

Analyse Spectrale Paramétrique

Olivier Besson

Table des matières

1	Introduction	1
2	Analyse spectrale classique	3
2.1	Périodogramme et Corrélogramme	3
2.2	Méthode de Capon	5
3	Modèles rationnels linéaires	7
3.1	Définition	7
3.2	Densité spectrale de puissance	8
3.3	Relations entre les modèles	8
3.4	Equations de Yule-Walker	9
3.5	Modèles ARMAX,...	10
4	Estimation des paramètres d'un modèle AR	15
4.1	Relation AR-Prédiction linéaire	15
4.2	Méthodes d'estimation	17
4.2.1	Algorithme de Levinson	17
4.2.2	Algorithme de Burg	18
4.2.3	Algorithmes des moindres carrés	18
4.3	Estimation des fréquences à partir des paramètres AR	22
4.4	Critères de sélection de l'ordre	28
5	Méthodes d'estimation ARMA	37
5.1	Estimation des paramètres AR	37
5.2	Estimation des paramètres MA	39
6	Exponentielles complexes amorties : de Prony à la SVD	41
6.1	Modèles de PRONY	41
6.1.1	Prony Déterministe	41
6.1.2	Prony Moindres Carrés	42
6.1.3	Spectre de Prony	43
6.1.4	Prony Harmonique	44
6.2	Méthode de Kumaresan : Prédiction linéaire et SVD	46
7	Exponentielles complexes : Approches sous-espace	57
7.1	Formulation du problème - Propriétés du modèle	57
7.2	Méthodes sous-espace	60
7.2.1	PISARENKO	60

7.2.2	MUSIC	61
7.2.3	ESPRIT	62
7.2.4	Subspace fitting	65
8	Conclusions	67
	Bibliographie	69
A	Exercices-Problèmes	71
B	Rappels sur les signaux et spectres	79
B.1	Signaux déterministes	79
B.2	Densité Spectrale de Puissance pour les signaux aléatoires	80
B.3	Corrélation-Stationnarité-Ergodicité	81
C	Estimation de paramètres	85
C.1	Généralités	85
C.2	Estimation des fonctions de corrélation	86
C.3	Analyse statistique des estimateurs basés sur $\hat{r}_{xx}(m)$	87
C.4	Estimateur du Maximum de Vraisemblance pour une exponentielle bruitée	90
C.5	Maximum de Vraisemblance pour une somme d'exponentielles	91
D	Rappels d'algèbre linéaire	93

Table des figures

3.1	Processus ARMA(p,q) vu comme la sortie d'un filtre linéaire.	7
3.2	Différences entre spectres ARMA, AR et MA.	9
3.3	Périodogramme du signal.	11
3.4	Spectre issu d'une modélisation AR(20) du signal.	11
3.5	Spectre issu d'une modélisation MA(20) du signal.	12
3.6	Spectre issu d'une modélisation ARMA(8,6) du signal.	12
4.1	Ordre minimal de modélisation AR pour avoir une résolution comparable au périodogramme, en fonction de N et du SNR.	22
4.2	Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=32. SNR=15dB.	23
4.3	Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=64. SNR=15dB.	23
4.4	Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=128. SNR=15dB.	24
4.5	Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=256. SNR=15dB.	24
4.6	Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256. SNR=0dB. p=12.	25
4.7	Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256. SNR=5dB. p=12.	25
4.8	Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256. SNR=10dB. p=12.	26
4.9	Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256. SNR=15dB. p=12.	26
4.10	Influence de l'amplitude des sinusoïdes sur la modélisation AR et le périodogramme.	27
4.11	Influence de l'amplitude des sinusoïdes sur la modélisation AR et le périodogramme.	27
4.12	Comparaison maxima-pôles	31
4.13	Critères AIC, MDL pour une modélisation AR(p) de 2 sinus+bruit. SNR=5dB. N=256.	32
4.14	Critères FPE,CAT pour une modélisation AR(p) de 2 sinus+bruit. SNR=5dB. N=256.	32
4.15	Spectre issu d'une modélisation AR(2) d'un processus AR(4).	33
4.16	Spectre issu d'une modélisation AR(4) d'un processus AR(4).	33
4.17	Spectre issu d'une modélisation AR(8) d'un processus AR(4).	34

4.18	Spectre issu d'une modélisation AR(16) d'un processus AR(4).	34
4.19	Valeur des pôles calculés par modélisation AR(p) d'un processus AR(4). . .	35
4.20	Valeurs singulières de la matrice de corrélation estimée	35
5.1	Spectres ARMA(4,4) de 2 sinus + bruit. SNR=10dB. N=256. M=80. . . .	39
6.1	Signal théorique (2sinus + bruit) et signal approximé par une modélisation de Prony. N=256. p=12. SNR=15dB.	45
6.2	Comparaison entre l'erreur de prédiction et l'erreur d'approximation. . . .	46
6.3	Comparaison entre le spectre AR et le spectre de Prony.	47
6.4	Distribution des pôles après SVD tronquée. L=12. p=2.	49
6.5	Valeurs singulières de A. 2 sinus + bruit. N=64. p=20. SNR variable. . . .	50
6.6	Valeurs singulières de A. 2 sinus + bruit. SNR=10. p=20. N variable. . . .	53
6.7	Spectre AR(20) avec/sans SVD tronquée. N=32. SNR=5dB.	53
6.8	Spectre AR(20) avec/sans SVD tronquée. N=64. SNR=5dB.	54
6.9	Spectre AR(20) avec/sans SVD tronquée. N=32. SNR=15dB.	54
6.10	Spectre AR(20) avec/sans SVD tronquée. N=64. SNR=15dB.	55
7.1	Distribution des valeurs propres de la matrice de corrélation estimée pour 2 sinus + bruit. N=64. M=30.	59
D.1	Espaces engendrés par \mathbf{A} et $\mathbf{A}^\#$	95

Chapitre 1

Introduction

En traitement du signal, on considère généralement qu'il existe 6 opérations principales :

- 1 *CAPTER ET MESURER*
- 2 *MODELISER ET ANALYSER* : représentation (non) paramétrique
- 3 *CODER ET TRANSMETTRE* : compression, cryptographie
- 4 *FILTRE ET SYNTHETISER* : débruitage, synthèse
- 5 *DECIDER ET CONTROLER* : détection, estimation, ...
- 6 *INTERPRETER ET RECONNAÎTRE* : classification, contrôle

La modélisation paramétrique intervient prioritairement dans **2** et, de façon induite, dans **3,4,5**. Elle consiste à associer à un signal un modèle, représenté par un vecteur paramètre $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]^T$ censé représenter au mieux le signal considéré. Etant donné que l'on choisit a priori un modèle pour le signal, cela signifie qu'en général on possède des informations a priori sur le signal lui-même qui permettent de sélectionner tel ou tel modèle. Il s'ensuit que le choix d'un modèle plutôt que d'un autre requiert au préalable une analyse du signal.

L'intérêt d'une modélisation paramétrique est double :

1. elle permet de réduire l'espace de représentation. On peut ainsi représenter un ensemble de N échantillons par un vecteur de dimension $p \ll N$. Ceci est particulièrement intéressant dans de nombreuses applications :

Classification : lorsque l'on désire classer des signaux suivant un certain nombre de classes, on substitue au signal ses paramètres et on classe suivant les paramètres.

Détection : si l'on veut détecter des ruptures dans un modèle, il suffit de suivre un petit nombre de paramètres pour déterminer l'instant de rupture.

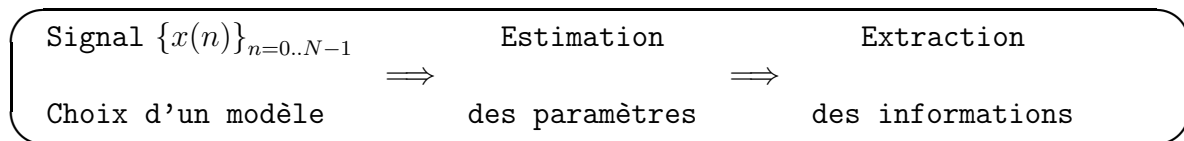
Transmission-Compression : au lieu de transmettre un signal, on ne transmet que les paramètres du modèle associé.

2. elle permet d'extraire de façon plus fine certaines informations. C'est par exemple le cas en analyse spectrale (fil conducteur de ce cours) où la modélisation permet d'estimer avec une meilleure résolution que le périodogramme le spectre d'un signal.

On trouve de nombreuses applications de la modélisation dans des domaines comme les télécommunications, la mécanique, l'acoustique, le biomédical, le radar, le sonar, etc. Un processus de modélisation comporte en général 3 étapes :

- a) choix d'un modèle (à partir de connaissances a priori)
- b) estimation des paramètres du modèle à partir des échantillons du signal
- c) extraction de l'information à partir du modèle

Dans l'étape c), on substitue complètement au signal son modèle : on suppose que le modèle estimé est correct et on utilise les propriétés théoriques du modèle pour extraire l'information utile. En fait, on utilise le schéma suivant :



CE COURS EST ABORDÉ SOUS L'ANGLE DE L'ANALYSE SPECTRALE PARAMÉTRIQUE : ON ESSAIE DE DÉDUIRE LES PROPRIÉTÉS SPECTRALES D'UN SIGNAL (DENSITÉ SPECTRALE DE PUISSANCE, FRÉQUENCES PRÉSENTES,...) À PARTIR D'UNE MODÉLISATION PARAMÉTRIQUE DE CE SIGNAL. C'EST UNE ALTERNATIVE À L'APPROCHE CLASSIQUE, PRINCIPALEMENT BASÉE SUR LA TRANSFORMÉE DE FOURIER. ON CONSIDÉRERA D'ABORD LES SIGNAUX POSSÉDANT DES SPECTRES RATIONNELS. PUIS, LE CAS DE SOMME D'EXPONENTIELLES COMPLEXES (OU SINUSOÏDES) SERA ENVISAGÉ.

Chapitre 2

Analyse spectrale classique

Nous considérerons dans la suite des processus **stationnaires et ergodiques**, cf l'annexe B pour les définitions. On s'intéresse tout d'abord à des méthodes non paramétriques, c'est-à-dire ne reposant pas sur un modèle a priori du signal.

2.1 Périodogramme et Corrélogramme

Sous les hypothèses de signaux stationnaires et ergodiques, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance sont définies par :

$$r_{xx}(m) = \mathbb{E} \{x^*(n)x(n+m)\} = r_{xx}^*(-m) \quad (2.1)$$

$$S_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m)e^{-j2\pi mf} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nf} \right|^2 \right\} \quad (2.2)$$

On suppose disposer de N échantillons $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ du signal à analyser et on cherche donc à estimer la densité spectrale de puissance à partir de ces données. Il existe 2 grandes classes d'estimation non paramétrique du spectre, chacune étant liée à l'une des égalités dans l'équation (2.2) :

Méthode directe : *PERIODOGRAMME*

C'est une méthode utilisant directement le signal. Le spectre est estimé par :

$$\hat{S}_{PER}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nf} \right|^2 \quad (2.3)$$

Du fait de la troncature du signal, le périodogramme est en fait la convolution du spectre par une fenêtre en sinus cardinal. Le fait de tronquer le signal induit 2 phénomènes principaux :

- élargissement du lobe principal \Rightarrow perte de résolution ;
- apparition de lobes secondaires.

On montre que la résolution du périodogramme est de l'ordre de $1/N$, c'est-à-dire que l'on peut discriminer 2 fréquences distantes de $1/N$.

Pour remédier aux problèmes de troncature, on utilise en général des fenêtres permettant soit de réduire le lobe principal, soit d'atténuer les lobes secondaires.

On montre que le périodogramme est un estimateur biaisé :

$$\mathbb{E} \left\{ \widehat{S}_{PER}(f) \right\} = \int_{-1/2}^{1/2} W_b(f-u) S_x(u) du \quad (2.4)$$

où $W_b(f) = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin(\pi N f)}{\sin(\pi f)} \right]^2$ est la transformée de Fourier de la fenêtre triangulaire. Le périodogramme est donc en moyenne la convolution du véritable spectre avec la transformée de Fourier de la fenêtre triangulaire. Néanmoins, lorsque $N \rightarrow \infty$, le biais devient nul. On peut montrer également que la variance est pratiquement indépendante de N et proportionnelle au spectre :

$$\text{var} \left\{ \widehat{S}_{PER}(f) \right\} \simeq S_x(f)^2 \quad (2.5)$$

Le périodogramme n'est donc pas un estimateur consistant de la DSP. Afin de diminuer la variance de cet estimateur, on peut utiliser un *périodogramme moyenné*. Ceci consiste à séparer le signal en K tranches (de longueur N/K), à calculer le périodogramme sur chaque tranche et à faire la moyenne. Du fait des K moyennages, la variance est presque divisée par K : néanmoins, les tranches étant plus courtes, la résolution diminue.

Méthode indirecte : BLACKMAN-TUCKEY

Une autre approche consiste à utiliser la définition du spectre à partir de la fonction de corrélation. On estime alors le spectre comme :

$$\widehat{S}_{BT}(f) = \sum_{m=-M}^M \widehat{r}_{xx}(m) e^{-j2\pi m f} \quad (2.6)$$

où $\widehat{r}_{xx}(m)$ est un estimateur de la fonction de corrélation, donné par :

$$\widehat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-m-1} x^*(k) x(k+m) \quad (2.7)$$

$$\widehat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{k=0}^{N-m-1} x^*(k) x(k+m) \quad (2.8)$$

L'estimateur (2.7) est biaisé alors que (2.8) est non biaisé.

Blackman-Tuckey ont suggéré de prendre M de l'ordre de $10\%N$. L'application d'une fenêtre est possible pour diminuer la variance sur l'estimation de la fonction de corrélation. En effet, on a :

$$\widehat{S}_{PER}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \widehat{r}_{xx}(m) e^{-j2\pi m f} \quad (2.9)$$

Or, la variance sur $\widehat{r}_{xx}(m)$ augmente lorsque m se rapproche de N : c'est pourquoi on n'utilise que M points de corrélation. Néanmoins, quand M diminue, le biais augmente => dilemme biais-variance.

Observations

Inconvénients

- ★ résolution en $1/N \Rightarrow$ difficulté à retrouver deux raies très proches pour des signaux de courte durée.
- ★ difficulté à retrouver des signaux faibles par rapport à de forts signaux.
- ★ lobes secondaires et spectres négatifs (BT) dûs au fenêtrage.
- ★ estimation non consistante de la Densité Spectrale de Puissance.

Avantages

- algorithmes très rapides et peu coûteux en calcul (FFT).
- spectre estimé proportionnel à la puissance.
- comportement robuste sur un large éventail de signaux.

Le choix d'une fenêtre résulte essentiellement du compromis entre largeur du lobe principal et hauteur des lobes secondaires, comme l'indique le tableau 2.1 :

TAB. 2.1 – Caractéristiques des principales fenêtres

Fenêtre	Caractéristiques	$\frac{\text{amp. lobes second.}}{\text{amp. lobe princip.}}$	ΔB_{3dB}
Rectangle	$w(m) = 1$	-13dB	0.89
Bartlett	$w(m) = 1 - \frac{2m}{M}$	-26dB	1.28
Hanning	$w(m) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\pi \frac{m}{M})]$	-31.5dB	1.44
Hamming	$w(m) = 0.54 + 0.46 \cos(\pi \frac{m}{M})$	-43dB	1.3
Nuttall	$w(m) = 0.364 + 0.49 \cos(2\pi \frac{m}{M})$ $+ 0.137 \cos(4\pi \frac{m}{M})$ $+ 0.01 \cos(6\pi \frac{m}{M})$	-98dB	1.70

Par exemple, si l'on veut discerner deux raies très proches, on a intérêt à avoir un lobe principal très étroit. Par contre, si on a un signal et une interférence de puissance élevée, mais pas très proche en fréquence, il faudra choisir une fenêtre avec de très faibles lobes secondaires.

Comme on le constate, les méthodes classiques font en fait l'hypothèse que la fonction d'autocorrélation est nulle en dehors d'une certaine fenêtre : ceci conduit à une perte de résolution.

2.2 Méthode de Capon

La seconde méthode que nous envisageons ne fait pas d'hypothèse sur la fonction de corrélation. Pour la présenter, supposons qu'on filtre le signal $x(n)$ pour obtenir un signal $y(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^p a_k x(n-k) \quad (2.10)$$

Les coefficients a_k du filtre sont choisis de façon à minimiser la puissance du signal en sortie du filtre avec la contrainte qu'une exponentielle, de fréquence f , à l'entrée du filtre soit non distordue :

$$\sum_{k=0}^p a_k e^{-j2\pi k f} = 1 \quad (2.11)$$

On cherche donc à conserver la puissance à une fréquence f , tout en minimisant les puissances aux autres fréquences. Si donc le signal contient une composante à cette fréquence, cette composante sera réhaussée par rapport au reste qu'on cherche à minimiser. En observant la puissance en sortie du filtre en fonction de f , on observe donc des pics aux fréquences présentes dans le signal $x(n)$. Pour calculer ce filtre, soit $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_p]^T$ le vecteur des coefficients du filtre et notons que

$$\mathbb{E} \{|y(n)|^2\} = \mathbf{a}^H \mathbf{R} \mathbf{a} \quad (2.12)$$

avec

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-p) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(p) & \dots & \dots & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Le problème est donc le suivant

$$\min_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^H \mathbf{R} \mathbf{a} \text{ sous contrainte } \mathbf{e}^H(f) \mathbf{a} = 1$$

où $\mathbf{e}(f) = [1 \ e^{j2\pi f} \ \dots \ e^{j2\pi p f}]^T$. Le vecteur \mathbf{a} qui satisfait ces conditions est donné par :

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}} \quad (2.14)$$

La puissance en sortie du filtre est prise comme "estimateur spectral" :

$$S_{\text{CAPON}}(f) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(f) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(f)} \quad (2.15)$$

La méthode de Capon ne nécessite aucune hypothèse spéciale sur le signal. De plus, elle permet en général d'obtenir une meilleure résolution que le périodogramme, notamment pour de faibles valeurs de N .

Alternative à l'analyse classique, l'*analyse spectrale paramétrique* présuppose donc une connaissance particulière du phénomène observé. Elle consiste en trois étapes. Dans un premier temps, on sélectionne un modèle : les paramètres du modèle sont alors estimés de façon à approximer au mieux la séquence de signal observée. Enfin, on réécrit la DSP (ou la corrélation) directement en fonction des paramètres.

Chapitre 3

Modèles rationnels linéaires

3.1 Définition

La plupart des processus sont bien approximés par un modèle rationnel linéaire. Un modèle général est le modèle $ARMA(p, q)$, (**A**uto **R**egressive **M**oving **A**verage) défini par l'équation de récurrence :

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^q b_k u(n-k) \quad (3.1)$$

Il peut être vu comme la sortie d'un filtre linéaire, dont l'entrée est $u(n)$ et la fonction de transfert $H(z)$ telle que :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} B(z) &= 1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k} \\ A(z) &= 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

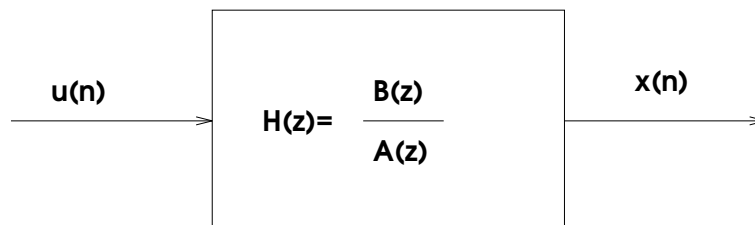


FIG. 3.1 – Processus $ARMA(p, q)$ vu comme la sortie d'un filtre linéaire.

On montre que pour assurer que le processus $x(n)$ soit stationnaire, il faut que $H(z)$ soit stable et causal, *i.e.* que $A(z)$ ait ses zéros à l'intérieur du cercle unité. On considère que l'entrée $u(n)$ du filtre est un bruit blanc et on suppose également en général que $u(n)$ est un processus gaussien.

Cas particuliers :

AR(p) : $x(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + u(n)$: filtre "tout-pôle"

MA(q) : $x(n) = \sum_{k=0}^q b_k u(n-k)$: filtre "tout-zéro"

3.2 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance est la transformée en z de la fonction de corrélation. Pour le modèle ARMA(p,q), on obtient :

$$S_x(z) = H(z)H^*(1/z^*)S_u(z) = \frac{B(z)B^*(1/z^*)}{A(z)A^*(1/z^*)}S_u(z) \quad (3.4)$$

En supposant le bruit d'entrée blanc, et en évaluant le spectre en $z = e^{j2\pi f}$, on a :

$$S_x(f) = \sigma^2 \frac{\mathbf{e}_q^H(f) \mathbf{b} \mathbf{b}^H \mathbf{e}_q(f)}{\mathbf{e}_p^H(f) \mathbf{a} \mathbf{a}^H \mathbf{e}_p(f)} = \sigma^2 \frac{|1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-j2\pi k f}|^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi k f}|^2} \quad (3.5)$$

avec $\mathbf{a} = (1, a_1, \dots, a_p)^T$, $\mathbf{b} = (1, b_1, \dots, b_q)^T$ et $\mathbf{e}_q(f) = (1, e^{j2\pi f}, \dots, e^{j2\pi q f})^T$, $\mathbf{e}_p(f) = (1, e^{j2\pi f}, \dots, e^{j2\pi p f})^T$.

Le spectre d'un modèle ARMA(p,q) dépend uniquement des paramètres $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q, \sigma^2)$.

Cas particuliers :

AR(p) :

$$S_x(f) = \frac{\sigma^2}{|A(f)|^2} = \frac{\sigma^2}{\mathbf{e}_p^H(f) \mathbf{a} \mathbf{a}^H \mathbf{e}_p(f)} = \frac{\sigma^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi k f}|^2} \quad (3.6)$$

MA(q) :

$$S_x(f) = \sigma^2 |B(f)|^2 = \sigma^2 \mathbf{e}_q^H(f) \mathbf{b} \mathbf{b}^H \mathbf{e}_q(f) = \sigma^2 \left| 1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-j2\pi k f} \right|^2 \quad (3.7)$$

De façon générale, les processus **AR** ont des spectres possédant des **pics** (dûs aux pôles dans le spectre) alors que les processus **MA** présentent des "VALLÉES" dans leur spectre (cf. Figure 3.2).

3.3 Relations entre les modèles

On peut exprimer (cf théorème de Wold) tout modèle ARMA(p,q) ou AR(p) par un modèle MA(∞). De même, on peut exprimer tout modèle ARMA(p,q) ou MA(q) par un modèle AR(∞). Calculons par exemple le modèle AR(∞) équivalent au modèle ARMA(p,q) en écrivant que les deux réponses impulsionnelles sont identiques :

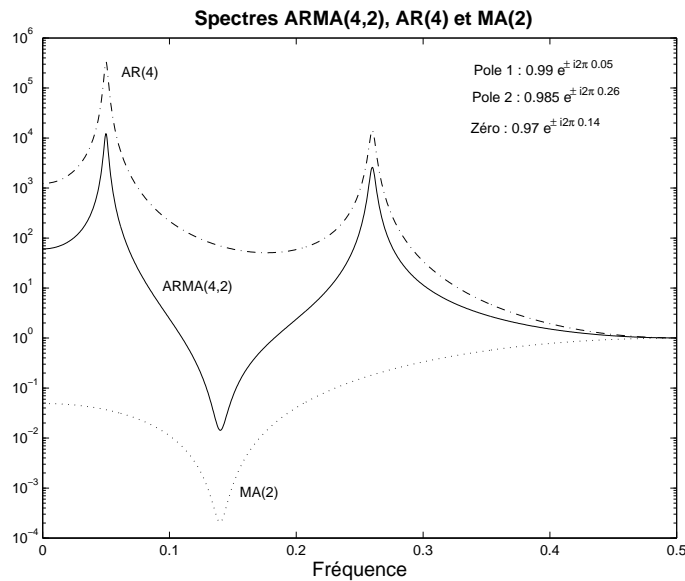


FIG. 3.2 – Différences entre spectres ARMA, AR et MA.

