定理可有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(e)}$$

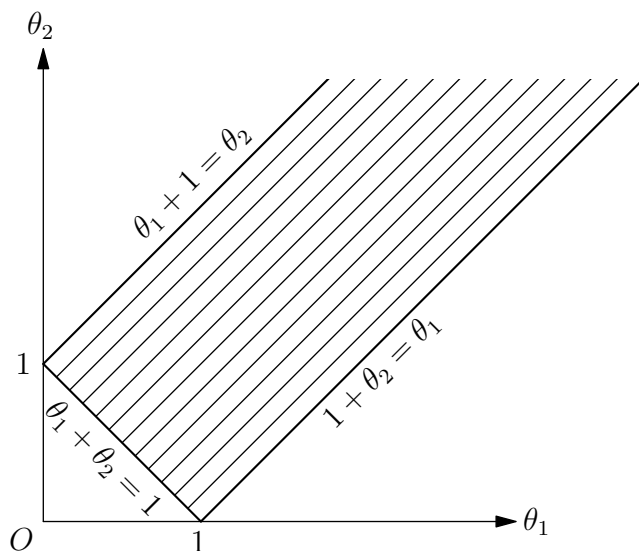


图 5.13: 主惯量的允许取值区域

此处  $\mathbf{M}^{(e)}$  为刚体对  $O$  点的合外力矩, 定义为<sup>①</sup>

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f}^{(e)} dV$$

式中  $\mathbf{f}^{(e)}$  为刚体所受的外力分布 (单位体积刚体所受外力)。刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$$

由于刚体的性质, 刚体在运动过程中其内部任意两个质点间都没有相对位移, 因此内约束反力不做功。根据动能定理可有

$$\frac{dT}{dt} = \int_V \mathbf{f}^{(e)} \cdot \dot{\mathbf{r}} dV = \int_V \mathbf{f}^{(e)} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV = \int_V \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{f}^{(e)}) dV = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^{(e)}$$

对于刚体在空间系的一般运动, 有如下定理。

**定理 5.3.1 (Chasles 定理<sup>②</sup>)** 刚体最一般的位移可以分解为随任选基点的平动位移和绕该基点的定点转动。

由此, 可取质心为基点, 刚体的运动则分解为随质心的平动与绕质心的定点转动, 而且前面已说明刚体定点转动的角速度与基点的选取无关。对于刚体质心的平动运动, 根据动量定理可有

$$M \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}^{(e)} \quad (5.60)$$

式中  $\mathbf{F}^{(e)}$  为刚体所受合外力, 即

$$\mathbf{F}^{(e)} = \int_V \mathbf{f}^{(e)} dV$$

即刚体质心的运动规律与质点是相同的。对于刚体绕质心的定点转动, 根据质心系的角动量定理可有

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'^{(e)} \quad (5.61)$$

<sup>①</sup> 此式同样可以通过将刚体分割为  $n$  个质点, 然后令  $n$  趋于无穷大根据重积分的定义获得。

<sup>②</sup> 中文可作“沙勒定理”或“夏莱定理”。

式中  $\mathbf{M}'^{(e)}$  为对质心的合外力矩, 即

$$\mathbf{M}'^{(e)} = \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{f}^{(e)} dV$$

在空间系中, 刚体对原点的角动量为

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{L}' \quad (5.62)$$

在空间系中, 刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + T' = \frac{1}{2}\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}' \quad (5.63)$$

### 5.3.2 Euler 动力学方程

根据上节的讨论, 如果取质心参考系, 刚体的运动可以分解为刚体质心相对空间系的运动和刚体绕质心的定点转动。虽然 Chasles 定理5.3.1说明刚体的一般运动可以分解为任意基点的平动和绕该基点的定点转动, 但在取质心以外的点为基点时, 刚体的平动系将不再是惯性系<sup>①</sup>, 因此在本体系中需要计及惯性力 (参见第七章)。

但很多情况下, 刚体是绕其上某一相对空间系静止的点作定点转动的。在刚体定点转动的情形下, 需要考虑刚体对任意基点的定点运动方程。此时有角动量定理

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \quad (5.64)$$

的分量形式。式中  $\mathbf{L}$  为刚体在平动系 (可以不是质心系) 中的角动量,  $\mathbf{M}$  为刚体对基点的外力矩。在本体系中, 刚体的惯量矩阵是常数矩阵, 因此下面考虑求得方程(5.64)在本体系中的分量形式。本体系的基矩阵  $\mathbf{e}$  与平动系的基矩阵  $\mathbf{E}$  之间满足

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}\mathbf{U}$$

在本体系中可有

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 L_i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e} \bar{\mathbf{L}}$$

式中  $\bar{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ 。由此可有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{e} \dot{\bar{\mathbf{L}}} + \dot{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{e} \dot{\bar{\mathbf{L}}} + \mathbf{E} \dot{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{e} \dot{\bar{\mathbf{L}}} + \mathbf{e} \mathbf{U}^T \dot{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{L}} \\ &= \frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \end{aligned} \quad (5.65)$$

式中  $\frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{L}_i \mathbf{e}_i$  称为相对变化率,  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$  称为转动牵连变化率。再利用角动量定理, 可得

$$\frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M} \quad (5.66)$$

<sup>①</sup> 实际上, 质心系也不一定是惯性系, 但质心系的角动量定理与惯性系具有相同的形式。

式(5.66)称为 Euler 动力学方程 (矢量形式)。考虑到  $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ , 可以将式(5.66)写作分量形式如下:

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 + I_{12}\dot{\omega}_2 + I_{13}\dot{\omega}_3 - (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 + I_{23}(\omega_2^2 - \omega_3^2) - \omega_1(I_{12}\omega_3 - I_{13}\omega_2) = M_1 \\ I_{21}\dot{\omega}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 + I_{23}\dot{\omega}_3 - (I_{33} - I_{11})\omega_3\omega_1 + I_{31}(\omega_3^2 - \omega_1^2) - \omega_2(I_{23}\omega_1 - I_{12}\omega_3) = M_2 \\ I_{31}\dot{\omega}_1 + I_{32}\dot{\omega}_2 + I_{33}\dot{\omega}_3 - (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + I_{13}(\omega_1^2 - \omega_2^2) - \omega_3(I_{13}\omega_2 - I_{23}\omega_1) = M_3 \end{cases} \quad (5.67)$$

事实上, 对于任何矢量  $\mathbf{A}$ , 都有类似式(5.66)的式子成立, 即

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (5.68)$$

其中  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{e}_i$  称为绝对变化率,  $\frac{\tilde{d}\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i \mathbf{e}_i$  称为相对变化率,  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$  称为转动牵连变化率。

如果本体系取为主轴系, 则有

$$L_i = I_i \omega_i, \quad i = 1, 2, 3$$

此时可使式(5.66)的分量形式大为简化, 即

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = M_3 \end{cases} \quad (5.69)$$

式(5.69)即为主轴系中的 Euler 动力学方程, 它是对角速度的一阶非线性常微分方程组。将 Euler 运动学方程(5.27)代入, 可得对 Euler 角的二阶非线性常微分方程组。

## 5.4 刚体的定轴转动

### 5.4.1 运动方程与约束反力

考虑有两个点  $O$  和  $O_1$  固定不动的刚体, 如图5.14所示。设点  $O$  和  $O_1$  受到的约束反力分别为  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{R}_1$ , 刚体受到的主动力的合力为  $\mathbf{F}$ , 主动力对  $O$  点的力矩为  $\mathbf{M}_O$ 。

以点  $O$  为平动系  $OXYZ$  的原点,  $OZ$  轴沿着  $OO_1$  方向, 本体系  $Oxyz$  的  $Oz$  轴也沿着  $OO_1$  方向。定轴转动的刚体有一个自由度, 取坐标轴  $OX$  和  $Ox$  的夹角  $\psi$  (自转角) 为广义坐标。

以  $O$  点为基点, 利用矢量形式的 Euler 动力学方程(5.66)可得

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{L}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O + \overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{F}_1 \quad (5.70)$$

再根据质心系的动量定理, 并将其投影至本体系中<sup>①</sup>, 过程类似于前面得到式(5.66)的过程, 可得

$$m \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_C}{dt} + m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_C = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{R}_1 \quad (5.71)$$

<sup>①</sup> 实际上此处可以看作是在非惯性系 (即本体系) 中应用 Newton 第二定律, 更多具体的内容参见第七章。

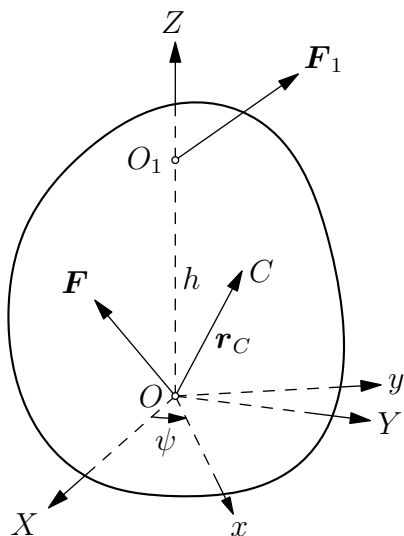


图 5.14: 刚体的定轴转动与约束反力

其中  $m$  是刚体的质量,  $\omega$  是刚体的角速度,  $v_C$  是刚体质心的速度。设在本体系中这些矢量的分量分别如下

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_O = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{1z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_O = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$$

由于角速度  $\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$ , 所以  $\mathbf{L}_O = \begin{pmatrix} I_{13}\dot{\psi} \\ I_{23}\dot{\psi} \\ I_{33}\dot{\psi} \end{pmatrix}$ 。由于  $\mathbf{v}_C = \omega \times \overrightarrow{OC}$ , 用  $h$  表示刚体上  $O$  和  $O_1$  的距离, 方程(5.70)和(5.71)的分量形式为

$$\begin{cases} -my_C\ddot{\psi} - mx_C\dot{\psi}^2 = F_x + R_x + R_{1x} \end{cases} \quad (5.72a)$$

$$\begin{cases} mx_C\ddot{\psi} - my_C\dot{\psi}^2 = F_y + R_y + R_{1y} \end{cases} \quad (5.72b)$$

$$\begin{cases} 0 = F_z + R_z + R_{1z} \end{cases} \quad (5.72c)$$

$$\begin{cases} I_{13}\ddot{\psi} - I_{23}\dot{\psi}^2 = M_x - hR_{1y} \end{cases} \quad (5.72d)$$

$$\begin{cases} I_{23}\ddot{\psi} + I_{13}\dot{\psi}^2 = M_y + hR_{1x} \end{cases} \quad (5.72e)$$

$$\begin{cases} I_{33}\ddot{\psi} = M_z \end{cases} \quad (5.72f)$$

方程(5.72f)中不包含约束反力, 是刚体定轴转动的运动微分方程, 其余五个方程中包含了所有待求的约束反力。由方程(5.72c)不能单独求出轴向约束反力分量  $R_z$  和  $R_{1z}$ , 而仅能求出它们的和, 这个和并不依赖于刚体的转动。而侧向约束反力分量  $R_x, R_y, R_{1x}, R_{1y}$  可以有方程(5.72a)、(5.72b)、(5.72d)和(5.72e)求出, 它们依赖于刚体的转动。

**例 5.4 (偏斜的飞轮)** 设有半径为  $R$ , 质量为  $m$  的圆盘状飞轮安装在两个间距为  $l$  的轴承正中, 但飞轮的法线方向与轴承之间有一夹角  $\alpha$ , 求飞轮以  $\omega$  的角速度匀速绕轴旋转时, 轴承上受到的额外负荷。

**解** 圆盘的主惯量为

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}mR^2, \quad I_3 = \frac{1}{2}mR^2$$



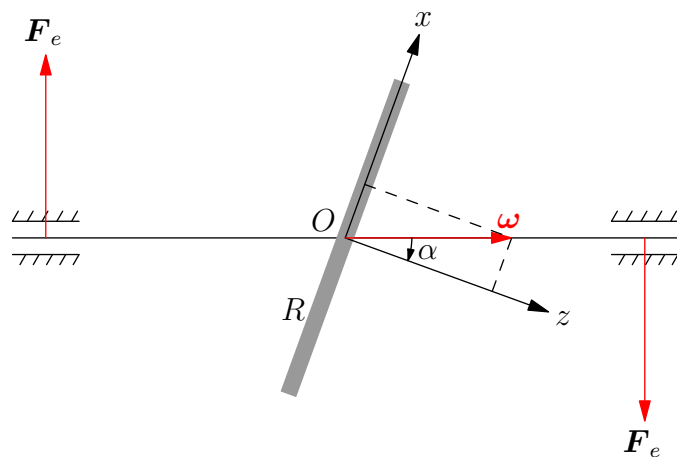


图 5.15: 例 5.4

在本体系中，角速度为

$$\omega_1 = \omega \sin \alpha, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega \cos \alpha$$

由于是匀速转动，可有

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$$

Euler 动力学方程为

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases} M_1 = 0 \\ M_2 = -\frac{1}{8} m R^2 \omega^2 \sin 2\alpha \\ M_3 = 0 \end{cases}$$

因此轴承上受到的力（动约束反力）为

$$F_e = \frac{|M_2|}{l} = \frac{m R^2 \omega^2 \sin 2\alpha}{8l}$$

而轴承受到的静约束反力（重力负荷）为

$$F_g = \frac{1}{2} m g$$

当角速度  $\omega$  很大时，轴承受到的动约束反力可以远大于静约束反力。

### 5.4.2 动约束反力等于静约束反力的条件

如果在方程(5.72a)、(5.72b)、(5.72d)和(5.72e)中令  $\dot{\psi} = 0, \ddot{\psi} = 0$  则可得到静约束反力的方程。如果刚体转动则  $\dot{\psi}$  和  $\ddot{\psi}$  中至少有一个非零，在一般情况下这些方程的左端将非零，即动约束反力与静约束反力不相等。

当动约束反力等于静约束反力时, 需要满足

$$\begin{cases} y_C \ddot{\psi} + x_C \dot{\psi}^2 = 0 \\ x_C \ddot{\psi} - y_C \dot{\psi}^2 = 0 \end{cases} \quad (5.73)$$

和

$$\begin{cases} I_{13} \ddot{\psi} - I_{23} \dot{\psi}^2 = 0 \\ I_{23} \ddot{\psi} + I_{13} \dot{\psi}^2 = 0 \end{cases} \quad (5.74)$$

方程组(5.73)和(5.74)可以看作关于  $\ddot{\psi}$  和  $\dot{\psi}^2$  的齐次线性方程组, 其有任意解的条件应为

$$\begin{cases} x_C^2 + y_C^2 = 0 \\ I_{13}^2 + I_{23}^2 = 0 \end{cases}$$

即

$$x_C = y_C = 0, \quad I_{13} = I_{23} = 0 \quad (5.75)$$

式(5.75)表明, 当转动轴过质心且与其中一个惯性主轴重合时, 动约束反力才等于静约束反力。

## 5.5 刚体定点运动的 Euler 情形

### 5.5.1 运动方程与守恒量

当做定点运动的刚体不受外力矩作用时, 称为刚体定点运动的 Euler 情形, 即  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ , 由 Euler 动力学方程(5.69)可得刚体的运动方程为

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} \quad (5.76)$$

将(5.76)各式分别乘以  $I_1 \omega_1$ 、 $I_2 \omega_2$ 、 $I_3 \omega_3$  相加, 得

$$I_1^2 \omega_1 \dot{\omega}_1 + I_2^2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + I_3^2 \omega_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

即有角动量守恒<sup>①</sup>

$$\sum_{i=1}^3 I_i^2 \omega_i^2 = L^2 \quad (\text{常数}) \quad (5.77)$$

将(5.76)各式分别乘以  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$  相加, 得

$$I_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + I_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + I_3 \omega_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

即有能量守恒<sup>②</sup>

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 = T \quad (\text{常数}) \quad (5.78)$$

<sup>①</sup> 也可同角动量定理得到。

<sup>②</sup> 也可通过动能定理得到。

### 5.5.2 Euler 情形下的永久转动

如果刚体的角速度保持不变, 这种刚体的定点运动称为**永久转动**, 这时  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  都是常数。由方程(5.76)可得

$$(I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0, \quad (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0, \quad (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0 \quad (5.79)$$

由此可以看出, 只要  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  中有两个为零, 第三个为任意值, 则方程(5.79)对于主惯量为任意值的刚体都满足。即刚体的永久转动只能绕着刚体对定点的惯性主轴, 并且其角速度大小可以是任意的。

特别地, 如果  $I_1 = I_2 = I_3$ , 则方程(5.79)对任意的  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  都成立, 即刚体的转动轴可以是任意方向。事实上, 当  $I_1 = I_2 = I_3$  时, 刚体的惯性椭球成为球体, 所以过定点的任意轴都是惯性主轴。

如果两个主惯量相等, 例如  $I_1 = I_2$ , 则方程对  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  和任意的  $\omega_3$  都成立(绕惯性主轴  $Oz$  转动), 同样对  $\omega_3 = 0$  和任意的  $\omega_1, \omega_2$  都成立(转动轴为通过定点且位于惯性主轴赤道面内的任意转动轴<sup>①</sup>)。

如果  $I_1, I_2, I_3$  各不相同, 则方程(5.79)的解只能是  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  中有两个为零, 第三个为任意值, 即转动绕惯性主轴。

### 5.5.3 Euler 情形下动力学对称刚体的运动

如果刚体对定点的某两个主惯量相等, 不妨设有  $I_1 = I_2$ , 则称刚体**动力学对称**, 轴  $Oz$  称为**动力学对称轴**。此时 Euler 动力学方程化为

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0 \\ I_1\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \quad (5.80)$$

由方程(5.80)中的第三式可得

$$\omega_3 = \Omega \quad (\text{常数}) \quad (5.81)$$

记  $n = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\Omega$ , 则方程(5.80)的第一二式化为

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + n\omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - n\omega_1 = 0 \end{cases}$$

从中消去  $\omega_2$  可得

$$\ddot{\omega}_1 + n^2\omega_1 = 0$$

由此解得

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \cos(nt + \varepsilon) \\ \omega_2 = \omega_0 \sin(nt + \varepsilon) \end{cases} \quad (5.82)$$

综上可得刚体的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 = \omega_0 \cos(nt + \varepsilon) \mathbf{e}_1 + \omega_0 \sin(nt + \varepsilon) \mathbf{e}_2 + \Omega \mathbf{e}_3 \quad (5.83)$$

<sup>①</sup> 此情形下, 惯性椭球为旋转椭球, 任何与  $Oz$  垂直的轴都是惯性主轴。

角速度的大小为

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} \quad (\text{常数})$$

该角速度与主轴系  $z$  轴夹角是固定的  $\alpha = \arctan \frac{\omega_0}{\Omega}$ 。

Euler 情形下, 动力学对称刚体的角速度位于主轴系的一个半顶角为  $\alpha$ ,  $z$  轴为对称轴的锥面 (称为**本体极锥**) 上, 绕  $z$  轴以匀角速度  $n$  旋转。

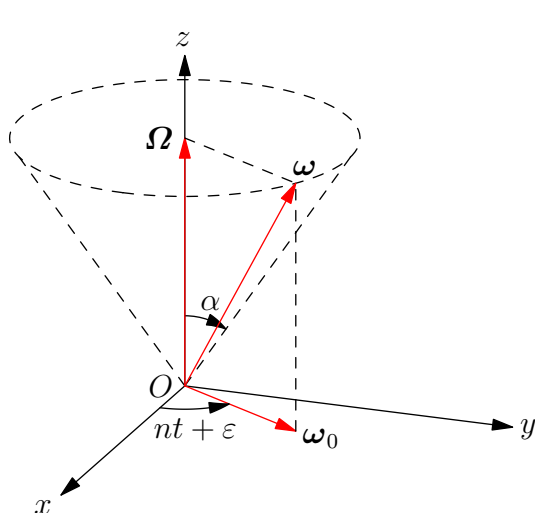


图 5.16: Euler 情形下动力学对称刚体的角速度矢量

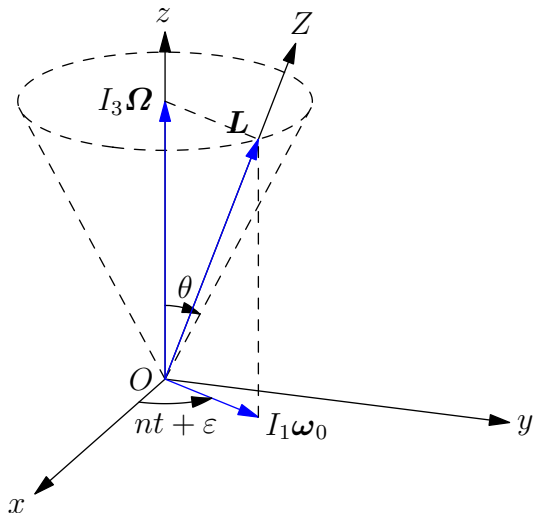


图 5.17: Euler 情形下动力学对称刚体的角动量矢量

下面考虑角动量矢量  $\mathbf{L}$ 。根据角动量守恒,  $\mathbf{L}$  为常矢量, 方向不变, 可取平动系基矢量为  $\mathbf{E}_Z = \frac{\mathbf{L}}{L}$ 。具体可有

$$\mathbf{L} = I_1(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2) + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3 = I_1 \omega_0 [\cos(nt + \varepsilon) \mathbf{e}_1 + \sin(nt + \varepsilon) \mathbf{e}_2] + I_3 \Omega \mathbf{e}_3$$

由此可以看出矢量  $\mathbf{e}_3$ 、 $\boldsymbol{\omega}$  和  $\mathbf{L}$  共面, 角动量的大小

$$L = \sqrt{I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2} = \sqrt{I_1^2 \omega_0^2 + I_3^2 \Omega^2} \quad (\text{常数})$$

章动角  $\theta$  满足

$$\tan \theta = \frac{I_1 \omega_0}{I_3 \Omega} = \frac{I_1}{I_3} \tan \alpha \quad (\text{常数})$$

即有  $\dot{\theta} = 0$ , 无章动。

再由 Euler 运动学方程

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

由此可得自转角  $\psi$  满足

$$\tan \psi = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \cot(nt + \varepsilon)$$

即有自转角  $\psi = -nt + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ 。由此可得自转角速度以及进动角速度

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -n = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega \quad (\text{常数}) \\ \dot{\phi} = \frac{\omega_3 - \dot{\psi}}{\cos \theta} = \frac{L}{I_1} > 0 \quad (\text{常数}) \end{cases}$$

即有第三主轴绕角动量矢量以匀角速度逆时针进动。章动角恒定，进动和自转角速度恒定的定点运动称为**规则进动**。考虑到  $\mathbf{e}_z$ 、 $\boldsymbol{\omega}$  和  $\mathbf{L}$  共面，故角速度矢量绕角动量矢量以匀角速度逆时针旋转，由于

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\mathbf{L}}{L} = \frac{2T}{L} \quad (\text{常数})$$

故角速度矢量位于空间系锥面（称为**空间极锥**）上。角  $\alpha$  和  $\theta$  满足

$$\frac{\tan \theta}{\tan \alpha} = \frac{I_1}{I_3} \quad (5.84)$$

它们决定了空间极锥与本体极锥之间的相对位置。Euler 情形下动力学对称刚体可能的三种空间极锥与本体极锥之间的相对位置关系如图5.18、5.19和5.20所示。

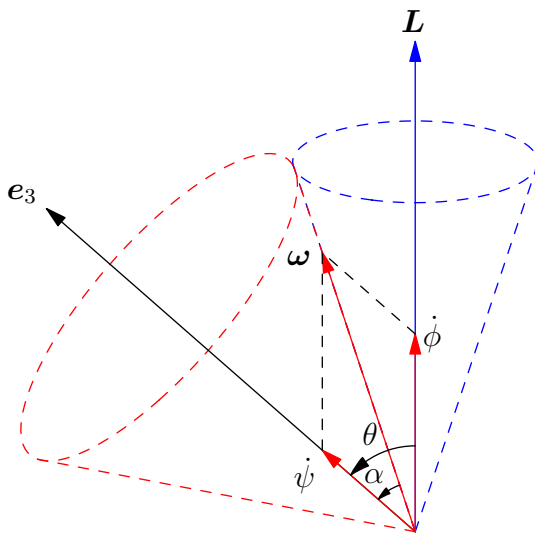


图 5.18:  $I_1 = I_2 > I_3$ ,  $\theta > \alpha$

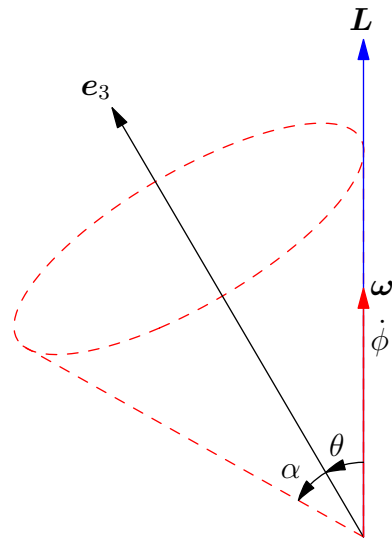


图 5.19:  $I_1 = I_2 = I_3$ ,  $\theta = \alpha$

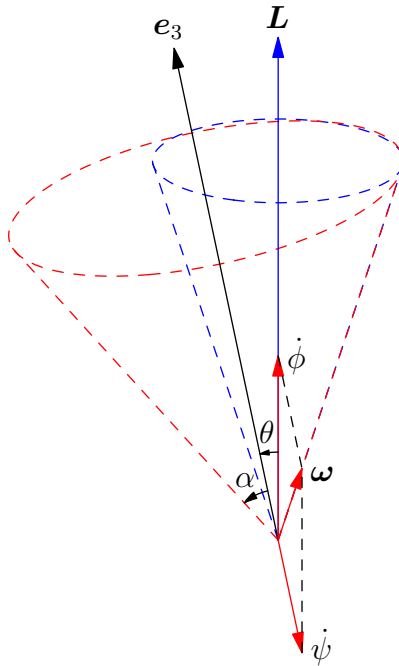


图 5.20:  $I_1 = I_2 < I_3$ ,  $\theta < \alpha$

由于本体极锥相对本体系静止，故本体极锥的运动即代表了刚体的运动，角速度线上

的各点在平动系中瞬时静止, 即为瞬时转轴方向。Euler 情形下动力学对称刚体运动的几何图像即为本体极锥贴着空间极锥作纯滚动。

例 5.5 试证明, 在 Euler 情形下, 当主惯量满足  $I_1 = I_2 < I_3$  时, 刚体空间极锥的轴和母线的夹角不超过  $\arctan \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

解 当  $I_1 = I_2 < I_3$  时, 空间极锥与本体极锥之间的关系见图空间极锥与本体极锥情形 3。由式(5.84)可得

$$\tan \alpha = \frac{I_3}{I_1} \tan \theta$$

记  $\gamma = \frac{I_3}{I_1}$ , 根据主惯量的三角不等式(5.59)可得此时有  $2I_1 \geq I_3$ , 即  $1 < \gamma \leq 2$ 。

记空间极锥的轴和母线的夹角为  $\beta$ , 则有

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \tan \theta} = \frac{(\gamma - 1) \tan \theta}{1 + \gamma \tan^2 \theta} = \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{2\sqrt{\gamma} \tan \theta}{1 - (\sqrt{\gamma} \tan \theta)^2} \\ &\leq \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\gamma} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \leq \frac{1}{2} \left( \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

由此即有  $\beta \leq \arctan \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

## 5.5.4 Euler 情形下一般刚体的运动

### 5.5.4.1 Euler 情形下一般刚体的守恒量

现在利用 Euler 动力学方程研究三个主惯量各不相等的非对称刚体的自由转动。为方便起见, 假定

$$I_3 > I_2 > I_1$$

由角动量守恒和能量守恒可得

$$\begin{cases} I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = L^2 & (5.85a) \\ I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = 2T & (5.85b) \end{cases}$$

其中  $L$  和  $T$  为常数。这两个等式可以用  $\mathbf{L}$  的三个分量表示为

$$\begin{cases} L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2 & (5.86a) \\ \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} = 2T & (5.86b) \end{cases}$$

在以  $L_1, L_2, L_3$  为轴的坐标系中, 方程(5.86b)是半轴分别

$$\sqrt{2I_1T}, \sqrt{2I_2T}, \sqrt{2I_3T}$$

的椭球面, 而方程(5.86a)则为半径为  $L$  的球面方程。当矢量  $\mathbf{L}$  相对刚体的主轴移动时, 其端点将沿着这两个曲面的交线运动。交线存在的条件由不等式

$$2I_1T \leq L^2 \leq 2I_3T \quad (5.87)$$

给出, 即表示球(5.86a)的半径介于椭球(5.86b)的最长半轴和最短半轴之间。图5.21画出了椭球与不同半径的球面的一系列这样的交线。

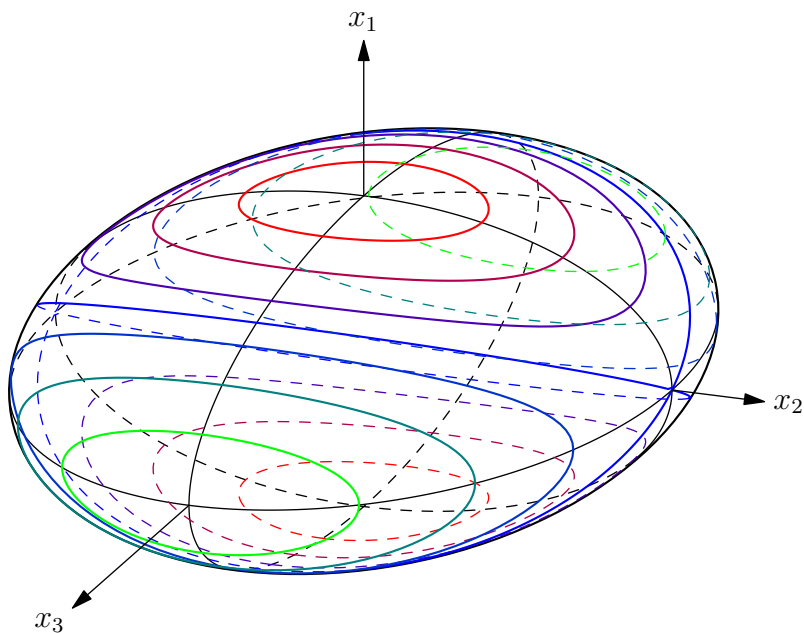


图 5.21: 不同情况下角动量矢量末端的轨迹

现在考虑在给定能量  $T$  时, 角动量大小  $L$  的变化引起矢量  $\mathbf{L}$  的端点的轨迹性质的变化。当  $L^2$  略大于  $2I_1T$  时, 球和椭球相交于椭球极点附近围绕  $x_1$  轴的两条很小的封闭曲线 (图5.21中红色线)。当  $L^2 \rightarrow 2I_1T$  时, 两条曲线分别收缩到极点。随着  $L^2$  的增大, 曲线也随之扩大, 当  $L^2 = 2I_2T$  时, 曲线变成两条平面曲线 (椭圆, 图5.21中蓝色线), 并相交于椭球在  $x_2$  轴上的极点。  $L^2$  再继续增大, 将再次出现两条分离的封闭曲线, 分别围绕  $x_3$  轴的两个极点 (图5.21中绿色线)。而当  $L^2 \rightarrow 2I_3T$  时, 这两条曲线再次收缩到两个极点。

首先, 轨迹的封闭性意味着矢量  $\mathbf{L}$  在本体系中的运动是周期性的。其次, 在椭球不同极点附近的轨迹性质具有本质的区别。在  $x_1$  轴和  $x_3$  轴附近, 轨迹完全位于相应的极点周围, 而在  $x_2$  轴极点附近的轨迹将远离这个极点。这种差别即相应于刚体绕三个惯量主轴转动时有不同的稳定性。绕  $x_1$  轴和  $x_3$  轴 (对应于该刚体三个主惯量中的最小值和最大值) 的转动是稳定的, 即如果使刚体稍微偏离这些状态时, 刚体将继续在初始状态附近运动。而绕  $x_2$  轴的转动是不稳定的, 即任意小的偏离都将导致刚体远离其初始位置运动。关于稳定性的更多讨论请见第5.5.4.3节。

为了得到  $\omega$  分量对时间的依赖关系, 利用方程(5.85)将  $\omega_1$  和  $\omega_3$  用  $\omega_2$  表示, 可得

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{(2I_3T - L^2) - I_2(I_3 - I_2)\omega_2^2}{I_1(I_3 - I_1)} & (5.88a) \\ \omega_3^2 = \frac{(L^2 - 2I_1T) - I_2(I_2 - I_1)\omega_2^2}{I_3(I_3 - I_1)} & (5.88b) \end{cases}$$

将上述两个关系代入 Euler 动力学方程(5.69)的第二式中, 即有

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{\sqrt{[(2I_3T - L^2) - I_2(I_3 - I_2)\omega_2^2][(L^2 - 2I_1T) - I_2(I_2 - I_1)\omega_2^2]}}{I_2\sqrt{I_1I_3}} \quad (5.89)$$

方程(5.89)可以分离变量, 将其积分即可得到关系  $t(\omega_2)$ 。为了将其化为标准形式, 根据  $L^2$  的取值分为如下几种情况:

1. 当  $2I_2T < L^2 \leq 2I_3T$  时, 作变量代换

$$\tau = \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}{I_1I_2I_3}}t, \quad s = \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{2I_3T - L^2}}\omega_2 \quad (5.90)$$

并引入参数

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2I_3T - L^2)}{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)} < 1 \quad (5.91)$$

可将方程(5.89)化为

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2s^2)}$$

将其分离变量并积分, 可得

$$\tau = \int_0^s \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}} = K(k, s) \quad (5.92)$$

此处选择  $\omega_2 = 0$  的时刻为时间起点。式(5.92)中右端的函数为第一类不完全椭圆积分<sup>①</sup>。求其反函数可得 Jacobi 椭圆函数

$$s = \operatorname{sn} \tau$$

即

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \tau = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}{I_1I_2I_3}}t \right) \quad (5.93)$$

由此可得如下公式

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \tau = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \left( \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}{I_1I_2I_3}}t \right) \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \tau = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}{I_1I_2I_3}}t \right) \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1T}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1T}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}{I_1I_2I_3}}t \right) \end{cases} \quad (5.94)$$

函数  $\operatorname{sn} \tau$  是周期的, 对变量  $\tau$  的周期为  $4K(k)$ , 其中  $K(k)$  为第一类完全椭圆积分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2s^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

因而, 解(5.94)对时间  $t$  的周期为

$$T_0 = 4K(k) \sqrt{\frac{I_1I_2I_3}{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}} \quad (5.95)$$

即经过时间  $T_0$  后, 矢量  $\boldsymbol{\omega}$  在本体系中回到原位置, 然而在空间系中, 刚体自身的取向还需进一步讨论。

特别地, 当  $L^2 = 2I_3T$  时, 有

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2T}{I_3}} \text{ (常数)}$$

即矢量  $\boldsymbol{\omega}$  的方向总是沿着对称轴  $x_3$ , 即刚体绕  $x_3$  轴匀速转动, 此种情况即为第5.5.2节讨论过的永久转动。

<sup>①</sup> 关于椭圆积分和 Jacobi 椭圆函数的相关知识, 请见附录B。



2. 当  $2I_1T \leq L^2 < 2I_2T$  时, 作变量代换

$$\tau = \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(2I_3T - L^2)}{I_1I_2I_3}}t, \quad s = \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{L^2 - 2I_1T}}\omega_2 \quad (5.96)$$

并引入参数

$$k^2 = \frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2I_1T)}{(I_2 - I_1)(2I_3T - L^2)} < 1 \quad (5.97)$$

可将方程(5.89)化为

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2s^2)}$$

这个方程的解为

$$s = \operatorname{sn} \tau$$

此时的解为

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau = \sqrt{\frac{2I_3T - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(2I_3T - L^2)}{I_1I_2I_3}}t \right) \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1T}{I_2(I_2 - I_1)}} \operatorname{sn} \tau = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1T}{I_2(I_2 - I_1)}} \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(2I_3T - L^2)}{I_1I_2I_3}}t \right) \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1T}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \tau = \sqrt{\frac{L^2 - 2I_1T}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \left( \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(2I_3T - L^2)}{I_1I_2I_3}}t \right) \end{cases} \quad (5.98)$$

当  $I_1 = I_2$  时, 考虑当  $I_1 \rightarrow I_2$  时, 参数  $k^2 \rightarrow 0$ , 椭圆函数退化为三角函数, 级

$$\operatorname{sn} \tau \rightarrow \sin \tau, \quad \operatorname{cn} \tau \rightarrow \cos \tau, \quad \operatorname{dn} \tau \rightarrow 1$$

于是, 解(5.98)就退化到对称情形的解, 即式(5.81)和式(5.82)的结果。

类似于上一种情况, 当  $L^2 = 2I_1T$  时, 有

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2T}{I_1}} \text{ (常数) }, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0$$

即矢量  $\omega$  的方向总是沿着对称轴  $x_1$ , 即刚体绕  $x_1$  轴匀速转动, 此种情况即为第5.5.2节讨论过的永久转动。

3. 当  $L^2 = 2I_2T$  时, 式(5.89)变为

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \sqrt{\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \left(1 - \frac{I_2}{I_3}\right) \left(\frac{2T}{I_2} - \omega_2^2\right)} \quad (5.99)$$

记  $\Omega = \sqrt{\frac{2T}{I_2}}$ , 作变量代换

$$\tau = \Omega \sqrt{\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \left(1 - \frac{I_2}{I_3}\right)} t, \quad s = \frac{\omega_2}{\Omega} \quad (5.100)$$

可将方程(5.99)化为

$$\frac{ds}{d\tau} = 1 - s^2$$

这个方程的解为

$$s = \tanh \tau \quad (5.101)$$

由此可得

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}} \Omega \frac{1}{\cosh \tau} \\ \omega_2 = \Omega \tanh \tau \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \Omega \frac{1}{\cosh \tau} \end{cases} \quad (5.102)$$

其中  $\Omega = \sqrt{\frac{2T}{I_2}}$ ,  $\tau = \Omega \sqrt{\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \left(1 - \frac{I_2}{I_3}\right)} t$ 。如果我们令  $\mathbf{L}$  的方向为  $Z$  轴,  $\theta$  为  $Z$  轴与  $x_2$  轴之间的夹角, 则式(5.106)和式(5.108)中只要对下标做置换  $123 \rightarrow 312$  即有

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{I_2 \omega_2}{L} \\ \tan \psi = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \omega_1} \\ \dot{\phi} = L \frac{I_1 \omega_1^2 + I_3 \omega_3^2}{I_1^2 \omega_1^2 + I_3^2 \omega_3^2} \end{cases} \quad (5.103)$$

将式(5.102)带入即有

$$\begin{cases} \cos \theta = \tanh \tau \\ \tan \psi = \sqrt{\frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_1(I_3 - I_2)}} \\ \phi = \Omega t + \phi_0 \end{cases} \quad (5.104)$$

由上面各式可以看出, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 矢量  $\boldsymbol{\omega}$  渐近地趋于  $x_2$  轴, 同时  $x_2$  轴也渐近地趋于固定轴  $Z$ 。但是对于初始角速度沿  $x_2$  轴的转动<sup>①</sup>也属于第5.5.2节所述的永久转动, 但是这个永久转动是不稳定的。

#### 5.5.4.2 Euler 情形下刚体在空间中方向的确定

下面考虑 Euler 情形下, 刚体在空间系中的绝对运动, 即相对于固定坐标系  $OXYZ$  的运动。令  $Z$  轴沿着矢量  $\mathbf{L}$  的方向, 由于方向  $Z$  相对  $x_1, x_2, x_3$  轴的极角和方位角分别为  $\theta$  和  $\frac{\pi}{2} - \psi$ <sup>②</sup>, 则矢量  $\mathbf{L}$  沿  $x_1, x_2, x_3$  的分量分别为

$$\begin{cases} I_1 \omega_1 = L \sin \theta \sin \psi & (5.105a) \\ I_2 \omega_2 = L \sin \theta \cos \psi & (5.105b) \\ I_3 \omega_3 = L \cos \theta & (5.105c) \end{cases}$$

由此可得

$$\cos \theta = \frac{I_3 \omega_3}{L}, \quad \tan \psi = \frac{I_1 \omega_1}{I_2 \omega_2} \quad (5.106)$$

<sup>①</sup> 相当于将前面所述之运动从无穷大的时间开始进行反演。

<sup>②</sup> 可见图5.7。此处“极角”和“方位角”即为球坐标系

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

中的  $\theta$  和  $\phi$ 。

将式(5.94)的结果代入, 即有

$$\begin{cases} \cos \theta = \sqrt{\frac{I_3(L^2 - 2I_1T)}{L^2(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau \\ \tan \psi = \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}} \frac{\operatorname{cn} \tau}{\operatorname{sn} \tau} \end{cases} \quad (5.107)$$

由此获得角  $\theta$  和  $\psi$  随时间的关系, 它们都是周期为  $T_0$  的函数, 其中  $T_0$  由式(5.95)确定。为了获得角  $\phi$  随时间的关系, 根据 Euler 运动学方程(5.27)可有

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \end{cases}$$

从中解得

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_1 \sin \psi + \omega_2 \cos \psi}{\sin \theta}$$

将式(5.105)代入, 即有

$$\frac{d\phi}{dt} = L \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{L^2 - I_3^2 \omega_3^2} = L \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2} \quad (5.108)$$

由此便可确定  $\phi$  与时间的关系  $\phi(t)$ 。注意到由于  $\frac{d\phi}{dt} > 0$ , 因此不论在何种情况下,  $\phi$  角始终是单调递增的, 即刚体的进动永远都向着同一个方向。

由于  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  都是周期为  $T_0$  的函数, 因此  $\frac{d\phi}{dt}$  也是  $T_0$  的周期函数, 即有

$$\frac{d\phi}{dt}(t + T_0) = \frac{d\phi}{dt}(t)$$

积分之后可得

$$\phi(t + T_0) = \phi(t) + \Delta\phi \quad (5.109)$$

其中  $\Delta\phi$  是积分常数。如果  $\frac{\Delta\phi}{2\pi}$  不是有理数, 则刚体永远都不会回到初始方向。而如果

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{m}{n}$$

其中  $m, n$  是整数 ( $n \neq 0$ ), 则刚体的运动是周期性的, 其周期等于  $nT_0$ 。

### 5.5.4.3 Euler 情形下刚体永久转动的稳定性

当刚体的角动量  $\mathbf{L}$  与  $x_1$  轴有微小偏离时<sup>①</sup>, 那么  $L_2, L_3$  是一阶小量。根据 Euler 动力学方程(5.76)可得

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0 & (5.110a) \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 = 0 & (5.110b) \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0 & (5.110c) \end{cases}$$

由于  $L_2, L_3$  是一阶小量, 故  $\omega_2, \omega_3$  也是一阶小量, 故由方程(5.110a)可得

$$I_1 \dot{\omega}_1 = 0$$

<sup>①</sup> 此时即  $\sqrt{2I_3T - L^2}$  为一阶小量。

即有

$$\omega_1 = \Omega \quad (\text{常数})$$

而式(5.110b)和(5.110c)则可写作

$$\begin{cases} \dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega \omega_3 \\ \dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega \omega_2 \end{cases}$$

由此可以解得

$$\begin{cases} \omega_2 = \frac{La}{I_2} \sqrt{1 - \frac{I_1}{I_2}} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ \omega_3 = \frac{La}{I_2} \sqrt{1 - \frac{I_1}{I_3}} \cos(\omega_0 t + \phi_0) \end{cases}$$

其中  $a$  是一个小常数 (一阶小量),  $\omega_0 = \sqrt{\left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right) \left(1 - \frac{I_1}{I_3}\right)} \Omega$ 。由于

$$\mathbf{L} = I_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3$$

则有

$$\begin{cases} L_1 = I_1 \Omega \approx L \\ L_2 = La \sqrt{1 - \frac{I_1}{I_2}} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ L_3 = La \sqrt{1 - \frac{I_1}{I_3}} \cos(\omega_0 t + \phi_0) \end{cases} \quad (5.111)$$

式(5.111)表明, 矢量  $\mathbf{L}$  的端点, 以圆频率  $\omega_0$  绕着  $x_1$  轴上的极点画出小椭圆 (即图5.21中的红色线)。

对于刚体的角动量  $\mathbf{L}$  与  $x_3$  轴有微小偏离的情形, 根据类似的过程可以得到

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{La}{I_1} \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ \omega_2 = \frac{La}{I_2} \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ \omega_3 = \Omega \end{cases} \quad (5.112)$$

其中  $a$  是一个小常数 (一阶小量),  $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)} \Omega$ , 对角动量则有

$$\begin{cases} L_1 = La \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ L_2 = La \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ L_3 = I_3 \Omega \approx L \end{cases} \quad (5.113)$$

式(5.113)表明, 矢量  $\mathbf{L}$  的端点, 以圆频率  $\omega_0$  绕着  $x_3$  轴上的极点画出小椭圆 (即图5.21中的绿色线)。

以上的讨论表明, Euler 情形下, 刚体绕其主惯量最大或最小的轴的永久转动是稳定的。

而对于刚体的角动量  $\mathbf{L}$  与  $x_2$  轴有微小偏离的情形, 精确到一阶小量可得

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega \omega_3 \\ \dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega \omega_1 \end{cases} \quad (5.114a)$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega \omega_3 \\ \dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega \omega_1 \end{cases} \quad (5.114b)$$

从中消去其中  $\omega_1$  或  $\omega_3$  可得

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 - \frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3} \Omega^2 \omega_1 = 0 & (5.115a) \\ \ddot{\omega}_3 - \frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3} \Omega^2 \omega_3 = 0 & (5.115b) \end{cases}$$

由于  $I_1 < I_2 < I_3$ , 故有

$$-\frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3} \Omega^2 < 0$$

因此, Euler 情形下, 刚体绕其主惯量取中间值的轴的永久转动是不稳定的。

### 5.5.5 Poincot<sup>①</sup>几何图像

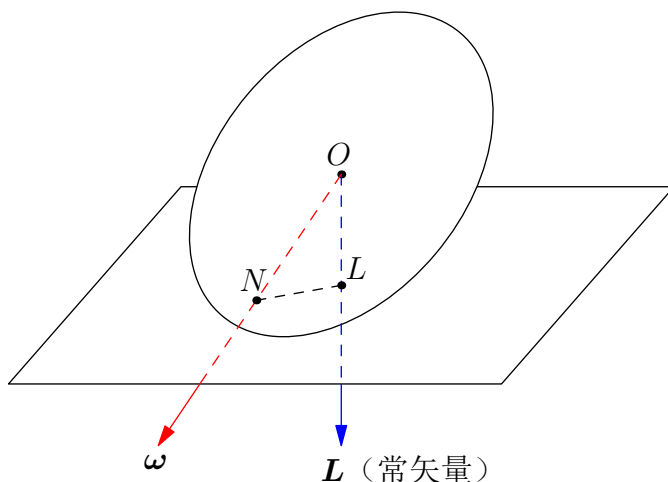


图 5.22: Poincot 几何图像

根据惯量椭球的几何意义, 角动量  $L$  沿角速度  $\omega$  与惯量椭球交点处切平面的法线方向。对于 Euler 情形, 刚体的角动量守恒, 即  $L$  为常矢量, 因此在 Euler 情形中, 切平面在各个时刻是相互平行的。再考虑到惯量椭球中心到切平面的距离为

$$x_N = \mathbf{x}_N \cdot \frac{\mathbf{L}}{L} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}} \cdot \frac{\mathbf{L}}{L} = \frac{\sqrt{2T}}{L} \quad (\text{常数})$$

因此, 在 Euler 情形下, 惯量椭球极点处的切平面固定, 称为 Poincot 平面。

于是得到 Euler 情形下刚体运动的 Poincot 几何解释: 惯量椭球随着刚体的运动在 Poincot 平面上纯滚动, 极点为瞬时接触点, 其瞬时速度为零<sup>②</sup>。

在刚体运动时, 极点在惯性椭球上画出的曲线称为**本体极迹**, 相应地极点在 Poincot 平面上画出的曲线称为**空间极迹**。显然, 本体极迹是刚体定点运动中本体极锥的准线, 而空间极迹是刚体定点运动的空间极锥的准线。

## 5.6 重刚体的定点运动

<sup>①</sup> Loius Poincot, 潘索, 法国数学家、力学家。

<sup>②</sup> 由于极点在角速度矢量  $\omega$  方向上, 故极点速度为零。

### 5.6.1 重刚体定点运动方程及其守恒量

下面研究刚体在重力场中绕固定点  $O$  的运动。空间系（此时与平动系重合）的  $OZ$  轴竖直向上，本体系记作  $Oxyz$ ，其坐标轴沿着刚体对  $O$  点的三个惯性主轴。刚体质心  $C$  的坐标在本体系中记作  $x_C, y_C, z_C$ ，而刚体相对空间系的方向则借助 Euler 角  $\phi, \theta, \psi$  来确定（如图 5.23 所示）。

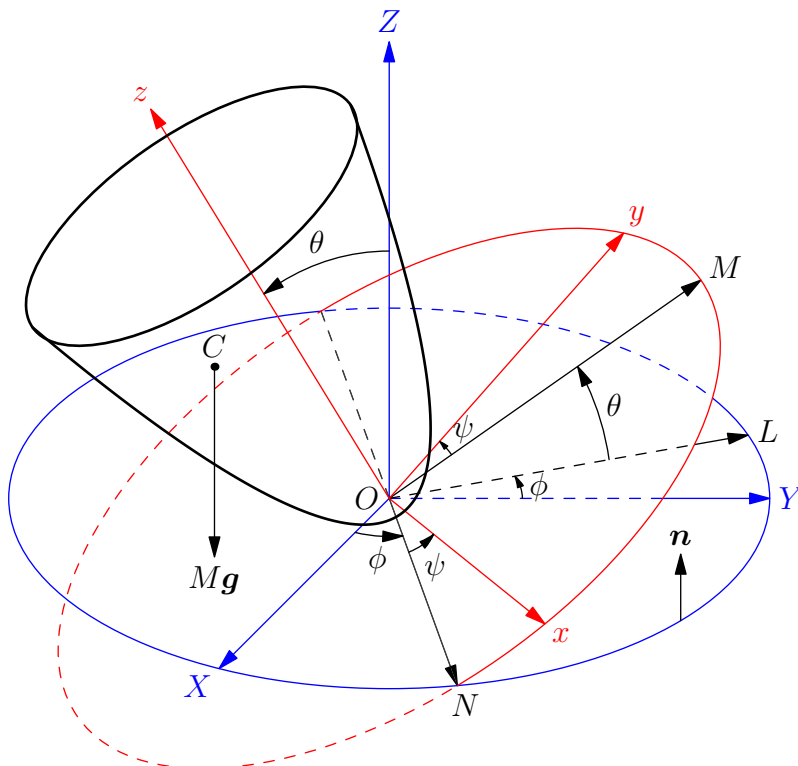


图 5.23: 重刚体的定点运动

由于一般情形下，重刚体定点运动的 Lagrange 函数形式比较复杂，因此本节将直接利用主轴系中的 Euler 动力学方程(5.69)来得到重刚体的定点运动方程，并通过一些物理定律来得到运动过程中的守恒量。

设竖直轴  $OZ$  的单位矢量  $\mathbf{n}$  在本体系  $Oxyz$  中的分量分别为  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ，则矢量  $\mathbf{n}$  在本体系  $Oxyz$  中的极角和方位角分别为  $\theta$  和  $\frac{\pi}{2} - \psi$ <sup>①</sup>，即有

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \psi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \psi, \quad \gamma_3 = \cos \theta \quad (5.116)$$

矢量  $\mathbf{n}$  在空间系中是常矢量，即有  $\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \mathbf{0}$ ，根据式(5.68)的关系将其投影至本体系，可有

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (5.117)$$

其中  $\boldsymbol{\omega}$  是刚体的角速度，方程(5.117)称为 Poisson 方程。如果用  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  来表示角速度矢

<sup>①</sup> 见第137页脚注。

量在本体系中的分量, 则 Possion 方程(5.117)可以写作如下三个分量方程:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2 \\ \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3 \\ \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1 \end{cases} \quad (5.118)$$

作用在刚体上的外力为重力和  $O$  点的约束反力, 其中约束反力对  $O$  点没有力矩, 所以刚体的合外力矩就等于重力矩, 即

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{OC} \times (-Mg\mathbf{n}) = Mg\mathbf{n} \times \overrightarrow{OC} \quad (5.119)$$

此处非黑体的  $M$  表示刚体的质量, 该外力矩的分量形式为

$$M_1 = Mg(\gamma_2 z_C - \gamma_3 y_C), \quad M_2 = Mg(\gamma_3 x_C - \gamma_1 z_C), \quad M_3 = Mg(\gamma_1 y_C - \gamma_2 x_C) \quad (5.120)$$

于是, 此种情况下, Euler 动力学方程(5.69)具有如下形式

$$\begin{cases} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = Mg(\gamma_2 z_C - \gamma_3 y_C) \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = Mg(\gamma_3 x_C - \gamma_1 z_C) \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = Mg(\gamma_1 y_C - \gamma_2 x_C) \end{cases} \quad (5.121)$$

方程组(5.118)和(5.121)构成了封闭方程组, 包含了描述重刚体定点运动的全部 6 个微分方程。

如果从方程组(5.118)和(5.121)中求出了  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  作为时间的函数, 则根据关系(5.116)可以确定 Euler 角  $\theta(t)$  和  $\psi(t)$ , 而确定  $\phi(t)$  还需要利用 Euler 运动学方程(5.27)中的一个。

下面将给出方程组(5.118)和(5.121)的三个守恒量 (运动积分)。第一个是向量  $\mathbf{n}$  的长度等于 1, 即

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (5.122)$$

还有一个守恒量可以通过角动量定理得到, 由于外力矩对  $OZ$  轴的分量为零, 即  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0$ , 所以有

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{n} = L_Z \quad (\text{常数})$$

在本体系中上式可用分量表示为

$$I_1\omega_1\gamma_1 + I_2\omega_2\gamma_2 + I_3\omega_3\gamma_3 = L_Z \quad (\text{常数}) \quad (5.123)$$

再考虑到  $O$  点的约束反力不做功, 而重力有势且不显含时间, 因此运动过程中机械能守恒, 即

$$\frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) + Mg(x_C\gamma_1 + y_C\gamma_2 + z_C\gamma_3) = E \quad (\text{常数}) \quad (5.124)$$

如果想要在任何初始条件下将方程组(5.118)和(5.121)积分, 除了上面的三个运动积分(5.122)、(5.123)和(5.124)之外, 还需要一个与它们相互独立的守恒量。

事实上, 在任何初始条件下, 对于  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  的第四个守恒量只有在下面三种情况下存在, 分别就是 Euler 情形、Lagrange 情形和 Kovalevskaya<sup>①</sup>情形。

<sup>①</sup> 索菲娅·柯瓦列夫斯卡娅, 俄国数学家。

1. Euler 情形: 在 Euler 情形下, 刚体可以是任意的, 但其重心与固定点  $O$  重合, 即  $x_C = y_C = z_C = 0$ , 这种情形已经在第5.5节做了详细讨论。

2. Lagrange 情形: 在 Lagrange 情形下, 刚体对固定点  $O$  是动力学对称的, 而重心位于对称轴上, 例如  $I_1 = I_2, x_C = y_C = 0$ 。由(5.121)的最后一个方程可知, 刚体角动量在本体系  $Oz$  轴上的投影即为第四个守恒量

$$I_3 \omega_3 = L_z \quad (\text{常数}) \quad (5.125)$$

这种情形将在第5.7节中进行详细讨论。

3. Kovalevskaya 情形: 在 Kovalevskaya 情形下, 刚体对固定点  $O$  是动力学对称的, 且其主惯量满足关系式  $I_1 = I_2 = 2I_3$ , 而重心位于其惯性椭球的赤道面上, 即  $z_C = 0$ 。对于动力学对称刚体, 通过  $O$  点且与对称轴垂直的任何方向都是其惯性主轴, 因此简便起见, 不妨设重心在  $Ox$  轴上, 即  $y_C = 0$ 。在这种情况下 Euler 动力学方程(5.121)可以写为

$$\begin{cases} 2 \frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2 \omega_3 = 0 \\ 2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3 \omega_1 = \alpha \gamma_3 \\ \frac{d\omega_3}{dt} = -\alpha \gamma_2 \end{cases} \quad \left( \alpha = \frac{Mgx_C}{I_3} \right) \quad (5.126)$$

通过方程组(5.118)和(5.126)不难直接验证, Kovalevskaya 情形下的第四个守恒量为

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2 - \alpha \gamma_1)^2 + (2\omega_1 \omega_2 - \alpha \gamma_2)^2 = h \quad (\text{常数}) \quad (5.127)$$

## 5.6.2 陀螺

动力学对称的定点运动刚体一般称为陀螺<sup>①</sup>。在第5.5.3节中已经详细讨论过, 如果对固定点  $O$  的合外力矩为零, 则陀螺绕不变的角动量矢量  $\mathbf{L}$  作规则进动。

但是为了使陀螺作规则进动, 并不一定要对固定点的合外力矩为零。设陀螺的主惯量满足  $I_1 = I_2$ , 则此时 Euler 动力学方程(5.69)可以写为

$$\begin{cases} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ I_1 \frac{d\omega_2}{dt} - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = M_2 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = M_z \end{cases} \quad (5.128)$$

设陀螺绕空间系  $OZ$  轴规则进动, 则章动角保持常数  $\theta = \theta_0$ , 进动角速度  $\dot{\phi} = \omega_p$  和自转角速度  $\dot{\psi} = \omega_s$  都是常数, 根据 Euler 运动学方程(5.27)可得

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_p \sin \theta_0 \sin \psi \\ \omega_2 = \omega_p \sin \theta_0 \cos \psi \\ \omega_3 = \omega_p \cos \theta_0 + \omega_s \end{cases} \quad (5.129)$$

由式(5.129)的最后一式可知,  $\omega_3$  为常数, 因此根据(5.128)的第三个方程可得

$$M_3 = 0 \quad (5.130)$$

<sup>①</sup> 有时也将第5.6.1节所述重刚体定点运动的三种情形分别称为 Euler 陀螺、Lagrange 陀螺和 Kovalevskaya 陀螺。



将式(5.129)代入到(5.128)的前两式中, 并注意到  $\dot{\psi} = \omega_s$ , 可得

$$\begin{cases} M_1 = \omega_p \omega_s \sin \theta_0 \cos \psi \left[ I_3 + (I_3 - I_1) \frac{\omega_p}{\omega_s} \cos \theta_0 \right] \\ M_2 = -\omega_p \omega_s \sin \theta_0 \sin \psi \left[ I_3 + (I_3 - I_1) \frac{\omega_p}{\omega_s} \cos \theta_0 \right] \end{cases} \quad (5.131)$$

由于在坐标系  $Oxyz$  中有

$$\omega_s = \omega_s \mathbf{e}_3, \quad \omega_p = \omega_p (\sin \theta_0 \sin \psi \mathbf{e}_1 + \sin \theta_0 \cos \psi \mathbf{e}_2 + \cos \theta_0 \mathbf{e}_3) \quad (5.132)$$

因此可以将分量形式(5.131)和(5.130)表示为一个矢量等式

$$\mathbf{M} = \omega_p \times \omega_s \left[ I_3 + (I_3 - I_1) \frac{\omega_p}{\omega_s} \cos \theta_0 \right] \quad (5.133)$$

由此可知, 力矩  $\mathbf{M}$  的大小为常数, 方向沿着节线  $ON$  (见图5.23)。式(5.133)称为**陀螺基本公式**, 在已知主惯量  $I_1, I_3$ 、章动角  $\theta_0$ 、进动角速度  $\omega_p$  和自转角速度  $\omega_s$  的情况下, 陀螺基本公式(5.133)可以给出该规则进动所需的合外力矩  $\mathbf{M}$ 。

这里的规则进动与第5.5.3节所述的 Euler 情形动力学对称刚体的规则进动不同, 这里的角动量  $\mathbf{L}$  不是常矢量, 它满足

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

工程技术中使用的陀螺其自转角速度一般远大于其进动角速度, 即  $\omega_s \gg \omega_p$ , 因此可忽略陀螺基本公式(5.133)方括号中的二次项, 即有

$$\mathbf{M} = I_3 \omega_p \times \omega_s \quad (5.134)$$

式(5.134)是陀螺近似理论的基础, 称为**陀螺近似公式**<sup>①</sup>。对于高速自转的陀螺, 其任意时刻的瞬时角速度和角动量都沿着动力学对称轴, 而且满足<sup>②</sup>

$$\mathbf{L} = I_3 \omega_s$$

## 5.7 刚体定点运动的 Lagrange 情形

根据第5.6.1节的相关论述, 在 Lagrange 情形下, 刚体应满足如下条件:

1. 对定点的两个主惯量相等, 如  $I_1 = I_2$ ;
2. 质心在动力学对称轴上, 且与定点不重合, 即  $l = OC \neq 0$ ;
3. 刚体仅受重力矩作用。

这种定点转动刚体称为**对称重陀螺**, 又称为 Lagrange 陀螺。

### 5.7.1 Lagrange 函数与运动积分

Lagrange 情形下刚体的运动方程和运动积分已经在第5.6.1节中列出, 但在 Lagrange 情形下, 刚体的 Lagrange 函数形式相对简单, 因此此处用刚体的 Euler 作为广义坐标, 使用 Lagrange 方程再重新推导一次 Lagrange 陀螺的运动积分。

① 如果章动角  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ , 则公式(5.134)不再是近似的, 而是精确的。

② 注意, 这是近似的。

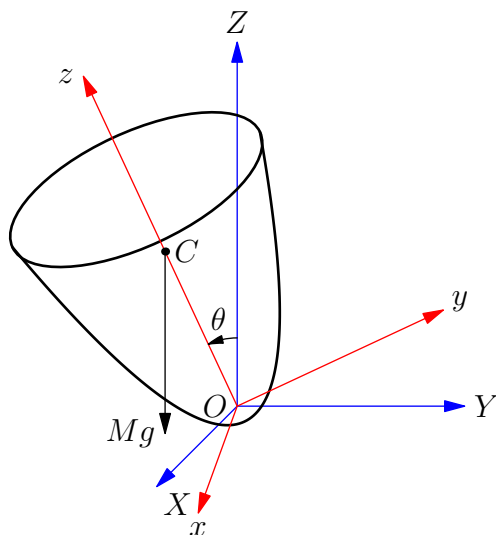


图 5.24: Lagrange 陀螺的运动

在 Lagrange 情形下, 刚体的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2, \quad V = Mgl \cos \theta$$

其中角速度  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  与广义坐标和广义速度的关系由 Euler 运动学方程(5.27)给出

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

因此 Lagrange 陀螺的 Lagrange 函数<sup>①</sup>为

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta \quad (5.135)$$

由  $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$  可得

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = L_Z \quad (\text{常数}) \quad (5.136)$$

由  $\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$  可得

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = L_3 \quad (\text{常数}) \quad (5.137)$$

由  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  可得

$$H = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta = E \quad (\text{常数}) \quad (5.138)$$

<sup>①</sup> Lagrange 函数和角动量大小的符号都是  $L$ , 但在 Lagrange 情形下, 刚体的角动量大小并不是运动积分, 因此下文将避免使用角动量大小  $L$ , 而仅使用角动量的分量 (带有脚标的  $L$ ), 以免产生混淆。

## 5.7.2 Lagrange 情形下的运动求解

记  $\Omega = \frac{L_3}{I_3}, a = \frac{2Mgl}{I_1}, b = \frac{I_3}{I_1}, \alpha = \frac{2E}{I_1} - b\Omega^2, \beta = \frac{L_Z}{I_1}$ , 则 Lagrange 情形下的三个运动积分(5.136)、(5.137)和(5.138)可以用这些参数写为

$$\begin{cases} \sin^2 \theta \dot{\phi} = \beta - b\Omega \cos \theta \end{cases} \quad (5.139a)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \Omega \end{cases} \quad (5.139b)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = \alpha - a \cos \theta \end{cases} \quad (5.139c)$$

作变量代换  $u = \cos \theta$ , 则式(5.139a)和(5.139b)可以写作

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\beta - b\Omega u}{1 - u^2} \end{cases} \quad (5.140a)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \Omega - u \frac{\beta - b\Omega u}{1 - u^2} \end{cases} \quad (5.140b)$$

而式(5.139c)则化为

$$\dot{u}^2 = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - b\Omega u)^2 = G(u) \quad (5.141)$$

式中函数  $G(u)$  为

$$G(u) = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - b\Omega u)^2 \quad (5.142)$$

求解出(5.141)的解之后可得函数  $u = u(t)$ , 进而可得  $\theta = \theta(t)$ , 再将  $u = u(t)$  的结果代入式(5.140a)和(5.140b), 那么三个 Euler 角关于时间的关系都得到了, 刚体定点运动的 Lagrange 情形就解决了。

首先注意到方程(5.141)左端应该是非负的, 以及  $u = \cos \theta$ , 所以方程(5.141)具有物理意义的解应该要求函数  $G(u)$  在  $[-1, 1]$  区间上有非负的区域。注意到  $a > 0$ , 很容易发现

$$G(\pm 1) = -(\beta \mp b\Omega)^2 < 0, \quad G(-\infty) < 0, \quad G(+\infty) > 0$$

因此, 函数  $G(u)$  有三个根, 它的图像如图5.25所示。如果将它们从小到大分别记作  $u_1, u_2, u_3$ , 则它们分布在如下区域内:

$$-1 < u_1 < u_2 < 1 < u_3 \quad (5.143)$$

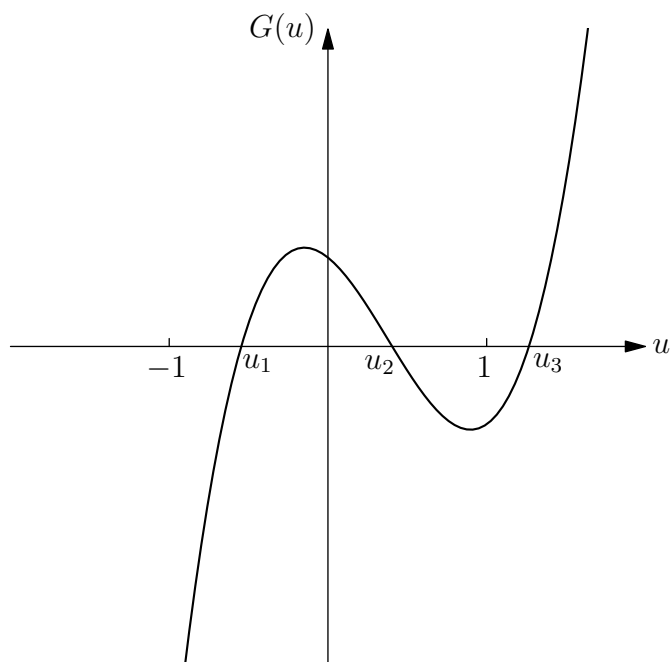
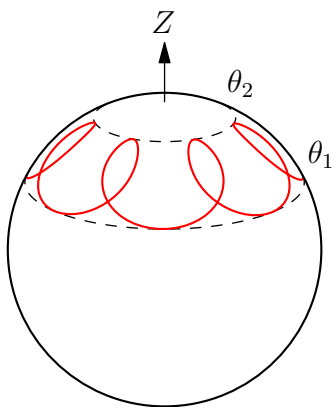
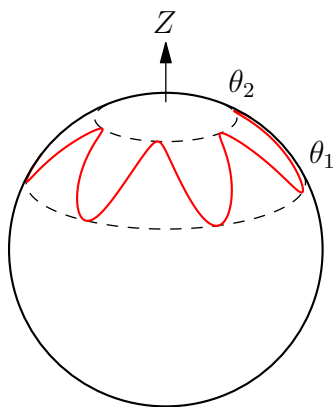
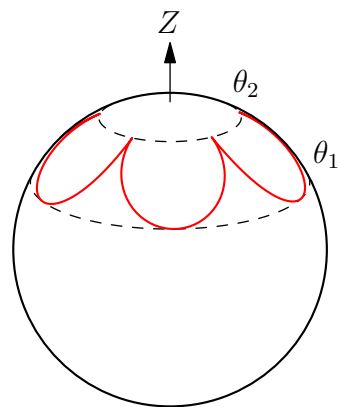
因此,  $u$  只能在  $u_1 \leq u \leq u_2$  的区域内变动, 对应的章动角  $\theta$  也只能在  $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$  的区域内变动, 其中  $u_1 = \cos \theta_1, u_2 = \cos \theta_2$ 。这个运动对应的是陀螺的对称轴与空间系的  $OZ$  轴之间的夹角在  $\theta_2$  到  $\theta_1$  之间往复摆动。

注意到当  $u = \frac{\beta}{b\Omega}$  时, 进动角速度  $\dot{\phi} = 0$ , 因此 Lagrange 陀螺的进动运动有三种情形:

1. 如果  $u_1 < \frac{\beta}{b\Omega} < u_2$ , 则进动角速度  $\dot{\phi}$  有时为正有时为负, 进动的方向不断改变。这种情况下陀螺的对称轴线在单位球面上画出的轨迹形状如图5.26所示。

2. 如果  $\frac{\beta}{b\Omega} < u_1$  或者  $\frac{\beta}{b\Omega} > u_2$ , 则进动角速度  $\dot{\phi}$  恒正或恒负, 进动的方向不变。这种情况下陀螺的对称轴线在单位球面上画出的轨迹形状如图5.27所示。

3. 如果  $\frac{\beta}{b\Omega} = u_1$  或者  $\frac{\beta}{b\Omega} = u_2$ , 则进动角速度  $\dot{\phi}$  除了在某些时刻为零之外恒正或恒负, 进动的方向仍然不变, 但是陀螺轴线运动到  $\dot{\phi} = 0$  时会会有一个反向折回的现象。这种情况下陀螺的对称轴线在单位球面上画出的轨迹形状如图5.28所示。

图 5.25: 函数  $G(u)$  的图像图 5.26:  $u_1 < \frac{\beta}{b\Omega} < u_2$ 图 5.27:  $u_1 < u_2 < \frac{\beta}{b\Omega}$ 图 5.28:  $u_1 < u_2 = \frac{\beta}{b\Omega}$ 

常数  $\frac{\beta}{b\Omega}$  的值完全由初始条件决定, 它与  $u_1, u_2$  之间的关系, 则由函数值  $G\left(\frac{\beta}{b\Omega}\right)$  的正负决定。如果  $G\left(\frac{\beta}{b\Omega}\right) > 0$ , 则  $\frac{\beta}{b\Omega}$  在  $u_1, u_2$  之间, 进动对应的是第一种情况; 相反, 如果  $G\left(\frac{\beta}{b\Omega}\right) < 0$ , 则  $\frac{\beta}{b\Omega} < u_1$  或者  $\frac{\beta}{b\Omega} > u_2$ , 进动对应的是第二种情况。如果  $G\left(\frac{\beta}{b\Omega}\right) = 0$ , 则进动对应的是第三种情况。

根据式(5.142)可得

$$G\left(\frac{\beta}{b\Omega}\right) = \left(\alpha - \frac{a\beta}{b\Omega}\right) \left(1 - \frac{\beta^2}{b^2\Omega^2}\right) \quad (5.144)$$

对其正负的讨论需要根据  $\left|\frac{\beta}{b\Omega}\right| = \left|\frac{L_Z}{L_3}\right|$  与 1 的关系分为如下几类:

1.  $\left|\frac{\beta}{b\Omega}\right| = \left|\frac{L_Z}{L_3}\right| < 1$ 。在这种情况下, 前文所述的三种情形都有可能发生。

(a) 当  $\alpha > \frac{a\beta}{b\Omega}$ , 即  $E > \frac{L_3^2}{2I_3} + Mgl\frac{L_Z}{L_3}$  时, 此时有  $u_1 < \frac{\beta}{b\Omega} < u_2$ , 进动运动为第一种情况, 如图5.26所示。

(b) 当  $\alpha > \frac{a\beta}{b\Omega}$ , 即  $E < \frac{L_3^2}{2I_3} + Mgl\frac{L_Z}{L_3}$  时, 进动运动为第二种情况, 如图5.27所示。

(c) 当  $\alpha = \frac{a\beta}{b\Omega}$ , 即  $E = \frac{L_3^2}{2I_3} + Mgl\frac{L_Z}{L_3}$  时, 进动运动为第三种情况, 如图5.28所示。特别地, 在这种情况下, 一定有  $\frac{\beta}{b\Omega} = u_2 > u_1$ , 因而进动角速度为零的点必然在章动区域的上边缘。为了说明这一点, 将参数  $\alpha = \frac{a\beta}{b\Omega}$  代入  $G(u)$  的表达式中可得

$$G(u) = \left( \frac{\beta}{b\Omega} - u \right) \left[ a(1 - u^2) - b^2\Omega^2 \left( \frac{\beta}{b\Omega} - u \right) \right] \quad (5.145)$$

$G(u)$  的一个根是  $\frac{\beta}{b\Omega}$ , 另外两个根由方程

$$b^2\Omega^2 \left( \frac{\beta}{b\Omega} - u \right) = a(1 - u^2) \quad (5.146)$$

