振动方程差分格式研究以及右端项 Laplace 变换迭代研究

李佳昊

2024.2.23

1 差分格式

1.1 方程及初边值条件

为研究振动方程的差分法求解，考虑如下简化的 PDE 及初边值条件

$$\frac{\partial^4 d(x,t)}{\partial x^4}+\frac{\partial d(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 d(x,t)}{\partial t^2}=f(x,t) \qquad x\in(0,l),t\in(0,T) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} d(x,0)&=0\\ \frac{\partial d(x,0)}{\partial t}&=0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} d(0,t)=0 &\quad d(l,t)=0\\ \frac{\partial^2 d(0,t)}{\partial x^2}=0 &\quad \frac{\partial^2 d(l,t)}{\partial x^2}=0 \end{aligned} \tag{3}$$

可以验证，当 $f(x,t)$ 满足

$$f(x,t)=(\frac{\pi}{l})^4t^2\sin\frac{\pi x}{l}+2t\sin\frac{\pi x}{l}+2\sin\frac{\pi x}{l} \tag{4}$$

时，上述 PDE 及初边值条件有解析解：

$$d(x,t)=t^2\sin\frac{\pi x}{l} \tag{5}$$

1.2 网格划分

对于 x 轴使用 n_x 个节点进行均匀剖分，对于 t 轴使用 n_t 个节点进行均匀剖分，则 x 方向步长为 $h_x=l/(n_x-1)$，t 方向步长为 $h_t=T/(n_t-1)$。记网格节点为 $(x_j,t_k),(j=1,\cdots,nx,k=1,\cdots,nt)$

1.3 化为方程组离散

令 $d_1(x,t)=d(x,t) \quad d_2(x,t)=\frac{\partial d(x,t)}{\partial t}$，就将原方程化为两个关于时间只含一阶导数的方程组如下

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 d_1(x,t)}{\partial x^4}+d_2(x,t)+\frac{\partial d_2(x,t)}{\partial t}&=f(x,t)\\ \frac{\partial d_1(x,t)}{\partial t}&=d_2(x,t)\end{aligned} \qquad x\in(0,l),t\in(0,T) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}d_1(x,0)=0\\ d_2(x,0)=0\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}d_1(0,t)=0 \quad d_1(l,t)=0\\ \frac{\partial^2 d_1(0,t)}{\partial x^2}=0 \quad \frac{\partial^2 d_1(l,t)}{\partial x^2}=0\end{aligned} \tag{8}$$

1.4 显格式离散

将各个网格点的 $d_1(x,t)$ 的数值解 $u(x_j,t_k)$ 与 $d_2(x,t)$ 的数值解 $v(x_j,t_k)$ 分别简记为 u_j^k,v_j^k，右端项 $f(x_j,t_k)$ 简记为 f_j^k，使用 2 阶中心差分离散关于 x 的 4 阶导数，使用向前差分离散关于 t 的 1 阶导数。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 d_1(x_j,t_k)}{\partial x^4}&=\frac{1}{h_x^4}(u_{j+2}^k-4u_{j+1}^k+6u_j^k-4u_{j-1}^k+u_{j-2}^k) \quad (j=3,\cdots,n_x-2)\\ \frac{\partial d_1(x_j,t_k)}{\partial t}&=\frac{1}{h_t}(u_j^{k+1}-u_j^k) \quad (k=1,\cdots,n_t-1)\\ \frac{\partial d_2(x_j,t_k)}{\partial t}&=\frac{1}{h_t}(v_j^{k+1}-v_j^k) \quad (k=1,\cdots,n_t-1)\end{aligned} \tag{9}$$

使用单边二阶差分离散边界条件中关于 x 的二阶导数。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 d_1(0,t_k)}{\partial x^2}&=\frac{1}{h_x^2}(u_1^k-\frac{5}{2}u_2^k+2u_3^k-\frac{1}{2}u_4^k)=0\\ \frac{\partial^2 d_1(l,t_k)}{\partial x^2}&=\frac{1}{h_x^2}(\frac{1}{2}u_{n_x-3}^k-2u_{n_x-2}^k+\frac{5}{2}u_{n_x-1}^k-u_{n_x}^k)=0\end{aligned} \tag{10}$$