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)} \Leftrightarrow A(z) = B(z)C(z) \quad (3.8)$$

D'où :

$$c_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^q b_k c_{n-k} + a_n & 1 \leq n \leq p \\ -\sum_{k=1}^q b_k c_{n-k} & n > p \end{cases} \quad (3.9)$$

On peut éventuellement choisir un modèle AR au lieu d'un modèle ARMA et néanmoins avoir une bonne approximation si l'ordre choisi est suffisamment grand. Cependant, l'ordre nécessaire risque d'être élevé, ce qui conduit à des problèmes de coût calculatoire et de précision d'estimation des paramètres AR.

3.4 Equations de Yule-Walker

On montre que la fonction d'autocorrélation d'un processus ARMA(p,q) vérifie les équations suivantes, appelées **équations de Yule-Walker** :

$$r_{xx}(m) = \begin{cases} r_{xx}^*(-m) & m < 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k r_{xx}(m-k) + \sigma^2 \sum_{k=m}^q b_k h_{k-m}^* & m \in [0, q] \\ -\sum_{k=1}^p a_k r_{xx}(m-k) & m > q \end{cases} \quad (3.10)$$

On peut récrire ces équations sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} r_{xx}(q) & r_{xx}(q-1) & \cdot & \cdot & r_{xx}(q-p+1) \\ r_{xx}(q+1) & r_{xx}(q) & \cdot & \cdot & r_{xx}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(q+p-1) & r_{xx}(q+p-2) & \cdot & \cdot & r_{xx}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{xx}(q+1) \\ r_{xx}(q+2) \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{xx}(q+p) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Cas AR(p) :

$$\begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \cdot & \cdot & r_{xx}(-p+1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdot & \cdot & r_{xx}(-p+2) \\ \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \cdot \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \cdot & \cdot & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{xx}(p) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Le spectre s'écrit directement à partir de la connaissance de $\{r_{xx}(k)\}_{k=0..p}$ et de ces récursions.

La majorité des méthodes d'estimation des paramètres ARMA,AR,MA est basée sur les équations de Yule-Walker

NB : dans le cas d'un modèle MA(q), il n'existe plus de relation linéaire entre la corrélation et les paramètres MA. D'autre part, la corrélation d'un processus MA(q) est de longueur finie q ($r_{xx}(m) = 0$ pour $|m| > q$).

C'est en partie parce que **les équations de Yule-Walker permettent d'extrapoler la fonction de corrélation** que les méthodes paramétriques sont dites **haute résolution**. En effet, que ce soit pour le périodogramme ou le corrélogramme, on tronque la fonction de corrélation, d'où un fenêtrage, c'est-à-dire une perte de résolution et l'apparition de lobes secondaires. Dans le cas AR par exemple, ce n'est plus le cas puisqu'on a :

$$S_x(f) = \frac{\sigma^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi k f}|^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(m) e^{-j2\pi m f} \quad (3.13)$$

avec :

$$\phi_{xx}(m) = \begin{cases} \hat{r}_{xx}(m) & |m| \leq p \\ -\sum_{k=1}^p a_k \phi_{xx}(m-k) & |m| > p \end{cases} \quad (3.14)$$

Les figures 3.3-3.6 illustrent les différences pouvant exister entre les spectres issus de différentes modélisations d'un **même** signal.

3.5 Modèles ARMAX,...

Il existe un grand nombre de modèles. Parmi la classe des modèles linéaires, on peut définir le modèle général suivant :

$$x(n) = - \sum_{k=1}^{na} a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{nb} b_k u(n-d-k) + \sum_{k=1}^{nc} c_k v(n-k) \quad (3.15)$$

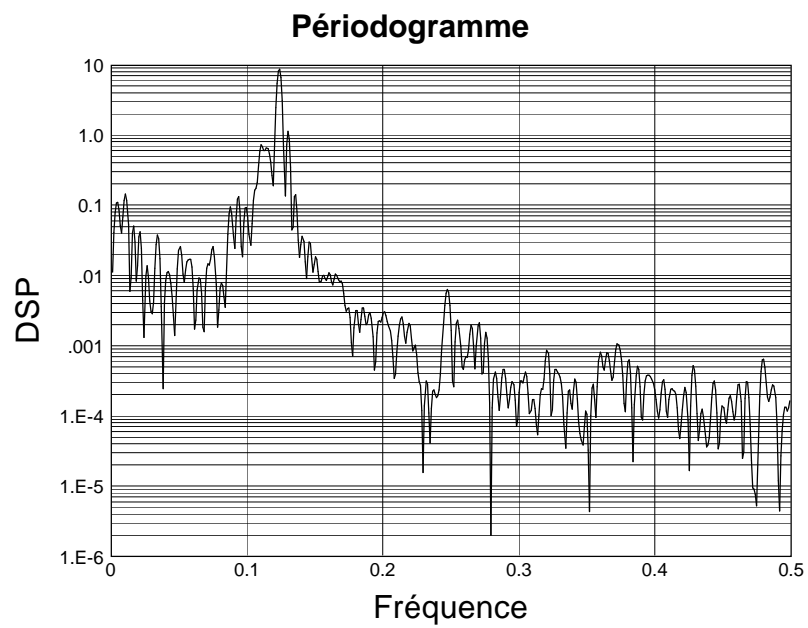


FIG. 3.3 – Périodogramme du signal.

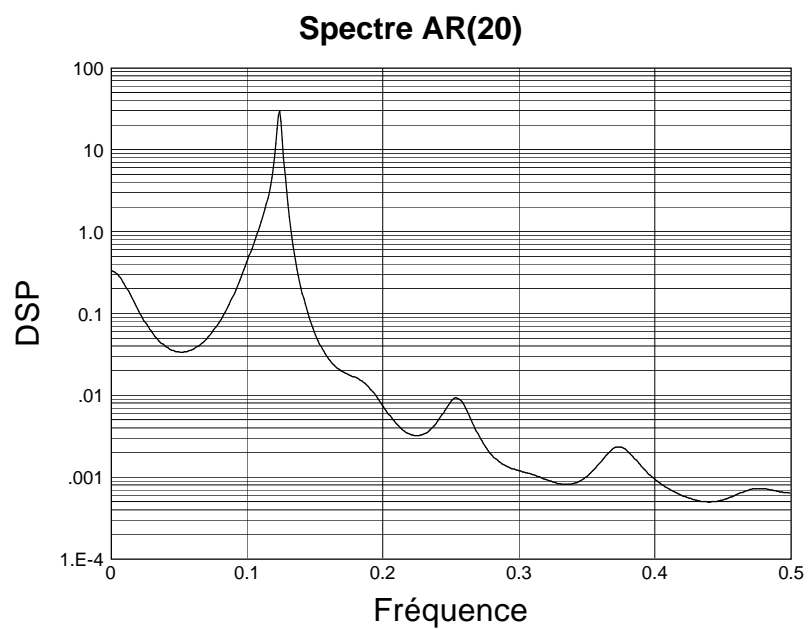


FIG. 3.4 – Spectre issu d'une modélisation AR(20) du signal.

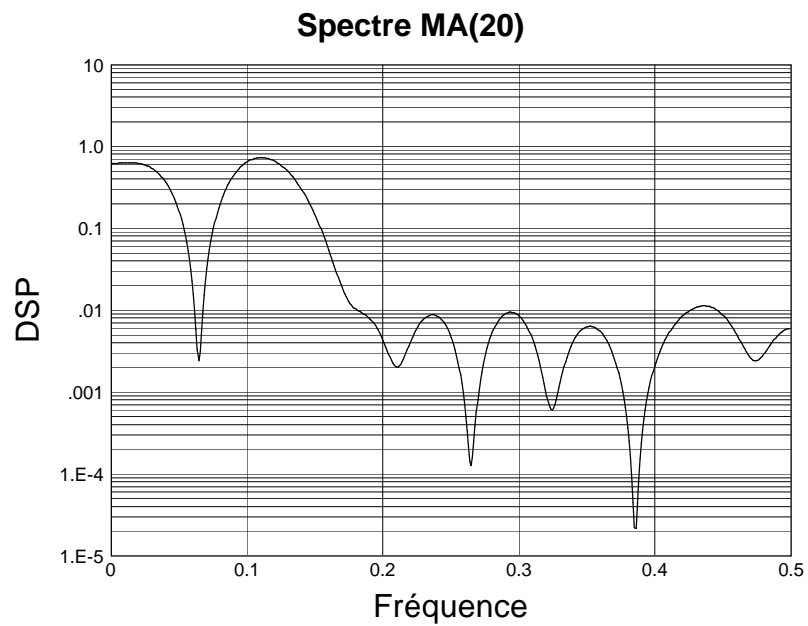


FIG. 3.5 – Spectre issu d'une modélisation MA(20) du signal.

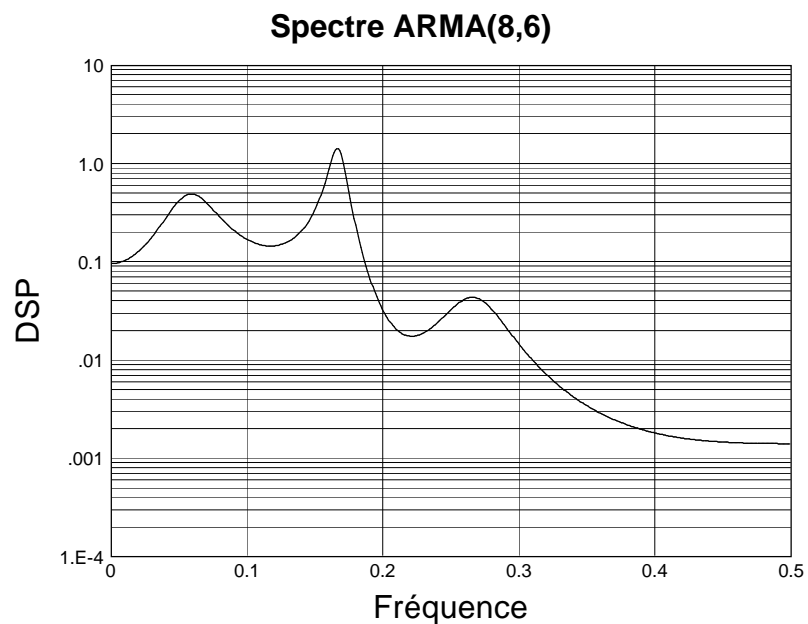


FIG. 3.6 – Spectre issu d'une modélisation ARMA(8,6) du signal.

où $u(n)$ est un bruit blanc et $v(n)$ une entrée de contrôle. Ce modèle est dit ARMAX (ARMA with exogenous signal).

Les cas particuliers suivants sont souvent considérés :

- $nc = 0$: il s'agit du modèle ARMA(na, nb) classique
- $nb = 0$: modèle ARX
- $nc = nb = 0$: modèle AR(na)

Un cas spécial de modèle ARMA est le modèle ARIMA pour lequel le polynôme $A(z)$ est de la forme :

$$A(z) = (1 - z^{-1})^L A_1(z) \quad (3.16)$$

où les zéros de $A_1(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité. Il s'agit en fait d'un intégrateur d'ordre L d'un processus ARMA.

Dans le domaine des modèles ARMA, Grenier a proposé un modèle ARMA pour lequel les paramètres AR et MA dépendent du temps :

$$x(n) = - \sum_{k=1}^{na} a_k(n-k)x(n-k) + \sum_{k=0}^{nb} b_k(n-k)u(n-k) \quad (3.17)$$

Dans la suite de ce cours, on s'intéressera plus particulièrement aux modèles AR et ARMA. On présentera les principales méthodes d'estimation des paramètres AR et notamment le lien existant entre la prédiction linéaire et les équations de Yule-Walker.

Chapitre 4

Estimation des paramètres d'un modèle AR

4.1 Relation AR-Prédiction linéaire

Supposons que $x(n)$ soit un processus AR(p). On cherche à trouver le **meilleur prédicteur d'ordre p** de $x(n)$:

$$\hat{x}(n) = - \sum_{k=1}^p \alpha_k x(n-k) \quad (4.1)$$

Pour cela, on cherche les coefficients α_k qui minimisent la puissance de l'erreur de prédiction :

$$\rho = E \{ |e(n)|^2 \} = E \{ |\hat{x}(n) - x(n)|^2 \} \quad (4.2)$$

Or :

$$\begin{aligned} \rho &= E \left\{ \left[x(n) + \sum_{k=1}^p \alpha_k x(n-k) \right] \left[x^*(n) + \sum_{k=1}^p \alpha_k^* x^*(n-k) \right] \right\} \\ &= r_{xx}(0) + \sum_{k=1}^p \alpha_k r_{xx}(-k) + \sum_{k=1}^p \alpha_k^* r_{xx}(k) + \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^p \alpha_k \alpha_m^* r_{xx}(m-k) \\ &= r_{xx}(0) + \boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{r} + \mathbf{r}^H \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \vdots \\ r_{xx}(p) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \cdot & \cdot & r_{xx}(-p+1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdot & \cdot & r_{xx}(-p+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \cdot & \cdot & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

D'où, la minimisation revient à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = 2\mathbf{r} + 2\mathbf{R}\alpha = 0 \Leftrightarrow \mathbf{R}\alpha = -\mathbf{r} \quad (4.6)$$

On retrouve les équations de Yule-Walker :

Le meilleur prédicteur d'ordre p d'un processus AR(p) est donné par les paramètres AR

On a :

$$\rho_{\min} = \sum_{k=0}^p \alpha_k r_{xx}(-k) \quad (4.7)$$

Remarque 4.1. Le meilleur prédicteur est celui qui rend l'erreur orthogonale aux données. En effet, pour minimiser l'erreur entre $x(n)$ et une combinaison linéaire des $\{x(n-k)\}_{k=1}^p$, il faut projeter orthogonalement $x(n)$ sur l'espace engendré par $\{x(n-k)\}_{k=1}^p$. De fait, l'erreur de prédiction devient orthogonale aux $\{x(n-k)\}_{k=1}^p$. Ceci peut se retrouver en écrivant que, $\forall k \in [1, p]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{e(n)x^*(n-k)\} &= \mathbb{E}\left\{\sum_{\ell=0}^p \alpha_{\ell} x(n-\ell)x^*(n-k)\right\} \\ &= \sum_{\ell=0}^p \alpha_{\ell} r_{xx}(k-\ell) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

au vu de (4.6). Les coefficients optimaux α_k sont donc ceux qui rendent l'erreur de prédiction $e(n)$ orthogonale (i.e. non corrélée) aux données $\{x(n-1), \dots, x(n-p)\}$. L'innovation $e(n)$ peut être vue comme l'information qui est contenue dans $x(n)$ et qui n'était pas dans $\{x(n-1), \dots, x(n-p)\}$.

2 différences :

- $u(n)$ est l'entrée du filtre AR alors que $e(n)$ est la sortie du filtre prédicteur.
- $e(n)$ n'est pas blanc dans le cas d'un processus non AR(p).

A cause de la propriété précédente, on estime généralement les paramètres AR par minimisation de l'erreur de prédiction linéaire. Il existe une autre approche que celle de la prédiction linéaire qui a été proposée par Burg et appelée méthode du maximum d'entropie. Comme on l'a vu, si l'on suppose connus $\{r_{xx}(k)\}_{k=0, \dots, p}$, alors la fonction d'autocorrélation est implicitement extrapolée (via les équations de Yule-Walker) pour un processus AR. Burg s'est alors posé la question suivante pour un processus quelconque : si l'on connaît $\{r_{xx}(k)\}_{k=0, \dots, p}$, comment est-il possible d'extrapoler $r_{xx}(p+1), r_{xx}(p+2), \dots$ de manière à garantir le caractère semi-défini positif de la fonction de corrélation ? Il a alors montré que parmi toutes les extrapolations possibles, celle qui donne l'entropie maximale correspond à un processus AR. En d'autres termes, le processus AR est "le processus le plus aléatoire" qui permette d'extrapoler la fonction d'autocorrélation à partir de la connaissance de $\{r_{xx}(k)\}_{k=0, \dots, p}$. Burg considère cette propriété importante dans la mesure où elle permet de faire le moins d'hypothèses possible (telle que corrélation nulle) sur la fonction d'autocorrélation en dehors de $\{r_{xx}(k)\}_{k=0, \dots, p}$. Du fait de l'analogie que

nous venons de présenter, la méthode du maximum d'entropie est souvent assimilée à la modélisation AR. Dans la suite de cours, elle sera plutôt associée à la méthode proposée par Burg pour estimer les paramètres AR.

Dans la suite, nous présentons différentes méthodes d'estimation de ces paramètres AR, fondées soit sur une minimisation de l'erreur de prédiction, soit sur l'algorithme de Burg.

4.2 Méthodes d'estimation

4.2.1 Algorithme de Levinson

C'est un algorithme qui permet de résoudre tout système du type $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec \mathbf{A} Toeplitz, donc en particulier les équations normales de Yule-Walker :

$$\begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \cdot & \cdot & r_{xx}(-p) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdot & \cdot & r_{xx}(-p+1) \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ r_{xx}(p) & r_{xx}(p-1) & \cdot & \cdot & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_p \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Principe : Trouver de façon récursive les paramètres d'ordre k en fonction des paramètres d'ordre $k-1$.

Algorithme :

Initialisation :

$$\begin{aligned} a_1[1] &= -\frac{r_{xx}(1)}{r_{xx}(0)} \\ \rho_1 &= (1 - |a_1[1]|^2)r_{xx}(0) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Récursion :

$$\begin{aligned} a_k[k] &= -\frac{r_{xx}(k) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{k-1}[i] r_{xx}(k-i)}{\rho_{k-1}} = k_k \\ a_k[i] &= a_{k-1}[i] + a_k[k] a_{k-1}^*[k-i] \quad i = 1, \dots, k-1 \\ \rho_k &= [1 - |a_k[k]|^2] \rho_{k-1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

En pratique, on utilise un estimateur de la fonction de corrélation. Pour assurer un système à minimum de phase (pôles à l'intérieur du cercle unité), on prend l'estimateur biaisé.

Intérêts :

- $O(p^2)$ opérations pour estimer les paramètres.
- possibilité de récupérer tous les prédicteurs d'ordre inférieur.

NB : Les coefficients $\{k_k\}_{k=1, \dots, p}$ sont dits coefficients de réflexion. Trois représentations équivalentes sont possibles pour un processus AR :

$$\{\rho_p, a_p[1], \dots, a_p[p]\} \Leftrightarrow \{r_{xx}(0), k_1, \dots, k_p\} \Leftrightarrow \{r_{xx}(0), \dots, r_{xx}(p)\} \quad (4.12)$$

4.2.2 Algorithme de Burg

On a vu que Burg avait montré que dans le cas où $x(n)$ est Gaussien, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{r_{xx}(k)\}_{k=0\dots p} \text{ connus} \\ \text{entropie maximale} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \{r_{xx}(k)\}_{k=0\dots p} \text{ connus} \\ x(n) \text{ spectre } AR(p) \end{array} \right.$$

Principe de l'algorithme de Burg : c'est un algorithme récursif en ordre qui minimise par rapport au coefficient de réflexion la puissance des erreurs de prédiction directe et rétrograde. On a :

$$e_k^f(n) = x(n) + \sum_{m=1}^k a_k[m] x(n-m) = e_{k-1}^f(n) + k_k e_{k-1}^b(n-1) \quad (4.13)$$

$$e_k^b(n) = x(n-k) + \sum_{m=1}^k a_k^*[m] x(n-k+m) = e_{k-1}^b(n-1) + k_k^* e_{k-1}^f(n) \quad (4.14)$$

On cherche à minimiser :

$$\rho_k = \frac{1}{2}(\rho_k^f + \rho_k^b) = \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{N-1} |e_k^f(n)|^2 + |e_k^b(n)|^2 \quad (4.15)$$

Si l'on suppose connus k_1, k_2, \dots, k_{k-1} , alors ρ_k ne dépend que de k_k . On a donc :

$$k_k = \frac{-2 \cdot \sum_{n=k}^{N-1} e_{k-1}^f(n) e_{k-1}^{b*}(n-1)}{\sum_{n=k}^{N-1} |e_{k-1}^f(n)|^2 + |e_{k-1}^b(n-1)|^2} \quad (4.16)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} a_k[k] &= k_k \\ a_k[i] &= a_{k-1}[i] + a_k[k] a_{k-1}^*[k-i] \quad i = 1 \dots k-1 \\ \rho_k &= (1 - |a_k[k]|^2) \rho_{k-1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

L'algorithme de Burg garantit un système à minimum de phase.

Inconvénients :

- dédoublement de raies dans le cas d'un sinus + bruit avec fort SNR.
- estimation des pics dépendant de la phase.

4.2.3 Algorithmes des moindres carrés

En général, on utilise des méthodes qui consistent à minimiser, au sens des moindres carrés, la puissance de l'erreur de prédiction linéaire.

Soit $\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k)$ le prédicteur d'ordre p de $x(n)$ et $e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k)$ l'erreur de prédiction.

On peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_N \\ e_{N+1} \\ \vdots \\ e_{N+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \\ x_p & & & x_1 & 0 \\ x_{p+1} & & & & x_1 \\ \vdots & \ddots & & & \\ x_N & & \ddots & & x_{N-p} \\ 0 & x_N & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

On cherche alors à minimiser :

$$\rho = \sum_{n=n_0}^{n_1} |e(n)|^2 = \sum_{n=n_0}^{n_1} \left| x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \right|^2 = \|\mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{h}\|^2 \quad (4.19)$$

Selon l'horizon $[n_0, n_1]$ sur lequel on effectue la minimisation, on a des algorithmes différents :

- $[1, N+p]$ avec fenêtrage (on suppose le signal nul en dehors de $[1, N]$) → **méthode des corrélations.**
- $[1, N]$: préfenêtrage.
- $[p+1, N+p]$: postfenêtrage.
- $[p+1, N]$: sans fenêtrage (on n'utilise que la portion disponible du signal) → **méthode des covariances.**

Quelle que soit la méthode, le vecteur qui minimise (4.19) est donné par :

$$\mathbf{a} = -(\mathbf{X}^H \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^H \mathbf{h} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} \quad (4.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(i, j) &= \sum_{n=n_0}^{n_1} x^*(n-i)x(n-j) \\ \mathbf{r}(j) &= \sum_{n=n_0}^{n_1} x(n)x^*(n-j) \end{aligned} \quad (4.21)$$

1er cas : méthode des corrélations

On a :

$$\mathbf{R}(i, j) = [\mathbf{X}^H \mathbf{X}](i, j) = \sum_{n=1}^{N-i+j} x^*(n)x(n+i-j) \quad (4.22)$$

La matrice \mathbf{R} , qui est de Toeplitz, n'est autre que la matrice des corrélations des équations de Yule-Walker dans laquelle l'estimateur biaisé de la corrélation est utilisé : on peut donc utiliser l'algorithme de Levinson-Durbin pour résoudre cette équation.