来决定, 其中一个根是  $u_3 > 1$ , 而另一个根为  $u_1, u_2$  其中之一, 不论是哪一个, 都满足  $u^2 < 1$ , 据此根据方程(5.146)的左端为正可得这个根小于  $\frac{a\beta}{b\Omega}$ , 由此即说明  $\frac{a\beta}{b\Omega} = u_2 > u_1$ 。

2.  $\left| \frac{\beta}{b\Omega} \right| = \left| \frac{L_Z}{L_3} \right| \geq 1$ 。在这种情况下, 只有第二种运动是可能的, 如图5.27。

下面对方程(5.141)进行解析求解以分析其运动的周期性。利用函数  $G(u)$  的三个根, 可以将方程(5.141)表示为

$$\dot{u}^2 = a(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (5.147)$$

作变量代换

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 v \quad (5.148)$$

可以将方程(5.147)变换为

$$\dot{v} = \frac{a(u_3 - u_1)}{4} (1 - k^2 \sin^2 v) \quad (5.149)$$

其中

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \quad (0 \leq k^2 \leq 1) \quad (5.150)$$

取  $u = u_1$  的时刻为初始时刻, 则积分方程(5.149)可得

$$\frac{\sqrt{a(u_3 - u_1)}}{2} t = \int_0^v \frac{dw}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 w}} = F(\sin v, k) \quad (5.151)$$

由此可得

$$\sin v = \operatorname{sn} \left( \frac{\sqrt{a(u_3 - u_1)}}{2} t \right) \quad (5.152)$$

所以

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2 \left( \frac{\sqrt{a(u_3 - u_1)}}{2} t \right) \quad (5.153)$$

进而可得

$$\theta = \arccos \left[ u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2 \left( \frac{\sqrt{a(u_3 - u_1)}}{2} t \right) \right] \quad (5.154)$$

由函数  $\text{sn } \tau$  的周期为  $4K(k)$  可得函数  $\text{sn}^2 \tau$  的周期为  $2K(k)$ , 因此函数  $u$  的周期为  $\frac{4K(k)}{\sqrt{a(u_3 - u_1)}}$ , 即章动角变化的周期为

$$T = \frac{4K(k)}{\sqrt{a(u_3 - u_1)}} \quad (5.155)$$

再根据式(5.140a)和(5.140b)可得函数  $\dot{\phi}$  和  $\dot{\psi}$  的周期也为  $T = \frac{4K(k)}{\sqrt{a(u_3 - u_1)}}$ , 根据

$$\frac{d\phi}{dt}(t+T) = \frac{d\phi}{dt}(t), \quad \frac{d\psi}{dt}(t+T) = \frac{d\psi}{dt}(t) \quad (5.156)$$

两端积分可得

$$\phi(t+T) = \phi(t) + \Delta\phi, \quad \psi(t+T) = \psi(t) + \Delta\psi \quad (5.157)$$

其中  $\Delta\phi$  和  $\Delta\psi$  分别为进动角和自转角一周期的改变量, 这可以根据(5.140a)和(5.140b)直接积分得到。

Lagrange 情形下运动的周期性, 将取决于  $\theta_2 - \theta_1, \Delta\phi, \Delta\psi$  这三个量之间的比值是否能够化为有理数之比。或者将条件放宽, 不考虑自转运动, 那么周期性的条件为  $\frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta\phi}$  是否为有理数。如果比值  $\frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta\phi}$  是有理数, 那么图5.26-5.28上的轨迹将是闭合的; 如果比值  $\frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta\phi}$  不是有理数, 那么图5.26-5.28上的轨迹在足够长的时间内将充满  $\theta_1$  和  $\theta_2$  之间的球面区域。

### 5.7.3 Lagrange 情形下刚体规则进动的条件

作为一种特殊情况, 来看一下在 Lagrange 情形下刚体作规则进动的条件。直接用方程(5.147)来考虑的话, 需要  $u_1 = u_2$ , 这样方程(5.147)的解只有  $\dot{u} = 0$ , 则  $\theta$  为常数, 即对应规则进动。但是函数  $G(u)$  满足  $u_1 = u_2$  的条件比较复杂, 因此此处利用等效势来讨论刚体在 Lagrange 情形下刚体规则进动的条件。

将方程(5.136)和(5.137)联立可得与方程(5.140a)和(5.140b)相同的结果:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{L_Z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (5.158a)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (5.158b)$$

将式(5.158a)和(5.158b)代入能量积分(5.138)可得

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta = E \quad (5.159)$$

此方程可以视为关于  $\theta$  的一维运动方程, 令

$$U(\theta) = \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta \quad (5.160)$$

为重力矩与惯性力矩的等效势, 由此方程(5.159)可以表示为

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U(\theta) = E \quad (5.161)$$

等效势的图像如图5.29所示。

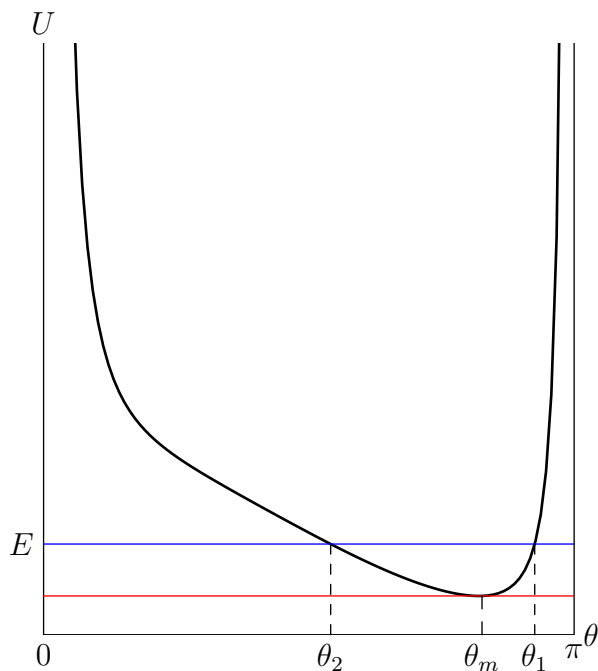


图 5.29: Lagrange 情形下的等效势

在图5.29中,  $U(\theta) = E$  所对应的  $\theta$  就是前文所提到的章动角转折点  $\theta_1$  和  $\theta_2$ , 在这两点有  $\dot{\theta} = 0$ 。规则进动的条件  $u_1 = u_2$  等价于  $\theta_1 = \theta_2$ , 因此只需要有  $E = U(\theta_m)$  即可, 其中  $\theta_m$  为函数  $U(\theta)$  的极值点。因此,  $\theta_m$  需要满足方程

$$U'(\theta) = \frac{(L_3 - L_Z \cos \theta)(L_Z - L_3 \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} - Mgl \sin \theta = 0 \quad (5.162)$$

将式(5.158a)表示的  $L_Z$  代入整理, 可得

$$I_1 \dot{\phi}^2 \cos \theta_m - L_3 \dot{\phi} + Mgl = 0 \quad (5.163)$$

由于  $\dot{\phi}$  应该为实数, 方程(5.163)有解的条件为

$$L_3^2 \geq 4MglI_1 \cos \theta_m \quad (5.164)$$

式中  $\theta_m$  由方程(5.162)决定。因此, Lagrange 情形下, 规则进动的条件为  $E = U(\theta_m)$  和式(5.164)。

**例 5.6** 一陀螺由半径为  $2r$  的薄圆盘及通过圆盘中心  $C$ , 并和盘面垂直的长为  $r$  的杆轴所组成, 杆的质量可忽略不计。将杆的另一端  $O$  放在水平面上, 使其作无滑动的转动。如起始时杆  $OC$  与铅直线的夹角为  $\alpha$ , 起始时的总角速度为  $\omega$ , 方向沿着  $\alpha$  角的平分线, 证明经过

$$t = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\omega \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} + \frac{g}{r\omega^2} (\cos \alpha - \cos \theta)}}$$

后杆将直立起来, 式中  $\theta$  为任意瞬时杆轴与铅直线的夹角。

**解** 圆盘对  $C$  的惯量矩阵为

$$\mathbf{I}' = \begin{pmatrix} mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2mr^2 \end{pmatrix}$$

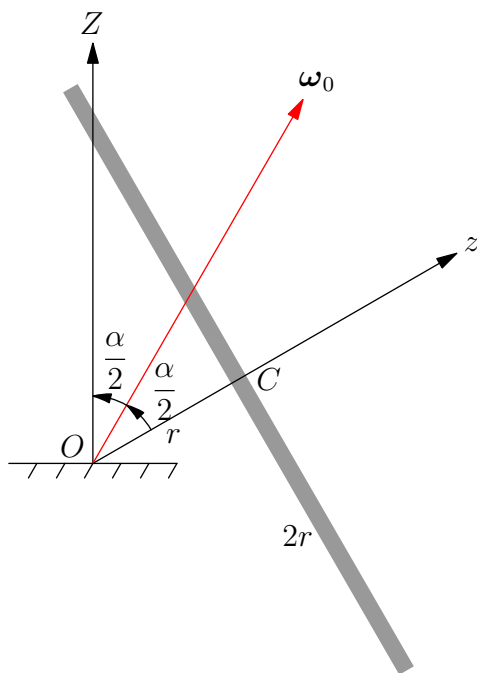


图 5.30: 例 5.6

质心对  $O$  点的坐标为  $\mathbf{X}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ , 因此有质心对  $O$  的转动惯量为

$$\mathbf{I}_C = \begin{pmatrix} mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

根据平行轴定理可得圆盘对  $O$  的转动惯量为

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}' = \begin{pmatrix} 2mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2mr^2 \end{pmatrix}$$

故圆盘为 Lagrange 陀螺。其转动惯量和动能分别为

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = 2mr^2\boldsymbol{\omega}, \quad T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = mr^2\omega^2$$

由此可得三个积分常数为

$$\begin{cases} L_Z = L_{Z0} = 2mr^2\omega_{Z0} = 2mr^2\omega \cos \frac{\alpha}{2} \\ L_3 = L_{30} = 2mr^2\omega_{30} = 2mr^2\omega \cos \frac{\alpha}{2} \\ E = E_0 = mr^2\omega^2 + mgr \cos \alpha \end{cases}$$

此时, 章动等效势为

$$U(\theta) = mr^2\omega^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} + mgr \cos \theta = mgr \left( \frac{r\omega^2}{g} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} + \cos \theta \right)$$



章动方程为

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + U(\theta) = E$$

初始时刻有

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_0^2 = E - U(\alpha) = 0$$

即初始章动角速度为零，章动处于极限角位置。下面按  $\frac{r\omega^2}{g}$  可能的取值分类讨论，每种情况对应的等效势能曲线如图5.31所示。

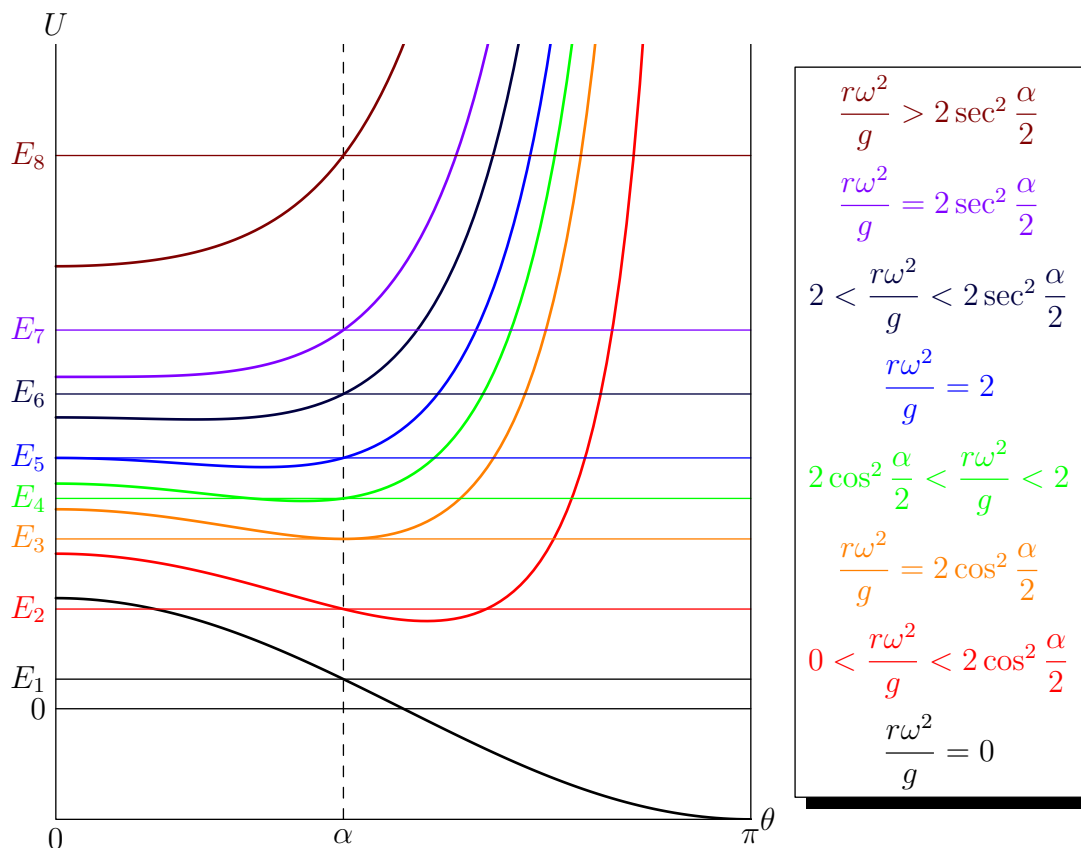


图 5.31: 例 5.6 势能曲线

1.  $\frac{r\omega^2}{g} = 0$ 。此时  $U(\theta) = mgr \cos \theta$ ，刚体为复摆，平衡位置在  $\theta = \pi$ ，不可能直立。
2.  $0 < \frac{r\omega^2}{g} < 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ 。此时  $U'(\alpha) < 0$ ，刚体进行初始向下的往复章动，不可能直立。
3.  $\frac{r\omega^2}{g} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ 。此时  $U'(\alpha) = 0$ ，刚体进行规则进动，不可能直立。
4.  $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} < \frac{r\omega^2}{g} < 2$ 。此时  $U'(\alpha) > 0$ ,  $U(0) > E$ ，刚体进行初始向上的往复章动，不可能直立。
5.  $\frac{r\omega^2}{g} = 2$ 。此时  $U(0) = E$ ，恰能直立，刚体将以无限小章动角速度趋于直立位置，所需时间为无穷大。
6.  $2 < \frac{r\omega^2}{g} < 2 \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 。此时  $U(0) < E$ ,  $U''(0) < 0$ ，章动角速度先增后减，渐趋匀速，故刚体可在有限时间之内直立起来。
7.  $\frac{r\omega^2}{g} = 2 \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 。此时  $U''(0) = 0$ ,  $U^{(4)}(0) > 0$ ，章动角速度递增，较快趋于匀速，故刚体可在有限时间之内直立起来。

8.  $\frac{r\omega^2}{g} > 2 \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 。此时  $U''(0) > 0$ ，章动角速度递增，较慢趋于匀速，故刚体可在有限时间之内直立起来。

综上，刚体能够直立的条件为  $\frac{r\omega^2}{g} \geq 2$ 。由章动方程  $\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + U(\theta) = E$  可得

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2(E - U(\theta))}{I_1}}$$

此处，由于直立过程中，章动角随时间减小，故开方取负。因此，从初始章动角位置至直立所需时间为

$$t = -\sqrt{\frac{I_1}{2}} \int_{\alpha}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{E - U(\theta)}} = \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\omega \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} + \frac{g}{r\omega^2} (\cos \alpha - \cos \theta)}}$$

## 5.8 重刚体沿水平面的运动

### 5.8.1 摩擦

设刚性曲面  $S$  沿着固定曲面  $S_1$  运动（如图5.32所示），这里假设曲面  $S$  和  $S_1$  都是凸的，相切于  $O$  点。假设在每个时刻经过  $O$  点只能有唯一的  $S$  和  $S_1$  的公共切平面<sup>①</sup>，而一般来说，在  $S$  运动时，点  $O$  既沿着  $S$  运动又沿着  $S_1$  运动。故显然点  $O$  的速度  $\mathbf{v}_O$  应该位于过  $O$  点的公共切平面内。如果  $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$  则称运动是无滑动的，如果  $\mathbf{v}_O \neq \mathbf{0}$  则称运动是有滑动的，而  $\mathbf{v}_O$  称为滑动速度。

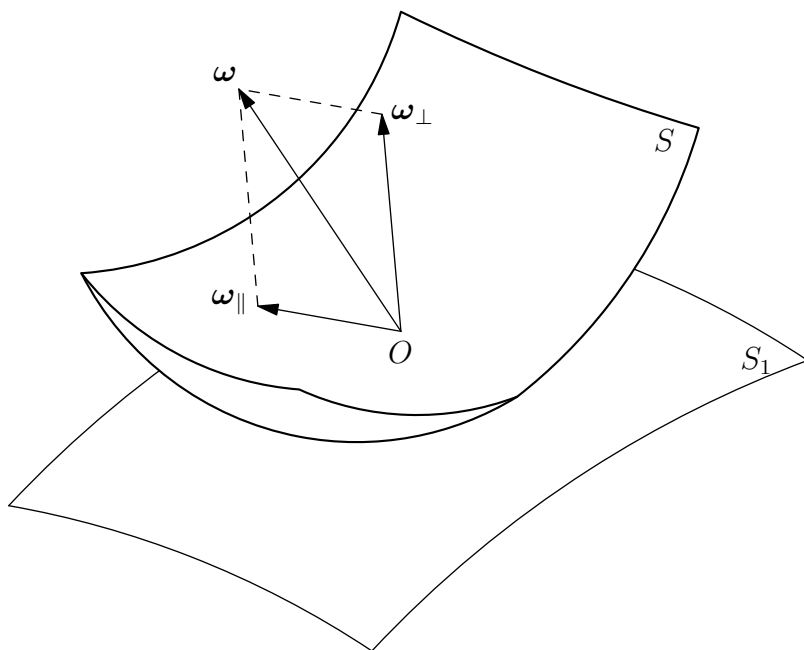


图 5.32: 曲面之间的接触

<sup>①</sup> 如果曲面  $S$  和  $S_1$  都是光滑曲面，并且又具有唯一一接触点，则过该点必然只存在一个公共切平面。

取  $O$  点为基点, 那么在每个时刻曲面  $S$  的运动都可以看作是速度为  $v_O$  的平动和角速度为  $\omega$  的定点转动。将角速度  $\omega$  分解为垂直于公共切平面的  $\omega_{\perp}$  和位于公共切平面内的  $\omega_{\parallel}$ , 其中  $\omega_{\perp}$  称为曲面  $S$  的转动角速度,  $\omega_{\parallel}$  称为曲面  $S$  的滚动角速度。

如果  $v_O = 0$ , 则称曲面  $S$  在曲面  $S_1$  上滚动。如果  $v_O = 0$  的同时有  $\omega_{\perp} = 0$  但  $\omega_{\parallel} \neq 0$ , 则称曲面  $S$  在曲面  $S_1$  上纯滚动, 而如果  $v_O = 0$  的同时有  $\omega_{\perp} \neq 0, \omega_{\parallel} = 0$  则称曲面  $S$  在曲面  $S_1$  上转动。如果  $v_O \neq 0$  而  $\omega_{\perp} = \omega_{\parallel} = 0$ , 则称曲面  $S$  在曲面  $S_1$  上滑动。一般来说, 当  $v_O \neq 0, \omega_{\perp} \neq 0, \omega_{\parallel} \neq 0$  时, 曲面  $S$  在曲面  $S_1$  上既滑动又转动和滚动。

曲面  $S_1$  对曲面  $S$  的作用力也可以分解为垂直于公共切平面的  $N$  和位于公共切平面内的  $F$ 。垂直于公共切平面的约束力  $N$  称为法向约束反力, 对于实际运动来说  $N \geq 0$ 。位于公共切平面内的力  $F$  称为摩擦力, 一般情况下可以用 Coulomb 摩擦定律来描述, 摩擦力的大小不超过其最大可能值  $kN$ , 其中  $k$  是摩擦系数。如果  $v_O = 0$ , 则  $F < kN$ , 这时  $F$  称为静摩擦力; 如果  $v_O \neq 0$ , 则  $F = kN$ , 这时  $F$  称为滑动摩擦力<sup>①</sup>。对于实际的接触面, 摩擦力总是存在的, 如果  $k$  充分小, 那么可以忽略摩擦力, 认为曲面是绝对光滑的。

实际上, 刚体的相互接触不是一个点, 而是一个很小的面, 那么曲面  $S_1$  对曲面  $S$  的作用力不能简化为一个力 (即法向约束反力和摩擦力的合力), 而只能简化为一个力和一个力矩。这个力与前文所述的相同, 可以分解为法向约束反力和摩擦力。而力矩也可以分解为垂直于公共切平面的转动摩擦力矩和位于公共切平面内的滚动摩擦力矩。通常情况下, 这两个摩擦力矩与摩擦力相比对曲面  $S$  的运动影响是很小的。

### 5.8.2 存在摩擦时均匀球在平面上的运动

<sup>①</sup> 需要注意的是, 摩擦是十分复杂的现象, Coulomb 摩擦定律只是近似的实验定律。

## 第六章 撞击运动理论

### 6.1 撞击的基本概念

设力学系统由  $n$  个质点  $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$  构成, 如果从某时刻  $t = t_0$  开始的短时间  $\tau$  内, 系统质点的速度发生了**突变**<sup>①</sup>, 而其位置却没有显著变化, 这种情况下我们称系统受到**撞击**。被抛向墙壁并反弹回来的弹性球就是一个系统受到撞击的例子。

在撞击过程中, 系统内部产生很大的相互作用力, 而这些力的作用时间  $\tau$  非常小, 以至于系统来不及发生显著的位移, 这样的内部相互作用力称为**撞击力**。而系统在撞击力作用下的运动称为**撞击运动**。

设作用在质点  $m_i$  上的撞击力为  $\mathbf{F}_i$ , 将其冲量

$$\mathbf{J}_i = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}_i dt \quad (6.1)$$

称为**撞击冲量**。在分析撞击运动时, 总是假设撞击时间  $\tau$  是无穷小量, 但撞击冲量的大小是有限的。由于在撞击时间  $\tau$  内系统中质点的速度都是有限量, 因此当  $\tau \rightarrow 0$  时其位移可以忽略, 而它们的加速度  $\mathbf{a}_i$  无穷大。研究撞击运动时, 我们不关注撞击过程, 而只关注撞击时刻  $t_0$  前瞬时的速度 (称为**撞击前速度**) 和  $t_0$  后瞬时的速度 (称为**撞击后速度**), 分别记作  $\mathbf{v}_i^-$  和  $\mathbf{v}_i^+$ 。

对于质点  $m_i$ , 其受到的所有撞击力以外的常规力都是有限量, 因此其冲量在撞击时间  $\tau \rightarrow 0$  时是可以忽略不计的小量, 根据动量定理可得

$$m_i(\mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-) = \mathbf{J}_i \quad (6.2)$$

式(6.2)称为**撞击运动基本方程**。当撞击作用在有约束的系统上时, 通常会产生碰撞约束反力, 在这种情况下, 式(6.2)的右端还应包含约束反力的撞击冲量。根据撞击冲量的定义式(6.1), 可以将 Newton 第三定律推广到撞击冲量上, 即相互碰撞的两个质点之间的撞击冲量大小相等、方向相反、作用在同一条直线上。

而在研究质点系  $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的撞击运动时, 经常将撞击冲量分为外冲量和内冲量, 即分别为系统外力和内力的冲量。据此将撞击基本方程(6.2)写作

$$m_i \Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{J}_i^{(e)} + \mathbf{J}_i^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.3)$$

其中  $\Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-$  为撞击前后速度的改变量,  $\mathbf{J}_i^{(e)}$  是作用在质点  $m_i$  上的外撞击冲量之和,  $\mathbf{J}_i^{(i)}$  则为作用在该质点上所有内撞击冲量之和。

将系统所有撞击冲量之和

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \quad (6.4)$$

称为**撞击冲量的主矢量**。

<sup>①</sup> 前面各章中, 无论是质点还是刚体, 其速度都是连续变化的。

设  $\mathbf{r}_i$  为  $O$  点到质点  $m_i$  的矢径, 则撞击冲量对  $O$  点的冲量矩之和

$$\mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{J}_i \quad (6.5)$$

称为撞击冲量对  $O$  点的主矩。

由于相互碰撞的两个质点之间的撞击冲量大小相等、方向相反, 所以可有

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(e)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^{(e)}, \quad \mathbf{K}_O = \mathbf{K}_O^{(e)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{J}_i^{(e)} \quad (6.6)$$

即系统撞击冲量的主矢量和主矩分别等于外撞击冲量的主矢量和主矩。

## 6.2 撞击运动的动力学普遍方程

将方程(6.3)对所有质点求和, 可得

$$\Delta \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^{(i)}$$

或者

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{S}^{(e)} \quad (6.7)$$

即在撞击中系统动量的该变量等于外撞击冲量的主矢量, 式(6.7)即为撞击运动的动量定理。

由于  $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_C$ , 其中  $M$  是系统的总质量,  $\mathbf{v}_C$  是质心的速度, 于是方程(6.7)可以写作

$$M\Delta \mathbf{v}_C = \mathbf{S}^{(e)} \quad (6.8)$$

设点  $A$  是空间中的某一点<sup>①</sup>,  $\mathbf{r}_i$  是  $A$  点到质点  $m_i$  的矢径, 将方程(6.3)两端左叉乘  $\mathbf{r}_i$  之后对所有质点求和, 可得

$$\Delta \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{J}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{J}_i^{(i)}$$

或者

$$\Delta \mathbf{L}_A = \mathbf{K}_A^{(e)} \quad (6.9)$$

即系统对任意点的角动量的该变量等于外撞击冲量对该点的主矩, 式(6.9)即为撞击运动的角动量定理。

下面来导出撞击运动中的动能定理。记  $T^-$  和  $T^+$  分别为系统撞击前后的动能, 则根据动能的定义可得

$$T^- = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i^-)^2, \quad T^+ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i^+)^2 \quad (6.10)$$

将式(6.3)两端点乘  $\mathbf{v}_i^+$  可得

$$m_i (\mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-) \cdot \mathbf{v}_i^+ = \mathbf{J}_i^{(e)} \cdot \mathbf{v}_i^+ + \mathbf{J}_i^{(i)} \cdot \mathbf{v}_i^-$$

将上式对所有质点求和, 并将其左端的  $\mathbf{v}_i^+$  改写为

$$\mathbf{v}_i^+ = \frac{1}{2} [(\mathbf{v}_i^+ + \mathbf{v}_i^-) + (\mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-)]$$

<sup>①</sup> 这一点可以是固定点也可以是运动的点。

可得

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i^+)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i^-)^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^{(e)} \cdot \mathbf{v}_i^+ + \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^{(i)} \cdot \mathbf{v}_i^+$$

即有

$$T^- - T^+ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-)^2 - \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^{(e)} \cdot \mathbf{v}_i^+ - \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^{(i)} \cdot \mathbf{v}_i^+ \quad (6.11)$$

类似地, 在式(6.3)两端点乘  $\mathbf{v}_i^-$ , 并将其中的  $\mathbf{v}_i^-$  改写为

$$\mathbf{v}_i^- = \frac{1}{2} [(\mathbf{v}_i^+ + \mathbf{v}_i^-) - (\mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-)]$$

再将其对所有质点求和, 可得

$$T^+ - T^- = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-)^2 + \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^{(e)} \cdot \mathbf{v}_i^- + \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^{(i)} \cdot \mathbf{v}_i^- \quad (6.12)$$

用式(6.12)减去式(6.11)再除以 2, 即可得到撞击运动的动能定理

$$T^+ - T^- = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^{(e)} \cdot \frac{\mathbf{v}_i^+ + \mathbf{v}_i^-}{2} + \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^{(i)} \cdot \frac{\mathbf{v}_i^+ + \mathbf{v}_i^-}{2} \quad (6.13)$$

**例 6.1** 质量为  $m$  长为  $l$  的均匀细杆处于静止状态, 在其一端垂直于杆作用冲量  $J$ , 如图 6.1 所示。求撞击后杆的运动状态。

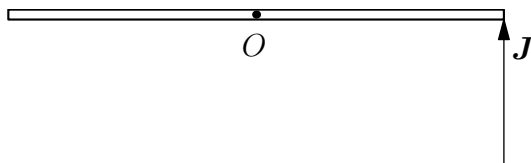


图 6.1: 例 6.1

**解** 设  $v$  为撞击后杆质心的速度,  $\omega$  为撞击后杆的角速度, 则由动量定理(6.8)和角动量定理(6.9)可得

$$\begin{cases} mv = J \\ \frac{1}{12} ml^2 \omega = \frac{l}{2} J \end{cases}$$

由此可得

$$v = \frac{J}{m}, \quad \omega = \frac{6J}{ml}$$

**例 6.2** 如果将例 6.1 中的杆一端用铰链固定, 求此情形下撞击后杆的运动状态。

**解** 撞击后杆将绕  $A$  点转动, 根据角动量定理(6.9)可得

$$\left( \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 \right) \omega = Jl$$

由此可得

$$\omega = \frac{3J}{ml}$$

额外还可以求出铰链对杆的未知撞击冲量  $J_A$ 。根据动量定理(6.8)可得

$$mv = J + J_A$$

其中  $v$  为撞击后杆质心的速度, 其值为  $v = \omega \frac{l}{2} = \frac{3J}{2m}$ , 因此可得

$$J_A = mv - J = \frac{1}{2} J$$

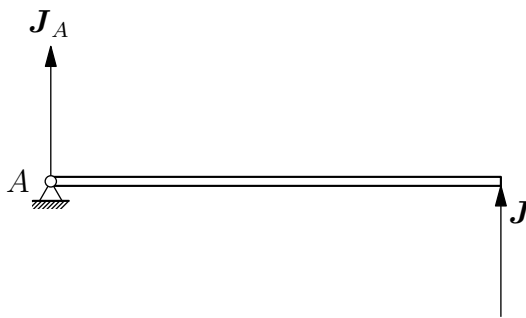


图 6.2: 例 6.2

## 6.3 刚体的撞击运动

### 6.3.1 自由刚体的撞击

由于刚体的运动状态可以完全由刚体上任意一点的速度和刚体的角速度决定, 因此自由刚体的撞击运动问题可以完全归结为求撞击时刚体上某点的速度和刚体的角速度这两个矢量。

为了简化问题, 取刚体的质心为坐标原点, 坐标轴选为其惯量主轴, 其主惯量分别记作  $I_1, I_2, I_3$ , 则根据撞击运动的动量定理(6.8)和角动量定理(6.9)可得

$$\begin{cases} v_{Cx}^+ - v_{Cx}^- = \frac{S_x}{m}, & v_{Cy}^+ - v_{Cy}^- = \frac{S_y}{m}, & v_{Cz}^+ - v_{Cz}^- = \frac{S_z}{m} \\ \omega_x^+ - \omega_x^- = \frac{K_x}{I_1}, & \omega_y^+ - \omega_y^- = \frac{K_y}{I_2}, & \omega_z^+ - \omega_z^- = \frac{K_z}{I_3} \end{cases} \quad (6.14)$$

如果刚体做平面平行运动, 例如平行于  $xOy$  平面, 则方程(6.14)中的 6 个关系式中只剩下 3 个:

$$v_{Cx}^+ - v_{Cx}^- = \frac{S_x}{m}, \quad v_{Cy}^+ - v_{Cy}^- = \frac{S_y}{m}, \quad \omega_z^+ - \omega_z^- = \frac{K_z}{I_3} \quad (6.15)$$

刚体的动能根据 König 定理(1.93)可以表示为

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2)$$

将撞击前后的质心速度和刚体的角速度代入上式然后相减, 并注意到动能定理(6.8)和角动量定理(6.9)可得

$$T^+ - T^- = \mathbf{S}^{(e)} \cdot \frac{\mathbf{v}_C^+ - \mathbf{v}_C^-}{2} + \mathbf{K}_C^{(e)} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}^+ - \boldsymbol{\omega}^-}{2} \quad (6.16)$$

如果利用式(6.14)消去碰撞后的速度和角速度, 可以将动能的变化量用撞击冲量的主矢量  $\mathbf{S}^{(e)}$  和主矩  $\mathbf{K}_C^{(e)}$  以及  $\mathbf{v}_C^-$  和  $\boldsymbol{\omega}^-$  来表示:

$$T^+ - T^- = \frac{1}{2} \left( \frac{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}{m} + \frac{K_x^2}{I_1} + \frac{K_y^2}{I_2} + \frac{K_z^2}{I_3} \right) + \mathbf{S}^{(e)} \cdot \mathbf{v}_C^- + \mathbf{K}_C^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega}^- \quad (6.17)$$

**例 6.3** 如图6.3所示, 用水平台球杆撞击台球, 杆距离球质心的高度  $h$  为多少时, 撞击后球将无滑动地滚动?

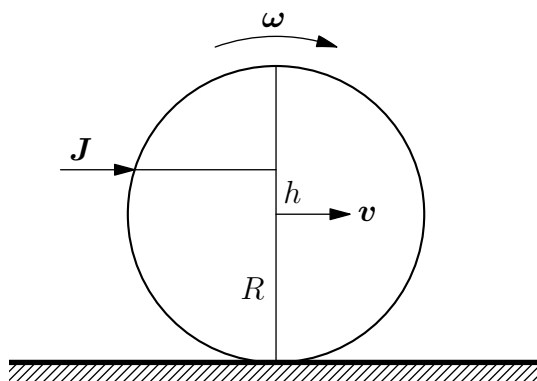


图 6.3: 例 6.3

解 设台球的质量为  $m$ , 半径为  $R$ , 撞击冲量为  $J$ , 则根据撞击运动的动量定理和角动量定理可得

$$\begin{cases} mv = J \\ \frac{2}{5}mR^2\omega = Jh \end{cases}$$

而无滑动滚动要求  $v = \omega R$ , 由此可解得  $h = \frac{2}{5}R$ 。

### 6.3.2 定点运动刚体的撞击

在定点运动中, 取固定点  $O$  为坐标原点, 坐标轴  $Ox, Oy, Oz$  分别与刚体对  $O$  点的惯量主轴重合, 用  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{K}$  来表示主动撞击冲量的主矢量和对  $O$  点的主矩, 需要求解该刚体角速度改变量  $\Delta\omega$  和  $O$  点的约束撞击冲量。

根据方程(6.14)可得该刚体角速度改变量  $\Delta\omega$  满足

$$\Delta\omega_x = \frac{K_x}{I_1}, \quad \Delta\omega_y = \frac{K_y}{I_2}, \quad \Delta\omega_z = \frac{K_z}{I_3} \quad (6.18)$$

撞击运动过程中质心的坐标不变, 故有  $\Delta\mathbf{v}_C = \Delta\omega \times \mathbf{r}_C$ , 其中  $\mathbf{r}_C$  为质心相对  $O$  点位矢。约束撞击冲量  $\mathbf{J}'$  可以由撞击运动的动量定理(6.8)来确定, 即

$$m\Delta\mathbf{v}_C = \mathbf{S} + \mathbf{J}'$$

由此可得

$$\mathbf{J}' = m\Delta\omega \times \mathbf{r}_C - \mathbf{S} \quad (6.19)$$

下面考虑一种特殊情况: 在刚体上某一点作用一个撞击冲量  $\mathbf{J}$ , 当这个撞击冲量作用在刚体上的哪一点时, 不会引起撞击约束反力? 例如需要对静止的刚体施加撞击使其开始定点转动, 但不能确信约束具有足够的强度。

设该刚体的质心坐标为  $x_C, y_C, z_C$ , 而撞击冲量  $\mathbf{J}$  作用点  $P$  的坐标为  $x, y, z$ , 令  $\mathbf{J}' = \mathbf{0}$ , 则根据式(6.19)可得

$$\begin{cases} z_C \frac{zJ_x - xJ_z}{I_2} - y_C \frac{xJ_y - yJ_x}{I_3} = \frac{J_x}{m} \\ x_C \frac{xJ_y - yJ_x}{I_3} - z_C \frac{yJ_z - zJ_y}{I_1} = \frac{J_y}{m} \\ z_C \frac{yJ_z - zJ_y}{I_1} - x_C \frac{zJ_x - xJ_z}{I_2} = \frac{J_z}{m} \end{cases} \quad (6.20)$$



这个方程对冲量  $\mathbf{J}$  的三个分量是线性齐次的, 因此冲量  $\mathbf{J}$  的大小是任意的, 只需要作用点坐标满足

$$\begin{vmatrix} \frac{y_C y}{I_3} + \frac{z_C z}{I_2} - \frac{1}{m} & -\frac{y_C x}{I_3} & -\frac{z_C x}{I_2} \\ -\frac{x_C y}{I_3} & \frac{x_C x}{I_3} + \frac{z_C z}{I_1} - \frac{1}{m} & -\frac{z_C y}{I_1} \\ -\frac{x_C z}{I_2} & -\frac{y_C z}{I_1} & \frac{x_C x}{I_2} + \frac{y_C y}{I_1} - \frac{1}{m} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.21)$$

即可使得约束撞击冲量为零。方程(6.21)表明, 在一般情况下  $P$  点的可能位置为一个三次曲面上, 在该曲面上的任意点作用冲量都不会引起撞击约束反力。将该曲面上选定点的坐标  $x, y, z$  代入方程(6.21)中即可确定冲量  $\mathbf{J}$  的作用线。

当固定点  $O$  位于刚体的某个惯量主轴上时, 不妨将该主轴取为  $z$  轴, 此时有  $x_C = y_C = 0$ , 方程(6.21)变为

$$-\frac{1}{m} \left( \frac{z_C z}{I_1} - \frac{1}{m} \right) \left( \frac{z_C z}{I_2} - \frac{1}{m} \right) = 0$$

即  $P$  点位于两个平面

$$z = \frac{I_1}{m z_C} \quad \text{或} \quad z = \frac{I_2}{m z_C}$$

上。这两个平面都垂直于惯量主轴  $Oz$  且与刚体的质心位于  $O$  点的同一侧。当  $P$  点位于  $z = \frac{I_1}{m z_C}$  上时, 冲量  $\mathbf{J}$  应平行于  $Oy$  轴; 当  $P$  点位于  $z = \frac{I_2}{m z_C}$  上时, 冲量  $\mathbf{J}$  应平行于  $Ox$  轴。对于满足  $I_1 = I_2$  的对称刚体, 这两个平面重合, 此时冲量  $\mathbf{J}$  可以在该平面内沿任意方向。

**例 6.4** 刚体绕  $O$  点作定点运动, 在某时刻刚体的角速度等于  $\omega^-$ , 这时突然固定第二个点  $O_1$ , 此后刚体即只能绕着过  $O$  点和  $O_1$  点的固定轴  $u$  转动, 求刚体定轴转动的角速度大小  $\omega^+$ 。记定轴  $u$  与刚体三个惯量主轴的方向余弦分别为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 其三个主惯量为  $I_1, I_2, I_3$ 。

**解** 记轴  $u$  的单位方向矢量为  $\mathbf{n}$ , 则在主轴系中有  $\mathbf{n} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3$ 。在这个撞击过程中, 刚体受到的撞击冲量对  $O_1$  点的主矩  $\mathbf{K}_{O_1} = \overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{J} \perp \mathbf{n}$ , 所以  $\mathbf{K}_{O_1} \cdot \mathbf{n} = 0$ , 因此有  $\Delta \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} = 0$ , 即刚体在撞击前后角动量在  $u$  轴上的投影是不变的, 亦即刚体对轴  $u$  的角动量不变。

在撞击前后, 刚体对轴  $u$  的角动量分别为

$$\begin{aligned} L_u^- &= \mathbf{n}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^- = I_1 \alpha \omega_1^- + I_2 \beta \omega_2^- + I_3 \gamma \omega_3^- \\ L_u^+ &= \mathbf{n}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^+ = \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n} \omega^+ = (I_1 \alpha^2 + I_2 \beta^2 + I_3 \gamma^2) \omega^+ \end{aligned}$$

由  $L_u^- = L_u^+$  可得

$$\omega^+ = \frac{I_1 \alpha \omega_1^- + I_2 \beta \omega_2^- + I_3 \gamma \omega_3^-}{I_1 \alpha^2 + I_2 \beta^2 + I_3 \gamma^2}$$

### 6.3.3 定轴转动刚体的撞击

设刚体绕着过  $O$  和  $O_1$  的轴转动 (如图6.4所示), 在刚体上  $P$  点作用撞击冲量  $\mathbf{J}$ , 求刚体的角速度改变量以及  $O$  和  $O_1$  两点的撞击约束冲量。

以  $O$  为原点建立坐标系  $Oxyz$ , 其中  $Oz$  轴沿着转动轴,  $Ox$  轴与撞击冲量  $\mathbf{J}$  垂直, 因此撞击冲量  $\mathbf{J}$  的分量为  $0, J_y, J_z$ 。记质心  $C$  和撞击冲量作用点  $P$  的坐标分别为  $x_C, y_C, z_C$  和  $x_*, y_*, z_*$ , 角速度大小为  $\omega$ , 在  $O$  点和  $O_1$  点的撞击约束冲量  $\mathbf{J}'$  和  $\mathbf{J}''$  的分量分别为

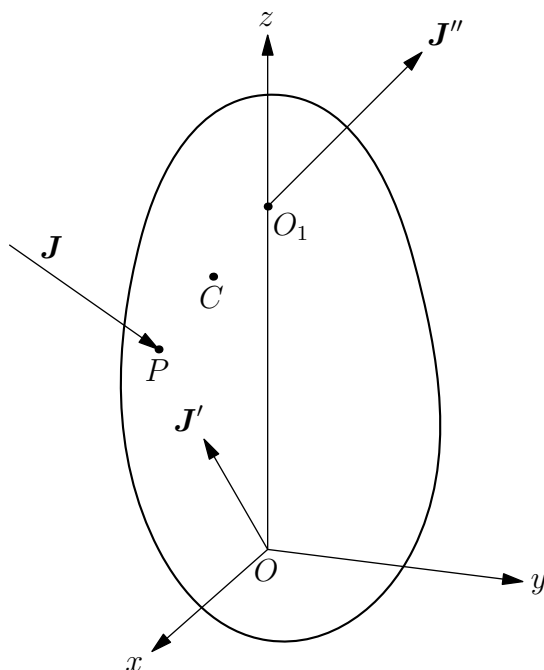


图 6.4: 定轴转动刚体的撞击

$J'_x, J'_y, J'_z$  和  $J''_x, J''_y, J''_z$ , 点  $O$  和  $O_1$  之间的距离为  $h$ , 刚体对  $O$  点的惯量矩阵表示为  $I$ , 则由动量定理和角动量定理可得

$$\begin{cases} m\Delta\omega \times \overrightarrow{OC} = \mathbf{J} + \mathbf{J}' + \mathbf{J}'' \\ I\Delta\omega = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{J} + \mathbf{OO}_1 \times \mathbf{J}'' \end{cases} \quad (6.22)$$

方程(6.22)的分量形式为

$$\begin{cases} -my_C\Delta\omega = J'_x + J''_x & (6.23a) \\ mx_C\Delta\omega = J_y + J'_y + J''_y & (6.23b) \\ 0 = J_z + J'_z + J''_z & (6.23c) \\ I_{13}\Delta\omega = y_*J_z - z_*J_y - hJ''_y & (6.23d) \\ I_{23}\Delta\omega = -x_*J_z + hJ''_x & (6.23e) \\ I_{33}\Delta\omega = x_*J_y & (6.23f) \end{cases}$$

由方程(6.23f)可以确定角速度改变量  $\Delta\omega$ 。如果撞击冲量  $\mathbf{J}$  与刚体转动轴不共面 (即  $J_y \neq 0$ ), 则  $\Delta\omega \neq 0$ 。而方程(6.23a)-(6.23e)这五个方程无法完全确定撞击约束冲量  $\mathbf{J}'$  和  $\mathbf{J}''$  的六个分量, 而只能求出四个分量  $J'_x, J'_y, J''_x, J''_y$  以及  $J'_z + J''_z$ 。

假设  $\Delta\omega \neq 0$ , 来求解不产生撞击约束反力的条件。当  $\mathbf{J}' = \mathbf{J}'' = \mathbf{0}$  时, 由方程(6.23c)可知  $I_z = 0$ , 即撞击冲量平行于  $y$  轴; 再由方程(6.23a)可知  $y_C = 0$ , 这说明质心位于垂直于冲量且过转动轴的平面内。但是如果  $x_C = 0$ , 即质心位于转动轴上, 则方程组无解, 即当  $I \neq \mathbf{0}$  时总是会产生撞击约束反力。

由方程(6.23b)和(6.23d)可得

$$I_{13} + mx_C z_* = 0$$

亦即

$$\int \rho x(z - z_*)dV = 0 \quad (6.24)$$

由方程(6.23e)可得  $I_{23} = 0$ , 再由  $y_C = 0$  可得

$$I_{23} + my_C z^* = 0$$

亦即

$$\int \rho y(z - z_*) dV = 0 \quad (6.25)$$

式(6.24)和(6.25)表明转动轴是刚体对  $(0, 0, z_*)$  的惯量主轴。

由此即说明, 当转动轴是刚体的惯量主轴, 且撞击冲量垂直于转动轴与质心构成的平面时, 任意大小的撞击冲量都不会使  $O$  和  $O_1$  点产生撞击约束反力。

最后由式(6.23b)和(6.23f)可得

$$x_* = \frac{I_{33}}{mx_C} \quad (6.26)$$

式(6.26)确定了撞击冲量的作用线, 称为**撞击轴**, 它与过转动轴和质心构成的平面的交点称为**撞击中心**。

**例 6.5** 边长分别为  $a, b, c$  的均匀长方体沿着光滑平面滑动, 长为  $c$  的棱边沿着竖直方向 (如图6.5所示), 滑动方向垂直于长为  $b$  的棱边。忽然固定这个棱边使其不动, 求能够使得长方体翻到的滑动速度  $v$ 。

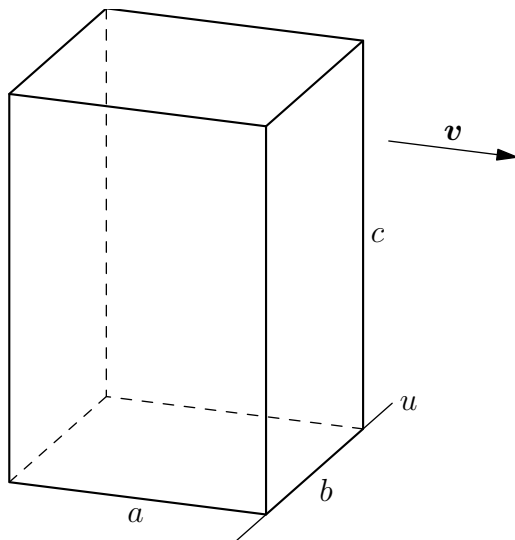


图 6.5: 例 6.5

**解** 根据与例6.4类似的讨论, 刚体在撞击前后, 对转轴  $u$  的角动量守恒, 即有

$$\frac{1}{2}mvc = I_u \omega$$

其中  $\omega$  为长方体撞击后的角速度。  $I_u = \frac{1}{3}m(a^2 + c^2)$  是长方体对转轴  $u$  的转动惯量。设长方体质心运动到最高点的角速度为  $\omega_*$ , 则有

$$\frac{1}{2}I_u \omega^2 + \frac{1}{2}mgc = \frac{1}{2}I_u \omega_*^2 + \frac{1}{2}mg\sqrt{a^2 + c^2}$$

长方体能越过最高点要求  $\frac{1}{2}I_u \omega_*^2 > 0$ , 即

$$\frac{1}{2}I_u \omega^2 > \frac{1}{2}mg(\sqrt{a^2 + c^2} - c)$$

由此可得

$$v^2 > \frac{4g(a^2 + c^2)(\sqrt{a^2 + c^2} - c)}{3c^2}$$

## 6.4 刚体碰撞

### 6.4.1 恢复系数

设两个运动的刚体  $B_1$  和  $B_2$  在时刻  $t = t_0$  以其表面上的  $O_1$  和  $O_2$  点相互接触 (如图6.6所示), 该时刻  $O_1$  和  $O_2$  点的相对速度不在公共切平面内, 那么刚体相互撞击, 在切点产生撞击力, 分别作用于两个刚体, 大小相等方向相反。

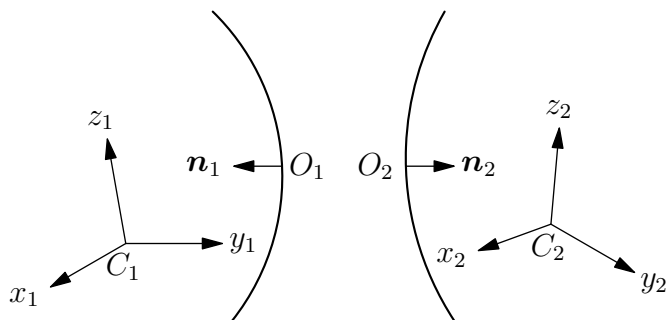


图 6.6: 刚体碰撞

我们认为刚体是绝对光滑的, 那么撞击力及其冲量  $\mathbf{J}_1$  和  $\mathbf{J}_2$  都垂直于刚体  $B_1$  和  $B_2$  的相撞曲面的公共切面。设  $\mathbf{n}$  是刚体接触点的法向单位矢量, 指向第二个刚体, 而  $\mathbf{n}_k$  是刚体  $B_k$  在  $O_k$  点的法向单位矢量, 指向刚体内部, 那么显然有

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1, \quad \mathbf{I}_k = I\mathbf{n}_k \quad (k = 1, 2) \quad (6.27)$$

其中  $I$  是撞击冲量的大小。

与前面讨论的问题不同之处在于, 此处撞击冲量  $I$  的值事先是不知道的。刚体碰撞问题是已知碰撞前运动状态求碰撞后运动状态和撞击冲量。然而, 即使是在最简单的碰撞问题中, 未知数也多于动力学定理给出的方程数, 因此还需补充其他物理假设。

绝对刚体的假设在这里已经失效, 此处必须假设刚体在碰撞点附近有很小的变形。碰撞过程分为两个阶段: 在  $t = t_0$  到  $t = t_0 + \tau_1$  的第一阶段内, 两个刚体沿着公共法线相互接近, 并且  $O_1$  点和  $O_2$  点在公共法向上的投影减小, 当其减小至零时, 碰撞的第一阶段结束。在第一阶段结束时刚体的变形最大, 然后开始第二阶段。  $O_1$  和  $O_2$  点的相对速度在公共法向上的投影在  $t = t_0 + \tau_1$  时改变符号, 在  $t > t_0 + \tau_1$  时增大, 恢复变形的刚体沿着公共法向相互远离。当  $t = t_0 + \tau_2$  时, 两个刚体以一个点相接触, 碰撞的第二个阶段结束。然后刚体互相分开, 整个碰撞过程结束。

观察发现,  $O_1$  和  $O_2$  点的相对速度在公共法向上的投影一般不会达到碰撞前的值。刚体碰撞过程的全面研究需要详细分析其构成材料的物理性质, 为了简化碰撞现象的复杂性质, 这次采用 Newton 提出的运动学假设: 碰撞后与碰撞前刚体接触点的相对速度在公共法向投影的绝对值之比为某个常数, 它不依赖于相对速度和刚体的尺寸, 只依赖于材料。这个比值称为恢复系数, 用  $\chi$  表示。

设  $\mathbf{v}_{O_k}^-$  和  $\mathbf{v}_{O_k}^+$  是  $O_k$  点在碰撞前后的速度 ( $k = 1, 2$ ), 那么

$$(\mathbf{v}_{O_1}^+ - \mathbf{v}_{O_2}^+) \cdot \mathbf{n} = -\chi(\mathbf{v}_{O_1}^- - \mathbf{v}_{O_2}^-) \cdot \mathbf{n} \quad (6.28)$$

利用式(6.27)的关系, 可以将式(6.28)改写为

$$\mathbf{v}_{O_1}^+ \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_{O_2}^+ \cdot \mathbf{n}_2 = -\chi(\mathbf{v}_{O_1}^- \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_{O_2}^- \cdot \mathbf{n}_2) \quad (6.29)$$

恢复系数刻画碰撞后相对速度的法向分量的恢复程度, 因此其取值范围为  $0 \leq \chi \leq 1$ 。如果  $\chi = 0$  则称为**完全非弹性碰撞**, 这种情况下碰撞过程只有第一个阶段, 当达到最大压缩时, 不发生恢复变形, 两个刚体一起运动。如果  $\chi = 1$  则称为**完全弹性碰撞**, 在碰撞的第二个阶段变形完全恢复, 接触点相对速度的法向分量的绝对值达到碰撞前。 $0 < \chi < 1$  是实际物理情况, 称为**非弹性碰撞**。

使用假设(6.28)时需了解, 它是实际物体真实碰撞规律的一阶近似。

**例 6.6** 如图6.7质量为  $m$  的质点以初始速度  $\mathbf{v}^-$  撞向固定曲面, 其方向与固定曲面法向的夹角为  $\alpha$ , 设碰撞恢复系数为  $\chi$ , 求质点碰撞后的速度大小  $v^+$ 、碰撞后速度与固定曲面的夹角  $\beta$  和撞击冲量  $I$  的大小。

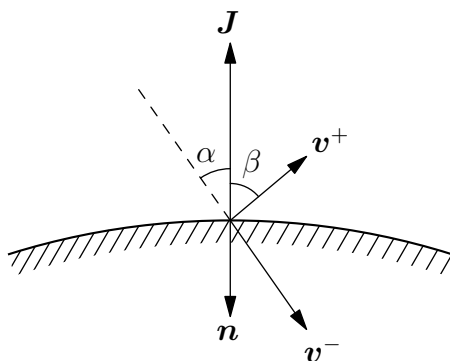


图 6.7: 质点与固定曲面的碰撞

**解** 根据碰撞的动量定理可以得到如下两个方程

$$\begin{aligned} v^+ \sin \beta - v^- \sin \alpha &= 0 \\ m(v^+ \cos \beta - v^- \cos \alpha) &= I \end{aligned}$$

再根据恢复系数关系可得

$$v^+ \sin \beta = \chi v^- \sin \alpha$$

由此可以解得

$$\tan \beta = \frac{1}{\chi} \tan \alpha, \quad v^+ = v^- \sqrt{\sin^2 \alpha + \chi^2 \cos^2 \alpha}, \quad I = m(1 + \chi)v^- \cos \alpha$$

由此结果可以看出, 碰撞前后切向速度不变; 在完全弹性碰撞的情形下, 反射角等于入射角且速度大小不变 ( $\beta = \alpha, v^+ = v^-$ ); 而在非弹性碰撞的情形下, 反射角大于入射角且速度变小 ( $\beta > \alpha, v^+ < v^-$ )。

**例 6.7** 均匀杆可以绕通过其质心的水平轴转动, 当它处于平衡状态时, 一个质量为  $m$ 、速度为  $v$  的小球击中杆的一端。设杆的质量为  $M$ , 长度为  $2a$ , 碰撞的恢复系数为  $\chi$ , 小球可以看作质点, 求杆和小球碰撞后的运动状态。

**解** 设  $v^+$  为小球碰撞后的速度大小,  $\omega^+$  为杆碰撞后的角速度大小, 则根据角动量定理可得

$$mva = \frac{1}{3}Ma\omega^+ + mv^+a$$

再根据恢复系数关系可得

$$v^+ - \omega^+ a = -\chi v$$

由此解得

$$v^+ = \frac{3m - \chi M}{M + 3m} v, \quad \omega^+ = \frac{3(1 + \chi)m}{M + 3m} \frac{v}{a}$$

## 6.4.2 两个光滑刚体相撞的一般问题

两个光滑刚体相撞的一般问题可以表述为：设刚体  $B_k (k = 1, 2)$  的本系统  $C_k x_k y_k z_k$  固连在其质心  $C_k$  上，其坐标轴沿着刚体的惯性主轴，用  $I_{x_k}, I_{y_k}, I_{z_k}$  表示其主惯量， $m_k$  表示其质量。设在坐标系  $C_k x_k y_k z_k$  中， $O_k$  的坐标为  $(x_k, y_k, z_k)$ ，法向单位矢量  $\mathbf{n}_k$  的坐标为  $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ 。已知  $\omega_k$  是刚体  $B_k$  的角速度， $\mathbf{v}_k$  是刚体  $B_k$  质心的速度，求碰撞后它们的值。

记  $\Delta \omega_k = \omega_k^+ - \omega_k^-$  和  $\Delta \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k^+ - \mathbf{v}_k^-$  在坐标系  $C_k x_k y_k z_k$  中的分量分别表示为  $\Delta \omega_{x_k}, \Delta \omega_{y_k}, \Delta \omega_{z_k}$  和  $\Delta v_{x_k}, \Delta v_{y_k}, \Delta v_{z_k}$ 。撞击冲量  $\mathbf{J}_k$  相对质心  $C_k$  的冲量矩  $\mathbf{K}_k = \overrightarrow{C_k O_k} \times \mathbf{J}_k$  在坐标系  $C_k x_k y_k z_k$  的分量表示为

$$\begin{cases} K_{x_k} = J(y_k \gamma_k - z_k \beta_k) =: J\xi_k \\ K_{y_k} = J(z_k \alpha_k - x_k \gamma_k) =: J\eta_k \\ K_{z_k} = J(x_k \beta_k - y_k \alpha_k) =: J\zeta_k \end{cases} \quad (6.30)$$

此处为了简便起见引入了三个坐标

$$\xi_k = y_k \gamma_k - z_k \beta_k, \quad \eta_k = z_k \alpha_k - x_k \gamma_k, \quad \zeta_k = x_k \beta_k - y_k \alpha_k$$

由动量定理和角动量定理可得如下共 12 个方程：

$$\begin{cases} I_{x_k} \Delta \omega_{x_k} = J\xi_k, & I_{y_k} \Delta \omega_{y_k} = J\eta_k, & I_{z_k} \Delta \omega_{z_k} = J\zeta_k \\ m_k \Delta v_{x_k} = J\alpha_k, & m_k \Delta v_{y_k} = J\beta_k, & m_k \Delta v_{z_k} = J\gamma_k \end{cases} \quad (6.31)$$

由此可以求出碰撞后刚体  $B_k$  的角速度  $\omega_k^+$  和质心速度  $\mathbf{v}_k^+$ ：

$$\omega_{x_k}^+ = \omega_{x_k}^- + J \frac{\xi_k}{I_{x_k}}, \quad \omega_{y_k}^+ = \omega_{y_k}^- + J \frac{\eta_k}{I_{y_k}}, \quad \omega_{z_k}^+ = \omega_{z_k}^- + J \frac{\zeta_k}{I_{z_k}} \quad (6.32)$$

$$v_{x_k}^+ = v_{x_k}^- + J \frac{\alpha_k}{m_k}, \quad v_{y_k}^+ = v_{y_k}^- + J \frac{\beta_k}{m_k}, \quad v_{z_k}^+ = v_{z_k}^- + J \frac{\gamma_k}{m_k} \quad (6.33)$$

由式(6.33)可知，刚体碰撞后其质心速度的切向分量没有变化。

在式(6.32)和(6.33)中包含未知的碰撞冲量  $J$ ，如果将其求出并代入式(6.32)和(6.33)中，两个光滑刚体的一般碰撞问题就完全解决了。

下面利用式(6.29)来求  $J$  的大小。首先根据  $\mathbf{v}_{O_k}^+ = \mathbf{v}_k^+ + \omega_k^+ \times \overrightarrow{C_k O_k}$ ,  $\mathbf{v}_{O_k}^- = \mathbf{v}_k^- + \omega_k^- \times \overrightarrow{C_k O_k}$  可得

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_{O_k}^+ - \mathbf{v}_{O_k}^-) \cdot \mathbf{n}_k &= \Delta \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k + (\Delta \omega_k \times \overrightarrow{C_k O_k}) \cdot \mathbf{n}_k \\ &= \Delta \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k + (\overrightarrow{C_k O_k} \times \mathbf{n}_k) \cdot \Delta \omega_k \end{aligned}$$

再将式(6.31)的结果和各个向量的分量代入上式，可得

$$(\mathbf{v}_{O_k}^+ - \mathbf{v}_{O_k}^-) \cdot \mathbf{n}_k = J \left( \frac{1}{m_k} + \frac{\xi_k^2}{I_{x_k}} + \frac{\eta_k^2}{I_{y_k}} + \frac{\zeta_k^2}{I_{z_k}} \right)$$

将其对  $k$  求和可得

$$(\mathbf{v}_{O_1}^+ - \mathbf{v}_{O_1}^-) \cdot \mathbf{n}_1 + (\mathbf{v}_{O_2}^+ - \mathbf{v}_{O_2}^-) \cdot \mathbf{n}_2 = \mu^2 J \quad (6.34)$$

其中

$$\mu^2 = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{1}{m_k} + \frac{\xi_k^2}{I_{x_k}} + \frac{\eta_k^2}{I_{y_k}} + \frac{\zeta_k^2}{I_{z_k}} \right) \quad (6.35)$$

然后, 将式(6.29)改写为

$$(\mathbf{v}_{O_1}^+ - \mathbf{v}_{O_1}^-) \cdot \mathbf{n}_1 + (\mathbf{v}_{O_2}^+ - \mathbf{v}_{O_2}^-) \cdot \mathbf{n}_2 = -(1 + \chi)(\mathbf{v}_{O_1}^- \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_{O_2}^- \cdot \mathbf{n}_2) \quad (6.36)$$

将式(6.34)代入式(6.36)中可得

$$J = -\frac{1 + \chi}{\mu^2} (\mathbf{v}_{O_1}^- \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_{O_2}^- \cdot \mathbf{n}_2) \quad (6.37)$$

其中, 量  $-(\mathbf{v}_{O_1}^- \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_{O_2}^- \cdot \mathbf{n}_2)$  是碰撞前刚体  $B_1$  上接触点  $O_1$  相对刚体  $B_2$  接触点  $O_2$  的速度在  $B_2$  的内法向投影, 记作  $v_{rn}$ 。由于碰撞前两个刚体相互接近, 所以  $v_{rn}$  是正的。由此可以将式(6.37)改写为

$$J = \frac{1 + \chi}{\mu^2} v_{rn} \quad (6.38)$$

式(6.38)右端的所有量都是已知的, 因此式(6.38)确定了碰撞冲量的大小, 再将其代入式(6.32)和 (6.33)中, 两个光滑刚体相撞的一般问题就解决了。

**例 6.8** 半径为  $R$  的均质轮在竖直平面内沿水平面无滑动滚动, 碰到一个高为  $h$  的障碍物 ( $h < R$ )。设碰撞时没有摩擦, 恢复系数为  $\chi$ 。试证明: 如果  $h > \left(1 - \sqrt{\frac{\chi}{1 + \chi}}\right) R$ , 则无论碰撞前轮心速度为多大, 轮都无法翻越障碍。

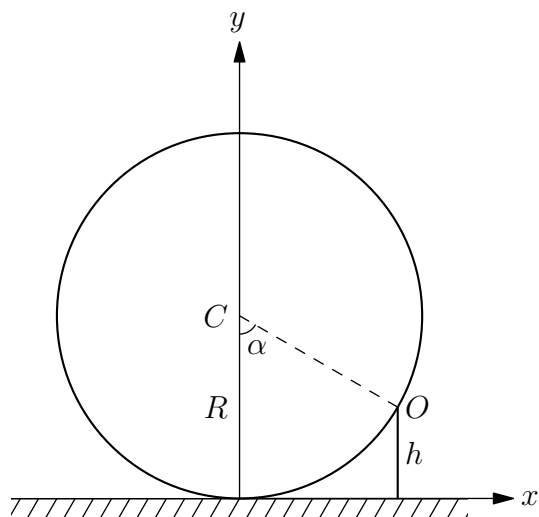


图 6.8: 例 6.8

**解** 设  $\alpha$  为轮心  $C$  到障碍物最高点  $O$  连线与竖直方向的夹角。设碰撞前轮心速度为  $v$ , 碰撞后轮子的质心速度分量分别为  $v_x^+$  和  $v_y^+$ , 由于碰撞时没有摩擦, 因此撞击冲量沿  $\overrightarrow{OC}$  方向, 所以碰撞后角速度不变。由此, 根据撞击动量定理和恢复系数关系, 可得如下方程

$$\begin{cases} m(v_x^+ - v) = -J \sin \alpha \\ mv_y^+ = J \cos \alpha \\ -v_x^+ \sin \alpha + v_y^+ \cos \alpha = \chi v \sin \alpha \end{cases}$$

由此可解得

$$J = (1 + \chi)mv \sin \alpha, \quad v_x^+ = v [1 - (1 + \chi) \sin^2 \alpha], \quad v_y^+ = (1 + \chi)v \sin \alpha \cos \alpha$$

如果  $v_x^+ < 0$  则轮不能翻越障碍物, 此时有  $(1 + \chi) \sin^2 \alpha > 1$ , 又由于

$$\sin^2 \alpha = \frac{R^2 - (R - h)^2}{R^2}$$

所以可有

$$\frac{R^2 - (R - h)^2}{R^2} > \frac{1}{1 + \chi}$$

即

$$h > \left(1 - \sqrt{\frac{\chi}{1 + \chi}}\right) R$$

### 6.4.3 光滑刚体碰撞的动能变化

对每个刚体应用式(6.17)的结论, 可得

$$\begin{aligned} \Delta T_k &= T_k^+ - T_k^- = \frac{1}{2} \left( \frac{J_k^2}{m_k} + \frac{K_{x_k}^2}{I_{x_k}} + \frac{K_{y_k}^2}{I_{y_k}} + \frac{K_{z_k}^2}{I_{z_k}} \right) + (\mathbf{J}_k \cdot \mathbf{v}_k^- + \mathbf{K}_k \cdot \boldsymbol{\omega}_k^-) \\ &= \frac{J^2}{2} \left( \frac{1}{m_k} + \frac{\xi_k^2}{I_{x_k}} + \frac{\eta_k^2}{I_{y_k}} + \frac{\zeta_k^2}{I_{z_k}} \right) + J (\mathbf{v}_k^- + \boldsymbol{\omega}_k^- \times \overrightarrow{C_k O_k}) \cdot \mathbf{n}_k \end{aligned}$$

由于  $\mathbf{v}_k^- + \boldsymbol{\omega}_k^- \times \overrightarrow{C_k O_k} = \mathbf{v}_{O_k}^-$ , 所以有两个刚体的动能改变量为

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{1}{2} \mu^2 J^2 + J(\mathbf{v}_{O_1} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_{O_2}^- \cdot \mathbf{n}_2)$$

将撞击冲量的大小(6.38)代入可得

$$\Delta T = -\frac{(1 - \chi^2)}{2\mu^2} v_{rn}^2 \quad (6.39)$$

由此可以看出, 只有当碰撞是完全弹性 ( $\chi = 1$ ) 时, 两个刚体动能之和不变, 其余情况下都会有动能损失。

### 6.4.4 两个光滑刚体的对心正碰撞

垂直于两个刚体接触点公切面并过接触点的直线称为**碰撞线**。如果碰撞前质心的速度  $\mathbf{v}_k^-$  平行于碰撞线, 这种情况称为**正碰撞**。对于光滑刚体的碰撞, 碰撞前后速度的切向分量不变, 因此在正碰撞的情况下, 碰撞后的速度  $\mathbf{v}_k^+$  也平行于碰撞线。

如果碰撞前刚体的质心位于碰撞线上, 则称为**对心碰撞**。在对心碰撞的情形下, 碰撞冲量对质心的矩  $\mathbf{K}_k = \overrightarrow{C_k O_k} \times \mathbf{J}_k$  等于零, 此时  $\xi_k = \eta_k = \zeta_k = 0$ 。根据式(6.32)可知, 在对心碰撞的情形下, 两个刚体的角速度不变。

将碰撞线的正方向取为刚体  $B_2$  的内法向  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ , 设  $v_k^-$  和  $v_k^+$  ( $k = 1, 2$ ) 是刚体  $B_2$  碰撞前后质心的速度在碰撞线上的投影。由于此时有  $\xi_k = \eta_k = \zeta_k = 0$ , 所以根据式(6.35)可得

$$\mu^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad (6.40)$$

将这个结果代入式(6.38)可得碰撞冲量为

$$J = (1 + \chi) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{rn} = (1 + \chi) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1^- - v_2^-) \quad (6.41)$$



再对每个刚体应用动量定理, 可得

$$\begin{cases} m_1(v_1^+ - v_1^-) = -J \\ m_2(v_2^+ - v_2^-) = J \end{cases} \quad (6.42)$$

由此可得刚体碰撞后的质心速度为

$$\begin{cases} v_1^+ = \frac{(m_1 - \chi m_2)v_1^- + m_2(1 + \chi)v_2^-}{m_1 + m_2} \\ v_2^+ = \frac{m_1(1 + \chi)v_1^- + (m_2 - \chi m_1)v_2^-}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (6.43)$$

再利用式(6.39)可得碰撞前后动能的变化为

$$\Delta T = -\frac{1}{2}(1 - \chi^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1^- - v_2^-)^2 \quad (6.44)$$

针对这个结果, 考虑两种特殊的理想情况:

1. 完全弹性碰撞 ( $\chi = 1$ ): 由式(6.44)可知这种情况下没有动能损失 ( $\Delta T = 0$ ), 根据式(6.43)可得撞击后的速度为

$$\begin{cases} v_1^+ = \frac{(m_1 - m_2)v_1^- + 2m_2v_2^-}{m_1 + m_2} \\ v_2^+ = \frac{2m_1v_1^- + (m_2 - m_1)v_2^-}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (6.45)$$

再根据式(6.41)可得撞击冲量为

$$J = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1^- - v_2^-) \quad (6.46)$$

由此可以看出, 如果两个刚体质量相等, 则有  $v_1^+ = v_2^-$ ,  $v_2^+ = v_1^-$ , 即碰撞前后两个刚体的质心速度互相交换。理想气体分子就是以这样的方式碰撞并传递动量。

2. 完全非弹性碰撞 ( $\chi = 0$ ): 由式(6.43)可得

$$v_1^+ = v_2^+ = \frac{m_1 v_1^- + m_2 v_2^-}{m_1 + m_2} \quad (6.47)$$

即碰撞后两个刚体的质心速度相等。这种情况下的动能损失为

$$\Delta T = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1^- - v_2^-)^2 \quad (6.48)$$

根据式(6.41)可得撞击冲量为

$$J = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1^- - v_2^-) \quad (6.49)$$

为完全弹性碰撞撞击冲量的一半。

## 6.5 撞击运动的微分变分原理

### 6.5.1 撞击运动的动力学普遍方程

考虑一个由  $n$  个质点组成的系统, 并假设系统具有完整约束

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (6.50)$$

和线性非完整约束

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i + A_{j0} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k') \quad (6.51)$$

其中矢量函数  $\mathbf{A}_{ji}$  和标量函数  $A_{j0}$  都是  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t$  的函数。由于撞击冲量  $\mathbf{J}_i$  的作用, 或者突加新的约束, 或者解除部分或全部约束, 或者上述情况中若干种同时出现时, 系统都将产生撞击运动。

对完整约束(6.50)求时间的导数并与非完整约束合并可得约束对系统速度的限制为

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i + B_{j0} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l) \quad (6.52)$$

其中矢量函数  $\mathbf{B}_{ji}$  和标量函数  $B_{j0}$  都是  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t$  的函数,  $l$  表示完整约束和非完整约束的总数。如果撞击运动由给定撞击冲量产生且撞击时系统结构不发生变化, 则  $l = k + k'$ 。如果撞击时系统结构发生改变(即约束数改变), 则  $l$  不等于  $k + k'$ 。

如果约束是定常的, 那么式(6.52)中  $B_{j0} \equiv 0$ , 而且函数  $\mathbf{B}_{ji}$  不显含时间。现在考虑式(6.52)中  $B_{j0} \equiv 0$ , 但函数  $\mathbf{B}_{ji}$  可以显含时间的情况。在这种情况下, 约束同时允许可能速度为  $\mathbf{v}_i^*$  和  $-\mathbf{v}_i^*$  的可能运动, 因此这种约束称为可逆约束。

由式(6.52)可得系统虚位移满足:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{ji} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l) \quad (6.53)$$

由于撞击时间极短, 可以认为矢量函数  $\mathbf{B}_{ji}$  在撞击过程中为常量。由此可以认为虚位移  $\delta \mathbf{r}_i$  在从  $t = t_0$  到  $t = t_0 + \tau$  的撞击时间内不依赖于时间。

设  $\mathbf{R}_i$  是作用在质点  $m_i$  上的约束反力的合力, 由于撞击过程中, 与撞击力相比其余力皆可忽略, 故在撞击过程中任何约束都可以认为是理想的, 即有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (6.54)$$

用  $\mathbf{J}_{iR}$  表示作用在质点  $m_i$  上的撞击约束冲量, 即

$$\mathbf{J}_{iR} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{R}_i dt \quad (6.55)$$

那么根据式(6.54)并考虑到  $\delta \mathbf{r}_i$  与时间无关, 可得

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{J}_{iR} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (6.56)$$

设  $\mathbf{J}_i$  是作用在质点  $m_i$  上的主动撞击冲量, 那么撞击运动基本方程(6.2)可以写作

$$m_i \Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_{iR} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.57)$$