将 (9)(10) 式代入方程组 (6) 及其边界条件就得到显式格式

$$\begin{aligned}&v_j^{k+1}=(1-h_t)v_j^k+\frac{h_t}{h_x^4}(-u_{j+2}^k+4u_{j+1}^k-6u_j^k+4u_{j-1}^k-u_{j-2}^k)+h_tf_j^k \quad (j=3,\cdots,n_x-2)\\ &u_j^{k+1}=h_tv_j^k+u_j^k \quad (j=3,\cdots,n_x-2)\\ &u_2^{k+1}=\frac{2}{5}\cdot(2u_3^{k+1}-\frac{1}{2}u_4^{k+1})\\ &u_{n_x-1}^{k+1}=\frac{2}{5}\cdot(2u_{n_x-2}^{k+1}-\frac{1}{2}u_{n_x-3}^{k+1})\end{aligned} \tag{11}$$

1.5 显格式的稳定性分析

记网格比为 $r = \frac{h_t}{h_x^4}$，(j,k) 网格节点处的位移与速度误差分别记为 $\epsilon_j^k(u), \epsilon_j^k(v)$，记 $\epsilon_j^k = [\epsilon_j^k(u) \quad \epsilon_j^k(v)]^T$，则

$$\epsilon_j^{k+1} = B_1(\epsilon_{j-2}^k + \epsilon_{j+2}^k) + B_2(\epsilon_{j-1}^k + \epsilon_{j+1}^k) + B_3\epsilon_j^k + h_t F_j^k \tag{12}$$

其中

$$B_1 = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} -6r & 1-h_t \\ 1 & h_t \end{bmatrix} \quad F_i^j = \begin{bmatrix} f_j^k - f_j^{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

采用 Fourier 分析法，令 $\epsilon_j^k = \xi_L^k e^{i\beta jh}$，代入方程 (12) 并消去公因子得到增长因子矩阵

$$G = \begin{bmatrix} -16r\sin^4\frac{\beta h_x}{2} & 1-h_t \\ 1 & h_t \end{bmatrix} \tag{14}$$

可以验证当 $16r\sin^4\frac{\beta h_x}{2} < 1$ 时有 $\rho(G) < 1$，即 $r < \frac{1}{16}$ 时格式是零稳定的。下面考虑依右端项的稳定性，方程 (12) 被化为

$$\xi_L^{k+1} = G\xi_L^k + \frac{h_t}{e^{i\beta jh}}F_j^k \tag{15}$$

若 $f(x,t)$ 关于 t 满足 Lipschitz 条件则有

$$\xi_L^{k+1} \le G^k\xi_L^1 + [I + \cdots + G^{k-1}]\frac{h_t}{e^{i\beta jkh}}\begin{bmatrix} Ch_t \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

其中 C 为 Lipschitz 常数，若 $|\lambda(G)| = 1 + O(h_t)$，事实上我们有 $|\lambda(G)| < 1$，则

$$|\lambda(I + \cdots + G^{k-1})| = \left|\frac{1-\lambda^k(G)}{1-\lambda(G)}\right| = \left|\frac{(1+O(h_t))^k - 1}{O(h_t)}\right| = 1 + O(h_t) \tag{17}$$

因此当格式按初值稳定时也是按右端项稳定的。于是可知 $r < \frac{1}{16}$ 为格式稳定的充分条件，称之为稳定性条件。

1.6 数值实验

我们对以上数值解法进行实验，取 $l = 2.93, T = 6$ 取定空间结点数为 $n_x = 22$，分别取时间节点数为 $n_t = 2\times10^4+1, 4\times10^4+1, 8\times10^4+1$，此时网格比分别为 $r = 0.7916, 0.3958, 0.1979$，考察 u, v 与 $d1, d2$ 在终止时刻的二范数误差。