2ème cas : méthode des covariances

Ici :

$$\mathbf{R}(i, j) = [\mathbf{X}^H \mathbf{X}](i, j) = \sum_{n=p+1}^N x^*(n-i)x(n-j) \quad (4.23)$$

Dans ce cas, la matrice \mathbf{R} , bien qu'hermitienne n'est plus de Toeplitz : on ne peut plus appliquer l'algorithme de Levinson-Durbin. Néanmoins, Morf et al ont développé un algorithme nécessitant $O(p^2)$ opérations pour résoudre de tels systèmes.

3ème cas : méthode des covariances modifiée

Marple a proposé de minimiser, non plus la puissance de l'erreur de prédiction avant mais la demi somme des erreurs de prédiction arrière et avant :

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho^f + \rho^b) = \frac{1}{2} \sum_{n=p+1}^N |e^f(n)|^2 + |e^b(n)|^2 \quad (4.24)$$

où :

$$e^f(n) = x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \quad (4.25)$$

$$e^b(n) = x(n-p) + \sum_{k=1}^p a_k^* x(n-p+k) \quad (4.26)$$

Dans ce cas, la matrice \mathbf{R} est donnée par :

$$\mathbf{R}(i, j) = \sum_{n=p+1}^N x^*(n-i)x(n-j) + x(n+i-p)x^*(n+j-p) \quad (4.27)$$

Marple a proposé un algorithme rapide pour résoudre ce système.

CONCLUSIONS SUR ESTIMATION AR

Avantages :

Levinson : \mathbf{R} Toeplitz, faible complexité, stabilité du filtre AR.

Burg : pas de fenêtre, stabilité du filtre AR.

Morf, Marple : pas de fenêtre, meilleure résolution, biais faible.

Inconvénients :

Levinson : estimation des corrélations, fenêtrage du signal, résolution faible.

Burg : dédoublement de raies, biais sur fréquences.

Morf, Marple : stabilité non garantie.

QUELQUES REMARQUES :

- en général, on n'utilise pas Levinson lorsque le nombre de points du signal est petit.
- lorsque $N \rightarrow \infty$, Levinson et Morf sont équivalents.
- ces estimateurs sont asymptotiquement distribués selon une loi normale et atteignent la borne de Cramér-Rao pour un processus AR(p) et un bruit blanc d'entrée.

PROPRIÉTÉS DES MÉTHODES AR :

- * plus haute résolution que les méthodes classiques : la possibilité d'extrapoler la fonction de corrélation, donc d'éliminer le fenêtrage élimine les lobes secondaires.
- * algorithmes rapides.
- * bonne performance pour des signaux de courte durée.
- difficulté à choisir l'ordre du modèle.
- résolution décroissante avec le SNR.
- doublement de raies dans certains cas.
- contrairement au périodogramme, pour un signal sinusoïdal, l'amplitude du pic AR n'est pas directement proportionnelle à la puissance de la sinusoïde.
- dans le cas d'une somme de n sinusoïdes bruitées, une modélisation $AR(L)$ (avec $L > 2n$) associée à une recherche des n pôles (ou maxima) prépondérants permet d'obtenir une bonne estimation des fréquences lorsque le SNR est "bon". Néanmoins, ces estimateurs restent biaisés et on peut même montrer que le biais est de l'ordre de $O(1/L^3)$

NB : Marple a montré que pour 2 sinus noyés dans du bruit, la différence minimum entre les 2 fréquences qu'un modèle $AR(p)$ et que le périodogramme pouvaient résoudre est :

$$\begin{aligned}\delta f_{AR} &\simeq \frac{1.03}{p[(p+1).SNR]^{0.31}} \\ \delta f_{PER} &\simeq \frac{0.86}{N}\end{aligned}\quad (4.28)$$

où p désigne l'ordre du modèle AR, N le nombre de points et SNR le rapport signal sur bruit. En fonction de p , N , SNR , le périodogramme peut s'avérer inférieur ou supérieur (en termes de résolution) à un modèle AR. Néanmoins, la résolution n'est pas le seul critère à prendre en compte : la précision (biais, variance) est elle aussi un point important. En terme de précision, les méthodes paramétriques s'avèrent généralement supérieures. La figure qui suit (4.1) montre, en fonction du rapport signal sur bruit, l'ordre minimum du modèle AR pour avoir une résolution comparable au périodogramme :

En résumé, pour de faibles SNR ou un grand nombre de points, le périodogramme s'avère aussi bon (en résolution) que les méthodes paramétriques qui, elles, nécessitent un fort rapport signal sur bruit. Leur intérêt est qu'elles sont utilisables sur des tranches de signal courtes contrairement à la FFT dont la résolution dépend essentiellement de la longueur du signal traité.

Pour illustrer ceci, les figures 4.2-4.9 comparent le périodogramme et le spectre issu d'un modèle $AR(12)$ pour un signal constitué de 2 sinus noyés dans un bruit additif. Les figures 4.2-4.5 montrent l'influence du nombre de points N .

On constate que la modélisation AR permet de retrouver les 2 fréquences quel que soit N alors que le périodogramme est sensible à ce paramètre. Par contraste, les figures 4.6-4.9 illustrent l'influence du SNR sur la modélisation AR à nombre de points fixe.

On s'aperçoit, au vu des figures précédentes, que le SNR doit être suffisamment bon pour que le spectre $AR(12)$ puisse résoudre les 3 fréquences. Il est à noter également, que si l'ordre du modèle avait été choisi plus élevé, le SNR minimum pour détecter les 3 sinus aurait été plus faible (cf (4.28)).

Nous nous intéressons maintenant à l'influence de l'amplitude des sinusoïdes (voir figures 4.10, 4.11).

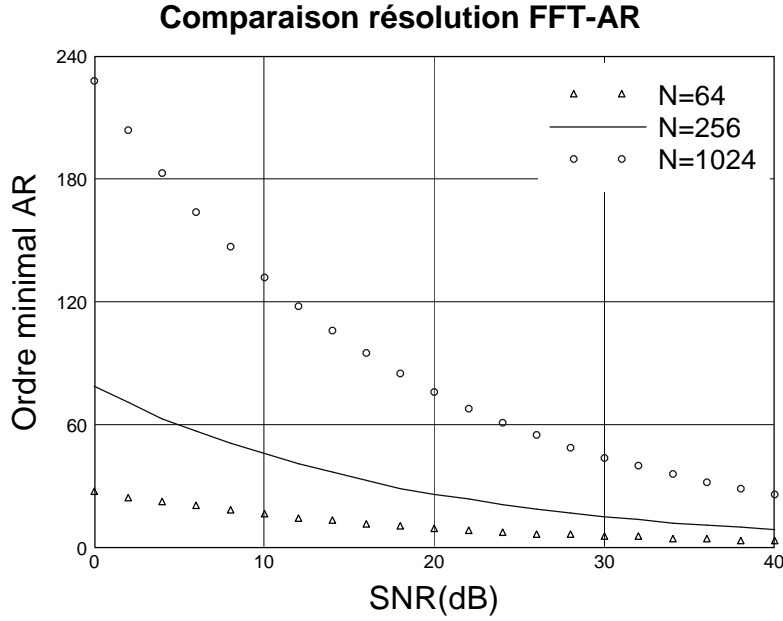


FIG. 4.1 – Ordre minimal de modélisation AR pour avoir une résolution comparable au périodogramme, en fonction de N et du SNR.

On peut constater deux phénomènes :

- Le spectre AR ne restitue pas l'amplitude des sinus. En effet, alors que les 3 sinus ont la même amplitude sur la figure 4.10, le spectre AR ne fournit pas trois pics de même hauteur. Par contre, le périodogramme permet d'estimer la puissance des signaux.
- Lorsque les sinus ont des amplitudes différentes, les faibles signaux sont masqués par les forts signaux pour le périodogramme (cf figure 4.11). Le troisième sinus est en effet de même amplitude que le premier lobe secondaire associé au second sinus. Ce phénomène n'existe pas dans le cas d'un modèle AR.

4.3 Estimation des fréquences à partir des paramètres AR

Lorsqu'on désire avoir des informations sur le contenu spectral du signal (DSP, recherche de fréquences,...), la modélisation n'est qu'une première étape : une deuxième étape est nécessaire pour accéder aux informations spectrales. Supposons qu'à partir de N points du signal, on ait estimé des paramètres AR $\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p\}$ et la variance du bruit d'entrée $\hat{\sigma}^2$. On peut alors estimer la densité spectrale de puissance du signal par :

$$\hat{S}_x(f) = \frac{\hat{\sigma}^2}{|1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k e^{-j2\pi k f}|^2} \quad (4.29)$$

On a ainsi accès à une écriture paramétrique du spectre, où n'apparaît plus directement le signal, comme c'est le cas pour la Transformée de Fourier.

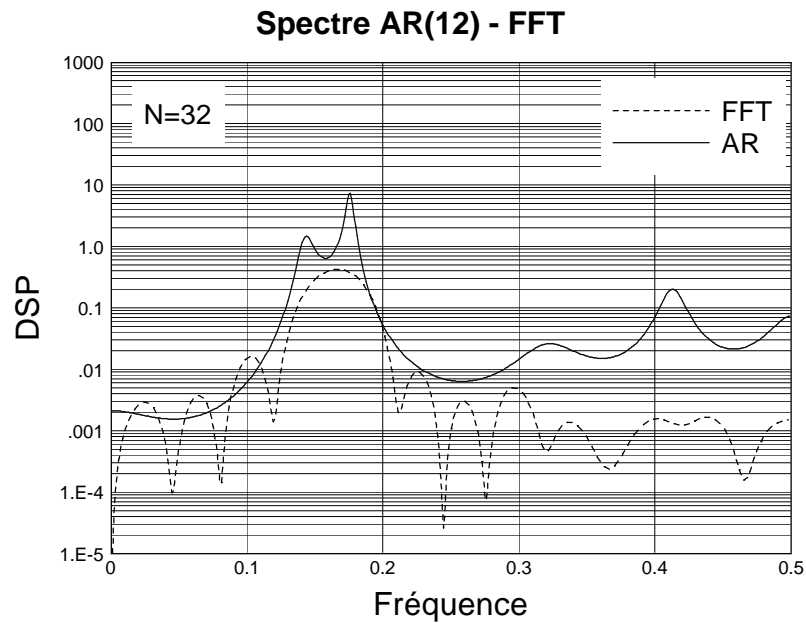


FIG. 4.2 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. $N=32$. $\text{SNR}=15\text{dB}$.

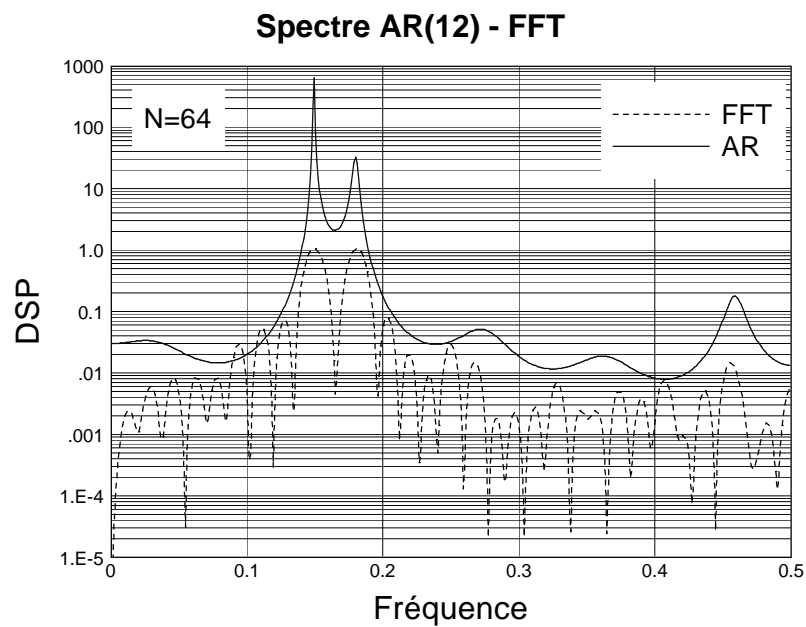


FIG. 4.3 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. $N=64$. $\text{SNR}=15\text{dB}$.

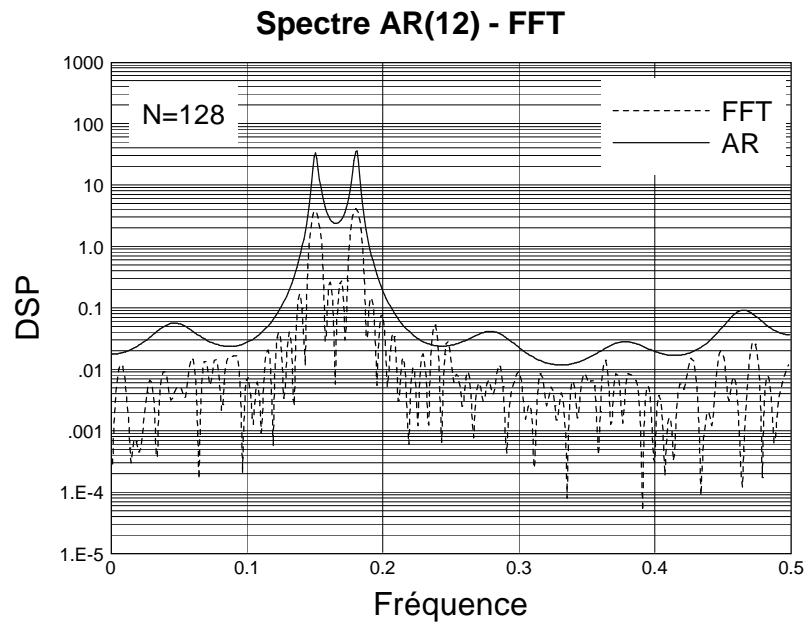


FIG. 4.4 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. $N=128$. $\text{SNR}=15\text{dB}$.

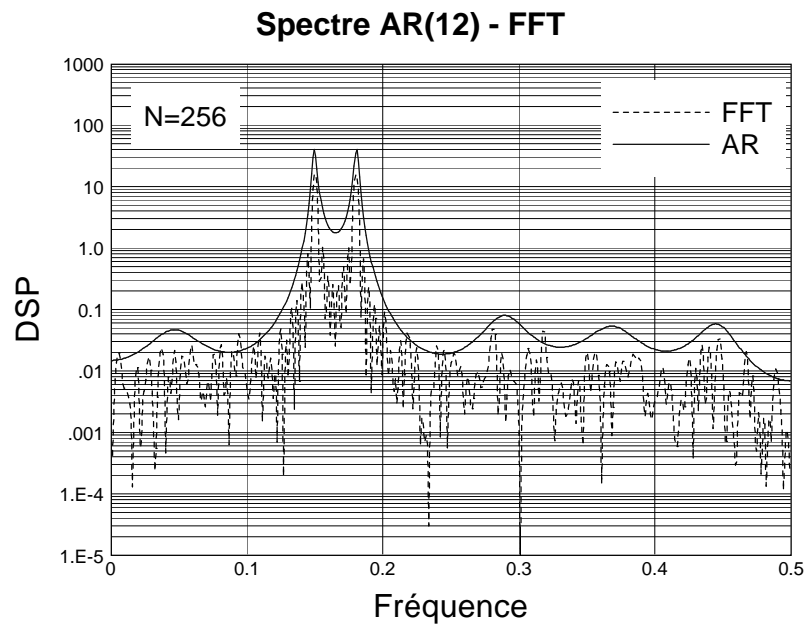


FIG. 4.5 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. $N=256$. $\text{SNR}=15\text{dB}$.

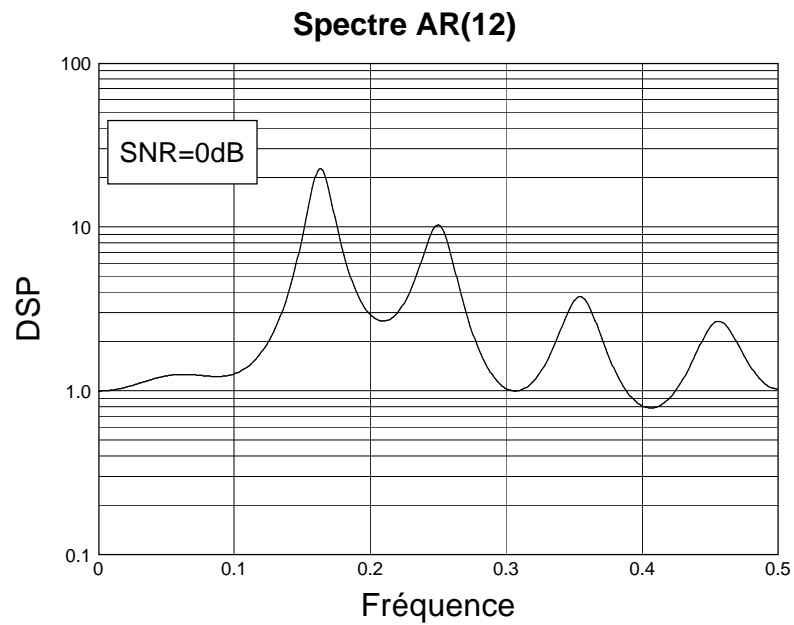


FIG. 4.6 – Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. $N=256$. SNR=0dB. $p=12$.

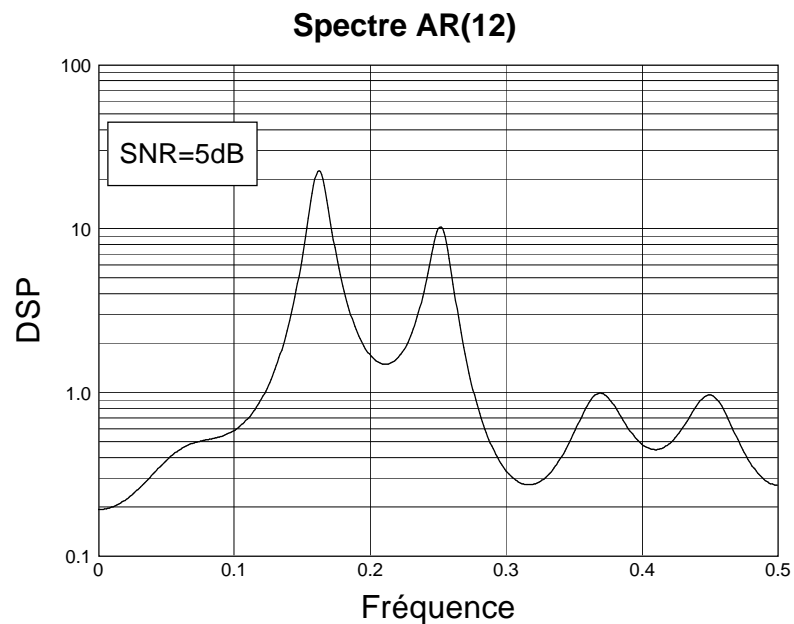


FIG. 4.7 – Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. $N=256$. SNR=5dB. $p=12$.

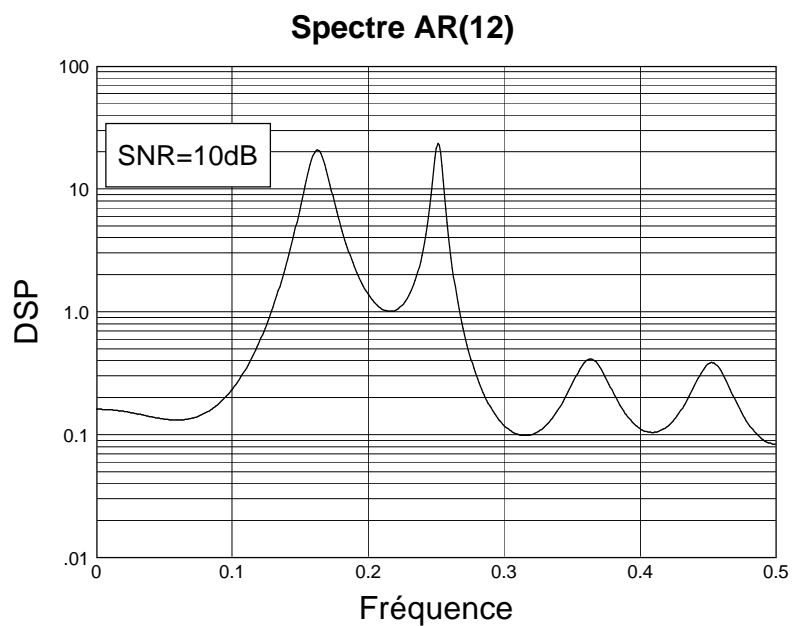


FIG. 4.8 – Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. $N=256$. SNR=10dB. $p=12$.

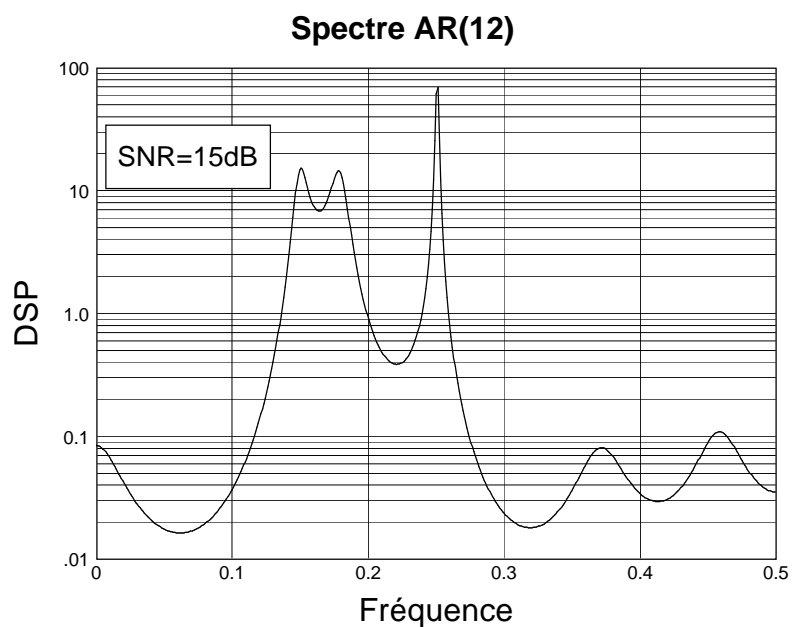


FIG. 4.9 – Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. $N=256$. SNR=15dB. $p=12$.