将上式两端点乘  $\delta \mathbf{r}_i$  并对  $i$  求和, 利用式(6.56)可得

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{J}_i - m_i \Delta \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (6.58)$$

式(6.58)即为撞击运动的动力学普遍方程。与此前的动力学普遍方程不同的是，撞击运动的动力学普遍方程是代数方程组，而不是微分方程组。

对于虚位移  $\delta \mathbf{r}_i$ ，在撞击时系统结构不变的情况下，虚位移  $\delta \mathbf{r}_i$  与普通机械运动中的虚位移具有相同的含义。如果在撞击时，系统结构发生了变化，则撞击前后的虚位移是不同的。设  $\delta \mathbf{r}_i^-$  是撞击前的虚位移，而  $\delta \mathbf{r}_i^+$  是撞击后的虚位移，如果系统在撞击后增加了新的约束，那么显然撞击前的虚位移集合包含了撞击后的虚位移集合。那么为了使得式(6.58)的虚位移适用于从  $t = t_0$  到  $t = t_0 + \tau$  的整个撞击过程，必须令  $\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_i^+$ 。如果系统在撞击后解除了一部分或全部约束，此时撞击前的虚位移集合则包含于撞击后的虚位移集合，在式(6.58)中应取  $\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_i^-$ 。

**例 6.9** 如图6.9所示，四根铰接在一起的无质量杆组成平行四边形  $OABC$ ，铰链  $O$  固定不动，铰链  $A$  和  $C$  处各连接了一个质量为  $m$  的质点。沿着对角线  $BO$  作用一个撞击冲量  $\mathbf{J}$ 。记撞击发生时  $AO$  与对角线夹角为  $\alpha$ ，求撞击后铰链  $A$  和  $C$  的速度。

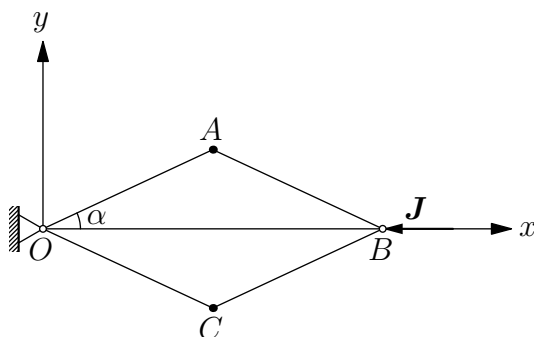


图 6.9: 例 6.9

**解** 在这种情况下，动力学普遍方程(6.58)写为

$$\mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{r}_B - m \Delta \mathbf{v}_A \cdot \delta \mathbf{r}_A - m \Delta \mathbf{v}_C \cdot \delta \mathbf{r}_C = 0$$

在如图6.9所示的坐标系中，可以将各点的坐标表示为

$$\mathbf{r}_A = (l \cos \alpha, l \sin \alpha), \quad \mathbf{r}_B = (2l \cos \alpha, 0), \quad \mathbf{r}_C = (l \cos \alpha, -l \sin \alpha)$$

所以有

$$\delta \mathbf{r}_A = (-l \sin \alpha \delta \alpha, l \cos \alpha \delta \alpha), \quad \delta \mathbf{r}_B = (-2l \sin \alpha \delta \alpha, 0), \quad \delta \mathbf{r}_C = (-l \sin \alpha \delta \alpha, -l \cos \alpha \delta \alpha)$$

由于系统在撞击前速度为零，并考虑到

$$\mathbf{v}_A = (-l \dot{\alpha} \sin \alpha, l \dot{\alpha} \cos \alpha), \quad \mathbf{v}_C = (-l \dot{\alpha} \sin \alpha, -l \dot{\alpha} \cos \alpha)$$

将这些关系代入动力学普遍方程中，可得

$$\dot{\alpha} = \frac{J \sin \alpha}{ml}$$

由此可得铰链  $A$  和  $C$  的速度分量

$$v_{Ax} = v_{Cx} = -\frac{J \sin^2 \alpha}{m}, \quad v_{Ay} = -v_{Cy} = \frac{J \sin 2\alpha}{m}$$

## 6.5.2 Jordan 原理

由于系统在撞击运动过程中,各质点的坐标不改变,只有速度发生改变,因此可以利用 Jordan 原理(见第2.4.2节)将撞击运动的动力学普遍方程(6.58)改写为更易于应用的形式。

根据 Jordan 原理(2.32)可得

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{J}_i - m_i \Delta \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i = 0 \quad (6.59)$$

其中  $\Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-$ , 速度变分  $\delta \mathbf{v}_i$  根据式(6.53)可得其满足

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{ji} \cdot \delta \mathbf{v}_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l) \quad (6.60)$$

式(6.59)即为撞击运动的 Jordan 原理。

如果系统的约束是可逆约束,即在式(6.52)中有  $\mathbf{B}_{j0} \equiv 0$ , 那么可能速度满足

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l) \quad (6.61)$$

此时可能速度满足的关系式(6.61)与速度变分满足的关系式(6.60)完全相同,所以在式(6.59)中可以用可能速度  $\mathbf{v}_i$  替代速度变分  $\delta \mathbf{v}_i$ , 此时 Jordan 原理相应地写成

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{J}_i - m_i \Delta \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad (6.62)$$

其中  $\Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-$ 。

如果撞击时系统出现新的可逆理想约束,那么在式(6.62)中  $\mathbf{v}_i$  是增加约束后质点  $m_i$  的可能速度。

如果撞击时系统有可逆理想约束被解除,那么在式(6.62)中  $\mathbf{v}_i$  是解除约束前质点  $m_i$  的可能速度。

**例 6.10** 利用 Jordan 原理求解例6.9中杆的角速度。

**解** 由于撞击前速度  $\mathbf{v}_i^- = \mathbf{0}$ , 因此  $\Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^+$ , 根据式(6.62)可得

$$-mv_A^2 + Jv_B - mv_C^2 = 0$$

设撞击后杆的角速度为  $\omega$ , 则由此可得系统中各点的速度为

$$v_A = \omega l, \quad v_B = 2\omega l \sin \alpha, \quad v_C = \omega l$$

由此可得

$$\omega = \frac{J \sin \alpha}{ml}$$

## 6.5.3 Gauss 原理

与第2.4.3.1节中的处理类似,设  $\mathbf{v}_i^-$  和  $\mathbf{v}_i^+$  是撞击前和撞击后系统内质点  $m_i$  的速度,  $\mathbf{v}_i$  是撞击结束时质点  $m_i$  的可能速度, 定义函数

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^- - \frac{\mathbf{J}_i}{m_i} \right)^2 \quad (6.63)$$

称为**撞击拘束度**，则撞击后系统内各质点的速度  $\mathbf{v}_i^+$  使得函数  $G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  取最小值。

为了说明这一点，记  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^+ + \delta \mathbf{v}_i$ ，并考虑

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) - G(\mathbf{v}_1^+, \dots, \mathbf{v}_n^+) = - \sum_{i=1}^n (\mathbf{J}_i - m_i \Delta \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \delta \mathbf{v}_i^2 \quad (6.64)$$

上式第一项根据 Jordan 原理可知恒为零，而第二项对于非真实运动必然至少有一个  $\delta \mathbf{v}_i$  非零，因此有  $G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) > G(\mathbf{v}_1^+, \dots, \mathbf{v}_n^+)$ ，即真实的撞击后速度使得函数  $G$  取最小值。由于系统的可能速度需要满足式(6.52)，因此撞击运动的 Gauss 原理是一个约束极值问题。

将式(6.63)展开，并去掉与速度  $\mathbf{v}_i$  无关的常数项可以将撞击拘束度改为如下的等价形式

$$G'(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^2 - \sum_{i=1}^n (\mathbf{J}_i + m_i \mathbf{v}_i^-) \cdot \mathbf{v}_i \quad (6.65)$$

真实的撞击后速度  $\mathbf{v}_i^+$  使得函数  $G'$  取最小值。

**例 6.11** 如图6.10所示，质量为  $m$ ，长为  $l$  的均匀细杆  $AB$  和  $BC$  用铰链  $B$  相连接。处于静止状态时，两杆共线，求在  $C$  点受到垂直于杆的撞击冲量  $\mathbf{J}$  作用后两杆的运动状态。

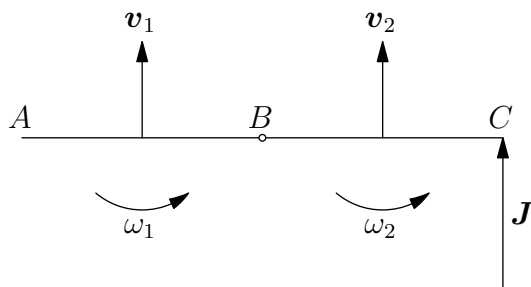


图 6.10: 例 6.11

**解** 考虑到系统在撞击前是静止的，故根据式(6.65)可得

$$G' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^2 - \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{v}_i = T - J v_C$$

其中  $T$  为两杆的动能， $v_C$  是  $C$  点的速度。设两杆的质心速度分别为  $v_1$  和  $v_2$ ，角速度分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ，则有

$$T = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m l^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m l^2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{24} m l^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

以及

$$v_C = v_2 + \omega_2 \frac{l}{2}$$

但速度  $v_1, v_2$  和角速度  $\omega_1, \omega_2$  之间只有三个是相互独立的，因为两杆上的  $B$  点速度应该相同，即

$$v_1 + \omega_1 \frac{l}{2} = v_2 - \omega_2 \frac{l}{2}$$

考虑到上面各式，可将撞击拘束度函数写为

$$G'(v_2, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} m \left[ \left( v_2 - \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) l \right)^2 + v_2^2 \right] + \frac{1}{24} m l^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) - J \left( v_2 + \frac{1}{2} \omega_2 l \right)$$

这个函数的驻点方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial G'}{\partial v_2} = m \left[ 2v_2 - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)l \right] - J = 0 \\ \frac{\partial G'}{\partial \omega_1} = -\frac{1}{2}ml \left[ v_2 - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)l \right] + \frac{1}{12}ml^2\omega_1 = 0 \\ \frac{\partial G'}{\partial \omega_2} = -\frac{1}{2}ml \left[ v_2 - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)l \right] + \frac{1}{12}ml^2\omega_2 - \frac{1}{2}Jl = 0 \end{cases}$$

由此解得

$$v_2 = \frac{5J}{4m}, \quad \omega_1 = -\frac{3J}{2ml}, \quad \omega_2 = \frac{9J}{2ml}$$

再由此可得

$$v_1 = -\frac{J}{4m}$$

其中  $v_1$  和  $\omega_1$  的负号表示其方向与图6.10所标注方向相反。

**例 6.12** 质量为  $m$  的质点在光滑曲面  $f(x, y, z) = 0$  上静止, 在质点上作用撞击冲量  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ , 求撞击之后质点的速度。

**解** 记质点撞击之后的速度为  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , 则撞击约束度为

$$G = \frac{1}{2}m \left[ \left( v_x - \frac{J_x}{m} \right)^2 + \left( v_y - \frac{J_y}{m} \right)^2 + \left( v_z - \frac{J_z}{m} \right)^2 \right]$$

对速度分量的约束为

$$\frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z = 0$$

这是约束极值问题, 构造 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} F &= G - \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z \right) \\ &= \frac{1}{2}m \left[ \left( v_x - \frac{J_x}{m} \right)^2 + \left( v_y - \frac{J_y}{m} \right)^2 + \left( v_z - \frac{J_z}{m} \right)^2 \right] - \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z \right) \end{aligned}$$

极值条件给出

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial v_x} = m \left( v_x - \frac{J_x}{m} \right) - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v_y} = m \left( v_y - \frac{J_y}{m} \right) - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v_z} = m \left( v_z - \frac{J_z}{m} \right) - \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

据此可得撞击后速度满足的方程为

$$\begin{cases} mv_x = J_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ mv_y = J_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ mv_z = J_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

这组方程和约束方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z = 0$$

共同决定了撞击后的速度  $v_x, v_y, v_z$  和约束乘子  $\lambda$ 。

例 6.13 长为  $l$  的均质细杆水平向下降落时, 碰到点障碍物, 碰撞点距离杆两端分别为  $\frac{3}{4}l$  和  $\frac{1}{4}l$  (如图 6.11 所示)。假设碰撞是完全非弹性的, 求碰撞后杆的运动状态。

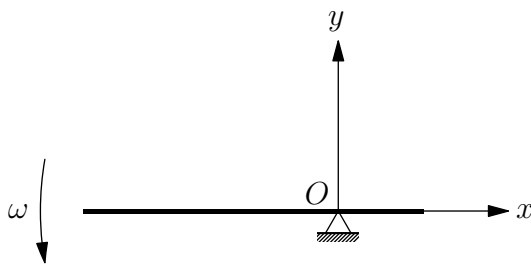


图 6.11: 例 6.13

解 完全非弹性碰撞之后, 杆绕点  $O$  作定点转动, 其运动状态由撞击后的角速度  $\omega$  唯一确定。记在碰撞前杆的质心速度为  $v$ , 则根据式(6.65)可得

$$G' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^- \cdot \mathbf{v}_i = T - m v_C v$$

其中  $T$  为杆的动能,  $v_C = \omega \frac{l}{4}$  为质心速度。考虑到

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{12} m l^2 + m \left( \frac{l}{4} \right)^2 \right] \omega^2 = \frac{7}{96} m l^2 \omega^2$$

所以

$$G' = \frac{7}{96} m l^2 \omega^2 - \frac{1}{4} m l v \omega$$

根据  $\frac{\partial G'}{\partial \omega} = 0$  可得

$$\omega = \frac{12v}{7l}$$

### 6.5.4 撞击运动的 Lagrange 方程

设由  $n$  个质点组成的理想完整系统有  $s$  个自由度,  $q_1, q_2, \dots, q_s$  为其广义坐标, 在某时刻  $t_0$  系统受到撞击冲量  $\mathbf{J}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 撞击作用时间为  $\tau$ 。系统的撞击问题可以用广义坐标表述为: 已知系统撞击前的广义速度  $\dot{q}_\alpha^-$ , 求撞击后系统的广义速度  $\dot{q}_\alpha^+$ 。

首先将撞击运动的动力学普遍方程(6.58)改写为广义坐标形式。首先考虑其第一项, 即

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \cdot \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \quad (6.66)$$

定义

$$\mathcal{J}_\alpha = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (6.67)$$

称为相应于广义坐标  $q_\alpha$  的广义冲量。

根据撞击冲量的定义式(6.1)可得

$$\mathcal{J}_\alpha = \sum_{i=1}^n \left( \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}_i dt \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

由于  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}$  只与坐标有关, 在撞击过程中变化极小, 因此可以将其放入积分号内, 并利用广义力的定义式(2.42)可得

$$\mathcal{J}_\alpha = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} Q_\alpha dt \quad (6.68)$$

然后考虑撞击运动的动力学普遍方程(6.58)的第二项, 即

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-) \cdot \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i^+ - \mathbf{v}_i^-) \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha$$

此处利用了经典 Lagrange 关系(2.20)。由于

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^+ \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)^+, \quad \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^- \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)^- \quad (6.69)$$

其中的上标  $-$  和  $+$  表示撞击前和撞击后的值。所以有

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)^+ - \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)^- \quad (6.70)$$

利用式(6.66)和(6.70)可将撞击运动的动力学普遍方程(6.58)改写为广义坐标的形式:

$$\sum_{\alpha=1}^s \left[ \mathcal{J}_\alpha - \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)^+ + \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)^- \right] \delta q_\alpha = 0 \quad (6.71)$$

对于理想完整系统,  $\delta q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$  之间是互相独立的, 因此有

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)^+ - \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)^- = \mathcal{J}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (6.72)$$

方程(6.72)即为撞击运动的 Lagrange 方程, 其未知数为  $q_1^+, q_2^+, \dots, q_s^+$ 。与理想完整系统的 Lagrange 方程不同之处在于, 方程(6.72)是代数方程组而非微分方程组。

**例 6.14** 两个质量为  $m$  长为  $l$  的均质细杆组成的双物理摆处于静止状态, 在距离连接两杆的铰链下方  $a$  处作用水平撞击冲量  $\mathbf{J}$ , 求撞击后两杆的角速度。

**解** 取两杆偏离竖直方向的角度  $\theta$  和  $\phi$  为广义坐标, 在此广义坐标下, 两杆的质心坐标分别为

$$\mathbf{r}_{C1} = \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \sin \theta \\ \frac{l}{2} \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{C2} = \begin{pmatrix} l \sin \theta + \frac{l}{2} \sin \phi \\ l \cos \theta + \frac{l}{2} \cos \phi \end{pmatrix}$$

因此, 动能可以表示为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \left[ \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{4} \cos^2 \theta + \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{4} \sin^2 \theta + \left( l \dot{\theta} \cos \theta + \frac{l \dot{\phi}}{2} \cos \phi \right)^2 + \left( l \dot{\theta} \sin \theta + \frac{l \dot{\phi}}{2} \sin \phi \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \\ &= \frac{1}{2} m l^2 \left( \frac{4}{3} \dot{\theta}^2 + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\phi - \theta) + \frac{1}{3} \dot{\phi}^2 \right) \end{aligned}$$



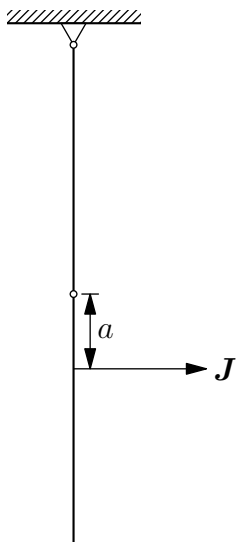


图 6.12: 例 6.14

撞击冲量的作用点位矢可以表示为  $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} l \sin \theta + a \sin \phi \\ l \cos \theta + a \cos \phi \end{pmatrix}$ , 所以广义冲量可以根据式(6.67)计算为

$$\mathcal{J}_\theta = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \theta} = Jl \cos \theta$$

$$\mathcal{J}_\phi = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \phi} = Ja \cos \phi$$

考虑到撞击发生时  $\theta = \phi = 0$ , 以及撞击前的速度为  $\dot{\theta}^- = \dot{\phi}^- = 0$ , 根据撞击运动的 Lagrange 方程(6.72)可得方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ml^2 \left( \frac{8}{3}\dot{\theta}^+ + \dot{\phi}^+ \right) = Jl \\ \frac{1}{2}ml^2 \left( \dot{\theta}^+ + \frac{1}{2}\dot{\phi}^+ \right) = Ja \end{cases}$$

由此解得

$$\dot{\theta}^+ = \frac{6J(2l - 3a)}{7ml^2}, \quad \dot{\phi}^+ = \frac{6J(8a - 3l)}{7ml^2}$$

**例 6.15** 质量为  $m$  长为  $l$  的均质细杆  $AB$  在平面  $xOy$  平面内运动 (如图6.13所示), 在某时刻端点  $A$  与  $Ox$  轴发生碰撞, 碰撞时杆与  $Ox$  轴夹角为  $\alpha$ , 其质心速度分量分别为  $\dot{x}^-$ ,  $\dot{y}^-$ , 而角速度为  $\dot{\phi}^-$ 。假设  $Ox$  轴是绝对光滑的, 碰撞是完全非弹性的, 求碰撞后杆的运动状态。

**解** 取杆的质心坐标  $x, y$  和杆与  $Ox$  的夹角  $\phi$  为广义坐标, 则杆的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{24}ml^2\dot{\phi}^2$$

由于  $Ox$  轴是绝对光滑的, 因此  $A$  点所受的约束撞击冲量与  $Ox$  轴垂直, 将其大小设为  $J$ 。

$A$  点位矢用广义坐标可以表示为  $\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} x - \frac{l}{2} \cos \phi \\ y - \frac{l}{2} \sin \phi \end{pmatrix}$ , 因此杆所受的广义约束撞击冲量分

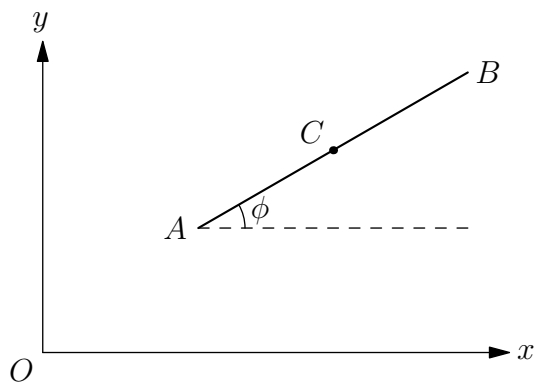


图 6.13: 例 6.15

量分别为

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_x &= \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial x} = 0 \\ \mathcal{J}_y &= \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial y} = J \\ \mathcal{J}_\phi &= \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial \phi} = -\frac{1}{2}Jl \cos \phi\end{aligned}$$

考虑到撞击发生时  $\phi = \alpha$ , 根据撞击运动的 Lagrange 方程(6.72)可得方程组

$$\begin{cases} m(\dot{x}^+ - \dot{x}^-) = 0 \\ m(\dot{y}^+ - \dot{y}^-) = J \\ \frac{1}{12}ml^2(\dot{\phi}^+ - \dot{\phi}^-) = -\frac{1}{2}Jl \cos \alpha \end{cases}$$

这是关于四个未知数  $\dot{x}^+, \dot{y}^+, \dot{\phi}^+$  和  $J$  的方程组, 再考虑到碰撞为完全非弹性碰撞, 因此碰撞后  $A$  点速度的  $y$  分量应为零, 即有

$$\dot{y}^+ - \frac{1}{2}l\dot{\phi}^+ \cos \alpha = 0$$

结合上面各式, 可以解得约束撞击冲量的大小

$$J = \frac{m(l\dot{\phi}^- \cos \alpha - 2\dot{y}^-)}{2(1 + 3 \cos^2 \alpha)}$$

以及撞击后杆的运动状态

$$\dot{x}^+ = \dot{x}^-, \quad \dot{y}^+ = \frac{(l\dot{\phi}^- + 6\dot{y}^- \cos \alpha) \cos \alpha}{2(1 + 3 \cos^2 \alpha)}, \quad \dot{\phi}^+ = \frac{l\dot{\phi}^- + 6\dot{y}^- \cos \alpha}{l(1 + 3 \cos^2 \alpha)}$$

## 第七章 非惯性系

由 Newton 第一定律定义的坐标系称为惯性系，在惯性系中 Newton 第二定律成立。

对实际问题，有时在非惯性系中描述运动比较方便。为使非惯性系的运动方程与 Newton 方程形式一致，必须引入虚拟的惯性力。

### 7.1 非惯性系的 Newton 第二定律

#### 7.1.1 不同参考系的速度、加速度变换

设  $S$  和  $S'$  是两个不同的参考系，设  $S$  是惯性系，而  $S'$  系相对与  $S$  系作一般运动。此处类似于刚体的一般运动， $S$  系相当于刚体运动中的空间系，而  $S'$  系即为固连于刚体的本系统。根据 Chasles 定理5.3.1， $S'$  系相对于  $S$  系的运动既可以分解为  $S'$  系原点  $O'$  相对于  $S$  系的平动，与  $S'$  系相对于原点同样在  $O'$  但坐标轴都与  $S$  系平行的参考系（相当于刚体运动中的平动系）的定点转动，如图7.1所示。

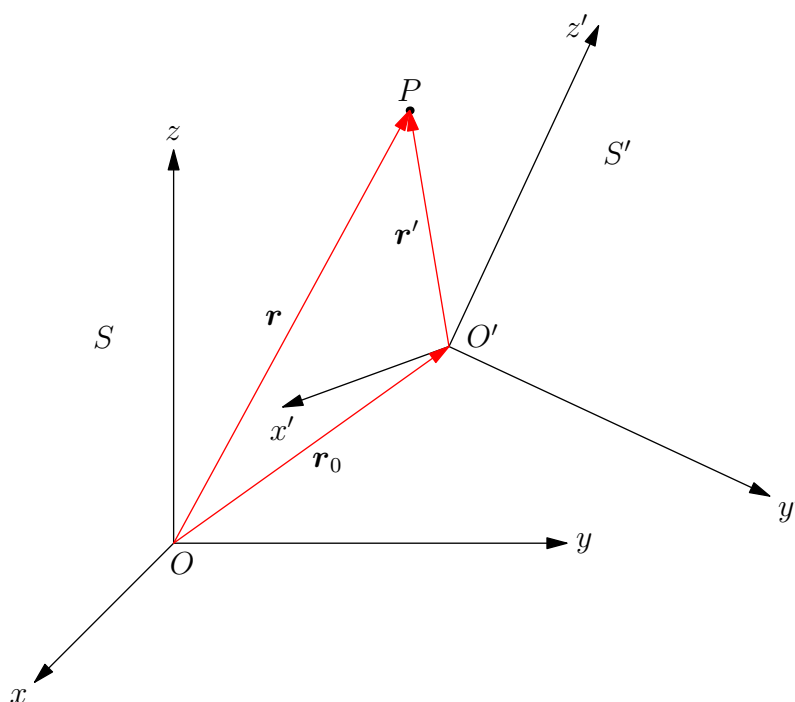


图 7.1: 惯性参考系与非惯性参考系

设  $S'$  系相对  $S$  系的平动为  $\mathbf{r}_0(t)$ ，转动角速度为  $\boldsymbol{\omega}_0(t)$ ，首先考虑任意矢量  $\mathbf{A}$  在  $S'$  系

下的分量表示有

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}' \tilde{\mathbf{A}}$$

式中,  $\mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1 \ \mathbf{e}'_2 \ \mathbf{e}'_3)$  为  $S'$  系的基矢量矩阵,  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  为  $S'$  系的基矢量,  $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix}$

为  $\mathbf{A}$  在  $S'$  系中的坐标。根据与第5.1.4节类似的方法, 可有

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}' \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{e} \mathbf{U} \tilde{\mathbf{A}}$$

式中,  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$  为  $S$  系的基矢量矩阵,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  为  $S$  系的基矢量,  $\mathbf{U}$  为  $S$  系与  $S'$  系基矢量之间的旋转变换矩阵, 即

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e} \mathbf{U}$$

因此可有

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{e}' \frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} + \mathbf{e} \dot{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{e}' \frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} + \mathbf{e}' \mathbf{U}^T \dot{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{A}}$$

记  $\frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{A}'_i \mathbf{e}'_i = \frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt}$ , 再根据第5.1.4节中的相关结论, 有  $\mathbf{e}' \mathbf{U}^T \dot{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{A}$ 。因此可有

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{A} \quad (7.1)$$

式中  $\frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{A}'_i \mathbf{e}'_i$  称为相对变化率,  $\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{A}$  称为转动牵连变化率, 与式(5.66)的结果相同。

对于  $S$  系和  $S'$  系, 首先有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

对上式求时间  $t$  的导数, 并对矢量  $\mathbf{r}'$  应用式(7.1)可有

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}' \quad (7.2)$$

式中  $\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$  称为相对速度,  $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$  称为平动牵连速度,  $\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}'$  称为转动牵连速度。

再对式(7.2)求时间  $t$  的导数, 可有

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'$$

考虑到

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0 = \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0}{dt}$$

由此可有

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}' \quad (7.3)$$

式中  $\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt}$  称为相对加速度,  $\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}$  称为平动牵连加速度,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}'$  称为转动牵连加速度,  $\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')$  称为向轴加速度,  $2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'$  称为 Coriolis 加速度。

## 7.1.2 非惯性系的运动方程与惯性力

$S$  系为惯性系, 在其中 Newton 第二定律成立, 即有

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

将此方程在非惯性系  $S'$  系中投影, 可有

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}')$$

为了使得非惯性系中 Newton 第二定律与惯性系中具有相同的形式, 将上式写作

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' \quad (7.4)$$

式中

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 - m\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}' \quad (7.5)$$

此处式(7.5)中除  $\mathbf{F}$  项外的其它项即称为惯性力, 其中  $-m\mathbf{a}_0$  称为平动牵连惯性力,  $-m\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}'$  称为转动牵连惯性力,  $-m\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')$  称为惯性离心力,  $-2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'$  称为 Coriolis 惯性力。

## 7.2 非惯性系的 Lagrange 动力学

### 7.2.1 非惯性系质点运动的 Lagrange 函数

在非惯性系中, 将广义坐标取为非惯性系中的坐标  $x', y', z'$ , 则有

$$\mathbf{r}(x', y', z', t) = \mathbf{r}_0(t) + \sum_{i=1}^3 x'_i \mathbf{e}'_i(t)$$

因此可得

$$\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x'_i} \dot{x}'_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0(t) + \boldsymbol{\omega}_0(t) \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_0(t) + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

即有 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)^2 + 2\mathbf{v}_0 \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + v_0^2 \right] - U(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \\ &= \frac{1}{2}m \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 + \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}') - m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - U(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \end{aligned}$$

项  $\frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2$  不含有广义坐标和广义速度, 因此对 Lagrange 方程无贡献, 可以略去。项  $\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}')$  是广义坐目标函数对时间的全导数, 同样对 Lagrange 方程无贡献, 也可以略去。由此, Lagrange 函数简化为

$$L' = \frac{1}{2}m \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)^2 - m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - U(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$$

由于  $\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}_0(t) \times \mathbf{r}'$ , 可有

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2}m(\mathbf{v}'^2 + 2\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2) - m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - U(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 - \left( U + m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}' \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

定义非惯性系动能

$$T' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 \quad (7.7)$$

和非惯性系等效势能

$$U' = U + m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}' \quad (7.8)$$

则在非惯性系中, Lagrange 函数与惯性系具有相同的形式

$$L' = T' - U'$$

非惯性系等效势能中, 不仅包括真实主动力的势, 还包括虚拟惯性力的势。其中

$$U_1 = m\mathbf{a}_0(t) \cdot \mathbf{r}', \quad U_2 = -\frac{1}{2}m[\boldsymbol{\omega}_0(t) \times \mathbf{r}']^2$$

是速度无关势, 其对应的力分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_1 &= -\frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}'} = -m\mathbf{a}_0 \\ \mathbf{F}'_2 &= -\frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{r}'} = -m\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \end{aligned}$$

即  $U_1$  为平动牵连惯性势,  $U_2$  为惯性离心势。而

$$U_3 = -m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}' = -m(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}_0) \cdot \mathbf{r}'$$

是速度相关势, 其对应的力为

$$\mathbf{F}'_3 = \frac{\tilde{d}}{dt} \frac{\partial U_3}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{\partial U_3}{\partial \mathbf{r}'} = -m\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'$$

即  $U_3$  为转动牵连-Coriolis 惯性势。

## 7.2.2 非惯性系质点运动的 Lagrange 方程

在非惯性系中, Lagrange 函数与惯性系中的 Lagrange 函数具有相同的形式

$$L' = T' - U'$$

其中

$$T' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2, \quad U' = U + m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}'$$

因此, 在非惯性系中, Lagrange 方程也与惯性系中的 Lagrange 方程具有相同的形式, 即

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_i} - \frac{\partial L'}{\partial x'_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.9)$$

或者简单地记作

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = \mathbf{0} \quad (7.10)$$

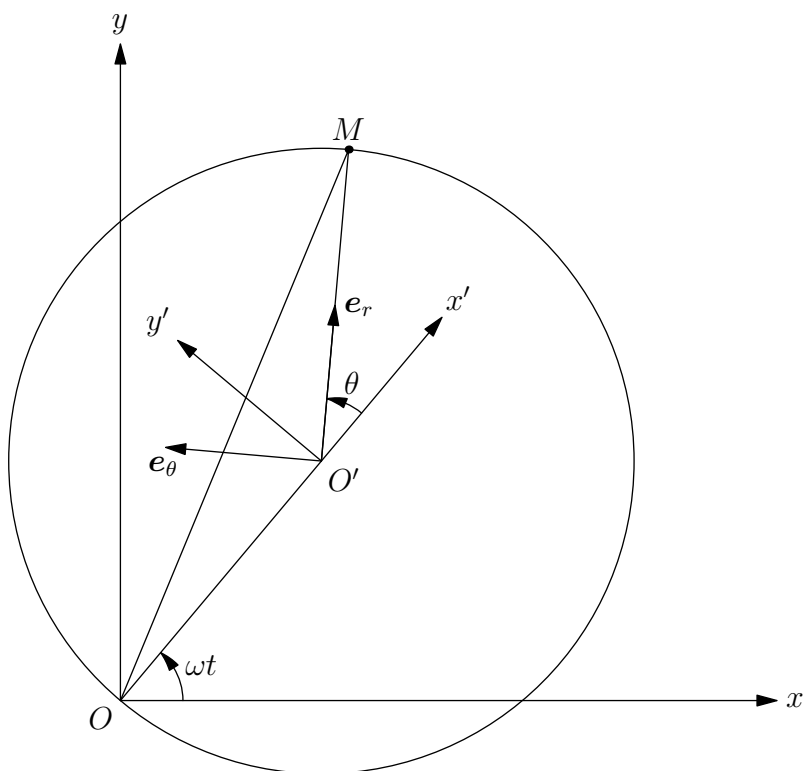


图 7.2: 例 7.1

例 7.1 质量为  $m$  的小环  $M$ ，套在半径为  $R$  的光滑圆圈上，并可沿着圆圈滑动。如圆圈在水平面内以角速度  $\omega$  绕圆圈上某点  $O$  转动，求小环沿圆周的运动微分方程。

解 取两个坐标系  $Oxy$  和  $O'x'y'$ （如图 7.2 所示），则旋转坐标系  $O'x'y'$  相对于固定坐标系  $Oxy$  的角速度为  $\omega$ 。取  $\theta$  作为小环  $M$  的广义坐标，因此在非惯性系  $O'x'y'$  中，系统的 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L'}{\partial \theta} = 0$$

系统的 Lagrange 函数即为式(7.6)

$$L' = \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 - \left( U + m \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}' \right)$$

其中，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 &= \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}' = R \mathbf{e}_r \\ \mathbf{v}' &= \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = R \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{r}_0 = R \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{v}_0 &= \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \frac{d(R \mathbf{e}_1)}{dt} = \frac{d(R \mathbf{e}_1)}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times R \mathbf{e}_1 = R \omega \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_0 &= \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_0 = -R \omega^2 \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

由此可有

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 - \left( U + m \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}' - \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}' \right) \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \left( \dot{\theta}^2 + 2 \omega \dot{\theta} + \omega^2 + 2 \omega^2 \cos \theta \right) \end{aligned}$$

然后由非惯性系的 Lagrange 方程, 即有小环  $M$  的运动微分方程为

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

如果不利用非惯性系, 此题目也同样可解。小环  $M$  的坐标为

$$\begin{cases} x_M = R \cos \omega t + R \cos(\omega t + \theta) \\ y_M = R \sin \omega t + R \sin(\omega t + \theta) \end{cases}$$

因此其速度为

$$\begin{cases} \dot{x}_M = -R\omega \sin \omega t - R(\omega + \dot{\theta}) \sin(\omega t + \theta) \\ \dot{y}_M = R\omega \cos \omega t + R(\omega + \dot{\theta}) \cos(\omega t + \theta) \end{cases}$$

因此系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) = \frac{1}{2}mR^2 [\dot{\theta}^2 + 2\omega\dot{\theta} + 2\omega^2 + 2\omega(\omega + \dot{\theta}) \cos \theta]$$

根据惯性系中理想完整系的 Lagrange 方程(2.59)可得相同的运动微分方程

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

**例 7.2** 直管  $AB$  长为  $l$ , 以匀角速度  $\omega_0$  绕固定点  $O$  在水平面内转动。固定点  $O$  与直管两端的连线互相垂直。管的内壁是光滑的。管内有一质点, 开始时它在  $A$  处, 相对管的速度为  $v'$ , 方向指向  $B$  端。试求解质点的运动, 并求它对管的压力和离管所需的时间。

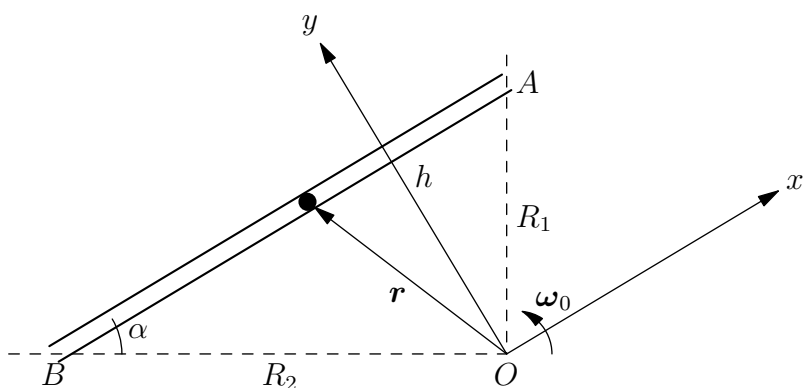


图 7.3: 例 7.2

**解** 取一绕  $O$  点以相同角速度  $\omega_0$  转动的参考系, 如图 7.3 所示, 此参考系为非惯性系。在此坐标系下,  $t$  时刻质点的位矢为

$$\mathbf{r}' = x\mathbf{i} + h\mathbf{j}$$

则质点在非惯性系中的速度和加速度为

$$\mathbf{v}' = \dot{x}\mathbf{i}, \quad \mathbf{a}' = \ddot{x}\mathbf{i}$$

在非惯性系中, 质点受到支持力  $\mathbf{N} = N_y\mathbf{j} + N_z\mathbf{k}$ , 重力  $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k}$  以及惯性力

$$\mathbf{F}'_1 = -m\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}'_2 = -m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}'_3 = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\omega_0^2 \mathbf{r}' = m\omega_0^2(x\mathbf{i} + h\mathbf{j})$$

$$\mathbf{F}'_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = -2m\omega_0 \dot{x}\mathbf{j}$$



根据非惯性系中的 Newton 第二定律  $m\mathbf{a}' = \mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 + \mathbf{F}'_3 + \mathbf{F}'_c$  可得

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m\omega_0 x \\ 0 = N_y + m\omega_0^2 h - 2m\omega_0 \dot{x} \\ 0 = N_z - mg \end{cases}$$

由第一式可解得

$$x = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$$

由初始条件,  $t = 0$  时,  $x = R_1 \sin \alpha = \frac{R_1^2}{l}, \dot{x} = -v'$ , 可得

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{R_1^2}{l} - \frac{v'}{\omega_0} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left( \frac{R_1^2}{l} + \frac{v'}{\omega_0} \right)$$

由此可得

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{R_1^2}{l} - \frac{v'}{\omega_0} \right) e^{\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left( \frac{R_1^2}{l} + \frac{v'}{\omega_0} \right) e^{-\omega_0 t}$$

以及

$$N_y = m\omega_0^2 \left[ \left( \frac{R_1^2}{l} - \frac{v'}{\omega_0} \right) e^{\omega_0 t} - \left( \frac{R_1^2}{l} + \frac{v'}{\omega_0} \right) e^{-\omega_0 t} - h \right], \quad N_z = mg$$

当质点由 B 端离开直管时, 可有

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R_1^2}{l} - \frac{v'}{\omega_0} \right) e^{\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left( \frac{R_1^2}{l} + \frac{v'}{\omega_0} \right) e^{-\omega_0 t} = -\frac{R_2^2}{l}$$

可以解得

$$e^{\omega_0 t} = \frac{-\omega_0 R_2^2 \pm \sqrt{\omega_0^2 R_2^4 - \omega_0^2 R_1^4 + l^2 v'^2}}{\omega_0 R_1^2 - lv'}$$

上式右端为正需要满足  $\frac{R_1^2}{l} - \frac{v'}{\omega_0} > 0$  即  $v' > \frac{\omega_0 R_1^2}{l}$ , 因此离管所需的时间为

$$t = \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{\omega_0 R_2^2 + \sqrt{\omega_0^2 R_2^4 - \omega_0^2 R_1^4 + l^2 v'^2}}{lv' - \omega_0 R_1^2}$$

当质点由 A 端离开直管时, 可有

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R_1^2}{l} - \frac{v'}{\omega_0} \right) e^{\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left( \frac{R_1^2}{l} + \frac{v'}{\omega_0} \right) e^{-\omega_0 t} = \frac{R_1^2}{l}$$

可以解得

$$e^{-\omega_0 t} = \frac{\omega_0 R_1^2 \pm lv'}{\omega_0 R_1^2 - lv'}$$

上式右端为正需要满足  $\omega_0 R_1^2 - lv' > 0$  即  $v' < \frac{\omega_0 R_1^2}{l}$ , 因此离管所需的时间为

$$t = \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{\omega_0 R_1^2 + lv'}{\omega_0 R_1^2 - lv'}$$

## 7.3 地球自转的动力学效应

地球不是一个严格的惯性系，地球自转的角速度为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{s}^{-1} \approx 7.29 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$$

地球的平均半径为  $R = 6.37 \times 10^6 \text{m}$ ，因此由于地球自转所引起的向心加速度

$$a_t \leq \omega^2 R = 0.0338 \text{m/s}^2 = 3 \times 10^{-3} g$$

式中  $g$  为重力加速度。因此在  $g$  起作用的问题中，如果计算精度达到  $10^{-3}$  量级时，必须考虑重力加速度的这一修正。由于地球自转所引起的 Coriolis 加速度为

$$a_C \leq 2\omega_0 v$$

由此引起的线偏离和角偏离分别为

$$\Delta s \leq \frac{1}{2} a_C t^2 = \omega_0 v t, \quad \Delta \theta = \frac{\Delta s}{vt} \leq \omega_0 t$$

对于短时间的运动，由于  $\omega \approx 10 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ ，这一效应可以忽略，但是对于长时间的运动，这一效应就不能忽略了。

地球公转的角速度是地球自转角速度的  $\frac{1}{365}$ ，地球与太阳之间的距离是地球半径的  $2.5 \times 10^4$  倍，因此地球公转的向心力与地球自转的向心力之比为

$$\left( \frac{1}{365} \right)^2 \times 2.5 \times 10^4 \approx 0.2$$

Coriolis 力大小之比为  $\frac{1}{365} \approx 0.03$ 。因此，地球公转引起的非惯性效应比地球自转引起的非惯性效应要小一至两个数量级，一般可忽略。

### 7.3.1 重力加速度 $g$ 随纬度 $\lambda$ 的变化

在纬度为  $\lambda$  处，地面上质量为  $m$  的物体，在地面参考系中受到地球的引力  $\mathbf{F}$  和惯性离心力  $\mathbf{F}_t$ ，实际观察到的重力  $m\mathbf{g}$  是  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{F}_t$  的合力

$$m\mathbf{g} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t$$

如果认为地球是均匀的刚性球体，则  $\mathbf{F}$  的值各地相同，但  $\mathbf{F}_t$  的值随纬度  $\lambda$  而改变，即

$$F_t = mR\omega_0^2 \cos \lambda \quad (7.11)$$

式中  $R$  为地球半径。因此， $m\mathbf{g}$  的大小和方向都随纬度  $\lambda$  而变化，大小的变化反映在重力加速度  $g$  随  $\lambda$  的变化，方向的变化反映在  $m\mathbf{g}$  的方向（即铅直方向）和引力  $\mathbf{F}$  方向（即地球半径的方向）之间的夹角  $\alpha$  随  $\lambda$  的变化。

根据图7.5可有

$$\begin{cases} F_t \sin \lambda = mg \sin \alpha & (7.12a) \\ F \sin \lambda = mg \sin(\lambda + \alpha) & (7.12b) \\ F = mg \cos \alpha + F_t \cos \alpha & (7.12c) \end{cases}$$

将式(7.11)代入式(7.12a)中可得

$$\sin \alpha = \frac{R\omega_0^2 \sin 2\lambda}{2g} \quad (7.13)$$

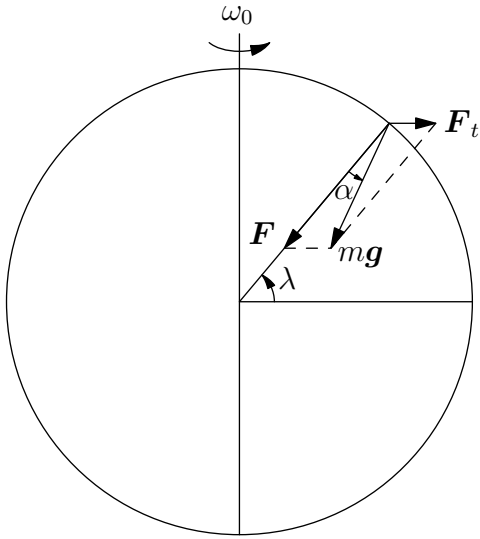
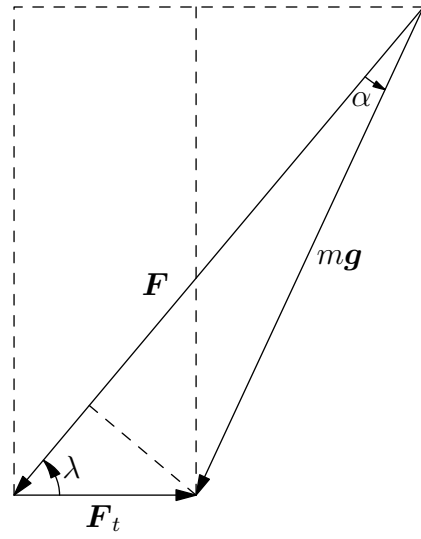


图 7.4: 惯性离心力对重力的影响

图 7.5:  $mg$ 、 $F$  和  $F_t$  之间的关系

由此可以看出, 当认为  $g$  的值不变时,  $\alpha$  的值在  $45^\circ$  处最大, 如果将  $\lambda = 45^\circ$  处实测的  $g = 9.8062 \text{ m/s}^2$  的值和  $\omega_0$  及  $R$  代入, 可得

$$\alpha_{\max} \approx \frac{\omega_0^2 R}{2g} = 6'$$

所以偏角  $\alpha$  是很小的, 当  $\omega_0$  作为一阶小量时,  $\alpha$  是二阶小量。在赤道处,  $\alpha = \lambda = 0$ , 由式(7.13)和式(7.12c)可得

$$F = m(g_0 + R\omega_0^2)$$

式中  $g_0$  是赤道地区的重力加速度, 再将上式代入式(7.12b)中, 可得

$$g = \frac{(g_0 + R\omega_0^2) \sin 2\lambda}{\sin \lambda \cos \alpha + \cos \lambda \sin \alpha} \quad (7.14)$$

联立式(7.13)和(7.14)可得  $g$  作为  $\alpha$  和  $\lambda$  很复杂的函数关系, 下面作些近似以简化之。首先根据式(7.13)可有近似

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{R\omega_0^2}{2g_0} \sin 2\lambda \quad (7.15)$$

然后将式(7.15)代入式(7.14)中, 并取  $\cos \alpha \approx 1$ , 略去其中的二阶以上的小量, 得

$$\begin{aligned} g &\approx \frac{(g_0 + R\omega_0^2) \sin \lambda}{\sin \lambda + \cos \lambda \frac{R\omega_0^2}{2g_0} \sin 2\lambda} = \frac{g_0 + R\omega_0^2}{1 + \frac{R\omega_0^2 \cos^2 \lambda}{g_0}} \\ &\approx g_0 \left( 1 + \frac{R\omega_0^2}{g_0} \sin^2 \lambda \right) \end{aligned} \quad (7.16)$$

式(7.16)和式(7.15)就是  $g$  和  $\alpha$  随  $\lambda$  改变的近似公式。如果再将地球半径随纬度的变化关系考虑进去, 可以得到更精确的计算公式。

### 7.3.2 落体偏东

考虑惯性力的情况下, 地球表面质点的运动方程为

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}') - 2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'$$

由于地球自转角速度  $\omega_0$  是一个小量, 略去上式中  $\omega_0^2$  项 (惯性离心力), 可得质点相对于地球的运动方程为

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}' \quad (7.17)$$

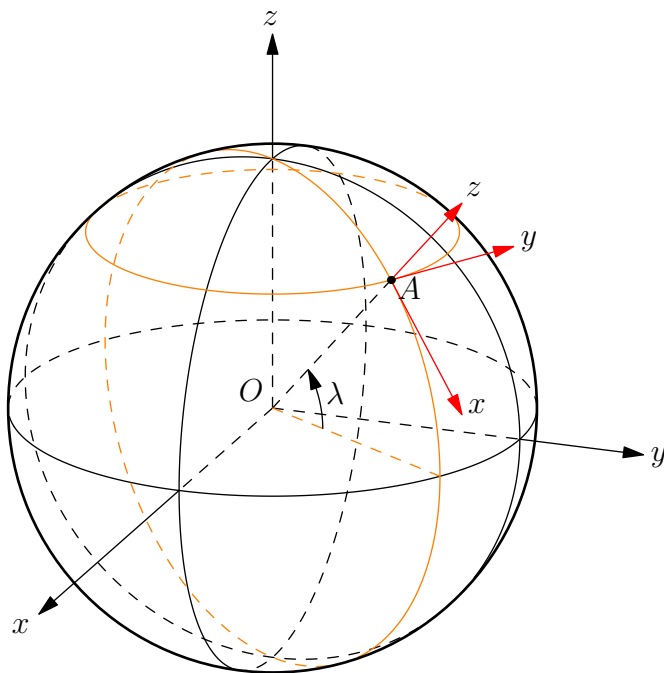


图 7.6: 地球表面的坐标系

取固定在地球上的参考系  $Axyz$ ,  $x$  轴向南,  $y$  轴向东,  $z$  轴垂直地面向上, 如图7.6所示。由于此处忽略了惯性离心力的作用, 因此重力方向和  $z$  轴平行, 而

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}_3 = \omega_0 (-\cos \lambda \mathbf{i} + \sin \lambda \mathbf{k})$$

式中  $\lambda$  为  $A$  点的纬度。由此运动方程(7.17)在  $Axyz$  系中的分量方程可以表示为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + 2m\omega_0 \dot{y} \sin \lambda \\ m\ddot{y} = F_y - 2m\omega_0 (\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \\ m\ddot{z} = F_z + 2m\omega_0 \dot{y} \cos \lambda \end{cases} \quad (7.18)$$

如果质点从有限高度  $h$  以初速度  $v' = 0$  自由下落, 不考虑阻力等其它力的作用, 重力  $mg$  看成常数, 则对式(7.18)积分可得

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\omega_0 y \sin \lambda \\ \dot{y} = -2\omega_0 [x \sin \lambda + (z - h) \cos \lambda] \\ \dot{z} = -gt + 2\omega_0 y \cos \lambda \end{cases} \quad (7.19)$$

将式(7.19)代入式(7.18)的右端, 并继续略去  $\omega_0$  的二阶项, 得

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 2g\omega_0 \cos \lambda \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

再对时间积分两次可得

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3}gt^3\omega_0 \cos \lambda \\ z = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (7.20)$$

消去  $t$  可得落体的轨道方程为

$$y^2 = -\frac{8}{9} \frac{\omega_0^2 \cos^2 \lambda}{g} (z - h)^3$$

这是位于东西铅直平面内的半三次抛物线。当落体落到地面时，落体偏东的数值为

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \omega_0 h \sqrt{\frac{h}{g}} \cos \lambda \quad (7.21)$$

### 7.3.3 地转偏向力

下面以地球表面炮弹平射轨道受地转偏向力影响为例来定量计算地转偏向力对长时间运动的影响。取固定在地球上的参考系  $Axyz$ ， $x$  轴向南， $y$  轴向东， $z$  轴垂直地面向上，如图7.6所示。同样忽略惯性离心力，则质点相对于地球的运动方程将由式(7.17)来表示，其分量形式即为式(7.18)，其中  $F_x = F_y = 0, F_z = -mg$ ，则有

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega_0 \dot{y} \sin \lambda \\ \ddot{y} = -2\omega_0 (\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega_0 \dot{y} \cos \lambda \end{cases} \quad (7.22)$$

对式(7.22)积分，并利用初始条件，即  $t = 0$  时， $x = y = z = 0, \dot{x} = v_0 \sin \theta, \dot{y} = v_0 \cos \theta, \dot{z} = 0$ ，其中  $\theta$  为初始速度与正东方向的夹角，则有

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \sin \theta + 2\omega_0 y \sin \lambda \\ \dot{y} = v_0 \cos \theta - 2\omega_0 (x \sin \lambda + z \cos \lambda) \\ \dot{z} = -gt + 2\omega_0 y \cos \lambda \end{cases} \quad (7.23)$$

将式(7.23)代入式(7.22)中，并略去  $\omega_0$  的二阶项，可得

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega_0 v_0 \sin \lambda \cos \theta \\ \ddot{y} = -2\omega_0 v_0 \sin \lambda \sin \theta + 2g\omega_0 t \cos \lambda \\ \ddot{z} = -g + 2\omega_0 v_0 \cos \lambda \cos \theta \end{cases} \quad (7.24)$$

将式(7.24)积分两次，可得

$$\begin{cases} x = v_0 t \sin \theta + \omega_0 v_0 t^2 \sin \lambda \cos \theta \\ y = v_0 t \cos \theta - \omega_0 v_0 t^2 \sin \theta \sin \lambda + \frac{1}{3}gt^3 \omega_0 \cos \lambda \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + \omega_0 v_0 t^2 \cos \theta \cos \lambda \end{cases} \quad (7.25)$$

式(7.25)中, 第二式的第三项即为第7.3.2节中落体偏东的结果。由此可见, Coriolis 力引起的偏离为

$$\begin{cases} \Delta x = \omega_0 v_0 t^2 \cos \theta \sin \lambda \\ \Delta y = -\omega_0 v_0 t^2 \sin \theta \sin \lambda \\ \Delta z = \omega_0 v_0 t^2 \cos \theta \cos \lambda \end{cases} \quad (7.26)$$

由此可以看出, 在北半球  $\lambda > 0$ , 则  $\Delta x > 0, \Delta y < 0$ , 炮弹向右偏离; 而在南半球  $\lambda < 0$ , 则  $\Delta x < 0, \Delta y > 0$ , 炮弹向左偏离。设炮弹通过的路程为  $l$ , 则其水平偏移量为

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \omega_0 v_0 t^2 \sin \lambda = \omega_0 v_0 \left( \frac{l}{v_0} \right)^2 \sin \lambda = \frac{\omega_0 l^2}{v_0} \sin \lambda \quad (7.27)$$

实际上, 本节的公式也可以适用于求解落体偏东, 只需令  $v_0 = 0$  即可。

本节是利用逐次逼近的方法求解微分方程组(7.24)的, 而实际上, 方程(7.24)是可以严格求解的。

将方程(7.24)中第一式乘以  $\sin \lambda$  加上第三式乘以  $\cos \lambda$ , 可得

$$\begin{cases} \ddot{x} \sin \lambda + \ddot{z} \cos \lambda = -g \cos \lambda + 2\omega_0 \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega_0 (\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \end{cases}$$

令  $\xi = \dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda, \eta = \dot{y}$ , 则有

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -g \cos \lambda + 2\omega_0 \eta \\ \dot{\eta} = -2\omega_0 \xi \end{cases} \quad (7.28)$$

在方程(7.28)中消去  $\eta$  可得方程

$$\ddot{\xi} + 4\omega_0^2 \xi = 0$$

由此可解得

$$\begin{cases} \xi = A \cos 2\omega_0 t + B \sin 2\omega_0 t \\ \eta = \frac{g}{2\omega_0} \cos \lambda - A \sin 2\omega_0 t + B \cos 2\omega_0 t \end{cases} \quad (7.29)$$

利用初始条件, 即

$$\begin{cases} \xi|_{t=0} = \dot{x}|_{t=0} \sin \lambda + \dot{z}|_{t=0} \cos \lambda = v_0 \sin \theta \sin \lambda \\ \eta|_{t=0} = \dot{y}|_{t=0} = v_0 \cos \theta \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases} \xi = v_0 \sin \theta \sin \lambda \cos 2\omega_0 t + \left( v_0 \cos \theta - \frac{g}{2\omega_0} \cos \lambda \right) \sin 2\omega_0 t \\ \eta = \dot{y} = -v_0 \sin \theta \sin \lambda \sin 2\omega_0 t + v_0 \cos \theta \cos 2\omega_0 t + \frac{g}{2\omega_0} \cos \lambda (1 - \cos 2\omega_0 t) \end{cases} \quad (7.30)$$

将(7.30)的第二式代入方程(7.24)的右端并积分, 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \sin \theta + v_0 \sin \theta \sin^2 \lambda (\cos 2\omega_0 t - 1) + v_0 \cos \theta \sin \lambda \sin 2\omega_0 t \\ \quad + g \sin \lambda \cos \lambda \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin \theta \sin \lambda \cos \lambda (\cos 2\omega_0 t - 1) + v_0 \cos \theta \cos \lambda \sin 2\omega_0 t \\ \quad + g \cos^2 \lambda \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) \end{cases} \quad (7.31)$$

将式(7.31)和(7.30)的第二式再积分一次, 即可得

$$\begin{cases} x = v_0 t \sin \theta + v_0 \sin \theta \sin^2 \lambda \left( \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t - t \right) - \frac{v_0}{2\omega_0} \cos \theta \sin \lambda (\cos 2\omega_0 t - 1) \\ \quad + g \sin \lambda \cos \lambda \left( \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{4\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{4\omega_0^2} \right) \\ y = \frac{v_0}{2\omega_0} \sin \theta \sin \lambda (\cos 2\omega_0 t - 1) + \frac{g}{2\omega_0} \cos \lambda \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) \\ \quad + \frac{v_0}{2\omega_0} \cos \theta \sin 2\omega_0 t \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + g \cos^2 \lambda \left( \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{4\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{4\omega_0^2} \right) \\ \quad + v_0 \sin \theta \sin \lambda \cos \lambda \left( \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t - t \right) - \frac{v_0}{2\omega_0} \cos \theta \cos \lambda (\cos 2\omega_0 t - 1) \end{cases} \quad (7.32)$$

式(7.32)即为方程(7.24)的严格解, 如果将其按  $\omega_0$  的幂级数展开, 并保留至  $\omega_0$  的一阶项, 将得到与式(7.25)相同的结果。

### 7.3.4 Foucault (傅科) 摆

假如在北极悬挂一单摆使之作微振动, 在惯性系中的观察者看来摆的振动面始终在铅直平面内, 但地球在以  $\omega_0$  的角速度自转, 因此在非惯性系的地球上的观察者看来, 摆的振动面应以  $-\omega_0$  的角速度转动。这是 Foucault 在 1860 年首先指出的, 藉此可以直接证实地球是具有自转的。除了赤道之外的各地都可以观察到这种效应, 下面对此问题作一近似分析。

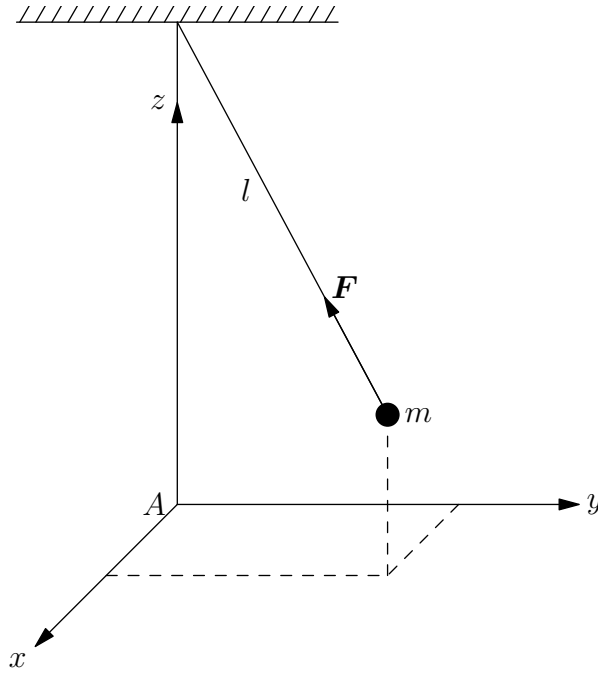


图 7.7: Foucault 摆

设摆长为  $l$ , 摆球的质量为  $m$ , 摆杆的张力为  $F$ , 取与节7.3.2相同的坐标系  $Axyz$ , 其

中  $A$  点为摆球的平衡位置。于是, 张力  $\mathbf{F}$  的三个分量为

$$\begin{cases} F_x = -\frac{x}{l}F \\ F_y = -\frac{y}{l}F \\ F_z = -\frac{l-z}{l}F \end{cases}$$

代入式(7.17)可得摆球的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{x}{l}F + 2m\omega_0\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} = -\frac{y}{l}F - 2m\omega_0(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} = -\frac{l-z}{l}F - mg + 2m\omega_0\dot{y}\cos\lambda \end{cases} \quad (7.33)$$

以及一个约束方程

$$x^2 + y^2 + (l-z)^2 = l^2 \quad (7.34)$$

通过解方程组(7.33)和(7.34), 即可得出摆的运动规律。但这组方程很难严格求解, 但考虑到微振动条件下,  $x$ 、 $y$  和  $\dot{x}$ 、 $\dot{y}$  都是小量, 因而由式(7.34)得

$$l-z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} = l \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + o(x^2 + y^2) \right)$$

因此,  $z$  是二阶小量,  $\dot{z}$  和  $\ddot{z}$  也是二阶小量。在忽略二阶小量的情况下, 由方程(7.33)的第三式可得  $F = mg$ , 代入另外两式中可得

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega_0\dot{y}\sin\lambda + \omega^2x = 0 \\ \ddot{y} + 2\omega_0\dot{x}\sin\lambda + \omega^2y = 0 \end{cases}$$

式中  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ 。将第二式乘以  $i$  再与第一式相加, 可得一个复变数方程

$$\ddot{\xi} + i2\omega_0\dot{\xi}\sin\lambda + \omega^2\xi = 0 \quad (7.35)$$

其中  $\xi = x + iy$ , 方程(7.35)的通解为

$$\xi = Ae^{n_1 t} + Be^{n_2 t}$$

其中  $A$  和  $B$  为两个复常数, 由初始条件决定。 $n_1$  和  $n_2$  为特征方程

$$n^2 + i(2\omega_0\sin\lambda)n + \omega^2 = 0$$

的两个根:

$$\begin{cases} n_1 = -i\omega_0\sin\lambda + i\sqrt{\omega_0^2\sin^2\lambda + \omega^2} \approx -i\omega_0\sin\lambda + i\omega \\ n_2 = -i\omega_0\sin\lambda - i\sqrt{\omega_0^2\sin^2\lambda + \omega^2} \approx -i\omega_0\sin\lambda - i\omega \end{cases}$$

因此可将通解表示为

$$\xi = e^{-i(\omega_0\sin\lambda)t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \quad (7.36)$$

当地球没有自转, 即  $\omega_0 = 0$  时, 方程(7.33)的解为

$$\xi = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = (A+B)\cos\omega t + i(A-B)\sin\omega t = x' + iy'$$



所以

$$\begin{cases} x' = (A + B) \cos \omega t \\ y' = (A - B) \sin \omega t \end{cases} \quad (7.37)$$

由此可知, 当地球自转效应忽略时, 摆球走一椭圆轨道,  $x'$  和  $y'$  分别为椭圆的两个主轴。当考虑地球自转时, 即  $\omega_0 \neq 0$  时, 由式(7.36)可得

$$\begin{aligned} \xi = x + iy &= [\cos(\omega_0 t \sin \lambda) - i \sin(\omega_0 t \sin \lambda)](x' + iy') \\ &= [x' \cos(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \sin(\omega_0 t \sin \lambda)] + i[-x' \sin(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \cos(\omega_0 t \sin \lambda)] \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} x = x' \cos(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \sin(\omega_0 t \sin \lambda) \\ y = -x' \sin(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \cos(\omega_0 t \sin \lambda) \end{cases} \quad (7.38)$$

这表明, 摆球在作周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

的椭圆轨道运动, 同时此椭圆的轴  $x'$  和  $y'$  又以角速度  $-\omega_0 \sin \lambda$  绕  $Oz$  转动, 亦即摆的振动面以角速度  $-\omega_0 \sin \lambda$  旋转, 它们的几何关系如图7.8所示。

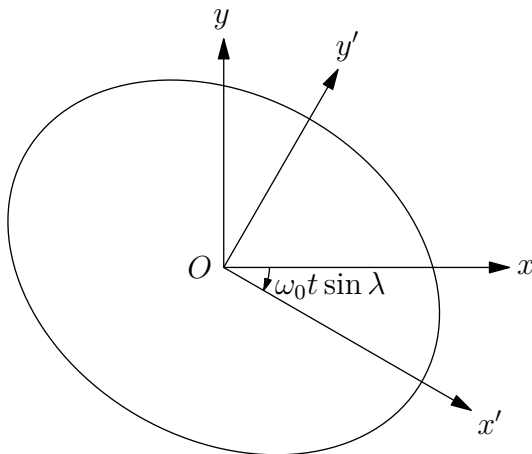


图 7.8: Foucault 摆振动面的旋转

## 第八章 Hamilton 动力学

### 8.1 正则方程

#### 8.1.1 Legendre 变换 · Hamilton 函数

描述理想完整系统在有势力作用下的 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (8.1)$$

其中 Lagrange 函数  $L$  依赖于变量  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  和  $t$ , 即  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 。这些变量确定了时刻和相应时刻系统的状态, 即各质点的位置和速度, 因此变量  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t$  称为 Lagrange 变量。

系统的状态也可以利用其它参数确定, 可以取为  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$ , 其中  $\mathbf{p}$  为广义动量, 定义为

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (8.2)$$

变量  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$  称为 Hamilton 变量。

在广义势系统中, Lagrange 函数可以按广义速度的次数写为

$$L = L_2 + L_1 + L_0$$

其中  $L_2 = T_2$ <sup>①</sup>, 因此必然有

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} = M_{\alpha\beta} \quad (8.3)$$

其中  $M_{\alpha\beta}$  的定义见式(2.61), 再考虑到式(2.67)可得其 Hesse 行列式非零:

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right) \neq 0 \quad (8.4)$$

式(8.4)说明式(8.2)右端的 Jacobi 行列式非零, 根据隐函数定理可知, 其中的广义速度相对广义动量可解:

$$\dot{q}_\alpha = \phi_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (8.5)$$

因此 Lagrange 变量可以用 Hamilton 变量表示, 反之亦然。

Hamilton 提出了用变量  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$  描述的运动方程, 使得 Lagrange 方程(8.1)变为  $2n$  个具有对称形式的对于导数可解的一阶方程, 这些方程称为 Hamilton 方程或正则方程, 变量  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{p}$  称为正则共轭变量或简称为正则变量。

首先给出上文所述变量变换的数学表述。设给定函数  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 其 Hesse 行列式非零:

$$\det \left( \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0 \quad (8.6)$$

<sup>①</sup> 参见第2.6.3节。

则从变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  到  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的变换由下面的公式定义:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8.7)$$

而函数  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的 Legendre 变换是指由此确定的新函数

$$Y = Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n y_i x_i - X(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (8.8)$$

此处等式(8.8)右端的变量  $x_i$  需要借助方程(8.7)用新变量  $y_1, y_2, \dots, y_n$  表示出来<sup>①</sup>。

Legendre 变换有逆变换, 其逆变换也是 Legendre 变换。即再对函数  $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$  做一次 Legendre 变换, 令

$$z_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8.9)$$

其中的函数  $Y$  由 Legendre 变换式(8.8)得到, 此时有

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \sum_{j=1}^n y_j x_j - X \right) = x_i + \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \\ &= x_i + \sum_{j=1}^n \left( y_j - \frac{\partial X}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

这说明变换式(8.9)再次将  $y_1, y_2, \dots, y_n$  变回  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 同时

$$Z = \sum_{i=1}^n z_i y_i - Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n y_i x_i - X \right) = X \quad (8.10)$$

也将  $Y$  重新变为  $X$ 。

系统的 Lagrange 函数  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  对变量  $\dot{\mathbf{q}}$  的 Legendre 变换为函数

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (8.11)$$

其中变量  $\dot{q}_{\alpha} (\alpha = 1, 2, \dots, s)$  需要借方程(8.2)用  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$  表示出来。这个函数  $H$  称为 Hamilton 函数。

**例 8.1 (Legendre 变换的几何意义)** 以单个变量的情形来考虑 Legendre 变换的几何意义。设变量为  $x$ , 相应地有函数  $X(x)$ , 要求这个函数是严格的凸(或凹)函数, 这样即满足了式(8.6)<sup>②</sup>, 由此定义新变量  $y$  为

$$y = \frac{dX}{dx}$$

便得到函数  $X(x)$  的 Legendre 变换:

$$Y = Y(y) = xy - X(x)$$

其中  $x = x(y)$ 。从图形上来看,  $y$  对应于曲线  $X(x)$  在  $x$  点处切线的斜率, 而  $Y(y)$  则为切线在纵轴上截距的负值(如图8.1所示)。

在变换前, 用坐标  $(x, X(x))$  来描述曲线, 曲线是一系列这样的坐标点的集合。变换后用切线的斜率  $y$  和截距  $Y(y)$  来描述曲线, 曲线是各种斜率的切线的包络线(如图8.2所示)。这两种表述是等价的, 包含了相同的信息。

<sup>①</sup> 由式(8.6)可知式(8.7)右端的 Jacobi 行列式非零, 故式(8.7)对  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是可解的。

<sup>②</sup> 这是由于函数具有连续的二阶导数, 所以在一个点的邻域内满足式(8.6)则必然有在该邻域内二阶导数都为正或负。

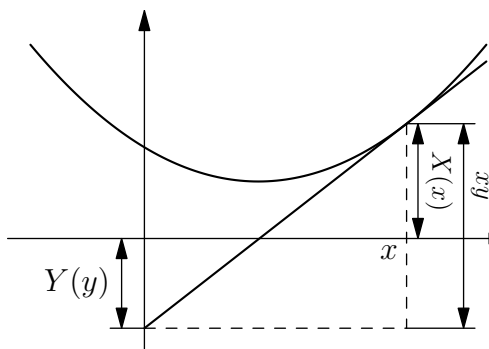


图 8.1: Legendre 变换的几何意义

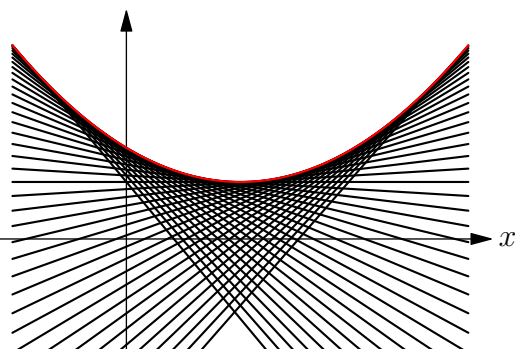


图 8.2: 曲线作为切线的包络线

## 8.1.2 Hamilton 正则方程

Hamilton 函数  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  的全微分为

$$dH = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (8.12)$$

另一方面, 直接对式(8.11)右端求全微分可得

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} d\dot{q}_{\alpha} - \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \left( p_{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) d\dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (8.13)$$

对比式(8.12)和式(8.13)可得

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} = -\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} = \dot{q}_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (8.14)$$

以及

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (8.15)$$

根据 Lagrange 方程(8.1)和式(8.2)可得

$$\dot{p}_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

因此由式(8.14)可得运动方程

$$\begin{cases} \dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \\ \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (8.16)$$

这些方程称为 Hamilton 方程或正则方程。

顺便我们根据式(8.15)可知, 如果系统的 Lagrange 函数不显含时间, 则 Hamilton 函数也不显含时间, 反之亦然。类似地, 根据式(8.14)可知, 如果系统的 Lagrange 函数不显含某个广义坐标, 则 Hamilton 函数也不显含这个广义坐标, 反之亦然。

由正则变量张成了一个  $2s$  维空间, 称为**相空间**。相空间中的点称为**相点**, 代表系统的力学状态。相点在相空间运动而描述的轨道称为**相轨道**, 反映了系统状态的演化。

正则方程是由  $2s$  个一阶常微分方程构成的常微分方程组, 决定了相点的速度。给定正则变量的  $2s$  个初始值, 可以唯一确定正则变量的时间演化关系。

### 8.1.3 Hamilton 函数的物理意义 · 广义能量积分

将 Hamilton 函数的形式(8.11)与式(2.130)对比, 可知 Hamilton 函数  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  即以正则变量表示的广义能量。

下面考虑 Hamilton 函数对时间的全导数, 即

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \dot{p}_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

即 Hamilton 函数对时间的全导数恒等于它对时间的偏导数

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (8.17)$$

如果 Hamilton 函数不显含时间, 则称系统是**广义保守的**。在这种情况下有  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , 因此在系统的运动过程中恒有

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E \quad (8.18)$$

其中  $E$  为任意常数, 式(8.18)称为**广义能量积分**。

**例 8.2 (一维谐振子)** 写出一维谐振子的正则方程和相空间轨迹。

**解** 一维谐振子的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

考虑  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$ , 则有

$$\dot{q} = \frac{p}{m}$$

所以 Hamilton 函数为

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

正则方程为

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \end{cases}$$

消去广义动量  $p$  即可得到系统的动力学方程

$$m\ddot{q} + kq = 0$$

由于

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

所以  $H = E$ (常数), 相空间轨迹即为

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/k} = 1$$

是一个椭圆。

例 8.3 (电磁场中带电粒子的 Hamilton 函数) 求电磁场中带电粒子的 Hamilton 函数。

解 电磁场中带电粒子的 Lagrange 函数为

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} - e\phi(\mathbf{r}, t)$$

则有

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}$$

所以

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p} - e\mathbf{A}}{m}$$

由此可得 Hamilton 函数

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi$$

### 8.1.4 正则方程的矩阵形式

记

$$\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \\ p_1 \\ \vdots \\ p_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_s} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_s} \end{pmatrix}$$

