

答: (1) $E_1 = -\frac{e^2}{2a}, E_2 = -\frac{e^2}{8a}$, 几率: $\frac{1}{16}, \frac{15}{16}, \bar{E} = -\frac{19e^2}{128a}, L^2 = 0, 2\hbar^2$, 几率: $\frac{1}{16}, \frac{15}{16}, \bar{L}^2 = \frac{15\hbar^2}{8}, L_z = \hbar, 0, -\hbar$, 几率: $\frac{2}{16}, \frac{5}{16}, \frac{9}{16}, \bar{L}_z = -\frac{7\hbar}{16}$

(2) $\psi(r, s_z, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{-iE_1 t/\hbar}R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \varphi) + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-iE_2 t/\hbar}R_{21}(r)Y_{11}(\theta, \varphi) \\ \frac{2}{4}e^{-iE_2 t/\hbar}R_{21}(r)Y_{10}(\theta, \varphi) + \frac{3}{4}e^{-iE_2 t/\hbar}R_{21}(r)Y_{1-1}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$

6. 电子在均匀磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{i}$ 中运动, 不考虑电子的空间运动, 已知 $t = 0$ 时电子处于 $s_z = \hbar/2$ 的态上,

- (1) 求任意 t 时刻电子的波函数 $\psi(s_z, t)$;
- (2) 求 t 时刻自旋分量的平均值 $\bar{s}_x, \bar{s}_y, \bar{s}_z$;
- (3) 求 t 时刻 s_x, s_y 与 s_z 取值为 $\hbar/2$ 的几率;
- (4) 何时电子又回到 $s_z = \hbar/2$ 的态上?

答: (1) $\psi(s_z, t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -i\sin\omega t \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{eB}{2\mu_B}$

(2) $\bar{s}_x = 0, \quad \bar{s}_y = -\frac{\hbar}{2}\sin 2\omega t, \quad \bar{s}_z = \frac{\hbar}{2}\cos 2\omega t$

(3) t 时刻 s_x, s_y 与 s_z 取值为 $\hbar/2$ 的几率分别为 $1/2, (1 - \sin 2\omega t)/2$ 与 $\cos^2 \omega t$.

(4) $t = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{2\pi\mu_B \hbar}{eB}, n = 1, 2, \dots$

7. 证明 $e^{i\hat{\sigma}_a \theta} = \cos\theta + i\hat{\sigma}_a \sin\theta, \quad a = x, y, z$

8. 一束极化的 s 波 ($l=0$) 中子通过一个不均匀磁场后分裂成强度不同的两束, 其中自旋反平行于磁场的一束与自旋平行于磁场的一束的强度之比为 3:1. 求入射中子自旋方向同磁场方向夹角 θ 的大小.

答: $\theta = 120^\circ$

9. 将一个自旋 $s = 1/2$ 的粒子置于磁场 $\mathbf{B} = B_0(\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{k})$ 中, 哈密顿量 $\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}$, 其中 B_0 与 θ 为常数, $\hat{\boldsymbol{\mu}} = 2\mu_B \hat{\mathbf{S}}$ 为粒子的自旋磁矩, μ_B 为玻尔磁子. 求 \hat{H} 的本征值和本征函数.

答: $E_1 = -B_0\mu_B\hbar, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

$E_2 = B_0\mu_B\hbar, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

10. 电子偶素是将氢原子中的质子用正电子代替而形成的 $e^+ e^-$ 束缚态.

- (1) 给出电子偶素基态能量及其简并度.