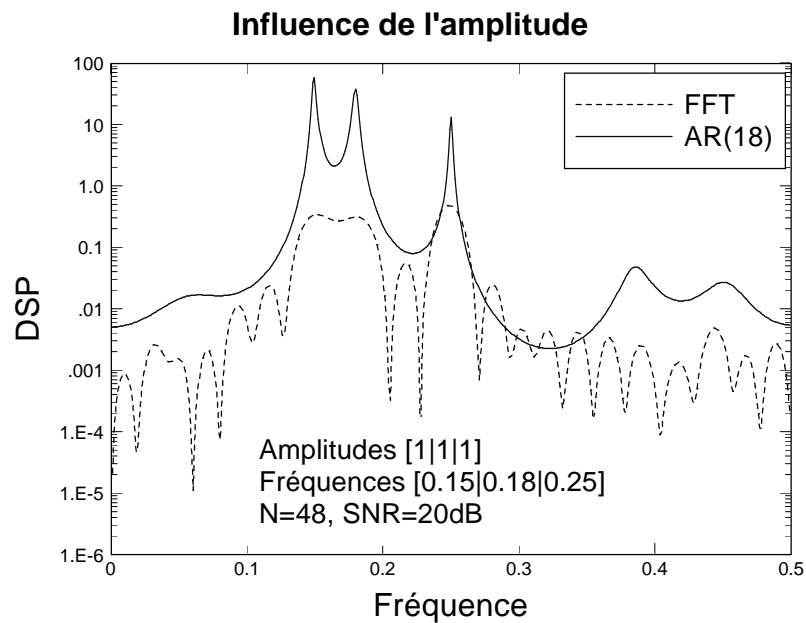


FIG. 4.10 – Influence de l'amplitude des sinusoïdes sur la modélisation AR et le périodogramme.

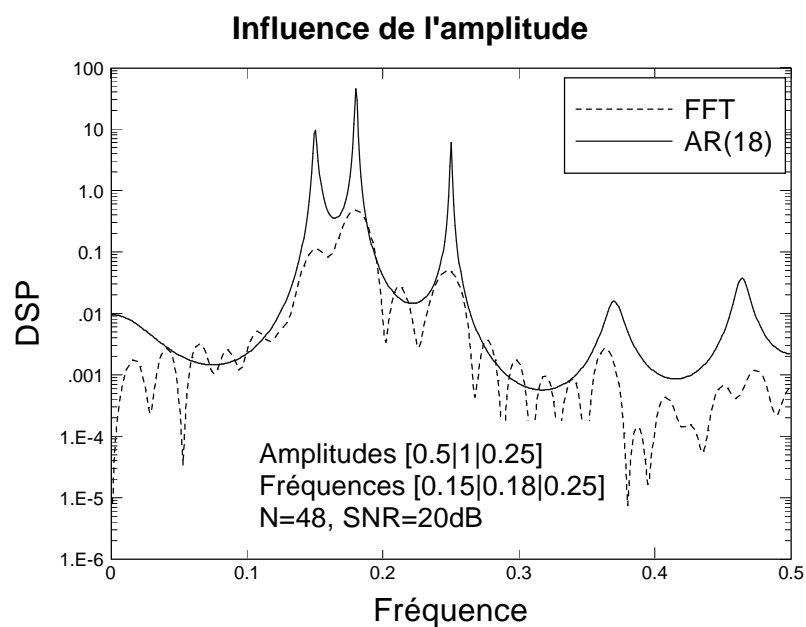


FIG. 4.11 – Influence de l'amplitude des sinusoïdes sur la modélisation AR et le périodogramme.

Souvent, on ne recherche pas la DSP sur l'ensemble des fréquences : on s'intéresse surtout aux modes de résonance du signal et plus exactement à leurs fréquences. Dans ce cas, 2 méthodes principales sont envisageables :

Méthode n°1 : Recherche des positions des maxima de $\hat{S}_x(f)$ En général, on effectue une FFT des paramètres AR $\{1, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p\}$, ce qui donne la valeur du spectre à différentes fréquences équiréparties. On recherche alors les abscisses des q maxima les plus importants :

$$\{1, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p\} \xrightarrow{FFT} \left\{ \hat{S}_x(k/nfft) \right\}_{k=0, \dots, nfft-1} \xrightarrow{\max} \{ \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_q \} \quad (4.30)$$

Méthode n°2 : Recherche des pôles du système :

$$\hat{A}(z) = \sum_{k=0}^p \hat{a}_k z^{-k} = \prod_{k=1}^p (1 - \hat{z}_k z^{-1}) \quad (4.31)$$

avec :

$$\hat{z}_k = \hat{\rho}_k e^{j2\pi \hat{f}_k} \quad (4.32)$$

Les modules $\hat{\rho}_k$ des pôles mesurent l'accuité de la résonance : plus $\hat{\rho}_k$ se rapproche de 1 (*i.e.* le pôle du cercle unité) plus la résonance est forte : ceci signifie la présence d'une harmonique dans le signal. Plus le module est amorti (c'est-à-dire < 1), plus la composante fréquentielle correspondante est amortie.

Les fréquences \hat{f}_k donnent l'information sur les fréquences présentes dans le signal. Par exemple, si l'on cherche une sinusoïde dans le signal, on choisira généralement le pôle le moins amorti (de module le plus près de 1) et on estimera la fréquence de cette sinusoïde comme la fréquence du pôle sélectionné.

Remarque 4.2. *La méthode des pôles est généralement plus précise que la méthode des maxima, même si ces 2 méthodes sont asymptotiquement équivalentes. Par exemple, il est possible que la recherche des pôles permette de discerner deux fréquences proches alors que la méthode des maxima ne le permet pas. Ceci est dû au fait qu'on utilise une FFT pour la méthode n°1. En contre partie, le calcul des zéros d'un polynôme est plus long qu'une FFT + recherche de maxima. Néanmoins, des algorithmes rapides de recherche de zéros existent.*

La figure 4.12(a) illustre la différence entre les maxima et les pôles. Une modélisation AR(16) d'un signal composé de 3 sinus (fréquences : 0.15, 0.18, 0.25) noyés dans du bruit ($SNR = 10dB$) a été effectuée. Le spectre AR est estimé à l'aide d'une FFT des paramètres AR sur 1024 points (figure 4.12(a)). D'autre part, on calcule les pôles du modèle (voir figure 4.12(b)) :

On constate donc que :

- les valeurs numériques sont légèrement différentes.
- les 3 pôles les moins amortis correspondent aux trois sinus.

4.4 Critères de sélection de l'ordre

Un des problèmes fondamentaux en modélisation paramétrique, outre le choix du modèle, concerne le choix de l'ordre :

- choisir un ordre trop faible revient à lisser le spectre.
- choisir un ordre trop élevé conduit à des pics secondaires.

Plusieurs méthodes ont été proposées qui consistent à minimiser un critère : l'ordre choisi est celui qui minimise le critère. Ce dernier dépend en général de la puissance de l'erreur de prédiction aux différents ordres. Si l'on note $\hat{\rho}_k$ la puissance de l'EPL pour une modélisation $AR(k)$, les principaux critères utilisés sont :

Akaike Information Criterion :

$$AIC(k) = N \ln(\hat{\rho}_k) + 2k \quad (4.33)$$

Final Prediction Error :

$$FPE(k) = \frac{N + k + 1}{N - k - 1} \hat{\rho}_k \quad (4.34)$$

Criterion Autoregressive Transfer Function :

$$CAT(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\tilde{\rho}_i} - \frac{1}{\tilde{\rho}_k} \tilde{\rho}_i = \frac{N}{N-i} \hat{\rho}_i \quad (4.35)$$

Minimum Description Length :

$$MDL(k) = N \ln(\hat{\rho}_k) + p \ln(N) \quad (4.36)$$

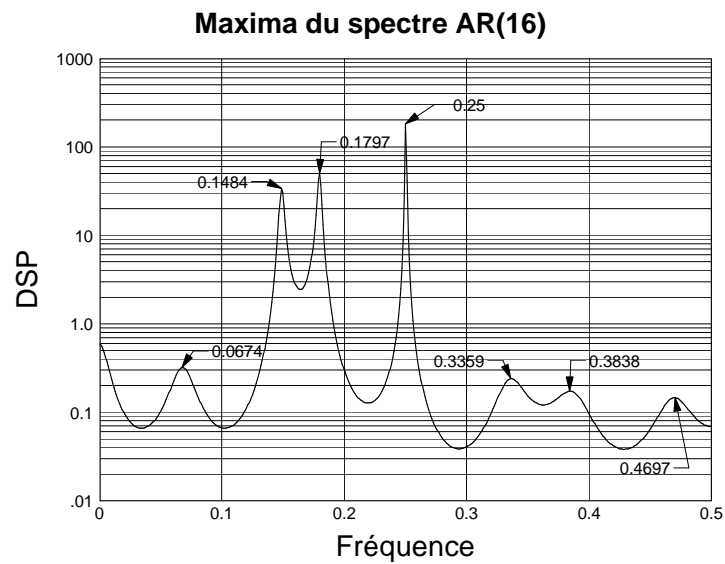
On montre qu'en fait il est très difficile d'estimer l'ordre du modèle par ces critères. Il est même montré que le critère d'Akaike par exemple est inconsistant, c'est-à-dire que, même pour un nombre de points infini, il ne donne pas avec une probabilité 1 l'ordre correct. Le choix de l'ordre est donc plus du ressort de l'expertise et de la connaissance des signaux, notamment pour des signaux réels : une procédure automatique et infaillible n'existe pas. Néanmoins, les critères précédents fournissent des informations utiles. Les critères précédents (4.33), (4.34), (4.35), (4.36) ont été testés dans le cas de 2 sinus + bruit, pour un SNR de 5dB. 256 points de signal ont été utilisés pour construire un ensemble de modèles $AR(p)$, $p \in [2, 20]$. Pour chaque valeur de p , on a calculé les expressions (4.33), (4.34), (4.35), (4.36) :

Enfin, l'influence du choix de l'ordre sur l'allure du spectre est maintenant illustrée par les figures 4.15-4.18. Pour cela, on considère un véritable processus $AR(4)$ et on fait une modélisation aux ordres 2, 4, 8 et 16 :

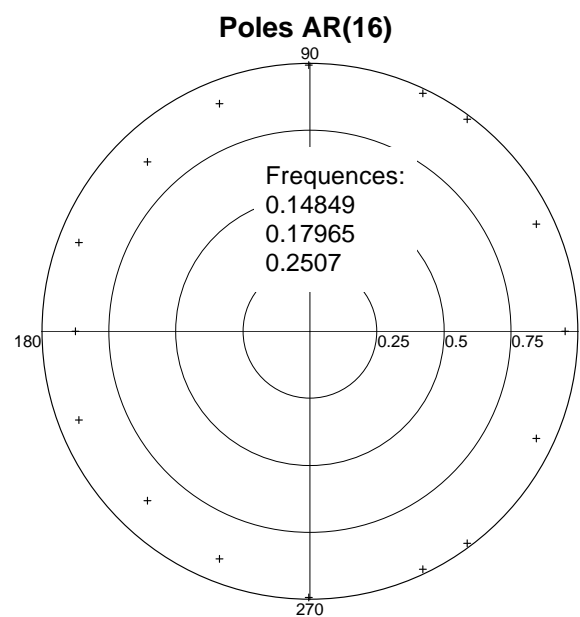
Au vu de ces figures on constate (cf Figure 4.15) qu'une "sous-détermination" de l'ordre du modèle conduit à placer un pôle approximativement au milieu des deux pôles réels. Par contre, sur les autres figures, il semble que le choix d'un ordre supérieur à 4 ne pose pas de problèmes. Néanmoins, dans le cas $p=16$, on peut s'apercevoir que parmi les 16-4 pôles supplémentaires, 2 sont placés au voisinage des pôles réels (voir figure 4.19). Ceci signifie qu'il existe 3 pôles dans une région où théoriquement n'en existent que 2. Autrement dit, un des pôles "parasites" rend difficile la sélection des véritables modes du signal. Ceci est visible sur les valeurs numériques des pôles mais pas sur l'allure du spectre (cf Figure 4.18).

D'autre part, il convient de noter que si le processus est véritablement un AR d'ordre 4, la matrice de corrélation construite pour une modélisation d'ordre 16 est théoriquement de rang 4, donc de rang déficient : ceci implique en particulier **qu'elle n'est pas inversible**. D'où théoriquement toujours, la solution d'une modélisation $AR(16)$ n'existe pas.

En pratique, étant entendu que l'on estime la fonction de corrélation, la matrice construite à partir d'estimées devient de rang plein. Néanmoins, comme l'indique l'allure des valeurs singulières de cette matrice (voir figure 4.20), elle est “presque” de rang déficient, ce qui peut conduire à des résultats numériques aberrants. Il convient donc, lorsqu'on résout les équations de Yule-Walker, de recourir à des méthodes numériques robustes.



(a) Position des maxima du spectre AR(16)



(b) Position des pôles du modèle AR(16)

FIG. 4.12 – Comparaison maxima-pôles

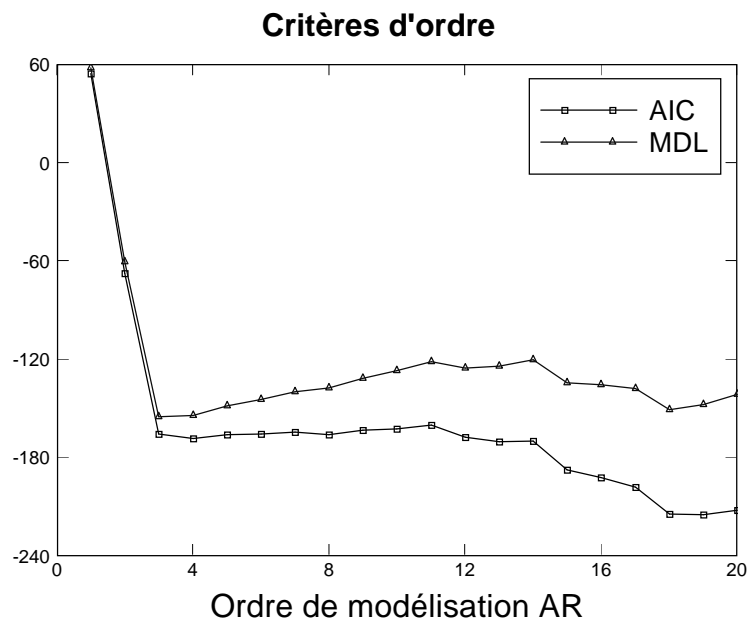


FIG. 4.13 – Critères AIC, MDL pour une modélisation $AR(p)$ de 2 sinus+bruit. SNR=5dB. N=256.

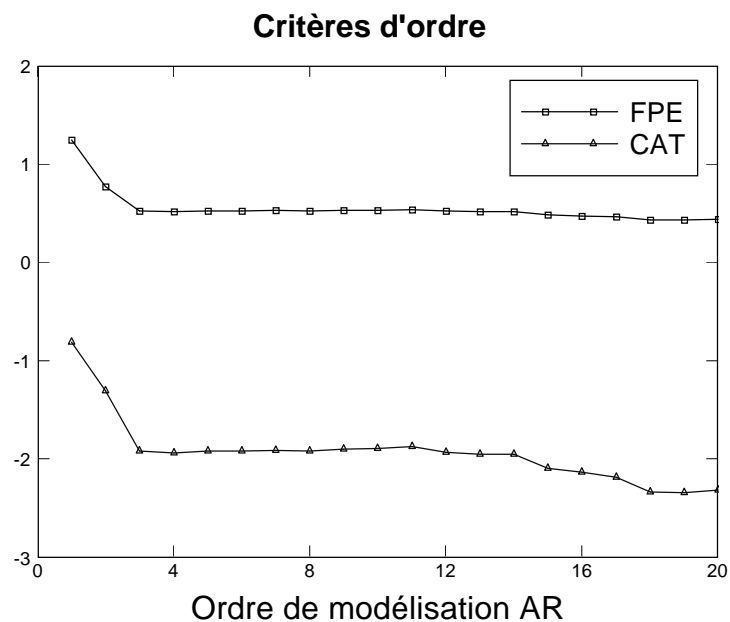


FIG. 4.14 – Critères FPE, CAT pour une modélisation $AR(p)$ de 2 sinus+bruit. SNR=5dB. N=256.

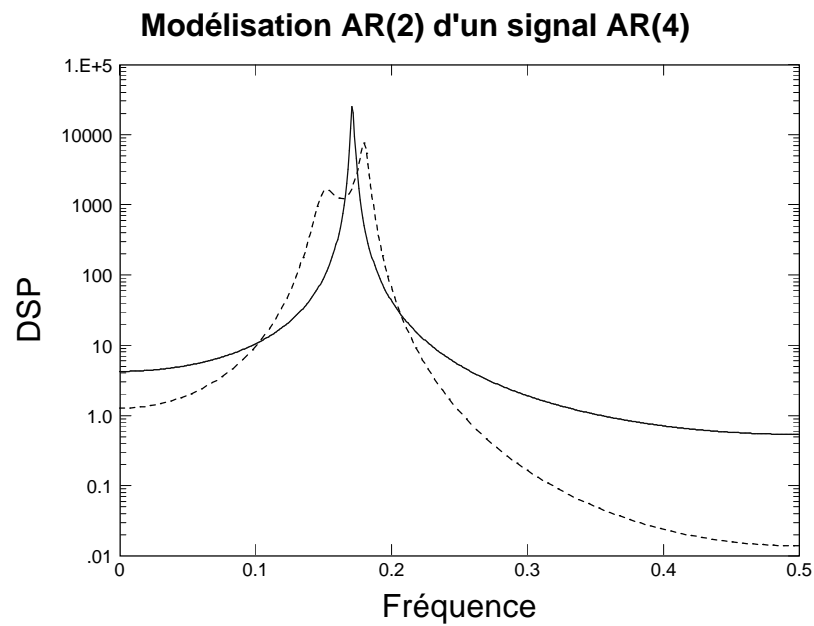


FIG. 4.15 – Spectre issu d'une modélisation AR(2) d'un processus AR(4).

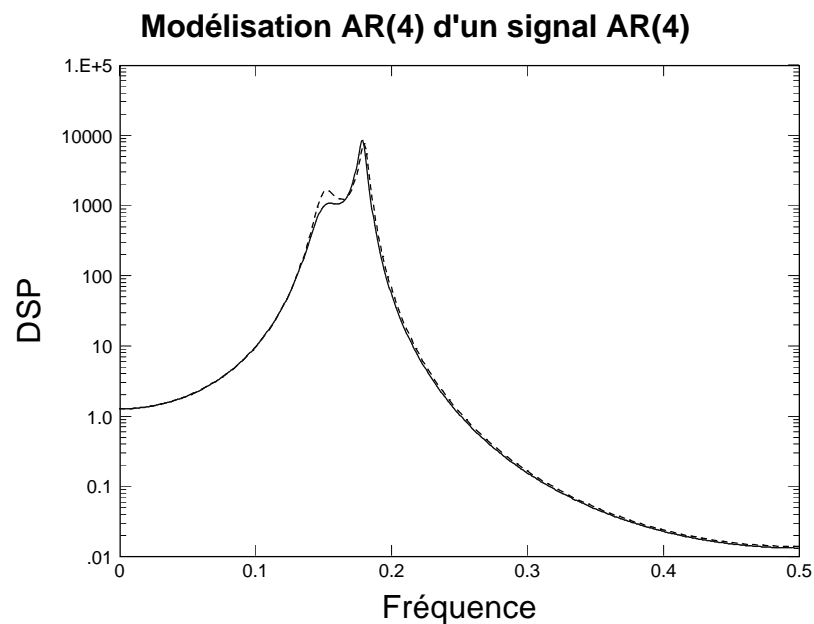


FIG. 4.16 – Spectre issu d'une modélisation AR(4) d'un processus AR(4).

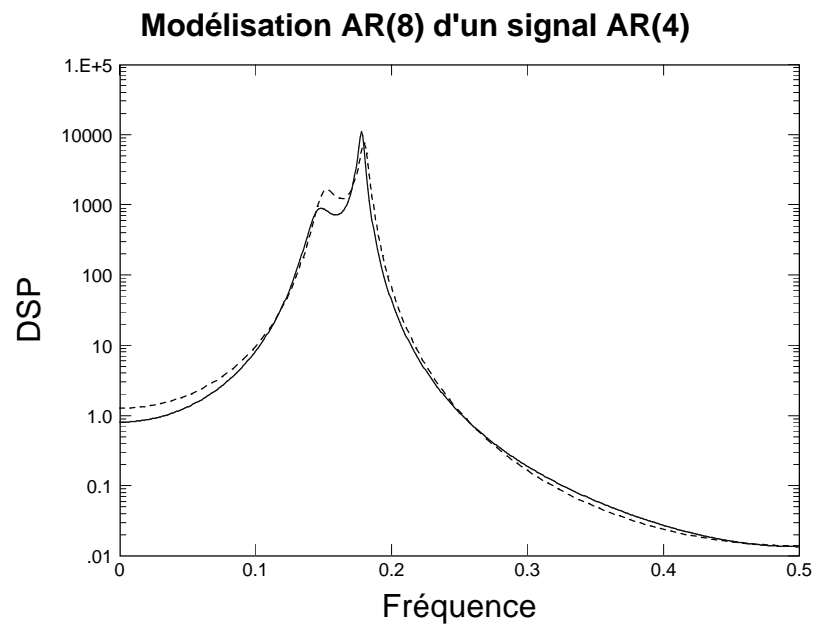


FIG. 4.17 – Spectre issu d'une modélisation AR(8) d'un processus AR(4).

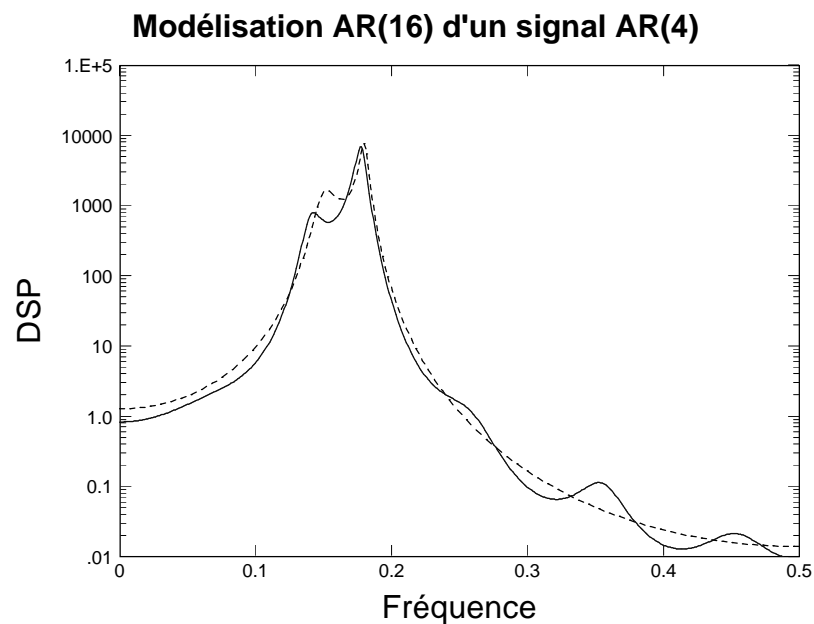


FIG. 4.18 – Spectre issu d'une modélisation AR(16) d'un processus AR(4).