则正则方程可以表示为

$$\dot{\xi} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad (8.19)$$

式(8.19)称为正则方程的矩阵形式或正则方程的辛 (symplectic) 形式。

可通过直接计算的方式验证矩阵  $\mathbf{J}$  满足如下性质:

$$\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}_{2s}, \quad \mathbf{J}^T = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}, \quad \det \mathbf{J} = 1 \quad (8.20)$$

### 8.1.5 Whittaker 方程与 Jacobi 方程

设系统的运动由正则方程

$$\begin{cases} \dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \\ \dot{q}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \end{cases} \quad (8.21)$$

描述, 如果系统的 Hamilton 函数不显含时间, 则系统存在广义能量积分

$$H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s) = E \quad (8.22)$$

其中  $E$  是由初始条件确定的常数  $E = H(q_1^0, q_2^0, \dots, q_s^0, p_1^0, p_2^0, \dots, p_s^0)$ 。在相空间中, 方程(8.22)确定了一个曲面, 系统的相点必然落在该曲面上。

假设在相空间的某个区域内有  $\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0$ , 那么在该区域内式(8.22)对于  $p_1$  可解, 记作

$$p_1 = -K(q_1, q_2, \dots, q_s, p_2, p_3, \dots, p_s, E) \quad (8.23)$$

由此可将正则方程(8.21)分为两组

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, & \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 2, 3, \dots, s) \quad (8.24)$$

根据式(8.24)可得

$$\begin{cases} \frac{dq_\alpha}{dq_1} = \frac{\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} \\ \frac{dp_\alpha}{dq_1} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} \end{cases} \quad (\alpha = 2, 3, \dots, s) \quad (8.25)$$

将式(8.22)两端对  $p_\alpha (\alpha = 2, 3, \dots, s)$  求偏导数, 并注意到式(8.23)可得

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial p_\alpha} = 0 \quad (8.26)$$

由式(8.26)可将方程组(8.25)中的第一式改写为

$$\frac{dq_\alpha}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}$$

同理, 将式(8.22)两端对  $q_\alpha (\alpha = 2, 3, \dots, s)$  求偏导数, 并注意到式(8.23)可得

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (8.27)$$

由式(8.27)可将方程组(8.25)中的第二式改写为

$$\frac{dp_\alpha}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}$$

综上有

$$\begin{cases} \frac{dq_\alpha}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha} \\ \frac{dp_\alpha}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 2, 3, \dots, s) \quad (8.28)$$

方程(8.28)描述系统在  $H = E$  (常数) 时的运动, 称为 **Whittaker 方程**。如果将方程(8.28)中的函数  $K$  看作 **Hamilton 函数**, 将坐标  $q_1$  看作时间, 则 **Whittaker 方程**具有正则方程的形式。

积分 **Whittaker 方程**(8.28)将得到

$$\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(q_1, E, C_1, C_2, \dots, C_{2n-2}) \\ p_\alpha = p_\alpha(q_1, E, C_1, C_2, \dots, C_{2n-2}) \end{cases} \quad (8.29)$$

其中  $C_1, C_2, \dots, C_{2n-2}$  为  $2n - 2$  个积分常数。将 **Whittaker 方程**的解(8.29)代入式(8.23)中, 可得

$$p_1 = p_1(q_1, E, C_1, C_2, \dots, C_{2n-2}) \quad (8.30)$$

式(8.29)和(8.30)确定了系统在相空间中相轨迹的方程。再利用正则方程(8.24)中的第一式即可得到  $q_1$  与时间的关系, 进而得到系统运动与时间的关系。

**Whittaker 方程**(8.28)具有与 **Hamilton 方程**相同的结构, 也可以写成类似 **Lagrange 方程**的形式。设函数  $K$  对  $p_\alpha (\alpha = 2, 3, \dots, s)$  的 Hesse 行列式非零, 对其做一次 **Legendre 变换**, 记作

$$P = P(q_2, q_3, \dots, q_s, q'_2, q'_3, \dots, q'_s, q_1, E) = \sum_{\alpha=2}^s q'_\alpha p_\alpha - K \quad (8.31)$$

其中  $q'_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dq_1}$ , 式中的  $p_\alpha$  需要从 **Whittaker 方程**(8.28)的前  $n - 1$  个方程

$$q'_\alpha = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha = 2, 3, \dots, s)$$

中解出, 用  $q_1, q_2, \dots, q_s$  和  $q'_2, q'_3, \dots, q'_s$  表示出来。

利用函数  $P$  可将 **Whittaker 方程**(8.28)表示为下面的等价形式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial P}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 2, 3, \dots, s) \quad (8.32)$$

方程(8.32)称为 **Jacobi 方程**。如果将 **Jacobi 方程**中的函数  $P$  看作 **Lagrange 函数**, 将坐标  $q_1$  看作时间, 则 **Jacobi 方程**具有 **Lagrange 方程**的形式。

下面讨论一下函数  $P$  的具体形式。考虑到  $q'_1 \equiv 1$  以及式(8.23)可得

$$P = \sum_{\alpha=2}^s q'_\alpha p_\alpha + p_1 = \sum_{\alpha=1}^s q'_\alpha p_\alpha = \frac{1}{\dot{q}_1} \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha = \frac{1}{\dot{q}_1} (L + H) \quad (8.33)$$

如果系统是保守的, 那么  $L = T - V, H = T + V$ , 由此可得

$$P = \frac{2T}{\dot{q}_1} \quad (8.34)$$

而在保守系统中有

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = \dot{q}_1^2 \left( \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta} q'_\alpha q'_\beta \right) \quad (8.35)$$

记

$$G = \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta} q'_\alpha q'_\beta \quad (8.36)$$



保守系统有能量积分  $T + V = E$ , 将式(8.35)代入, 可得

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{E - V}{G}}$$

最后, 根据式(8.34)和(8.35)可得在保守系统中, 函数  $P$  的形式:

$$P = 2\sqrt{(E - V)G} \quad (8.37)$$

## 8.1.6 数学摆和物理摆 · 单自由度保守系统的运动

### 8.1.6.1 相平面与摆运动的定性图像

数学摆即单摆, 其广义坐标选取和位形空间已在例2.2中讨论过, 而单摆的微振动近似解则在例4.1中进行过详细讨论。

在重力作用下绕固定水平轴转动的刚体称为**物理摆**或**复摆**。此处取空间系  $OXYZ$  使得  $OZ$  轴与刚体转动轴重合,  $OY$  轴竖直向下。再取本系统  $Oxyz$ , 使刚体质心位于  $Oy$  轴上, 而  $Oz$  轴与  $OZ$  轴重合 (见第5.4.1节图5.14)。如果记刚体质心到转轴的距离为  $L$ , 刚体的自转角设为  $\psi$ , 则  $M_z = -mgL \sin \psi$ , 由刚体定轴转动的运动微分方程(5.72f)可得物理摆的运动微分方程为

$$\ddot{\psi} + \frac{mgL}{I_{33}} \sin \psi = 0 \quad (8.38)$$

将方程(8.38)与单摆的运动方程

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

比较, 可知物理摆的运动规律与摆长为  $l = \frac{I_{33}}{mL}$  的单摆相同, 这个摆长称为物理摆的**等价摆长**。

方程(8.38)代表了一种特殊的单自由度系统, 即单自由度保守系统, 其运动方程可以统一表示为

$$\ddot{x} = f(x) \quad (8.39)$$

其中  $x$  为广义坐标, 则该系统的动能和势能可以如下确定

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^2, \quad V = - \int f(x) dx \quad (8.40)$$

由此可得, 系统的 Hamilton 函数为

$$H(x, p_x) = \frac{1}{2} p_x^2 + V(x) \quad (8.41)$$

由于 Hamilton 函数不显含时间, 故系统有广义能量积分<sup>①</sup>

$$H(x, p_x) = \frac{1}{2} p_x^2 + V(x) = E \quad (\text{常数}) \quad (8.42)$$

系统的正则方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = f(x) \end{cases} \quad (8.43)$$

<sup>①</sup> 对于保守系统即为机械能守恒。

如果将  $p_x$  简记为  $y$ , 则称平面  $Oxy$  为方程(8.39)的**相平面**, 在函数  $f(x)$  确定的相平面的每个点上, 正则方程(8.43)给出一个以  $\dot{x}, \dot{y}$  为分量的向量, 该向量称为**相速度**<sup>②</sup>。正则方程(8.43)的解给出了相点在相平面上的运动, 并且相点的运动速度等于该点所在位置的相速度。相点在相平面上的轨道称为相轨道, 在特殊情况下, 相轨道可以仅由一个点构成, 这样的点称为**平衡位置**, 在平衡位置处相速度等于零。

利用运动方程的首次积分(8.42)很容易得到相轨道, 在每一条相轨道上机械能都是常数, 所以每条相轨道对应一个能量条件  $H(x, y) = E$ 。将首次积分(8.42)改写为

$$y^2 = 2(E - V(x)) \quad (8.44)$$

则可看出相轨道具有下列便于分析方程(8.39)的性质:

1. 当给定  $E$  时, 由于方程(8.44)的左端是非负的, 因此相轨迹只能分布在相平面上满足不等式  $V(x) \leq E$  的区域内, 这个区域称为**可能运动区域**。
2. 由正则方程(8.43)可知, 平衡位置位于相平面的  $x$  轴上, 并且在平衡位置  $(x_*, 0)$  处, 势能取极值, 即  $\frac{dV}{dx}(x_*) = 0$ 。
3. 如果  $x = x_*$  是函数  $V(x)$  的极小值点 (即该点  $\frac{d^2V}{dx^2}(x_*) > 0$ ), 则相平面上的点  $(x_*, 0)$  是中心型奇点; 如果  $x = x_*$  是函数  $V(x)$  的极大值点 (即该点  $\frac{d^2V}{dx^2}(x_*) < 0$ ), 则相平面上的点  $(x_*, 0)$  是鞍型奇点。
4. 相轨道相对于  $x$  轴对称。
5. 在  $x$  轴上非平衡位置的点, 经过该点的相轨道垂直于  $x$  轴。这是因为在这些点  $\dot{x} = 0$  但  $\dot{y} = f(x) \neq 0$ 。

根据这些性质, 只要画出函数  $V(x)$  的曲线就可以得到方程(8.39)所描述运动的特性。

图8.3中给出了势能曲线与相对应的相轨道的例子。  $E = E_1$  是中心型平衡位置, 这个平衡位置被封闭的相轨道包围。在  $E > E_3$  时, 相轨道不封闭,  $E = E_3$  是鞍型平衡位置。当  $E = E_3$  时, 相轨道在初始时刻起于鞍点附近, 当  $t \rightarrow \infty$  时回到鞍点, 这条曲线是围绕中心型平衡位置的封闭曲线族和相应于  $E > E_3$  的不封闭曲线族的分界线。这种分离不同性质相轨道区域的轨道称为**分离线**。

通过摆<sup>③</sup>的运动微分方程(8.38)可知, 摆的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\psi}^2, \quad V = -\frac{g}{l} \cos \psi \quad (8.45)$$

如果令  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ , 则  $V = -\omega_0^2 \cos \psi$ , 则能量积分可以写作

$$\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + V = E \quad (\text{常数}) \quad (8.46)$$

势函数  $V(\psi)$  的曲线和相轨道如图8.4所示。

1. 当  $E < -\omega_0^2$  时, 运动是不可能的;
2. 当  $E = -\omega_0^2$  时, 摆处于平衡位置刚体的质心处于可能位置中的最低点。在相平面上, 这些平衡位置在相平面上相应于点  $\psi = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \dot{\psi} = 0$ 。这些点是中心型的, 它们被表示摆振动的封闭相轨道包围, 摆振动相应于满足  $-\omega_0^2 < E < \omega_0^2$  的  $E$  值;

<sup>②</sup> 这里的相速度指的是相点的速度, 与机械波的相速度是完全不相干的量。

<sup>③</sup> 由于单摆和物理摆的运动方程是相同的, 这里将它们统称为“摆”, 并统一用等效摆长表示它们的运动方程。

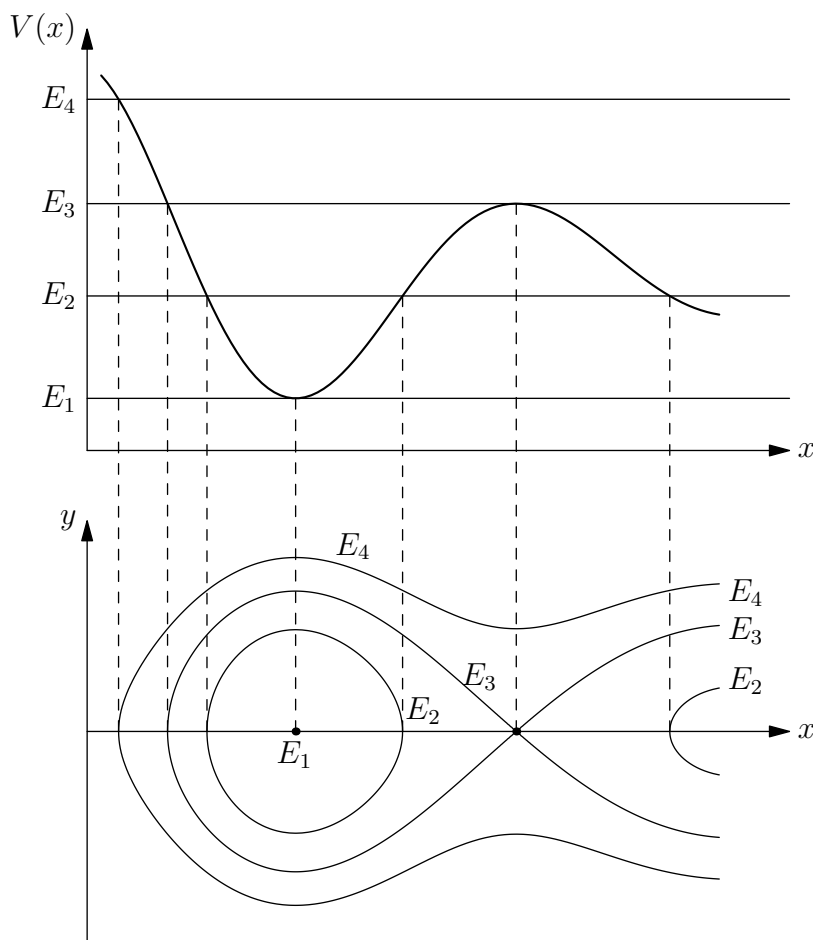


图 8.3: 势能曲线与对应的相轨道

3. 当  $E = \omega_0^2$  时, 有两种可能的运动: 一种是对应于摆的平衡位置, 刚体质心位于可能位置的最高点, 这个平衡位置在相平面上相应于点  $\psi = (2k+1)\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \dot{\psi} = 0$ , 这些点是鞍型的; 另一种是刚体质心再  $t \rightarrow \infty$  时渐进地趋于最高位置, 这种渐进运动在相平面上对应于连接鞍点的曲线, 这些曲线是分离线;

4. 当  $E > \omega_0^2$  时, 刚体的运动是转动, 对于这种运动, 角度  $\phi$  的绝对值单调增加, 这种运动对应于相平面上上下两条非封闭曲线, 分离线将振动和非振动区域分开。

### 8.1.6.2 摆运动方程的积分

根据式(8.46)中  $E$  的不同取值进行分类讨论。

1.  $-\omega_0^2 < E < \omega_0^2$ , 这种情形对应摆的振动。设此时  $E = -\omega_0^2 \cos \beta$ , 其中  $\beta$  是任意无量纲常数, 显然  $\beta$  的物理意义即为摆偏离竖直方向  $\psi = 0$  的最大角度。此时能量积分式(8.46)可以写作

$$\dot{\psi}^2 = 2\omega_0^2(\cos \psi - \cos \beta) \quad (8.47)$$

记  $k_1 = \sin \frac{\beta}{2}$  并做变量代换

$$\sin \frac{\psi}{2} = k_1 \sin u$$

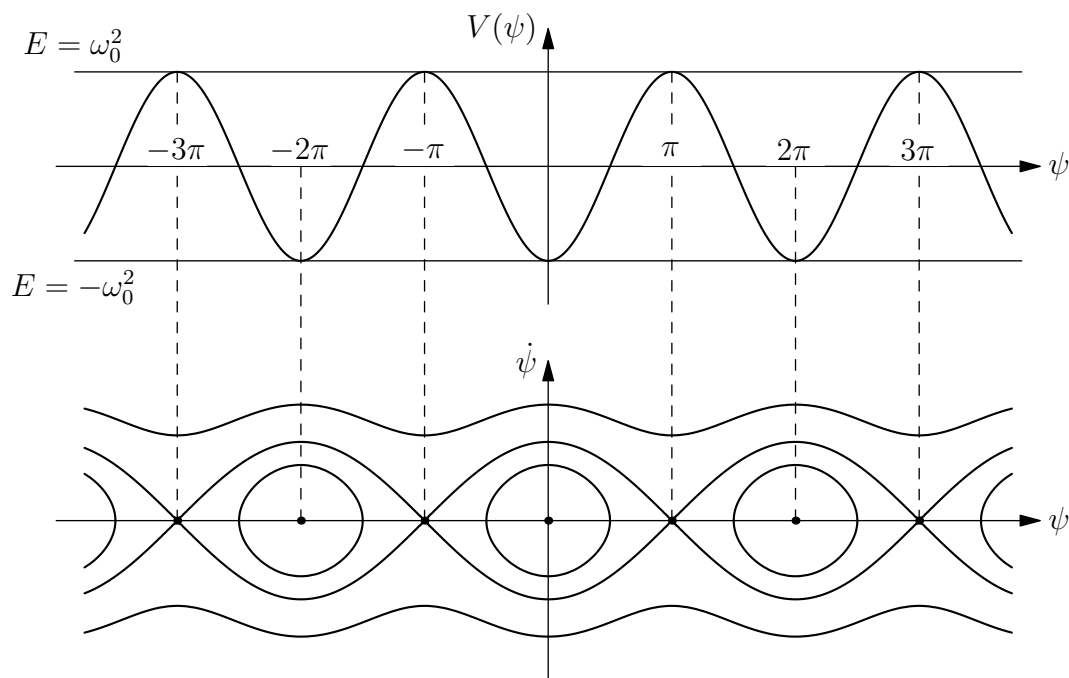


图 8.4: 摆的势函数和相轨道

则能量积分(8.47)具有如下形式

$$\dot{u}^2 = \omega_0^2(1 - k_1^2 \sin^2 u) \quad (8.48)$$

如果  $t = 0$  时取  $\psi = 0$ , 则有

$$\omega_0 t = \int_0^u \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \xi}} = F(\sin u, k_1) \quad (8.49)$$

所以有  $\sin u = \operatorname{sn} \omega_0 t$ , 即

$$\psi = 2 \arcsin(k_1 \operatorname{sn} \omega_0 t) \quad (8.50)$$

由于椭圆正弦函数  $\operatorname{sn} u$  的周期为  $4K(k_1)$ , 因此摆运动的周期为

$$T = \frac{4K(k_1)}{\omega_0} \quad (8.51)$$

其级数形式为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left( 1 + \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{9}{64}k_1^4 + \cdots \right) \quad (8.52)$$

因此可知摆角不大时, 周期的近似值为  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , 与微振动结果相同。

2.  $E > \omega_0^2$ , 这种情形对应摆的转动。记  $t = 0$  时  $\psi = 0, \dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ , 于是  $E = \frac{1}{2}\dot{\psi}_0^2 - \omega_0^2$ , 此时能量积分式(8.46)可以写作

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 \left( 1 - k_2^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (8.53)$$

其中  $k_2^2 = \frac{4\omega_0^2}{\dot{\psi}_0^2}$ 。因为  $E > \omega_0^2$ , 所以  $\dot{\psi}_0^2 > 4\omega_0^2$ , 进而有  $k_2^2 < 1$ , 由此可得

$$\frac{1}{2}\dot{\psi}_0 t = F\left(\sin \frac{\psi}{2}, k_2\right) = \int_0^{\frac{\psi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \phi}} \quad (8.54)$$

由此可得

$$\psi = 2 \arcsin \left( \operatorname{sn} \frac{\dot{\psi}_0}{2} t \right) = 2 \operatorname{am} \frac{\dot{\psi}_0}{2} t \quad (8.55)$$

当初始角速度很大时, 即  $\dot{\psi}_0^2 \gg \omega_0^2$ , 此时  $k_2 \rightarrow 0$ , 此时  $\operatorname{sn} x \rightarrow \sin x$ , 因此  $\operatorname{am} x = \arcsin(\operatorname{sn} x) \rightarrow x$ , 则近似地有  $\psi = \dot{\psi}_0 t$ , 摆动接近等速。

3.  $E = \omega_0^2$ , 这种情形对应摆的渐进运动。此时能量积分式(8.46)可以写作

$$\dot{\psi}^2 = 4\omega_0^2 \cos^2 \frac{\psi}{2} \quad (8.56)$$

如果  $t = 0$  时,  $\psi = 0, \dot{\psi} > 0$ , 则有<sup>①</sup>

$$\psi = 2 \arcsin(\tanh \omega_0 t) = -\pi + 4 \arctan(e^{\omega_0 t}) \quad (8.57)$$

## 8.2 Routh 方程

### 8.2.1 Routh 函数

在对理想完整系统的 Lagrange 函数做 Legendre 变换的过程中, 也可以只将 Lagrange 变量的一部分转化为 Hamilton 变量, 这种 Lagrange 和 Hamilton 的组合变量称为 Routh 变量, 记作

$$q_i, \dot{q}_i; \quad q_\alpha, p_\alpha; \quad t \quad (i = 1, 2, \dots, l; \alpha = l+1, \dots, s)$$

其中  $l$  是小于  $s$  的任意固定整数。

由于 Lagrange 函数对全体广义速度  $\dot{q}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$  的 Hesse 行列式非零, 因此 Lagrange 函数对  $\dot{q}_\alpha (\alpha = l+1, \dots, s)$  的 Hesse 行列式也非零, 即

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right) \neq 0 \quad (l+1 \leq \alpha, \beta \leq s)$$

广义动量仍按照原方式定义:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = l+1, \dots, s) \quad (8.58)$$

由此, Routh 函数  $R = R(q_1, \dots, q_l, q_{l+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, p_{l+1}, \dots, p_s, t)$  为 Lagrange 函数  $L$  对变量  $\dot{q}_{l+1}, \dots, \dot{q}_s$  的 Legendre 变换, 即

$$R = \sum_{\alpha=l+1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \quad (8.59)$$

其中右端的  $\dot{q}_\alpha (\alpha = l+1, \dots, s)$ <sup>②</sup> 需要从方程(8.58)中解出, 用 Routh 坐标  $q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, p_\alpha, t$  表示。

<sup>①</sup> 最后一个等号可以通过导数相等和 0 点函数值相等来验证。

<sup>②</sup> 包括 Lagrange 函数  $L$  中的  $\dot{q}_\alpha$ 。

## 8.2.2 Routh 方程

Routh 函数  $R = R(q_1, \dots, q_l, q_{l+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, p_{l+1}, \dots, p_s, t)$  的全微分为

$$dR = \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial R}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \sum_{\alpha=l+1}^s \left( \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \right) + \frac{\partial R}{\partial t} dt \quad (8.60)$$

另一方面, 式(8.59)右端的全微分为

$$\begin{aligned} dR &= - \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \sum_{\alpha=l+1}^s \left[ - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha + \left( p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) d\dot{q}_\alpha \right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^l \left( - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \sum_{\alpha=l+1}^s \left( - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (8.61)$$

比较式(8.60)和式(8.61)即可得到

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (8.62)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \quad (\alpha = l+1, \dots, s) \quad (8.63)$$

以及

$$\frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (8.64)$$

将理想完整系统的 Lagrange 方程分为两组:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (8.65)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = l+1, \dots, s) \quad (8.66)$$

由式(8.62)和式(8.65)可得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (8.67)$$

而由式(8.58)、(8.63)和方程(8.66)可得

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = - \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = l+1, \dots, s) \quad (8.68)$$

方程(8.67)和(8.68)构成了 Routh 方程, 它由  $l$  个具有 Lagrange 方程结构的二阶方程(8.67)和  $2(s-l)$  个具有 Hamilton 方程结构的一阶方程构成。

由式(8.64)可以看出, 如果系统的 Lagrange 函数不显含时间, 则其 Routh 函数也不显含时间。将系统的 Hamilton 函数表示为

$$H = \sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i + \sum_{\alpha=l+1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = \sum_{i=1}^l p_i \dot{q}_i + R \quad (8.69)$$

注意到  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$ , 因此此时系统的广义能量积分可以表达为

$$R - \sum_{i=1}^l \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = E \quad (8.70)$$

### 8.2.3 利用 Routh 方程对带有循环坐标的系统降阶

设  $q_\alpha (\alpha = l+1, \dots, s)$  是理想完整系统的循环坐标, 那么这个系统有  $s-l$  个首次积分

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = C_\alpha \quad (\text{常数}) \quad (\alpha = l+1, \dots, s) \quad (8.71)$$

构造 Routh 函数

$$R = \sum_{\alpha=l+1}^s C_\alpha \dot{q}_\alpha - L \quad (8.72)$$

其中  $\dot{q}_\alpha$  需要利用式(8.71)用  $q_i, \dot{q}_i, C_\alpha, t$  表示。在这种情况下, Routh 函数不包含循环坐标相应的广义速度  $\dot{q}_\alpha$ , 即

$$R = R(q_i, \dot{q}_i, C_\alpha, t) \quad (i = 1, 2, \dots, l; \alpha = l+1, \dots, s) \quad (8.73)$$

所以 Routh 方程的第一部分

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (8.74)$$

描述非循环坐标随时间的变化, 可以独立于 Routh 方程的第二部分。Routh 方程的第二部分

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial C_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = 0 \quad (\alpha = l+1, \dots, s) \quad (8.75)$$

相应于循环坐标, 由此便达到了将原系统降阶的目的。

在实际应用的过程中, 先根据 Lagrange 方程或 Hamilton 方程列出系统的运动方程, 再利用相应的循环坐标所导出的首次积分式消元得到的结果, 与利用 Routh 方程理论所得结果是相同的。但利用 Routh 方程理论可以省去很多不必要的复杂运算。

**例 8.4 (球面摆的运动)** 设球面摆上质点的质量为  $m$ , 摆长为  $l$ , 广义坐标取为以悬点为原点的球坐标系的极角  $\theta$  和方位角  $\phi$ , 则其 Lagrange 函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgl \cos \theta \quad (8.76)$$

由于球面摆的 Lagrange 函数中不显含  $\phi$ , 故  $\phi$  为循环坐标, 其相应首次积分为

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = ml^2 \omega_0 \alpha \quad (8.77)$$

式中  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ,  $\alpha$  为任意无量纲积分常数。由此可得

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_0}{\sin^2 \theta} \alpha \quad (8.78)$$

所以此系统的 Routh 函数表示为

$$R = p_\phi \dot{\phi} - L = -\frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{ml^2 \omega_0^2 \alpha^2}{2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta \quad (8.79)$$

系统的 Routh 函数不显含时间, 因此系统存在广义能量积分, 根据式(8.70)可得其广义能量积分为

$$\frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{ml^2 \omega_0^2 \alpha^2}{2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta = \frac{1}{2}ml^2 \omega_0^2 \beta \quad (8.80)$$

其中  $\beta$  为任意无量纲积分常数。

做变量代换  $u = \cos \theta$ , 则由式(8.80)可得

$$\frac{1}{\omega_0^2} \dot{u}^2 = (1 - u^2)(\beta - 2u) - \alpha^2 =: G(u) \quad (8.81)$$

记  $G(u) = (1 - u^2)(\beta - 2u) - \alpha^2 = 0$  的三个根为  $u_1, u_2, u_3$ , 则  $G(u)$  也可以写作

$$G(u) = 2(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (8.82)$$

其图像如图8.5所示。

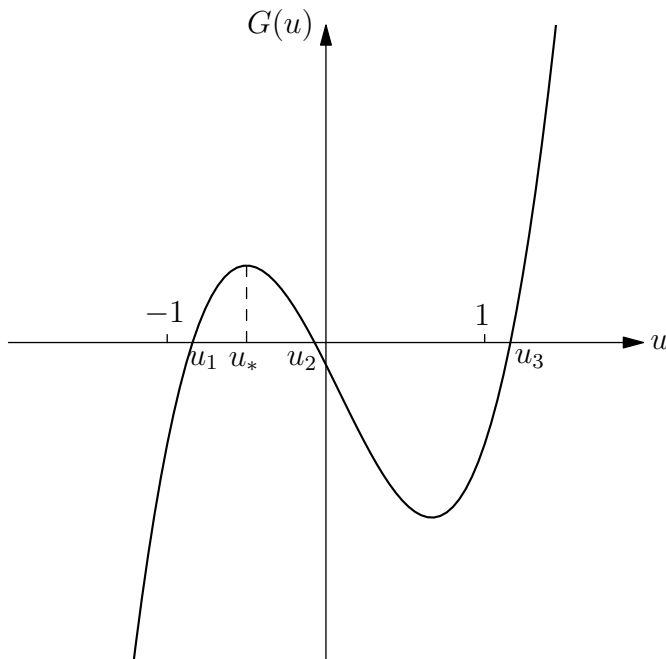


图 8.5: 函数  $G(u)$  的图像

显然有  $G(+\infty) = +\infty, G(-\infty) = -\infty$ , 而且  $G(\pm 1) = -\alpha^2 \leq 0$ 。因为  $G(u)$  是连续函数, 故至少其至少有一个根不小于 1, 不妨记作  $u_3$ 。由于  $u = \cos \theta$ , 所以球面摆的解要求在  $-1 \leq u \leq 1$  的范围内存在  $G(u) \geq 0$  的点。由此可知, 函数  $G(u)$  在  $-1 \leq u \leq 1$  有两个实根  $u_1, u_2$  和实根  $u_3 \geq 1$ 。

因为在实际的运动中有  $G(u) \geq 0$ , 所以只需考虑  $u$  在区间  $u_1 \leq u \leq u_2$  内的解, 这对应摆在运动中  $\theta$  的变化范围为  $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$ 。

下面来考虑系统在不同初始条件下的运动情况, 这相应于考虑系统在不同常数  $\alpha, \beta$  下的运动情况。由于实际的解存在需要  $u_1 \geq -1$ , 因此必须有  $G(-1) \leq 0$ , 即

$$2\beta + 4 - \alpha^2 \leq 0$$

由此可知,  $\beta$  的取值应该满足  $\beta \geq -2$ 。如果  $\beta = -2$ , 此时  $\alpha = 0$ , 方程(8.80)为

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 = -mgl(1 + \cos \theta)$$

这个方程只有解  $\theta = \pi$ , 即对应于摆的竖直平衡位置。

函数  $G(u)$  有极大值点

$$u = u_* = \frac{1}{6}(\beta - \sqrt{\beta^2 + 12}) \quad (8.83)$$



此时

$$G(u_*) = \frac{1}{54} \left[ (\beta^2 + 12)^{\frac{3}{2}} + 36\beta - \beta^3 \right] - \alpha^2 =: f(\beta) - \alpha^2 \quad (8.84)$$

其中

$$f(\beta) = \frac{1}{54} \left[ (\beta^2 + 12)^{\frac{3}{2}} + 36\beta - \beta^3 \right]$$

实际运动必须满足  $G(u_*) \geq 0$ , 即

$$0 \leq \alpha^2 \leq f(\beta) \quad (8.85)$$

参数  $\alpha^2, \beta$  的允许区域为图8.6中曲线  $\alpha^2 = f(\beta)$  与横轴所夹的阴影区域 (包括边界)。

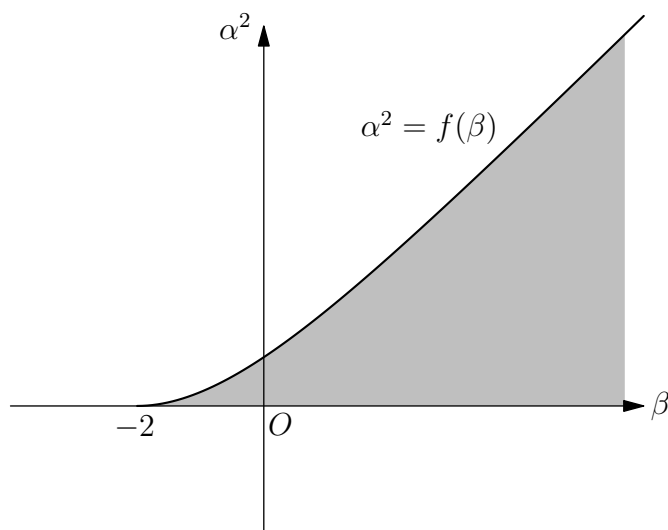


图 8.6: 参数  $\alpha^2, \beta$  的允许区域

为了对摆的运动分类, 考虑下面三种可能的情况:

1.  $\alpha = 0$ . 由式(8.78)可知, 此时  $\phi = \phi_0$  (常数), 此时球面摆即为在平面  $\phi = \phi_0$  上的单摆, 关于单摆的运动, 第8.1.6.2节中已进行过详细讨论。

2.  $0 < \alpha^2 < f(\beta)$ , 这种情况下角  $\theta$  在区间  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  内变化。在以悬挂点为中心半径为  $l$  的球面上,  $\theta = \theta_1$  和  $\theta = \theta_2$  画出两个圆, 它们位于平面  $z = z_1 = l \cos \theta_1$  和  $z = z_2 = l \cos \theta_2$  内。质点在两个平面所夹的球面区域上运动, 交替地与两个平面相切 (如图8.7所示)。

这种情形下, 点的中间位置总是位于过悬挂点  $O$  的水平面以下, 即  $z_1 + z_2 < 0$  或者  $u_1 + u_2 < 0$ 。在式(8.81)和式(8.82)中对比  $u$  一次项的系数可得

$$2(u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1) = -2$$

即有  $u_3 = -\frac{1 + u_1 u_2}{u_1 + u_2}$ , 由于  $-1 < u_1 < u_2 < 1$ , 所以  $u_1 u_2 > -1$ , 再考虑到  $u_3 > 0$ , 即有  $u_1 + u_2 < 0$ 。

式(8.78)说明角  $\phi$  或者单调增加 (当  $\alpha > 0$  时), 或者单调减少 (当  $\alpha < 0$  时)。图8.8给出了图8.7描述的运动轨迹在  $Oxy$  平面上的投影, 这时平面  $z = z_1$  和  $z = z_2$  都在悬挂点下方 (此时  $\alpha^2 > \beta$  并取  $\alpha > 0$ )。这个投影交替地与半径为  $\rho_1 = l \sin \theta_1$  和  $\rho_2 = l \sin \theta_2$  的两个圆相切。

作变量代换

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 v$$

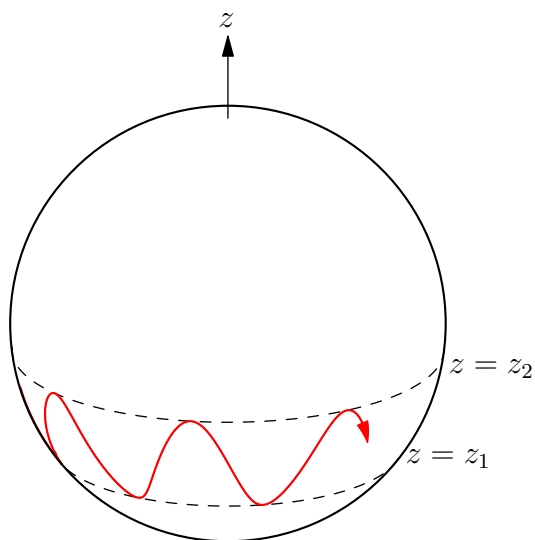
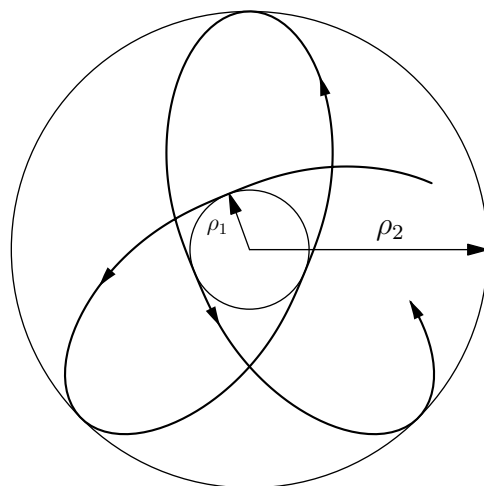


图 8.7: 球面摆的摆动

图 8.8: 球面摆摆动轨迹在  $Oxy$  平面的投影

方程(8.81)变为

$$\dot{v}^2 = \frac{\omega_0^2}{2}(u_3 - u_1)(1 - k^2 \sin^2 v) \quad (8.86)$$

其中

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \quad (0 \leq k^2 \leq 1) \quad (8.87)$$

取  $u = u_1$  的时刻为初始时刻, 则积分方程(8.86)可得

$$\omega_0 \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} t = \int_0^v \frac{dw}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 w}} = F(\sin v, k) \quad (8.88)$$

由此可得

$$\sin v = \operatorname{sn} \left( \omega_0 \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} t \right)$$

即

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2 \left( \omega_0 \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} t \right) = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2 \tau \quad (8.89)$$

其中  $\tau = \omega_0 \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} t$ 。由于椭圆函数  $\operatorname{sn} \tau$  的周期为  $4K(k)$ , 故  $\operatorname{sn}^2 \tau$  的周期为  $2K(k)$ 。由此可知, 当  $\tau = 2nK(k)$  时, 有  $u = \cos \theta = u_1$ , 当  $\tau = (2n+1)K(k)$  时, 有  $u = \cos \theta = u_2$ , 即角  $\theta$  在  $\theta_1$  和  $\theta_2$  之间周期振动, 其振动周期为

$$T = \frac{2\sqrt{2}K(k)}{\omega_0 \sqrt{u_3 - u_1}} \quad (8.90)$$

当  $\theta$  作为时间的函数求出之后, 积分方程(8.78)可得  $\phi(t)$ 。

需要注意的是, 虽然球面摆  $\theta$  角的变化是周期的, 但是由于在一个  $\theta$  的周期内,  $\phi$  角的改变量与  $2\pi$  的比值不一定是有理数, 因此球面摆有可能永远也没有办法回到其初始位置。

3.  $\alpha^2 = f(\beta)$ 。在这种情况下多项式  $G(u)$  的根  $u_1 = u_2 = u_* < 0$ , 问题变为圆锥摆。角  $\theta$  在运动过程中是常数  $\theta = \theta_* = \arccos u_* > \frac{\pi}{2}$ , 质点沿着平面  $z = z_* = l \cos \theta_* < 0$  内半径为  $l \sin \theta_*$  的圆周运动。

## 8.3 非完整系统的运动方程

### 8.3.1 Lagrange 乘子法求解线性非完整系统

设非完整系统有  $k$  个完整约束和  $k'$  个线性不可积运动约束, 由式(2.4a)和(2.4b)给出:

$$\begin{cases} f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 & (j = 1, 2, \dots, k) \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i + A_{j0} = 0 & (j = 1, 2, \dots, k') \end{cases} \quad \begin{matrix} (8.91a) \\ (8.91b) \end{matrix}$$

根据完整约束引入广义坐标  $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s = 3n - k)$  消去完整约束, 利用广义坐标可以将线性非完整约束(8.91b)表示为式(2.22)的形式:

$$\sum_{\alpha=1}^s B_{j\alpha}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha + B_{j0}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k') \quad (8.92)$$

其中的系数  $B_{j\alpha}$  和  $B_{j0}$  根据式(2.23)得到, 即

$$B_{j\alpha}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad B_{j0}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ji} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + A_{j0} \quad (8.93)$$

式(8.92)可以用广义虚位移表示为式(2.25), 即

$$\sum_{\alpha=1}^s B_{j\alpha}(\mathbf{q}, t) \delta q_\alpha = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k') \quad (8.94)$$

根据广义坐标形式的动力学普遍方程(2.58)可有

$$\sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha \right) \delta q_\alpha = 0 \quad (8.95)$$

但此处式(8.95)中的  $s$  个广义虚位移之间并不是相互独立的, 它们之间由  $k'$  个运动约束方程(8.94)相联系。引入  $k'$  个不定乘子  $\lambda_j(t)$ , 将其分别与方程(8.94)相乘, 并与广义坐标形式的动力学普遍方程(8.95)相减可得

$$\sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha - \sum_{j=1}^{k'} \lambda_j B_{j\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0 \quad (8.96)$$

在式(8.96)中的  $s$  个广义虚位移中, 只有  $f = s - k' = 3n - k - k'$  个是相互独立的, 而此处引入的  $k'$  个不定乘子是可以任意取值的, 那么总是可以选择这样的不定乘子  $\lambda_j(t)$ , 使得式(8.96)中前  $k'$  个广义虚位移的系数为零, 那么这样式(8.96)就只剩下相互独立的  $f = s - k'$  个广义虚位移, 它们的系数必须为零。综上可得非完整系统的运动微分方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha + \sum_{j=1}^{k'} \lambda_j B_{j\alpha} & (\alpha = 1, 2, \dots, s) \\ \sum_{\alpha=1}^s B_{j\alpha} \dot{q}_\alpha + B_{j0} = 0 & (j = 1, 2, \dots, k') \end{cases} \quad (8.97)$$

如果系统有广义势  $U = U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  则有

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (8.98)$$

由此可将系统方程(8.97)利用 Lagrange 函数改写为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{j=1}^{k'} \lambda_j B_{j\alpha} & (\alpha = 1, 2, \dots, s) \\ \sum_{\alpha=1}^s B_{j\alpha} \dot{q}_\alpha + B_{j0} = 0 & (j = 1, 2, \dots, k') \end{cases} \quad (8.99)$$

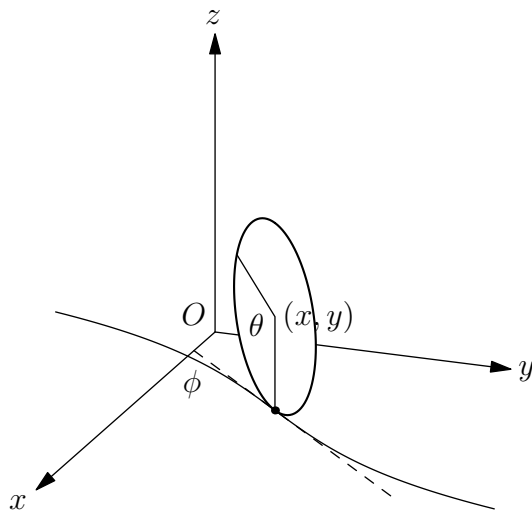


图 8.9: 例 8.5

例 8.5 (直立圆盘在水平面上的纯滚动)

解 此非完整系统有完整约束

$$z - R = 0$$

以及非完整约束

$$\begin{cases} \dot{x} - R\dot{\theta} \cos \phi = 0 \\ \dot{y} - R\dot{\theta} \sin \phi = 0 \end{cases}$$

由此可将广义坐标取为  $x, y, \theta, \phi$ , 系统的 Lagrange 函数为

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\phi}^2$$

考虑到

$$\begin{aligned} B_{11} &= 1, & B_{12} &= 0, & B_{13} &= -R \cos \phi, & \bar{A}_{14} &= 0 \\ B_{21} &= 0, & B_{22} &= 1, & B_{23} &= -R \sin \phi, & \bar{A}_{24} &= 0 \end{aligned}$$

由此可以写出系统方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda_1 & (8.100a) \\ m\ddot{y} = \lambda_2 & (8.100b) \\ I_1\ddot{\theta} = -R(\lambda_1 \cos \phi + \lambda_2 \sin \phi) & (8.100c) \\ I_2\ddot{\phi} = 0 & (8.100d) \\ \dot{x} - R\dot{\theta} \cos \phi = 0 & (8.100e) \\ \dot{y} - R\dot{\theta} \sin \phi = 0 & (8.100f) \end{cases}$$

由式(8.100d)可得

$$\phi = \omega_2 t + \phi_0$$

考虑 式(8.100a)  $\times R \cos \phi$  + 式(8.100b)  $\times R \sin \phi$  + 式(8.100c) 可得

$$mR(\ddot{x} \cos \phi + \ddot{y} \sin \phi) + I_1 \ddot{\theta} = 0 \quad (8.101)$$

再考虑  $\cos \phi \times \frac{d}{dt}$  式(8.100e) +  $\sin \phi \times \frac{d}{dt}$  式(8.100f) 可得

$$\ddot{x} \cos \phi + \ddot{y} \sin \phi - R\ddot{\theta} = 0 \quad (8.102)$$

由式(8.101)和式(8.102)可解得

$$\theta = \omega_1 t + \theta_0$$

于是根据式(8.100e)和式(8.100f)可得

$$\begin{cases} \dot{x} = R\omega_1 \cos(\omega_2 t + \phi_0) \\ \dot{y} = R\omega_1 \sin(\omega_2 t + \phi_0) \end{cases}$$

下面分两种情况讨论圆盘的运动,

1.  $\omega_2 = 0$ , 系统的解为

$$\begin{cases} x = R\omega_1 t \cos \phi_0 + x_0 \\ y = R\omega_1 t \sin \phi_0 + y_0 \\ \theta = \omega_1 t + \theta_0 \\ \phi = \phi_0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (8.103)$$

可见, 圆盘沿直线匀速滚动。运动过程自动保证约束条件, 约束反力为零。

2.  $\omega_2 \neq 0$ , 系统的解为

$$\begin{cases} x = \frac{R\omega_1}{\omega_2} \sin(\omega_2 t + \phi_0) - \frac{R\omega_1}{\omega_2} \sin \phi_0 + x_0 \\ y = -\frac{R\omega_1}{\omega_2} \cos(\omega_2 t + \phi_0) + \frac{R\omega_1}{\omega_2} \cos \phi_0 + y_0 \\ \theta = \omega_1 t + \theta_0 \\ \phi = \omega_2 t + \phi_0 \\ \lambda_1 = -R\omega_1 \omega_2 \sin \phi \\ \lambda_2 = R\omega_1 \omega_2 \cos \phi \end{cases} \quad (8.104)$$

可见, 圆盘沿圆周匀速滚动, 纯滚动条件自动保证, 约束反力垂直盘面, 提供向心力。

### 8.3.2 Appell 方程

Appell<sup>①</sup>提出了不包含约束乘子的运动方程, 既适用于完整系统, 也适用于有线性不可积运动约束的非完整系统。

<sup>①</sup> Paul Appell, 阿佩尔, 法国数学家。

## 8.3.2.1 伪坐标

Appell 方程是利用称为**伪坐标**的更一般形式的坐标来表示的。设  $f$  为系统的自由度, 考虑广义速度的  $f$  个相互独立的线性组合:

$$\dot{\pi}_\nu = \sum_{\alpha=1}^s C_{\nu\alpha} \dot{q}_\alpha \quad (\nu = 1, 2, \dots, f) \quad (8.105)$$

其中系数  $C_{\nu\alpha} = C_{\nu\alpha}(\mathbf{q}, t)$ 。此处的  $\dot{\pi}_\nu$  是广义速度的某些线性组合, 有完全确定的意义, 但是符号  $\pi_\nu$  可能没有意义, 因为式(8.105)的右端可能不是关于广义坐标和时间的函数对时间的全导数。而符号  $\ddot{\pi}_\nu$  就用来表示式(8.105)右端对时间的导数。我们称  $\pi_\nu$  为**伪坐标**, 而  $\dot{\pi}_\nu$  和  $\ddot{\pi}_\nu$  分别称为**伪速度**和**伪加速度**。

在定义伪速度时, 需要选择系数  $C_{\nu\alpha}$  使得从  $s = f + k'$  个方程(8.92)、(8.105)中解  $\dot{q}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, s$ ) 时, 系数行列式非零, 求解之后可得

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{\nu=1}^f D_{\nu\alpha} \dot{\pi}_\nu + g_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (8.106)$$

式中  $D_{i\alpha}$  和  $g_\alpha$  是  $\mathbf{q}$  和  $t$  的函数。伪速度  $\dot{\pi}_\nu$  可以任意取值, 当它们是给定的时, 可以通过式(8.106)求解出所有的广义速度。

根据式(8.105), 形式上引入

$$\delta\pi_\nu = \sum_{\alpha=1}^s C_{\nu\alpha} \delta q_\alpha \quad (\nu = 1, 2, \dots, f) \quad (8.107)$$

量  $\delta\pi_\nu$  称为**伪虚位移**, 式(8.107)是它的定义式。注意, 由于式(8.105)的右端不一定是全微分, 所以伪虚位移并不是真正的虚位移。利用方程(8.94)和式(8.107)求得用  $\delta\pi_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, f$ ) 表示的  $\delta q_\alpha$ :

$$\delta q_\alpha = \sum_{\nu=1}^f D_{\nu\alpha} \delta\pi_\nu \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (8.108)$$

这里的  $\delta\pi_\nu$  可以任意取值。

## 8.3.2.2 Appell 方程

为了得到 Appell 方程, 首先需要将动力学普遍方程(2.30)用伪坐标表示出来。首先考虑动力学普遍方程中的第一项:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha \quad (8.109)$$

将式(8.108)代入, 可得

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \sum_{\nu=1}^f D_{\nu\alpha} \delta\pi_\nu = \sum_{\nu=1}^f \left( \sum_{\alpha=1}^s D_{\nu\alpha} Q_\alpha \right) \delta\pi_\nu = \sum_{\nu=1}^f \Pi_\nu \delta\pi_\nu \quad (8.110)$$

式中

$$\Pi_\nu = \sum_{\alpha=1}^s D_{\nu\alpha} Q_\alpha \quad (\nu = 1, 2, \dots, f) \quad (8.111)$$

称为对应于伪坐标  $\pi_\nu$  的广义力。

现在考虑动力学普遍方程中的第二项, 由于

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (8.112)$$

将式(8.108)代入式(8.112)中, 可得

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \sum_{\nu=1}^f D_{\nu\alpha} \delta \pi_\nu = \sum_{\nu=1}^f \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} D_{\nu\alpha} \right) \delta \pi_\nu = \sum_{\nu=1}^f \mathbf{E}_{i\nu} \delta \pi_\nu \quad (8.113)$$

式中

$$\mathbf{E}_{i\nu} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} D_{\nu\alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, f)$$

此处考虑将式(8.113)用加速度  $\mathbf{a}_i$  来表示。将等式(8.106)两端对时间求导, 然后将得到的  $\dot{q}_\alpha$  代入加速度与广义加速度、广义速度的关系式(2.19)中, 可得

$$\mathbf{a}_i = \sum_{\nu=1}^f \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} D_{\nu\alpha} \right) \ddot{\pi}_\nu + \mathbf{H}_i = \sum_{\nu=1}^f \mathbf{E}_{i\nu} \ddot{\pi}_\nu + \mathbf{H}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8.114)$$

此处  $\mathbf{H}_i$  不依赖于  $\ddot{\pi}_\nu$ , 由此可得

$$\mathbf{E}_{i\nu} = \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \ddot{\pi}_\nu} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, f) \quad (8.115)$$

将式(8.115)代入式(8.113)中, 可得虚位移  $\delta \mathbf{r}_i$  可以用加速度和伪虚位移表示为:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\nu=1}^f \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \ddot{\pi}_\nu} \delta \pi_\nu \quad (8.116)$$

由此, 动力学普遍方程的第二项可以写为

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \cdot \sum_{\nu=1}^f \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \ddot{\pi}_\nu} \delta \pi_\nu = \sum_{\nu=1}^f \left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \ddot{\pi}_\nu} \right) \delta \pi_\nu \quad (8.117)$$

引入函数  $S$  为

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i^2 \quad (8.118)$$

称为**加速度能**, 在一般情况下, 它是  $q_1, \dots, q_s, \dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_f, \ddot{\pi}_1, \dots, \ddot{\pi}_f$  的函数。利用加速度能, 可以将式(8.117)表示为

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\nu=1}^f \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_\nu} \delta \pi_\nu \quad (8.119)$$

根据式(8.110)和式(8.119), 动力学普遍方程可以用伪坐标表示为

$$\sum_{\nu=1}^f \left( \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_\nu} - \Pi_\nu \right) \delta \pi_\nu = 0 \quad (8.120)$$

因为伪虚位移  $\delta \pi_\nu (\nu = 1, 2, \dots, f)$  可以任意取值, 所以有

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_\nu} = \Pi_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, f) \quad (8.121)$$

方程(8.121)称为 Appell 方程, 它们需要与非完整约束方程(8.92)和伪速度定义式(8.105)联立求解。即非完整系的运动微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}_\nu} = \Pi_\nu & (\nu = 1, 2, \dots, f) \\ \sum_{\alpha=1}^s B_{j\alpha}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha + B_{j0}(\mathbf{q}, t) = 0 & (j = 1, 2, \dots, k') \\ \dot{\pi}_\nu = \sum_{\alpha=1}^s C_{\nu\alpha} \dot{q}_\alpha & (\nu = 1, 2, \dots, f) \end{cases} \quad (8.122)$$

共有  $k' + 2f = s + f$  个方程, 共同决定  $s + f$  个位置函数即  $s$  个广义坐标  $q_1, q_2, \dots, q_s$  和  $f$  个伪速度  $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \dots, \dot{\pi}_f$ 。

这里需要指出的一点是, Appell 方程也可以应用于完整系。当其应用于完整系时, 将伪速度取为广义速度, 得到的方程只是 Lagrange 方程的另一种形式。

为了得到 Appell 方程, 需要根据式(8.118)计算加速度能, 并根据式(8.111)确定与伪坐标对应的广义力, 这是十分繁琐的过程。

### 8.3.2.3 加速度能的计算 · König 定理的类比

设  $\mathbf{a}_C$  是系统质心的绝对加速度,  $\mathbf{a}_i$  是质点  $m_i$  的绝对加速度, 而  $\mathbf{a}'_i$  是该质点相对质心的加速度, 那么对于每一个质点都有

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i + \mathbf{a}_C \quad (8.123)$$

将其代入加速度能的定义式(8.118)中, 可得

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_C^2 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}'_i \cdot \mathbf{a}_C + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}'_i{}^2 \quad (8.124)$$

由于  $\sum_{i=1}^n m_i = M$  以及  $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{0}$ , 可有

$$S = \frac{1}{2} M \mathbf{a}_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}'_i{}^2 = S_C + S' \quad (8.125)$$

即系统的加速度能等于位于质心的质量等于系统总质量的质点的加速度能与系统相对质心的加速度能之和。这个结论与动能的 König 定理 (见式(1.93)) 具有相同的形式。

### 8.3.2.4 定点运动刚体的加速度能

刚体的纯滚动是最常见的非完整约束。纯滚动下, 刚体与滚动平面接触点的绝对速度等于零, 这可以表示为

$$\mathbf{v}_C - R(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (8.126)$$

式中  $\mathbf{v}_C$  表示刚体质心的速度,  $\mathbf{n}$  为滚动面在接触点处的法向单位矢量,  $R$  为刚体质心到接触点的距离。在很多情况下, 角速度矢量并不能表示为某个函数对时间的全导数, 因此纯滚动约束方程(8.126)通常是不可积运动约束<sup>①</sup>。

<sup>①</sup> 需要指出的是, 虽然约束(8.126)是非完整的, 但它仍然是一个理想约束。



将刚体的本系统记作  $Oxyz$ , 坐标原点为刚体的固定点  $O$ , 坐标轴分别为刚体对  $O$  点的三个惯性主轴。设  $\boldsymbol{\omega}$  为刚体的角速度, 在本系统中, 其分量分别为  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 。根据式(5.21)可得, 刚体上任意一点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \boldsymbol{r} \quad (8.127)$$

所以加速度在本系统中的三个分量分别为

$$\begin{cases} a_1 = -x(\omega_2^2 + \omega_3^2) + y(\omega_2\omega_1 - \dot{\omega}_3) + z(\omega_1\omega_3 + \dot{\omega}_2) \\ a_2 = -y(\omega_3^2 + \omega_1^2) + z(\omega_3\omega_2 - \dot{\omega}_1) + x(\omega_2\omega_1 + \dot{\omega}_3) \\ a_3 = -z(\omega_1^2 + \omega_2^2) + x(\omega_1\omega_3 - \dot{\omega}_2) + y(\omega_3\omega_2 + \dot{\omega}_1) \end{cases} \quad (8.128)$$

加速度能在刚体上则可以表示为

$$S = \frac{1}{2} \int_V \rho(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) dV$$

将式(8.128)代入并注意到, 在主轴系中有

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_V \rho(y^2 + z^2) dV, \quad I_2 = \int_V \rho(z^2 + x^2) dV, \quad I_3 = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV \\ \int_V \rho yz dV &= \int_V \rho zx dV = \int_V \rho xy dV = 0 \end{aligned}$$

可得

$$S = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \dot{\omega}_1 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 \dot{\omega}_2 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \dot{\omega}_3 \quad (8.129)$$

例 8.6 (利用 Appell 方程获得 Euler 动力学方程) 将伪速度取为角动量的三个分量<sup>①</sup>, 即

$$\dot{\pi}_1 = \omega_1, \dot{\pi}_2 = \omega_2, \dot{\pi}_3 = \omega_3。这里需要获得与伪坐标对应的广义力, 记  $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$ , 并考虑$$

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} dt = d\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{r}$$

其中最后一个等号是形式上的, 所以有

$$\int_V \boldsymbol{f} dV \cdot d\boldsymbol{r} = \int_V (\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}) dV = \int_V \boldsymbol{f} \cdot (d\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{r}) dV = \int_V d\boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}) dV = \int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} dV \cdot d\boldsymbol{\pi}$$

即有

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{M}_O \cdot d\boldsymbol{\pi}$$

根据等时变分运算与微分运算的相似性, 可以直接得到

$$\boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{M}_O \cdot \delta \boldsymbol{\pi}$$

由此可得相应于伪坐标  $\pi_i$  的广义力即为

$$\Pi_1 = M_1, \quad \Pi_2 = M_2, \quad \Pi_3 = M_3$$

然后根据加速度能(8.129)和 Appell 方程(8.121)可以直接得到 Euler 动力学方程。

<sup>①</sup> 根据 Euler 运动学方程, 这样定义出的伪速度确实是广义速度的线性组合, 而且它们之间是线性无关的。

例 8.7 (利用 Appell 方程重新求解例 8.5) 系统的非完整约束可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = R\dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{y} = R\dot{\theta} \sin \phi \end{cases}$$

圆盘的加速度能可以利用式(8.125)来计算, 即

$$S = \frac{1}{2}m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{2}(I_1\ddot{\theta}^2 + I_2\ddot{\phi}^2)$$

其中  $I_1 = \frac{1}{2}mR^2$  为圆盘绕过其中心并与盘面垂直轴自转时的转动惯量,  $I_2 = \frac{1}{4}mR^2$  为圆盘绕过其中心的竖直轴旋转时的转动惯量。

将伪速度取为  $\dot{\pi}_1 = \dot{\theta}$ ,  $\dot{\pi}_2 = \dot{\phi}$ , 则有

$$\begin{cases} \ddot{x} = R(\ddot{\theta} \cos \phi - \dot{\theta}\dot{\phi} \sin \phi) \\ \ddot{y} = R(\ddot{\theta} \sin \phi + \dot{\theta}\dot{\phi} \cos \phi) \end{cases}$$

由此可得加速度能为

$$S = \frac{1}{2}mR^2(\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mR^2\ddot{\phi}^2\right) = \frac{3}{4}mR^2\ddot{\theta}^2 + \frac{1}{8}mR^2\ddot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\dot{\phi}^2$$

再考虑到圆盘所受的主动动力只有重力, 所有主动动力都不做功, 因此有  $\Pi_1 = \Pi_2 = 0$ 。所以, 根据 Appell 方程(8.121)可得

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{\phi} = 0 \end{cases}$$

这与例 8.5 所得到的结果相同。

## 8.4 Poisson 括号

### 8.4.1 Poisson 括号的定义

对两个系统状态函数  $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  和  $g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , 定义

$$[f, g] = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \right) = \sum_{\alpha=1}^s \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} & \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \\ \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} & \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial(f, g)}{\partial(q_{\alpha}, p_{\alpha})} \quad (8.130)$$

称为 Poisson 括号。

$$[q_{\alpha}, q_{\beta}] = 0, \quad [p_{\alpha}, p_{\beta}] = 0, \quad [q_{\alpha}, p_{\beta}] = \delta_{\alpha\beta} \quad (8.131)$$

称为基本 Poisson 括号, 这里  $\delta_{\alpha\beta}$  是 Kronecker 符号, 定义为

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

根据 Poisson 括号的定义, 容易得到

$$[q_{\alpha}, f] = \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}}, \quad [p_{\alpha}, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \quad (8.132)$$

## 8.4.2 Poisson 括号的性质

利用 Poisson 括号的定义和行列式的性质很容易得到 Poisson 括号的以下性质：

1. 反对称性：

$$[f, g] = -[g, f] \quad (8.133)$$

特别地，可有  $[f, f] = 0$ ；

2. 线性性：

$$[f, C_1 g + C_2 h] = C_1 [f, g] + C_2 [f, h], \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (8.134)$$

3. 结合性：

$$[f, gh] = [f, g]h + g[f, h] \quad (8.135)$$

4. Leibniz 性：

$$\frac{\partial}{\partial x} [f, g] = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial x} \right], \quad x \in \{\mathbf{q}, \mathbf{p}, t\} \quad (8.136)$$

5. Jacobi 恒等式：

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (8.137)$$

## 8.4.3 正则方程的 Poisson 括号形式

设有函数  $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ，考虑

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \dot{p}_{\alpha} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \quad (8.138)$$

此处利用了 Hamilton 正则方程，由此得到

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] \quad (8.139)$$

如果函数  $f$  不显含时间，即  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ，则有

$$\frac{df}{dt} = [f, H](?) \quad (8.140)$$

分别将函数  $f$  取为  $q_{\alpha}$  和  $p_{\alpha}$  可得正则方程的 Poisson 括号形式

$$\begin{cases} \frac{dq_{\alpha}}{dt} = [q_{\alpha}, H] \\ \frac{dp_{\alpha}}{dt} = [p_{\alpha}, H] \end{cases} \quad (8.141)$$

将函数  $f$  取为  $H$  则得到

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (8.142)$$

如果将  $[f, H]$  记作  $\hat{H}f$ ，此处  $\hat{H}$  称为算子，它代表一种操作——即求该函数与 Hamilton 函数的 Poisson 括号。如果  $f$  不显含时间，可有

$$\frac{df}{dt} = [f, H] = \hat{H}f$$

依次可有

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dt^2} &= \frac{d}{dt}[f, H] = [\hat{H}f, H] = \hat{H}(\hat{H}f) = \hat{H}^2 f \\ &\vdots \\ \frac{d^n f}{dt^n} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} \right) = [\hat{H}^{n-1} f, H] = \hat{H}(\hat{H}^{n-1} f) = \hat{H}^n f\end{aligned}$$

如果不考虑收敛的问题, 任何正则变量的函数可以用 Taylor 级数表示为

$$f(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dt^n}(0) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{H}^n f(0) = e^{t\hat{H}} f(0)$$

由此, 可以得到运动的算子形式解。

例 8.8 利用算子形式求解一维谐振子, 其 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

解 根据基本 Poisson 括号(8.131)可得

$$[q, q] = 0, \quad [p, p] = 0, \quad [q, p] = 1$$

可得

$$\begin{aligned}[q, H] &= \frac{1}{2m}[q, p^2] + \frac{1}{2}m\omega^2[q, q^2] = \frac{1}{2m}([q, p]p + p[q, p]) = \frac{p}{m} \\ [p, H] &= \frac{1}{2m}[p, p^2] + \frac{1}{2}m\omega^2[p, q^2] = \frac{1}{2}m\omega^2([p, q]q + q[p, q]) = -m\omega^2 q\end{aligned}$$

由此可以依次计算

$$\begin{aligned}\hat{H}q &= [q, H] = \frac{p}{m} \\ \hat{H}^2 q &= \frac{1}{m}[p, H] = -\omega^2 q \\ \hat{H}^3 q &= -\omega^2[q, H] = -\omega^2 \frac{p}{m} \\ \hat{H}^4 q &= -\frac{\omega^2}{m}[p, H] = (-\omega^2)^2 q \\ &\vdots \\ \hat{H}^{2m-1} q &= (-\omega^2)^{m-1} \frac{p}{m} \\ \hat{H}^{2m} q &= (-\omega^2)^m q \\ &\vdots\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}q(t) &= \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} \hat{H}^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{2m-1}}{(2m-1)!} \hat{H}^{2m-1} \right] q(0) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\omega t)^{2m}}{(2m)!} q(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (\omega t)^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{p(0)}{m\omega} \\ &= q(0) \cos \omega t + \frac{p(0)}{m\omega} \sin \omega t\end{aligned}$$

### 8.4.4 Poisson 定理 · 系统的可积性

系统力学状态随时间演变时不变的力学量称为运动积分，即运动积分需要满足

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 \quad (8.143)$$

定理 8.4.1 (Poisson 定理) 两个运动积分的 Poisson 括号仍为运动积分，即如果有

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{dg}{dt} = 0 \quad (8.144)$$

则有

$$\frac{d}{dt}[f, g] = 0 \quad (8.145)$$

即  $[f, g]$  也是运动积分。

证明 由于

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$$

所以有  $\frac{\partial f}{\partial t} = -[f, H]$ ，同理可有  $\frac{\partial g}{\partial t} = -[g, H]$ 。由此可有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f, g] &= \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + [[f, g], H] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + [[f, g], H] \\ &= [-[f, H], g] + [f, -[g, H]] + [[f, g], H] \\ &= -[f, [g, H]] - [g, [H, f]] - [H, [f, g]] = 0 \end{aligned} \quad \square$$

例 8.9 (角动量的 Poisson 括号) 角动量可以表示为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] = [yp_z, zp_x] + [zp_y, xp_z] \\ &= y[p_z, z]p_x + x[z, p_z]p_y = xp_y - yp_x = L_z \end{aligned}$$

同理可有

$$[L_y, L_z] = L_x, \quad [L_z, L_x] = L_y$$

考虑

$$\begin{aligned} [L_z, L^2] &= [L_z, L_x^2] + [L_z, L_y^2] + [L_z, L_z^2] \\ &= [L_z, L_x]L_x + L_x[L_z, L_x] + [L_z, L_y]L_y + L_y[L_z, L_y] \\ &= L_yL_x + L_xL_y - L_xL_y - L_yL_x = 0 \end{aligned}$$

同理可有

$$[L_x, L^2] = [L_y, L^2] = [L_z, L^2] = 0$$

由此可得，若角动量任意两分量守恒，则第三分量亦守恒。角动量三分量变化不独立，这与两次异轴转动可合成绕第三轴转动的事实相照应。

对于有  $s$  个自由度的力学系统，如果可以找到  $s$  个相互独立的运动积分  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s$ ，且满足

$$[\phi_\alpha, \phi_\beta] = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, s) \quad (8.146)$$

这样的系统称为**可积系统**，此时称  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s$  是**相互对合的**。这个结论是 Liouville 首先证明的，故也称为 Liouville 定理，相应地上述可积性称为 Liouville 可积性。

Poisson 定理似乎表明，总是可以根据两个已知的运动积分找到另一个运动积分。但是，很多情况下这并不能得到有意义的结果，得到的 Poisson 括号经常是常数或者是已知运动积分的函数。例如例8.9说明，如果  $L_z$  和  $L^2$  都是运动积分，则根据 Poisson 定理， $[L_z, L^2] = 0$  也是运动积分，但是用 0 作为运动积分并没有意义。

如果希望从两个已知的运动积分得到更多运动积分，甚至得到可积系统的全部运动积分，需要最初的两个已知运动积分中至少有一个能够刻画出给定问题的局部特征，能够完全反映该问题的物理本质。如果最初的两个已知的运动积分都是由所有系统都成立的动力学定理获得的，则一般不能有效地应用 Poisson 定理。

## 8.4.5 量子 Poisson 括号

量子 Poisson 括号定义为

$$[f, g]_- = fg - gf \quad (8.147)$$

在量子力学中，将正则方程中的 Poisson 括号  $[f, g]$  替换为  $\frac{1}{i\hbar}[f, g]_-$  的过程，称为**正则量子化**。力学量的乘积一般非对易，可用算符或矩阵表示。

基本 Poisson 括号表示为

$$[q_i, p_j]_- = i\hbar\delta_{ij}, \quad [q_i, q_j]_- = 0, \quad [p_i, p_j]_- = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (8.148)$$

可有 Heisenberg 方程

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[f, H]_- \quad (8.149)$$

取宏观极限

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar}[f, g]_- = [f, g]$$

时，动力学过渡为经典力学。

## 第九章 积分变分原理

### 9.1 泛函与变分法

#### 9.1.1 泛函

依赖于函数关系的变量，即函数之函数，称为泛函。如果泛函只依赖于一个函数关系，称之为一元泛函，记作  $J = J[y(x)]$ 。在物理学中常见的一元泛函一般具有如下形式

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (9.1)$$

如果泛函依赖于多个函数关系，则称之为多元泛函，记作  $J = J[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$ ，在物理学中常见的多元泛函一般具有如下形式

$$J[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx \quad (9.2)$$

如果形式上记  $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ ，则多元泛函可以简记作

$$J[\mathbf{y}(x)] = \int_a^b F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx \quad (9.3)$$

#### 9.1.2 泛函极值问题与变分法

变分问题始于最速降线问题（1696, J. Bernoulli）：给定重力场中两端点，求从一点到另一点用时最短的光滑轨道。即求自变函数  $y(x)$ ，使泛函  $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx$  在边界条件  $y(a) = y_A, y(b) = y_B$  下取得极值，即对与函数  $y(x)$  临近、但满足边界条件的任意函数  $f(x)$ ，都有

$$J[f(x)] - J[y(x)] \geq (\leq) 0 \quad (9.4)$$

此处，与函数  $y(x)$  临近、但满足边界条件的任意函数  $f(x)$  可以表示为

$$f(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x) \quad (9.5)$$

其中  $\alpha$  为实数，是函数  $f$  的参数，表征  $f(x)$  与  $y(x)$  的接近程度； $\eta(x)$  是任意可微函数，满足

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \quad (9.6)$$

因此, 泛函在  $y(x)$  邻域的值可以表示为关于  $\alpha$  的一个一元函数, 即

$$J(\alpha) = J[f(x, \alpha)] = \int_a^b F(x, f, f') dx \quad (9.7)$$

当  $\alpha = 0$  时,  $J[f(x, 0)]$  即为  $J[y(x)]$ , 因此泛函取极值的条件(9.4)即可表示为

$$J(\alpha) - J(0) \geq (\leq) 0 \quad (9.8)$$

它的必要条件为

$$\frac{dJ}{d\alpha}(0) = 0 \quad (9.9)$$

为此, 只需计算式(9.9)左端的导数值:

$$\frac{dJ}{d\alpha}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_a^b F(x, f, f') dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial f'} \frac{\partial f'}{\partial \alpha} \right) dx \quad (9.10)$$

根据式(9.5)可得

$$f'(x, \alpha) = y'(x) + \alpha \eta'(x) \quad (9.11)$$

根据式(9.5)和(9.11)可得

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \eta(x), \quad \frac{\partial f'}{\partial \alpha} = \eta'(x) \quad (9.12)$$

将式(9.12)代入式(9.10)中, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\alpha}(\alpha) &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial f} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial f'} \eta'(x) \right] dx \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial f} \eta(x) + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial f'} \eta(x) \right) - \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \eta(x) \right] dx \\ &= \frac{\partial F}{\partial f'} \eta(x) \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{\partial F}{\partial f} \right) \eta(x) dx \end{aligned} \quad (9.13)$$

注意到  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , 并且在式(9.13)中令  $\alpha = 0$ , 则泛函取极值的必要条件(9.9)可以写作

$$\frac{dJ}{d\alpha}(0) = - \int_a^b \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{\partial F}{\partial f} \right) \eta(x) dx = 0 \quad (9.14)$$

在上面的过程中, 将与自变函数临近、但满足边界条件的任意函数  $f(x, \alpha)$  对参数  $\alpha$  的微分称为**自变函数的变分**, 记作  $\delta y$ , 即

$$\delta y(x) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) d\alpha = \eta(x) d\alpha$$

由于  $\eta(x)$  是任意可微函数, 因此  $\delta y(x)$  也是可微的任意函数, 此时边界条件(9.6)可以表示为

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0 \quad (9.15)$$

类比于微分运算, 将已知函数  $y(x)$  求其变分的运算称为**变分运算**,  $\delta$  称为变分运算符。式(9.11)说明: 变分运算与求导运算可以交换次序, 即

$$\delta \frac{dy}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \delta y(x) \quad (9.16)$$

同时, 将函数  $J(\alpha)$  对  $\alpha$  的微分称为泛函  $J[y(x)]$  的**变分**, 记作  $\delta J$ 。根据式(9.13)的结果, 可得泛函  $J[y(x)]$  的变分为

$$\delta J = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y dx \quad (9.17)$$