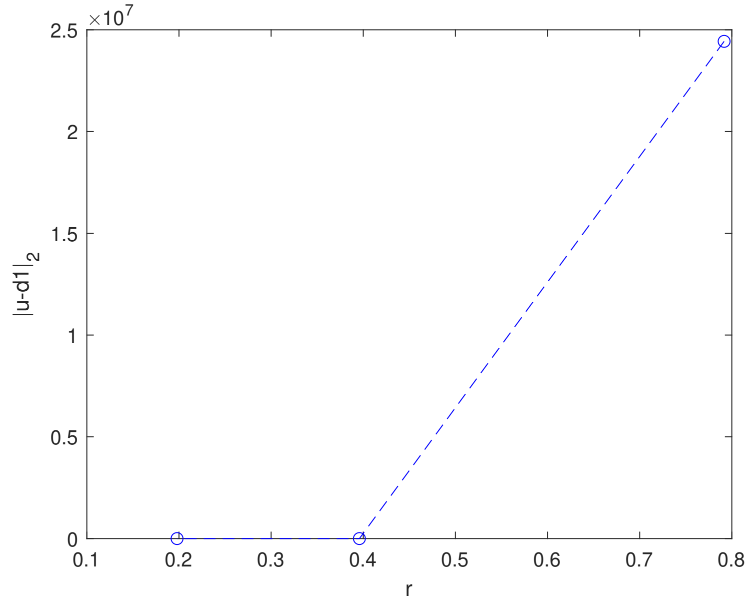

Figure 1: 函数值数值解与真解误差

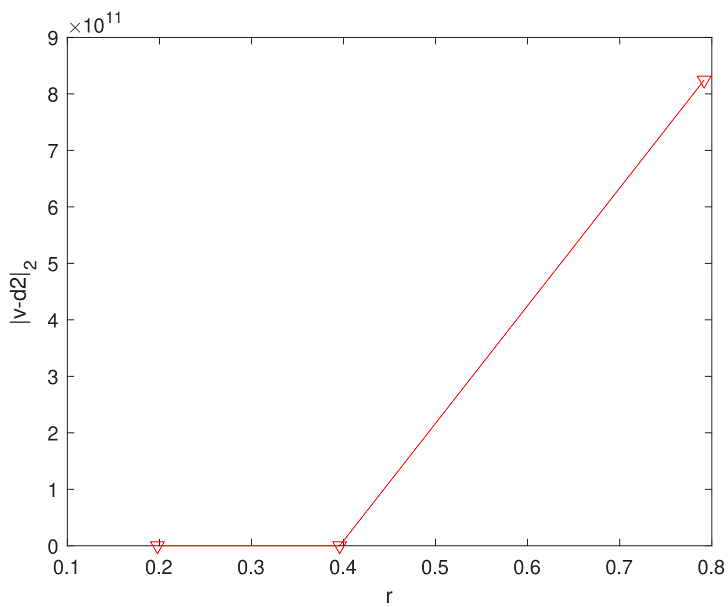

Figure 2: 导数值数值解与真解误差

可以观察到随着时间步长减小，网格比减小到接近 $\frac{1}{16}=0.0625$ 时格式收敛。下面考察当网格比满足稳定性条件 $r<\frac{1}{6}$ 时 u,v 与 $d1,d2$ 在终止时刻的二范数误差，分别取时间节点数 $n_t=3\times10^5+1,6\times10^5+1,12\times10^5+1$，此时网格比分别为 $r=0.0528,0.0264,0.0132$。

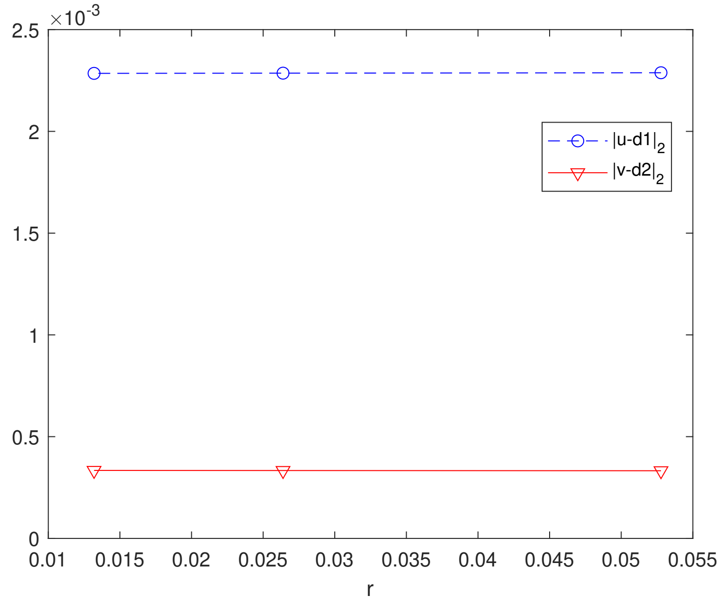

Figure 3: 稳定情况误差

可以看到在网格比满足稳定性条件时误差数量级均小于等于 10^{-3}。这与理论分析的结果相一致。

2 使用差分法求解振动方程

2.1 振动方程

考虑燃料棒振动的一维问题，即对于三维振动模型 (Figure 4) 只考虑其在 y 方向上的振动。则 y 轴方向燃料棒偏移中性轴的位移满足方程与初边值条件：

$$EI\frac{\partial^4 d(x,t)}{\partial x^4}+c\frac{\partial d(x,t)}{\partial t}+\rho\frac{\partial^2 d(x,t)}{\partial t^2}=f_e(x,t)+f_s(d(x,t),x,t)\qquad x\in(0,l),t\in(0,T) \tag{18}$$

$$\begin{aligned} d(x,0)&=0\\ \frac{\partial d(x,0)}{\partial t}&=0 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} d(0,t)&=0\quad d(l,t)=0\\ \frac{\partial^2 d(0,t)}{\partial x^2}&=0\quad \frac{\partial^2 d(l,t)}{\partial x^2}=0 \end{aligned} \tag{20}$$