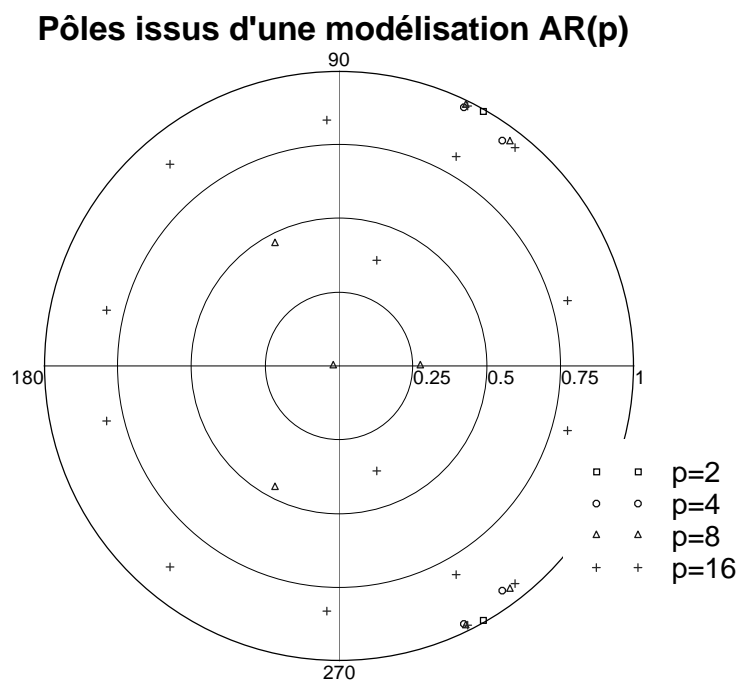


FIG. 4.19 – Valeur des pôles calculés par modélisation AR(p) d'un processus AR(4).

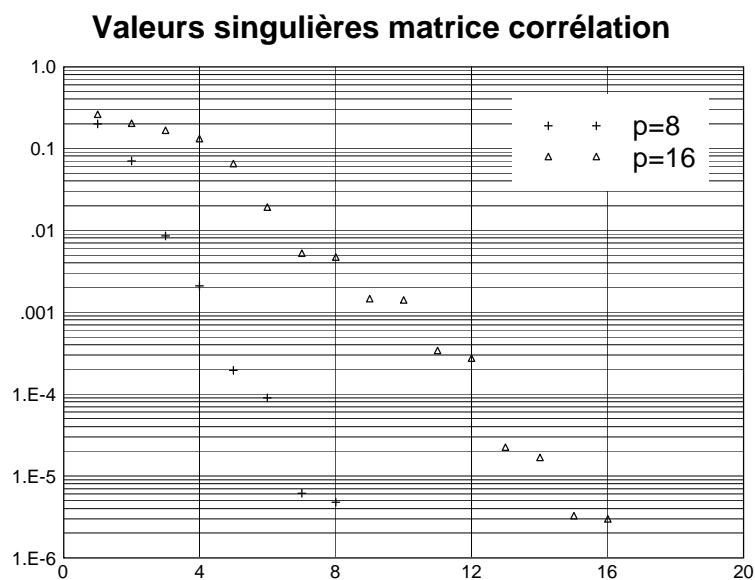


FIG. 4.20 – Valeurs singulières de la matrice de corrélation estimée

Chapitre 5

Méthodes d'estimation ARMA

5.1 Estimation des paramètres AR

Contrairement au cas AR, on ne peut écrire d'équations simples de prédiction linéaire, l'échantillon $x(n)$ étant relié à $\{x(k)\}_{k=n-1}^{n-p}$ mais également à $\{u(k)\}_{k=n}^{n-q}$ et non plus simplement à $u(n)$. En général, on utilise les équations de Yule-Walker qui impliquent la corrélation. On a vu que ces équations étaient non linéaires par rapport aux paramètres MA b_k , mais par contre linéaires par rapport aux paramètres AR. On a en effet :

$$r_{xx}(m) = - \sum_{k=1}^p a_k r_{xx}(m-k) \quad \text{pour } m > q \quad (5.1)$$

L'estimation des paramètres d'un modèle ARMA se fait donc généralement en 2 étapes :

Etape 1 : estimation des paramètres AR en utilisant les relations linéaires précédentes sur la corrélation.

Etape 2 : à partir des paramètres AR estimés, on estime les paramètres MA.

L'estimation des paramètres AR se fait le plus souvent par des méthodes des moindres carrés : on cherche alors à minimiser un critère du type

$$\sum_{n=n_0}^{n_1} \left[\hat{r}_{xx}(n) + \sum_{k=1}^L a_k \hat{r}_{xx}(n-k) \right]^2 = \left\| \hat{\mathbf{R}}\mathbf{a} + \hat{\mathbf{r}} \right\|^2 \quad (5.2)$$

où :

- $\hat{r}_{xx}(n)$ est un estimateur de la fonction de corrélation.
- n_0 est choisi généralement égal à q , voire supérieur.
- L est choisi supérieur ou égal à p .
- le nombre d'équations $n_1 - n_0 + 1$ est choisi supérieur ou égal à L .

C'est le choix de L et n_1 qui conditionne l'estimateur :

1^{er} cas : Yule-Walker modifié(MYW) :

$$\begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}(q) & \hat{r}_{xx}(q-1) & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}(q-p+1) \\ \hat{r}_{xx}(q+1) & \hat{r}_{xx}(q) & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}(q-p+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{r}_{xx}(q+p-1) & \hat{r}_{xx}(q+p-2) & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{a}_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}(q+1) \\ \hat{r}_{xx}(q+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{r}_{xx}(q+p) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

On a autant d'inconnues que d'équations : on procède alors à une simple inversion de matrice :

$$\hat{\mathbf{a}} = -\hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{r}} \quad (5.4)$$

2^{ème} cas : Moindres carrés YW (LSMYW) :

On surdétermine le nombre d'équations :

$$\begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}(q) & \hat{r}_{xx}(q-1) & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}(q-p+1) \\ \hat{r}_{xx}(q+1) & \hat{r}_{xx}(q) & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}(q-p+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{r}_{xx}(M+q-1) & \hat{r}_{xx}(M+q-2) & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}(M+q-p+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{a}_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}(q+1) \\ \hat{r}_{xx}(q+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{r}_{xx}(M+q) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

La solution (pour $M > p$) est :

$$\hat{\mathbf{a}} = -(\hat{\mathbf{R}}^H \hat{\mathbf{R}})^{-1} \hat{\mathbf{R}}^H \hat{\mathbf{r}} \quad (5.6)$$

3^{ème} cas : HOYW (High Order YW) :

On surdétermine le nombre d'équations et l'ordre du modèle :

$$\begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}(q) & \hat{r}_{xx}(q-1) & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}(q-L+1) \\ \hat{r}_{xx}(q+1) & \hat{r}_{xx}(q) & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}(q-L+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{r}_{xx}(M+q-1) & \hat{r}_{xx}(M+q-2) & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}(M+q-L+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{a}_L \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}(q+1) \\ \hat{r}_{xx}(q+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{r}_{xx}(M+q) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

La solution (pour $M > L$ et $L > p$) est :

$$\hat{\mathbf{a}} = -(\hat{\mathbf{R}}^H \hat{\mathbf{R}})^{-1} \hat{\mathbf{R}}^H \hat{\mathbf{r}} \quad (5.8)$$

Dans ce cas, il faut pouvoir retrouver parmi L pôles les p véritables.

Notons qu'il existe de nombreuses variantes des moindres carrés mais également d'autres types d'algorithmes (Akaike, Mayne-Firoozan,...) [1].

Remarque 5.1. En général, les méthodes ARMA s'avèrent plus performantes que les méthodes AR en terme de résolution. Ceci est logique dans le cas de sinus+bruit qui suivent une équation de récurrence de type ARMA et non AR. La complexité calculatoire est supérieure à celle de l'estimation AR du fait de l'estimation dans un premier temps de la fonction de corrélation. En terme de performances, on a en général $MYW < LSMYW <$

HOYW. Le coût calculatoire est en sens inverse. On considère également qu'augmenter le nombre d'équations (i.e. augmenter M) améliore la résolution et la précision : néanmoins, l'amélioration n'est pas monotone croissante avec M . On connaît les statistiques des estimées des paramètres AR et des fréquences des pôles correspondants. Il a ainsi été montré que, dans le cas d'une exponentielle bruitée $x(n) = Ae^{j(n\omega_0 + \varphi)} + b(n)$ où $b(n)$ est un bruit blanc de variance σ^2 , la variance asymptotique sur l'estimation de ω_0 est donnée par :

$$\text{var}(\hat{\omega}_0) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} NE \{(\hat{\omega}_0 - \omega_0)^2\} = \frac{\sigma^4}{A^4} \frac{2(2L+1)}{3L(L+1)M^2}$$

La figure 5.1 montre un spectre ARMA(4,4) estimé par les 2 méthodes MYW et LSMYW :

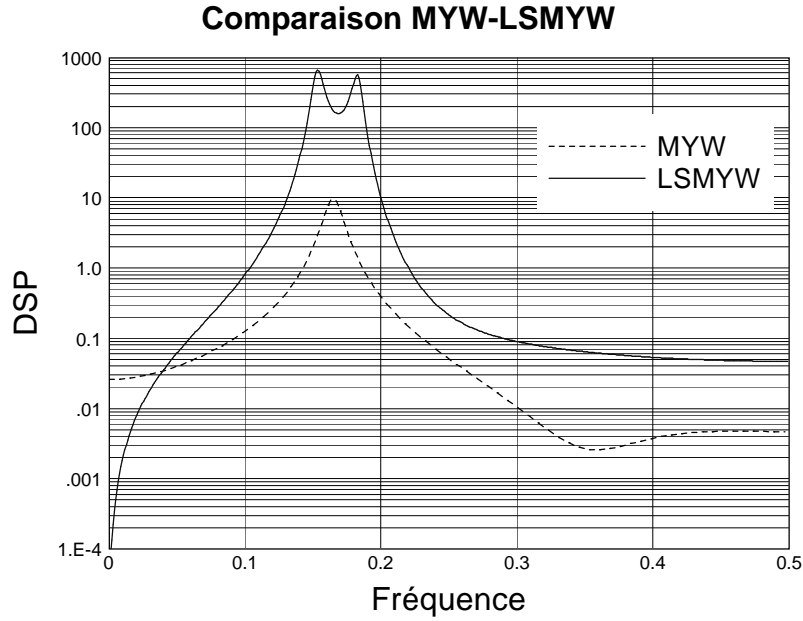


FIG. 5.1 – Spectres ARMA(4,4) de 2 sinus + bruit. SNR=10dB. N=256. M=80.

5.2 Estimation des paramètres MA

On procède en 3 étapes :

1. on filtre le signal $x(n)$ par $\hat{A}(z)$ pour obtenir un signal $y(n)$ qui est MA(q) :

$$y(n) = \sum_{k=0}^p \hat{a}_k x(n-k) \quad (5.9)$$

2. Le signal MA(q) peut être modélisé théoriquement par un modèle $AR(\infty)$ en écrivant :

$$B(z) = \sum_{k=0}^q b_k z^{-k} = \frac{1}{C(z)} = \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m} \Leftrightarrow c_m = - \sum_{k=1}^q b_k c_{m-k} + \delta(m) \quad (5.10)$$

On modélise donc $y(n)$ par un AR(L) \Rightarrow on obtient c_1, \dots, c_L .

3. On écrit la relation entre c_m et b_k :

$$\begin{pmatrix} c_0 & 0 & . & . & . \\ c_q & . & c_1 & 0 & \\ c_{q+1} & c_q & . & . & c_1 \\ c_L & c_{L-1} & . & c_{L-q} & \\ 0 & c_L & & & \\ 0 & . & . & c_L & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ c_q \\ c_{q+1} \\ . \\ c_L \\ c_{L+1} \\ . \\ c_{L+q} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

On reconnaît les équations de la méthode des corrélations appliquées au “signal” c_m \Rightarrow on peut résoudre par Levinson-Durbin (ou Morf) pour obtenir b_k .

Chapitre 6

Exponentielles complexes amorties et prédiction linéaire : de Prony à la SVD

On s'intéresse maintenant à des signaux du type exponentielles (amorties ou non) noyés dans du bruit :

$$y(n) = x(n) + b(n) = \sum_{k=1}^p A_k e^{j\phi_k} e^{n(-\alpha_k + j2\pi f_k)} + b(n) \quad (6.1)$$

Le signal “utile” $x(n)$ est ici considéré comme déterministe. Ce modèle se rencontre dans de nombreuses applications et on peut noter, par exemple, qu’il rend compte de la réponse impulsionnelle de tout système linéaire invariant. Le chapitre qui suit permet de faire le lien entre les méthodes de prédiction linéaire, vues dans le cadre de la modélisation AR, et les méthodes dites “haute résolution” qui utilisent des décompositions en sous-espaces. Ce lien tient plus de la méthodologie employée que de la nature des signaux, qui est très différente. En effet, comme on va le voir dans la suite, le signal $x(n)$ obéit à un certain nombre d’équations, de type prédiction linéaire, équations dont les coefficients sont liés aux paramètres d’intérêt α_k et f_k . La façon dont on va résoudre ces équations définit deux grandes classes de méthodes :

- les méthodes de Prony qui consistent à résoudre au sens des moindres carrés les équations de prédiction linéaire.
- les méthodes de Tufts et Kumaresan qui exploitent le fait que le signal utile est une combinaison de p modes et occupe donc un “sous-espace”.

On décrit maintenant le principe de chacune de ces méthodes.

6.1 Modèles de PRONY

6.1.1 Prony Déterministe

Ce modèle a été introduit en 1795 par Gaspard Riche, baron de Prony, pour modéliser l’expansion de gaz par des exponentielles décroissantes. On note :

$$x(n) = \sum_{k=1}^p A_k e^{j\phi_k} e^{(-\alpha_k + j2\pi f_k)n} = \sum_{k=1}^p h_k z_k^n \quad (6.2)$$

avec :

$$h_k = A_k e^{j\phi_k} \quad (6.3)$$

$$z_k = e^{(-\alpha_k + j2\pi f_k)} \quad (6.4)$$

Le problème initial de Prony consistait à savoir comment estimer h_k, z_k à partir de $2p$ échantillons $x(0), \dots, x(2p-1)$ seulement. Or, **L'estimation simultanée** des deux paramètres conduit à des **équations non linéaires**. On procède donc en 2 étapes :

1) Obtention des z_k :

On considère le polynôme suivant, dont les racines sont les z_k :

$$A(z) = \prod_{k=1}^p (1 - z_k z^{-1}) = 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \quad (6.5)$$

On montre alors que $x(n)$ obéit aux **équations de récurrence** suivantes :

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \quad n \geq p \quad (6.6)$$

On peut ainsi obtenir a_k en résolvant :

$$\begin{pmatrix} x(p-1) & x(p-2) & \dots & x(0) \\ x(p) & x(p-1) & \dots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(2p-2) & x(2p-3) & \dots & x(p-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x(p) \\ x(p+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(2p-1) \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

On peut alors déterminer z_k en cherchant les racines de $A(z)$: on en déduit ainsi les amortissements α_k et fréquences f_k .

2) Obtention des h_k :

On résout pour ceci le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{p-1} & z_2^{p-1} & \dots & z_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(p-1) \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

On déduit alors les amplitudes et phases. Notons que dans ce problème initial de Prony, on a $4p$ inconnues et $4p$ données, donc une solution unique au problème.

6.1.2 Prony Moindres Carrés

En pratique, le signal n'est pas directement une somme d'exponentielles amorties. De plus, on dispose de plus d'échantillons que d'exponentielles, i.e. $N < p$. On essaie alors d'**approximer** le signal $x(n)$ par :

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=1}^p A_k e^{j\theta_k} e^{(-\alpha_k + j2\pi f_k)n} = \sum_{k=1}^p h_k z_k^n \quad (6.9)$$

Or, minimiser l'erreur d'approximation $\epsilon(n) = x(n) - \hat{x}(n)$ étant un problème non linéaire, on écrit, pour $n \geq p$:

$$\begin{aligned}\hat{x}(n) &= - \sum_{k=1}^p a_k \hat{x}(n-k) \Rightarrow x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^p a_k \varepsilon(n-k) \\ &\Rightarrow x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + e(n)\end{aligned}\quad (6.10)$$

On cherche alors à minimiser “l'erreur de prédiction” $\sum_{n=p}^{N-1} e^2(n)$: il s'agit exactement de la méthode des covariances. D'où 3 étapes pour obtenir l'ensemble des paramètres $\{h_k, z_k\}$:

Modélisation AR(p) par la méthode des covariances $\rightarrow \hat{a}_k$

Recherche des racines de $\hat{A}(z) = 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k z^{-k} \Rightarrow \hat{z}_k = e^{(-\hat{\alpha}_k + j2\pi \hat{f}_k)}$

Résolution du système de Vandermonde surdéterminé :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & \dots & \hat{z}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{z}_1^{N-1} & \hat{z}_2^{N-1} & \dots & \hat{z}_p^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \\ \vdots \\ \hat{h}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

La solution est donnée par :

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H \mathbf{x} \quad (6.12)$$

6.1.3 Spectre de Prony

En général, la modélisation de Prony s'arrête à la détermination des amplitudes et phases. Néanmoins, il est possible de définir un “spectre” de Prony. De nombreuses formes sont possibles qui dépendent des hypothèses faites sur le signal en dehors de la fenêtre d'observation. Le spectre de Prony est défini, non pas à partir du signal $x(n)$, mais plutôt à partir du signal approximé $\hat{x}(n)$.

Une première hypothèse consiste à dire que le signal est défini de la façon suivante :

$$\hat{x}_1(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^p h_k z_k^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

Dans ce cas, la transformée en z est donnée par :

$$X_1(z) = \sum_{k=1}^p \frac{h_k}{1 - z_k z^{-1}} \quad (6.14)$$

qui converge pour $|z_k| < |z|$. Évaluée en $z = e^{j2\pi f}$, on obtient alors une expression de la densité spectrale d'énergie :

$$S_1(f) = |X_1(f)|^2 \quad (6.15)$$

Une deuxième hypothèse consiste à considérer que le signal est symétrique autour de l'origine :

$$\hat{x}_2(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^p h_k z_k^n & n \geq 0 \\ \sum_{k=1}^p h_k (z_k^*)^n & n < 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

Dans ce cas, la transformée en z devient :

$$X_2(z) = \sum_{k=1}^p h_k \left[\frac{1}{1 - z_k z^{-1}} - \frac{1}{1 - (z_k^* z)^{-1}} \right] \quad (6.17)$$

qui converge pour $|z_k| < |z| < |z_k^{-1}|$. De même, on a alors la densité spectrale d'énergie :

$$S_2(f) = |X_2(f)|^2 \quad (6.18)$$

En général, la deuxième définition conduit à des spectres dont les pics sont plus étroits.

6.1.4 Prony Harmonique

Cas d'exponentielles **non amorties** :

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=1}^{2p} A_k e^{j\phi_{a_k}} e^{j2\pi n f_k} = \sum_{k=1}^{2p} h_k z_k^n \quad (6.19)$$

Dans ce cas, les racines sont sur le cercle unité et on montre que les coefficients AR vérifient la propriété suivante :

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \prod_{k=1}^{2p} z_k \\ a_k &= a_{2p} a_{2p-k}^* \quad k = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (6.20)$$

Le signal $\hat{x}(n)$ vérifie alors la récursion, pour $n \geq 2p$:

$$a_p \hat{x}(n-p) + \sum_{k=1}^p (a_{p-k} \hat{x}(n-p+k) + a_{p+k} \hat{x}(n-p-k)) = 0 \quad (6.21)$$

En divisant l'équation précédente par a_p et en notant $g_k = \frac{a_{p-k}}{a_p}$, la 1^{ère} étape de Prony harmonique consiste à minimiser :

$$\sum_{n=p}^{N-p-1} \left| x(n) + \sum_{k=1}^p g_k x(n+k) + g_k^* x(n-k) \right|^2 \quad (6.22)$$

Les deux autres étapes restent inchangées. Notons que si un polynôme dont les racines complexes sont sur le cercle unité a des coefficients symétriques conjugués, l'inverse n'est pas nécessairement vrai. Des coefficients symétriques conjugués impliquent que si z_k est

racine, z_k^{-1} l'est aussi ; par contre, la racine peut ne pas être de module unité. Ceci signifie que la méthode de Prony harmonique ne garantit pas des pôles estimés sur le cercle. Par conséquent, il faut vraiment être sûr que les exponentielles sont exactement sur le cercle pour préférer la méthode de Prony harmonique à celle utilisant un modèle d'exponentielles amorties.

Remarque 6.1. *Toute fonction de corrélation pouvant se décomposer comme la somme d'un terme transitoire et d'un terme presque périodique, on peut utiliser un modèle de Prony pour la corrélation du signal plutôt que pour le signal : c'est la méthode de Prony-Corrélation qui consiste à remplacer $x(n)$ par $r_{xx}(k)$ dans la première étape.*

Remarque 6.2. *Comme on l'a vu, la première étape d'une modélisation de Prony est équivalente à une modélisation AR. Néanmoins, 2 différences existent :*

- le spectre de Prony est différent du spectre AR.
- le modèle de Prony donne accès aux amplitudes, phases et amortissements des sinusoides : il permet donc une **reconstruction temporelle du signal**.

Les figures 6.1-6.3 montrent les résultats obtenus pour une modélisation de Prony d'ordre 12 d'un signal constitué de 2 sinusoides dans du bruit.

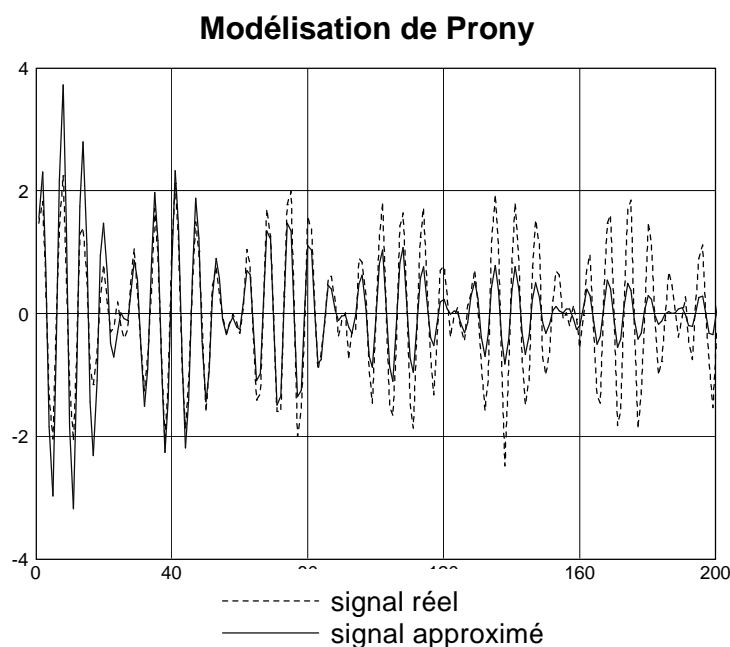


FIG. 6.1 – Signal théorique (2sinus + bruit) et signal approximé par une modélisation de Prony. $N=256$. $p=12$. $SNR=15dB$.