根据上文中对变分算符的定义, 算符  $\delta$  实际上就是对参数  $\alpha$  的微分运算, 反应在变分算符本身上, 它的运算规则与微分运算相同, 但不作用在自变量  $x$  上。因此, 今后在使用变分法的时候, 不再将泛函  $J[y(x)]$  利用式(9.7)转化为一元函数进行处理, 而是直接利用变分运算的运算规则来进行运算。

由此根据式(9.14)和泛函变分的定义, 可得泛函取极值的必要条件为:

$$\delta J = 0 \quad (9.18)$$

对于本节讨论的特殊形式泛函(9.1), 则可表示为

$$\delta J = - \int_a^b \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y dx = 0 \quad (9.19)$$

式(9.18)仅为泛函取极值的必要条件, 所得的自变函数  $y(x)$  能否使得泛函  $J[y(x)]$  取得极值, 还需确定相应的二阶变分, 类似于上面(一阶)变分的定义, 二阶变分定义为

$$\delta^2 J = \frac{d^2 J}{d\alpha^2}(\alpha) d\alpha^2 \quad (9.20)$$

如果  $\delta^2 J < 0$ , 则相应的极值为极大值; 如果  $\delta^2 J > 0$ , 则相应的极值为极小值; 如果  $\delta^2 J = 0$ , 则相应的自变函数是否能使得泛函取极值还需更高阶变分来确定。

### 9.1.3 Euler-Lagrange 方程

这里在给定固定边界条件(9.15)的情形下, 应用变分运算的运算规则重新计算一次泛函(9.1)的变分

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta \int_a^b F(x, y, y') dx = \int_a^b \delta F(x, y, y') dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \right] dx \\ &= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y dx = - \int_a^b \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y dx \end{aligned}$$

为了由必要条件(9.19)得到泛函取极值时, 自变函数  $y(x)$  需要满足的方程, 需要引入如下定理。

**定理 9.1.1 (变分学基本定理)** 如果连续函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  上对于任意具有紧支集的光滑函数  $\eta(x)$  都满足

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = 0 \quad (9.21)$$

则在  $(a, b)$  上有  $f(x) \equiv 0$ 。

**证明** 利用反证法。设对于  $x_0 \in (a, b)$  有  $f(x_0) \neq 0$ , 由于  $f(x)$  是连续的, 存在一个  $x_0$  的邻域, 在其中  $f(x)$  的值都非零。根据函数  $\eta(x)$  的任意性, 可取  $\eta(x)$  在相同的区间内值非零, 则定积分  $\int_a^b f(x) \eta(x) dx$  的值也必然非零, 据此可知必然有  $f(x) \equiv 0$ 。□

根据定理9.1.1, 由于  $\delta y$  是任意函数, 可有

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (9.22)$$

式(9.22)称为 Euler-Lagrange 方程<sup>①</sup>, 它是泛函(9.1)取极值的一个必要条件。

由于

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} y' - F \right) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) - \left( \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \\ &= \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) y' - \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}\end{aligned}$$

因此可得, 如果函数  $F$  不显含  $x$ , 则 Euler-Lagrange 方程有首次积分

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = C \quad (\text{常数}) \quad (9.23)$$

例 9.1 (最速降线问题) 给定重力场中两 endpoints, 求从一点到另一点用时最短的光滑轨道。

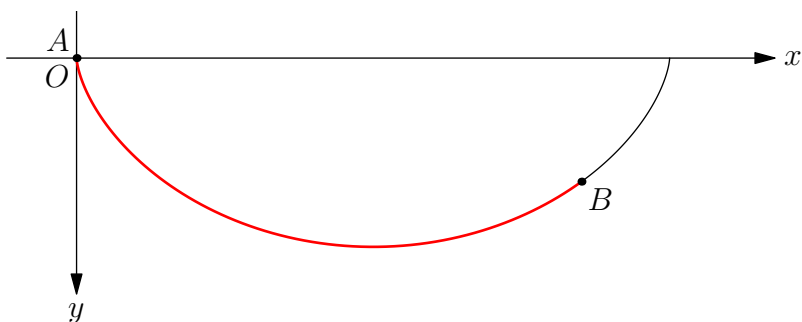


图 9.1: 最速降线

解 所求的时间可以表示为

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx$$

即此时

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

由于  $F$  不显含  $x$ , 利用 Euler-Lagrange 方程的首次积分(9.23)可得

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = -\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{2C_1}} \quad (\text{常数})$$

所以有

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2C_1 - y}{y}}$$

做换元  $y = C_1(1 - \cos \theta)$ , 可得

$$\begin{cases} x = C_1(\theta - \sin \theta) + C_2 \\ y = C_1(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

这是一条倒置的旋轮线 (摆线), 如图9.1所示, 其中的常数  $C_1, C_2$  由边界条件 (即  $B$  点的坐标) 决定。

例 9.2 (球面短程线 (测地线)) 求球面上连接任意两点之间的最短曲线。

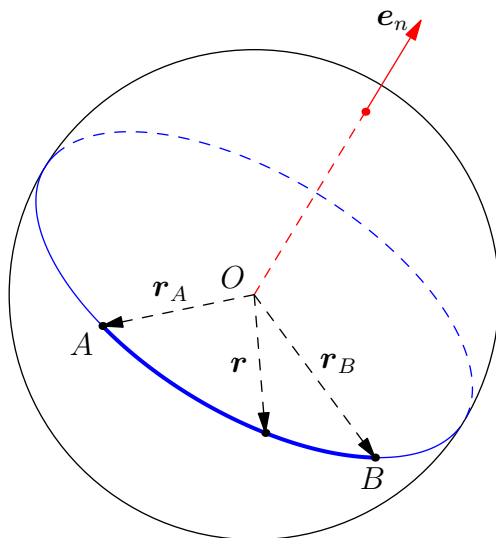


图 9.2: 球面短程线示意图

解 在球面上取球面坐标, 则球面上的曲线可以表示为

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \theta(\phi) \end{cases}$$

根据球坐标系的距离元素表达式可得球面上曲线的弧长元素为

$$ds = R\sqrt{(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2} = R\sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta} d\phi$$

所以, 球面上曲线的弧长为

$$s = R \int_{\phi_A}^{\phi_B} \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta} d\phi$$

即此时

$$F(\phi, \theta, \theta') = \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta}$$

由于  $F$  不显含  $\phi$ , 利用 Euler-Lagrange 方程的首次积分(9.23)可得

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} \theta' - F = -\frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta}} = -\cos \theta_0 \quad (\text{常数})$$

由此可得

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \sin^2 \theta \sqrt{\tan^2 \theta_0 - \cot^2 \theta}$$

解得

$$\phi - \arccos(-\cot \theta_0 \cot \theta) = \phi_0 \quad (\text{常数}) \quad (9.24)$$

整理可得

$$\cos \phi \cos \phi_0 + \sin \phi \sin \phi_0 + \cot \theta \cot \theta_0 = 0$$

在上式两端乘  $R \sin \theta \sin \theta_0$ , 并考虑到球坐标系的坐标转换关系, 可得

$$x \sin \theta_0 \cos \phi_0 + y \sin \theta_0 \sin \phi_0 + z \cos \theta_0 = 0$$

① 可以看到, Euler-Lagrange 方程与理想完整有势系的 Lagrange 方程(2.59)具有完全相同的形式。因此可以想见, 理想完整有势系的 Lagrange 方程也是某种变分原理 (即 Hamilton 原理) 的结果。

此处, 记  $\mathbf{e}_n = \sin \theta_0 \cos \phi_0 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_0 \sin \phi_0 \mathbf{e}_2 + \cos \theta_0 \mathbf{e}_3$ , 则上式可记作

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n = 0$$

边界条件为

$$\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{e}_n = 0$$

由此, 短程线即为  $OAB$  平面与球面的交线之间较短的弧, 即大圆弧。此处  $\mathbf{e}_n$  即为  $OAB$  平面的法向量。

## 9.1.4 多元泛函极值问题

考虑多元泛函(9.2)

$$J[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y'_1, y'_2, \cdots, y'_n) dx$$

在固定边界条件

$$\delta y_i(a) = \delta y_i(b) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

下, 泛函的变分为

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_a^b \delta F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y'_1, y'_2, \cdots, y'_n) dx \\ &= \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) dx \\ &= \int_a^b \left[ \frac{d}{dx} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y_i \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} \right) \delta y_i \right] dx \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y_i \Big|_a^b - \int_a^b \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} \right) \delta y_i dx \\ &= - \int_a^b \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} \right) \delta y_i dx = 0 \end{aligned} \quad (9.25)$$

对于多元泛函, 也同样有如下定理。

**定理 9.1.2 (变分学基本定理 (多元泛函))** 如果  $n$  个的连续函数  $f_i(x) (i = 1, 2, \cdots, n)$  在开区间  $(a, b)$  上对于  $n$  相互独立、任意具有紧支集的光滑函数  $\eta_i(x)$ , 都满足

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(x) \eta_i(x) dx = 0 \quad (9.26)$$

则在  $(a, b)$  上有  $f_i(x) \equiv 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 。

根据定理9.1.2, 由于  $\delta y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$  是  $n$  的相互独立的任意函数, 所以有

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (9.27)$$

当  $F$  不显含  $x$  时, 式(9.27)同样有首次积分

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_i} y'_i - F = C \quad (\text{常数}) \quad (9.28)$$

### 9.1.5 约束条件下的变分问题

设多元泛函(9.2)表示为

$$J[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

现在想要求得泛函(9.2)在  $m$  个约束条件 ( $m < n$ )

$$\int_a^b G_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (9.29)$$

下的极值。

在这种情况下, 可以先无视约束条件(9.29), 根据极值的必要条件可得式(9.25)的结果, 即

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} \right) \delta y_i dx = 0 \quad (9.30)$$

但式(9.30)中的  $\delta y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 之间并不相互独立, 它们之间由  $m$  个约束条件(9.29)相联系, 因此不能直接应用定理9.1.2得到 Euler-Lagrange 方程。

此时可以利用 Lagrange 乘子法, 首先将约束条件(9.29)求变分, 可得

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial G_j}{\partial y'_i} - \frac{\partial G_j}{\partial y_i} \right) \delta y_i dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (9.31)$$

引入  $m$  个不定乘子  $\lambda_i$ , 将其分别与式(9.31)相乘, 并加到式(9.30)上, 可得

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial G_j}{\partial y'_i} - \frac{\partial G_j}{\partial y_i} \right) \right] \delta y_i dx = 0 \quad (9.32)$$

由此可得取得约束极值需要满足的方程为

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'_i} \left( F + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j \right) - \frac{\partial}{\partial y_i} \left( F + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.33)$$

式(9.33)的  $n$  个方程和约束条件(9.29)合起来正好可以决定  $n$  个函数和  $m$  个乘子。

**例 9.3** 设平面上的封闭曲线长度为  $l$ , 试求其所围面积最大的曲线方程。

**解** 设曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

其中  $t$  为曲线的参数, 它的取值范围为  $0 \leq t \leq 2\pi$ 。由于曲线是封闭的, 因此有  $x(0) = x(2\pi), y(0) = y(2\pi)$ 。

约束可以表示为

$$l = \oint_C ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

曲线  $C$  所围成的面积则表示为

$$S = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt$$

引入不定乘子  $\lambda$  则函数

$$L = \frac{1}{2}(xy' - yx') + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

满足 Euler-Lagrange 方程(9.33), 即

$$\begin{cases} x' + \lambda \frac{d}{dt} \left( \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) = 0 \\ y' - \lambda \frac{d}{dt} \left( \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) = 0 \end{cases}$$

将上面两式分别积分, 可得

$$\begin{cases} x + \frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C_1 \\ y - \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C_2 \end{cases}$$

其中  $C_1, C_2$  为积分常数, 从中消去  $\lambda$  可得

$$(x - C_1)dx + (y - C_2)dy = 0$$

再积分可得

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3$$

其中  $C_3$  是积分常数。这说明, 在封闭曲线长度固定的条件下, 所围面积最大的曲线是圆。根据约束, 积分常数  $C_3$  可由约束确定。

## 9.2 Hamilton 原理

### 9.2.1 理想完整系统的正路和旁路

在第2.4节中介绍了微分变分原理, 它们给出了在给定时刻从力学系统的所有约束允许的可能运动中区分出真实运动的准则。与微分变分原理不同, 积分变分原理不是给出某个时刻真实运动的判据, 而是给出某个有限时间段  $t_0 \leq t \leq t_1$  内真实运动的判据, 描述了系统在整个时间段内的运动。

设力学系统受理想双面完整约束,  $A_i$  和  $B_i$  分别是系统内的质点  $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$  在  $t = t_0$  和  $t = t_1$  时刻的可能位置, 系统在  $t = t_0$  的位置称为**初位置**, 在  $t = t_1$  的位置称为**末位置**。假设在  $t = t_0$  时刻可以选择系统内各质点的速度, 使它们分别在  $t = t_1$  时刻占据自己的末位置。系统质点从初位置  $A_i$  移动到末位置  $B_i$  所画出的轨迹形成了系统的真实路径, 称为**正路**。

在正路上, 系统的质点  $m_i$  画出一条连接  $A_i$  和  $B_i$  的曲线  $\gamma_i$ 。设  $\gamma'_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是无限接近于曲线  $\gamma_i$  的连接  $A_i$  和  $B_i$  的曲线, 质点  $m_i$  沿着它运动而不会破坏约束, 这些曲线称为系统的**旁路**。这里假定系统所有质点沿着旁路运动的初始时刻为  $t = t_0$ , 终止时刻为  $t = t_1$ , 即系统沿着旁路运动的起始和终止时刻与沿着正路是相同的。

对于完整系统, 在**位形时空**中考察正路和旁路更加方便, 该空间中的坐标是广义坐标  $q$  和时间  $t$ 。设位形时空中的点  $Q_0$  相应于系统的初位形, 而点  $Q_1$  则相应于系统的末位形, 系统从初位形到末位形的运动相应于连接  $Q_0$  和  $Q_1$  的曲线。由于在位形时空中, 约束已经自动满足, 因此任意无限接近正路的连接  $Q_0$  和  $Q_1$  的曲线都可以作为旁路。

已知初位形和初速度求解末位形的问题很容易，但是已知初位形和末位形求出连接它们之间的正路并不简单，前者是力学系统  $2n$  阶微分方程的初值问题，而后者是  $2n$  阶微分方程的边值问题。如果假设  $Q_0$  点的坐标为  $\mathbf{q}_0$ ，而  $Q_1$  点的坐标为  $\mathbf{q}_1$ ，则运动微分方程的解应该满足边值条件：

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$$

边值问题可以有唯一解，也可以没有解，还可以有几个甚至无数组解。

如果  $Q_0$  和  $Q_1$  两点足够接近，则边值问题的解可能是唯一的或者有限多个。对于有限多个解的情况，我们总是可以选择其中某一个解的一个足够小的不包含其它正路的邻域来研究其中的旁路。而当  $Q_0$  和  $Q_1$  足够远时，边值问题有在相同时间  $t_1 - t_0$  内无限接近正路的解<sup>①</sup>，这种情况下位形时空内的点  $Q_0$  和  $Q_1$  称为共轭动力学焦点。

**例 9.4** 对于单自由度谐振子，其运动微分方程为  $\ddot{q} + q = 0$ 。在通过广义时空中的点  $(0, 0)$  和  $(0, \pi)$  之间即有相互无限接近的正路，可以表示为

$$q = C \sin t$$

其中  $C$  是任意常数，因此，对于单自由度谐振子，点  $(0, 0)$  和  $(0, \pi)$  是共轭动力学焦点。

前面提到，旁路是与正路无限接近而且同时满足约束的曲线，而且旁路所用时间与正路相同，因此可以用虚位移来构造旁路。设系统的质点  $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$  沿着连接初位置  $A_i$  和末位置  $B_i$  的正路运动，如果  $t$  时刻质点的位置为点  $P_i$ ，那么在该时刻给该质点一个从该位置出发的虚位移  $\delta \mathbf{r}_i$ ，使得其位置变为点  $Q'_i$ 。如果当  $t_0 < t < t_1$  时，对该质点在正路上的所有位置  $P_i$  重复这样的过程，经过所有的  $Q'_i$ ，并连接初位置  $A_i$  和末位置  $B_i$  作一条曲线，由于虚位移是保证约束成立的无限小位移，因此该曲线就是旁路。

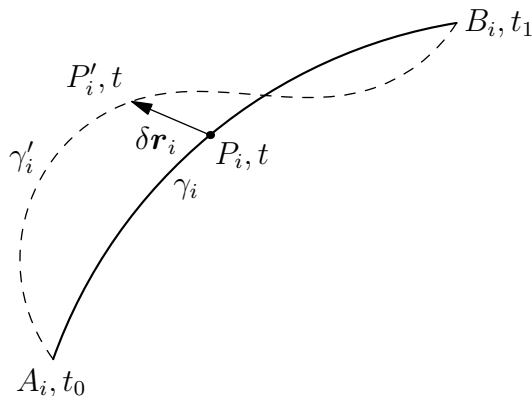


图 9.3: 正路和旁路

记质点  $m_i$  在正路上点  $P_i$  的位矢为  $\mathbf{r}_i$ ，所以其在旁路上相应点的位矢为  $\mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i$ ，其中虚位移满足  $\delta \mathbf{r}_i(t_0) = \delta \mathbf{r}_i(t_1) = \mathbf{0}$ 。类似地，如果在位形时空中正路由下面的方程给出：

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t), \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \quad (9.34)$$

则旁路可以利用虚位移表示为

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) + \delta \mathbf{q}(t) \quad (9.35)$$

其中

$$\delta \mathbf{q}(t_0) = \delta \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{0}$$

<sup>①</sup> 即，对于任意一条这样的正路，不存在一个邻域内不包含其它正路。

## 9.2.2 Hamilton 原理

在考虑力学变分原理的时候, 所考虑自变函数的自变量为时间  $t$ , 因此此时的变分运算即称为**等时变分**, 这与第2.2.1节引入虚位移时提到的等时变分是相同的, 因此虚位移也满足与式(9.16)相同的关系, 即

$$\delta \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_i \quad (9.36)$$

设作用在系统内质点  $m_i$  上的主动力的合力记为  $\mathbf{F}_i$ , 则对动力学普遍方程(2.30)

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (9.37)$$

积分可得

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_i - m_i \frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i \right] dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i) - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \delta T + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) dt - \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \end{aligned}$$

其中  $T$  为系统的动能

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (9.38)$$

由此即有

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta T + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) dt = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (9.39)$$

方程(9.39)称为**动力学普遍方程的积分形式**。

对于完整系统的旁路, 需要满足其初位置和末位置与正路相同, 即

$$\delta \mathbf{r}_i(t_0) = \delta \mathbf{r}_i(t_1) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

此时可以将动力学普遍方程的积分形式(9.39)写成

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta T + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) dt = 0 \quad (9.40)$$

式(9.40)称为完整系统的 **Hamilton 原理**, 它可以叙述为: 如果  $\delta \mathbf{r}_i(t)$  是相应于正路的等时变分且  $\delta \mathbf{r}_i(t_0) = \delta \mathbf{r}_i(t_1) = \mathbf{0}$ , 则积分(9.40)等于零。

在完整系统中, 有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} \quad (9.41)$$

所以完整系统的 **Hamilton 原理**(9.40)可以用广义坐标表示为

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta T + \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} \right) dt = 0 \quad (9.42)$$

由此便说明了完整系统在正路上积分(9.42)等于零。下面还需说明, 如果在某个运动学可能的路径上, 积分(9.42)等于零, 则该路径是正路。为此只需证明可以由式(9.42)导出系统的 **Lagrange 方程**即可。



由于

$$\delta T = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta \dot{q}_{\alpha} \right) \quad (9.43)$$

由此可将式(9.42)改写为

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^s \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta \dot{q}_{\alpha} + \left( \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} + Q_{\alpha} \right) \delta q_{\alpha} \right] dt = 0 \quad (9.44)$$

对式(9.44)中的第一项分部积分, 并注意到  $\delta q_{\alpha}(t_0) = \delta q_{\alpha}(t_1) = 0 (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ , 可得

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta \dot{q}_{\alpha} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta q_{\alpha} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta q_{\alpha} \right] dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta q_{\alpha} dt$$

故式(9.44)可以写成下面的形式

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} - Q_{\alpha} \right) \delta q_{\alpha} dt = 0 \quad (9.45)$$

由于  $\delta q_{\alpha} (\alpha = 1, 2, \dots, s)$  是相互独立的任意函数, 根据变分学基本定理9.1.2可得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

至此便由 Hamilton 原理获得了 Lagrange 方程, 由此说明, 完整系统的动力学可以以 Hamilton 原理为基础。

### 9.2.3 有势系统的 Hamilton 原理

对具有广义势  $U = U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  的系统, 则有

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.46)$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) - \delta U \end{aligned} \quad (9.47)$$

将式(9.47)代入方程(9.39)中, 并注意到 Lagrange 函数  $L = T - U$ , 由此可有

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (9.48)$$

方程(9.48)称为有势系动力学普遍方程的积分形式。

由于完整系统的旁路需要满足  $\delta \mathbf{r}(t_0) = \delta \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{0}$ , 因此方程(9.48)可以写成

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0 \quad (9.49)$$

由此, 定义积分

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (9.50)$$

称为 **Hamilton 作用量**。因为  $L$  是  $q, \dot{q}, t$  的函数, 所以计算  $S$  的值需要给出在时间段  $t_0 \leq t \leq t_1$  内的函数关系  $q(t)$ , 即作用量是依赖系统运动方式的泛函。

因此, 根据 Hamilton 作用量的定义式(9.50)可以将式(9.49)表示为

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (9.51)$$

式(9.51)给出了完整有势系统的 **Hamilton 原理**: 在所有相比较的路径中, 完整系统的正路使得 Hamilton 作用量取驻值 (即其一阶变分在正路上等于零)。

根据 Hamilton 原理也可以推导出完整有势系统的 **Lagrange 方程**, 方法与上一节几乎完全相同, 在此不再重复。

## 9.2.4 Hamilton 作用量的极值性质

首先来考察初位置充分小的邻域, 其中不包含共轭动力学焦点, 可以认为在给定时间范围  $t_0$  至  $t_1$  内, 系统从初位置运动到位于所选定邻域内的末位置只能有一条正路。下面将证明, 在这种情形下, 与旁路相比, Hamilton 作用量沿着正路取极小值。

这种方法称为 **Joukowski 几何法**<sup>①</sup>。首先, 设系统<sup>②</sup>中质点  $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的初位置为  $A_i$ , 末位置为  $B_i$ , 而  $\gamma_i$  和  $\gamma'_i$  是该质点沿着正路和任意一条旁路运动的曲线 (如图9.4所示), 比较沿着正路和旁路的 Hamilton 作用量之间的大小关系。

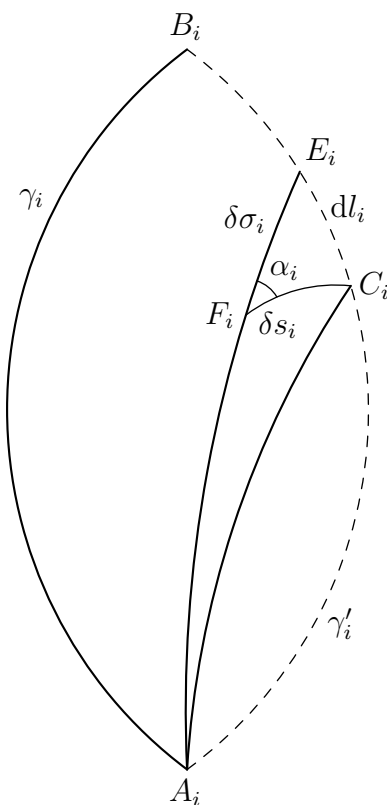


图 9.4: Hamilton 作用量的极值性质

取旁路上相应于时刻  $t$  的  $C_i$  点, 其中  $t_0 < t < t_1$ , 并画出质点  $m_i$  由  $A_i$  到  $C_i$  的某个真实运动轨迹  $A_i C_i$ , 在  $t - t_0$  的时间内, 质点  $m_i$  沿着该轨迹由初位置运动到旁路上的  $C_i$  点。

<sup>①</sup> Joukowski, 茹科夫斯基, 俄国力学家。

<sup>②</sup> 此处考虑的为具有普通势的完整系统。

再取相应于  $t + dt$  时刻的  $E_i$  点, 并画出质点  $m_i$  由  $A_i$  到  $E_i$  的某个真实运动轨迹  $A_i E_i$ , 在  $t + dt - t_0$  时间内沿着该轨迹由初位置运动到旁路上的  $E_i$  点。按照这样的方式, 在旁路  $\gamma'_i$  上的所有点上都画出这样的辅助真实运动轨迹。

设  $F_i$  是质点  $m_i$  沿着辅助真实运动轨迹  $A_i E_i$  在  $t$  时刻的位置, 于是两个辅助真实运动轨迹上的弧  $A_i C_i$  和  $A_i F_i$ , 以及在旁路  $\gamma'_i$  上的弧  $A_i C_i$  都是质点  $m_i$  在相同的时间  $t - t_0$  内走过的, 所以辅助真实运动轨迹上的弧  $F_i E_i$  和旁路上的弧  $C_i E_i$  都是质点  $m_i$  用相同的时间  $dt$  内走过的。

下面考虑质点  $m_i$  分别沿真实运动轨迹  $A_i F_i$  和  $A_i C_i$  的作用量, 则有

$$S[A_i F_i] = \int_{t_0}^t (T - V) dt, \quad S[A_i C_i] = \int_{t_0}^t (T - V) dt \quad (9.52)$$

这里的两个积分分别沿着真实路径  $A_i F_i$  和  $A_i C_i$ , 其中的  $T$  和  $V$  分别在相应的路径上取值, 将它们分别表示为

$$T_{A_i F_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2, \quad V_{A_i F_i} = \sum_{i=1}^n V(\mathbf{r}_i, t) \quad (9.53)$$

$$T_{A_i C_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_i + \delta \mathbf{r}_i)^2, \quad V_{A_i C_i} = \sum_{i=1}^n V(\mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i, t) \quad (9.54)$$

由此, 精确到  $|\delta \mathbf{r}_i|$  和  $|\delta \dot{\mathbf{r}}_i|$  的一阶量, 两条路径上的 Hamilton 作用量之差可以表示为

$$S[A_i C_i] - S[A_i F_i] = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) dt$$

对上式第一项进行分部积分, 并考虑到  $\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}$  以及  $\delta \mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{0}$ , 可得

$$S[A_i C_i] - S[A_i F_i] = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \delta \mathbf{r}(t) + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i dt$$

将动力学普遍方程(2.30)代入, 可得

$$S[A_i C_i] - S[A_i F_i] = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \delta \mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^n m_i v_i \cos \alpha_i \delta s_i \quad (9.55)$$

其中  $v_i$  是质点  $m_i$  在  $t$  时刻的速率,  $\alpha_i$  是  $\dot{\mathbf{r}}_i$  和  $\delta \mathbf{r}_i$  之间的夹角,  $\delta s_i$  是弧长  $F_i C_i$ 。

用  $d\sigma_i$  和  $dl_i$  表示辅助真实运动轨迹上弧  $F_i E_i$  和旁路上弧  $C_i E_i$  的长度<sup>①</sup>, 在图9.4中的无穷小三角形  $C_i F_i E_i$  中应用余弦定理, 可得

$$dl_i^2 = d\sigma_i^2 + \delta s_i^2 - 2d\sigma_i \delta s_i \cos \alpha_i \quad (9.56)$$

将式(9.56)两端乘以  $m_i$  并对  $i$  求和, 由于现在所讨论的区域内不包含初位置的共轭动力学焦点, 因此所有的  $\delta s_i$  中必然至少有一个非零, 由此可得不等式

$$\sum_{i=1}^n m_i dl_i^2 > \sum_{i=1}^n d\sigma_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n m_i d\sigma_i \cos \alpha_i \delta s_i \quad (9.57)$$

如果用  $T'$  表示系统沿着旁路弧  $C_i E_i$  运动时的动能, 用  $T$  表示系统沿着辅助真实运动轨迹上弧  $F_i E_i$  运动时的动能, 则有

$$\sum_{i=1}^n m_i dl_i^2 = 2T' dt^2, \quad \sum_{i=1}^n m_i d\sigma_i^2 = 2T dt^2 \quad (9.58)$$

<sup>①</sup> 由于  $F_i E_i$  和  $C_i E_i$  不是等时的, 所以此处用微分来表示这段无穷小的长度。

再考虑到  $\frac{d\sigma_i}{dt} = v_i$ , 故将式(9.58)代入不等式(9.57)中可得

$$T'dt > Tdt - \sum_{i=1}^n m_i v_i \cos \alpha_i \delta s_i \quad (9.59)$$

将式(9.59)两端减去  $Vdt$ , 并利用式(9.55)可得

$$(T' - V)dt > (T - V)dt + S[A_i F_i] - S[A_i C_i] \quad (9.60)$$

由于

$$(T - V)dt = \int_t^{t+dt} (T - V)dt = S[F_i E_i]$$

以及

$$S[F_i E_i] + S[A_i F_i] - S[A_i C_i] = S[A_i E_i] - S[A_i C_i]$$

故不等式(9.59)右端等于当运动时间增加  $dt$  时, 从一个真实运动轨迹到另一个真实运动轨迹的 Hamilton 作用量的微分  $dS$ , 所以

$$(T' - V)dt > dS \quad (9.61)$$

将这个不等式从  $t = t_0$  到  $t = t_1$  积分, 并用  $S_{\text{正路}}$  和  $S_{\text{旁路}}$  分别表示沿着正路和旁路的 Hamilton 作用量, 可得

$$S_{\text{旁路}} > S_{\text{正路}} \quad (9.62)$$

这就证明了, 如果系统的初位置和末位置足够接近<sup>①</sup>, 则对于相同的运动时间, 与旁路相比, 沿着正路的 Hamilton 作用量最小。基于这个原因, Hamilton 原理在有些文献上也被称为最小作用量原理。

设  $P_0$  是位形时空中对应系统初位置的点, 而  $P_1$  是位形时空中对应系统末位置的点, 前面的讨论已经说明, 如果  $P_0$  和  $P_1$  足够接近, 则 Hamilton 作用量  $S$  在正路上取极小值。下面来考虑  $P_0$  和  $P_1$  到底需要有多近, 才能使得 Hamilton 作用量  $S$  在正路上取极小值。

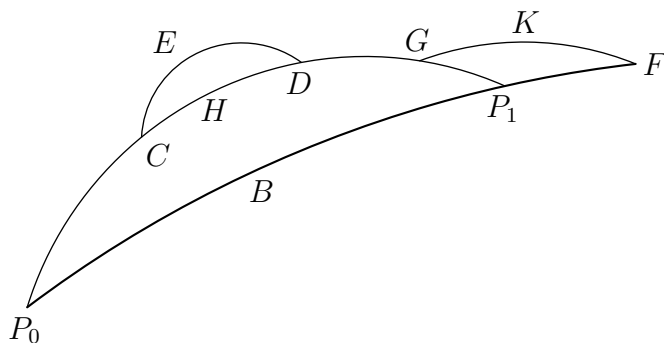


图 9.5: 共轭动力学焦点与 Hamilton 作用量的极值

在正路  $P_0P_1$  上 Hamilton 作用量的一阶变分总是等于零, 即  $\delta S = 0$ , 如果  $P_0$  和  $P_1$  足够接近, 在正路上二阶变分  $\delta^2 S$  总是正的<sup>②</sup>。如图9.5所示, 现在令  $P_1$  远离  $P_0$ , 设  $t_1^*$  是沿着旁路  $P_0HP_1$  计算的  $\delta^2 S$  第一次为零的时刻  $t_1$ , 此时沿着路径  $P_0HP_1$  和  $P_0BP_1$  的 Hamilton 作用量相等:

$$S[P_0HP_1] = S[P_0BP_1] \quad (9.63)$$

① 其中不包含任何共轭动力学焦点即可。

② 不考虑  $S$  的极值性需要更高阶变分确定的极端情况。

下面将说明,  $P_0HP_1$  实际上是正路, 即  $P_0$  和  $P_1$  是共轭动力学焦点。假设不是这样, 即假设  $P_0HP_1$  不是正路, 那么在它上面取两点  $C$  和  $D$ , 并以正路  $CED$  连接。根据前文所证明的, 对于足够接近的两点  $C$  和  $D$  将有

$$S[CED] < S[CHD] \quad (9.64)$$

由式(9.63)和式(9.64)可得

$$S[P_0CEDP_1] < S[P_0CHDP_1] = S[P_0BP_1] \quad (9.65)$$

这与假设矛盾, 因为假设  $P_1$  是正路  $P_0BP_1$  上的点, 在所选择的过  $P_0$  和  $P_1$  的旁路上, 该点使二阶变分  $\delta^2 S$  第一次等于零, 而这里二阶变分已经小于零了。

上述讨论表明, 如果终点  $P_1$  在  $P_0$  的共轭动力学焦点之前, 则 Hamilton 作用量在正路  $P_0P_1$  上取极小值。

设  $P_1$  是  $P_0$  的共轭动力学焦点, 而正路的终点  $F$  在  $P_1$  点之后 (如图9.5), 这里沿着正路  $P_0BP_1F$  的作用量已经不是极小值了。在前面建立的正路  $P_0HP_1$  上取足够接近  $F$  的点  $G$ , 使得连接这个点的正路  $FKG$  上的作用量最小, 那么有

$$S[GKF] = S[GP_1] + S[P_1F] \quad (9.66)$$

再考虑到式(9.63)可得

$$\begin{aligned} S[P_0HGKF] &= S[P_0HG] + S[GKF] < S[P_0HG] + S[GP_1] + S[P_1F] \\ &= S[P_0HP_1] + S[P_1F] = S[P_0BP_1] + S[P_1F] = S[P_0BP_1F] \end{aligned}$$

即, 所构造的旁路上的作用量小于正路  $P_0BP_1F$  的作用量, 所以作用量在这种情况下在正路上不取最小值。但在正路  $P_0BP_1F$  的一小部分上作用量取最小值, 所以在该正路上 Hamilton 作用量也不能取极大值。因此, 如果初位置的共轭动力学焦点在正路的终点之前, 则沿着正路的 Hamilton 作用量既非极小也非极大。

**例 9.5** 在例9.4中,  $(0, 0)$  点的共轭动力学焦点是  $(0, \pi)$ , 如果系统的末位置在  $\left(-1, \frac{3}{2}\pi\right)$ , 则可得其正路应为

$$q(t) = \sin t$$

其旁路可取为

$$q'(t) = q(t) + \alpha\eta(t)$$

其中  $\eta(t)$  为满足  $\eta(0) = \eta\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$  的任意函数。系统的 Hamilton 作用量为

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}^2 - q^2) dt$$

所以系统沿旁路的 Hamilton 作用量可以表示为

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} [(\dot{q} + \alpha\eta)^2 - (q + \eta)^2] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\dot{q}^2 - q^2) dt + \alpha \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\dot{q}\eta - q\eta) dt + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\dot{\eta}^2 - \eta^2) dt \\ &= S + \alpha \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\dot{q}\eta - q\eta) dt + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\dot{\eta}^2 - \eta^2) dt \end{aligned}$$

如果取  $\eta(t) = \sin \frac{2}{3}t$ , 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\dot{q}\dot{\eta} - q\eta) dt &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left( \frac{2}{3} \cos t \cos \frac{2}{3}t - \sin t \sin \frac{2}{3}t \right) dt = 0 \\ \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\dot{\eta}^2 - \eta^2) dt &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left( \frac{4}{9} \cos^2 \frac{2}{3}t - \sin^2 \frac{2}{3}t \right) dt = -\frac{5}{12}\pi\end{aligned}$$

所以沿着这条旁路有  $S' < S$ , 正路的作用量不取极小值。

## 9.2.5 Lagrange 方程的规范不定性与完整系统的规范不变性

完整有势系下的 Hamilton 作用量可以表示为

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (9.67)$$

根据 Hamilton 原理以及 Euler-Lagrange 方程, 可得到有势完整系统的 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (9.68)$$

Lagrange 函数  $L$  具有规范不定性, 即在定域规范变换

$$\tilde{L} = L + \frac{df}{dt}(\mathbf{q}, t) \quad (9.69)$$

下, 有

$$\delta \tilde{S} = \delta S + \delta f(\mathbf{q}, t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \delta S + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_0}^{t_1} = \delta S$$

即在定域规范变换下, Hamilton 作用量的变分不变, 进而系统的 Lagrange 方程也不变。因此规范变换下, 系统的运动规律不变, 此即为系统的规范不变性。

Lagrange 函数  $L$  的不定性来自广义势的规范不定性, 即  $\tilde{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{df}{dt}(\mathbf{q}, t)$  与  $U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  表示的是同一个势场。如果两个势函数  $U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  和  $\tilde{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  对应的广义力相同, 即说明势函数的变换不影响运动方程, 即它们表示的是同一个势场。由于  $f = f(\mathbf{q}, t)$ , 所以

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{q}, t) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

据此考虑广义力

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_\alpha &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha\end{aligned} \quad (9.70)$$

式中利用了推广经典 Lagrange 关系(2.21), 即

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

式(9.70)的结果说明势在规范变换下系统的力场不变, 故势  $\tilde{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{df}{dt}(\mathbf{q}, t)$  与  $U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  表示的是同一个势场。

在规范变换下，广义动量为

$$\tilde{p}_\alpha = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

广义能量为

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - \tilde{L} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - \frac{df}{dt} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - \left( \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = H - \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

即，与坐标共轭的广义动量，与时间共轭的广义能量均具有不定性，取决于 Lagrange 函数的规范选择。

## 9.2.6 相空间与 Hamilton 方程

在位形空间，根据 Hamilton 函数的定义，有

$$L = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - H = \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (9.71)$$

于是 Hamilton 作用量的变分为

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{\alpha=1}^s (\dot{q}_\alpha \delta p_\alpha + p_\alpha \delta \dot{q}_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \delta q_\alpha \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] dt \quad (9.72) \end{aligned}$$

由于  $S = S[\mathbf{q}(t)]$ ，独立变分只有  $\delta q_\alpha$ ，动量由坐标定义，其变分不独立。考虑

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\beta=1}^s p_\beta \dot{q}_\beta(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) \quad (9.73)$$

所以有

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha + \sum_{\beta=1}^s p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} - \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha + \sum_{\beta=1}^s \left( p_\beta - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \right) \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} \quad (9.74)$$

考虑到动量的定义  $p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}$ ，即有

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad (9.75)$$

由此，根据式(9.72)和 Hamilton 原理可得

$$\delta S = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt = 0 \quad (9.76)$$

由此可得

$$\dot{p}_\alpha = - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (9.77)$$

即, 在位形空间中考察 Hamilton 方程一半是动量定义, 另一半是运动方程。

上节已经指出, 与坐标共轭的动量具有规范不定性, 据此, 可以将动量视为与坐标地位平等、完全独立的正则变量。由此在相空间中即可将 Hamilton 作用量写作

$$S[\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right] dt \quad (9.78)$$

此时根据 Hamilton 原理可得

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \delta \dot{q}_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \delta p_{\alpha} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \delta q_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha=1}^s \dot{p}_{\alpha} \delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \delta p_{\alpha} \right] dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \delta q_{\alpha} \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (9.79)$$

据此即可直接得到 Hamilton 正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \\ \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \end{cases} \quad (9.80)$$

将 Hamilton 原理视为相空间力学变分原理, 则 Hamilton 方程全体均为运动方程。坐标和动量在满足相空间 Hamilton 原理的前提下可以独立变换, 扩大了变换的自由度。

## 9.2.7 位形时空与推广的 Lagrange 方程

作参数变换  $t = t(\tau)$ , 则有推广的 Lagrange 函数为

$$\Lambda(\mathbf{q}, t, \mathbf{q}', t') = L\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{q}'}{t'}, t\right) t'$$

此时 Hamilton 作用量变换为

$$S[\mathbf{q}(\tau)] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} L\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{q}'}{t'}, t\right) t' d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Lambda(\mathbf{q}, t, \mathbf{q}', t') d\tau \quad (9.81)$$

由于此时  $\tau$  仅作为新的参数, 所以边界条件仍然为

$$\delta \mathbf{q}(\tau_0) = \delta \mathbf{q}(\tau_1) = 0, \quad \delta t(\tau) = 0$$

根据 Hamilton 原理可得

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}} \delta q'_{\alpha} \right) d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[ \frac{d}{d\tau} \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right] d\tau \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}} \delta q_{\alpha} \Big|_{\tau_0}^{\tau_1} + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} d\tau = 0 \end{aligned} \quad (9.82)$$



由此可得以  $\tau$  为参数的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (9.83)$$

以上讨论限于位形空间，仅将原参数  $t$  通过确定的对应关系变换成新参数  $\tau$ 。

在位形时空中， $\tau$  为参数， $t$  视为变量，记作  $q_{s+1}$ 。即此时  $\delta\tau = 0$ ，但  $\delta t(\tau) \neq 0$ ，Hamilton 作用量为

$$S[\mathbf{q}(\tau), t(\tau)] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Lambda(\mathbf{q}, t, \mathbf{q}', t') d\tau \quad (9.84)$$

此时  $t$  与广义坐标  $\mathbf{q}$  同样为自变函数，它们边界条件为

$$\delta \mathbf{q}(\tau_0) = \delta \mathbf{q}(\tau_1) = 0, \quad \delta t(\tau_0) = \delta t(\tau_1) = 0$$

根据 Hamilton 原理可有

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{\alpha=1}^{s+1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{\tau_0}^{\tau_1} + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) \delta q_\alpha d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) \delta q_\alpha d\tau = 0 \end{aligned} \quad (9.85)$$

由此可以得到位形时空 ( $s+1$  维空间) 中的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s+1) \quad (9.86)$$

## 9.3 Lagrange 原理

### 9.3.1 一般形式的力学变分原理

首先考虑在位形时空中，Hamilton 原理可以表示为

$$\delta S = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{\tau_0}^{\tau_1} + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{\alpha=1}^{s+1} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) \delta q_\alpha d\tau$$

任何形式的力学变分原理应都能正确的描述系统的运动，因此其必须与系统的 Lagrange 方程等价。所以，此处不附加任何边界条件，直接将 Lagrange 方程代入，可得力学变分原理的一种形式如下

$$\delta S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \delta \Lambda d\tau = \sum_{\alpha=1}^{s+1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{\tau_0}^{\tau_1} = \sum_{\alpha=1}^{s+1} p_\alpha \delta q_\alpha \Big|_{\tau_0}^{\tau_1} \quad (9.87)$$

或者

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left( \delta \Lambda - \frac{d}{d\tau} \sum_{\alpha=1}^{s+1} p_\alpha \delta q_\alpha \right) d\tau = 0 \quad (9.88)$$

如果系统的正路和旁路初位置和末位置相同且到达末位置的时间也相同，即

$$\delta q_\alpha(\tau_0) = \delta q_\alpha(\tau_1) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s+1)$$

将重新得到位形时空 ( $s+1$  维) 的 Hamilton 原理

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \delta \Lambda d\tau = 0 \quad (9.89)$$

如果系统的正路和旁路初位置和末位置相同, 但它们到达末位置的时间不同, 即

$$\delta q_\alpha(\tau_0) = \delta q_\alpha(\tau_1) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad \delta t(\tau) \neq 0$$

由此可得位形空间 ( $s$  维) 的 Hamilton 原理

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[ \delta \Lambda + \frac{d}{d\tau}(H\delta t) \right] d\tau = 0 \quad (9.90)$$

### 9.3.2 等能变分与 Maupertuis-Lagrange 原理

现在, 考虑广义保守系统, 此时有

$$H' = -p'_t = -\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0$$

系统具有广义能量积分<sup>①</sup>

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h \quad (\text{常数}) \quad (9.91)$$

此时可考虑比较初位置和末位置相同而且具有相同广义能量的正路和旁路, 此时对应的变分则称为等能变分。等能变分  $\delta$  是对参数  $\tau$  的函数的变分, 而且满足

$$\delta H = 0, \quad \delta t \neq 0, \quad \delta \tau = 0$$

等能条件限制了位形轨道每一点的速度, 使得实际运动与虚拟运动不能同时出发与到达。此时有

$$\frac{d}{d\tau}(H\delta t) = H'\delta t + H\delta t' = \delta(Ht) - t'\delta H = \delta(Ht') \quad (9.92)$$

将式(9.92)代入式(9.90)中, 可得

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \delta(\Lambda + Ht') d\tau = \delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\Lambda + Ht') d\tau = 0 \quad (9.93)$$

定义

$$W[\mathbf{q}(\tau), t(\tau)] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (L + H)t' d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha q'_\alpha d\tau \quad (9.94)$$

称为 Lagrange 作用量<sup>②</sup>, 相应的式(9.89)化为

$$\delta W[\mathbf{q}(\tau), t(\tau)] = \delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha q'_\alpha d\tau = 0 \quad (9.95)$$

称为位形时空的 Lagrange 原理。在 Lagrange 作用量的表达式中作变量代换  $t = t(\tau)$  消去参数  $\tau$ , 可有

$$W[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} (L + H) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha dt = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}_1} \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha dq_\alpha \quad (9.96)$$

此时可有位形空间的 Lagrange 原理

$$\Delta W[\mathbf{q}(t)] = \Delta \int_{t_0}^{t_1} (L + H) dt = \Delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha dt = 0 \quad (9.97)$$

<sup>①</sup> 大部分的力学系统都能满足此条件。

<sup>②</sup> 有些文献上将 Lagrange 作用量称为简约作用量。

此处,  $\Delta$  为位形空间中的等能变分。由于位形空间与位形时空的参数不同, 所以这里的等能变分与普通变分的运算规则不同, 故引入记号  $\Delta$  以示区别。在位形空间中, 取任意函数  $f(t)$ , 则等能变分满足如下运算规则

$$\begin{cases} \Delta f = \delta f(t) + \dot{f} \Delta t & (9.98a) \\ \frac{d}{dt} \Delta f = \delta \dot{f}(t) + \ddot{f} \Delta t + \dot{f} \frac{d\Delta t}{dt} = \Delta \dot{f} + \dot{f} \frac{d\Delta t}{dt} & (9.98b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \int_{t_0}^{t_1} f dt = \delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} f t' d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \left( \Delta f + f \frac{d\Delta t}{dt} \right) dt & (9.98c) \end{cases}$$

Lagrange 原理(9.97)可改写为

$$\Delta W = \Delta \int_{q_0}^{q_1} \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} = 0 \quad (9.99)$$

式(9.99)称为 Maupertuis-Lagrange 原理或 Lagrange 原理的 Maupertuis 形式<sup>①</sup>。

例 9.6 (由位形空间的 Lagrange 原理导出 Lagrange 方程) 由位形空间的 Lagrange 原理, 即

$$\Delta W = \Delta \int_{t_0}^{t_1} (L + H) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \Delta(L + H) + (L + H) \frac{d\Delta t}{dt} \right] dt = 0$$

现在来考察上面积分中的各项, 首先根据等能变分的定义, 有  $\Delta H = 0$ 。考虑到系统的能量守恒, 即有

$$\dot{H} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

由此可有

$$\begin{aligned} \Delta L + (L + H) \frac{d\Delta t}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \Delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \Delta \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \frac{d\Delta t}{dt} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \Delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left( \frac{d\Delta q_{\alpha}}{dt} - \dot{q}_{\alpha} \frac{d\Delta t}{dt} \right) + \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \frac{d\Delta t}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \Delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \Delta q_{\alpha} \end{aligned}$$

综上, 可得

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \Delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \Delta q_{\alpha} \right] dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \Delta q_{\alpha} \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \Delta q_{\alpha} dt \end{aligned}$$

对始末位形可有

$$\Delta \mathbf{q}(t_1) = \Delta \mathbf{q}(t_2) = 0$$

因此, 有

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \Delta q_{\alpha} dt = 0$$

根据  $\Delta q_{\alpha}$  的独立性, 即可得到 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

<sup>①</sup> Maupertuis, 莫培督, 法国数学家、物理学家。

### 9.3.3 Jacobi-Lagrange 原理

如果系统是定常的, 根据第2.8.3节的讨论, 此时有

$$\begin{aligned} L &= T - U = T_2 - U_1 - U_0 \\ H &= L_2 - L_0 = T_2 + U_1 + U_0 \end{aligned}$$

其中

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta}$$

此时 Lagrange 原理为

$$\Delta W = \Delta \int_{t_0}^{t_1} (L + H) dt = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \Delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta dt = 0 \quad (9.100)$$

定义位形空间线元

$$ds^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \frac{1}{M} \sum_{\alpha, \beta=1}^s M_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta \quad (9.101)$$

其中  $M = \sum_{i=1}^n m_i$ , 此时动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2} M \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (9.102)$$

此处,  $\frac{ds}{dt}$  即为系统位形代表点在位形空间中沿位形轨道运动的速度, 方向即为轨道的切线方向。再考虑到系统的具有广义能量积分

$$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E \quad (\text{常数}) \quad (9.103)$$

由此可有

$$2T dt = \sqrt{2MT} ds = \sqrt{2M[E - V(\mathbf{r})]} ds$$

此时, Lagrange 原理形式为

$$\Delta W = \Delta \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{2M[E - V(\mathbf{r})]} ds = 0 \quad (9.104)$$

式(9.104)称为 Jacobi-Lagrange 原理或 Lagrange 原理的 Jacobi 形式。此原理不涉及时间, 它从所有满足广义能量守恒的旁路中选出 Lagrange 作用量取极值的正路。

在几何上, 可以将以式(9.100)理解为, 在具有式(9.101)形式度规的位形空间中, 其测地线即为系统在位形空间中的正路。

## 第十章 正则变换与 Hamilton-Jacobi 方程

### 10.1 正则变换

#### 10.1.1 点变换

正则方程的对称性越高, 方程的求解也就越方便。有很多时候, 同一个问题, 广义坐标选取的方式不同, 系统的对称性也不同, 求解的难易程度也不同。这一点可以用循环坐标来举例说明。例如在研究两体相对运动时, 如果取直角坐标作为广义坐标, 则 Lagrange 函数或 Hamilton 函数中没有循环坐标, 但如果变换到平面极坐标, 则极角  $\theta$  是循环变量。

广义坐标之间的变换叫做点变换。设在一组广义坐标  $\mathbf{q}$  下, Lagrange 函数形式为

$$L = L_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

系统方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (10.1)$$

做广义坐标变换

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t) \quad (10.2)$$

则有

$$L = L_Q(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L_q(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t) \quad (10.3)$$

根据链式法则, 可以得到

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha} \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} = \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\beta} \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial Q_\alpha} \quad (10.5)$$

由此可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha} \right) - \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\beta} \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial Q_\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \right) \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\beta} \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} \right] + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} - \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial Q_\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial L}{\partial q_\beta} \right) \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} = 0 \end{aligned}$$

此处利用了推广经典 Lagrange 关系(2.21):

$$\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}, \quad \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial Q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha}$$

可见, 在点变换下 Lagrange 方程不变。

### 10.1.2 正则变换

在 Hamilton 力学中, 广义坐标和广义动量处于平等地位, 变换的自由度更大。因此不必拘泥于点变换, 可以考虑更为广义的变换:

$$\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \\ P_\alpha = P_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (10.6)$$

在变换(10.6)下, Hamilton 函数将变换为

$$K = K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t) \quad (10.7)$$

一般情况下, 在变换之后正则方程将不能保持原来的形式。如果在变换(10.6)下, 新的 Hamilton 函数  $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  仍然满足正则方程

$$\begin{cases} \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha}, \\ \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha}, \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (10.8)$$

这种变换就称为正则变换。

### 10.1.3 正则变换的条件

由于正则方程与 Hamilton 原理是等价的, 因此只要变换(10.6)可以满足 Hamilton 原理的要求, 就可以保证新的正则方程形式保持不变。

在变换前后, 正则变量都需要满足边界条件

$$\begin{cases} \delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = 0, \\ \delta \mathbf{p}(t_1) = \delta \mathbf{p}(t_2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \delta \mathbf{Q}(t_1) = \delta \mathbf{Q}(t_2) = 0, \\ \delta \mathbf{P}(t_1) = \delta \mathbf{P}(t_2) = 0, \end{cases} \quad (10.9)$$

根据相空间 Hamilton 原理, 有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right] dt = 0 \quad (10.10)$$

由于  $L$  具有规范不定性, 即  $L$  和  $L + \frac{df}{dt}(\mathbf{q}, t)$  是等价的, 而且考虑到式(10.10)中的被积函数加上一项全微分之后, 定积分  $\int_{t_1}^{t_2} df$  只和端点的值有关, 而端点的变分恒为零, 因此  $f$  不仅可以是  $\mathbf{q}$  和  $t$  的函数, 还可以将  $\mathbf{p}$  作为参数包含在内。即正则变换前的 Hamilton 原理应该表达为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{df_1}{dt}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right] dt = 0 \quad (10.11)$$

同理正则变换之后的 Hamilton 原理应该表达为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^s P_\alpha \dot{Q}_\alpha - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \frac{df_2}{dt}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right] dt = 0 \quad (10.12)$$

因此, 可有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \lambda \left( \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - H \right) - \left( \sum_{\alpha=1}^s P_\alpha \dot{Q}_\alpha - K \right) + \lambda \frac{df_1}{dt} - \frac{df_2}{dt} \right] dt = 0 \quad (10.13)$$

记

$$F_1 = f_2(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - \lambda f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (10.14)$$

则有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \lambda \left( \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) - \left( \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right) - \frac{dF_1}{dt}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right] dt = 0$$

要使上式成立，只要取

$$\lambda \left( \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) = \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \dot{F}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = 0 \quad (10.15)$$

式(10.15)中  $\lambda$  称为**标度因子**，表示不同的单位度量引起的数值放大，不影响物理实质，因此可取  $\lambda = 1$ ，则有

$$dF_1 = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} + (K - H)dt \quad (10.16)$$

满足式(10.16)的变换即为**正则变换**。如果  $\lambda \neq 1$ ，则为**拓展正则变换**。

### 10.1.4 母函数

考虑式(10.16)的右端，同时出现新旧两组正则变量  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  和  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ ，但这  $4s$  个变量之间由于存在  $2s$  个变换方程(10.6)，因此独立的变量只有  $2s$  个。在式(10.16)中，独立的变量是正则坐标  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{Q}$ ，因此函数  $F_1$  也应取  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{Q}$  加上时间  $t$  作为自己的变量，即

$$dF_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} + (K - H)dt \quad (10.17)$$

函数  $F_1 = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  称为**第一类母函数**。考虑

$$dF_1 = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial F_1}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}} dQ_{\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \quad (10.18)$$

与式(10.16)对比，可得变换的具体形式

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_1}{\partial q_{\alpha}} = \bar{p}_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \\ P_{\alpha} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}} = \bar{P}_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases} \quad (10.19)$$

式(10.19)所表示的变换公式与式(10.6)的形式仍然有所差别，但是只要通过代数运算就可以将式(10.19)化为式(10.6)的形式。具体来讲，可以先从(10.19)的第一式中解出  $\mathbf{Q}$  作为  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$  的函数，再将其代入式(10.19)的第二式，就获得了式(10.6)的形式。最后再将获得的变换代入式(10.19)的第三式中，就得到了变换之后的 Hamilton 函数  $K$ 。

第一类母函数  $F_1$  是用  $\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t$  表示的，利用 Legendre 变换，可以改变母函数的自变量，得到其它类型的母函数（共四类）。

首先考虑用  $\mathbf{P}$  代替  $\mathbf{Q}$ ，即

$$\sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} = d \left( \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} Q_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} dP_{\alpha}$$

因此可以将式(10.16)改写为

$$d\left(F_1 + \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} Q_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} dP_{\alpha} + (K - H)dt$$

定义第二类母函数

$$F_2 = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = F_1 + \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} Q_{\alpha} \quad (10.20)$$

于是得到

$$dF_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} dP_{\alpha} + (K - H)dt \quad (10.21)$$

由此可得变换的具体形式

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases} \quad (10.22)$$

借助另一个 Legendre 变换, 可用  $\mathbf{p}$  代替  $F_1$  中的  $\mathbf{q}$ , 即考虑

$$\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} = d\left(\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha}\right) - \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha}$$

因此可以将式(10.16)改写为

$$d\left(F_1 - \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha}\right) = -\sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} + (K - H)dt$$

定义第三类母函数

$$F_3 = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) = F_1 - \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \quad (10.23)$$

于是得到

$$dF_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) = -\sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} + (K - H)dt \quad (10.24)$$

由此可得变换的具体形式

$$\begin{cases} q_{\alpha} = -\frac{\partial F_3}{\partial p_{\alpha}} \\ P_{\alpha} = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_{\alpha}} \\ K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases} \quad (10.25)$$

同理, 借助一个不同的 Legendre 变换, 可以用  $\mathbf{p}$  替代  $F_2$  中的  $\mathbf{q}$ , 即考虑

$$\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} = d\left(\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha}\right) - \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha}$$

因此可以将式(10.16)改写为

$$d\left(F_2 - \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha}\right) = -\sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} dP_{\alpha} + (K - H)dt$$



定义第四类母函数

$$F_4 = F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = F_2 - \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} \quad (10.26)$$

于是得到

$$dF_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = - \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} dp_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} dP_{\alpha} + (K - H)dt \quad (10.27)$$

由此可得变换的具体形式

$$\begin{cases} q_{\alpha} = -\frac{\partial F_4}{\partial p_{\alpha}} \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial F_4}{\partial P_{\alpha}} \\ K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases} \quad (10.28)$$

特别地, 如果母函数  $F_i$  不显含时间  $t$ , 即  $\frac{\partial F_i}{\partial t} = 0$ , 则变换前后的 Hamilton 函数相等, 即有

$$K = H$$

例 10.1 (恒等变换) 恒等变换可以用第二类母函数表示为

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{\beta=1}^s q_{\beta} P_{\beta}$$

则有

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} = P_{\alpha} \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} = q_{\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H \end{cases}$$

用第三类母函数可以表示为

$$F_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = - \sum_{\beta=1}^s p_{\beta} Q_{\beta}$$

则有

$$\begin{cases} q_{\alpha} = -\frac{\partial F_3}{\partial p_{\alpha}} = Q_{\alpha} \\ P_{\alpha} = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_{\alpha}} = p_{\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} = H \end{cases}$$

例 10.2 (平移变换) 平移变换可以用第二类母函数表示为

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{\beta=1}^s (q_{\beta} P_{\beta} + a_{\beta} P_{\beta} - b_{\beta} q_{\beta})$$

则有

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} = P_{\alpha} - b_{\alpha} \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} = q_{\alpha} + a_{\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H \end{cases}$$

例 10.3 (对偶变换) 对偶变换可以用第一类母函数表示为

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \sum_{\beta=1}^s q_{\beta} Q_{\beta}$$

则有

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_1}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha} \\ P_{\alpha} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}} = -q_{\alpha} \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H \end{cases}$$

即此变换可以将广义坐标变换为广义动量, 将广义动量变换为广义坐标, 相当于在相空间做了一个旋转。

例 10.4 (点变换) 点变换可以用第二类母函数表示为

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{\beta=1}^s Q_{\beta}(\mathbf{q}, t) P_{\beta}$$

则有

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^s P_{\beta} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} = Q_{\alpha}(\mathbf{q}, t) \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + \sum_{\beta=1}^s P_{\beta} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial t} \end{cases}$$

例 10.5 (一维谐振子的正则变换求解) 一维谐振子的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

构造正则变换, 使得

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = 0$$

进而使得新正则方程的求解简化。构造母函数  $F_1 = F_1(q, Q, t)$ , 则有

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \\ P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$$

考虑到  $\frac{dP}{dt} = 0$ , 则  $P$  为运动积分。由于  $H$  不显含时间, 则  $H$  也为运动积分 (为常数), 即能量守恒, 于是可以令

$$p = f(P) \cos Q, \quad q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q \quad (10.29)$$

并假设母函数  $F_1$  不显含时间, 则

$$K = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{[f(P)]^2}{2m}$$

根据变换关系式可得

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}(q, Q)$$

根据式(10.29)可得

$$p = m\omega q \cot Q$$

则可得到

$$F_1 = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q$$

根据变换关系式可得

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}$$

所以有

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

$$f(P) = \sqrt{2m\omega P}$$

此时

$$K = H = \omega P$$

将系统总能量记作  $E$ , 可有

$$P = \frac{E}{\omega}$$

再由

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega$$

可得

$$Q = \omega t + \phi$$

因此, 系统的解为

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi) \\ p = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

### 10.1.5 无穷小正则变换

考虑第二类母函数

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} P_{\alpha} + \varepsilon G(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (10.30)$$

则有

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} = P_{\alpha} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_{\alpha}} \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} = q_{\alpha} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_{\alpha}} \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} \end{cases}$$

其中

$$\varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_{\alpha}} = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial P_{\alpha}} = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_{\alpha}} + o(\varepsilon) \quad (10.31)$$

略去高阶小量, 可得无穷小正则变换

$$\begin{cases} Q_\alpha - q_\alpha = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \end{cases} \quad (10.32a)$$

$$\begin{cases} P_\alpha - p_\alpha = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad (10.32b)$$

$$\begin{cases} K - H = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} \end{cases} \quad (10.32c)$$

相应地, 在精确至一阶小量时, 可以将函数  $G(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  记作  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , 函数  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  相应称为无穷小正则变换生成函数。

如果将变换前后的正则变量看作是相空间中在不同时刻的新旧坐标, 那么无穷小正则变换就是相空间中的无穷小移动, 将其位移记作

$$d\mathbf{q} = \mathbf{Q} - \mathbf{q}, \quad d\mathbf{p} = \mathbf{P} - \mathbf{p} \quad (10.33)$$

那么变换公式(10.32)可以写成

$$\begin{cases} dq_\alpha = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \\ dp_\alpha = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (10.34)$$

例 10.6 取无穷小正则变换生成函数为

$$G(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = p_\beta \quad (10.35)$$

则此时的无穷小正则变换根据变换式(10.34)可以写为

$$\begin{cases} dq_\alpha = 0 \ (\alpha \neq \beta), \quad dq_\beta = \varepsilon \\ dp_\alpha = 0 \ (\alpha = 1, 2, \dots, s) \end{cases} \quad (10.36)$$

即以函数(10.35)为生成函数的无穷小正则变换使得力学系统在坐标  $q_\beta$  的方向上作微小移动, 它的广义坐标  $q_\beta$  增加  $\varepsilon$ , 其它广义坐标不变。

如果将无穷小正则变换生成函数取为  $G = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , 并将无穷小参数取为  $\varepsilon = dt$ , 则根据变换式(10.34)可得

$$\begin{cases} dq_\alpha(t) = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dt \\ dp_\alpha(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dt \\ dH = H(\mathbf{q} + d\mathbf{q}, \mathbf{p} + d\mathbf{p}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{cases} \quad (10.37)$$

这就是系统的正则方程, 即

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

所以, 以系统 Hamilton 函数为生成函数、以  $dt$  为参数的无穷小正则变换, 正好描述系统在  $dt$  时间内的演化。由此可得。系统在有限时间内的演化, 则可以由一系列相继的无穷小正

则变换描述, 其总效果也是一个正则变换<sup>①</sup>。换句话说, 系统的正则变量在时刻  $t$  的值, 可以由其初始值通过正则变换得出, 这个正则变换是时间  $t$  的函数。反过来说, 系统正则变量在时刻  $t$  的值, 必然可以通过某一正则变换变换为其初始值。那么如果能够找到这样一个正则变换, 在这个变换下所有的正则变量都变为常数即其初始值, 那么系统的动力学问题也就解决了。这是 Hamilton-Jacobi 方程的研究内容。

既然无穷小正则变换可以表示系统在相空间的移动, 那么对任意一个力学量  $u$ , 如果其不显含时间, 则有

$$du = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial u}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} \right) \quad (10.38)$$

将变换式(10.34)代入, 可得

$$du = \varepsilon \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial u}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial G}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial u}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial G}{\partial q_{\alpha}} \right) = \varepsilon[u, G] \quad (10.39)$$

将式(10.39)中的  $u$  取为 Hamilton 函数  $H$ , 则有

$$dH = \varepsilon[H, G] \quad (10.40)$$

如果  $G$  是系统的某个运动积分, 且不显含时间, 则根据式(??)有  $[H, G] = 0$ , 此时可得

$$dH = 0$$

即在以  $G$  为生成函数的无穷小正则变换下, Hamilton 函数  $H$  保持不变。反过来说, 如果以  $G$  为生成函数的无穷小正则变换能够使得  $H$  保持不变, 则  $G$  是系统的一个运动积分。这也再次得到了在第2.9节所描述的结论, 检查 Hamilton 函数在哪些变换下保持不变, 就能确定系统的运动积分。

### 10.1.6 正则变换条件的辛表示

设变换前后的正则变量分别为

$$\xi = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \\ p_1 \\ \vdots \\ p_s \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_s \\ P_1 \\ \vdots \\ P_s \end{pmatrix}$$

设正则变换可以表示为

$$\Xi = \Xi(\xi, t), \quad \xi = \xi(\Xi, t) \quad (10.41)$$

则有

$$\delta \Xi = M \delta \xi, \quad \delta \xi = W \delta \Xi$$

其中 Jacobi 矩阵以及逆变换的 Jacobi 矩阵可以表示为

$$M = \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}, \quad W = \frac{\partial \xi}{\partial \Xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = M^{-1} \quad (10.42)$$

<sup>①</sup> 得出这个结论首先需要证明, 如果变换  $q, p \mapsto Q', P'$  和  $Q', P' \mapsto Q, P$  都是正则的, 那么变换  $q, p \mapsto Q, P$  也是正则的。利用正则变换的矩阵表示很容易证明这一点, 这将在第10.1.6节说明。

用第一类母函数  $F_1 = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  可以将正则变换的条件表示为

$$dF_1 = \sum_{\gamma=1}^s p_{\gamma} dq_{\gamma} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} dQ_{\zeta} + (K - H)dt$$

考虑到  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , 可有

$$dQ_{\zeta} = \sum_{\gamma=1}^s \left( \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial q_{\gamma}} dq_{\gamma} + \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\gamma}} dp_{\gamma} \right) + \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial t} dt$$

所以

$$\begin{aligned} d\bar{F}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \sum_{\gamma=1}^s \left[ \left( p_{\gamma} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial q_{\gamma}} \right) dq_{\gamma} - \left( \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\gamma}} \right) dp_{\gamma} \right] \\ &\quad + \left( K - H - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial t} \right) dt \end{aligned}$$

此处, 函数  $\bar{F}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)$ , 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_{\alpha}} &= p_{\alpha} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial q_{\alpha}}, & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial q_{\beta}} &= p_{\beta} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial q_{\beta}} \\ \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial p_{\alpha}} &= - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\alpha}}, & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial p_{\beta}} &= - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} \end{aligned}$$

根据  $\frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} = \frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial q_{\beta} \partial q_{\alpha}}$  可得

$$- \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial q_{\beta}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial q_{\alpha}} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial^2 Q_{\zeta}}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} = - \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial q_{\beta}} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial^2 Q_{\zeta}}{\partial q_{\beta} \partial q_{\alpha}}$$

所以有

$$\sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial q_{\beta}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial q_{\beta}}$$

用矩阵表示即

$$\left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} - \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (10.43)$$

再根据  $\frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial q_{\alpha} \partial p_{\beta}} = \frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial p_{\beta} \partial q_{\alpha}}$  可得

$$- \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial^2 Q_{\zeta}}{\partial q_{\alpha} \partial p_{\beta}} = \delta_{\alpha\beta} - \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial q_{\alpha}} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial^2 Q_{\zeta}}{\partial p_{\beta} \partial q_{\alpha}}$$

所以有

$$\sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} = \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial q_{\alpha}} - \delta_{\alpha\beta}$$

用矩阵表示即

$$\left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} - \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{I} \quad (10.44)$$

最后根据  $\frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial p_{\alpha} \partial p_{\beta}} = \frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial p_{\beta} \partial p_{\alpha}}$  可得

$$- \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial^2 Q_{\zeta}}{\partial p_{\alpha} \partial p_{\beta}} = - \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\alpha}} - \sum_{\zeta=1}^s P_{\zeta} \frac{\partial^2 Q_{\zeta}}{\partial p_{\beta} \partial p_{\alpha}}$$

所以有

$$\sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} = \sum_{\zeta=1}^s \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial p_{\beta}} \frac{\partial Q_{\zeta}}{\partial p_{\alpha}}$$

用矩阵表示即

$$\left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} - \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (10.45)$$

综合式(10.43)、式(10.44)和式(10.45)可得

$$\begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T & \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \right)^T & \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_s \\ -\mathbf{I}_s & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_s \\ -\mathbf{I}_s & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

或者

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J} \quad (10.46)$$

式(10.46)称为正则变换的辛条件, 反映了正则方程的对称性。所有正则变换的 Jacobi 矩阵组成的集合在矩阵乘法下构成辛群。

如果有两个正则变换

$$\xi = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto \xi' = \begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix}, \quad \xi' = \begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} \mapsto \xi = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

它们的变换矩阵分别表示为  $\mathbf{M}_1$  和  $\mathbf{M}_2$ , 则有

$$\mathbf{M}_1^T \mathbf{J} \mathbf{M}_1 = \mathbf{J}, \quad \mathbf{M}_2^T \mathbf{J} \mathbf{M}_2 = \mathbf{J} \quad (10.47)$$

则变换

$$\xi = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto \xi = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

的变换矩阵为  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$ , 由于

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_2^T \mathbf{J} \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1^T (\mathbf{M}_2^T \mathbf{J} \mathbf{M}_2) \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1^T \mathbf{J} \mathbf{M}_1 = \mathbf{J} \quad (10.48)$$

所以变换  $\xi \mapsto \xi$  也是正则变换, 这就证明了第252页脚注中的结论, 有限正则变换可以看作是一系列无限小正则变换的累积, 即

$$\mathbf{M} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{M}_i(\varepsilon_i, G_i), \quad \varepsilon_i \rightarrow 0 \quad (10.49)$$

由式(10.46)可有

$$\det(\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M}) = \det \mathbf{J} = 1$$

所以可有

$$|\det \mathbf{M}| = 1 \quad (10.50)$$

即, 正则变换 Jacobi 行列式的绝对值为 1。

## 10.1.7 正则变换的不变量

### 10.1.7.1 相体积元不变

在正则变换前, 相体积元为

$$\prod_{i=1}^{2s} d\xi_i = \prod_{\alpha=1}^s dq_\alpha dp_\alpha$$

因此, 正则变换之后的相体积元为

$$\prod_{j=1}^{2s} d\Xi_j = \prod_{\beta=1}^s dQ_\beta dP_\beta = \left| \det \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right| \prod_{i=1}^{2s} d\xi_i = |\det M| \prod_{i=1}^{2s} d\xi_i = \prod_{i=1}^{2s} d\xi_i$$

因此, 相体积为不依赖于正则变量选取的绝对量。这是经典统计物理的理论基础。

### 10.1.7.2 Poisson 括号不变

设有

$$\begin{aligned} f &= f_\xi(\xi, t) = f_\Xi(\Xi, t) \\ g &= g_\xi(\xi, t) = g_\Xi(\Xi, t) \end{aligned}$$

变换之前的 Poisson 括号为

$$[f, g]_\xi = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial(f, g)}{\partial(q_\alpha, p_\alpha)} = \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^T J \frac{\partial g}{\partial \xi}$$

正则变换之后的 Poisson 括号为

$$\begin{aligned} [f, g]_\Xi &= \left( \frac{\partial f}{\partial \Xi} \right)^T J \frac{\partial g}{\partial \Xi} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial \Xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^T J \frac{\partial \xi}{\partial \Xi} \frac{\partial g}{\partial \xi} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^T M^{-T} J M^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi} \end{aligned}$$

由式(10.46)可有

$$M^{-T} J M^{-1} = J$$

所以有

$$[f, g]_\Xi = \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^T J \frac{\partial g}{\partial \xi} = [f, g]_\xi$$

因此, Poisson 括号为不依赖于正则变量选取的绝对量。力学 Poisson 括号形式为不依赖于相坐标系的绝对表示。因此相应地, 基本 Poisson 括号在正则变换下不变, 此可作为正则变换的判据。

角动量分量不符合基本泊松括号, 因此不可能同时选为正则变量。

**例 10.7** 若新旧正则变量的变换关系为

$$Q = q^\alpha \cos \beta p, \quad P = q^\alpha \sin \beta p$$

当  $\alpha, \beta$  为何值时, 这个变换是正则变换? 并找出其母函数。



解 考虑基本泊松括号

$$[Q, P]_{\xi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \alpha \beta q^{2\alpha-1} = 1 = [Q, P]_{\Xi}$$

由此可得  $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2$ 。所以

$$\begin{cases} Q = \sqrt{q} \cos 2p \\ P = \sqrt{q} \sin 2p \end{cases}$$

因此有

$$\begin{cases} q = \frac{Q^2}{\cos^2 2p} \\ P = Q \tan 2p \end{cases}$$

考虑第三类母函数  $F_3 = F_3(p, Q)$ , 则有

$$dF_3 = -qdp - PdQ = -\frac{Q^2}{\cos^2 2p}dp - Q \tan 2p dQ = d\left(-\frac{1}{2}Q^2 \tan 2p\right)$$