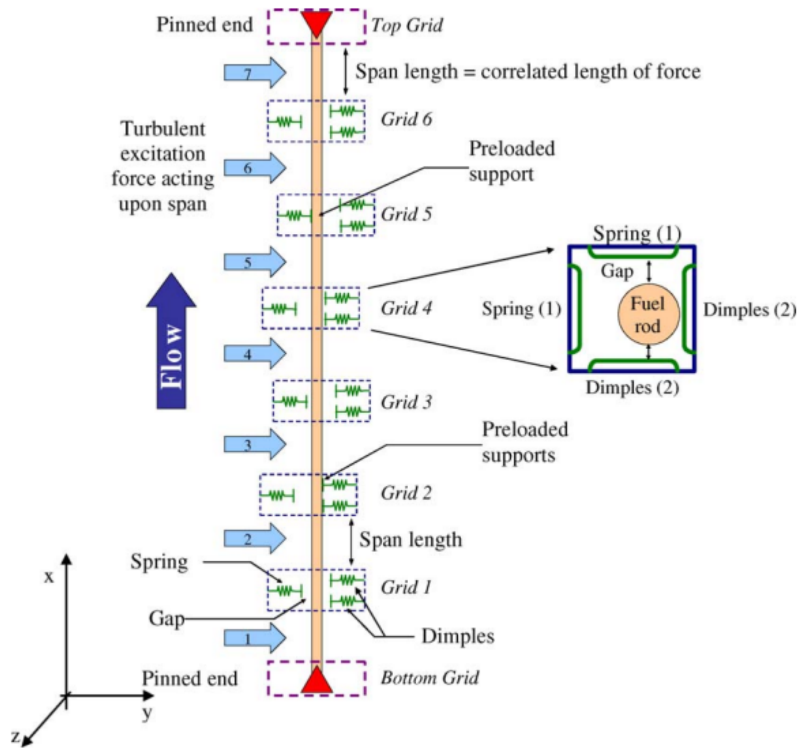

Figure 4: 燃料棒振动模型

取 $EI = C = \rho = 1$，使用第 1 节中差分格式 (11) 对方程 (18) 进行离散，并进行数值实验。

2.2 数值实验

取 $l = 2.93m$，单元间隙为 $254\mu m$，模拟时间 $T = 6s$，格架数为 6 个，采用均匀剖分，空间使用 22 个节点数，时间步长取为 $20\mu s$。

根据参考文献以及初步数值实验结果，我们观察到冲击时间相对整体模拟时间较短，因此忽略 z 轴钢凸对燃料棒的摩擦力，只考虑 y 轴上燃料棒与格架的支撑力作用，取钢凸与弹簧的弹性系数分别为 $0.1, 1$。

计算冲击功时采用梯形公式计算数值积分。

参数随机化方面，我们将激振力与初始时刻燃料棒的初始位置设置为随机变量。激振力在每跨上都服从均值为 0 标准差为 $0.2N$ 的正态分布，且之间相互独立。初始时刻燃料棒距离钢凸的间隙服从均值为 0 标准差为 $127\mu m$ 的正态分布。初步进行了 100 次蒙特卡洛模拟。计算 6 个格架处的冲击功均值以及频数直方图。

Table 1: 6 个格架处磨蚀功均值

格架索引	1	2	3	4	5	6
磨蚀功均值	$3.36 \times 10^{-8}w$	$4.41 \times 10^{-8}w$	$5.19 \times 10^{-8}w$	$5.15 \times 10^{-8}w$	$5.74 \times 10^{-8}w$	$3.79 \times 10^{-8}w$