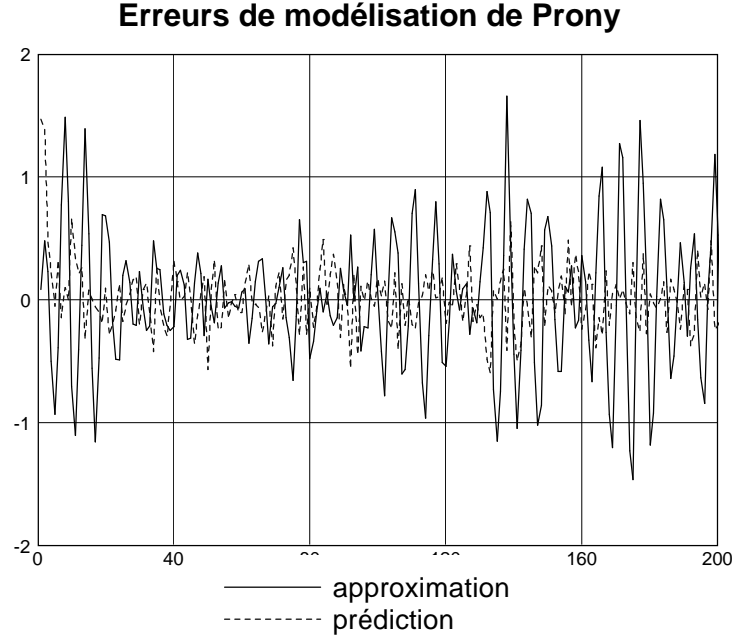


FIG. 6.2 – Comparaison entre l’erreur de prédiction et l’erreur d’approximation.

6.2 Méthode de Kumaresan : Prédiction linéaire et SVD

La méthode de Prony tient compte du fait que, en **l’absence de bruit**, le signal vérifie les équations de “prédiction” avant (symbolisées par \cdot^f) et arrière (\cdot^b) suivantes :

$$\begin{aligned} x(n) &= - \sum_{k=1}^p a_k^f x(n-k) \\ x^*(n) &= - \sum_{k=1}^p a_k^b x^*(n+k) \end{aligned} \quad (6.23)$$

De plus, les polynômes issus de ces prédictions vérifient

$$\begin{aligned} A^f(z) &= \sum_{k=0}^p a_k^f z^{-k} = \prod_{k=1}^p (1 - e^{(-\alpha_k + j2\pi f_k)} z^{-1}) \\ A^b(z) &= \sum_{k=0}^p a_k^b z^{-k} = \prod_{k=1}^p (1 - e^{(\alpha_k + j2\pi f_k)} z^{-1}) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ainsi, le prédicteur arrière a ses racines en dehors du cercle unité, le prédicteur avant à l’intérieur du cercle.

Supposons maintenant que l’on choisisse un prédicteur d’ordre $L > p$. Comme dans le cas Prony ou AR, on écrit un certain nombre d’équations de prédiction sous forme matricielle et on est alors amené à résoudre, au sens des moindres carrés, un système du type :

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = -\mathbf{h} \quad (6.25)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{h} dépendent du signal et \mathbf{a} est le vecteur des coefficients de prédiction.

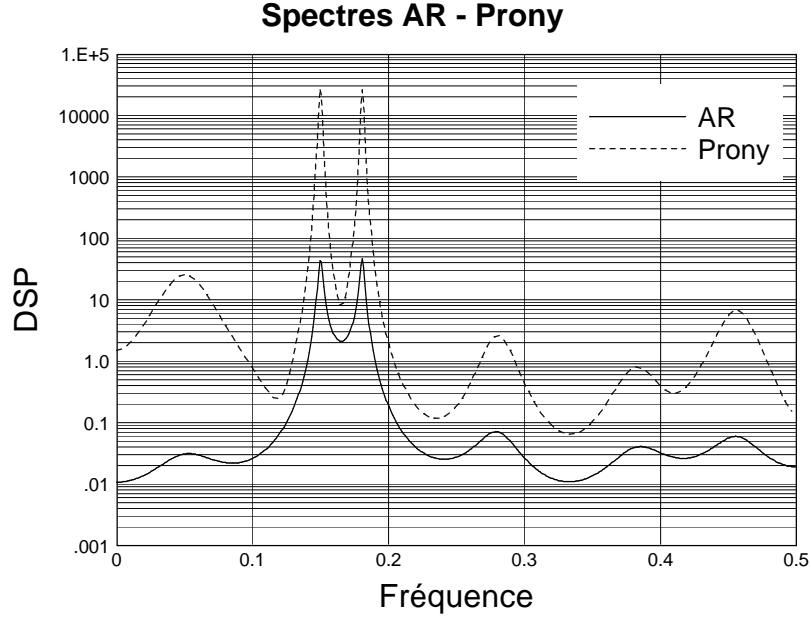


FIG. 6.3 – Comparaison entre le spectre AR et le spectre de Prony.

Si l'on considère le polynôme $A(z) = \sum_{k=0}^L a_k z^{-k}$, Tufts et Kumaresan ont montré la propriété suivante, **dans le cas sans bruit** :

$A(z)$ a p zéros en $e^{(-\alpha_k + j2\pi f_k)}$ (prédiction avant) ou $e^{(\alpha_k + j2\pi f_k)}$ (prédiction arrière)
Les $L-p$ zeros restants sont à l'intérieur du cercle unité.

Ainsi, dans le cas d'une prédiction arrière, il devient très facile de séparer les pôles signal de ceux correspondant au bruit.

De plus, si l'on effectue une Décomposition en Valeurs Singulières de la matrice \mathbf{A} , on constate que p valeurs singulières sont non nulles, les $L - p$ autres étant égales à zéro. En présence de bruit, ces propriétés ne sont plus vérifiées, \mathbf{A} devenant de rang L .

L'idée de Kumaresan est, non plus de résoudre $\mathbf{A}\mathbf{a} = -\mathbf{h}$, mais plutôt de résoudre $\mathbf{A}_p \mathbf{a} = -\mathbf{h}$ où \mathbf{A}_p est le meilleur approximant de rang p de \mathbf{A} . Remplacer \mathbf{A} par une matrice de rang p a pour effet de filtrer les valeurs singulières associées au bruit et donc de "nettoyer" la matrice \mathbf{A} d'une partie du bruit. On procède donc de la façon suivante :

Étape 1 Calcul de la SVD de la matrice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (6.26)$$

avec

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_L & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Dans le cas sans bruit, on aurait $\text{rang}(\mathbf{A}) = p$ et $\sigma_{p+1} = \dots = \sigma_L = 0$.

Étape 2 Recherche du meilleur approximant \mathbf{A}_p de \mathbf{A} de rang p . On montre que celui-ci est donné par :

$$\mathbf{A}_p = \mathbf{U} \Sigma_p \mathbf{V}^H \quad (6.28)$$

et

$$\Sigma_p = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_p & & \\ & & & 0 & \\ \hline & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

On a donc mis à zéro les $L-p$ plus petites valeurs singulières qui correspondent au bruit.

Étape 3 Estimation de \mathbf{a} à l'aide de la pseudo-inverse de \mathbf{A}_p :

$$\mathbf{a} = -\mathbf{A}_p^\# \mathbf{h} = -\mathbf{V} \Sigma_p^\# \mathbf{U}^H \mathbf{h} = -\sum_{k=1}^p \frac{\mathbf{u}_k^H \mathbf{h}}{\sigma_k} \mathbf{v}_k \quad (6.30)$$

Remarque 6.3. Le système à résoudre (6.25) est équivalent à $\mathbf{R}\mathbf{a} = -\mathbf{r}$ avec $\mathbf{R} = \mathbf{A}^H \mathbf{A}$ et $\mathbf{r} = \mathbf{A}^H \mathbf{h}$. La méthode de Kumaresan est équivalente à :

1. décomposition en vecteurs propres de \mathbf{R} : $\mathbf{R} = \sum_{k=1}^L \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H$
2. conservation des p plus grandes valeurs propres : $\mathbf{a} = -\sum_{k=1}^p \frac{\mathbf{v}_k^H \mathbf{r}}{\lambda_k} \mathbf{v}_k$

Néanmoins, utiliser une matrice signal et en faire la SVD évite le calcul de la corrélation et est numériquement plus stable.

Remarque 6.4. Cette méthode permet d'augmenter le SNR en éliminant une partie du bruit.

Remarque 6.5. Le choix des p valeurs singulières correspondant au signal et de L est délicat : Kumaresan a proposé L de l'ordre de $N/2 \rightarrow 3N/4$. Des critères d'ordre analogues à ceux développés pour le modèle AR existent qui utilisent la répartition des valeurs singulières de \mathbf{A} .

Remarque 6.6. Tufts et Kumaresan ont proposé plusieurs versions de \mathbf{A} , correspondant aux différents types de prédiction (avant, arrière et avant-arrière) :

* FLP :

$$\mathbf{A}^{FLP} = \begin{pmatrix} x(L) & x(L-1) & \cdot & x(1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x(N-1) & x(N-1) & \cdot & x(N-L) \end{pmatrix}, \mathbf{h}^{FLP} = \begin{pmatrix} x(L+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N) \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

*BLP :

$$\mathbf{A}^{BLP} = \begin{pmatrix} x^*(2) & x^*(3) & \dots & x^*(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^*(N-L+1) & x^*(N-L+2) & \dots & x^*(N) \end{pmatrix}, \mathbf{h}^{BLP} = \begin{pmatrix} x^*(1) \\ \vdots \\ x^*(N-L) \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

* FBLP :

$$\mathbf{A}^{FBLP} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{FLP} \\ \mathbf{A}^{BLP} \end{pmatrix}, \mathbf{h}^{FBLP} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}^{FLP} \\ \mathbf{h}^{BLP} \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

La prédiction arrière est généralement utilisée pour des exponentielles amorties, les 2 autres types pour des exponentielles non amorties, c'est-à-dire des sinusoides.

Remarque 6.7. Cette méthode, pour un petit nombre d'échantillons (~ 25) et un SNR faible, présente la meilleure résolution : on montre qu'elle atteint pratiquement la borne de Cramér-Rao. De plus, on peut montrer que l'application d'une SVD tronquée (mise à zéro des faibles valeurs singulières) a pour effet de distribuer les pôles de la façon suivante :

- les pôles correspondant au bruit sont uniformément distribués sur un cercle de rayon constant $r < 1$.
- les pôles du signal sont soit sur le cercle (exponentielles non amorties), soit très près du cercle, à l'intérieur pour la méthode FLP, à l'extérieur pour BLP.

Ceci permet de séparer facilement les pôles signal des pôles bruit.

La Figure 6.4 illustre le cas où $L = 11$ et $p = 2$.

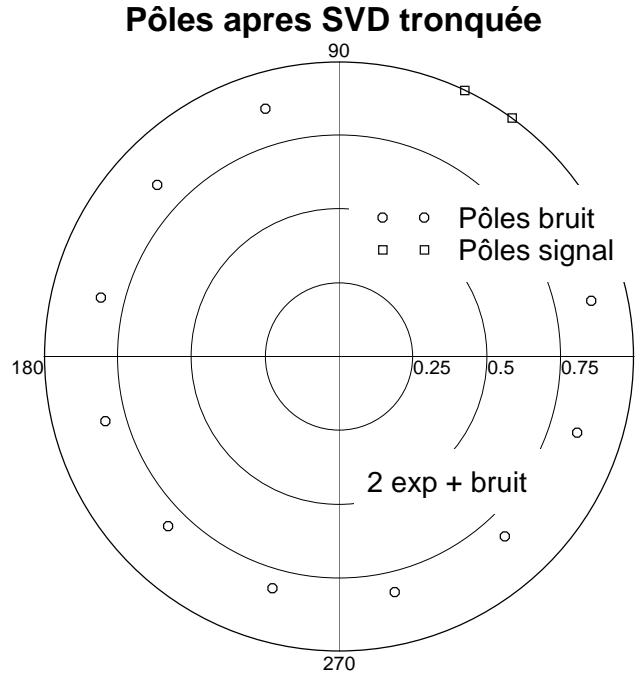


FIG. 6.4 – Distribution des pôles après SVD tronquée. $L=12$. $p=2$.

Remarque 6.8. On peut écrire $\begin{bmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ où $\hat{\mathbf{a}} = [1, \mathbf{a}]^T$. $\hat{\mathbf{a}}$ est alors un vecteur propre correspondant à une valeur propre nulle : il appartient au noyau de $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$: utilisation du sous-espace bruit (méthode Min-Norm). On cherche le vecteur de norme minimum appartenant au sous-espace bruit.

Remarque 6.9. Pour résoudre le système $\mathbf{A}\mathbf{a} = -\mathbf{h}$, on peut utiliser la technique des moindres carrés totaux (TLS). On effectue alors la SVD de $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$ et on cherche de la même façon le meilleur approximant de rang p : $\tilde{\mathbf{A}}_p = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_p & \hat{\mathbf{A}}_p \end{bmatrix}$. On résout alors : $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_p & \hat{\mathbf{A}}_p \end{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$.

Remarque 6.10. En fait, l'utilisation de la SVD est possible pour toute modélisation où l'on possède une information sur le rang de la matrice signal ou corrélation. Ainsi, pour un ARMA(p, q) la matrice de corrélation utilisée dans la méthode HOYW est théoriquement de rang p : on peut alors utiliser une SVD tronquée pour en trouver le meilleur approximant de rang p .

Les figures 6.5 à 6.10 montrent l'influence du SNR et d'un nombre de points fini ($N = 32$) sur la distribution des valeurs singulières et la forme du spectre. On considère 2 sinusoïdes bruitées et on choisit un filtre de prédiction de longueur $p = 20$. On sélectionne alors les 4 premières valeurs singulières, les 16 restantes étant mises à zéro. On calcule alors un spectre AR. Les figures 6.5 à 6.10 montrent les valeurs singulières de la matrice \mathbf{A} et les spectres AR correspondants après mise à zéro des 16 plus petites valeurs singulières.

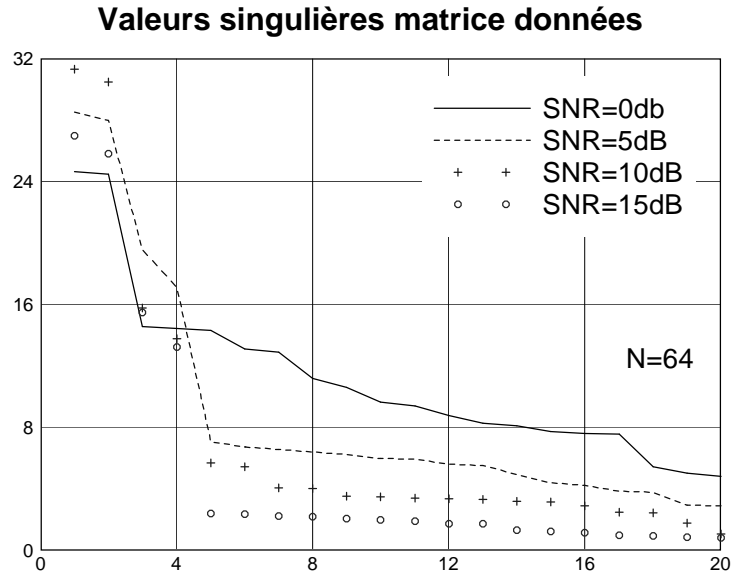


FIG. 6.5 – Valeurs singulières de \mathbf{A} . 2 sinus + bruit. $N=64$. $p=20$. SNR variable.

On constate, au vu de ces figures plusieurs phénomènes :

- lorsque le SNR est faible, il est difficile de sélectionner les valeurs singulières qui correspondent au signal, la discrimination entre valeurs singulières s'avérant délicate. Ceci est également vrai lorsque le nombre de points est petit.

- le filtrage des valeurs singulières a pour effet de “blanchir” le spectre en dehors des fréquences des sinusoides. On constate en effet que le spectre est plutôt plat en dehors des fréquences, ce qui n’est pas le cas lorsqu’on ne tronque pas les valeurs singulières.

Pour conclure ce chapitre, on constate que la SVD (ou EVD) est devenue un outil très utilisé pour résoudre, au sens des moindres carrés, des systèmes d’équations dont on connaîtrait a priori le rang (en l’absence de bruit par exemple). Le schéma qui suit montre les différents chemins que l’on peut parcourir pour estimer les paramètres de modèles AR, ARMA ou d’exponentielles complexes bruitées. Les approches présentées sont basées soit sur la prédiction linéaire, soit sur les équations de Yule-Walker et utilisent la SVD pour améliorer l’estimation des paramètres :

- Formation de la matrice \mathbf{A} et du vecteur \mathbf{h} pour résoudre $\mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{h}$:

★ Cas $AR(p)$ ou p exponentielles (KT)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x(L) & x(L-1) & \cdot & \cdot & x(1) \\ x(L+1) & x(L) & \cdot & \cdot & x(2) \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ x(N-1) & x(N-2) & \cdot & \cdot & x(N-L) \end{pmatrix}, \mathbf{h} = \begin{pmatrix} x(L+1) \\ x(L+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N) \end{pmatrix}$$

★ Cas $ARMA(p, q)$ ou p exponentielles

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}(q) & \hat{r}_{xx}(q-1) & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}(q-L+1) \\ \hat{r}_{xx}(q+1) & \hat{r}_{xx}(q) & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}(q-L+2) \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hat{r}_{xx}(M-1) & \hat{r}_{xx}(M-2) & & & \hat{r}_{xx}(M-L+1) \end{pmatrix}, \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}(q+1) \\ \hat{r}_{xx}(q+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{r}_{xx}(M) \end{pmatrix}$$

- Résolution par SVD, TLS-Min-Norm ou Moindres Carrés

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \\ \mathbf{A}_p = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}_p\mathbf{V}^H \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{h} \quad \mathbf{A}] = [\tilde{\mathbf{U}}_1 \quad \tilde{\mathbf{U}}_2] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{\Sigma}}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{\Sigma}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_1^H \\ \tilde{\mathbf{V}}_2^H \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{V}}_1 \quad \tilde{\mathbf{V}}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T & \mathbf{c}^T \\ \tilde{\mathbf{V}}_1' & \tilde{\mathbf{V}}_2' \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{A}}_p = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{\Sigma}}_p\tilde{\mathbf{V}}^H = [\mathbf{h}_p' \quad \mathbf{A}_p'] \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a} = -\mathbf{A}_p^\# \mathbf{h} & \mathbf{a} = -\mathbf{A}^\# \mathbf{h} & \mathbf{a} = -\mathbf{A}_p'^\# \mathbf{h}_p' = \tilde{\mathbf{V}}_2' \mathbf{c}^* / \|\mathbf{c}\|^2 = -\tilde{\mathbf{V}}_1' \mathbf{g}^* / (1 - \|\mathbf{g}\|^2) \\ \text{SVD} & \text{LS} & \text{TLS} \Leftrightarrow \text{Min-Norm} \end{array}$$

Estimation des paramètres de modèles AR, ARMA ou exponentiels utilisant la SVD

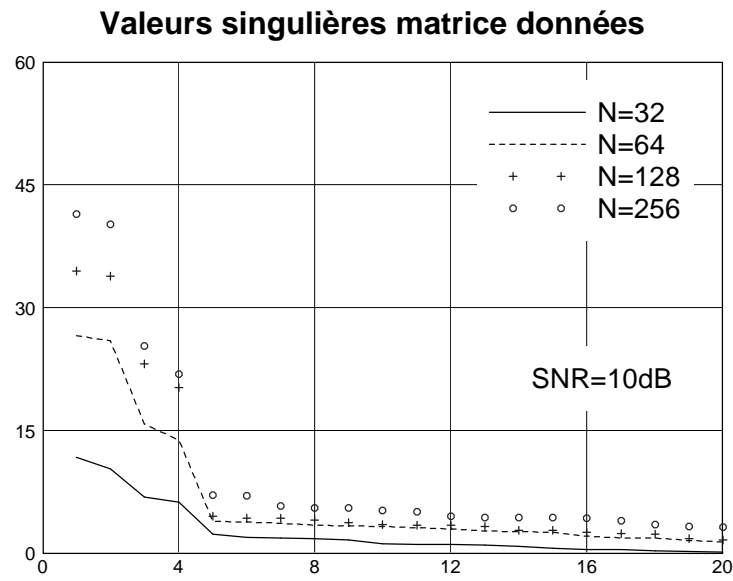


FIG. 6.6 – Valeurs singulières de A. 2 sinus + bruit. SNR=10. $p=20$. N variable.

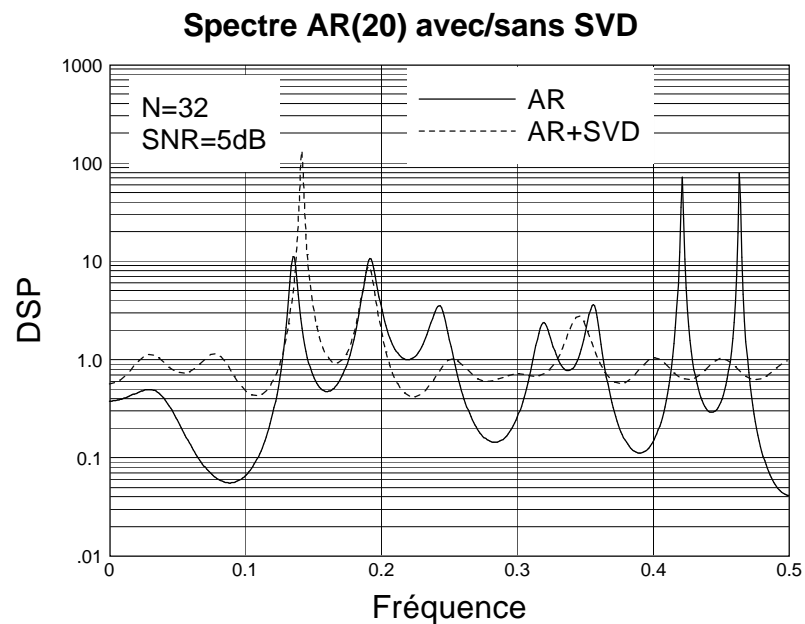


FIG. 6.7 – Spectre AR(20) avec/sans SVD tronquée. N=32. SNR=5dB.

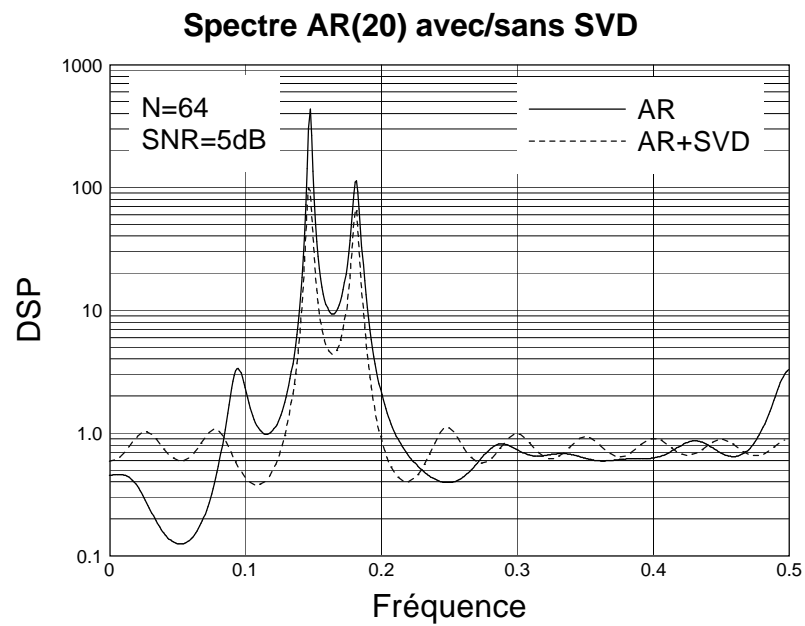


FIG. 6.8 – Spectre AR(20) avec/sans SVD tronquée. $N=64$. $\text{SNR}=5\text{dB}$.