即有第三类母函数

$$F_3(p, Q) = -\frac{1}{2}Q^2 \tan 2p$$

## 10.2 Hamilton-Jacobi 方程

第10.1.5节已经提到, 可以找到这样的正则变换, 它将所有正则变量都变成常数, 在这种情况下正则方程就变为

$$\begin{cases} \dot{Q}_{\alpha} = 0, \\ \dot{P}_{\alpha} = 0, \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (10.51)$$

最简单的情况就是变换后的 Hamilton 函数  $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  恒等于零, 于是所有正则变量都是循环变量, 即有

$$\begin{cases} Q_{\alpha} = C_{\alpha} = \text{常数}, \\ P_{\alpha} = D_{\alpha} = \text{常数}, \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (10.52)$$

然后再利用变换关系

$$\begin{cases} Q_{\alpha} = Q_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \\ P_{\alpha} = P_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (10.53)$$

即可得到原来正则方程的解

$$\begin{cases} q_{\alpha} = q_{\alpha}(\mathbf{C}, \mathbf{D}, t) \\ p_{\alpha} = p_{\alpha}(\mathbf{C}, \mathbf{D}, t) \end{cases} \quad (10.54)$$

对于四类正则变换母函数, 新旧 Hamilton 函数间的关系都是

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (10.55)$$

此处将母函数记作  $S$ , 欲使  $K = 0$ , 则要求母函数  $S$  满足关系式

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (10.56)$$

由此, 求解这个正则变换的问题便归结为求  $S$ 。

## 10.2.1 Hamilton-Jacobi 方程

考虑第二类母函数  $F_2 = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ , 则由变换关系式(10.22)可有

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \quad (10.57)$$

并根据变换需满足的条件, 令

$$P_\alpha = D_\alpha \quad (\text{常数}) \quad (10.58)$$

即有

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (10.59)$$

式(10.59)称为 Hamilton-Jacobi 方程。它是函数  $S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t)$  的一阶偏微分方程, 有  $s+1$  个自变量 ( $\mathbf{q}$  和  $t$ ), 所以应有  $s+1$  个独立的积分常数, 其中一个为相加常数, 不影响变换, 可略去; 其余的  $s$  个即为  $D_\alpha$ 。含有  $s$  个任意常数 (不包括相加常数) 的函数  $S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t)$  称为 Hamilton-Jacobi 方程的完全积分。

## 10.2.2 Hamilton 主函数

在 Hamilton-Jacobi 方程(10.59)中, 函数  $S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t)$  称为 Hamilton 主函数。下面来讨论 Hamilton 主函数的物理意义。考虑

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - H = L \quad (10.60)$$

由此可得

$$S = \int L dt \quad (10.61)$$

函数  $S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t)$  即为积分限不定的 Hamilton 作用量, 因此也称为 Hamilton 作用函数。

当 Hamilton 函数不显含时间  $t$ , 即系统广义能量守恒时<sup>①</sup>, 这种情况下方程(10.59)可以表示为

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = E + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (10.62)$$

此情况下 Hamilton 作用函数可分离变量

$$S = S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t) = W(\mathbf{q}, \mathbf{D}) + T(t)$$

由此即有

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t) = W(\mathbf{q}, \mathbf{D}) - Et \quad (10.63)$$

Hamilton-Jacobi 方程变为

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = E \quad (10.64)$$

式(10.64)称为不含时 Hamilton-Jacobi 方程。其中函数

$$W = W(\mathbf{q}, \mathbf{D}) = W(\mathbf{q}, E, D_2, \dots, D_s)$$

称为 Hamilton 特征函数。

<sup>①</sup> 纯力学问题都属于这一类问题。

考虑到  $H = E$ , 可有

$$S = \int L dt = \int \left( \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H \right) dt = \int \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} - Et + D_0$$

上式中  $D_0$  是相加常数, 可略去, 由此可得 Hamilton 特征函数的具体形式

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{D}) = \int \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} \quad (10.65)$$

函数  $W(\mathbf{q}, \mathbf{D})$  即为积分限不定的 Lagrange 作用量 (见式(9.96))。

下面来考虑 Hamilton-Jacobi 方程的完全积分  $S = S(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t)$  与系统运动轨迹  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t), \mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$  之间的关系。首先有

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha}}(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t) \\ C_{\alpha} = \frac{\partial S}{\partial D_{\alpha}}(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t) \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (10.66)$$

由方程(10.66)第二式的  $s$  个方程中 (这是代数方程组) 可以解出  $s$  个广义坐标与时间的关系

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$$

再由方程(10.66)第一式即可得

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$$

由此便得到完整的相空间轨迹。当系统广义能量守恒时, 记  $E = D_1$ , 则有

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha}}(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t) = \frac{\partial W}{\partial q_{\alpha}}(\mathbf{q}, \mathbf{D}) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \end{cases} \quad (10.67a)$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\partial S}{\partial D_1}(\mathbf{q}, \mathbf{D}, t) = \frac{\partial W}{\partial E}(\mathbf{q}, \mathbf{D}) - t \end{cases} \quad (10.67b)$$

$$\begin{cases} C_{\alpha} = \frac{\partial S}{\partial D_{\alpha}} = \frac{\partial W}{\partial D_{\alpha}}(\mathbf{q}, \mathbf{D}) \quad (\alpha = 2, 3, \dots, s) \end{cases} \quad (10.67c)$$

由此可有

$$C_{\alpha} = C_{\alpha}(q_1, q_2, \dots, q_s, E, D_2, \dots, D_s) \quad (\alpha = 2, 3, \dots, s) \quad (10.68)$$

由式(10.68)的  $s-1$  个方程, 可以以  $q_1$  为参数, 解出  $q_2, \dots, q_s$  的表达式为

$$q_{\alpha} = f_{\alpha}(q_1, C_2, \dots, C_s, E, D_2, \dots, D_s) \quad (\alpha = 2, 3, \dots, s) \quad (10.69)$$

此即为位形空间的轨道曲线。

**例 10.8 (一维谐振子的 Hamilton-Jacobi 方程求解)** 一维谐振子的 Hamilton 函数为

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

用 Hamilton-Jacobi 方程求解此系统的运动。

**解** 系统的 Hamilton 函数不显含时间, 故根据不含时 Hamilton-Jacobi 方程(10.64)可有

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E$$

即

$$\frac{\partial W}{\partial q} = m\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2} = p$$

因此

$$W = m\omega \int \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2} dq$$

由此即有

$$C = \frac{\partial W}{\partial E} - t = \frac{1}{\omega} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2}} - t = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q \right) - t$$

由此可得系统的解

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin [\omega(t + C)] \\ p = m\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2} = \sqrt{2mE} \cos [\omega(t + C)] \end{cases}$$

$C, E$  是积分常数, 故有

$$C = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q_0 \right) - t_0, \quad E = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_0^2$$

Hamilton-Jacobi 理论将常微分方程组求解转化为偏微分方程的全积分问题, 在具体应用方面并无方便之处, 但是提供了一种全新的力学运动图像。

### 10.2.3 Hamilton-Jacobi 方程的分离变量

在某些特殊情况下, Hamilton-Jacobi 方程的完全积分可以通过分离变量的方法求得。假设某一个坐标, 将其记作  $q_1$ , 与其相应的导数  $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ , 在 Hamilton-Jacobi 方程中仅以某种组合  $\phi \left( q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1} \right)$  的方式出现, 而这个组合中不包含任何其他坐标, 即 Hamilton-Jacobi 方程(10.59)具有如下形式:

$$\Phi \left( \mathbf{q}', t, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}'}, \frac{\partial S}{\partial t}, \phi \left( q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1} \right) \right) = 0 \quad (10.70)$$

其中  $\mathbf{q}'$  表示除了  $q_1$  以外的所有坐标。

假设解具有如下形式

$$S(\mathbf{q}, t) = S_0(\mathbf{q}', t) + S_1(q_1) \quad (10.71)$$

将(10.71)代入式(10.70)中, 即有

$$\Phi \left( \mathbf{q}', t, \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{q}'}, \frac{\partial S_0}{\partial t}, \phi \left( q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right) \right) = 0 \quad (10.72)$$

假设函数  $\Phi$  满足  $\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \neq 0$ <sup>①</sup>, 则可以在方程(10.72)中解出  $\phi$ , 并将其表示为:

$$\Psi \left( \mathbf{q}', t, \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{q}'}, \frac{\partial S_0}{\partial t} \right) = \phi \left( q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right) \quad (10.73)$$

<sup>①</sup> 对于通常的系统方程来说, 这个假设是十分合理的。

在方程(10.73)中, 其左端是  $\mathbf{q}'$  和  $t$  的函数, 右端则只是  $q_1$  的函数, 因此两端都只能是常数, 于是将方程(10.70)分为两个方程

$$\phi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = D_1 \quad (10.74)$$

$$\Phi\left(\mathbf{q}', t, \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{q}'}, \frac{\partial S_0}{\partial t}, D_1\right) = 0 \quad (10.75)$$

方程(10.74)是一个常微分方程, 而方程(10.75)虽然仍为偏微分方程, 但其独立变量数目较之原来减少了一个。如果类似的操作还可以进行, 那么可以继续对方程(10.75)重复上面的操作, 继续分离变量, 逐渐减少偏微分方程(10.75)中的独立变量数目。

对于循环坐标的情形, 由于循环坐标  $q_1$  不显含于 Hamilton 函数中, 此时  $\phi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$  项即为  $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ , 因此可有

$$S_1(q_1) = D_1 q_1$$

而此处常数  $D_1$  即为与  $q_1$  共轭的广义动量  $p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = D_1$ 。对于保守系统而言,  $-Et$  这一项即对应着“循环坐标”时间  $t$  的分离。

为了能够在 Hamilton-Jacobi 方程中分离变量, 适当选择坐标系非常关键。

**例 10.9 (球坐标系中 Hamilton-Jacobi 方程的分离变量)** 在球坐标系中, Hamilton 函数为

$$H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi, t) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r, \theta, \phi, t) \quad (10.76)$$

如果势函数  $V(r, \theta, \phi, t)$  具有如下形式

$$V(r, \theta, \phi, t) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\phi)}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (10.77)$$

其中  $a(r), b(\theta), c(\phi)$  是任意函数, 则分离变量是可能的。此时关于函数  $W(r, \theta, \phi)$  的不含时 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right] \\ + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + 2mc(\phi) \right] = E \end{aligned} \quad (10.78)$$

假设解具有形式

$$S(r, \theta, \phi, t) = -Et + W(r, \theta, \phi) = -Et + S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\phi) \quad (10.79)$$

则有

$$\begin{cases} \left( \frac{dS_3}{d\phi} \right)^2 + 2mc(\phi) = \alpha & (10.80a) \\ \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{\alpha}{\sin^2 \theta} = \beta & (10.80b) \\ \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E & (10.80c) \end{cases}$$

依次积分可得

$$\begin{cases} S_3(\phi) = \pm \int \sqrt{\alpha - 2mc(\phi)} d\phi & (10.81a) \\ S_2(\theta) = \pm \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{\alpha}{\sin^2 \theta}} d\theta & (10.81b) \\ S_1(r) = \pm \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}} dr & (10.81c) \end{cases}$$

便得到 Hamilton-Jacobi 方程的完全积分

$$\begin{aligned} S(r, \theta, \phi, t) = & -Et \pm \int \sqrt{\alpha - 2mc(\phi)} d\phi \pm \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{\alpha}{\sin^2 \theta}} d\theta \\ & \pm \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}} dr \end{aligned} \quad (10.82)$$

其中  $\alpha, \beta, E$  是任意积分常数, 将式(10.83)对这三个任意常数求导并使之等于新常数, 即可得到运动方程的通解。

在一般的问题中, 式(10.77)所表示的势场其第三项未必有物理意义, 因此在  $c(\phi) = 0$  的情形下, 可有 Hamilton-Jacobi 方程的完全积分为

$$S(r, \theta, \phi, t) = -Et + p_\phi \phi \pm \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \pm \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}} dr \quad (10.83)$$

**例 10.10 (抛物线坐标系中 Hamilton-Jacobi 方程的分离变量)** 抛物线坐标  $(u, v, \phi)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的关系由如下变换公式给出

$$\begin{cases} x = uv \cos \phi \\ y = uv \sin \phi \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases} \quad (0 \leq u, v < +\infty, 0 \leq \phi < 2\pi) \quad (10.84)$$

$u$  和  $v$  为常数的曲面是两族以  $z$  轴为对称轴的旋转抛物面, 如图10.1所示。

在这个坐标系下, 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(u^2 + v^2)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m(u^2 + v^2)\dot{v}^2 + \frac{1}{2}mu^2v^2\dot{\phi}^2 - V(u, v, \phi) \quad (10.85)$$

此时, 广义动量为

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m(u^2 + v^2)\dot{u}, \quad p_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = m(u^2 + v^2)\dot{v}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mu^2v^2\dot{\phi}$$

由此可得系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2m(u^2 + v^2)} + \frac{p_\phi^2}{2mu^2v^2} + V(u, v, \phi) \quad (10.86)$$

在这种坐标下, 物理上有意义的可分离变量情况对应于以下形式的势能:

$$V(u, v, \phi) = \frac{a(u) + b(v)}{u^2 + v^2} \quad (10.87)$$

所以我们得到关于  $W(\mathbf{q}, \mathbf{D})$  的方程

$$\frac{1}{2m(u^2 + v^2)} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \right] + \frac{1}{2mu^2v^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{a(u) + b(v)}{u^2 + v^2} = E \quad (10.88)$$

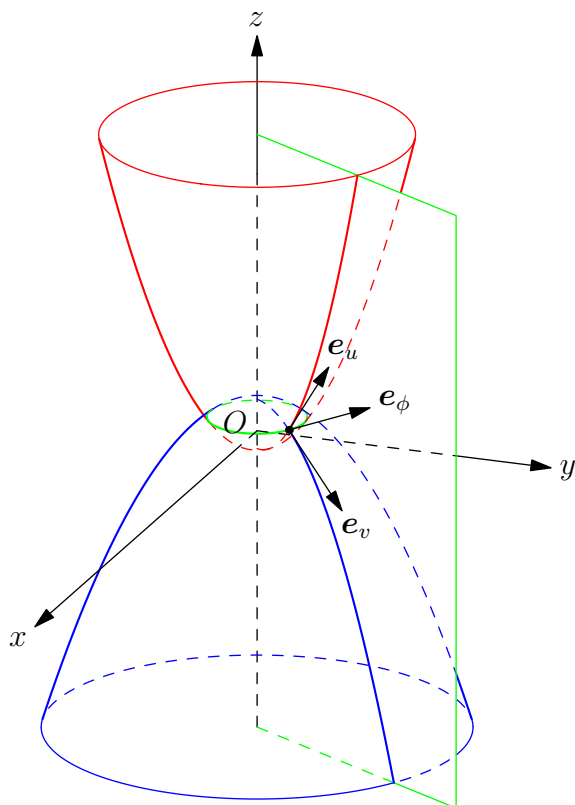


图 10.1: 抛物线坐标系的坐标面

在式(10.88)两端乘以  $2m(u^2 + v^2)$  并整理, 可得

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + a(u) - 2mEu^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 + b(v) - 2mEv^2 + \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2 = 0$$

此处注意到坐标  $\phi$  是循环坐标, 因此可令

$$S(u, v, \phi, t) = -Et + p_\phi \phi + S_1(u) + S_2(v) \quad (10.89)$$

由此得到两个方程

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{dS_2}{dv}\right)^2 - 2mEv^2 + b(v) + \frac{p_\phi^2}{v^2} &= \beta \end{aligned} \right. \quad (10.90a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{dS_1}{du}\right)^2 - 2mEu^2 + a(u) + \frac{p_\phi^2}{u^2} &= -\beta \end{aligned} \right. \quad (10.90b)$$

由此即有

$$S = -Et + p_\phi \phi \pm \int \sqrt{2mEv^2 - \frac{p_\phi^2}{v^2} - b(v) + \beta} dv \pm \int \sqrt{2mEu^2 - \frac{p_\phi^2}{u^2} - a(u) - \beta} du$$

其中  $E, p_\phi, \beta$  为任意积分常数。

**例 10.11 (椭圆坐标系中 Hamilton-Jacobi 方程的分离变量)** 椭圆坐标  $(\xi, \eta, \phi)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的关系由如下变换公式给出

$$\begin{cases} x = \sigma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \phi \\ y = \sigma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \phi \\ z = \sigma \xi \eta \end{cases} \quad (1 \leq \xi < +\infty, -1 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi) \quad (10.91)$$

其中  $\sigma$  为常数。设  $z$  轴上两个点  $A_1$  和  $A_2$  的坐标为  $z = \sigma$  和  $z = -\sigma$ ，则  $\xi$  为常数的坐标面为以  $A_1$  和  $A_2$  为焦点的一族旋转椭球面

$$\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2(\xi^2 - 1)} + \frac{z^2}{\sigma^2\xi^2} = 1$$

而  $\eta$  为常数的坐标面为以  $A_1$  和  $A_2$  为焦点的一族旋转双叶双曲面

$$-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2(1 - \eta^2)} + \frac{z^2}{\sigma^2\eta^2} = 1$$

此坐标系即为图10.2所示的二维椭圆坐标系绕其  $z$  轴旋转而成。

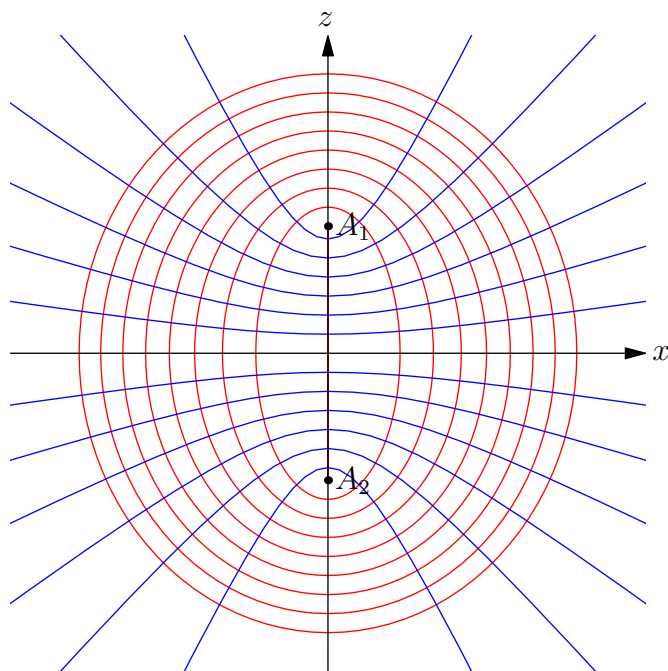


图 10.2: 二维椭圆坐标系

记  $r_1$  和  $r_2$  是点  $(\xi, \eta, \phi)$  到  $A_1$  和  $A_2$  的距离，则有

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \sigma)^2} = \sigma(\xi - \eta) & (10.92a) \\ r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + \sigma)^2} = \sigma(\xi + \eta) & (10.92b) \end{cases}$$

在这个坐标系下，系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} \right) + \frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)\dot{\phi}^2 - V(\xi, \eta, \phi) \quad (10.93)$$

此时，广义动量为

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m\sigma^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \dot{\xi}, \quad p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = m\sigma^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} \dot{\eta}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\sigma^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)\dot{\phi}$$

由此可得系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) p_\phi^2 \right] + V(\xi, \eta, \phi) \quad (10.94)$$



在这种坐标下, 物理上有意义的可分离变量情况对应于势能为

$$V(\xi, \eta, \phi) = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\sigma^2}{r_1 r_2} \left[ a \left( \frac{r_1 + r_2}{2\sigma} \right) + b \left( \frac{r_1 - r_2}{2\sigma} \right) \right] \quad (10.95)$$

所以我们得到关于  $W(\mathbf{q}, \mathbf{D})$  的方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1) \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + (1 - \eta^2) \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 \right] \\ + \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = E \end{aligned} \quad (10.96)$$

在式(10.96)两端乘以  $2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)$  并整理, 可得

$$\begin{aligned} (\xi^2 - 1) \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + 2m\sigma^2 a(\xi) - 2m\sigma^2 E \xi^2 + (1 - \eta^2) \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 + 2m\sigma^2 b(\eta) + 2m\sigma^2 E \eta^2 \\ + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

注意到坐标  $\phi$  是循环坐标, 因此可令

$$S(\xi, \eta, \phi, t) = -Et + p_\phi \phi + S_1(\xi) + S_2(\eta) \quad (10.97)$$

由此得到两个方程

$$\begin{cases} (1 - \eta^2) \left( \frac{dS_2}{d\eta} \right)^2 + 2m\sigma^2 b(\eta) - 2m\sigma^2 E(1 - \eta^2) + \frac{p_\phi^2}{1 - \eta^2} = \beta & (10.98a) \\ (\xi^2 - 1) \left( \frac{dS_1}{d\xi} \right)^2 + 2m\sigma^2 a(\xi) - 2m\sigma^2 E(\xi^2 - 1) + \frac{p_\phi^2}{\xi^2 - 1} = -\beta & (10.98b) \end{cases}$$

由此即有

$$\begin{aligned} S = -Et + p_\phi \phi \pm \int \sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma^2 b(\eta)}{1 - \eta^2} - \frac{p_\phi^2}{(1 - \eta^2)^2}} d\eta \\ \pm \int \sqrt{2m\sigma^2 E - \frac{\beta + 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\phi^2}{(\xi^2 - 1)^2}} d\xi \end{aligned} \quad (10.99)$$

其中  $E, p_\phi, \beta$  为任意积分常数。

### 10.2.4 利用 Hamilton-Jacobi 方程求解 Kepler 问题

本节利用 Hamilton-Jacobi 方程求解 Kepler 问题, 即求解质量为  $\mu$  的质点在 Kepler 势  $V = -\frac{\alpha}{r} (\alpha > 0)$  中的运动。

在天体力学中, 习惯上以太阳为原点<sup>①</sup>, 以地球的赤道平面为  $xOy$  平面, 以北极方向为  $z$  轴建立球坐标系来研究地球或其它行星的运动, 这样选取的球坐标系称为**天球坐标系**, 角度  $\theta$  称为**赤经**, 角度  $\frac{\pi}{2} - \phi$  称为**赤纬**。本节的讨论虽然研究的不限于地球的轨道, 但仍然沿用这些名词。在球坐标系中, 此系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + \frac{p_\phi^2}{2\mu r^2 \sin^2 \theta} - \frac{\alpha}{r} \quad (10.100)$$

<sup>①</sup> 严格来讲应该以日地系统的质心为原点。

系统的 Hamilton 函数不显含时间, 故根据不含时 Hamilton-Jacobi 方程(10.64)可有

$$\frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 \right] - \frac{\alpha}{r} = E \quad (10.101)$$

注意到  $\phi$  是循环坐标, 因此可令

$$S(r, \theta, \phi, t) = -Et + p_\phi \phi + S_1(r) + S_2(\theta) \quad (10.102)$$

由此得到两个方程

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} &= \beta^2 \end{aligned} \right. \quad (10.103a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \frac{\beta^2}{r^2} \right] - \frac{\alpha}{r} &= E \end{aligned} \right. \quad (10.103b)$$

由此即有

$$S = -Et + p_\phi \phi \pm \int \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}} dr \pm \int \sqrt{\beta^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \quad (10.104)$$

其中  $E, p_\phi, \beta$  为任意积分常数。为了使结果更具有几何意义, 现在用坐标  $r$  和  $\theta$  的初始值  $r_0$  和  $\theta_0$  来取代积分常数  $E$  和  $p_\phi$ , 令

$$\left\{ \begin{aligned} p_\phi^2 &= \beta^2 \sin^2 \theta_0 \\ E &= \frac{\beta^2}{2\mu r_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \end{aligned} \right. \quad (10.105)$$

此时可有

$$\begin{aligned} S = & - \left( \frac{\beta^2}{2\mu r_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) t \pm \beta \sin \theta_0 \phi \pm \sqrt{2\mu} \int \sqrt{\frac{\beta^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)} dr \\ & \pm \beta \int \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}} d\theta \end{aligned} \quad (10.106)$$

于是, 质点在空间中的轨迹由如下方程决定

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial r_0} &= -p_{r_0} \end{aligned} \right. \quad (10.107a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \theta_0} &= -p_{\theta_0} \end{aligned} \right. \quad (10.107b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta} &= -\gamma \end{aligned} \right. \quad (10.107c)$$

首先假设在(10.106)中都取正号, 则式(10.107a)化为

$$- \left( -\frac{\beta^2}{\mu r_0^3} + \frac{\alpha}{r_0^2} \right) t + \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{-\frac{\beta^2}{\mu r_0^3} + \frac{\alpha}{r_0^2}}{\sqrt{\frac{\beta^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}} dr = -p_{r_0}$$

整理可得<sup>①</sup>

$$\sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \left[ \frac{\beta^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r} \right) - \alpha \right]}} = t - t_0 \quad (10.108)$$

<sup>①</sup> 积分下限的不同取值只会使式(10.108)右端多一个与该固定取值相关的常数, 此常数总可以通过选择时间起点来去除。此处将积分下限取为  $r_0$ , 下文会说明,  $r = r_0$  是  $\dot{r}$  变号的位置。

其中  $t_0 = \frac{p_{r_0}}{-\frac{\beta^2}{\mu r_0^3} + \frac{\alpha}{r_0^2}}$ 。将式(10.108)改写为

$$\sqrt{\frac{\mu r_0}{2}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{(r-r_0) \left[ \left( \frac{\beta^2}{2\mu r_0} - \alpha \right) r + \frac{\beta^2}{2\mu} \right]}} = t - t_0$$

根据  $\frac{\beta^2}{2\mu r_0} - \alpha$  的符号, 可以分为以下三种情形:

1.  $\frac{\beta^2}{2\mu r_0} < \alpha$ , 此时  $E = \frac{\beta^2}{2\mu r_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} < 0$ , 令

$$r_1 = \frac{\frac{\beta^2}{2\mu}}{\alpha - \frac{\beta^2}{2\mu r_0}} > 0 \quad (10.109)$$

则式(10.108)可以改写为

$$\frac{\mu r_0}{\sqrt{2\mu r_0 \alpha - \beta^2}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}} = t - t_0 \quad (10.110)$$

对式(10.110)两端同时求对  $t$  的导数, 可得

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{2\mu r_0 \alpha - \beta^2}}{\mu r_0 r} \sqrt{(r-r_0)(r_1-r)} \quad (10.111)$$

根据式(10.111)可得

$$\dot{r}|_{r=r_0} = 0, \quad \dot{r}|_{r=r_1} = 0 \quad (10.112)$$

即  $r = r_0$  和  $r = r_1$  是轨道的两个拱点。由式(10.111)中的根式非负也同样可得此运动的径向范围为  $r_0 \leq r \leq r_1$ , 是有界运动。

做变量代换  $r = \frac{r_0 + r_1}{2} - \frac{r_1 - r_0}{2} \cos \xi$ , 则有关于矢径长度的参数方程

$$\begin{cases} r = \frac{r_0 + r_1}{2} - \frac{r_1 - r_0}{2} \cos \xi \\ t = \frac{\mu r_0 (r_0 + r_1)^2}{2\sqrt{2\mu r_0 \alpha - \beta^2}} \left( \xi - \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0} \sin \xi \right) + t_0 \end{cases} \quad (10.113)$$

2.  $\frac{\beta^2}{2\mu r_0} = \alpha$ , 此时  $E = \frac{\beta^2}{2\mu r_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} = 0$ , 则式(10.108)可以改写为

$$\frac{\mu \sqrt{r_0}}{\beta} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{r-r_0}} = t - t_0 \quad (10.114)$$

对式(10.114)两端同时求对  $t$  的导数, 可得

$$\dot{r} = \frac{\beta}{\mu r} \sqrt{\frac{r-r_0}{r_0}} \quad (10.115)$$

即仅当  $r = r_0$  时, 才有  $\dot{r} = 0$ 。由式(10.115)中的根式非负可得此运动的径向范围为  $r \geq r_0$ , 是无界运动。

求出式(10.114)中的积分, 可得矢径长度与时间的关系

$$t = \frac{2\mu}{3\beta} \sqrt{r_0(r-r_0)}(r+2r_0) + t_0 \quad (10.116)$$

由此可见, 当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $r \rightarrow +\infty$ 。

3.  $\frac{\beta^2}{2\mu r_0} > \alpha$ , 此时  $E = \frac{\beta^2}{2\mu r_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} > 0$ , 令

$$r_1 = \frac{\frac{\beta^2}{2\mu}}{\frac{\beta^2}{2\mu r_0} - \alpha} > 0 \quad (10.117)$$

则式(10.108)可以改写为

$$\frac{\mu r_0}{\sqrt{\beta^2 - 2\mu r_0 \alpha}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{(r - r_0)(r + r_1)}} = t - t_0 \quad (10.118)$$

对式(10.118)两端同时求对  $t$  的导数, 可得

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{\beta^2 - 2\mu r_0 \alpha}}{\mu r_0 r} \sqrt{(r - r_0)(r + r_1)} \quad (10.119)$$

在  $r > 0$  的范围内, 仅当  $r = r_0$  时, 才有  $\dot{r} = 0$ 。由式(10.119)中的根式非负可得此运动的径向范围为  $r \geq r_0$ , 是无界运动。

做变量代换  $r = -\frac{r_1 - r_0}{2} + \frac{r_0 + r_1}{2} \cosh \xi$ , 则有关于矢径长度的参数方程

$$\begin{cases} r = -\frac{r_1 - r_0}{2} + \frac{r_0 + r_1}{2} \cosh \xi \\ t = \frac{\mu r_0 (r_1 - r_0)}{2\sqrt{\beta^2 - 2\mu r_0 \alpha}} \left( \frac{r_1 + r_0}{r_1 - r_0} \sinh \xi - \xi \right) + t_0 \end{cases} \quad (10.120)$$

前述三种情形分别对应了三种完全不同的轨道形状, 而当  $t = t_0$  时,  $r = r_0$  为行星运动过程中距力心最近的点, 该点即称为**近心点**<sup>①</sup>。

现在来考虑方程(10.107b)。假设在方程(10.107b)中都取正号, 则式(10.107b)化为

$$\beta \cos \theta_0 \phi - \beta \int \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0 \csc^2 \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \csc^2 \theta}} d\theta = -p_{\theta_0}$$

整理可得<sup>②</sup>

$$- \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta_0 \csc^2 \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \csc^2 \theta}} d\theta = -\phi - \frac{p_{\theta_0}}{\beta \cos \theta_0} \quad (10.121)$$

将式(10.121)左端积分, 即有

$$\arccos \frac{\cot \theta}{\cot \theta_0} = \phi + \frac{p_{\theta_0}}{\beta \cos \theta_0} \quad (10.122)$$

整理可得

$$\frac{\cot \theta}{\cot \theta_0} = \sin(\phi - \Omega) \quad (10.123)$$

其中  $\Omega = -\frac{\pi}{2} - \frac{p_{\theta_0}}{\beta \cos \theta_0}$ 。

将式(10.123)与式(9.24)对比, 即与式

$$\frac{\cot \theta}{\cot \left( \theta'_0 - \frac{\pi}{2} \right)} = \sin \left( \phi - \phi'_0 + \frac{\pi}{2} \right) \quad (10.124)$$

对比, 可知式(10.123)所表示的球面曲线为大圆, 即行星的轨迹是平面的。如图10.3所示, 作一个单位球面 (称为**天球**), 利用其上的点表示行星在空间中的角度坐标  $(\theta, \phi)$ 。考虑到当

<sup>①</sup> 对于行星绕太阳的运动, 该点即称为**近日点**。

<sup>②</sup> 基于与前面相同的原因, 此处将积分下限取为  $\theta_0$ 。

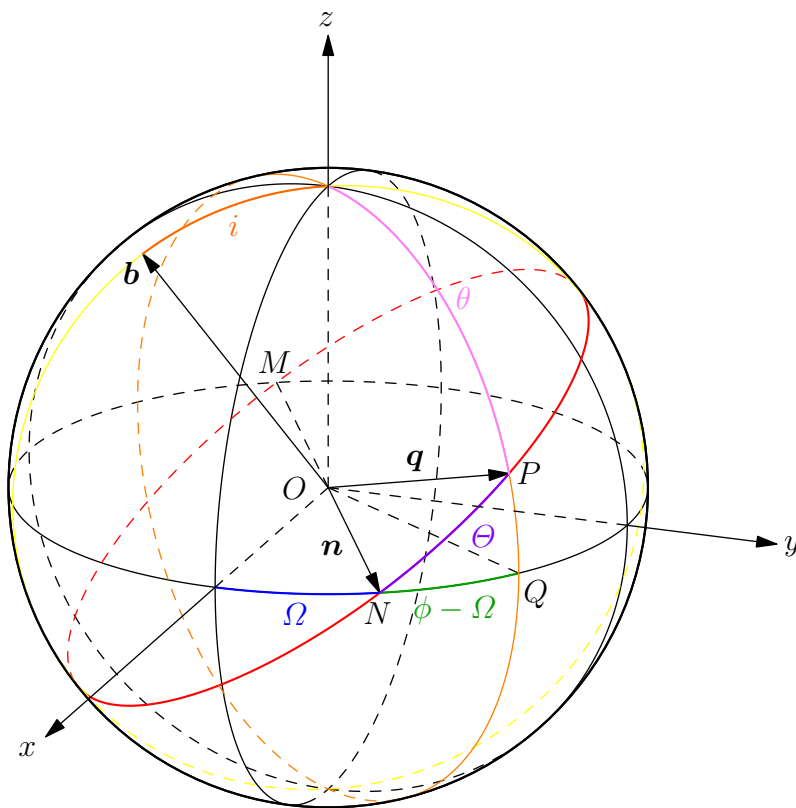


图 10.3: 行星的轨道在天球上的投影

$\phi = \Omega$  时,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 即  $\Omega$  表示轨道平面与  $xOy$  坐标平面的交叉线与  $Ox$  轴所成的角度, 称为升交点赤经。记大圆上任意一点  $P$ , 其球面坐标为  $(\theta, \phi)$ , 则单位向量  $\overrightarrow{OP} =: \mathbf{q}$  可以表示为

$$\mathbf{q} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \quad (10.125)$$

而轨道平面与  $xOy$  坐标平面交叉线  $\overrightarrow{ON}$  的方向向量  $\mathbf{n}$  可以表示为

$$\mathbf{n} = \cos \Omega \mathbf{e}_1 + \sin \Omega \mathbf{e}_2 \quad (10.126)$$

因此, 轨道平面的单位法向量可以表示为

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{q}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{q}|} \quad (10.127)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{q} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos \theta \sin \Omega \mathbf{e}_1 - \cos \theta \cos \Omega \mathbf{e}_2 + \sin \theta (\sin \phi \cos \Omega - \cos \phi \sin \Omega) \mathbf{e}_3 \\ &= \cos \theta \sin \Omega \mathbf{e}_1 - \cos \theta \cos \Omega \mathbf{e}_2 + \sin \theta \sin(\phi - \Omega) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (10.128)$$

将式(10.123)带入式(10.128)中, 可得

$$\mathbf{n} \times \mathbf{q} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} (\cos \theta_0 \sin \Omega \mathbf{e}_1 - \cos \theta_0 \cos \Omega \mathbf{e}_2 + \sin \theta_0 \mathbf{e}_3) \quad (10.129)$$

因此有

$$\mathbf{b} = \cos \theta_0 \sin \Omega \mathbf{e}_1 - \cos \theta_0 \cos \Omega \mathbf{e}_2 + \sin \theta_0 \mathbf{e}_3 \quad (10.130)$$

即向量  $\mathbf{b}$  为常向量, 亦即说明行星的运转轨道是平面曲线, 而该平面与  $xOy$  坐标平面之间的夹角为  $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ , 这个角度称为**轨道倾角**, 也常以  $i$  表示。

最后考虑方程(10.107c)。假设在方程(10.107c)中都取正号, 则式(10.107c)化为

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{\mu r_0^2} t + \phi \sin \theta_0 + \sqrt{2\mu} \int_{r_0}^r \frac{\frac{\beta}{\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right)}{2 \sqrt{\frac{\beta^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}} dr \\ + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}} d\theta = -\gamma \end{aligned}$$

整理可得<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}}{\sqrt{\frac{\beta^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}} dr + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \csc^2 \theta} d\theta \\ = -\gamma + \frac{\beta}{\mu r_0^2} t - \phi \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (10.131)$$

在式(10.108)两端同时取微分, 可得

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{\beta^2}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}} = \sqrt{\frac{2}{\mu}} dt \quad (10.132)$$

将式(10.132)代入式(10.131)中, 可得

$$-\frac{\beta}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt}{r^2(t)} + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \csc^2 \theta} d\theta = -\gamma + \frac{\beta}{\mu r_0^2} t_0 - \phi \sin \theta_0 \quad (10.133)$$

考虑式(10.123), 即

$$\cot \theta = \cot \theta_0 \sin(\phi - \Omega) = \cot \theta_0 \cos\left(\phi - \Omega - \frac{\pi}{2}\right) \quad (10.134)$$

当  $\theta = \theta_0$  时, 有  $\phi = \frac{\pi}{2} + \Omega =: \phi_0$ , 因此将式(10.133)代入式(10.133)中可得

$$-\frac{\beta}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt}{r^2(t)} + \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\csc \theta_0}{1 + \cot^2 \theta_0 \cos^2(\phi - \phi_0)} d\phi = -\gamma + \frac{\beta}{\mu r_0^2} t_0 - \phi_0 \sin \theta_0 \quad (10.135)$$

计算式(10.135)中的积分如下

$$\begin{aligned} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\csc \theta_0}{1 + \cot^2 \theta_0 \cos^2(\phi - \phi_0)} d\phi &= \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\csc \theta_0}{\sin^2(\phi - \phi_0) + (1 + \cot^2 \theta_0) \cos^2(\phi - \phi_0)} d\phi \\ &= \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\csc \theta_0}{\sin^2(\phi - \phi_0) + \csc^2 \theta_0 \cos^2(\phi - \phi_0)} d\phi \\ &= \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\csc \theta_0 \csc^2(\phi - \phi_0)}{1 + \csc^2 \theta_0 \cot^2(\phi - \phi_0)} d\phi \end{aligned}$$

<sup>①</sup> 基于与前面相同的原因, 此处将积分下限取为  $r_0$  和  $\theta_0$ 。

$$\begin{aligned}
&= -\arctan \left[ \csc \theta_0 \cot(\phi - \phi_0) \right] \Big|_{\phi_0}^{\phi} \\
&= -\arctan \left[ \csc \theta_0 \cot(\phi - \phi_0) \right] + \arctan(+\infty) \\
&= -\arctan \left[ \csc \theta_0 \cot(\phi - \phi_0) \right] + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

记

$$\Theta = -\arctan \left[ \csc \theta_0 \cot(\phi - \phi_0) \right] \quad (10.136)$$

称为真近点角, 则式(10.135)化为

$$\Theta = \frac{\beta}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt}{r^2(t)} + \Theta_0 \quad (10.137)$$

其中  $\Theta_0 = -\frac{\pi}{2} - \gamma + \frac{\beta}{\mu r_0^2} t_0 - \phi_0 \sin \theta_0$ , 而  $(r_0, \theta_0, \phi_0)$  即为近心点的球坐标。此处  $\Theta$  的几何意义即为图10.3中的  $\angle NOP$ , 这是因为根据式(10.125)、式(10.126)和式(10.123)可得

$$\begin{aligned}
\cos \angle NOP &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \sin \theta \cos \phi \cos \Omega + \sin \theta \sin \phi \sin \Omega \\
&= \sin \theta \cos(\phi - \Omega) = \frac{\cos(\phi - \Omega)}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta_0 \sin^2(\phi - \Omega)}}
\end{aligned}$$

故

$$\tan \angle NOP = \csc \theta_0 \tan(\phi - \Omega) = -\csc \theta_0 \cot(\phi - \phi_0)$$

时间  $t_0$  代表行星经过近心点  $(r_0, \theta_0, \phi_0)$  的时刻, 因此式(10.137)中的常数  $\Theta_0$  代表近心点与升交点  $N$  之间在轨道平面上的角度差, 称为近心点幅角, 也常以  $\tilde{\omega}$  表示。

下面来考虑行星运行轨道的具体形状。将式(10.137)两端求对  $t$  的导数可得

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\beta}{\mu r^2} \quad (10.138)$$

同理将式(10.108)两端求对  $t$  的导数可得

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( \frac{\beta^2}{2\mu r_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{2\mu r^2} \right)} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{2\mu r^2} \right)} \quad (10.139)$$

由式(10.138)和(10.139)可得

$$\frac{dr}{d\Theta} = r^2 \sqrt{\frac{2\mu E}{\beta^2} + \frac{2\mu\alpha}{\beta^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}} \quad (10.140)$$

如果令  $u = \frac{1}{r}$  可将式(10.140)化为

$$-\frac{du}{\sqrt{\frac{\mu^2 \alpha^2}{\beta^4} \left( 1 + \frac{2\beta^2 E}{\mu \alpha^2} \right) - \left( u - \frac{\mu \alpha}{\beta^2} \right)^2}} = d\Theta$$

由此可得

$$r = \frac{\frac{\beta^2}{\mu \alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\beta^2 E}{\mu \alpha^2}} \cos(\Theta - \Theta_0)}$$

记

$$p = \frac{\beta^2}{\mu\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\beta^2 E}{\mu\alpha^2}} \quad (10.141)$$

其中  $p$  称为轨道参数,  $e$  为离心率。由此即有

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\Theta - \Theta_0)} \quad (10.142)$$

由此可得当  $E < 0$  时,  $e < 1$ , 轨道为椭圆; 当  $E = 0$  时,  $e = 1$ , 轨道为抛物线; 当  $E > 0$  时,  $e > 1$ , 轨道为双曲线。他们分别对应式(10.113)、式(10.116)和式(10.120)的三种情况。

至此, 行星在空间中的绕日运动已经完全解决了。这个问题的六个积分常数分别为  $r_0, \theta_0, \beta, t_0, \Omega, \Theta_0$ , 而后面三个是常数  $p_{r_0}, p_{\theta_0}$  和  $\gamma$  的函数。而在天体力学中, 常将这六个积分常数用其它一些更具有几何意义的常数来代替, 它们分别是轨道参数  $p$ , 离心率  $e$ , 过近心点时刻  $t_0$ , 升交点赤经  $\Omega$ , 轨道倾角  $i$ , 近心点幅角  $\tilde{\omega}$ 。

例 10.12 用 Hamilton-Jacobi 方程解平面谐振子问题。

解 平面谐振子的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \quad (10.143)$$

系统的 Hamilton 函数不显含时间, 故根据不含时 Hamilton-Jacobi 方程(10.64)可有

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) = E \quad (10.144)$$

将其分离变量可设

$$S(x, y, t) = -Et + W(x, y) = -Et + S_1(x) + S_2(y) \quad (10.145)$$

由此得到两个方程

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dS_2}{dy} \right)^2 + \frac{k}{2}y^2 &= \frac{k}{2}\beta^2 \end{aligned} \right. \quad (10.146a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dS_1}{dx} \right)^2 + \frac{k}{2}x^2 &= E - \frac{k}{2}\beta^2 \end{aligned} \right. \quad (10.146b)$$

由此即有

$$S(x, y, t) = -Et \pm \sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{2E}{k} - \beta^2 - x^2} dx \pm \int \sqrt{\beta^2 - y^2} dy \quad (10.147)$$

为了使式子更加具有对称性, 令

$$E = \frac{k}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \quad (10.148)$$

则有

$$S(x, y, t) = -\frac{k}{2}(\alpha^2 + \beta^2)t \pm \sqrt{mk} \int \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx \pm \sqrt{mk} \int \sqrt{\beta^2 - y^2} dy \quad (10.149)$$

于是质点在空间中的轨迹由如下方程决定

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= -p_{x_0} \end{aligned} \right. \quad (10.150a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta} &= -p_{y_0} \end{aligned} \right. \quad (10.150b)$$



由式(10.150a)可得

$$-k\alpha t \pm \sqrt{mk} \int_{\alpha}^x \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx = -p_{x_0} \quad (10.151)$$

由此即可得到

$$x = \alpha \cos \left[ \sqrt{\frac{k}{m}} \left( t - \frac{p_{x_0}}{\alpha k} \right) \right] \quad (10.152)$$

由式(10.150b)可得

$$-k\beta t \pm \sqrt{mk} \int_{\beta}^y \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - y^2}} dy = -p_{y_0} \quad (10.153)$$

由此即可得到

$$y = \beta \cos \left[ \sqrt{\frac{k}{m}} \left( t - \frac{p_{y_0}}{\beta k} \right) \right] \quad (10.154)$$

至此,平面谐振子的问题就完全解决了,此问题的四个积分常数分别为  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p_{x_0}$  和  $p_{y_0}$ , 其中能量和  $\alpha$ ,  $\beta$  之间的关系为

$$E = \frac{k}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \quad (10.155)$$

## 10.3 作用-角变量

### 10.3.1 单自由度系统的作用-角变量

在物理学中,具有周期性的运动往往有特殊的重要性。对于单自由度系统,相空间是二维平面,周期运动只能有两种类型:

1. 正则坐标  $q(t)$  和  $p(t)$  都是时间的周期函数,且周期相同。在这种情况下,相轨道是闭合曲线,这是单自由度振动<sup>①</sup>。
2. 函数  $q(t)$  不是周期函数,但是  $q$  的值每增加  $q_0$  时,系统的状态便重现一次。在这种情况下,相轨道不是闭合曲线,但  $p$  是  $q$  的周期函数。这类周期运动称为转动。

设  $H = H(q, p)$  是单自由度系统的 Hamilton 函数,其 Hamilton 特征函数为  $W = W(q, E)$ , 其中  $E$  为广义能量积分  $H(q, p) = E$  的积分常数。此时,应有

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} \quad (10.156)$$

根据第10.2节的相关讨论,将 Hamilton 主函数  $S$  作为正则变换的母函数,得到的新正则变量都是循环变量,都是积分常数。但这里不用  $E$  作为变换之后的“动量”,而是引入如下定义的新变量作为正则变换后的新动量:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \quad (10.157)$$

其中积分沿着  $q$  的一个变化周期内所对应的相轨道进行。由(10.157)可知,  $J$  在振动情形下等于封闭相轨道内的面积除以  $2\pi$ , 而在转动情形下等于相曲线与  $q$  轴上长度为  $q_0$  的线段之间的面积除以  $2\pi$ 。

<sup>①</sup> 在多自由度的一般情形下,这类周期运动称为天平动。

将式(10.156)代入式(10.157)中可得

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q, E) dq \quad (10.158)$$

由此可知  $J$  仅是积分常数  $E$  的函数。当  $\frac{dJ}{dE} \neq 0$  时可以由  $J = J(E)$  反解得到  $E = E(J)$ ，由此可得新的 Hamilton 函数  $H = E(J)$ ，而这个正则变换  $q, p \mapsto \omega, J$  的正则变换母函数就是 Hamilton 特征函数  $W = W(q, E(J))$ 。其中与变量  $J$  共轭的正则坐标可根据下式

$$\omega = \frac{\partial W}{\partial J} \quad (10.159)$$

确定。

由于变量  $J$  具有与作用量相同的量纲（式(10.157)），因此变量  $J$  称为**作用量变量**，而变量  $\omega$  是无量纲的（式(10.159)），但其在各种系统中的物理意义往往与某种角度相关，因此变量  $\omega$  称为**角变量**。

在作用-角变量下，Hamilton 函数为  $K = E(J)$ ，正则方程为

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \omega} = 0 \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial K}{\partial J} = \frac{dE}{dJ} \end{cases} \quad (10.160)$$

据此可以解得

$$J = J_0, \quad \omega = \left( \frac{dE}{dJ} \right) t + \omega_0 \quad (10.161)$$

其中  $J_0$  和  $\omega_0$  是积分常数。如果用  $\Delta\omega$  表示  $q$  改变一个周期内的增量，考虑到式(10.159)可得

$$\Delta\omega = \oint \frac{\partial \omega}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq \quad (10.162)$$

再利用式(10.158)可得

$$\Delta\omega = \frac{\partial}{\partial J}(2\pi J) = 2\pi \quad (10.163)$$

在一个周期内，角变量  $\omega$  改变  $2\pi$ 。相应地，这个正则变换的母函数  $W = W(q, E(J)) = W(q, J)$  是坐标  $q$  的多值函数，每经过一个  $q$  的周期，这个函数不回到原来的值，而是有一个增量

$$\Delta W = \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \oint p dq = 2\pi J \quad (10.164)$$

**例 10.13** 求谐振子的频率，Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

**解** 在相空间中，相轨道

$$\frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E$$

为椭圆，因此可有

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dx = 2 \times \frac{\sqrt{mk}}{2\pi} \int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} dx = E \sqrt{\frac{m}{k}}$$

所以  $E = \sqrt{\frac{k}{m}} J$ ，即有

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} t + \omega_0$$

由此即可得到谐振子的角频率应为  $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 。

这个正则变换可根据式(10.156)和式(10.159)确定, 所以有

$$W = \int p dx = \sqrt{km} \int \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} dx = \sqrt{km} \int \sqrt{\frac{2J}{\sqrt{km}} - x^2} dx$$

由此可得

$$\omega = \frac{\partial W}{\partial J} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2J}{\sqrt{km}} - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{2J}{\sqrt{km}}}}$$

即

$$x = \sqrt{\frac{2J}{\sqrt{km}}} \sin \omega = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \omega$$

由此可知, 此时角变量  $\omega$  的物理意义即为谐振子的角度。

### 10.3.2 单摆运动问题的作用-角变量

摆的运动问题在第8.1.6节中进行过详细讨论, 如果用  $q$  表示摆角, 作为其广义坐标, 则摆的运动微分方程为

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0 \quad (10.165)$$

其 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \omega_0^2 \cos q \quad (10.166)$$

为了引入作用-角变量, 需要分别考虑振动和转动两种情况。

在振动情况下, 系统的相轨道如图8.3中的封闭线所示。将能量积分常数记作  $E_0$ , 即

$$\frac{1}{2} p^2 - \omega_0^2 \cos q = E_0 \quad (10.167)$$

做变量代换  $E_0 = -\omega_0^2 \cos \beta$ , 则作用量变量为

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{4}{2\pi} \int_0^\beta \sqrt{\omega_0^2 (\cos q - \cos \beta)} dq = \frac{8\omega_0}{\pi} \int_0^\beta \sqrt{k_1^2 - \sin^2 \frac{q}{2}} dq$$

记  $k_1 = \sin \frac{\beta}{2}$  并做变量代换

$$\sin \frac{q}{2} = k_1 \sin u \quad (10.168)$$

可得

$$\begin{aligned} J &= \frac{8\omega_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k_1^2 \cos^2 u}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 u}} du \\ &= \frac{8\omega_0}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 u} du - (1 - k_1^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 u}} \right] \\ &= \frac{8\omega_0}{\pi} [E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)] \end{aligned} \quad (10.169)$$

其中  $K$  和  $E$  分别是第一类和第二类完全椭圆积分。式(10.169)确定了作为  $k_1$  函数的  $J$ , 将其两边对  $k_1$  求导, 并利用附录中的恒等式(B.11)和(B.12)可得

$$\frac{\partial J}{\partial k_1} = \frac{8\omega_0}{\pi} k_1 K(k_1) \neq 0 \quad (10.170)$$

所以  $k_1$  可以表示为  $J$  的函数, 而且有

$$\frac{\partial k_1}{\partial J} = \frac{\pi}{8\omega_0 k_1 K(k_1)} \quad (10.171)$$

新的 Hamilton 函数  $\mathcal{H}$  只依赖于  $J$ , 可以表示为

$$\mathcal{H} = -\omega_0^2 \cos \beta = 2\omega_0^2 k_1^2 - \omega_0^2 \quad (10.172)$$

其中  $k_1 = k_1(J)$  是式(10.169)定义的  $J = J(k_1)$  的反函数。据此可得角变量  $\omega$  满足的方程为

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial J} = \frac{\pi \omega_0}{2K(k_1)} \quad (10.173)$$

由此可得此运动的振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\omega}} = \frac{4K(k_1)}{\omega_0} \quad (10.174)$$

这与第8.1.6.2节中所得的结果相同。

为了得到角变量的具体形式, 首先求得 Hamilton 特征函数

$$W = \int p dq = 2\omega_0 \int \sqrt{k_1^2 - \sin^2 \frac{q}{2}} dq \quad (10.175)$$

利用变量代换(10.168), 可得

$$W = 4\omega_0 [E(k_1, \sin u) - (1 - k_1^2)F(k_1, \sin u)] \quad (10.176)$$

其中  $F$  和  $E$  分别为第一类和第二类不完全椭圆积分,  $u$  是由式(10.168)确定的函数  $u = u(k_1, q)$ ,  $k_1 = k_1(J)$  是由式(10.169)确定的函数  $J = J(k_1)$  的反函数。根据角变量的定义式(10.159)可得

$$\omega = \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\partial W}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial J} \quad (10.177)$$

对函数  $W = W(k_1, u)$  求  $k_1$  的偏导数, 可得

$$\frac{\partial W}{\partial k_1} = 4\omega_0 \left[ \frac{\partial E}{\partial k_1} + \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial k_1} + 2k_1 F - (1 - k_1^2) \left( \frac{\partial F}{\partial k_1} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial k_1} \right) \right] \quad (10.178)$$

根据式(10.168)可得

$$\frac{\partial u}{\partial k_1} = -\frac{\sin u}{k_1 \cos u} \quad (10.179)$$

再根据第一类和第二类不完全椭圆积分的定义式(B.1)和(B.5)可得

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 u}}, \quad \frac{\partial E}{\partial u} = \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 u} \quad (10.180)$$

最后利用附录中的恒等式(B.9)和(B.10)可得

$$\frac{\partial W}{\partial k_1} = 4\omega_0 k_1 F(k_1, \sin u) \quad (10.181)$$

所以角变量为

$$\omega = \frac{\pi}{2K(k_1)} F(k_1, \sin u) = \frac{\pi}{2K(k_1)} F\left(k_1, \frac{1}{k_1} \sin \frac{q}{2}\right) \quad (10.182)$$

最后, 根据式(10.182)和式(10.167)可得

$$\begin{cases} q = 2 \arcsin \left[ k_1 \operatorname{sn} \left( \frac{2K(k_1)\omega}{\pi} \right) \right] \\ p = 2\omega_0 k_1 \operatorname{cn} \left( \frac{2K(k_1)\omega}{\pi} \right) \end{cases} \quad (10.183)$$

其中  $k_1 = k_1(J)$  是由式(10.169)确定的函数  $J = J(k_1)$  的反函数。

在转动情况下, 系统的相轨道如图8.3中最上面一条线或最下面一条线。此时能量积分常数满足  $E_0 > \omega_0^2$ , 而且将 Hamilton 函数中的  $p$  换成  $-p$ , Hamilton 函数的形式不变, 因此此处只考虑  $p > 0$  的转动情况。设  $t = 0$  时有  $q = 0, p = p_0 > 0$ , 即有

$$\frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2 \cos q = E_0 = \frac{1}{2}p_0^2 - \omega_0^2 = \frac{2\omega_0^2}{k_2^2} - \omega_0^2 \quad (10.184)$$

其中

$$k_2^2 = \frac{4\omega_0^2}{p_0^2} = \frac{2\omega_0^2}{\omega_0^2 + E_0} \quad (10.185)$$

此时作用量变量为

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2(E_0 + \omega_0^2 \cos q)} dq = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\omega_0}{k_2} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \frac{q}{2}} dq \quad (10.186)$$

做变量代换  $q = 2u$ , 并注意到被积函数的周期性可得

$$J = \frac{4\omega_0}{\pi k_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 u} du = \frac{4\omega_0}{\pi k_2} E(k_2) \quad (10.187)$$

式(10.187)确定了作为  $k_2$  函数的  $J$ , 将其两边对  $k_2$  求导, 并利用附录中的恒等式(B.12)可得

$$\frac{\partial J}{\partial k_2} = -\frac{4\omega_0}{\pi k_2^2} K(k_2) \neq 0 \quad (10.188)$$

所以  $k_2$  可以表示为  $J$  的函数, 而且有

$$\frac{\partial k_2}{\partial J} = -\frac{\pi k_2^2}{4\omega_0 K(k_2)} \quad (10.189)$$

新的 Hamilton 函数  $\mathcal{H}$  只依赖于  $J$ , 可以表示为

$$\mathcal{H} = E_0 = \frac{2\omega_0^2}{k_2^2} - \omega_0^2 \quad (10.190)$$

其中  $k_2 = k_2(J)$  是式(10.187)定义的  $J = J(k_2)$  的反函数。据此可得角变量  $\omega$  满足的方程为

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_2} \frac{\partial k_2}{\partial J} = \frac{\pi \omega_0^2}{k_2 K(k_2)} \quad (10.191)$$

由于这个运动并不是周期运动, 这说明在时间  $T = \frac{2\pi}{\dot{\omega}} = \frac{2k_2 K(k_2)}{\omega_0^2}$  内,  $q$  的增量为  $2\pi$ 。

为了得到角变量的具体形式, 首先求得 Hamilton 特征函数

$$W = \int p dq = \frac{2\omega_0}{k_2} \int \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \frac{q}{2}} dq = \frac{4\omega_0}{k_2} E\left(k_2, \sin \frac{q}{2}\right) \quad (10.192)$$

其中  $k_2 = k_2(J)$  是由式(10.187)定义的  $J = J(k_2)$  的反函数。根据角变量的定义式(10.159)可得

$$\omega = \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\partial W}{\partial k_2} \frac{\partial k_2}{\partial J} \quad (10.193)$$

对函数  $W = W(k_2, q)$  求  $k_2$  的偏导数, 可得

$$\frac{\partial W}{\partial k_2} = -\frac{4\omega_0}{k_2^2} E\left(k_2, \sin \frac{q}{2}\right) + \frac{4\omega_0}{k_2} \frac{\partial E}{\partial k_2}\left(k_2, \sin \frac{q}{2}\right) \quad (10.194)$$

利用附录中的恒等式(B.10)可得

$$\frac{\partial W}{\partial k_2} = -\frac{4\omega_0}{k_2^2} F\left(k_2, \sin \frac{q}{2}\right) \quad (10.195)$$

所以角变量为

$$\omega = \frac{\pi}{K(k_2)} F\left(k_2, \sin \frac{q}{2}\right) \quad (10.196)$$

最后, 根据式(10.196)和式(10.184)可得

$$\begin{cases} q = 2\text{am}\left(\frac{K(k_2)\omega}{\pi}\right) \\ p = \frac{2\omega_0}{k_2} \text{dn}\left(\frac{K(k_2)\omega}{\pi}\right) \end{cases} \quad (10.197)$$

其中  $k_2 = k_2(J)$  是由式(10.187)定义的  $J = J(k_2)$  的反函数。

### 10.3.3 多自由度系统的作用-角变量

如果一个系统的 Hamilton-Jacobi 方程可以完全分离变量, 则其 Hamilton 特征函数具有下面的形式:

$$W = \sum_{i=1}^s W_i(q_i, E, D_2, \dots, D_s) \quad (10.198)$$

与单自由度系统的情形类似, 此时有

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i(q_i, E, D_2, \dots, D_s) \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (10.199)$$

这些方程给出了  $2n$  维相空间中的相轨迹在平面  $q_i, p_i$  上的投影。类似于单自由度系统的情形, 如果每个平面内的运动都是周期的, 即在平面  $q_i, p_i$  内的相轨迹投影(10.199)是闭合曲线, 或者变量  $q_i$  是以  $q_{i0}$  为周期的, 那么可以对此系统引入作用-角变量来考察其运动。

由于系统是完全分离变量的, 所以对于固定的  $E, D_2, \dots, D_s$ , 在平面  $q_i, p_i$  内的运动都是独立的, 按照单自由度系统的做法, 考虑

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_i}{\partial q_i} dq_i \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (10.200)$$

其中积分沿着运动的一个整周期。式(10.200)确定了  $s$  个函数  $J_i = J_i(E, D_2, \dots, D_s)$ , 由于  $q_i, p_i$  的独立性, 这些函数  $J_i$  之间是相互独立的。用  $J_1, J_2, \dots, J_s$  代替原来的  $E, D_2, \dots, D_s$  作为新的广义动量, 那么有

$$E = f_1(J_1, J_2, \dots, J_s), \quad D_2 = f_2(J_1, J_2, \dots, J_s), \quad \dots, \quad D_s = f_s(J_1, J_2, \dots, J_s)$$

将其代入式(10.198)中可得

$$W = W(q_1, q_2, \dots, q_s, J_1, J_2, \dots, J_s) \quad (10.201)$$

由关系式

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \omega_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (10.202)$$

给出的正则变换将原变量  $q_i, p_i$  变为作用-角变量  $J_i, \omega_i$ , 新的 Hamilton 函数为

$$\mathcal{H} = f_1(J_1, J_2, \dots, J_s) \quad (10.203)$$

角坐标  $\omega_i$  是循环坐标。在新坐标下的正则方程为

$$\begin{cases} \frac{dJ_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_i} = 0 \\ \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i}(J_1, J_2, \dots, J_s) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (10.204)$$

其中  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i}$  即为在相平面  $q_i, p_i$  中周期运动的角频率, 这也说明利用这种方法可以通过研究函数  $H$  和  $W$  的性质直接得到所有周期运动的频率, 完全不需要研究系统的运动。记第  $i$  个角变量  $\omega_i$  在第  $j$  个广义坐标  $q_j$  变化一个完整周期后得到的改变量为  $\Delta\omega_{ij}$ , 则有

$$\Delta\omega_{ij} = \oint \frac{\partial \omega_i}{\partial q_j} dq_j = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} (2\pi J_j) = 2\pi \delta_{ij}$$

特别地, 如果  $q_i$  是循环坐标, 则相应的  $p_i$  是常数, 在  $q_i, p_i$  内的相轨道是直线, 那么在  $q_i, p_i$  平面内的运动可以认为是任意  $q_{i0}$  为周期的, 不妨取  $q_{i0} = 2\pi$ , 那么

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_i dq_i = p_i$$

### 10.3.4 Kepler 问题中的作用-角变量

Kepler 问题中, 轨道可以是椭圆、双曲线或抛物线。当轨道是双曲线或抛物线时, 运动没有任何形式的周期性, 故此处只考虑轨道是椭圆的情形。在椭圆轨道的情形下, 运动范围为  $r_1 \leq r \leq r_2$ , 其中  $r_1 = \frac{p}{1+e}$ ,  $r_2 = \frac{p}{1-e}$ , 此处  $p$  为轨道的半通径<sup>①</sup>,  $e$  为轨道离心率。由此可得

$$r_1 + r_2 = \frac{2p}{1-e^2}, \quad r_1 r_2 = \frac{p^2}{1-e^2} \quad (10.205)$$

这个系统的 Hamilton 函数如式(10.100)所示, 即

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + \frac{p_\phi^2}{2\mu r^2 \sin^2 \theta} - \frac{\alpha}{r} \quad (10.206)$$

其不含时 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 \right] - \frac{\alpha}{r} = E \quad (10.207)$$

这个方程的全积分已经在第10.2.4节求出, 根据式(10.104)可得其 Hamilton 特征函数为<sup>②</sup>

$$W = p_\phi \phi + \int \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}} dr + \int \sqrt{\beta^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \quad (10.208)$$

其中的常数  $\alpha, \beta$  与轨道参数的关系由式(10.141)给出, 即

$$p = \frac{\beta^2}{\mu\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\beta^2 E}{\mu\alpha^2}} \quad (10.209)$$

下面引入作用量变量  $J_r, J_\theta, J_\phi$ 。因为  $\phi$  是循环坐标, 所以根据上一节末尾的叙述, 可以将作用量变量  $J_\phi$  取为

$$J_\phi = p_\phi \quad (10.210)$$

而  $J_r$  和  $J_\theta$  则由

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}} dr \quad (10.211)$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\beta^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \quad (10.212)$$

<sup>①</sup> 半通径是指, 圆锥曲线过某一焦点作其长轴(或实轴、对称轴)的垂线, 该垂线与圆锥曲线交点到该焦点的距离。在椭圆的情形下, 它与半长轴的关系为  $p = a(1 - e^2)$ 。

<sup>②</sup> 此处为简明起见, 省去了积分号前的负号。

来确定。

为了计算作用量变量  $J_\theta$ ，在球坐标系下，动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) = \frac{1}{2} \left( p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} \right) \quad (10.213)$$

如果在轨道平面内引入极坐标  $r, \Theta$  ( $\Theta$  的具体数值由式(10.136)确定)，则有

$$T = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\Theta}^2 \right) = \frac{1}{2} \left( p_r \dot{r} + \mu r^2 \dot{\Theta}^2 \right) \quad (10.214)$$

对比式(10.213)和式(10.214)可得

$$p_\theta d\theta = \mu r^2 \dot{\Theta} d\Theta - p_\phi d\phi \quad (10.215)$$

将式(10.138)代入，可得

$$p_\theta d\theta = \beta d\Theta - p_\phi d\phi \quad (10.216)$$

质点运动一个周期的过程，角  $\theta$  完成一次振动，而角  $\Theta$  和  $\phi$  将改变  $2\pi$ ，所以根据式(10.212)可得

$$J_\theta = \beta - J_\phi \quad (10.217)$$

下面计算作用量变量  $J_r$ ，在运动的一个周期内， $r$  将从  $r_1$  增加至  $r_2$ ，随后减小至  $r_1$ ，所以可将式(10.211)化为

$$J_r = 2 \times \frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}} dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}} dr \quad (10.218)$$

考虑到椭圆轨道的情形下， $E < 0$ ，以及式(10.205)，可以将式(10.218)改写为

$$J_r = \frac{\sqrt{-2\mu E}}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}}{r} dr \quad (10.219)$$

做变量代换  $r = \frac{r_1 + r_2 x^2}{1 + x^2}$ ，则有

$$J_r = \frac{2\sqrt{-2\mu E}(r_2 - r_1)^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(r_1 + r_2 x^2)(1 + x^2)^2} dx \quad (10.220)$$

将式(10.220)中的被积函数表示为

$$\frac{x^2}{(r_1 + r_2 x^2)(1 + x^2)^2} = \frac{1}{r_2 - r_1} \left[ -\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \frac{1}{r_1 + r_2 x^2} + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{(1 + x^2)^2} \right]$$

由于

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{r_1 + r_2 x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{r_1 r_2}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$

将这些关系式代入式(10.220)中可得

$$J_r = \frac{\sqrt{-2\mu E}}{2} (r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}) \quad (10.221)$$

将式(10.205)和式(10.209)代入，并注意到式(10.217)，可以将式(10.221)写成

$$J_r = \alpha \sqrt{-\frac{\mu}{2E}} - (J_\theta + J_\phi) \quad (10.222)$$

从式(10.222)中可得

$$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2(J_r + J_\theta + J_\phi)^2} \quad (10.223)$$



进而可得变换后的 Hamilton 函数为

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu\alpha^2}{2(J_r + J_\theta + J_\phi)^2} \quad (10.224)$$

与作用量变量  $J_r, J_\theta, J_\phi$  的共轭的角变量记为  $\omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi$ , 因为有

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\phi}$$

所以三个角变量的频率相等, 这也与椭圆轨道的周期性和封闭性相对应。

### 10.3.5 Delaunay 元素

下面引入比上节给出的作用-角变量  $J_r, J_\theta, J_\phi, \omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi$  具有更明确几何意义和物理意义的新变量  $J_i, \omega_i (i = 1, 2, 3)$ 。为此, 先做变换

$$\omega_1 = \omega_\phi - \omega_\theta, \quad \omega_2 = \omega_\theta - \omega_r, \quad \omega_3 = \omega_r \quad (10.225)$$

$$J_1 = J_\phi, \quad J_2 = J_\theta + J_\phi, \quad J_3 = J_r + J_\theta + J_\phi \quad (10.226)$$

容易验证式(10.225)和式(10.226)表示的变换是正则变换。

利用这组新变量, 新的 Hamilton 函数可以表示为

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu\alpha^2}{2J_3^2} \quad (10.227)$$

下面解释新变量  $J_i, \omega_i$  的物理意义。由式(10.222)可得

$$J_3 = \alpha \sqrt{-\frac{\mu}{2E}} \quad (10.228)$$

由于半长轴满足

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{\alpha}{2E} \quad (10.229)$$

所以

$$J_3 = \sqrt{\mu\alpha a} \quad (10.230)$$

进而有

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_3} = \frac{\mu\alpha^2}{J_3^3} = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}} \quad (10.231)$$

根据角变量的物理意义可知, 式(10.231)中的  $\frac{d\omega_3}{dt}$  实际上应该等于  $\frac{2\pi}{T}$ , 其中  $T$  为椭圆轨道的周期, 这个结果与第3.3.3节的 Kepler 第三定律式(3.45)的结果是相同的。矢径转动的平均角速度  $n = \frac{2\pi}{T}$  在天体力学中称为**平运动**, 由此可知

$$\frac{d\omega_3}{dt} = n$$

于是可令

$$\omega_3 = n(t - t_0) \quad (10.232)$$

其中  $t_0$  为过近心点时刻, 这个角度在天体力学中称为**平近点角**。

下面来看共轭正则变量  $J_2, \omega_2$ 。根据式(10.217)可得  $J_2 = \beta$ 。而对比式(10.209)和第3.3.1节的式(3.28)可知, 作用量变量  $J_2$  实际上是质点  $\mu$  对力心的角动量大小。利用式(10.229)和式(10.209)可得

$$J_2 = \sqrt{\mu\alpha a(1 - e^2)} \quad (10.233)$$

因为  $\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_2} = 0$ , 所以  $\omega_2$  是在轨道平面内的某个常值角度, 可令

$$\omega_2 = \tilde{\omega} \quad (10.234)$$

其中  $\tilde{\omega}$  是近心点幅角 (见第10.2.4节)。

最后来看变量  $J_1, \omega_1$ , 根据式(10.226)可知  $J_1 = J_\phi = p_\phi$ , 即  $J_1$  是质点  $\mu$  对力心角动量在  $z$  轴上的投影, 所以

$$J_1 = \beta \cos i = J_2 \cos i = \sqrt{\mu\alpha a(1-e^2)} \cos i \quad (10.235)$$

其中  $i$  是轨道倾角。再考虑到  $\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_1} = 0$  可得,  $\omega_1$  是平面  $Oxy$  内的某个常值角度, 可令

$$\omega_1 = \Omega \quad (10.236)$$

其中  $\Omega$  为升交点赤经。

这样引入的共轭正则变量  $J_1, J_2, J_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  称为 Delaunay 正则变量或简称 Delaunay 元素<sup>①</sup>, 常用记号  $H, G, L, h, g, l$  来表示 (不要将这些符号与其它符号相同的物理量混淆!), 现列举如下:

$$\begin{cases} H = \sqrt{\mu\alpha a(1-e^2)} \cos i, & h = \Omega \\ G = \sqrt{\mu\alpha a(1-e^2)}, & g = \tilde{\omega} \\ L = \sqrt{\mu\alpha a}, & l = n(t-t_0) \end{cases} \quad (10.237)$$

## 10.4 从“几何力学”到“波动力学”

### 10.4.1 作用波与作用波面

简明起见, 首先考虑一个质点的 Hamilton 函数

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

此时, 质点的 Hamilton 主函数为

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{D}, t) = W(\mathbf{r}, \mathbf{D}) - Et$$

其中  $W$  为该质点的 Hamilton 特征函数。

在这里, 方程“ $W = \text{常数}$ ”给出了空间中一族静止曲面, 而方程“ $S = \text{常数}$ ”给出的则是在空间中一族随时间变化的曲面。在某一时刻  $t$ , 曲面族“ $S = \text{常数}$ ”的某一成员“ $S = S_0$ ”将与曲面族“ $W = \text{常数}$ ”中的某一成员“ $W = S_0 + Et$ ”重合, 而在下一时刻, “ $S = S_0$ ”将重合于“ $W = \text{常数}$ ”中的另一成员。这样, 曲面“ $S = S_0$ ”可以看作是在空间中传播的某种“波面”。

根据变换公式(10.57)可知

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} = \nabla S \quad (10.238)$$

即该质点的动量总是沿着波面的法线方向, 与波面相正交的曲线族就是波线族。既然波线的方向与质点的动量方向相同, 由此可知, 每一根波线实际上都是质点在不同初始条件下的可能轨道。据此, 可以将等  $S$  面形成的这种波称为作用波, 其波面即称为作用波面。