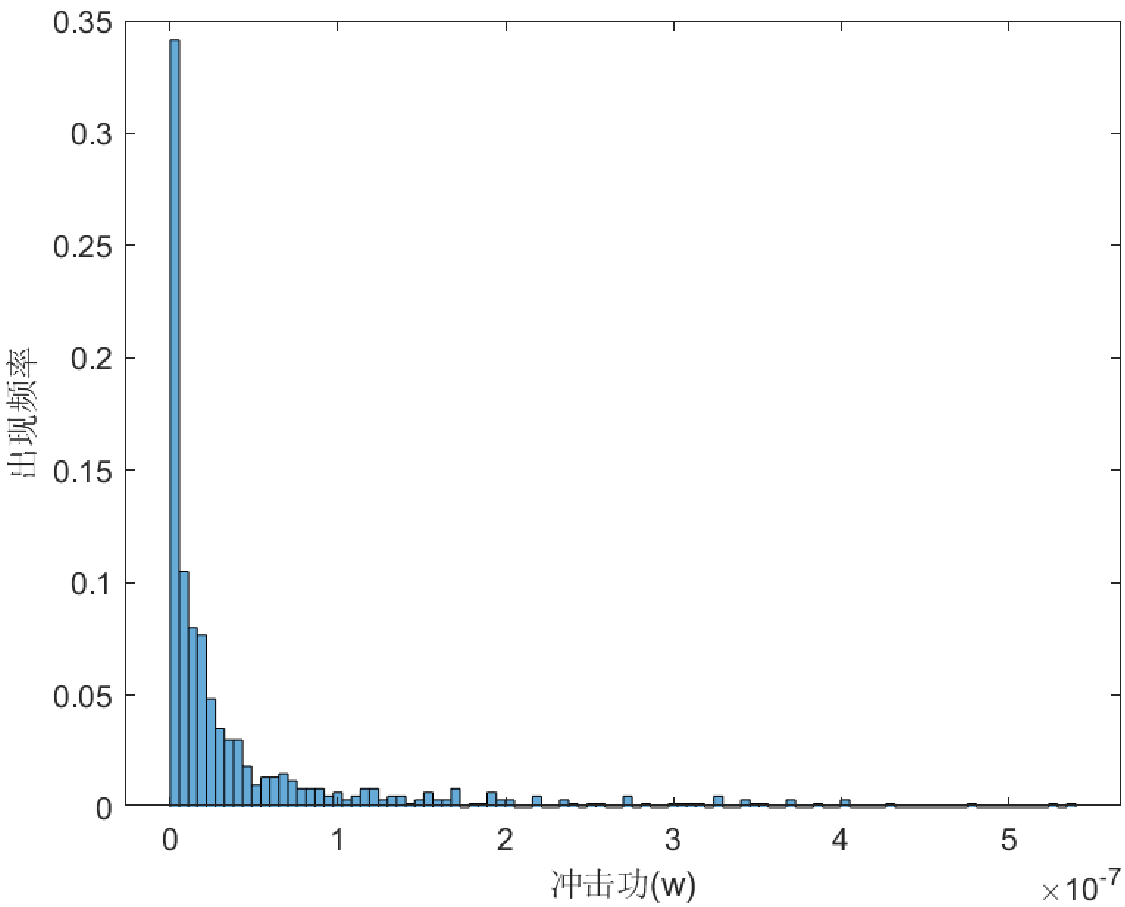

Figure 5: 冲击功频率图

另外单次模拟所花时间约为 1.5s，100 次蒙卡模拟时间约为 164.758549s

3 Laplace 变换方法

若采用 Laplace 变换的方法，振动方程可化为：

$$EI\frac{\partial^4 D(x,s)}{\partial x^4} + csD(x,s) + \rho s^2 D(x,s) = F(x,s) \qquad x \in (0,l) \tag{21}$$

$$\begin{aligned} D(0,s) = 0 \quad D(l,s) = 0 \\ \frac{\partial^2 D(0,s)}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 D(l,s)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

无论是直接利用差分法还是采用模态分析法求解上述方程均要得到 $F(x,s)$，我们将 $f(x,t)$ 分为激振力 $f_e(x,t)$ 与网格作用力 $f_s(x,t)$ 两种。其中网格作用力 $f_s(x,t)$ 又包括支撑力 $f_s^n(x,t)$ 与摩擦力 $f_s^t(x,t)$ 两种。

$$f_s^n(x,t) = \begin{cases} k_s \cdot sign(d) \cdot [gap - |d(x,t)|] & |d| \geq gap \\ 0 & |d^n| < gap \end{cases} \tag{23}$$

$$f_s^t(x,t) = -\mu \cdot f^n \cdot sign(v^t) \tag{24}$$

考虑支撑力与摩擦力的 Laplace 变换

$$F_s^n(x,s) = k_s[\frac{gap}{s} + \int_{\{t|d(x,t)<-gap\}} e^{-st} d(x,t)dt - \int_{\{t|d(x,t)>gap\}} e^{-st} d(x,t)dt] \tag{25}$$

$$F_s^t(x,s) = -\mu f^n[\int_{\{t|v(x,t)>0\}} e^{-st}dt - \int_{\{t|v(x,t)<0\}} e^{-st}dt] \tag{26}$$

因此要得到 f_s 的 Laplace 变换要求要已知整个时间轴的 $d(x,t)$。