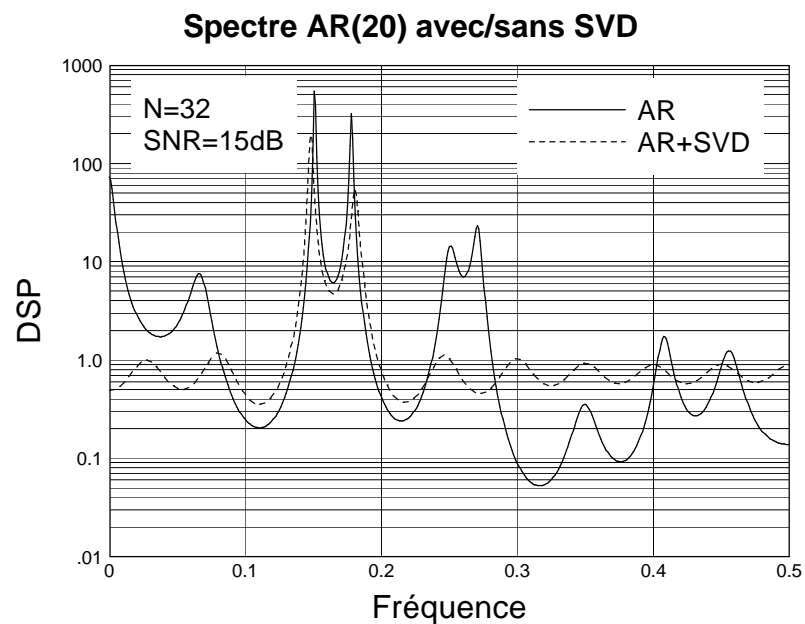


FIG. 6.9 – Spectre AR(20) avec/sans SVD tronquée. $N=32$. $\text{SNR}=15\text{dB}$.

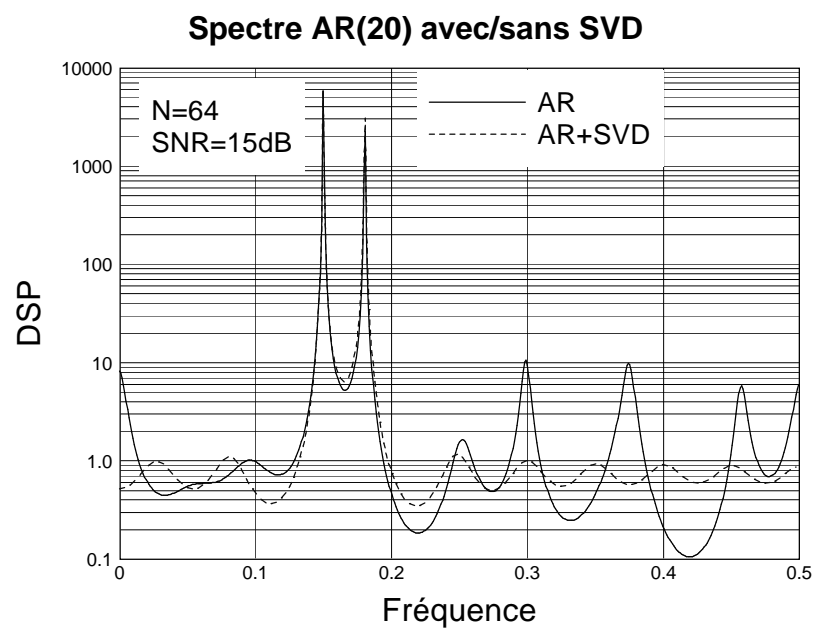


FIG. 6.10 – Spectre AR(20) avec/sans SVD tronquée. N=64. SNR=15dB.

Chapitre 7

Exponentielles complexes : Approches sous-espace

Dans le chapitre précédent, on a considéré un signal déterministe constitué d'exponentielles amorties noyées dans un bruit additif. Ici, on considère des exponentielles complexes et on s'intéresse à des méthodes utilisant la matrice de covariance des données (considérées donc comme aléatoires). Il convient de noter que la plupart des méthodes présentées ci-après ont été développées à l'origine pour le traitement spatial de signaux reçus sur un réseau d'antennes (voir l'ouvrage de Stoica et Moses pour plus de détails).

7.1 Formulation du problème - Propriétés du modèle

On s'intéresse à des signaux du type :

$$y(n) = x(n) + b(n) = \sum_{k=1}^p A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi n f_k} + b(n) \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (7.1)$$

où $b(n)$ est un bruit blanc de variance σ^2 . Si la phase ϕ_k est supposée être déterministe, alors on a le modèle d'un signal déterministe noyé dans un bruit blanc additif. Dans le cas où ϕ_k est supposée uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$, le signal est alors aléatoire. L'hypothèse émise conditionne en fait la nature du signal; néanmoins, la fonction de corrélation reste identique, quel que soit le modèle. En effet, si ϕ_k est déterministe, alors le signal est "quasi-stationnaire" et on définit la fonction de corrélation comme

$$r_{yy}(m) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E} \{y^*(n)y(n+m)\} \quad (7.2)$$

On constate que cette définition est compatible avec la définition de la corrélation pour un processus stationnaire, puisque (7.2) se réduit à $r_{yy}(m) = \mathbb{E} \{y^*(n)y(n+m)\}$ dans ce cas. En reprenant l'expression (7.1), on aboutit à

$$r_{yy}(m) = \sum_{k=1}^p P_k e^{j2\pi m f_k} + \sigma^2 \delta(m) \quad (7.3)$$

où $P_k = |A_k|^2$. D'autre part, en supposant les phases aléatoires, on parvient à la même expression. Par conséquent, l'expression (7.3) convient aux deux cas.

Considérons maintenant la matrice d'autocorrélation d'ordre M :

$$\mathbf{R}_{yy}^M = \begin{pmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) & \cdot & \cdot & r_{yy}(-M+1) \\ r_{yy}(1) & r_{yy}(0) & \cdot & \cdot & r_{yy}(-M+1) \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ r_{yy}(M-1) & r_{yy}(M-2) & \cdot & \cdot & r_{yy}(0) \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

On peut écrire :

$$\mathbf{R}_{yy}^M = \mathbf{R}_{xx}^M + \mathbf{R}_{bb}^M = \sum_{k=1}^p P_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (7.5)$$

avec

$$\mathbf{s}_k = (1, e^{j2\pi f_k}, \dots, e^{j2\pi(M-1)f_k})^T \quad (7.6)$$

\mathbf{s}_k est appelé **vecteur signal**.

La matrice de corrélation s'écrit comme la somme d'une matrice "signal" et d'une matrice "bruit" (en l'occurrence $\sigma^2 \mathbf{I}$). Par définition, la matrice "signal" est de rang p et sa décomposition en vecteurs-valeurs propres s'écrit :

$$\mathbf{R}_{xx}^M = \sum_{k=1}^M \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \quad (7.7)$$

où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_M = 0$ et les \mathbf{v}_k constituent une base orthonormée. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ sont les vecteurs propres principaux et engendrent l'espace signal : **on montre que ces vecteurs propres principaux $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ engendrent le même espace que les vecteurs signaux $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_p$.** Les $\mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_M$ engendrent le sous-espace bruit. On a, de plus :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}^M &= \mathbf{R}_{xx}^M + \sigma^2 \mathbf{I} \\ &= \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H + \sigma^2 \sum_{k=1}^M \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \\ &= \sum_{k=1}^p (\lambda_k + \sigma^2) \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H + \sigma^2 \sum_{k=p+1}^M \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \end{aligned} \quad (7.8)$$

Les vecteurs propres principaux de la matrice de corrélation bruitée sont associés aux valeurs propres $\lambda_k + \sigma^2$ alors que les vecteurs propres de l'espace bruit sont associés à σ^2 .

Une propriété importante est que les **vecteurs signaux** engendrant le même espace que les vecteurs propres principaux, ils sont **orthogonaux aux vecteurs du sous-espace bruit** :

$$\boxed{\mathbf{s}_i^H \left(\sum_{k=p+1}^M \alpha_k \mathbf{v}_k \right) = 0} \quad (7.9)$$

Il existe donc 2 types de méthodes pour "estimer" les fréquences :

- Utilisation du sous-espace signal par approximation de \mathbf{R}_{yy} par une matrice de rang p .

- Utilisation du sous-espace bruit par application du principe d'orthogonalité entre vecteurs signaux et vecteurs propres du sous-espace bruit : Pisarenko, Music, ...

La plupart des méthodes développées dans la suite utilise cette propriété, à savoir :

La matrice de corrélation se décompose selon un sous-espace signal auquel appartiennent les exponentielles + un sous-espace bruit orthogonal au sous-espace signal

La Figure 7.1 illustre la distribution des valeurs propres de la matrice de corrélation estimée ($M = 30$) pour 2 sinus dans du bruit, en fonction du SNR :

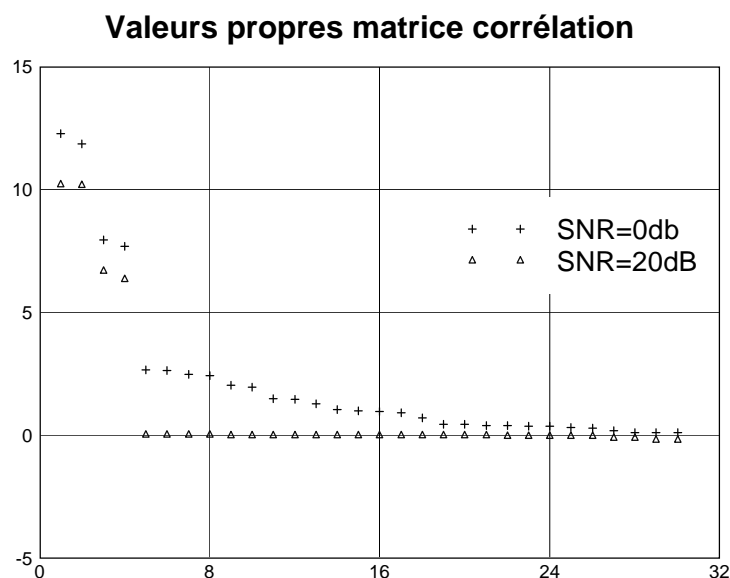


FIG. 7.1 – Distribution des valeurs propres de la matrice de corrélation estimée pour 2 sinus + bruit. $N=64$. $M=30$.

Remarque 7.1. Avant de s'intéresser aux méthodes sous-espace, notons que la loi du signal, dans l'hypothèse bruit Gaussien, s'écrit

$$p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi^N (\det \mathbf{C})^N} \exp \left\{ -(\mathbf{y} - \mathbf{s})^H \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{s}) \right\}$$

où $\boldsymbol{\theta} = [A_1, \phi_1, \omega_1, \dots, A_p, \phi_p, \omega_p]^T$ et \mathbf{C} est la matrice de covariance du bruit. A partir de cette expression, on peut calculer les bornes de Cramér-Rao, ou du moins leur valeur asymptotique. Dans le cas où $b(n)$ est un processus stationnaire Gaussien, de DSP $S_b(\omega)$,

on démontre que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N^3 \\ & & \ddots \\ & & & N & 0 & 0 \\ & & & 0 & N & 0 \\ & & & 0 & 0 & N^3 \end{bmatrix} \mathbf{BCR}(\theta) = \begin{bmatrix} S_b(\omega_1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4S_b(\omega_1)}{A_1^2} & \frac{-6S_b(\omega_1)}{A_1^2} \\ 0 & \frac{-6S_b(\omega_1)}{A_1^2} & \frac{12S_b(\omega_1)}{A_1^2} \\ & & \ddots \\ S_b(\omega_p) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4S_b(\omega_p)}{A_p^2} & \frac{-6S_b(\omega_p)}{A_p^2} \\ 0 & \frac{-6S_b(\omega_p)}{A_p^2} & \frac{12S_b(\omega_p)}{A_p^2} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Notons que la variance sur l'estimation de fréquence est proportionnelle à $1/N^3$ alors que celle sur l'amplitude décroît en $1/N$. On peut également mentionner que les bornes sur la fréquence et l'amplitude sont découplées de celles sur la phase. De plus les bornes asymptotiques ne dépendent pas de la phase : en corollaire, cela implique que les bornes asymptotiques sont les mêmes si les phases sont aléatoirement distribuées. Enfin, notons que des expressions simples (non asymptotiques) existent dans le cas d'une seule exponentielle (voir Annexe).

7.2 Méthodes sous-espace

7.2.1 PISARENKO

Cette méthode a été proposée pour estimer les fréquences et amplitudes de p exponentielles complexes dans un bruit blanc :

$$y(n) = x(n) + b(n) = \sum_{k=1}^p A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi n f_k} + b(n) \quad (7.11)$$

Il correspond au cas spécial où la matrice de corrélation est choisie de dimension $\mathbf{M}=\mathbf{p}+1$:

$$\mathbf{R}_{yy}^{p+1} = \begin{pmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) & \cdot & \cdot & r_{yy}(-p) \\ r_{yy}(1) & r_{yy}(0) & \cdot & \cdot & r_{yy}(-p+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{yy}(p) & r_{yy}(p-1) & \cdot & \cdot & r_{yy}(0) \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

On a vu que :

- la plus petite valeur propre correspond à σ^2 .

- le vecteur propre \mathbf{v}_{p+1} est orthogonal aux vecteurs signaux \mathbf{s}_i .
- D'où :

$$\langle \mathbf{v}_{p+1}, \mathbf{s}_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^p v_{p+1}(k) e^{-j2\pi k f_i} = 0 \quad (7.13)$$

Le polynôme $H(z) = \sum_{k=0}^p v_{p+1}(k) z^{-k}$ aura donc p racines égales à $e^{j2\pi f_i}$.
La méthode de Pisarenko comprend **4 étapes** :

- écriture de la matrice de corrélation d'ordre $p+1$.
- recherche du vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre.
- recherche des racines de $H(z)$.
- estimation des puissances des exponentielles par :

$$\begin{pmatrix} e^{j2\pi f_1} & e^{j2\pi f_2} & \dots & e^{j2\pi f_p} \\ e^{j4\pi f_1} & e^{j4\pi f_2} & \dots & e^{j4\pi f_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2M\pi f_1} & e^{j2M\pi f_2} & \dots & e^{j2M\pi f_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{yy}(1) \\ r_{yy}(2) \\ \vdots \\ r_{yy}(M) \end{pmatrix}$$

7.2.2 MUSIC

Il s'agit en fait d'une généralisation de la méthode de Pisarenko au cas où le sous-espace bruit est choisi de dimension supérieur à 1. Les estimateurs de fréquence utilisant le sous-espace bruit tiennent compte de l'orthogonalité entre vecteurs signaux et vecteurs du sous-espace bruit :

$$\mathbf{s}_i^H \left(\sum_{k=p+1}^M \alpha_k \mathbf{v}_k \right) = 0 \quad (7.14)$$

Il s'agit en fait d'estimateurs spectraux et non de spectres à proprement dit. On cherche les maxima d'une fonction du type :

$$P(f) = \frac{1}{\sum_{k=p+1}^M \alpha_k |\mathbf{e}^H \mathbf{v}_k|^2} \quad (7.15)$$

avec

$$\mathbf{e} = (1, e^{j2\pi f}, \dots, e^{j2\pi(M-1)f})^T \quad (7.16)$$

sachant que théoriquement lorsque $f = f_i$, le dénominateur est nul. C'est le choix des α_k qui conditionne l'estimateur :

$$P_{MUSIC}(f) = \frac{1}{\sum_{k=p+1}^M |\mathbf{e}^H \mathbf{v}_k|^2} = \frac{1}{\mathbf{e}^H(f) \left[\sum_{k=p+1}^M \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right] \mathbf{e}(f)} \quad (7.17)$$

$$P_{EV}(f) = \frac{1}{\sum_{k=p+1}^M \frac{1}{\lambda_k} |\mathbf{e}^H \mathbf{v}_k|^2} = \frac{1}{\mathbf{e}^H(f) \left[\sum_{k=p+1}^M \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right] \mathbf{e}(f)} \quad (7.18)$$

Remarque 7.2. *Au lieu de rechercher les maxima de l'estimateur spectral, on peut rechercher les racines d'un polynôme du type :*

$$A(z) = \mathbf{e}^T(z^{-1}) \left[\sum_{k=p+1}^M \alpha_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right] \mathbf{e}(z) \quad (7.19)$$

où

$$\mathbf{e}(z) = (1, z, \dots, z^{(M-1)})^T \quad (7.20)$$

C'est la méthode dite "root-MUSIC".

Remarque 7.3. *Lorsque $p < M - p$, on peut utiliser la forme*

$$P_{MUSIC}(f) = \frac{1}{M - \sum_{k=1}^p |\mathbf{e}^H \mathbf{v}_k|^2} \quad (7.21)$$

qui permet d'exprimer l'estimateur spectral avec moins de vecteurs.

Remarque 7.4. *Les λ_k peuvent être les valeurs propres de la matrice de corrélation ou les valeurs singulières de la matrice signal.*

7.2.3 ESPRIT

ESPRIT est une méthode fondée sur le sous-espace signal. Elle utilise certaines propriétés d'invariance par rotation que l'on trouve naturellement dans le cas d'exponentielles. D'après l'équation (7.8), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}^M &= \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \sigma^2) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma^2 \sum_{i=p+1}^M \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \\ &= \mathbf{V} \tilde{\Lambda} \mathbf{V}^H + \mathbf{G} \Sigma \mathbf{G}^H \end{aligned} \quad (7.22)$$

où $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p]$ désigne la matrice des vecteurs propres du sous-espace signal. De même, d'après (7.5), on a :

$$\mathbf{R}_{yy}^M = \mathbf{S} \mathbf{\Pi} \mathbf{S}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (7.23)$$

avec $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_p]$ et $\mathbf{\Pi} = \text{diag}(P_1, \dots, P_p)$. Décomposons maintenant \mathbf{S} de la façon suivante :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ e^{j\omega_1} & e^{j\omega_2} & \cdot & \cdot & e^{j\omega_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{j(M-1)\omega_1} & e^{j(M-1)\omega_2} & \cdot & \cdot & e^{j(M-1)\omega_p} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} - \\ \mathbf{S}_2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \\ - \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

On voit immédiatement que les matrices \mathbf{S}_1 et \mathbf{S}_2 sont liées par la relation :

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1 \Phi = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} e^{j\omega_1} & & & \\ & e^{j\omega_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{j\omega_p} \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

La matrice Φ peut être vue comme un opérateur de rotation. De même que pour (7.24), décomposons maintenant \mathbf{V} :

$$\mathbf{V} \triangleq \begin{pmatrix} - \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ - \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

On va montrer qu'une relation du type (7.25) existe aussi pour \mathbf{V} . D'après (7.22),(7.5) :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}^M \mathbf{V} = \mathbf{V} \tilde{\Lambda} &\Rightarrow \mathbf{S} \Pi \mathbf{S}^H \mathbf{V} + \sigma^2 \mathbf{V} = \mathbf{V} \tilde{\Lambda} \\ &\Rightarrow \mathbf{S} \Pi \mathbf{S}^H \mathbf{V} = \mathbf{V} (\tilde{\Lambda} - \sigma^2 \mathbf{I}) \\ &\Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{S} \mathbf{C} \end{aligned} \quad (7.27)$$

avec $\mathbf{C} = \Pi \mathbf{S}^H \mathbf{V} (\tilde{\Lambda} - \sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$. D'après (7.24),(7.26) et l'équation précédente, on a $\mathbf{V}_2 = \mathbf{S}_2 \mathbf{C}$ et $\mathbf{V}_1 = \mathbf{S}_1 \mathbf{C}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 &= \mathbf{S}_2 \mathbf{C} \\ &= \mathbf{S}_1 \Phi \mathbf{C} \\ &= \mathbf{V}_1 \mathbf{C}^{-1} \Phi \mathbf{C} \\ &= \mathbf{V}_1 \Psi \end{aligned} \quad (7.28)$$

Les matrices \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 sont donc liées par la relation précédente. De plus,

$$\Psi = \mathbf{C}^{-1} \Phi \mathbf{C} \quad (7.29)$$

L'équation précédente indique que Φ et Ψ sont similaires, c'est à dire qu'elles partagent les mêmes valeurs propres. Autrement dit, **la matrice Φ est la matrice diagonale des valeurs propres de Ψ : les $e^{j\omega_k}$ sont donc les valeurs propres de Ψ** . En théorie (7.28) est vérifiée exactement : aussi, bien que \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 soient rectangulaires, on peut choisir un ensemble quelconque de p lignes dans ces matrices et résoudre (7.28) pour obtenir exactement Ψ . En pratique, la matrice de corrélation est estimée et on a seulement accès (via une décomposition en valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_{yy}^M$) à des estimées $\hat{\mathbf{V}}_2, \hat{\mathbf{V}}_1$. On résout alors, au sens des moindres carrés ou moindres carrés totaux, le système suivant :

$$\hat{\mathbf{V}}_2 = \hat{\mathbf{V}}_1 \hat{\Psi} \quad (7.30)$$

Par les moindres carrés, on obtiendrait $\hat{\Psi} = \left(\hat{\mathbf{V}}_1^H \hat{\mathbf{V}}_1 \right)^{-1} \hat{\mathbf{V}}_1^H \hat{\mathbf{V}}_2$. La recherche des valeurs propres de $\hat{\Psi}$ conduit alors aux estimées $e^{j\hat{\omega}_k}$.

En résumé, la méthode ESPRIT comporte les étapes suivantes :

Estimation de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_{yy}^M$ à partir des données $\{x(n)\}_{n=0,\dots,N-1}$
 Décomposition en vecteurs propres et formation du sous-espace
 signal $\hat{\mathbf{V}} = [\hat{\mathbf{v}}_1, \dots, \hat{\mathbf{v}}_p]$
 Formation de $\hat{\mathbf{V}}_2, \hat{\mathbf{V}}_1$ et résolution de $\hat{\mathbf{V}}_2 = \hat{\mathbf{V}}_1 \hat{\mathbf{\Psi}}$
 Recherche des valeurs propres $\{e^{j\hat{\omega}_k}\}$ de $\hat{\mathbf{\Psi}}$.

Quelques commentaires :

Remarque 7.5. Contrairement à MUSIC, ESPRIT ne nécessite pas de recherche de maxima : celle-ci est remplacée par une décomposition en vecteurs propres. Ajoutons également qu'il n'y a pas à éliminer des pics parasites comme pour MUSIC, le nombre de valeurs propres calculées étant égal au nombre d'exponentielles présentes dans le signal.