<sup>①</sup> Charles-Eugène Delaunay, 德洛内, 法国天文学家、数学家。

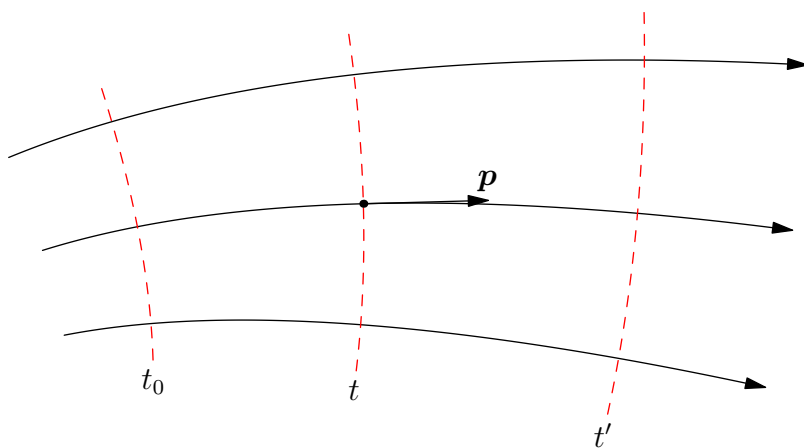


图 10.4: 作用波面示意图

### 10.4.2 波动光学与几何光学的关系

光是一种电磁波，介质中电磁波满足的波动方程为

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (10.239)$$

式中  $\Phi$  为电磁场的任一分量， $u(\mathbf{r}) = \frac{c}{n(\mathbf{r})}$  为非均匀介质中的波速。

对单色波，其波函数可表示为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

将其代入式(10.239)中可得振幅  $\phi(\mathbf{r})$  应满足的方程为

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (10.240)$$

式中  $k = \frac{\omega}{u} = n \frac{\omega}{c} = nk_0$ ，其中  $k_0$  为此电磁波在真空中的波数。

在均匀介质中，单色波的振幅为

$$\phi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = Ae^{ik_0 L(\mathbf{r})}$$

式中，函数  $L(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot n\mathbf{r}$  称为**光程函数**，简称**程函**。即单色波在均匀介质中的波函数为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(k_0 L(\mathbf{r}) - \omega t)}$$

波函数的等相位面即为**波面**，单色波在均匀介质中的波面为平面族：

$$\theta = k_0 L(\mathbf{r}) - \omega t = \theta_0$$

波面的正交曲线族即为**光线**，单色波在均匀介质中的光线为直线。

在非均匀介质中，单色波的振幅可以表示为

$$\phi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{ik_0 L(\mathbf{r})}$$

将其代入式(10.240)中，可得

$$\nabla^2 \phi = e^{ik_0 L} [\nabla^2 A + ik_0 (A \nabla^2 L + 2 \nabla A \cdot \nabla L) - k_0^2 A (\nabla L)^2] = -k^2 A e^{ik_0 L}$$

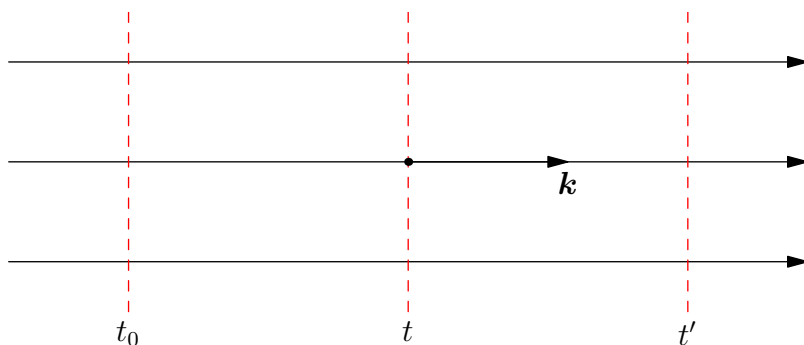


图 10.5: 均匀介质中单色波的波面和光线

即有

$$\frac{1}{k_0^2} \nabla^2 A + \frac{i}{k_0} (A \nabla^2 L + 2 \nabla A \cdot \nabla L) - [(\nabla L)^2 - n^2] A = 0 \quad (10.241)$$

在短波长极限（几何光学极限）下，即  $\lambda_0 \rightarrow 0$  时，此时  $k_0 \rightarrow +\infty$ ，在此近似下式(10.241)的前两项均为小量，忽略之可得

$$(\nabla L)^2 = n^2 \quad (10.242)$$

方程(10.242)是几何光学的基本方程，称为程函方程。在此情形下，单色波的相位为

$$\psi(\mathbf{r}, t) = k_0 L(\mathbf{r}) - \omega t$$

波面（即波函数的等相位面）的方程为

$$\psi(\mathbf{r}, t) = k_0 L(\mathbf{r}) - \omega t = \psi_0$$

或者

$$k_0 L(\mathbf{r}) = \psi_0 + \omega t$$

根据程函方程(10.242)可得相位  $\psi(\mathbf{r}, t)$  满足

$$|\nabla \psi| = k_0 n = k$$

由此可有

$$\nabla \psi = \mathbf{k}$$

即，光线（波面的正交曲线族）可视为“光微粒”的轨道。光的“微粒说”与“波动说”在短波长极限下统一。

### 10.4.3 物质波假说与 Schrödinger 方程

在  $\lambda \rightarrow 0$  时，波动光学的极限即为几何光学。是否在某种极限下，能够有某种波动力学，其极限为经典力学？

de Broglie 提出物质波假说，即质点所对应的“物质波”角频率和波数满足

$$\begin{cases} E = \hbar \omega \\ \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \end{cases} \quad (10.243)$$

假设“单色”物质波振幅同样满足方程(10.240)，即

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0$$

再考虑到

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))}}{\hbar}$$

可得物质波振幅应满足的方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + V(\mathbf{r})\phi = E\phi \quad (10.244)$$

方程(10.244)即为定态 Schrödinger 方程。

对于含时的情况下，类比于光学的情况，可设波函数的形式为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \phi(\mathbf{r})e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

其满足方程

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = E\Phi \quad (10.245)$$

将定态 Schrödinger 方程代入上式，即有含时 Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Phi + V(\mathbf{r})\Phi \quad (10.246)$$

类比  $\nabla \frac{S}{\hbar} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar} = \mathbf{k}$  与波动光学的  $\nabla \psi = \mathbf{k}$ ，可知波函数的相位即为  $\frac{S}{\hbar}$ ，因此波函数又可表示为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = |\Phi(\mathbf{r}, t)|e^{i\frac{S(\mathbf{r}, t)}{\hbar}}$$

据此考虑含时 Schrödinger 方程(10.246)的实部，即

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \left[ \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 |\Phi|}{|\Phi|} \right]$$

取上式在  $\hbar \rightarrow 0$  的极限，可有

$$\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

此即为单粒子的 Hamilton-Jacobi 方程。因此，量子力学在  $\hbar \rightarrow 0$  下的极限即为经典力学。

## 10.5 Hamilton 理论在物理学中的应用

### 10.5.1 连续系统的 Lagrange 方程

首先，以一维轻质长弦的横振动为例导出一维弦的 Lagrange 函数。记弦的质量线密度为  $\rho$ ，各点相对其平衡位置的位移可以表示为  $\eta(x)$ 。首先将弦分为  $n$  等份，记每段弦的长度为  $\Delta x$ ，作为  $n$  个质量为  $\rho\Delta x$  的质点处理。将这些质点的位移分别记作  $\eta_i$ ，则它们的动能可以表示为

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho \Delta x \dot{\eta}_i^2 \quad (10.247)$$

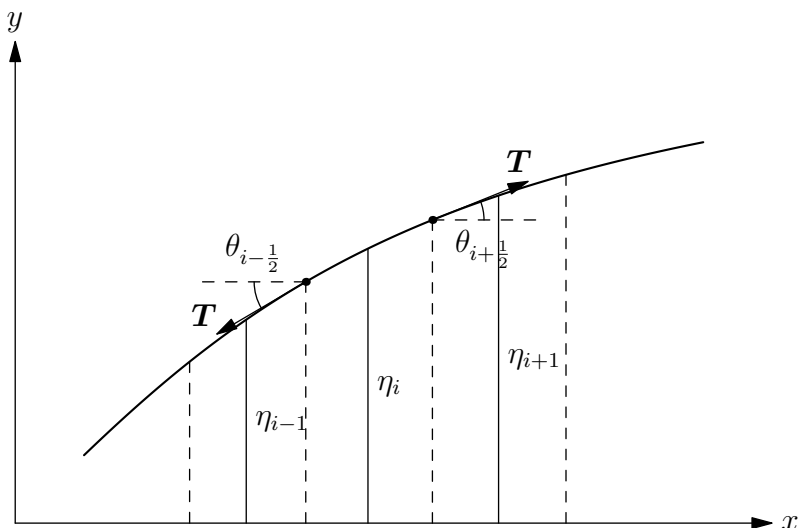


图 10.6: 一维弦的横振动

如图10.6所示, 在微振动假设下, 角  $\theta_{i-\frac{1}{2}}$  和  $\theta_{i+\frac{1}{2}}$  都很小, 故有第  $i$  个质点所受的横向力为

$$\begin{aligned} F_i &= T \sin \theta_{i+\frac{1}{2}} - T \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} \approx T \tan \theta_{i+\frac{1}{2}} - T \tan \theta_{i-\frac{1}{2}} \approx T \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta x} - T \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\Delta x} \\ &= T \frac{\eta_{i+1} - \eta_{i-1}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (10.248)$$

由此可推知此系统的势能为

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} T \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \quad (10.249)$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 同时  $\Delta x \rightarrow 0$ , 则有

$$T \rightarrow \int \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx \quad (10.250)$$

$$V \rightarrow \int \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx \quad (10.251)$$

由此得到一维弦的 Lagrange 函数为

$$L = T - V = \int \left[ \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \int \mathcal{L} dx \quad (10.252)$$

其中

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \quad (10.253)$$

称为该连续系统的 Lagrange 密度, 而  $\mathcal{T}$  和  $\mathcal{V}$  则分别称为该连续系统的动能密度和势能密度。

由上面的讨论可以看出, 连续系统的位置坐标  $x$  在 Lagrange 函数中并不是广义坐标<sup>①</sup>, 而仅仅是取代了分离系统中的求和指标  $i$ 。对于每一个  $x$  和  $t$ ,  $\eta(x, t)$  是广义坐标, 而  $x$  和  $t$  同为 Lagrange 函数的参数。

<sup>①</sup> 实际上, 此连续系统的 Lagrange 函数与位置坐标  $x$  无关。

对于一般的三维连续系统，其广义坐标可以取为  $\eta_1(\mathbf{x}, t), \eta_2(\mathbf{x}, t), \dots, \eta_s(\mathbf{x}, t)$ ，而系统的 Lagrange 函数则表示为

$$L = \int_V \mathcal{L} dV \quad (10.254)$$

而三维空间中的 Lagrange 密度的一般形式为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial t}, \frac{\partial \eta_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \eta_s}{\partial t}, \nabla \eta_1, \nabla \eta_2, \dots, \nabla \eta_s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s, \mathbf{x}, t \right)$$

或者简单地记作

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}, \nabla \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}, t \right) \quad (10.255)$$

由此，根据 Hamilton 原理，系统的 Lagrange 方程由式

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L} dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \delta \mathcal{L} dV dt = 0 \quad (10.256)$$

给出。由于此连续系统的广义坐标为  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ ，因此此处的变分运算不仅满足  $\delta t = 0$ ，而且满足  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。因此有

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{k=1}^s \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \frac{\partial \eta_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} \delta \eta_k \right] \quad (10.257)$$

由于此处变分是对  $\eta_k(\mathbf{x}, t)$  的，因此可有

$$\delta \frac{\partial \eta_k}{\partial t} = \frac{\partial(\delta \eta_k)}{\partial t}, \quad \delta \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} = \frac{\partial(\delta \eta_k)}{\partial x_j}$$

据此处理式(10.257)中的各项，可有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \frac{\partial \eta_k}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \frac{\partial(\delta \eta_k)}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \eta_k \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) \delta \eta_k \end{aligned} \quad (10.258)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \frac{\partial(\delta \eta_k)}{\partial x_j} \\ &= \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \eta_k \right) - \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) \delta \eta_k \end{aligned} \quad (10.259)$$

将式(10.258)和式(10.259)代入式(10.257)中，可得

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \eta_k \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \eta_k \right) \right] \\ &\quad - \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} \right] \delta \eta_k \end{aligned} \quad (10.260)$$

此处, 对函数  $f\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}, \nabla\eta, \eta, \mathbf{x}, t\right)$  的求导操作  $\frac{df}{dt}$  和  $\frac{df}{dx_j}$  分别表示对函数

$$g(\mathbf{x}, t) = f\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \nabla\eta(\mathbf{x}, t), \eta(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t\right)$$

求  $x_j$  和  $t$  的偏导数。将式(10.260)代入式(10.256)可得

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \eta_k \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \eta_k \right) \right] dV dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} \right] \delta \eta_k dV dt \\ &= \int_V \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \delta \eta_k dV \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial V} \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \delta \eta_k n_j dS dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} \right] \delta \eta_k dV dt \quad (10.261)\end{aligned}$$

由于在边界上有  $\delta \eta_k = 0$ , 即  $\delta \eta_k(\mathbf{x}, t_1) = \delta \eta_k(\mathbf{x}, t_2) = 0$  以及在  $\partial V$  上,  $\delta \eta_k(\mathbf{x}, t) = 0$ , 因此式(10.261)可化为

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} \right] \delta \eta_k dV dt \quad (10.262)$$

由于  $\delta \eta_k$  之间是相互独立的, 故可得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (10.263)$$

式(10.263)就是连续系统的 Lagrange 方程。

**例 10.14** 获得一维轻质长弦在微振动近似下的横振动方程。

**解** 前文已得出一维轻质长弦在此情形下的 Lagrange 密度如式(10.253)所示, 即

$$\mathcal{L} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \eta, x, t \right) = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2$$

将式(10.253)代入(10.263)中, 即可得到

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (10.264)$$

这就是一维轻质长弦微振动的方程。这是一个波动方程, 波速为  $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 。

## 10.5.2 电磁场的 Lagrange 方程



真空中的电磁场的运动规律由 Maxwell 方程组给出:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (10.265a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (10.265b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{array} \right. \quad (10.265c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \end{array} \right. \quad (10.265d)$$

虽然  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  总共有 6 个分量, 但其中只有 4 个分量是相互独立的<sup>①</sup>, 因此它们并不适合取为电磁场的广义坐标。此处我们取电磁场的标量势  $\phi$  和矢量势  $\mathbf{A}$  作为电磁场的广义坐标。此处标量势  $\phi$  和矢量势  $\mathbf{A}$  与电磁场场变量  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  之间的关系可以由式(10.265a)和式(10.265b)决定, 即

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (10.266)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (10.267)$$

因此, 当用  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  描述电磁场时, 式(10.265c)和式(10.265d)是场的运动方程, 而式(10.265a)和式(10.265b)则只是  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  的定义而已。

下面来根据场的运动方程式(10.265c)和式(10.265d)来构造电磁场的 Lagrange 密度。首先, 电磁场的 Lagrange 密度中需要包含场量  $\phi$ 、 $\mathbf{A}$  和他们的导数。根据电磁场的时间平移对称性和空间平移对称性, 电磁场的 Lagrange 密度中不能显含时间  $t$  和空间坐标  $\mathbf{x}$ 。记  $x_0 = t$ ,  $A_0 = \phi$ , 则可设电磁场的 Lagrange 密度为<sup>②</sup>

$$\mathcal{L} = B_i A_i + C_{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + D_{ijk} A_i \frac{\partial A_j}{\partial x_k} + E_{ijkl} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \quad (10.268)$$

将式(10.268)代入 Lagrange 方程(10.263)中, 并结合量纲分析可以确定电磁场的 Lagrange 密度可以取如下的形式<sup>③</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \rho\phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 \left( \nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] - \rho\phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (10.269)$$

### 10.5.3 Schrödinger 方程的建立

非相对论量子力学有三种不同的理论形式, 它们正好和经典力学 Hamilton 理论的三种不同形式的动力学方程相对应。1925 年 10 月 Heisenberg 建立的通常被称为矩阵力学的量子力学, 经 Dirac 研究可表示为量子 Poisson 括号表示的正则方程的形式; 独立于 Heisenberg, 1926 年 3 月 Schrödinger 所建立的量子力学的波动方程则是直接从 Hamilton-Jacobi 方程过渡而来的; 1948-1950 年, Dirac 和 Fermi 建立的路径积分形式的量子力学, 则与 Hamilton 原理的形式类似。

下面我们遵循 Schrödinger 的本意, 从氢原子核外电子的 Hamilton-Jacobi 方程出发, 导出定态 Schrödinger 方程。

① 这一点可以用 Maxwell 方程组只有 4 个方程来印证。

② 此处利用了 Einstein 求和约定, 用重复的指标表示求和, 求和范围为 0 到 3。

③ 与 Lagrange 函数类似, Lagrange 密度的形式也是不唯一的, 这里取了形式最简单的一种。

对于氢原子核外电子, 其 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{\alpha}{r} \quad (10.270)$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ 。因此其 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\alpha}{r} = E \quad (10.271)$$

其中  $W = W(x, y, z)$  是经典 Hamilton 特征函数。作变换

$$W = \hbar \ln \psi \quad (10.272)$$

式中  $\hbar$  是一个常数。由于  $\ln \psi$  不带量纲, 因此  $\hbar$  与 Hamilton 特征函数  $W(x, y, z)$  具有相同的量纲, 即作用量的量纲。由此, Hamilton-Jacobi 方程(10.271)可以变换为

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi^2 = 0 \quad (10.273)$$

式(10.273)是完全经典的, 没有附加任何量子假设。

现在假设电子不是一个经典粒子, 是具有波粒二象性的。把电子看作是像电磁波那样的“物质波”, 取一个适当的 Lagrange 密度, 用 Hamilton 原理得出电子的波动方程。根据 Hamilton 原理可得

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (10.274)$$

为了使式(10.274)成立, 可令  $\delta L = 0$ , 即

$$\delta L = \delta \int_V \mathcal{L} dV \quad (10.275)$$

对于波动, 有一个普遍适用的结论: 系统的平均动能恒等于平均势能, 又考虑到  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ , 因此我们可以得到电子波的 Lagrange 函数应该是一个恒等于零的函数。而上面将电子考虑为一个经典粒子, 它的 Hamilton-Jacobi 方程就是式(10.273), 这就是一个恒等于零的表达式。因此要将波粒二象性结合起来, 最自然的选择就是取式(10.273)作为电子波的 Lagrange 密度<sup>①</sup>。即有

$$\delta J = \delta \int_V \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi^2 \right] dV = 0 \quad (10.276)$$

具体计算

$$\begin{aligned} \delta J &= 2 \int_V \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi \delta \psi \right] dV \\ &= 2 \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \psi \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \delta \psi + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \psi \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \delta \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta \psi \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \delta \psi \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi \delta \psi \right] dV \\ &= 2 \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \psi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \psi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta \psi \right) \right] dV \\ &\quad - 2 \int_V \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi \right] \delta \psi dV \\ &= 2 \oint_{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta \psi dS - 2 \int_V \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \psi \right] \delta \psi dV = 0 \end{aligned}$$

<sup>①</sup> 准确的讲是令其与电子波的 Lagrange 密度成正比, 因为式(10.273)与 Lagrange 密度的量纲是不同的。

因此可得

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{\alpha}{r} \psi = E\psi \quad (10.277)$$

以及

$$\oint_{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta \psi dS = 0 \quad (10.278)$$

式(10.278)是一个面积分为零的表达式, 由于  $\delta \psi$  是任意的, 因此可以取

$$\psi|_{\partial V} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\partial V} = 0 \quad (10.279)$$

作为偏微分方程(10.277)的边界条件。而偏微分方程(10.277)即为氢原子中电子的定态 Schrödinger 方程。

## 附录 A 习题及解答

### A.1 课后习题解答

#### A.1.1 牛顿力学

题 A.1.1 (金尚年《理论力学》30 页 1.13) 质点  $A$  约束在光滑水平平台上运动, 在此质点上系着一根长为  $l$  的轻绳, 绳子穿过平台上的小孔, 另一端垂直地挂着另一个质点  $B$ , 如图 A.1 所示。

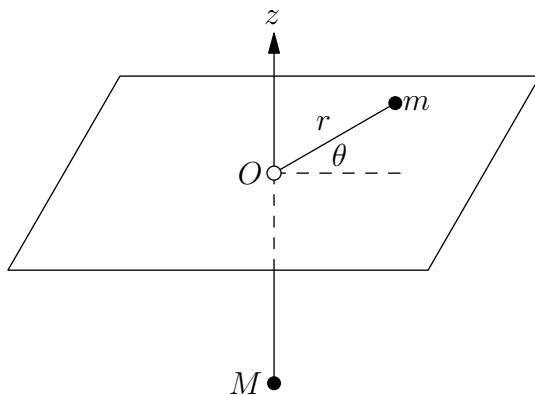


图 A.1: 题 A.1.1

1. 问此动力学系统的动量、角动量、能量是否守恒, 并解释之;
2. 用质点系动量定理写出系统的运动微分方程;
3. 若  $t = 0$  时, 质点  $A$  离  $O$  的距离为  $a$ , 速度为  $v_0 = \sqrt{\frac{9ag}{2}}$ , 其方向垂直于  $OA$ , 且  $m_A = m_B = m$ , 证明以后质点  $A$  离  $O$  点的距离始终在  $a$  和  $3a$  之间。

解 1. 系统合外力非零, 因此系统动量不守恒; 系统对  $O$  点力矩为零, 因此系统角动量守恒; 系统非保守外力 (绳子张力) 不做功, 其余外力 (重力) 为保守力, 因此系统能量守恒。

2. 首先求得系统的动量

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = m_A(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) + m_B\dot{z}\mathbf{e}_z$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= m_A(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + m_A(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + m_B\ddot{z}\mathbf{e}_z \\ &= m_A(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + m_A(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + m_B\ddot{r}\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

此处利用了

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r$$

以及约束  $r - z = \text{常数}$ 。系统受到的外力为

$$\mathbf{F} = -F_T \mathbf{e}_r + (F_T - m_B g) \mathbf{e}_z$$

因此根据质点系动量定理  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$  可得系统的运动微分方程为

$$\begin{cases} m_A(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F_T & (\text{A.1a}) \\ m_A(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 & (\text{A.1b}) \\ m_B\ddot{r} = F_T - m_B g & (\text{A.1c}) \end{cases}$$

3. 由式(A.1b)可得

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

即有

$$r^2\dot{\theta} = l = av_0 = a\sqrt{\frac{9ag}{2}} \quad (\text{A.2})$$

再由式(A.1a)和式(A.1c)消去  $F_T$  可得

$$2\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g = 0$$

再由式(A.2)以及

$$\ddot{r} = \frac{dr}{dt} \dot{r} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{r}^2)}{dr}$$

可得  $\dot{r}^2$  满足的微分方程为

$$\frac{d(\dot{r}^2)}{dr} - \frac{l^2}{r^3} + g = 0$$

分离变量可得

$$d(\dot{r}^2) = \left( \frac{l^2}{r^3} - g \right) dr$$

两端积分 (注意到初始时刻  $\dot{r} = 0$ ) 可得

$$\dot{r}^2 = \int_a^r \left( \frac{l^2}{r^3} - g \right) dr = \frac{l^2}{2a^2} + ga - \frac{l^2}{2r^2} - gr = g \frac{(r-a)(r-3a) \left( r + \frac{3}{4}a \right)}{r^2}$$

运动范围可由

$$\dot{r}^2 = g \frac{(r-a)(r-3a) \left( r + \frac{3}{4}a \right)}{r^2} \geq 0$$

确定, 由此可解得

$$a \leq r \leq 3a$$

即质点 A 离 O 点的距离始终在  $a$  和  $3a$  之间。

**题 A.1.2 (金尚年《理论力学》30 页 1.20)** 一质量为  $m$  的质点约束在对称轴为铅直线, 半顶角为  $\alpha$  的圆锥形漏斗的内表面运动。漏斗的上底半径为  $R_1$ , 下底半径为  $R_2$ 。开始时质点具有水平方向的初速度  $v_0$ , 离下底的高度为  $h$  (如图 A.2 所示), 在运动过程中摩擦力可忽略不计。试问质点能飞出漏斗之外, 落入漏斗下面和在漏斗内做圆周运动三种情况下  $v_0$  和  $h$  各满足什么关系?

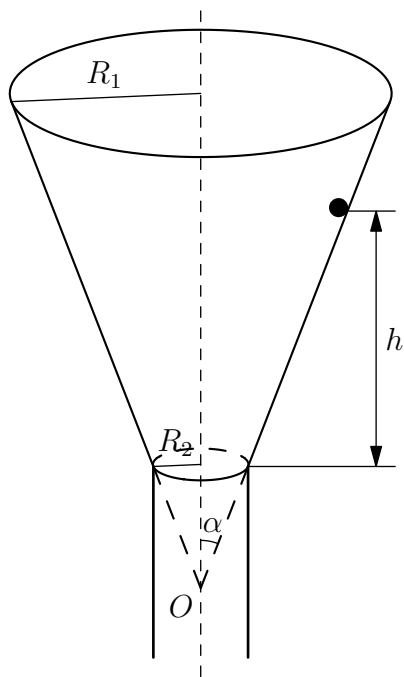


图 A.2: 题 A.1.2

**解** 考虑质点恰好不能飞出漏斗的情况, 在漏斗边缘质点的速度将在水平面内。根据能量守恒, 可有

$$mgH + \frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2$$

质点对  $O$  点的力矩方向恒在水平平面内, 因此质点竖直方向角动量守恒, 即有

$$R_1 v = (R_2 + h \tan \alpha) v_0$$

再考虑到

$$H = (R_1 - R_2) \cot \alpha$$

由此可解得

$$v_0^2 = \frac{2g[(R_1 - R_2) \cot \alpha - h] R_1^2}{R_1^2 - (R_2 + h \tan \alpha)^2}$$

故质点能飞出漏斗之外的条件为

$$v_0^2 \geq \frac{2g[(R_1 - R_2) \cot \alpha - h] R_1^2}{R_1^2 - (R_2 + h \tan \alpha)^2}$$

同理, 考虑质点恰好不能落入漏斗下面的情况, 在漏斗边缘质点的速度将在水平面内。同样根据能量守恒, 可有

$$\frac{1}{2}mv'^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2$$

根据角动量守恒, 可有

$$R_2 v' = (R_2 + h \tan \alpha) v_0$$

由此可解得

$$v_0^2 = \frac{2ghR_2^2}{(R_2 + h \tan \alpha)^2 - R_2^2}$$

故质点能落入漏斗下面的条件为

$$v_0^2 \leq \frac{2ghR_2^2}{(R_2 + h \tan \alpha)^2 - R_2^2}$$

在漏斗内做圆周运动时, 需满足

$$\begin{cases} N \cos \alpha = m \frac{v_0^2}{R_2 + h \tan \alpha} \\ N \sin \alpha - mg = 0 \end{cases}$$

由此可得质点在漏斗内做圆周运动的条件为

$$v_0^2 = g(h + R_2 \cot \alpha)$$

题 A.1.3 (金尚年《理论力学》31 页 1.23) 总长度为  $L$  的软链放在水平光滑的桌面上, 此时长为  $l$  的一部分链条从桌上下垂, 起始时链条是静止的, 求当链条末端滑到桌子边缘时, 链的速度  $v$  和所需的时间。

解 设软链的线密度为  $\rho$ , 根据能量守恒, 可有

$$\frac{1}{2} \rho L v^2 - \rho L g \frac{L}{2} = -\rho l g \frac{l}{2}$$

由此可有

$$v = \sqrt{\frac{g(L^2 - l^2)}{L}}$$

为求所需时间, 在下垂长度为  $x$  时, 有

$$\frac{1}{2} \rho L v^2 - \rho x g \frac{x}{2} = -\rho l g \frac{l}{2}$$

即有

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g(x^2 - l^2)}{L}}$$

所以有

$$\sqrt{\frac{L}{g}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - l^2}} = dt$$

两端积分可得

$$t = \int_l^L \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - l^2}} = \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l}$$

题 A.1.4 (金尚年《理论力学》32 页 1.37) 质量相同的两个物体  $A$  和  $B$  用弹簧链接 (如图 A.3 所示), 垂直至于地面上, 原来静止。现给物体  $A$  以瞬间冲量  $J$ , 问  $J$  要多大才可使物体  $B$  跳起来?

解 以弹簧的平衡位置为重力势能零点, 设初始弹簧形变量为  $x_0$ , 则有

$$2kx_0 = m_A g$$

设冲量  $J$  给物体  $A$  的初始速度为  $v$ , 物体  $B$  在物体  $A$  运动到最高点时地面的支持力最小, 因此考虑当物体  $A$  运动到最高点时, 根据能量守恒可有

$$2 \cdot \frac{1}{2} k x^2 + m_A g x = 2 \cdot \frac{1}{2} k x_0^2 - m_A g x_0 + \frac{1}{2} m_A v^2$$

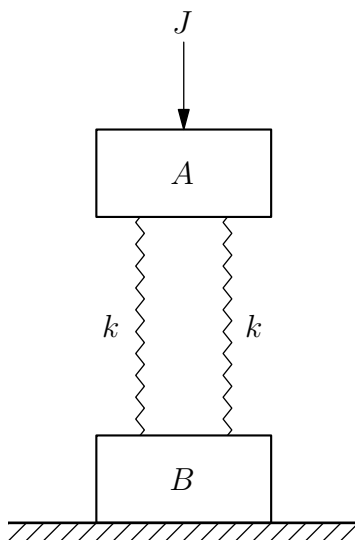


图 A.3: 题 A.1.4

可得

$$x = \sqrt{\frac{m_A}{2k}}v - x_0$$

此时如果物体  $B$  恰好跳起来, 则有

$$2kx = m_B g$$

由此可得

$$v = \frac{(m_A + m_B)g}{\sqrt{2km_A}}$$

根据动量定理

$$J = m_A v = (m_A + m_B)g \sqrt{\frac{m_A}{2k}}$$

## A.1.2 Lagrange 力学

题 A.1.5 (金尚年《理论力学》64 页 2.12) 质量为  $m$  的质点约束在光滑的旋转抛物面  $x^2 + y^2 = az$  的内壁运动,  $z$  轴为铅直轴。写出:

1. 质点的运动方程;
2. 质点作圆周运动所应满足的条件。

解 质点的自由度为 2, 取柱坐标  $r, \theta$  作为广义坐标, 则有  $z = \frac{r^2}{a}$ 。

1. 质点的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \frac{1}{2}m\left[\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - \frac{mg}{a}r^2$$

$\theta$  是循环坐标, 故有

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = L(\text{常数})$$

Lagrange 函数不显含时间, 故有广义能量守恒, 即

$$\frac{1}{2}m\left[\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{mg}{a}r^2 = E(\text{常数})$$



因此质点的运动方程为

$$\begin{cases} mr^2\dot{\theta} = L \\ \frac{1}{2}m \left[ \left( 1 + \frac{4r^2}{a^2} \right) \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right] + \frac{mg}{a}r^2 = E \end{cases}$$

2. 在运动方程中消去  $\dot{\theta}$  可得

$$\frac{1}{2}m \left( 1 + \frac{4r^2}{a^2} \right) \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{mg}{a}r^2 = E$$

即将此运动等效为一个一维运动，其等效势能为

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{mg}{a}r^2$$

质点做圆周运动时，要求初始时质点即处于平衡位置（势能最低的位置），即

$$\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r_0} = -\frac{L^2}{mr_0^3} + \frac{2mg}{a}r_0 = 0$$

考虑到  $L = mr_0v_0$  以及  $r_0^2 = ah$ ，可得质点做圆周运动需要满足的条件为

$$v_0^2 = 2gh$$

题 A.1.6 (金尚年《理论力学》65 页 2.19) 由两个相同的重物  $P$  和用铰链链接着的四根长度为  $l$  的轻棒及一个质量可忽略的弹簧  $k$  所组成的力学系统，其结构如图 A.4 所示。系统处于铅直平面内， $O$  点是固定的，当图中的  $\theta = 45^\circ$  时弹簧处于固有长度，求平衡时系统的位置。

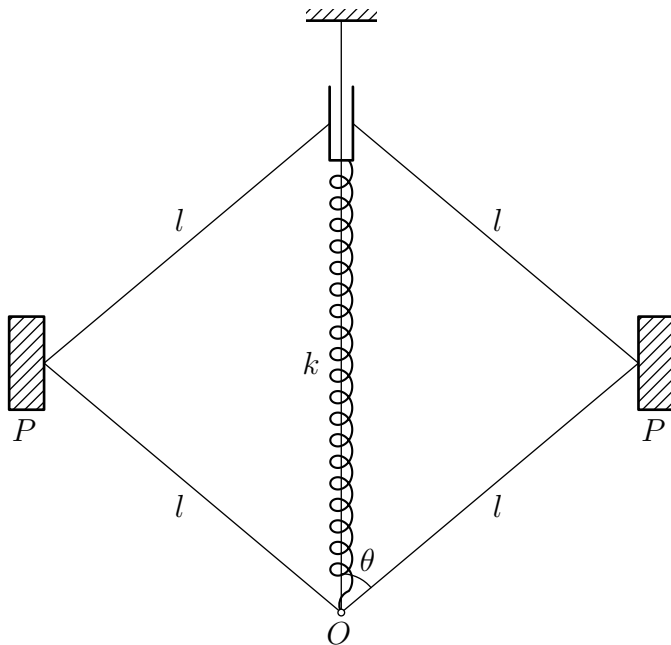


图 A.4: 题 A.1.6

解 以  $\theta$  为广义坐标，可以求得系统的势能为

$$V = 2Pl \cos \theta + \frac{1}{2}k \left( 2l \cos \theta - \sqrt{2}l \right)^2$$

平衡位置  $\theta_0$  需满足

$$\left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0$$

可解得

$$\theta_0 = \arccos \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P}{2kl} \right)$$

题 A.1.7 (金尚年《理论力学》66 页 2.24) 一质点在螺旋面上运动, 螺旋面的方程为

$$x = R \cos \phi, \quad y = R \sin \phi, \quad z = b\phi$$

此质点并受辐向斥力, 其大小与质点到轴的距离成正比。写出此质点的 Lagrange 函数和运动方程。

解 辐向斥力可以表示为

$$\mathbf{F} = 2kR\mathbf{e}_r$$

此力对应的势能可表示为

$$V = -kR^2$$

质点的速度为

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{R} \cos \phi - R\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{R} \sin \phi + R\dot{\phi} \cos \phi \\ b\dot{\phi} \end{pmatrix}$$

因此, 质点的 Lagrange 函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + b^2\dot{\phi}^2) + kR^2$$

Lagrange 函数中不含坐标  $\phi$ , 故  $\phi$  是循环坐标, 即有

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(R^2 + b^2)\dot{\phi} = l_\phi (\text{常数})$$

再由  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} = 0$  可得

$$m\ddot{R} - mR\dot{\phi}^2 - 2kR = 0$$

综上, 质点的运动方程为

$$\begin{cases} m(R^2 + b^2)\dot{\phi} = l_\phi (\text{常数}) \\ m\ddot{R} - mR\dot{\phi}^2 - 2kR = 0 \end{cases}$$

题 A.1.8 单摆必须振幅很小才是谐振动, 如果要求不论振幅大小总是作谐振动, 质点应该在什么样的曲线上运动?

解 记质点所在位置到平衡位置之间的弧长为  $s$ , 质点所在位置的坐标为  $(x, y)$ , 其中  $y = y(s)$ 。取弧长  $s$  为广义坐标, 则该质点的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mgy(s)$$

由 Lagrange 方程可得质点的运动方程为

$$m\ddot{s} + mg \frac{dy}{ds} = 0$$

质点作谐振动的条件应为

$$g \frac{dy}{ds} = k^2 s$$

记  $\frac{k^2}{g} = \frac{1}{16a}$ , 则有

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{16a} s$$

所以  $y = \frac{1}{8a} s^2 + y_0$ , 由  $y(0) = 0$  可得

$$y = \frac{1}{8a} s^2$$

由于  $s = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$ , 可得

$$\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{8a}} \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

将上式两端对  $y$  求导数可得

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{8a}} \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}$$

整理可得微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{2a - y}$$

令  $y = a(1 - \cos t)$ , 则方程可化简为

$$\dot{x} = a(1 + \cos t)$$

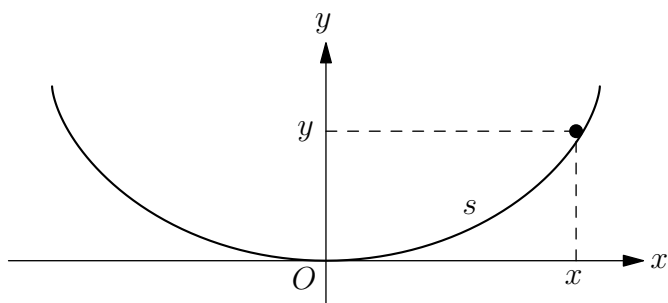


图 A.5: 题 A.1.8

由此可解得所求曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x(t) = a(t + \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

该曲线为一倒悬的摆线, 如图A.5所示。

**题 A.1.9** 如图A.6所示, 质量为  $M$  的光滑三棱柱放在光滑水平桌面上, 不可伸长的轻绳绕过棱脊的轻滑轮, 两端各系着质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的物体, 这两物体分别在棱柱的两个光滑斜面上。求解两物体和棱柱的运动情况。

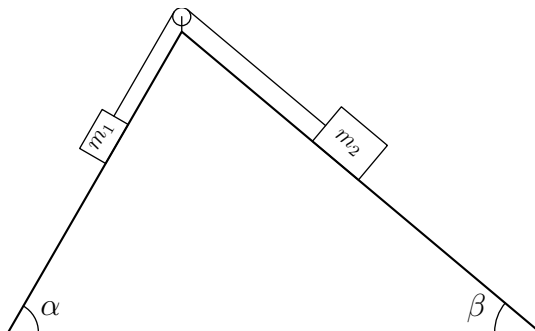


图 A.6: 题 A.1.9

解 将绳端的两物体和滑轮视为质点, 以三棱柱的顶点为坐标原点, 取三棱柱的横坐标  $x$  和左端绳子的长度  $l$  为广义坐标, 则可求得  $m_1$  和  $m_2$  的坐标分别为

$$\begin{cases} x_1 = x - l \cos \alpha \\ y_1 = -l \sin \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = x + (l_0 - l) \cos \beta \\ y_2 = -(l_0 - l) \sin \beta \end{cases}$$

其中  $l_0$  为绳子的总长度。则此系统的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2 \\ &= \frac{1}{2}(M + m_1 + m_2)\dot{x}^2 - (m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)\dot{x}\dot{l} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{l}^2 + m_1gl \sin \alpha \\ &\quad + m_2g(l_0 - l) \sin \beta \end{aligned}$$

根据 Lagrange 方程可得系统的运动方程为

$$\begin{cases} (M + m_1 + m_2)\ddot{x} - (m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)\ddot{l} = 0 \\ -(m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)\ddot{x} + (m_1 + m_2)\ddot{l} = (m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta)g \end{cases}$$

从中可以解得三棱柱和物体  $m_1$  的加速度

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{(m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta)(m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)g}{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)^2} \\ \ddot{l} = \frac{(m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta)(M + m_1 + m_2)g}{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)^2} \end{cases}$$

### A.1.3 两体问题

题 A.1.10 (金尚年《理论力学》98 页 3.6) 求粒子在中心力

$$F = -\frac{k}{r^2} + \frac{c}{r^3}$$

的作用下的轨道方程。

解 根据 Binet 方程(3.23)可有

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{m}{l^2}(-k + cu)$$

即有

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{cm}{l^2}\right)u = \frac{km}{l^2}$$

此方程的解为

$$u = \frac{km}{l^2 + cm} + A \cos \left( \sqrt{1 + \frac{cm}{l^2}} \theta + \theta_0 \right)$$

其中  $A$  和  $\theta_0$  为积分常数。选择极角的起始点, 总可以使得  $\theta_0 = 0$ , 由此有轨道方程

$$r = \frac{1}{\frac{km}{l^2 + cm} + A \cos \left( \sqrt{1 + \frac{cm}{l^2}} \theta \right)}$$

考虑中心力

$$F = -\frac{k}{r^2} + \frac{c}{r^3}$$

对应的势能为

$$V = -\frac{k}{r} + \frac{c}{2r^2}$$

近日点的距离为  $r_{\min} = \frac{1}{\frac{km}{l^2 + cm} + A}$ , 而在近日点有  $\dot{r}|_{r=r_{\min}} = 0$ , 故有

$$U(r_{\min}) = \frac{l^2}{2mr_{\min}^2} + V(r_{\min}) = E$$

即

$$\frac{l^2 + cm}{2m} u_{\min}^2 - k u_{\min} - E = 0$$

由此可得

$$u_{\min} = \frac{km + \sqrt{k^2 m^2 - 2mE(l^2 + cm)}}{l^2 + cm}$$

所以有

$$A = u_{\min} - \frac{km}{l^2 + cm} = \sqrt{\left( \frac{km}{l^2 + cm} \right)^2 - \frac{2mE}{l^2 + cm}}$$

由此即得轨道方程

$$r = \frac{\frac{l^2 + cm}{km}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2E(l^2 + cm)}{km}} \cos \left( \sqrt{\frac{l^2 + cm}{l^2}} \theta \right)}$$

题 A.1.11 (金尚年《理论力学》98 页 3.7) 求粒子在题 A.1.10 中的势场中能作圆周运动的轨道半径, 并讨论在此轨道上粒子受到微小扰动后的运动情况。

解 考虑粒子径向运动的等效势能

$$U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{l^2 + cm}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

粒子做圆周运动需要其半径  $r_m$  满足

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=r_m} = -\frac{l^2 + cm}{mr_m^3} + \frac{k}{r_m^2} = 0$$

即圆轨道半径为

$$r_m = \frac{l^2 + 2cm}{km}$$

再考虑

$$\left. \frac{d^2 U}{dr^2} \right|_{r=r_m} = \frac{3(l^2 + cm)}{mr_m^4} - \frac{2k}{r_m^3} = \frac{l^2 + cm}{mr_m^4} > 0$$

故该圆轨道是稳定的。

题 A.1.12 (金尚年《理论力学》98 页 3.16) 初速度为  $v_\infty$  的粒子受到势场  $V = -\frac{\alpha}{r^2}$  的散射, 问在什么条件下粒子会被力心所俘获, 并求俘获的总散射截面。

解 粒子在此势场中的等效势能为

$$U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \left( \frac{l^2}{2m} - \alpha \right) \frac{1}{r^2}$$

粒子能被力心俘获的条件即为  $U(r) \leq 0$ , 即

$$\frac{l^2}{2m} - \alpha \leq 0$$

由于  $l = \mu bv_\infty$ , 所以粒子能被力心俘获的条件为

$$b \leq \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}$$

总散射截面为

$$\sigma_t = \pi b_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}$$

题 A.1.13 (金尚年《理论力学》99 页 3.20) 证明在中心势场  $V = \frac{\alpha}{r}$  中运动的粒子, 其 Laplace-Runge-Lenz 矢量  $\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} + \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}$  是守恒量, 并讨论  $\mathbf{A}$  的物理意义。式中  $\mathbf{v}$  是粒子的速度,  $\mathbf{L}$  是粒子的角动量。

解 考虑

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{L} + \alpha \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F} \times \mathbf{L} + \alpha \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

式中利用了角动量守恒, 即  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}$ 。又有

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{L} = mr^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z$$

故

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \alpha \dot{\theta} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta + \alpha \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = \mathbf{0}$$

因此, Laplace-Runge-Lenz 矢量  $\mathbf{A}$  是守恒量。

当质点运动到极轴上时, 设质点的速度  $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_2$ , 矢径  $\mathbf{r} = r_0 \mathbf{e}_1$ , 故角动量矢量可以表示为  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = mr_0 v_0 \mathbf{e}_3$ , 此时 Laplace-Runge-Lenz 矢量为

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} + \alpha \mathbf{e}_r = (mr_0 v_0^2 + \alpha) \mathbf{e}_1$$

故 Laplace-Runge-Lenz 矢量沿极轴方向。再考虑

$$\begin{aligned} A^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{v} \times \mathbf{L} + \alpha \mathbf{e}_r) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L} + \alpha \mathbf{e}_r) = v^2 L^2 + 2\alpha \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) + \alpha^2 \\ &= v^2 L^2 + \frac{2\alpha}{mr} \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + \alpha^2 = v^2 L^2 + \frac{2\alpha}{mr} L^2 + \alpha^2 = \frac{2}{m} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{\alpha}{r} \right) L^2 + \alpha^2 \\ &= \frac{2EL^2}{m} + \alpha^2 = \alpha^2 e^2 \end{aligned}$$

即 Laplace-Runge-Lenz 矢量的大小与离心率成正比, 可定义离心率矢量为

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{A}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{v} \times \mathbf{L} + \frac{\mathbf{r}}{r}$$

离心率矢量也是守恒量, 其方向沿极轴, 大小为轨道的离心率。

题 A.1.14 根据万有引力定律, 水星运行的椭圆轨道应精确闭合。但长期的天文观测表明, 水星轨道的近日点并非固定不动的, 而是在运动平面内极其缓慢地移动。很多人试图用万有引力定律来解释这个现象, 均告失败。直到 20 世纪初, 广义相对论问世以后, 水星近日点的旋进问题才得以圆满的解释。根据广义相对论, 水星除了受经典的 Newton 引力势作用之外, 还需附加一项与距离 3 次方成反比的附加势能 (相对论效应), 即水星的实际引力势应为

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2 r^3}$$

其中  $m$  和  $M$  分别为水星和太阳的质量,  $L$  为水星相对太阳的角动量,  $c$  为光速,  $G$  为引力常数。试求上述力作用下水星近日点在一个周期内的进动量  $\Delta\phi$ 。

解 当有心力等效势为  $U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$  时, 一个周期内近日点的进动角可由式(3.22)得到, 即

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m(E - U(r))}} dr = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{L}{\sqrt{2m \left[ E - U\left(\frac{1}{u}\right) \right]}} du$$

对于经典 Newton 引力势  $V_0(r) = -\frac{GMm}{r}$ , 近日点进动角为

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{L}{\sqrt{2m \left( E + GMmu - \frac{L^2}{2m} u^2 \right)}} du = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2GMm^2}{L^2} u - u^2}} \\ &= 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^4} - \left( u - \frac{GMm^2}{L^2} \right)^2}} = 2 \arcsin \frac{u - \frac{GMm^2}{L^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^4}}} \Bigg|_{u_{\min}}^{u_{\max}} \end{aligned}$$

其中  $u_{\min}$  和  $u_{\max}$  分别为方程  $E + GMmu - \frac{L^2}{2m} u^2 = 0$  的较小根和较大根, 即<sup>①</sup>

$$u_{\min} = \frac{GMm^2}{L^2} - \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^4}}, \quad u_{\max} = \frac{GMm^2}{L^2} + \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^4}}$$

由此可有

$$\Delta\theta = 2 \left( \arcsin \frac{u_{\max} - \frac{GMm^2}{L^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^4}}} - \arcsin \frac{u_{\min} - \frac{GMm^2}{L^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^4}}} \right) = 2\pi$$

由此可知, 在 Newton 引力势下, 椭圆轨道将是闭合的。

当有扰动势  $\delta V(r) = -\frac{GML^2}{mc^2 r^3}$  时, 近日点进动角为

$$\Delta\theta' = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m(E - U(r))}} dr = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m \left[ E - V_0(r) - \delta V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right]}} dr$$

<sup>①</sup> 注意, 在椭圆轨道的情形下,  $E < 0$ , 因此这两个根都是正的。

上式无法解析算出, 由于  $\delta V$  与其他项相比是小量, 可以考虑将上式按  $\delta V$  展开来近似。注意到积分限  $r_{\min}$  和  $r_{\max}$  是方程  $E - V_0(r) - \frac{L^2}{2mr^2} = 0$  的两个根, 以及上式的展开式各项系数分母中都含有因子  $E - V_0(r) - \frac{L^2}{2mr^2}$ , 因此上式的展开式中的积分将为广义积分, 有可能发散。为了避免发散, 将上式改写为

$$\Delta\theta' = -2 \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m \left[ E - V_0(r) - \delta V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right]} dr$$

注意, 此处对  $L$  的偏导数并不针对  $V(r)$  或  $\delta V(r)$  表达式中可能会出现  $L$ 。由此可将上式展开为  $\delta V(r)$  的幂级数并保留至一阶项, 可得

$$\begin{aligned} \Delta\theta' = & -2 \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m \left( E - V_0(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)} dr \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{m}{\sqrt{2m \left( E - V_0(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} \delta V(r) dr \end{aligned}$$

上式第一项即为无微扰时的近日点进动角  $2\pi$ , 对上式第二项沿无微扰的轨道 (即椭圆轨道) 积分, 此时由能量守恒可得

$$E - V_0(r) - \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

于是有

$$\Delta\theta' = 2\pi + \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} 2\delta V(r) \frac{1}{\dot{r}} dr = 2\pi + \frac{\partial}{\partial L} \int_0^\pi 2\delta V(r) \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta$$

此处利用了关系  $\frac{1}{\dot{r}} dr = \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta = dt$ , 再根据角动量的定义可得  $mr^2\dot{\theta} = L$ , 则有

$$\Delta\theta' = 2\pi + \frac{\partial}{\partial L} \int_0^\pi \frac{2mr^2}{L} \delta V(r) d\theta$$

由此可得水星近日点一个周期内的进动量为

$$\Delta\phi = \Delta\theta' - 2\pi = \frac{\partial}{\partial L} \int_0^\pi \frac{2mr^2}{L} \delta V(r) d\theta$$

这里对  $L$  的求导不应包含  $\delta V(r)$  表达式中的  $L$ , 因此将其记作  $\delta V(r) = -\frac{GML^2}{mc^2 r^3} = -\frac{\gamma}{r^3}$ , 则有

$$\Delta\phi = -\frac{\partial}{\partial L} \int_0^\pi \frac{2m\gamma}{Lr(\theta)} d\theta$$

将无微扰时的运动方程  $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{L^2}{GMm^2} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$  代入, 可得

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -\frac{\partial}{\partial L} \int_0^\pi \frac{2m\gamma}{L} \frac{GMm^2}{L^2} (1 + e \cos \theta) d\theta = -\frac{\partial}{\partial L} \frac{2\pi GMm^3\gamma}{L^3} = \frac{6\pi GMm^3\gamma}{L^4} \\ &= 6\pi \left( \frac{GMm}{cL} \right)^2 \end{aligned}$$

由于  $L^2 = GMm^2 a(1 - e^2)$ , 可将  $\Delta\phi$  用轨道参数  $a, e$  表示为

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{ac^2(1 - e^2)}$$



所有行星的轨道由于相对论效应都有旋进，上式表明半长轴  $a$  越小，轨道离心率  $e$  越大，其轨道近日点的进动量就越大。水星是离太阳最近的行星，其轨道离心率也是所有大行星中最大的。将  $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ ，太阳质量  $M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ ，光速  $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ ，水星轨道的半长轴  $a = 5.786 \times 10^{10} \text{ m}$  和水星轨道的离心率  $e = 0.2056$  代入上式中，可得

$$\Delta\phi = 5.022 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

由于水星的公转周期为 87.969 天，故一地球年（365.256 天）将转 4.1521 圈，因此水星近日点一个世纪进动的角度为

$$5.022 \times 10^{-7} \times 4.1521 \times 100 \times \frac{360}{\pi} \times 3600 \approx 43''$$

### A.1.4 多自由度微振动与阻尼

题 A.1.15 (金尚年《理论力学》207 页 6.1) 质量为  $m$  的质点，用一固有长度为  $l$ ，劲度系数为  $k$ ，质量可以忽略的弹簧悬挂于  $O$  点，质点约束在铅直平面内运动（如图 A.7 所示），求系统作微振动时的振动频率。

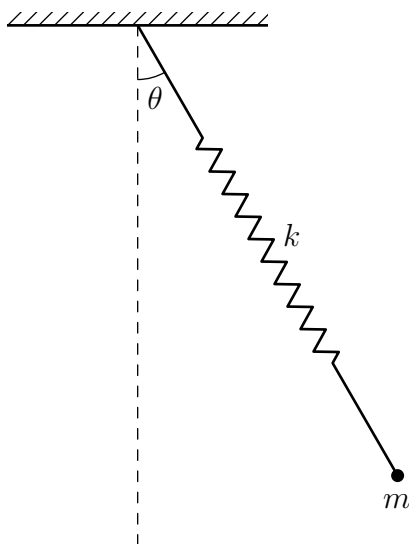


图 A.7: 题 A.1.15

解 此系统的自由度为 2，取摆长  $x$  和摆动角  $\theta$  作为广义坐标，则系统的 Lagrange 函数可以表示为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + x^2\dot{\theta}^2) + mgx \cos \theta - \frac{1}{2}k(x-l)^2$$

系统的平衡位置可以通过

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0 \\ \left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \end{cases}$$

来确定，即有

$$x_0 = l + \frac{mg}{k}, \quad \theta_0 = 0$$

在平衡位置附近将 Lagrange 函数展开至两阶并记  $q = x - x_0$ , 可有

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + (q + x_0)^2\dot{\theta}^2) + mg(q + x_0)\cos\theta - \frac{1}{2}k(q + x_0 - l)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}mx_0^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kq^2 - \frac{1}{2}mgx_0\theta^2 + mgx_0 - \frac{m^2g^2}{2k} \end{aligned}$$

由此, 系统微振动的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{q} + kq = 0 \\ mx_0^2\ddot{\theta} + mgx_0\theta = 0 \end{cases}$$

因此, 系统作微振动的频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{x_0}} = \sqrt{\frac{g}{l + \frac{mg}{k}}}$$

题 A.1.16 (金尚年《理论力学》208 页 6.6) 有一弹簧连着一个质量为  $m_1$  的滑块, 滑块可沿光滑水平直线自由滑动, 在滑块上系有一摆长为  $l$ , 质量为  $m_2$  的单摆, 求系统的振动频率。

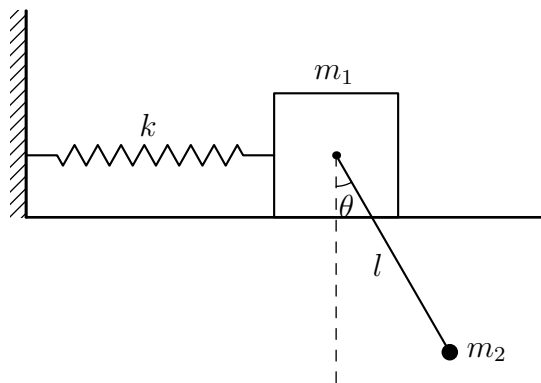


图 A.8: 题 A.1.16

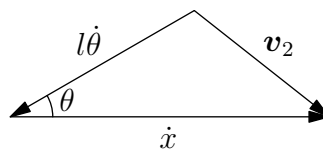


图 A.9:  $m_2$  的速度合成图

解 取弹簧伸长量  $x$  和单摆的摆动角  $\theta$  为广义坐标, 则根据相对运动的速度关系, 可得  $m_2$  的速度如图 A.9 所示, 因此有

$$v_2^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

因此, 此系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - \frac{1}{2}kx^2 + m_2gl\cos\theta$$

近似到二阶, 可有

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{x}\dot{\theta}\right) - \frac{1}{2}kx^2 + m_2gl\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - m_2l\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}m_2gl\theta^2 + m_2gl \end{aligned}$$

去掉 Lagrange 函数中对运动方程无任何影响的常数项, 记  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$ , 可将 Lagrange 函数表示为

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 l \\ -m_2 l & m_2 l^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{pmatrix}$$

系统的运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

作试解  $\mathbf{q} = \mathbf{a} \cos(\omega t + \phi)$  代入方程中, 可得

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

此方程组有非平凡解的条件为

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = \begin{vmatrix} k - \omega^2(m_1 + m_2) & \omega^2 m_2 l \\ \omega^2 m_2 l & m_2 g l - \omega^2 m_2 l^2 \end{vmatrix} = 0$$

即系统的频率为方程

$$\omega^4 - \left( \frac{k}{m_1} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \right) \omega^2 + \frac{kg}{m_1 l} = 0$$

的两个正实根。

题 A.1.17 (金尚年《理论力学》209 页 6.14) 设一系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(x^2 + y^2) + \alpha xy$$

它表示两个固有频率为  $\omega_0$  的一维振子以相互作用  $\alpha xy$  耦合起来, 求此系统的振动频率。

解 记  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , 则系统的 Lagrange 函数可以表示为

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K}\mathbf{q}$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & -\alpha \\ -\alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

系统的频率满足久期方程

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\alpha \\ -\alpha & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

由此可解得系统的频率为

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\omega_0^2}}, \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\omega_0^2}}$$

题 A.1.18 (金尚年《理论力学》209 页 6.18) 设具有三个广义坐标  $q_1, q_2, q_3$  的力学系统产生微振动, 其动能  $T$  和势能  $V$  可写作

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$$

$$V = -q_1 q_2 - q_2 q_3 + 2q_1^2 + \frac{5}{2}q_2^2 + 2q_3^2$$

已知  $t = 0$  时,  $q_1 = q_{10}, q_2 = q_{20}, q_3 = q_{30}, \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = 0$ , 求此系统的运动。

解 记  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ , 则系统的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - q_1 q_2 + q_2 q_3 - 2q_1^2 - \frac{5}{2}q_2^2 - 2q_3^2 \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K}\mathbf{q} \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

于是, 系统的运动方程可以表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

作试解  $\mathbf{q} = \mathbf{a} \cos(\omega t + \phi)$ , 则方程可化为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

此方程具有非平凡解的条件为

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = \begin{vmatrix} 4 - \omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 - \omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

由此解得

$$\omega_1 = \sqrt{3}, \quad \omega_2 = 2, \quad \omega_3 = \sqrt{6}$$

其对应的振幅  $\mathbf{a}$  分别为

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此, 系统运动的通解为

$$\mathbf{q} = C_1 \mathbf{a}_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \mathbf{a}_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + C_3 \mathbf{a}_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3)$$

速度为

$$\dot{\mathbf{q}} = -\omega_1 C_1 \mathbf{a}_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \omega_2 C_2 \mathbf{a}_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) - \omega_3 C_3 \mathbf{a}_3 \sin(\omega_3 t + \phi_3)$$

由于  $t = 0$  时,  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , 即

$$-\omega_1 C_1 \mathbf{a}_1 \sin \phi_1 - \omega_2 C_2 \mathbf{a}_2 \sin \phi_2 - \omega_3 C_3 \mathbf{a}_3 \sin \phi_3 = \mathbf{0}$$

可得  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ 。再根据  $t = 0$  时, 有  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ , 可有

$$C_1 \mathbf{a}_1 + C_2 \mathbf{a}_2 + C_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{q}_0$$

解得

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3)^{-1} \mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_{10} \\ q_{20} \\ q_{30} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}q_{10} + \frac{1}{3}q_{20} + \frac{1}{3}q_{30} \\ \frac{1}{2}q_{10} - \frac{1}{2}q_{30} \\ \frac{1}{6}q_{10} - \frac{1}{3}q_{20} + \frac{1}{6}q_{30} \end{pmatrix}$$

据此可得运动解为

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{3}(q_{10} + q_{20} + q_{30}) \cos \omega_1 t + \frac{1}{2}(q_{10} - q_{30}) \cos \omega_2 t + \frac{1}{6}(q_{10} - 2q_{20} + q_{30}) \cos \omega_3 t \\ q_2 = \frac{1}{3}(q_{10} + q_{20} + q_{30}) \cos \omega_1 t + \frac{1}{3}(q_{10} - 2q_{20} + q_{30}) \cos \omega_3 t \\ q_3 = \frac{1}{3}(q_{10} + q_{20} + q_{30}) \cos \omega_1 t - \frac{1}{2}(q_{10} - q_{30}) \cos \omega_2 t + \frac{1}{6}(q_{10} - 2q_{20} + q_{30}) \cos \omega_3 t \end{cases}$$

### A.1.5 刚体

题 A.1.19 (金尚年《理论力学》146 页 4.7) 高为  $h$ , 顶角为  $2\alpha$  的圆锥在一平面上滚而不滑, 如此锥体以等角速度  $\omega$  绕  $OZ$  轴转动, 求此圆锥地面上最高点  $A$  的速度和加速度。

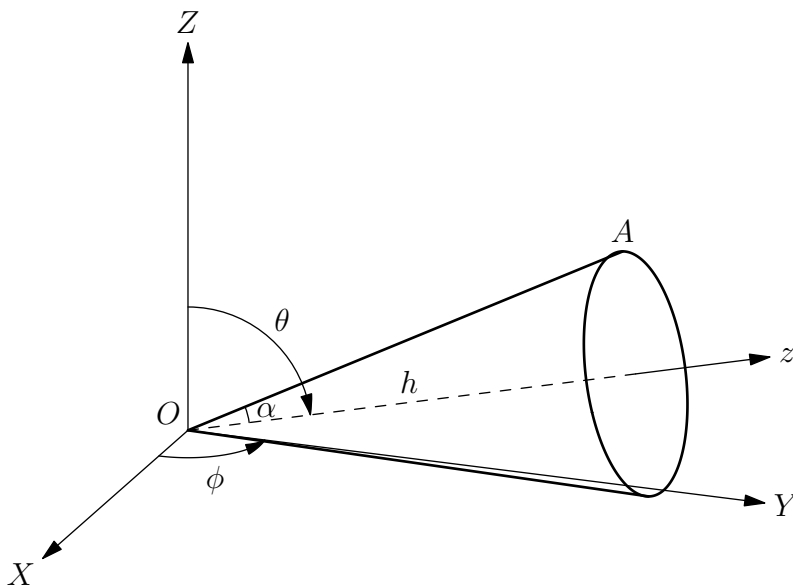


图 A.10: 题 A.1.19

解 首先有

$$\dot{\phi} = \omega, \quad \dot{\theta} = 0$$

根据纯滚动条件, 可有

$$\phi \sqrt{h^2 + r^2} = \psi r$$

即有

$$\dot{\psi} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \dot{\phi} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \omega = \frac{\omega}{\sin \alpha}$$

由此可得圆锥滚动的角速度

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_Z - \dot{\psi} \mathbf{e}_z$$

根据几何关系, 可得

$$\mathbf{e}_z = \cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y + \cos \theta \mathbf{e}_Z = \cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y + \sin \alpha \mathbf{e}_Z$$

所以, 可有

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_Z - \frac{\omega}{\sin \alpha} (\cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y + \sin \alpha \mathbf{e}_Z) = -\frac{\omega \cos \phi}{\sin \alpha} \mathbf{e}_X - \frac{\omega \sin \phi}{\sin \alpha} \mathbf{e}_Y$$

而

$$\mathbf{r}_A = \frac{h}{\cos \alpha} \cos 2\alpha (\cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y) + \frac{h}{\cos \alpha} \sin 2\alpha \mathbf{e}_Z$$

因此,  $A$  点的速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A \\ &= \left( -\frac{\omega \cos \phi}{\sin \alpha} \mathbf{e}_X - \frac{\omega \sin \phi}{\sin \alpha} \mathbf{e}_Y \right) \times \left( \frac{h}{\cos \alpha} \cos 2\alpha (\cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y) + \frac{h}{\cos \alpha} \sin 2\alpha \mathbf{e}_Z \right) \\ &= -\frac{2\omega h}{\cos \alpha} (\sin \phi \mathbf{e}_X - \cos \phi \mathbf{e}_Y) \end{aligned}$$

$A$  点的加速度为

$$\mathbf{a}_A = \dot{\mathbf{v}}_A = -\frac{2\omega h}{\cos \alpha} (\dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}_X + \dot{\phi} \sin \phi \mathbf{e}_Y) = -\frac{2\omega^2 h}{\cos \alpha} (\cos \phi \mathbf{e}_X + \sin \phi \mathbf{e}_Y)$$

题 A.1.20 (金尚年《理论力学》148 页 4.27) 均匀椭球绕自己的一个对称轴  $AB$  以角速度  $\dot{\phi}$  转动, 并且  $AB$  轴又以角速度  $\dot{\theta}$  绕通过椭球中心并与  $AB$  垂直的  $CD$  轴转动, 写出椭球的动能和角动量。

解 建立主轴系, 以  $BA$  的方向为  $z$  轴,  $x$  轴和  $y$  轴位于与  $z$  轴垂直的平面内。首先求出此主轴系中椭球的惯量矩阵, 即

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_V \rho(y^2 + z^2) dV \\ &= \rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (b^2 r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + c^2 r^2 \cos^2 \theta) abc r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{4\pi}{3} abc \rho \frac{b^2 + c^2}{5} = \frac{m}{5} (b^2 + c^2) \\ I_2 &= \int_V \rho(x^2 + z^2) dV \\ &= \rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (a^2 r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + c^2 r^2 \cos^2 \theta) abc r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{4\pi}{3} abc \rho \frac{a^2 + c^2}{5} = \frac{m}{5} (a^2 + c^2) \\ I_3 &= \int_V \rho(x^2 + y^2) dV \\ &= \rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (a^2 r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + b^2 r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta) abc r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{4\pi}{3} abc \rho \frac{a^2 + b^2}{5} = \frac{m}{5} (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

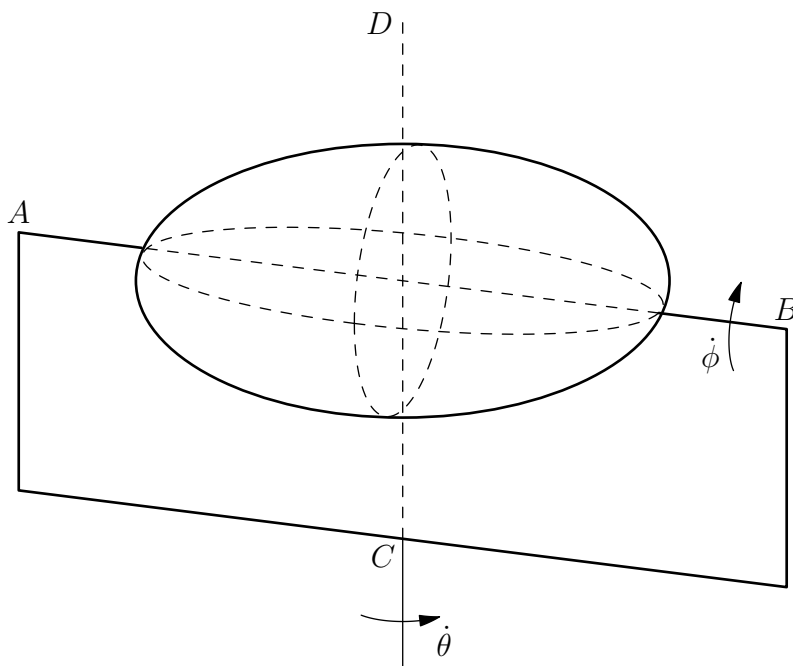


图 A.11: 题 A.1.20

在主轴系中, 角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \cos \phi \mathbf{e}_x + \dot{\theta} \sin \phi \mathbf{e}_y + \dot{\phi} \mathbf{e}_z$$

由此, 动能和角速度分别为

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{m}{10} \left[ (b^2 + c^2) \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + (a^2 + c^2) \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi + (a^2 + b^2) \dot{\phi}^2 \right]$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{m}{5} \left[ (b^2 + c^2) \dot{\theta} \cos \phi \mathbf{e}_x + (a^2 + c^2) \dot{\theta} \sin \phi \mathbf{e}_y + (a^2 + b^2) \dot{\phi} \mathbf{e}_z \right]$$

## A.1.6 Hamilton 力学

题 A.1.21 (金尚年《理论力学》272 页 8.1) 写出自由质点在柱坐标和球坐标中的 Hamilton 函数。

解 在球坐标系中, 质点的速度可以表示为

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi$$

因此自由质点的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

广义动量分别为

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$$

所以 Hamilton 函数为

$$H = \sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta}$$

题 A.1.22 (金尚年《理论力学》272 页 8.4) 假定在两个固定点  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  之间作一条曲线, 并让它绕  $y$  轴旋转而形成一个旋转曲面, 求使此旋转曲面的表面积为极小的曲线方程式。

解 设曲线的方程可以表示为  $x = f(y)$ , 则旋转体的表面积可以表示为

$$S[f(y)] = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi f(y) \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy$$

此旋转体表面积取极小值的条件为  $\delta S = 0$ , 根据 Euler-Lagrange 方程可有

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{\partial F}{\partial f} = 0$$

其中  $F(f, f', y) = 2\pi f(y) \sqrt{1 + [f'(y)]^2}$ , 由于  $F(f, f', y)$  中不含有自变量  $y$ , 故 Euler-Lagrange 方程有初积分

$$F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} = a (\text{常数})$$

由此方程整理可得

$$f'(y) = \sqrt{\frac{f^2(y)}{a^2} - 1} = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

分离变量可有

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} dy$$

两端积分, 可有

$$\operatorname{arcosh} \frac{x}{a} = \frac{1}{a} (y - b)$$

因此所求曲线的方程为

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a}$$

式中  $a, b$  是积分常数, 可由边界条件

$$\begin{cases} x_1 = a \cosh \frac{y_1 - b}{a} \\ x_2 = a \cosh \frac{y_2 - b}{a} \end{cases}$$

确定。

题 A.1.23 (金尚年《理论力学》273 页 8.8) 质量为  $m$  的质点在重力场中自由落下。试利用正则变换母函数  $F_1(y, \theta) = -mg \left( \frac{g}{6} \theta^3 + y\theta \right)$  写出新的 Hamilton 函数和正则方程, 并求解。

解 此系统原本的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgy$$

根据第一类正则变换母函数的结论, 可有

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F_1}{\partial y} = -mg\theta \\ P_\theta = -\frac{\partial F_1}{\partial \theta} = \frac{1}{2} mg^2 \theta^2 + mgy \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} + mgy \end{cases}$$



利用前两式消去  $K$  表达式中的  $p$  和  $y$  即可得新的 Hamilton 函数为

$$K = \frac{p^2}{2m} + mgy = \frac{(mg\theta)^2}{2m} + P_\theta - \frac{1}{2}mg^2\theta^2 = P_\theta$$

因此, 新的正则方程为

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial K}{\partial P_\theta} = 1 \\ \dot{P}_\theta = -\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

因此可有

$$\theta = t + \beta, \quad P_\theta = \gamma$$

其中  $\beta, \gamma$  为积分常数。再由变换关系可得原问题的解为

$$y = \frac{1}{mg} \left( P_\theta - \frac{1}{2}mg^2\theta^2 \right) = \frac{\gamma}{mg} - \frac{1}{2}g(t + \beta)^2$$

题 A.1.24 (金尚年《理论力学》273 页 8.10) 证明  $q = \sqrt{\frac{2Q}{k}} \cos P$ ,  $p = \sqrt{2kQ} \sin P$  ( $k$  为常数) 是一正则变换。若原来的 Hamilton 函数为  $H = \frac{1}{2}(p^2 + k^2q^2)$ , 求用新正则变量表示的正则方程。

解 正则变换保持基本 Poisson 括号不变, 因此考虑

$$[q, p] = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = 1$$

故此变换为正则变换。在此变换下, 新的 Hamilton 函数满足

$$K = \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{2kQ} \sin P \right)^2 + k^2 \left( \sqrt{\frac{2Q}{k}} \cos P \right)^2 \right] = kQ$$

由此, 新的正则方程为

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = k \end{cases}$$

题 A.1.25 (Classical Mechanics(Goldstein) 10.3) 用 Hamilton-Jacobi 方法求解竖直平面内的斜抛运动。假设物体在  $t = 0$  时刻由原点以速度  $v_0$  抛出, 初始速度与水平方向夹角为  $\alpha$ 。

解 此问题的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + mgy$$

进而可获得其 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + mgy = 0$$

由于 Hamilton 函数不显含时间  $t$  和坐标  $x$ , 因此可令

$$S(x, y, t) = -Et + \gamma x + S_2(y)$$

其中  $\gamma$  和  $E$  为积分常数。由此可得方程

$$\frac{\gamma^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_2}{dy} \right)^2 + mgy = E$$

由此可以解得

$$\frac{dS_2}{dy} = \pm \sqrt{2mE - \gamma^2 - 2m^2gy}$$

假设开方前取正号, 积分可得

$$S_2(y) = \int \sqrt{2mE - \gamma^2 - 2m^2gy} dy = -\frac{1}{3m^2g} [2mE - \gamma^2 - 2m^2gy]^{\frac{3}{2}}$$

由此即有

$$S = -Et + \gamma x - \frac{1}{3m^2g} [2mE - \gamma^2 - 2m^2gy]^{\frac{3}{2}}$$

其中  $\gamma$  和  $E$  为积分常数。于是, 此问题的解由如下方程决定:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial E} = -\frac{1}{mg} \sqrt{2mE - \gamma^2 - 2m^2gy} - t \\ \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \gamma} = x + \frac{\gamma}{m^2g} \sqrt{2mE - \gamma^2 - 2m^2gy} \end{cases}$$

从上式中反解出  $x$  和  $y$  可得

$$\begin{cases} x = \beta_2 + \frac{\gamma}{m}(t + \beta_1) \\ y = \frac{E}{mg} - \frac{\gamma^2}{2m^2g} - \frac{1}{2}g(t + \beta_1)^2 \end{cases}$$

利用初始条件确定解中的 4 个积分常数  $E, \gamma, \beta_1$  和  $\beta_2$ :

$$\begin{cases} x(0) = \beta_2 + \frac{\gamma\beta_1}{m} = 0 \\ y(0) = \frac{E}{mg} - \frac{\gamma^2}{2m^2g} - \frac{1}{2}g\beta_1^2 = 0 \\ \dot{x}(0) = \frac{\gamma}{m} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}(0) = -g\beta_1 = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} \gamma = mv_0 \cos \alpha \\ E = \frac{1}{2}mv_0^2 \\ \beta_1 = -\frac{v_0}{g} \sin \alpha \\ \beta_2 = \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha \end{cases}$$

最终可得此问题的解为

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \alpha \\ y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

## A.2 理论力学习题集 (部分)

### A.2.1 平面力系

题 A.2.1 (37 页 4.56) 如图 A.12 所示, 在两光滑斜面  $OA$  和  $OB$  之间放置两个相互接触的平滑匀质圆柱。中心为  $C_1$  的圆柱重  $P_1 = 10\text{ N}$ , 中心为  $C_2$  的圆柱中  $P_2 = 30\text{ N}$ 。设  $\angle AOx_1 = 60^\circ$ ,  $\angle BOx = 30^\circ$ , 求直线  $C_1C_2$  与水平线  $xOx_1$  的夹角  $\phi$ 、两圆柱对鞋面的压力  $N_1$  和  $N_2$ , 以及两圆柱之间的压力  $N$ 。

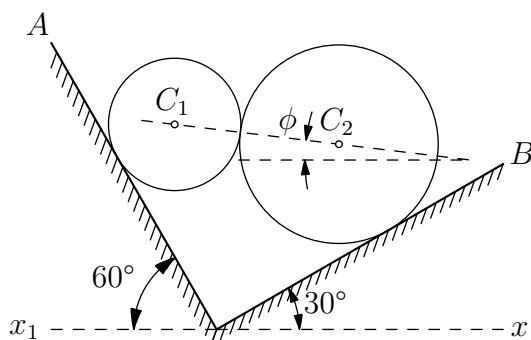


图 A.12: 题 A.2.1

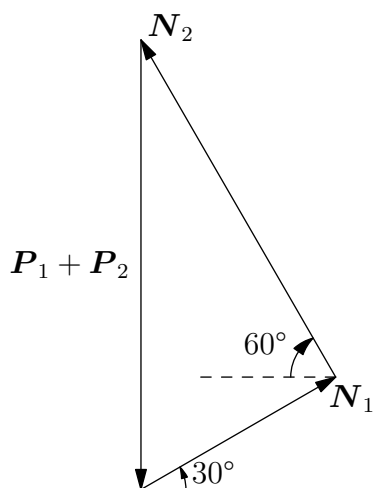


图 A.13: 题 A.2.1 受力分析 1

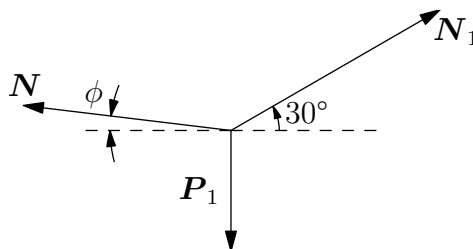


图 A.14: 题 A.2.1 受力分析 2

解 取两圆柱整体受力分析 (如图A.13), 可有

$$\begin{cases} N_1 = (P_1 + P_2) \sin 30^\circ = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = 20 \text{ N} \\ N_2 = (P_1 + P_2) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(P_1 + P_2) = 34.6 \text{ N} \end{cases}$$

然后取圆柱  $C_1$  受力分析 (如图A.14), 可有

$$\begin{cases} N \cos \phi = N_1 \cos 30^\circ \\ N \sin \phi + N_1 \sin 30^\circ = P_1 \end{cases}$$

可得  $\phi = 0$  以及  $N = 17.3 \text{ N}$ 。

题 A.2.2 (37 页 4.57) 如图A.15所示, 两个光滑匀质球  $C_1$  和  $C_2$  的半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 重量分别为  $P_1$  和  $P_2$ 。这两球用绳子  $AB$  和  $AD$  挂在  $A$  点, 且  $AB = l_1$ ,  $AD = l_2$ ,  $l_1 + R_1 = l_2 + R_2$ ,  $\angle BAD = \alpha$ 。求绳子  $AD$  与水平面  $AE$  的夹角  $\theta$ 、绳子的张力  $T_1$  和  $T_2$ , 以及两球之间的压力。

解 取两圆柱整体受力分析 (如图A.16), 根据正弦定理可有

$$\frac{T_1}{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{T_2}{\sin\left(\alpha - \theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{P_1 + P_2}{\sin(\pi - \alpha)}$$

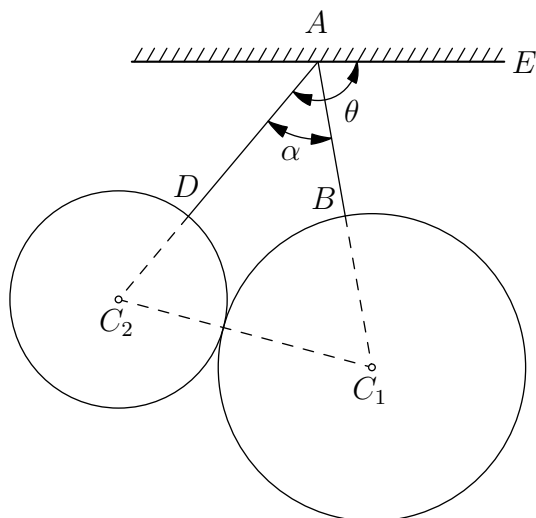


图 A.15: 题 A.2.2

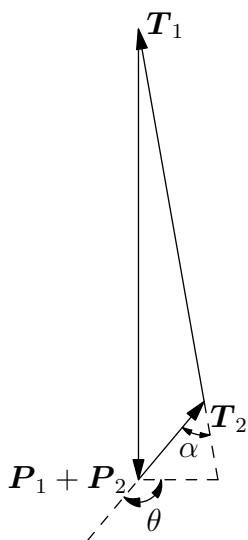


图 A.16: 题 A.2.2 受力分析 1

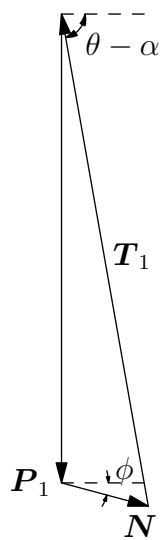


图 A.17: 题 A.2.2 受力分析 2

由此可得

$$\begin{cases} T_1 = -\frac{\cos \theta}{\sin \alpha} (P_1 + P_2) & (\text{A.3a}) \\ T_2 = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\sin \alpha} (P_1 + P_2) & (\text{A.3b}) \end{cases}$$

然后取圆柱  $C_1$  受力分析 (如图 A.17), 记  $\phi = \theta - \alpha - \frac{\pi - \alpha}{2} = \theta - \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}$  为  $C_1C_2$  与水平方向的夹角, 则可有

$$\frac{P_1}{\sin(\theta - \alpha - \phi)} = \frac{T_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)} = \frac{N}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)}$$

由此可得

$$\begin{cases} T_1 = \frac{\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} P_1 \\ N = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} P_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (A.4a) \\ (A.4b) \end{matrix}$$

由式(A.3a)和式(A.4a)可得

$$\tan \theta = -\frac{P_2 + P_1 \cos \alpha}{P_1 \sin \alpha}$$

绳子的张力  $T_1$  和  $T_2$  以及两球之间的压力  $N$  前面已求出。

题 A.2.3 (45 页 5.14) 如图 A.18 所示, 重  $Q$  的圆柱放在支座  $A$  和  $B$  上, 这两支座关于圆柱中垂线对称。圆柱与支座之间的摩擦系数等于  $\mu$ 。问: 当切向力  $T$  多大时, 圆柱开始转动? 又当角  $\theta$  多大时该装置自锁?

