有限差分法笔记

Arcueid

2024 年 3 月 24 日

2024-3-23

主要是针对空间离散进行隐式构造，元式

$$\frac{\partial^4 d_1(x_j,t_k)}{\partial x^4}=\frac{1}{h_x^4}(u_{j+2}^k-4u_{j+1}^k+6u_j^k-4u_{j-1}^k+u_{j-2}^k) \tag{1}$$

记号

$$d_1(x,t)=u \tag{2}$$

$$d_2(x,t)=\partial u/\partial t=v \tag{3}$$

方程：

$$u_{tt}+u_t=f-u_{xxxx} \tag{4}$$

方程组：

$$v_t=f-v-u_{xxxx} \tag{5}$$

$$u_t=v \tag{6}$$

0.0.1 方程组隐格式

(5) 显格式：

$$\frac{v_j^{k+1}-v_j^k}{h_t}=f_j^k-v_j^k-\left(\frac{u_{j+2}^k-4u_{j+1}^k+6u_j^k-4u_{j-1}^k+u_{j-2}^k}{h_x^4}\right) \tag{7}$$

令右端中空间差分项为 $u^k=(u^{k+1}+u^k)/2$ 得到一个可能的隐格式：

$$\frac{v_j^{k+1}-v_j^k}{h_t}=f_j^k-v_j^k- \tag{8}$$

$$\frac{1}{2h_x^4}\left(u_{j+2}^{k+1}+u_{j+2}^k-4u_{j+1}^{k+1}-4u_{j+1}^k+6u_j^{k+1}+6u_j^k-4u_{j-1}^{k+1}-4u_{j-1}^k+u_{j-2}^{k+1}+u_{j-2}^k\right) \tag{9}$$

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{h_t}=v_j^k \tag{10}$$

写作矩阵：

$$Q_v\mathbf{v}^{k+1}+Q_u\mathbf{u}^{k+1}=\mathbf{f}^k+\mathbf{u}^k+\mathbf{v}^k \tag{11}$$

0.0.2 方程隐格式

(4) 的隐格式

$$\frac{u_j^{k+1}-2u_j^k+u_j^{k-1}}{h_t^2}+\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{h_t} \tag{12}$$

$$=f_j^k-\frac{1}{2h_x^4}\left(u_{j+2}^{k+1}+u_{j+2}^k-4u_{j+1}^{k+1}-4u_{j+1}^k+6u_j^{k+1}+6u_j^k-4u_{j-1}^{k+1}-4u_{j-1}^k+u_{j-2}^{k+1}+u_{j-2}^k\right) \tag{13}$$

$$=f_j^k+\frac{1}{2h_x^4}\left(\delta^4u^{k+1}+\delta^4u^k\right) \tag{14}$$

化简:

$$u_j^{k+1}-2u_j^k+u_j^{k-1}+h_tu_j^{k+1}-h_tu_j^k=h_t^2f_j^k+\frac{h_t^2}{2h_x^4}(\delta^4u^{k+1}+\delta^4u^k) \tag{15}$$

$$(1+h_t)u_j^{k+1}-\frac{h_t^2}{2h_x^4}\delta^4u^{k+1}=h_t^2f_j^k+(2+h_t)u_j^k+\frac{h_t^2}{2h_x^4}\delta^4u^k-u_j^{k-1} \tag{16}$$

写作矩阵:

$$Q\mathbf{u}^{k+1}=\mathbf{f}^k+\tilde{Q}\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^{k-1} \tag{17}$$

左侧展开:

$$(1+h_t)u_j^{k+1}-\frac{h_t^2}{2h_x^4}(u_{j+2}^{k+1}-4u_{j+1}^{k+1}+6u_j^{k+1}-4u_{j-1}^{k+1}+u_{j-2}^{k+1}) \tag{18}$$

右侧展开:

$$h_t^2f_j^k+(2+h_t)u_j^k+\frac{h_t^2}{2h_x^4}(u_{j+2}^k-4u_{j+1}^k+6u_j^k-4u_{j-1}^k+u_{j-2}^k)-u_j^{k-1} \tag{19}$$

0.0.3 更正

对 f 同样做隐格式, 令 $p=\frac{h_t^2}{2h_x^4}$

左项:

$$pu_{j+2}^{k+1}-4pu_{j+1}^{k+1}+(1+h_t+6p)u_j^{k+1}-4pu_{j-1}^{k+1}+pu_{j-2}^{k+1}-\frac{h_t^2}{2}f_j^{k+1} \tag{20}$$

右项:

$$-pu_{j+2}^k+4pu_{j+1}^k+(2+h_t-6p)u_j^k+4pu_{j-1}^k-pu_{j-2}^k+\frac{h_t^2}{2}f_j^k-u_j^{k-1} \tag{21}$$