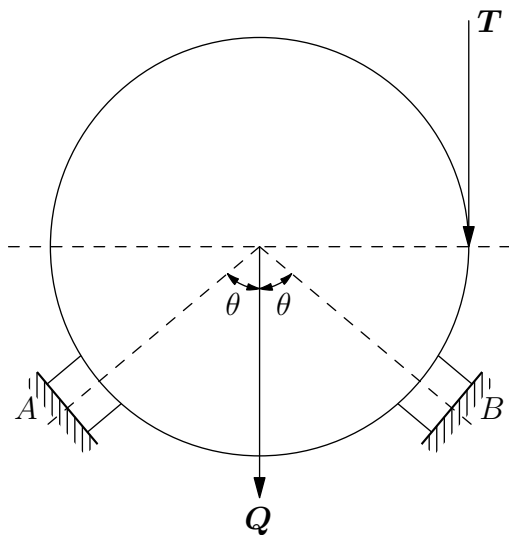


图 A.18: 题 A.2.3

解 根据受力平衡和力矩平衡, 可有

$$\begin{cases} Q + T + f_1 \sin \theta = N_1 \cos \theta + N_2 \cos \theta + f_2 \sin \theta \end{cases} \quad (A.5a)$$

$$\begin{cases} f_1 \cos \theta + f_2 \cos \theta + N_1 \sin \theta = N_2 \sin \theta \end{cases} \quad (A.5b)$$

$$\begin{cases} TR = f_1 R + f_2 R \end{cases} \quad (A.5c)$$

$$\begin{cases} f_1 = \mu N_1 \end{cases} \quad (A.5d)$$

$$\begin{cases} f_2 = \mu N_2 \end{cases} \quad (A.5e)$$

将式(A.5a)和式(A.5b)两端乘以  $\mu$ , 并考虑到式(A.5d)和式(A.5e), 可得

$$\begin{cases} f_1(\mu - \cos \theta + \mu \sin \theta) + f_2(\mu - \cos \theta - \mu \sin \theta) = -\mu Q \\ f_1(\sin \theta + \mu \cos \theta) - f_2(\sin \theta - \mu \cos \theta) = 0 \end{cases}$$

解此方程组可得

$$\begin{cases} f_1 = \frac{\mu Q(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{2 \sin \theta [(1 + \mu^2) \cos \theta - \mu]} \\ f_2 = \frac{\mu Q(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{2 \sin \theta [(1 + \mu^2) \cos \theta - \mu]} \end{cases}$$

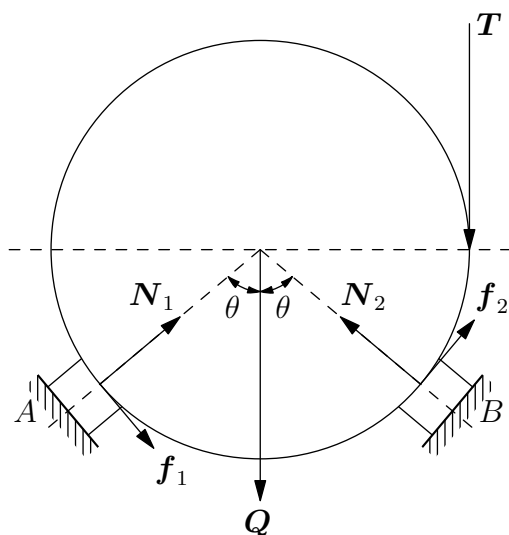


图 A.19: 题 A.2.3 受力分析

再由式(A.5c)可得

$$T = f_1 + f_2 = \frac{\mu Q}{(1 + \mu^2) \cos \theta - \mu}$$

该系统不会自锁的条件为

$$T = \frac{\mu Q}{(1 + \mu^2) \cos \theta - \mu} \geq 0$$

即

$$\theta \leq \arccos \frac{\mu}{1 + \mu^2}$$

题 A.2.4 (45 页 5.15) 如图A.20所示, 不计曲柄机构的滑块 A 和导轨之间的摩擦, 也不计机构上所有铰链和轴承的摩擦, 机构在图标位置能提起重物 Q, 试求力 P 的大小。如果滑块 A 和导轨之间的摩擦系数是  $\mu$ , 为使重物 Q 不动, 求力 P 的最大值和最小值。

解 根据转轮对其中心的力矩平衡, 可有

$$Tr \cos \left( \frac{\pi}{2} - \phi - \theta \right) = Qa \quad (\text{A.6})$$

考虑滑块 A 的受力, 如图A.21所示, 即有

$$\begin{cases} P + f = T \cos \phi \\ T \sin \phi = N \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

当不计曲柄机构的滑块 A 和导轨之间的摩擦时, 有  $f = 0$ , 此时可解得

$$P = \frac{Qa \cos \phi}{r \sin(\theta + \phi)}$$

当计及摩擦时, 可得摩擦力 f 的取值范围为

$$-\mu N \leq f \leq \mu N \quad (\text{A.8})$$

由式(A.6)和式(A.7)解出 f 和 N 可有

$$\begin{cases} f = \frac{Qa \cos \phi}{r \sin(\phi + \theta)} - P \\ N = \frac{Qa \sin \phi}{r \sin(\phi + \theta)} \end{cases}$$

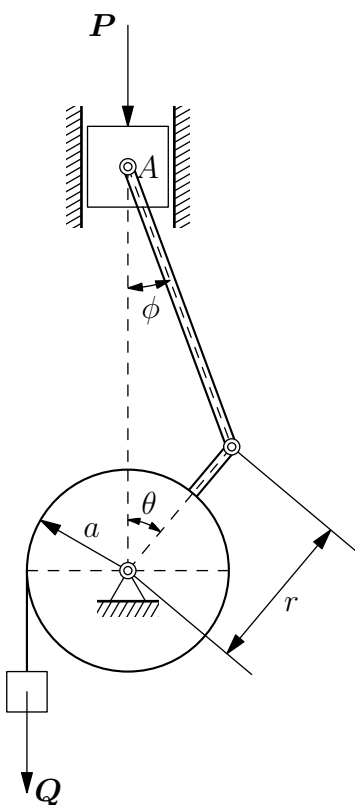


图 A.20: 题 A.2.4

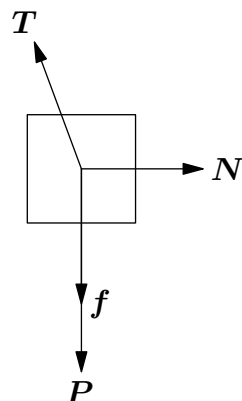


图 A.21: 题 A.2.4 受力分析

根据式(A.8)可有  $P$  的取值范围

$$\frac{Qa(\cos \phi - \mu \sin \phi)}{r \sin(\phi + \theta)} \leq P \leq \frac{Qa(\cos \phi + \mu \sin \phi)}{r \sin(\phi + \theta)}$$

题 A.2.5 (45 页 5.16) 如图 A.22 所示, 沿不光滑曲面提升重为  $P$  的物体  $B$  过程中, 依靠绳索  $BAD$  保持平衡。该曲面是四分之一圆柱面。曲面和重物间的摩擦系数是  $\mu = \tan \phi$ , 其中  $\phi$  是摩擦角<sup>①</sup>。试以角  $\alpha$  的函数表示出绳索的张力  $T$ , 为使绳索中的张力取极值, 角  $\alpha$  必须满足什么条件? 重物和滑轮的尺寸不计。

解 摩擦系数为  $\mu = \tan \phi$ , 即摩擦角为  $\phi$ , 因此摩擦力与支持力的合力与支持力方向的夹角最大为  $\phi$ 。据此可作出矢量三角形关系如图 A.23 所示。

在图示条件下, 根据正弦定理可有

$$\frac{P}{\sin\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{T}{\sin(\alpha + \phi)}$$

所以有

$$T = P \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\sin\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

考虑

$$\frac{dT}{d\alpha} = P \frac{\cos(\alpha + \phi) \sin\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin(\alpha + \phi)}{\sin^2\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$$

<sup>①</sup> 全反力 (即法向反力与摩擦力的合力) 与接触面法线间夹角的最大值称为摩擦角。

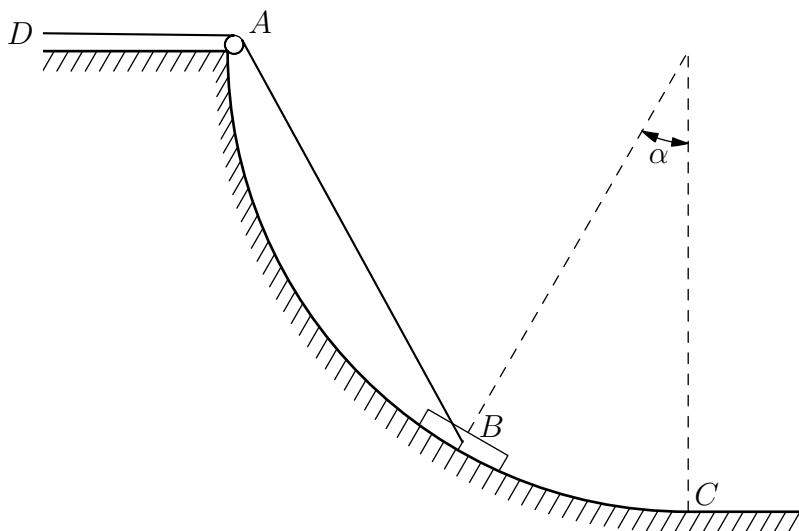


图 A.22: 题 A.2.5

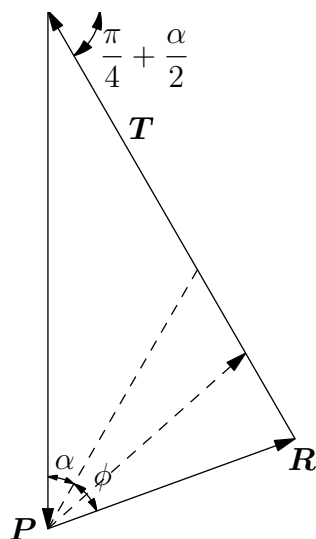


图 A.23: 题 A.2.5 的矢量三角形

即当

$$\frac{\tan(\alpha + \phi)}{\tan\left(\phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2$$

时,  $T$  取极值。

题 A.2.6 (48 页 5.27) 如图 A.24 所示, 梯子  $AB$  靠在铅直墙上, 下端搁在水平地板上。梯子与墙、地板之间的摩擦系数分别为  $\mu_1, \mu_2$ 。梯子连同站在上面的人共重  $P$ , 重力作用点  $C$  按比值  $m:n$  两分梯子的长度。在平衡状态下, 求梯子与墙之间的最大夹角, 并求当  $\alpha$  等于该值时墙和地板反力的法向分量  $N_A$  和  $N_B$ 。



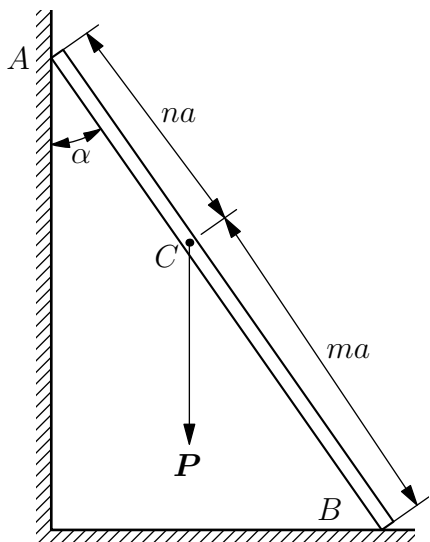


图 A.24: 题 A.2.6

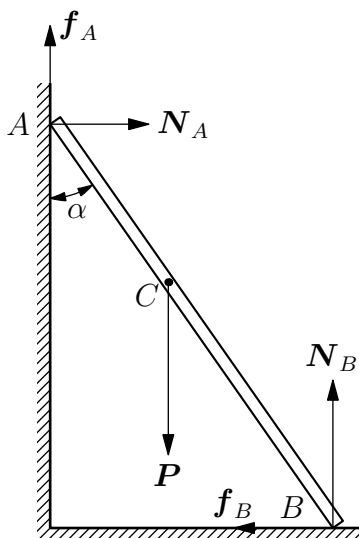


图 A.25: 题 A.2.6 受力分析

解 在夹角最大时, 梯子在该状态下恰不能滑动, 因此摩擦力均取最大值, 即有方程组

$$\begin{cases} N_A - f_B = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9a})$$

$$\begin{cases} f_A + N_B - P = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9b})$$

$$\begin{cases} N_A na \cos \alpha + f_A na \sin \alpha + f_B ma \cos \alpha - N_B ma \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9c})$$

$$\begin{cases} f_A = \mu_1 N_A \end{cases} \quad (\text{A.9d})$$

$$\begin{cases} f_B = \mu_2 N_B \end{cases} \quad (\text{A.9e})$$

由式(A.9c)可得

$$\tan \alpha = \frac{nN_A + mf_B}{mN_B - nf_A}$$

由式(A.9a)、式(A.9d)和式(A.9e)可得

$$f_B = N_A, \quad N_B = \frac{1}{\mu_2} N_A, \quad f_A = \mu_1 N_A$$

由此可有

$$\tan \alpha = \frac{(m+n)\mu_2}{m - n\mu_1\mu_2}$$

再考虑到式(A.9b)即有

$$N_A = \frac{\mu_2 P}{1 + \mu_1\mu_2}, \quad N_B = \frac{P}{1 + \mu_1\mu_2}$$

题 A.2.7 (48 页 5.28) 重  $P$  的梯子  $AB$  靠在光滑的墙上, 并搁置在不光滑的水平地面上。梯子与地板的摩擦系数为  $\mu$ 。为使重  $p$  的人能沿梯子爬到顶端, 求梯子与地板的夹角  $\alpha$ 。

解 根据图A.27所示的受力分析, 可有

$$\begin{cases} N_A - f_B = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10a})$$

$$\begin{cases} N_B - p - P = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10b})$$

$$\begin{cases} N_A l \sin \alpha + f_B l \sin \alpha - N_B l \cos \alpha - pl \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10c})$$

$$\begin{cases} f_B \leq \mu N_B \end{cases} \quad (\text{A.10d})$$

由式(A.9a)和式(A.9b)可得

$$N_A = f_B, \quad N_B = p + P$$

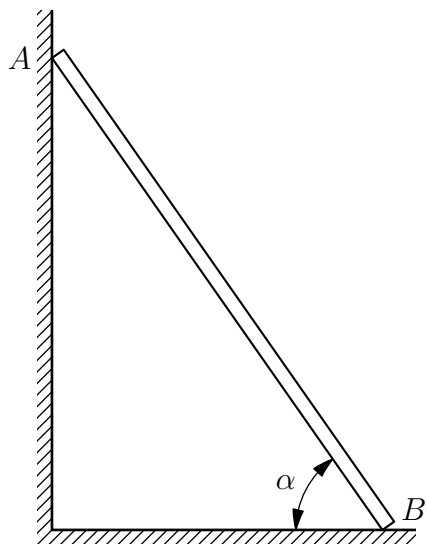


图 A.26: 题 A.2.7

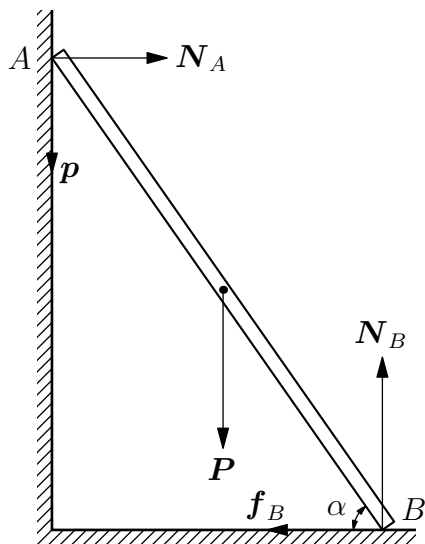


图 A.27: 题 A.2.7 受力分析

再根据式(A.9c)可得

$$f_B = \frac{1}{2}(2p + P) \cot \alpha$$

由此根据式(A.9d)可有

$$\frac{1}{2}(2p + P) \cot \alpha \leq \mu(p + P)$$

即有

$$\tan \alpha \geq \frac{2p + P}{2\mu(p + P)}$$

题 A.2.8 (49 页 5.32) 如图A.28所示, 匀质杆两端  $A$  和  $B$  可沿粗糙的圆周滑动。圆周在铅垂平面内, 半径是  $a$ 。杆到圆心的距离为  $b$ , 杆与圆周间的摩擦系数是  $\mu$ 。当杆平衡时, 求直线  $OC$  与圆周的铅垂直径的夹角  $\phi$ 。

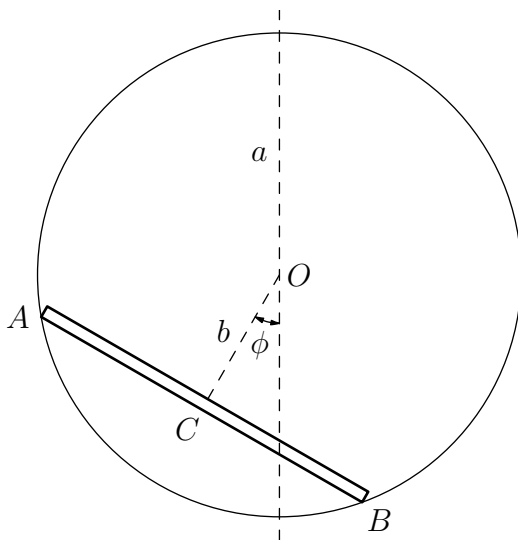


图 A.28: 题 A.2.8

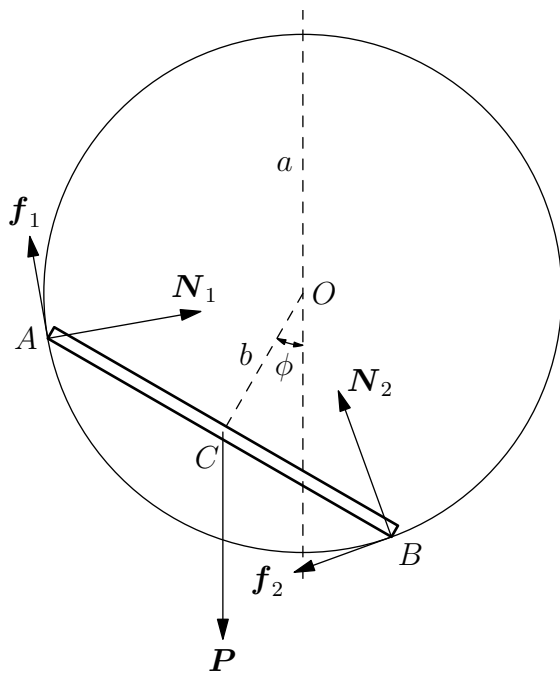


图 A.29: 题 A.2.8 受力分析

解 由图A.29所示的受力分析, 在其平衡时, 可列出方程组

$$\begin{cases} f_1 \sin(\theta + \phi) - f_2 \sin(\theta - \phi) + N_1 \cos(\theta + \phi) + N_2 \cos(\theta - \phi) = P & (\text{A.11a}) \\ f_1 \cos(\theta + \phi) - f_2 \cos(\theta - \phi) - N_1 \sin(\theta + \phi) + N_2 \sin(\theta - \phi) = 0 & (\text{A.11b}) \\ f_1 a + f_2 a = P b \sin \phi & (\text{A.11c}) \\ f_1 \leq \mu N_1 & (\text{A.11d}) \\ f_2 \leq \mu N_2 & (\text{A.11e}) \end{cases}$$

竟然解不出。

## A.2.2 空间力系

题 A.2.9 (57 页 6.21) 如图A.30所示, 在直角坐标轴上离原点  $O$  为  $l$  的  $A, B, C$  三点各自系有细绳  $AD = BD = CD = L$ , 这三根细绳的另一端结在点  $D$ , 其坐标为

$$x = y = z = \frac{1}{3} (l - \sqrt{3L^2 - 2l^2})$$

在点  $D$  挂有重物  $Q$ , 设  $\sqrt{\frac{2}{3}}l < L < l$ , 求三根细绳的张力  $T_A$ ,  $T_B$  和  $T_C$ 。

解 首先写出各点的坐标为

$$A = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}) \\ \frac{1}{3} (l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}) \\ \frac{1}{3} (l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}) \end{pmatrix}$$

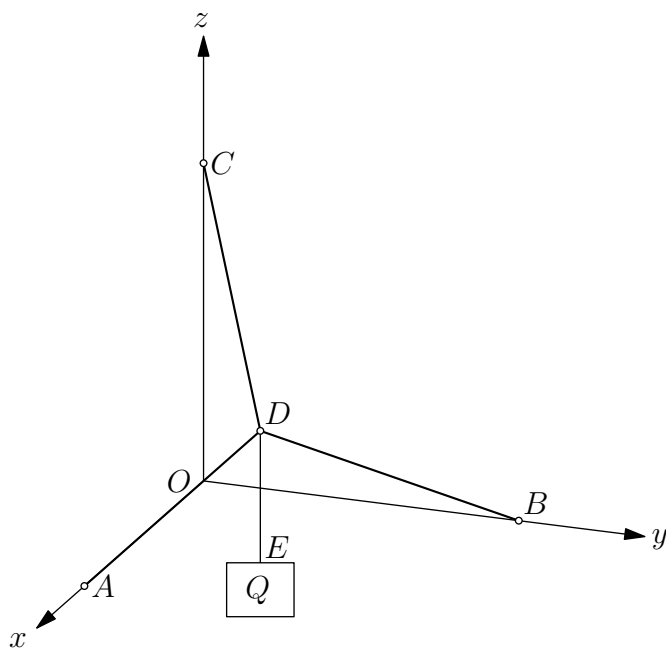


图 A.30: 题 A.2.9

据此求出四条线的方向矢量

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{l}_{DA} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \end{pmatrix}, & \boldsymbol{l}_{DB} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \end{pmatrix}, \\
 \boldsymbol{l}_{DC} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \end{pmatrix}, & \boldsymbol{l}_{DE} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

平衡方程为

$$\boldsymbol{T}_A + \boldsymbol{T}_B + \boldsymbol{T}_C + \boldsymbol{Q} = \mathbf{0}$$

即

$$T_A \boldsymbol{l}_{DA} + T_B \boldsymbol{l}_{DB} + T_C \boldsymbol{l}_{DC} + Q \boldsymbol{l}_{DE} = \mathbf{0}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & -\frac{1}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} & \frac{2}{3}\frac{l}{L} + \frac{1}{3}\sqrt{3-2\left(\frac{l}{L}\right)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix}$$

可解得

$$\begin{pmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}} LQ \\ \frac{l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}} LQ \\ \frac{l + 2\sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}} LQ \end{pmatrix}$$

### A.2.3 点的运动学

题 A.2.10 (86 页 11.4) 如图 A.31 所示的曲柄连杆机构, 曲柄  $OA$  以匀角速度  $\omega$  运动, 求此机构的连杆中点  $M$  和滑块  $B$  的速度随时间的变化规律。已知长度  $OA = OB = a$ 。

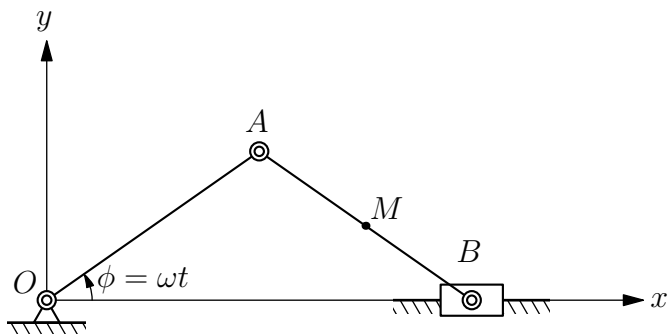


图 A.31: 题 A.2.10

解 根据几何关系, 可以求出  $A$  点、 $B$  点和  $M$  点的坐标

$$\begin{aligned} x_A &= a \cos \omega t, & y_A &= a \sin \omega t \\ x_B &= 2a \cos \omega t, & y_B &= 0 \\ x_M &= \frac{3}{2}a \cos \omega t, & y_M &= \frac{1}{2}a \sin \omega t \end{aligned}$$

由此可有  $B$  点和  $M$  点的速度

$$\begin{aligned} \dot{x}_B &= -2a\omega \sin \omega t, & \dot{y}_B &= 0 \\ \dot{x}_M &= -\frac{3}{2}a\omega \sin \omega t, & \dot{y}_M &= \frac{1}{2}a\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = 2a\omega \sin \omega t \\ v_M &= \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \frac{1}{2}a\omega \sqrt{8 \sin^2 \omega t + 1} \end{aligned}$$

题 A.2.11 (91 页 12.19) 如图 A.32 所示, 在半径为  $r$  的铁丝圈上套有一个小环  $M$ , 杆  $OA$  穿过小环并绕铁丝圈上的点  $O$  匀速转动, 角速度为  $\omega$ 。求小环  $M$  的速度  $v$  和加速度  $a$ 。

解 以  $O$  为原点建立坐标系, 可得  $M$  点的坐标

$$\begin{cases} x_M = r + r \cos(\pi - 2\phi) = r - r \cos 2\phi = r - r \cos 2\omega t \\ y_M = r \sin(\pi - 2\phi) = r \sin 2\phi = r \sin 2\omega t \end{cases}$$

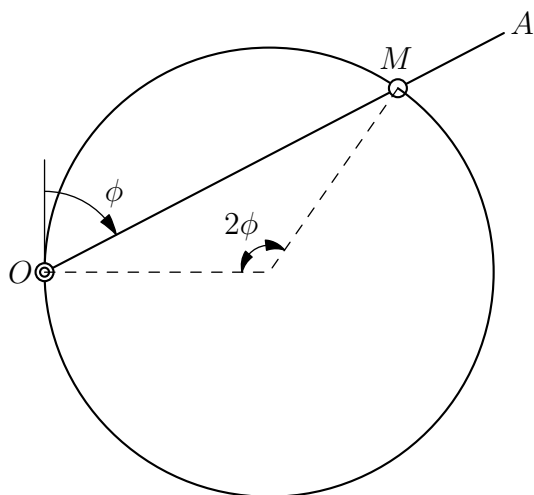


图 A.32: 题 A.2.11

因此可有

$$\begin{cases} \dot{x}_M = 2r\omega \sin 2\omega t \\ \dot{y}_M = 2r\omega \cos 2\omega t \end{cases}, \quad \begin{cases} \ddot{x}_M = 4r\omega^2 \cos 2\phi \\ \ddot{y}_M = -4r\omega^2 \sin 2\phi \end{cases}$$

因此, 可有

$$v = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = 2r\omega, \quad a = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = 4r\omega^2$$

实际上, 小环  $M$  在以  $2\omega$  的角速度做圆周运动。

题 A.2.12 (91 页 12.31) 如图 A.33 所示, 杆  $AB$  的一段  $A$  以匀速  $v_A$  沿直线导轨  $CD$  移动, 杆  $AB$  始终穿过一个与导轨  $CD$  相距为  $a$  的可转动套筒  $O$ 。杆  $AB$  上点  $M$  至滑块  $A$  的距离是  $b$ 。取  $O$  为极点, 试用极坐标  $r, \phi$  表示点  $M$  的速度和加速度。

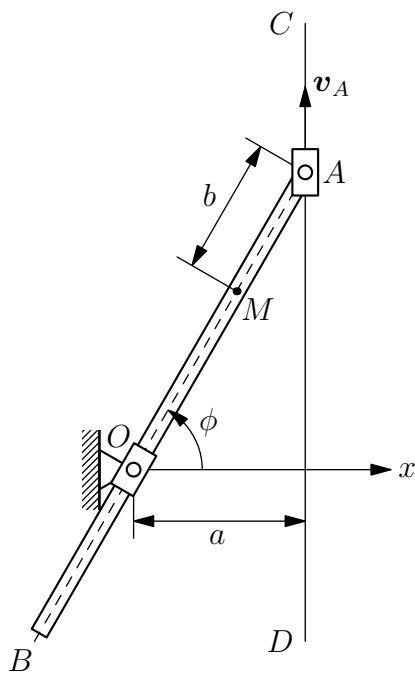


图 A.33: 题 A.2.12

解 首先计算  $A$  点的坐标为

$$x_A = a, \quad y_A = a \tan \phi$$

由此有

$$v_A = \dot{y}_A = a \sec^2 \phi \dot{\phi}$$

所以

$$\dot{\phi} = \frac{v_A}{a} \cos^2 \phi$$

点  $M$  的极坐标  $r = a \sec \phi - b$ 。因此, 由式(1.36)可得极坐标下的速度分量

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = a \dot{\phi} \sec \phi \tan \phi = v_A \sin \phi \\ v_\phi = r \dot{\phi} = \frac{v_A r}{a} \cos^2 \phi \end{cases}$$

因此,  $M$  点的速度为

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\phi^2} = \frac{v_A}{a} \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + r^2 \cos^4 \phi}$$

由式(1.37)可得极坐标下的加速度分量

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 = v_A \dot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 = \frac{b v_A^2}{a^2} \cos^4 \phi \\ a_\phi = r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi} = \frac{2 b v_A^2}{a^2} \sin \phi \cos^3 \phi \end{cases}$$

因此,  $M$  点的加速度为

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\phi^2} = \frac{b v_A^2}{a^2} \cos^3 \phi \sqrt{\cos^2 \phi + 4 \sin^2 \phi} = \frac{b v_A^2}{a^2} \cos^3 \phi \sqrt{1 + 3 \sin^2 \phi}$$

## A.2.4 刚体的运动学

题 A.2.13 (100 页 14.8) 如图 A.34 所示, 半长轴和半短轴分别为  $a$  和  $b$  的椭圆齿轮副中, 齿轮  $I$  的角速度  $\omega_1$  为常数, 求此椭圆齿轮副的传动规律。已知两齿轮轴间的距离是  $O_1 O_2 = 2a$ ,  $\phi$  是两转动轴的联机与椭圆齿轮  $I$  的长轴之间的夹角。两转动轴各自通过椭圆的一个焦点。

解 以  $O_1$  为极点,  $O_1 M_1$  方向为极径建立极坐标系, 则在此坐标系中, 椭圆  $I$  的方程可以表示为

$$r_1 = \frac{p}{1 - e \cos \xi}$$

其中  $p = \frac{a^2 - c^2}{a}$  为半通径,  $e = \frac{c}{a}$  为离心率,  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  为椭圆的焦距,  $\xi$  为极角。则椭圆的弧长可以表示为

$$s = \int_0^\phi \sqrt{\left(\frac{dr_1}{d\xi}\right)^2 + r_1^2} d\xi = \int_0^\phi p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \xi + e^2}}{(1 - e \cos \xi)^2} d\xi$$

由此可得  $M$  点的速度为

$$v_M = \dot{s} = p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \phi + e^2}}{(1 - e \cos \phi)^2} \dot{\phi} = p \frac{\sqrt{1 - 2e \cos \phi + e^2}}{(1 - e \cos \phi)^2} \omega_1$$

同样地, 以  $O_2$  为极点,  $O_2 N_2$  方向为极径建立极坐标系, 则在此坐标系中, 椭圆  $II$  的方程可以表示为

$$r_2 = \frac{p}{1 - e \cos \xi}$$

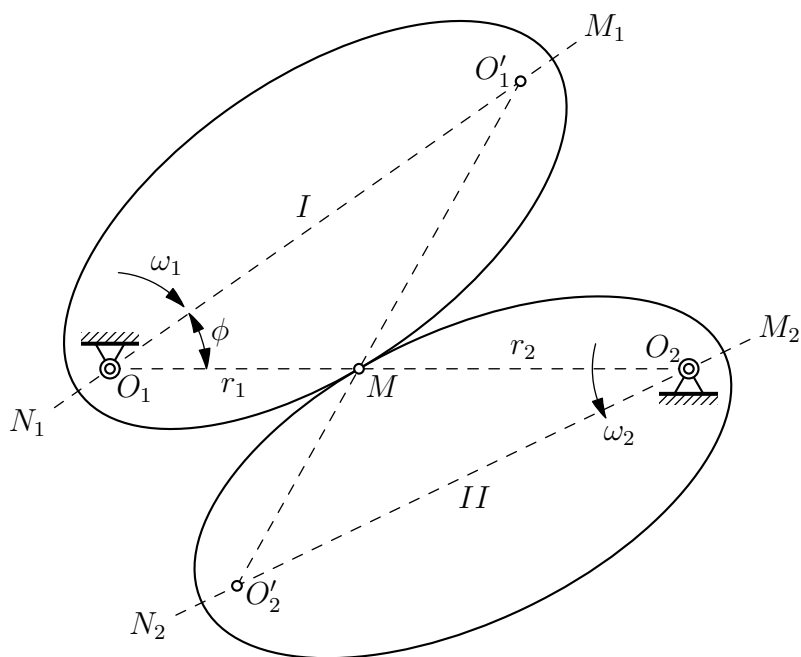


图 A.34: 题 A.2.13

记  $O_2N_2$  与  $O_1O_2$  的夹角为  $\theta$ , 则在此坐标系中可得椭圆的弧长可以表示为

$$s = \int_{-\theta}^0 p \frac{\sqrt{1-2e\cos\xi+e^2}}{(1-e\cos\xi)^2} d\xi = - \int_0^{-\theta} p \frac{\sqrt{1-2e\cos\xi+e^2}}{(1-e\cos\xi)^2} d\xi$$

由此可得  $M$  点的速度为

$$v_M = \dot{s} = -p \frac{\sqrt{1-2e\cos\theta+e^2}}{(1-e\cos\theta)^2} (-\dot{\theta}) = p \frac{\sqrt{1-2e\cos\theta+e^2}}{(1-e\cos\theta)^2} \omega_2$$

由此可得椭圆齿轮副之间的传动规律为

$$p \frac{\sqrt{1-2e\cos\phi+e^2}}{(1-e\cos\phi)^2} \omega_1 = p \frac{\sqrt{1-2e\cos\theta+e^2}}{(1-e\cos\theta)^2} \omega_2$$

即

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{1-2e\cos\phi+e^2}{1-2e\cos\theta+e^2}} \left( \frac{1-e\cos\theta}{1-e\cos\phi} \right)^2 = \sqrt{\frac{a^2-2ac\cos\phi+c^2}{a^2-2ac\cos\theta+c^2}} \left( \frac{a-c\cos\theta}{a-c\cos\phi} \right)^2 \quad (\text{A.12})$$

角度  $\theta$  和  $\phi$  的关系由  $O_1O_2$  的长度来确定, 即

$$2a = r_1 + r_2 = \frac{p}{1-e\cos\phi} + \frac{p}{1-e\cos\theta}$$

所以有

$$\cos\theta = \frac{2ac - (a^2 + c^2) \cos\phi}{a^2 - 2ac\cos\phi + c^2} \quad (\text{A.13})$$

将式(A.13)代入传动规律(A.12)中, 可得此椭圆齿轮副的传动关系为

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac\cos\phi + c^2}$$

题 A.2.14 (102 页 14.13) 如图A.35所示, 偏心轮的直径  $d = 2r$ , 转轴  $O$  到轮心  $C$  的距离  $OC = a$ 。轴  $Ox$  沿着推杆的方向, 参考原点在转轴  $O$  上。求推杆的运动规律。



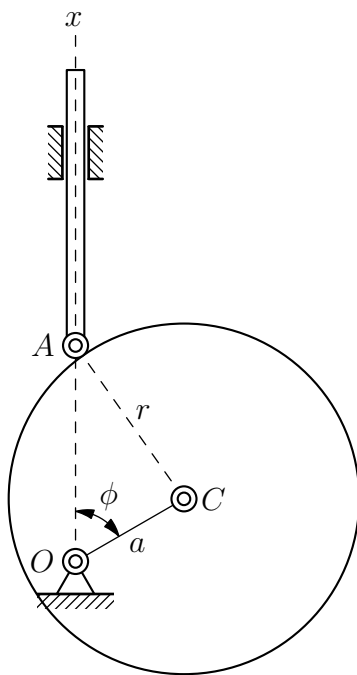


图 A.35: 题 A.2.14

解 推杆的坐标可用  $A$  点的坐标  $x$  表示, 记  $\angle OAC = \theta$ , 则在  $\triangle OAC$  中根据正弦定理可有

$$\frac{a}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin \phi}$$

即有

$$\sin \theta = \frac{a}{r} \sin \phi, \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \phi}$$

所以有

$$x = a \cos \phi + r \cos \theta = a \cos \phi + r \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \phi} = a \cos \phi + \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \phi}$$

题 A.2.15 (106 页 15.6) 如图 A.36 所示, 沿直线导轨滑动的套筒  $A$  和  $B$  与长为  $l$  的连杆  $AB$  连接, 套筒  $A$  以匀速  $v_A$  运动。设套筒  $A$  是从  $O$  点开始运动的, 以  $A$  为基点, 写出杆  $AB$  的运动方程。其中  $\angle BOA = \pi - \alpha$ 。

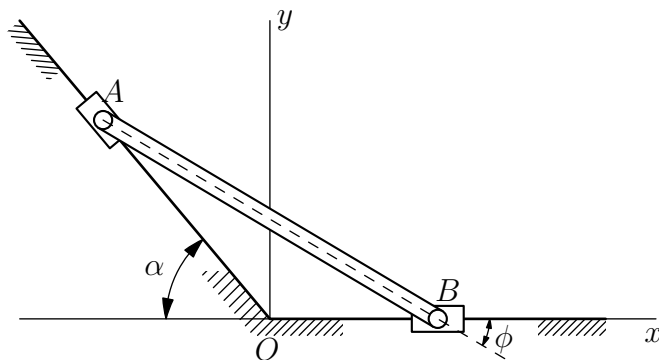


图 A.36: 题 A.2.15

解 点  $A$  的坐标为

$$x_A = -v_A t \cos \alpha, \quad y_A = v_A t \sin \alpha$$

在  $\triangle OAB$  中应用正弦定理可得

$$\frac{l}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{v_A t}{\sin \phi}$$

由此可得

$$\phi = \arcsin \left( \frac{v_A t}{l} \sin \alpha \right)$$

## A.2.5 质点动力学

题 A.2.16 (209 页 31.28) 如图 A.37 所示, 质点  $A$  在重力作用下沿粗糙的螺旋面运动。螺旋面的轴  $Oz$  是铅垂的, 方程为  $z = a\phi + f(r)$ 。螺旋面与质点的摩擦系数为  $k$ , 设  $a$  为常数。在什么条件下, 质点在运动时, 保持到轴  $Oz$  的距离  $AB = r_0$  不变, 即质点将沿螺旋线运动? 并求质点的速度。

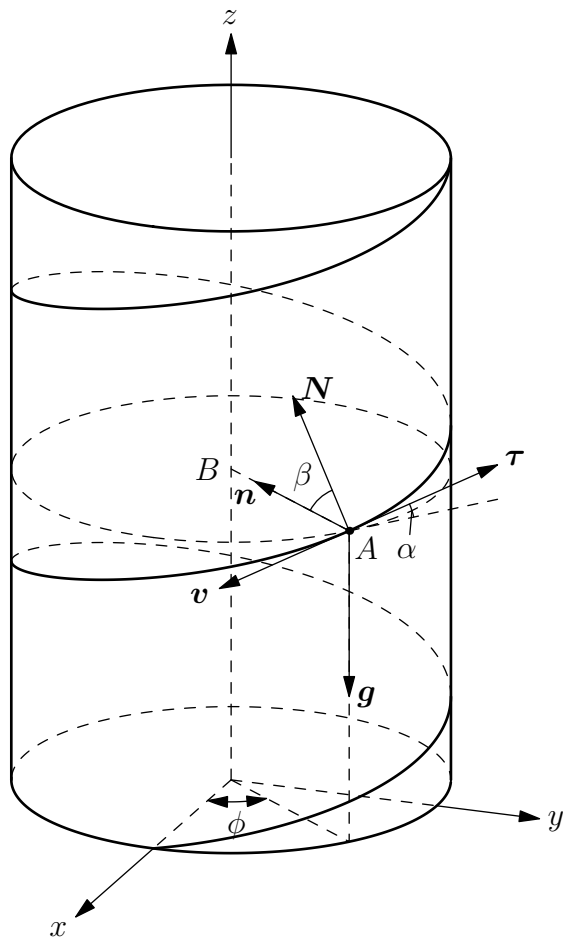


图 A.37: 题 A.2.16

解 质点  $A$  运动的螺旋线的柱坐标方程为

$$\begin{cases} r = r_0 \\ z = a\phi + f(r) \end{cases}$$

用直角坐标下的矢量可表示为

$$\mathbf{r}(\phi) = \begin{pmatrix} r_0 \cos \phi \\ r_0 \sin \phi \\ a\phi + f(r_0) \end{pmatrix}$$

因此，螺旋线的单位切矢量为

$$\boldsymbol{\tau}(\phi) = \frac{\mathbf{r}'(\phi)}{|\mathbf{r}'(\phi)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r_0^2}} \begin{pmatrix} -r_0 \sin \phi \\ r_0 \cos \phi \\ a \end{pmatrix}$$

主法线单位矢量为

$$\mathbf{n}(\phi) = \frac{\mathbf{r}''(\phi)}{|\mathbf{r}''(\phi)|} = \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

副法线单位矢量为

$$\mathbf{b}(\phi) = \boldsymbol{\tau}(\phi) \times \mathbf{n}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r_0^2}} \begin{pmatrix} a \sin \phi \\ -a \cos \phi \\ r_0 \end{pmatrix}$$

曲率半径为

$$\rho(\phi) = \frac{|\mathbf{r}'(\phi)|^3}{|\mathbf{r}'(\phi) \times \mathbf{r}''(\phi)|} = \frac{a^2 + r_0^2}{r_0}$$

螺旋面用矢量可以表示为

$$\boldsymbol{\Sigma}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ a\phi + f(r) \end{pmatrix}$$

由此可得螺旋面的法线单位矢量

$$\mathbf{n}_\Sigma = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \phi} \right|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + [(f'(r))^2 + 1]r^2}} \begin{pmatrix} a \sin \phi - rf'(r) \cos \phi \\ -a \cos \phi - rf'(r) \sin \phi \\ r \end{pmatrix}$$

直接计算可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\Sigma \cdot \boldsymbol{\tau} &= 0, \quad \mathbf{n}_\Sigma \cdot \mathbf{n} = \frac{r_0 f'(r_0)}{\sqrt{a^2 + [(f'(r_0))^2 + 1]r_0^2}} = \cos \beta \\ \mathbf{n}_\Sigma \cdot \mathbf{b} &= \frac{\sqrt{a^2 + r_0^2}}{\sqrt{a^2 + [(f'(r_0))^2 + 1]r_0^2}} = \sin \beta \end{aligned}$$

在  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  的方向上分解运动方程，记  $\tan \alpha = \frac{a}{r_0}$ ，可以得到

$$\begin{cases} kN - mg \sin \alpha = ma_\tau & (\text{A.14a}) \\ N \cos \beta = m \frac{v^2}{\rho} & (\text{A.14b}) \\ N \sin \beta - mg \cos \alpha = 0 & (\text{A.14c}) \end{cases}$$

由式(A.14c)可有

$$N = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} mg$$

是常数值, 因此由(A.14b), 速度的大小  $v$  也是常数值, 故  $a_\tau = 0$ 。由此可得速度的大小为

$$v = \sqrt{\frac{\cos \alpha}{\tan \beta} \rho g} = \sqrt{gr_0 f'(r_0)}$$

由式(A.14a)可得质点沿螺旋线运动的条件为

$$\tan \alpha = \frac{k}{\sin \beta} = k \sqrt{\frac{a^2 + [(f'(r_0))^2 + 1]r_0^2}{a^2 + r_0^2}} = k \sqrt{1 + (f'(r_0))^2 \cos^2 \alpha}$$

题 A.2.17 (215 页 32.31) 如图A.38所示, 质量为  $m$  的物体  $A$  可在水平直线上移动, 系有劲度系数为  $k$  的弹簧, 弹簧的另一端固定在点  $B$ 。当  $\alpha = \alpha_0$  时, 弹簧没有变形。求物体微振动频率和周期。

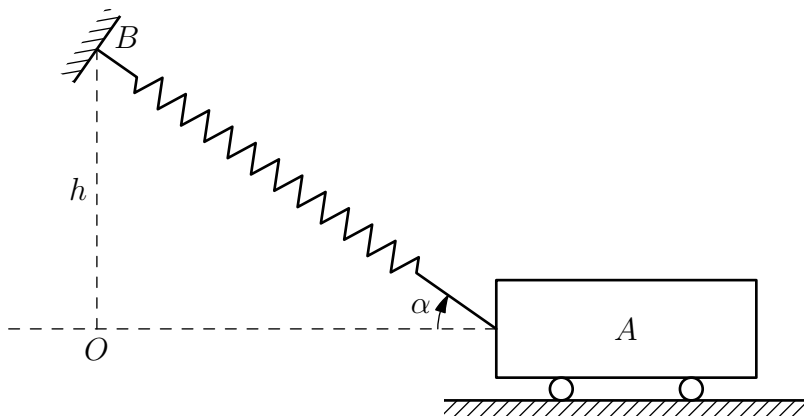


图 A.38: 题 A.2.17

解 系统的广义坐标为  $\alpha$ , 记  $B$  点的坐标为  $(0, h)$ , 则小车的坐标可以表示为

$$x_A = h \cot \alpha$$

由此, 系统的 Lagrange 函数可以表示为

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_A^2 - \frac{1}{2} k \left( \frac{h}{\sin \alpha} - \frac{h}{\sin \alpha_0} \right)^2 = \frac{mh^2}{2 \sin^4 \alpha} \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} k \left( \frac{h}{\sin \alpha} - \frac{h}{\sin \alpha_0} \right)^2$$

系统的平衡位置为  $\alpha = \alpha_0$ , 将 Lagrange 函数在该点附近展开至两阶, 可有

$$L = \frac{mh^2}{2 \sin^4 \alpha_0} \dot{\alpha}^2 - \frac{kh^2 \cos^2 \alpha_0}{2 \sin^4 \alpha_0} (\alpha - \alpha_0)^2$$

由此, 系统的运动方程为

$$\ddot{\alpha} + \frac{k \cos^2 \alpha_0}{m} (\alpha - \alpha_0) = 0$$

因此, 系统微振动的角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{k \cos^2 \alpha_0}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k \cos^2 \alpha_0}}$$

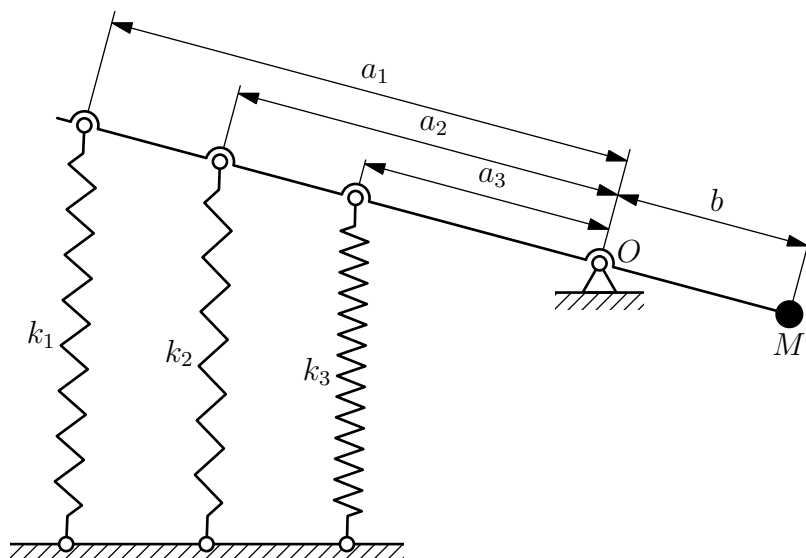


图 A.39: 题 A.2.18

题 A.2.18 (216 页 32.34) 如图 A.39 所示, 质量为  $m$  的重物  $M$  固定在杆上。杆在  $O$  点用铰链固连, 并用三根垂直弹簧与基础相连, 三个弹簧的劲度系数分别是  $k_1, k_2, k_3$ , 三弹簧在杆上的联结点与铰链的距离分别是  $a_1, a_2, a_3$ , 重物在杆上的联结点与铰链的距离是  $b$ 。杆平衡时沿水平方向。求重物微振动的频率。

解 系统的广义坐标为杆与水平方向的夹角  $\theta$ , 在此广义坐标下, 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(b\dot{\theta})^2 - \left( \frac{1}{2}k_1(a_1 \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(a_2 \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}k_3(a_3 \sin \theta)^2 \right)$$

保留到二阶小量的情形下, 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + k_3a_3^2)\theta^2$$

此时系统的运动方程为

$$\ddot{\theta} + \frac{k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + k_3a_3^2}{b^2}\theta = 0$$

因此重物微振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1a_1^2 + k_2a_2^2 + k_3a_3^2}{mb^2}}$$

## 附录 B Legendre 椭圆积分与 Jacobi 椭圆函数

### B.1 Legendre 椭圆积分

定义函数<sup>①</sup>

$$F(k, x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\arcsin x} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \quad (\text{B.1})$$

为第一类椭圆积分，其中参数  $k$  称为椭圆积分的模。当  $x = 1$  时，记

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \quad (\text{B.2})$$

称为第一类完全椭圆积分。

第一类椭圆积分可以用级数表示为

$$\begin{aligned} F(k, x) &= \int_0^{\arcsin x} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \phi \right] d\phi \\ &= \arcsin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\arcsin x} \sin^{2n} \phi d\phi \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

由此可得第一类完全椭圆积分的级数表示为

$$\begin{aligned} K(k) &= \arcsin 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \phi d\phi \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

定义函数

$$E(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\arcsin x} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi} d\phi \quad (\text{B.5})$$

为第二类椭圆积分。当  $x = 1$  时，记

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi} d\phi \quad (\text{B.6})$$

称为第二类完全椭圆积分。

第二类椭圆积分可以用级数表示为

$$\begin{aligned} E(k, x) &= \int_0^{\arcsin x} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \phi \right] d\phi \\ &= \arcsin x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\arcsin x} \sin^{2n} \phi d\phi \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

<sup>①</sup> 本节提到的三类椭圆积分在不同的文献上可能会有不同的形式。

由此可得第二类完全椭圆积分的级数表示为

$$\begin{aligned} E(k) &= \arcsin 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \phi d\phi \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

根据第一类和第二类椭圆积分的定义式(B.1)和(B.5)可得第一类和第二类椭圆积分对  $k$  的导数:

$$\frac{\partial F}{\partial k}(k, x) = \frac{1}{k'^2} \left( \frac{E(k, x) - k'^2 F(k, x)}{k} - \frac{kx\sqrt{1-x^2}}{1-k^2x^2} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial E}{\partial k}(k, x) = \frac{E(k, x) - F(k, x)}{k} \quad (\text{B.10})$$

其中  $k'^2 = 1 - k^2$ ,  $k'$  称为补模。

如果在等式(B.9)和(B.10)中令  $x = 1$  可得两类完全椭圆积分对  $k$  的导数:

$$\frac{\partial K}{\partial k}(k) = \frac{E(k) - k'^2 K(k)}{kk'^2} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial E}{\partial k}(k) = \frac{E(k) - K(k)}{k} \quad (\text{B.12})$$

定义函数

$$\begin{aligned} \Pi(h, k, x) &= \int_0^x \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\ &= \int_0^{\arcsin x} \frac{d\phi}{(1+h\sin^2 \phi)\sqrt{1-k^2\sin^2 \phi}} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

为第三类椭圆积分。当  $x = 1$  时, 记

$$\Pi(h, k) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1+h\sin^2 \phi)\sqrt{1-k^2\sin^2 \phi}} \quad (\text{B.14})$$

称为第三类完全椭圆积分。

## B.2 Jacobi 椭圆函数

第一类椭圆积分(B.1)

$$x = \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

的反函数记作

$$s = \operatorname{sn} x \quad (\text{B.15})$$

称为椭圆正弦函数。

令

$$\sin \phi = \operatorname{sn} x \quad (\text{B.16})$$

则称  $\phi$  为椭圆振幅函数, 记作  $\phi = \operatorname{am} x$ 。

定义

$$\operatorname{cn} x = \cos \phi = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 x} \quad (\text{B.17})$$

称为椭圆余弦函数。定义

$$\operatorname{tn} x = \tan \phi = \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} = \frac{\operatorname{sn} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 x}} \quad (\text{B.18})$$

称为椭圆正切函数。定义

$$\operatorname{dn} x = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x} \quad (\text{B.19})$$

称为椭圆幅度函数。

其中函数  $\operatorname{sn} x$ ,  $\operatorname{cn} x$  和  $\operatorname{tn} x$  是周期为  $4K(k)$  的周期函数, 而  $\operatorname{dn} x$  是周期为  $2K(k)$  的周期函数。它们的图像如图B.1所示。

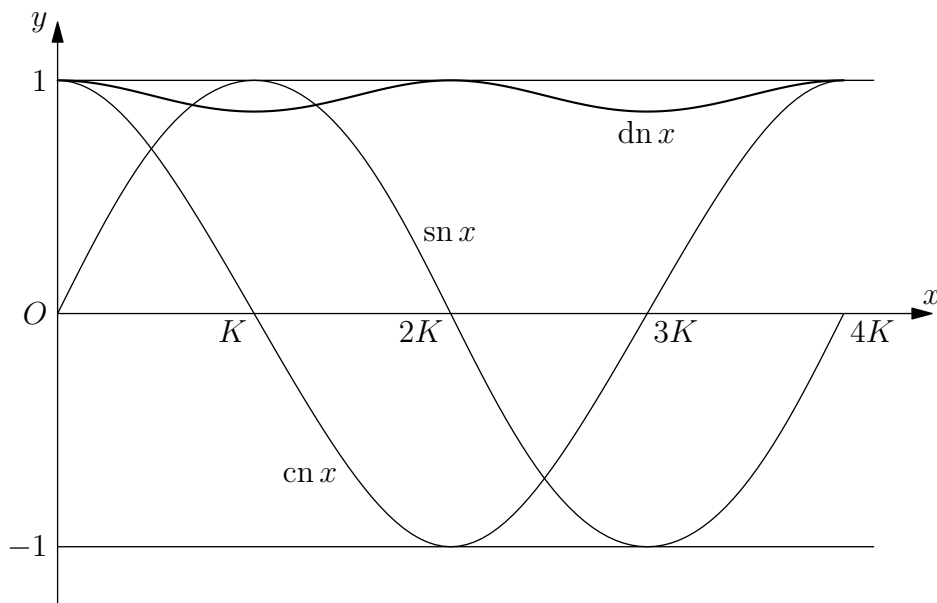


图 B.1: 椭圆函数的图像 ( $k = \frac{1}{2}$ )

当  $k \rightarrow 0$  时, 根据式(B.1)可得

$$F(0, s) = \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin s$$

由此, 当  $k \rightarrow 0$  时, 有

$$\operatorname{sn} x \rightarrow \sin x \quad (\text{B.20})$$

根据其余椭圆函数的定义, 当  $k \rightarrow 0$  时, 有

$$\operatorname{cn} x \rightarrow \cos x, \quad \operatorname{dn} x \rightarrow 1 \quad (\text{B.21})$$

Jacobi 椭圆函数满足如下很容易验证的恒等式:

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1 \quad (\text{B.22})$$

$$\operatorname{dn}^2 x + k^2 \operatorname{sn}^2 x = 1 \quad (\text{B.23})$$

以及如下的导数关系

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sn} x = \operatorname{cn} x \cdot \operatorname{dn} x \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cn} x = -\operatorname{sn} x \cdot \operatorname{dn} x \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{dn} x = -k^2 \operatorname{sn} x \cdot \operatorname{cn} x \quad (\text{B.26})$$



## 插图目录

图 1.1 直角坐标系 . . . . .	2	图 2.19 空间转动 . . . . .	66
图 1.2 球坐标系 . . . . .	3	图 3.1 两体问题 . . . . .	70
图 1.3 柱坐标系 . . . . .	4	图 3.2 非闭合轨道 . . . . .	74
图 1.4 动点的轨迹 . . . . .	8	图 3.3 $0 < n < 2$ 的情形 . . . . .	76
图 1.5 切线、主法线和副法线 . . . . .	8	图 3.4 $n > 2$ 的情形 . . . . .	76
图 1.6 例 1.3 . . . . .	8	图 3.5 $n = 2$ 的情形 ( $\alpha > \frac{l^2}{2\mu}$ ) . . . . .	76
图 1.7 伽利略变换 . . . . .	10	图 3.6 $n = 2$ 的情形 ( $\alpha < \frac{l^2}{2\mu}$ ) . . . . .	76
图 1.8 例 1.4 . . . . .	18	图 3.7 距离反比势场势能曲线图 . . . . .	77
图 1.9 不同阻尼系数下的轨道曲线图 . . . . .	20	图 3.8 各种情形下轨道的形状 . . . . .	78
图 1.10 例 1.6 . . . . .	21	图 3.9 圆心角的几何意义 . . . . .	80
图 1.11 求解示意 . . . . .	22	图 3.10 Laplace-Runge-Lenz 矢量 . . . . .	82
图 1.12 例 1.7 . . . . .	23	图 3.11 质心坐标系中的散射 . . . . .	84
图 1.13 例 1.8 . . . . .	24	图 3.12 静止靶粒子情形下的速度 . . . . .	84
图 1.14 例 1.10 . . . . .	28	图 3.13 弹性散射的几何参数 . . . . .	85
图 2.1 单摆的几何约束 . . . . .	30	图 3.14 散射截面 . . . . .	86
图 2.2 作曲线运动的纯滚动直立圆盘 . . . . .	30	图 3.15 例 3.3 . . . . .	88
图 2.3 约束在表面上的质点 . . . . .	32	图 3.16 阶跃中心势散射 . . . . .	89
图 2.4 单摆系统和单摆的位形空间 . . . . .	35	图 4.1 单摆 . . . . .	90
图 2.5 双摆系统和双摆的位形空间 . . . . .	36	图 4.2 单摆的势能曲线 . . . . .	90
图 2.6 质点沿光滑曲面运动 . . . . .	38	图 4.3 弹性耦合摆 . . . . .	91
图 2.7 定点运动的刚体 . . . . .	38	图 4.4 双摆 . . . . .	96
图 2.8 两个刚体用铰链连接于一点 . . . . .	39	图 4.5 $\beta < \omega_0$ . . . . .	99
图 2.9 两个刚体以光滑表面相切 . . . . .	39	图 4.6 $\beta > \omega_0$ . . . . .	99
图 2.10 两个刚体以粗糙表面相切 . . . . .	39	图 4.7 $\kappa$ 随阻尼因子 $\gamma$ 和频率比值 $\frac{\omega_p}{\omega_0}$ 的关系 . . . . .	100
图 2.11 两个质点以柔软而不可伸长的绳子相联结 . . . . .	39	图 4.8 相位差 $\delta$ 随频率比值 $\frac{\omega_p}{\omega_0}$ 的关系 . . . . .	101
图 2.12 例 2.4 . . . . .	41	图 5.1 刚体的运动 . . . . .	103
图 2.13 Gauss 原理的物理意义 . . . . .	43	图 5.2 坐标系的定点旋转 . . . . .	104
图 2.14 例 2.6 . . . . .	45	图 5.3 刚体的运动 . . . . .	107
图 2.15 例 2.9 . . . . .	50	图 5.4 刚体的定轴转动 . . . . .	109
图 2.16 例 2.13 . . . . .	59	图 5.5 向心加速度和切向加速度 . . . . .	109
图 2.17 例 2.14 . . . . .	62		
图 2.18 势能曲线 . . . . .	63		

图 5.6 定轴转动的 Rodrigues 公式	110	图 6.9 例 6.9	170
图 5.7 刚体定点转动的 Euler 角	111	图 6.10 例 6.11	172
图 5.8 例 5.2	113	图 6.11 例 6.13	174
图 5.9 例 5.3	119	图 6.12 例 6.14	176
图 5.10 例 5.3: 立方体对顶点的惯 量主轴	121	图 6.13 例 6.15	177
图 5.11 惯量椭球和主轴系(红色坐 标系为主轴系)	122	图 7.1 惯性参考系与非惯性参考系	178
图 5.12 角速度的方向与角动量的 方向	122	图 7.2 例 7.1	182
图 5.13 主惯量的允许取值区域	124	图 7.3 例 7.2	183
图 5.14 刚体的定轴转动与约束反力	127	图 7.4 惯性离心力对重力的影响	186
图 5.15 例 5.4	128	图 7.5 $mg$ 、 $F$ 和 $F_t$ 之间的关系	186
图 5.16 Euler 情形下动力学对称刚 体的角速度矢量	131	图 7.6 地球表面的坐标系	187
图 5.17 Euler 情形下动力学对称刚 体的角动量矢量	131	图 7.7 Foucault 摆	190
图 5.18 $I_1 = I_2 > I_3, \theta > \alpha$	132	图 7.8 Foucault 摆振动面的旋转	192
图 5.19 $I_1 = I_2 = I_3, \theta = \alpha$	132	图 8.1 Legendre 变换的几何意义	195
图 5.20 $I_1 = I_2 < I_3, \theta < \alpha$	132	图 8.2 曲线作为切线的包络线	195
图 5.21 不同情况下角动量矢量末 端的轨迹	134	图 8.3 势能曲线与对应的相轨道	201
图 5.22 Poincot 几何图像	140	图 8.4 摆的势函数和相轨道	202
图 5.23 重刚体的定点运动	141	图 8.5 函数 $G(u)$ 的图像	207
图 5.24 Lagrange 陀螺的运动	145	图 8.6 参数 $\alpha^2, \beta$ 的允许区域	208
图 5.25 函数 $G(u)$ 的图像	147	图 8.7 球面摆的摆动	208
图 5.26 $u_1 < \frac{\beta}{b\Omega} < u_2$	147	图 8.8 球面摆摆动轨迹在 $Oxy$ 平 面的投影	208
图 5.27 $u_1 < u_2 < \frac{\beta}{b\Omega}$	147	图 8.9 例 8.5	211
图 5.28 $u_1 < u_2 = \frac{\beta}{b\Omega}$	147	图 9.1 最速降线	225
图 5.29 Lagrange 情形下的等效势	150	图 9.2 球面短程线示意图	226
图 5.30 例 5.6	151	图 9.3 正路和旁路	230
图 5.31 例 5.6 势能曲线	152	图 9.4 Hamilton 作用量的极值性质	233
图 5.32 曲面之间的接触	153	图 9.5 共轭动力学焦点与 Hamil- ton 作用量的极值	235
图 6.1 例 6.1	157	图 10.1 抛物线坐标系的坐标面	262
图 6.2 例 6.2	158	图 10.2 二维椭圆坐标系	263
图 6.3 例 6.3	159	图 10.3 行星的轨道在天球上的投影	268
图 6.4 定轴转动刚体的撞击	161	图 10.4 作用波面示意图	282
图 6.5 例 6.5	162	图 10.5 均匀介质中单色波的波面 和光线	283
图 6.6 刚体碰撞	163	图 10.6 一维弦的横振动	285
图 6.7 质点与固定曲面的碰撞	164	图 A.1 题 A.1.1	291
图 6.8 例 6.8	166	图 A.2 题 A.1.2	293
		图 A.3 题 A.1.4	295

图 A.4 题 A.1.6 . . . . .	296	图 A.23 题 A.2.5 的矢量三角形 . . .	319
图 A.5 题 A.1.8 . . . . .	298	图 A.24 题 A.2.6 . . . . .	320
图 A.6 题 A.1.9 . . . . .	299	图 A.25 题 A.2.6 受力分析 . . . . .	320
图 A.7 题 A.1.15 . . . . .	304	图 A.26 题 A.2.7 . . . . .	321
图 A.8 题 A.1.16 . . . . .	305	图 A.27 题 A.2.7 受力分析 . . . . .	321
图 A.9 $m_2$ 的速度合成图 . . . . .	305	图 A.28 题 A.2.8 . . . . .	321
图 A.10 题 A.1.19 . . . . .	308	图 A.29 题 A.2.8 受力分析 . . . . .	322
图 A.11 题 A.1.20 . . . . .	310	图 A.30 题 A.2.9 . . . . .	323
图 A.12 题 A.2.1 . . . . .	314	图 A.31 题 A.2.10 . . . . .	324
图 A.13 题 A.2.1 受力分析 1 . . . . .	314	图 A.32 题 A.2.11 . . . . .	325
图 A.14 题 A.2.1 受力分析 2 . . . . .	314	图 A.33 题 A.2.12 . . . . .	325
图 A.15 题 A.2.2 . . . . .	315	图 A.34 题 A.2.13 . . . . .	327
图 A.16 题 A.2.2 受力分析 1 . . . . .	315	图 A.35 题 A.2.14 . . . . .	328
图 A.17 题 A.2.2 受力分析 2 . . . . .	315	图 A.36 题 A.2.15 . . . . .	328
图 A.18 题 A.2.3 . . . . .	316	图 A.37 题 A.2.16 . . . . .	329
图 A.19 题 A.2.3 受力分析 . . . . .	317	图 A.38 题 A.2.17 . . . . .	331
图 A.20 题 A.2.4 . . . . .	318	图 A.39 题 A.2.18 . . . . .	332
图 A.21 题 A.2.4 受力分析 . . . . .	318		
图 A.22 题 A.2.5 . . . . .	319	图 B.1 椭圆函数的图像 ( $k = \frac{1}{2}$ ) . . . . .	335

## 参考文献

- [1] 金尚年, 马永利. 理论力学 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [2] 郎道, 栗弗席兹. 力学 (第五版). 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [3] 马尔契夫. 理论力学 (第三版). 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [4] 密歇尔斯基. 理论力学习题集 (第 50 版). 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [5] 郎道, 栗弗席兹. 场论 (第八版). 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [6] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程 (第八版). 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [7] 周培源. 理论力学. 北京: 科学出版社, 2015.