Remarque 7.6. ESPRIT comme MUSIC sont des estimateurs non biaisés des fréquences. Par contre, il a été montré que pour une exponentielle bruitée, ESPRIT avait une variance inférieure à MUSIC. En effet, pour un signal $x(n) = Ae^{j(n\omega_0 + \varphi)} + b(n)$ où $b(n)$ est un bruit blanc de variance σ^2 , les variances asymptotiques de MUSIC et d'ESPRIT sur l'estimation de ω_0 sont données par :

$$\text{var}_{\text{MUSIC}}(\hat{\omega}_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{NE} \{(\hat{\omega}_0 - \omega_0)^2\} = \frac{12}{5} \frac{\sigma^4}{A^4} \frac{M^2 + 1}{M^3(M^2 - 1)} \quad (7.31)$$

$$\text{var}_{\text{ESPRIT}}(\hat{\omega}_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{NE} \{(\hat{\omega}_0 - \omega_0)^2\} = \frac{2\sigma^4}{A^4} \frac{1}{M^2(M - 1)} \quad (7.32)$$

Remarque 7.7. Il convient de mentionner que la fonction de corrélation (7.3) vérifie les équations de "Yule-Walker", e.g.

$$r_{yy}(m) = - \sum_{k=1}^p a_k r_{yy}(m - k) \quad m > p$$

où

$$A(z) = \sum_{k=0}^p a_k z^{-k} = \prod_{k=1}^p (1 - e^{j\omega_k} z^{-1})$$

Par conséquent, tout polynôme du type $A'(z) = A(z)B(z)$ va vérifier ces équations, e.g. $\sum_{k=1}^L a'_k r_{yy}(m - k) = 0$. On peut donc, comme pour un processus ARMA, résoudre un système du type

$$\begin{pmatrix} \hat{r}_{yy}(L) & \hat{r}_{yy}(L-1) & \cdots & \hat{r}_{yy}(1) \\ \hat{r}_{yy}(L+1) & \hat{r}_{yy}(L) & \cdots & \hat{r}_{yy}(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{r}_{yy}(L+M-1) & \hat{r}_{yy}(L+M-2) & & \hat{r}_{yy}(M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a'_L \end{pmatrix} \simeq - \begin{pmatrix} \hat{r}_{yy}(L+1) \\ \hat{r}_{yy}(L+2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{r}_{yy}(L+M) \end{pmatrix}$$

En l'absence de bruit, la matrice serait de rang p . On est alors amené à résoudre non plus $\hat{\mathbf{R}}\mathbf{a}' = -\hat{\mathbf{r}}$ mais

$$\hat{\mathbf{R}}_p \mathbf{a}' = -\hat{\mathbf{r}} \quad (7.33)$$

où $\hat{\mathbf{R}}_p$ est le meilleur approximant de rang p de $\hat{\mathbf{R}}$, obtenu par SVD (voir la suite). Il s'agit là de la méthode HOYW avec une approximation de rang p .

7.2.4 Subspace fitting

On a vu que le sous-espace signal, représenté par la matrice \mathbf{S} des vecteurs signaux (cf. (7.24)) était également engendré par la matrice \mathbf{V} des principaux vecteurs propres de \mathbf{R}_{yy} . Par conséquent il existe une matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{p \times p}$ non singulière telle que

$$\mathbf{V} = \mathbf{S}(\omega)\mathbf{T}$$

où on indique la dépendance explicite de \mathbf{S} vis-à-vis de $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_p]^T$. En pratique, il n'y a pas de vecteur ω tel que $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{S}(\omega)\mathbf{T}$ où $\hat{\mathbf{V}}$ désigne une estimée de \mathbf{V} . On est donc naturellement amené à estimer ω et \mathbf{T} en résolvant au sens des moindres carrés le problème suivant

$$[\hat{\omega}, \hat{\mathbf{T}}] = \arg \min_{\omega, \mathbf{T}} \|\hat{\mathbf{V}} - \mathbf{S}(\omega)\mathbf{T}\|_{\mathbf{W}}^2 \quad (7.34)$$

Dans l'équation précédente, \mathbf{W} est une matrice de pondération et $\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{W}}^2 = \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^H)$. On cherche donc le sous-espace $\mathbf{S}(\omega)$ et la transformation \mathbf{T} qui approche au mieux le sous-espace observé $\hat{\mathbf{V}}$, d'où la terminologie anglaise de "subspace fitting". On s'aperçoit que le critère (7.34) est non linéaire par rapport à ω mais quadratique par rapport à \mathbf{T} . Quel que soit \mathbf{S} , la solution en \mathbf{T} est donnée par $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{S}^\# \hat{\mathbf{V}}$. En reportant cette expression dans (7.34), l'estimateur SSF est donné par

$$\hat{\omega} = \arg \min V_{SSF}(\omega) \quad (7.35)$$

avec

$$\begin{aligned} V_{SSF}(\omega) &= \|\hat{\mathbf{V}} - \mathbf{S}(\omega)\mathbf{S}(\omega)^\# \hat{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{W}}^2 \\ &= \|(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{S}(\omega)}) \hat{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{W}}^2 \\ &= \|\mathbf{P}_{\mathbf{S}}^\perp(\omega) \hat{\mathbf{V}}\|_{\mathbf{W}}^2 \\ &= \text{Tr}(\mathbf{P}_{\mathbf{S}}^\perp(\omega) \hat{\mathbf{V}} \mathbf{W} \hat{\mathbf{V}}^H) \end{aligned} \quad (7.36)$$

On cherche donc à minimiser la projection de $\hat{\mathbf{V}}$ sur l'orthogonal de $\mathbf{S}(\omega)$. De manière équivalente, on peut exploiter la relation

$$\mathbf{G}^H \mathbf{S}(\omega) = \mathbf{0}$$

pour définir une deuxième classe d'estimateurs ("noise subspace fitting") qui s'écrivent comme

$$\hat{\omega} = \arg \min V_{NSF}(\omega) \quad (7.37)$$

avec

$$\begin{aligned} V_{NSF}(\omega) &= \|\hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{S}(\omega)\|_{\mathbf{U}}^2 \\ &= \text{Tr}(\hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{S}(\omega) \mathbf{U} \mathbf{S}^H(\omega) \hat{\mathbf{G}}) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{U} \hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{S}(\omega) \mathbf{S}^H(\omega) \hat{\mathbf{G}}) \end{aligned} \quad (7.38)$$

Notons que la classe d'estimateurs donnés par (7.35) ou (7.37) est très large en fonction du choix de \mathbf{W} ou \mathbf{U} . En particulier avec le choix $\mathbf{U} = \mathbf{I}$, on retrouve l'estimateur MUSIC.

Remarque 7.8. *Il existe des choix optimaux des matrices de pondération pour lesquels les erreurs d'estimation ont une matrice de covariance minimale.*

Remarque 7.9. *L'implantation de l'estimateur (7.35) requiert une minimisation multidimensionnelle, ce qui n'est jamais simple d'un point de vue calculatoire. Néanmoins, on montre que la matrice $\mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{\perp}(\boldsymbol{\omega})$ s'écrit simplement en fonction des paramètres b_0, \dots, b_p tels que $B(z) = \sum_{k=0}^p b_k z^{-k} = \prod_{k=1}^p (1 - e^{j\omega_k} z^{-1})$. La fonction $V_{SSF}(\boldsymbol{\omega})$ peut ainsi se réécrire aisément en fonction de ces nouveaux paramètres et le problème de minimisation a alors une solution analytique. Il ne reste alors qu'à rechercher les racines de $B(z)$ pour estimer les fréquences (voir Exercice 17 de l'Annexe A).*

Chapitre 8

Conclusions

La modélisation paramétrique de signaux constitue un moyen très utilisé de représenter *in fine*, à un niveau de synthèse et après analyse préalable, soit les phénomènes physiques ayant donné naissance à un signal soit les mécanismes “artificiels” de production de ce signal (par exemple filtrage, modulation, etc.). Elle permet de traduire, avec un nombre fini -généralement faible- de paramètres les principales caractéristiques du signal : elle possède donc l’avantage principal de réduire l’espace de représentation et ainsi, en général, de diminuer la charge calculatoire associée au traitement du signal. Il convient de noter qu’une telle approche n’est envisageable que lorsqu’on possède de nombreuses informations a priori sur le signal. Par conséquent, l’opérateur doit tenir compte de la validité des hypothèses émises car celles-ci conditionnent la performance mais aussi la robustesse d’estimation.

Ce cours a illustré l’utilisation (ou la non utilisation) des potentiels de la modélisation à des fins d’analyse spectrale de signaux. On compte 3 grandes catégories de méthodes :

Transformée de Fourier Elle reste l’outil de base pour l’analyse spectrale. D’abord appliquée au cas de signaux déterministes continus, la théorie a été étendue à des processus aléatoires stationnaires, échantillonnés. Ses propriétés sont parfaitement connues. Enfin, des algorithmes rapides ont été élaborés qui la rendent particulièrement intéressante pour une implantation sur processeur. Notons qu’elle s’applique à une très grande classe de signaux. Ses inconvénients sont liés à la résolution en $1/N$ (donc faible lorsque peu de points sont disponibles) et le fait que les estimateurs de la DSP sont non consistants (par contre l’estimation de la position des raies est consistante). Ses avantages tiennent à sa robustesse et à sa résistance au bruit.

Modèles rationnels linéaires - Spectres continus Leur utilisation en vue d’analyse spectrale a été impulsée par le besoin de pallier certains inconvénients de la FFT : plus haute résolution, élimination des artefacts dus aux lobes secondaires. Leur intérêt est de pouvoir travailler sur des tranches courtes, ce qui est intéressant dans le cas de signaux de courte durée (ex : radar) ou lentement variables. Leurs propriétés (avantages et inconvénients) ont été intensément étudiées et on maîtrise maintenant leur comportement par rapport à la FFT. Ces méthodes sont relativement simples à mettre en oeuvre sur le plan calculatoire et assez robustes. Elles requièrent cependant un bon rapport signal à bruit.

Exponentielles complexes - Spectres discrets Depuis les années 80, le problème d’estimation de fréquences a été particulièrement étudié, notamment dans le cadre des

approches géométriques, qui permettent d'améliorer encore la résolution et la précision. Il faut noter que ces approches sont développées en parallèle pour le traitement spatial du signal (traitement d'antennes par exemple). Ces méthodes sont très puissantes mais leur coût calculatoire peut être prohibitif pour des applications temps réel. De nombreux travaux visent à trouver des décompositions rapides (QR, ULV) et/ou adaptatives.

Cette rapide mise en perspective vise simplement à montrer que l'évolution des méthodes naît de besoins nouveaux (résolution, précision, résistance au bruit,...). Il en est de même dans un problème concret d'analyse spectrale : c'est d'abord l'outil de base qui doit être utilisé avant d'aborder d'autres méthodes si le besoin s'en fait sentir.

Des informations plus complètes et plus détaillées peuvent être trouvées dans les références [2]-[10] sur lesquelles s'appuie ce cours.

Bibliographie

- [1] S.M. Kay. *Modern Spectral Estimation : Theory and Applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [2] S.L. Marple. *Digital Spectral Analysis with Applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [3] T. Söderström and P. Stoica. *System Identification*. Prentice Hall International, London, UK, 1989.
- [4] L.L. Scharf. *Statistical Signal Processing : Detection, Estimation and Time Series Analysis*. Addison Wesley, Reading, MA, 1991.
- [5] C.W. Therrien. *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [6] A. Van der Veen, E. Deprettere, and A. Swindlehurst. Subspace-based signal analysis using Singular Value Decomposition. *Proceedings IEEE*, 81(9) :1277–1308, September 1993.
- [7] B. Porat. *Digital Processing of Random Signals : Theory & Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [8] G. Golub and C. Van Loan. *Matrix Computations*. John Hopkins University Press, Baltimore, 3rd edition, 1996.
- [9] P. Stoica and R. Moses. *Introduction to Spectral Analysis*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [10] D.G. Manolakis, V.K. Ingle, and S.M. Kogon. *Statistical and Adaptive Signal Processing*. McGraw-Hill, New York, 2000.

Annexe A

Exercices-Problèmes

Exercice 1 (Processus $AR(1)$). Soit $x(n)$ un processus $AR(1)$ défini par les paramètres $\{a_1, \sigma^2\}$

- Montrer que la fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$r_{xx}(m) = \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2} (-a_1)^{|m|}$$

- Caractériser ce processus d'un point de vue spectral (passe-bas, passe-bande,...?) en fonction du signe de a_1 .

Exercice 2 (Processus $AR(2)$). Soit $x(n)$ un processus $AR(2)$ défini par $\{a_1, a_2, \sigma^2\}$ et soit $r_{xx}(m)$ sa fonction de corrélation.

- Si l'on note $\rho e^{\pm j2\pi\theta}$ les pôles du modèle, comment s'expriment les paramètres $\{\rho, \theta\}$ en fonction de $\{a_1, a_2\}$?
- Montrer que la fonction d'autocorrélation de ce processus s'écrit :

$$r_{xx}(m) = A\rho^{|m|} \cos(2\pi |m| \theta - \psi)$$

où :

$$\psi = \arctan \left[\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2} \cot(2\pi\theta) \right]$$
$$A = \sigma^2 \frac{\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \sqrt{1 + \left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} \right)^2 \cot^2(2\pi\theta)}}{1 - 2\rho^2 \cos(4\pi\theta) + \rho^4}$$

- Quelle est l'influence du paramètre ρ sur l'allure du spectre autour de θ ?
- Si l'on fait tendre simultanément $\rho \rightarrow 1$, $\sigma^2 \rightarrow 0$ avec $\sigma^2/(1 - \rho^2) \rightarrow cte$, que devient l'expression $r_{xx}(m)$?

Exercice 3 (Processus $ARMA(1,1)$). Soit $x(n)$ un processus $ARMA(1,1)$ défini par $\{a_1, b_1, \sigma^2\}$ et soit $r_{xx}(m)$ sa fonction de corrélation.

- Montrer que la fonction d'autocorrélation de ce processus s'écrit :

$$r_{xx}(m) = \begin{cases} \sigma^2 \frac{1+b_1^2-2a_1b_1}{1-a_1^2} & m = 0 \\ \sigma^2 \frac{(1-a_1b_1)(b_1-a_1)}{1-a_1^2} [-a_1]^{|m|-1} & m \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 4 (Processus $MA(1)$). Soit $x(n)$ un processus $MA(1)$ défini par $\{b_1, \sigma^2\}$ et soit $r_{xx}(m)$ sa fonction de corrélation.

- Montrer que la fonction d'autocorrélation de ce processus s'écrit :

$$r_{xx}(m) = \begin{cases} \sigma^2(1 + b_1^2) & m = 0 \\ \sigma^2 b_1 & m = 1 \\ 0 & m \geq 2 \end{cases}$$

Exercice 5 (Propriété de phase minimale du prédicteur optimal). On considère le prédicteur optimal d'un processus $AR(p)$. On cherche à montrer que les pôles obtenus par ce prédicteur sont tous à l'intérieur du cercle unité.

- Montrer que la puissance minimale de l'erreur de prédiction s'écrit

$$\rho_{\min} = \int_{-1/2}^{1/2} |A(f)|^2 S_{xx}(f) df$$

- Montrer que si un des pôles z_k de $A(z) = \sum_{k=0}^p a_k z^{-k}$ est à l'intérieur du cercle, ρ_{\min} n'est plus la valeur minimale de l'EPL.

Exercice 6 (Extension implicite de la fonction d'autocorrélation). On cherche à montrer que l'estimateur AR, de façon implicite, prolonge la fonction d'autocorrélation en dehors de $\{r_{xx}(m)\}_{m=0..p}$. On suppose avoir calculer, par Yule-Walker, les paramètres AR à partir des vrais échantillons de corrélation $\{r_{xx}(m)\}_{m=0..p}$. On définit alors le spectre $AR(p)$ par

$$S_x(z) = \frac{\sigma^2}{A(z)A^*(1/z^*)}$$

- Montrer que la transformée en z inverse de $S_x(z)$ vérifie

$$\phi_{xx}(m) = \begin{cases} r_{xx}(m) & 0 \leq m \leq p \\ -\sum_{k=1}^p a_k \phi_{xx}(m-k) & m > p \end{cases}$$

Exercice 7 (AR bruité). Soit $x(n)$ un processus $AR(p)$ de paramètres $\{a_1, a_2, \dots, a_p, \sigma^2\}$. On considère le signal

$$y(n) = x(n) + b(n)$$

où $b(n)$ est un bruit blanc de variance λ^2 .

- Calculer la densité spectrale de puissance du processus $y(n)$.

Exercice 8 (Estimation $AR(p)$ d'une exponentielle bruitée). Soit le signal suivant :

$$x(n) = A e^{j(n\omega_0 + \varphi)} + b(n)$$

où :

- φ est une phase aléatoire uniformément distribuée sur $(0, 2\pi]$.

- $b(n)$ est un bruit blanc de variance σ_w^2 .

- Montrer que la fonction d'autocorrélation de ce processus s'écrit :

$$r_{xx}(m) = P e^{jm\omega_0} + \sigma_w^2 \delta(m)$$

- On effectue une modélisation $AR(p)$ de ce processus (en supposant la fonction d'autocorrélation connue) à l'aide des équations de Yule-Walker. Si l'on note $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p]^T$ et σ^2 les paramètres du modèle AR ainsi estimé, montrer que :

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} \\ \sigma^2 &= r_{xx}(0) + \mathbf{a}^H \mathbf{r}\end{aligned}$$

et donner l'expression de \mathbf{R} et \mathbf{r} .

- En notant $\mathbf{s} = [e^{j\omega_0} \ e^{j2\omega_0} \ \dots \ e^{jp\omega_0}]^T$, montrer que :

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= P\mathbf{s}\mathbf{s}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{r} &= P\mathbf{s}\end{aligned}$$

- En utilisant la formule d'inversion matricielle $(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{u}^H)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}^H\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{u}^H\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}$, en déduire que :

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= -\frac{P}{\sigma_w^2 + pP}\mathbf{s} \\ \sigma^2 &= \sigma_w^2 \left[1 + \frac{P}{\sigma_w^2 + pP} \right]\end{aligned}$$

- Quand le rapport signal sur bruit $RSB = \frac{P}{\sigma_w^2} \rightarrow \infty$, que deviennent les expressions précédentes ?
- On cherche maintenant à estimer la pulsation ω_0 . Dans un premier temps, on cherche la position du maximum du spectre AR . Montrer que le spectre AR s'écrit :

$$S(f) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \frac{P}{\sigma_w^2 + pP} e^{H}(f) \mathbf{s} \right|^2}$$

où $\mathbf{e}(f) = [e^{j2\pi f} \ \dots \ e^{j2\pi pf}]^T$. Montrer que le spectre atteint bien son maximum pour $f = f_0$.

- Montrer que la valeur du spectre à f_0 est :

$$S(f_0) = \sigma_w^2 [1 + (p+1)RSB] [1 + pRSB]$$

Que devient cette expression pour RSB "grand" ? La valeur du spectre à la fréquence f_0 est-elle proportionnelle à P ?

- Dans un deuxième temps, on cherche la fréquence par calcul des racines du polynôme $A(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}$. Montrer que $z = e^{j\omega_0}$ n'est pas racine de ce polynôme. Conclusions ?

Exercice 9 (Modélisation ARMA, MUSIC d'un cosinus bruité). Soit un processus $x(n)$ qu'on désire modéliser par une sinusoïde bruitée $x(n) \approx A \cos(n\omega_0 + \varphi) + b(n)$, où $b(n)$ désigne un bruit blanc. On a estimé les 5 premiers points de corrélation de ce processus :

$$\begin{aligned}
\hat{r}_0 &= 0.6 \\
\hat{r}_1 &= 0.15 \\
\hat{r}_2 &= -0.3 \\
\hat{r}_3 &= -0.1 \\
\hat{r}_4 &= 0.4
\end{aligned}$$

On désire estimer ω_0 à partir de ces points, par différentes méthodes.

– Modélisation $ARMA(2, 1)$:

1. estimer les paramètres AR par la méthode des moindres carrés.
2. en déduire un estimateur $\hat{\omega}_0$ et donner sa valeur numérique.

– MUSIC :

1. Décrire la procédure pour estimer $\hat{\omega}_0$ en utilisant les 5 points de corrélation et en supposant la matrice de rang p .
2. Sachant que les vecteurs propres et valeurs propres sont :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} 0.589 \\ -0.0541 \\ -0.548 \\ -0.0541 \\ 0.589 \end{pmatrix} & \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} -0.2158 \\ -0.6734 \\ 0 \\ 0.6734 \\ 0.2158 \end{pmatrix} & \mathbf{v}_3 &= \begin{pmatrix} 0.3174 \\ 0.4757 \\ 0.5883 \\ 0.4757 \\ 0.3174 \end{pmatrix} \\
\mathbf{v}_4 &= \begin{pmatrix} -0.6734 \\ 0.2158 \\ 0 \\ -0.2158 \\ 0.6734 \end{pmatrix} & \mathbf{v}_5 &= \begin{pmatrix} 0.2288 \\ -0.5204 \\ 0.5947 \\ -0.5204 \\ 0.2288 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1.2745, \lambda_2 = 0.9801, \lambda_3 = 0.5189, \lambda_4 = 0.1199, \lambda_5 = 0.1066$$

Ecrire l'estimateur MUSIC en choisissant le rang égal à 2 puis à 3. Remarques ?

Exercice 10. Les vecteurs signaux engendrent le même sous-espace que les vecteurs propres principaux. Montrer cette propriété en démontrant que tout vecteur d'un des sous-espaces peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de l'autre sous-espace.

Exercice 11 (Méthode de Tufts-Kumaresan). On s'intéresse aux propriétés des pôles obtenus par la méthode TK **dans le cas sans bruit**. Le signal est donc composé de p exponentielles (amorties ou non).

– Montrer que, quelque soit la solution du système

$$\begin{pmatrix} x(L) & x(L-1) & \cdot & \cdot & x(1) \\ x(L+1) & \cdot & & & x(2) \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ x(N-1) & x(N-2) & & & x(N-L) \end{pmatrix} \mathbf{a} = - \begin{pmatrix} x(L+1) \\ x(L+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N) \end{pmatrix}$$

elle donne un polynôme $A(z) = \sum_{k=0}^L a_k z^{-k}$ dont p racines sont $e^{j\omega_k}$.

- On s'intéresse aux $L-p$ racines restantes, lorsqu'on considère la solution des Moindres Carrés, i.e. celle qui minimise $\|\mathbf{a}\|^2$. En notant

$$A_s(z) = \sum_{k=0}^p b_k z^{-k} = \prod_{k=1}^p (1 - e^{j\omega_k} z^{-1})$$

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{L-p} c_k z^{-k}$$

$$A(z) = A_s(z) \times A_n(z)$$

montrer que

$$a_n = \sum c_k b_{n-k}$$

- A quoi correspond le filtre $A_n(z)$? En utilisant l'exercice 5, montrer que ses zéros sont à l'intérieur du cercle unité.

Exercice 12 (Pisarenko). Soit le signal suivant :

$$x(n) = Ae^{j(n\omega_0 + \varphi)} + b(n)$$

où φ est une phase aléatoire uniformément distribuée sur $(0, 2\pi]$ et $b(n)$ est un bruit blanc de variance σ^2 . On veut estimer la fréquence ω_0 par la méthode de Pisarenko. On suppose disposer de N échantillons $x(0), \dots, x(N-1)$.

- Donner la procédure pour estimer cette fréquence.
- En calculant le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre, donner l'expression de la fréquence estimée $\hat{\omega}_0$ en fonction des estimées $\hat{r}_{xx}(0), \hat{r}_{xx}(1)$ de la fonction de corrélation.
- Quelle est la moyenne de cet estimateur ?

Exercice 13 (MUSIC). Montrer que le pseudo-spectre de MUSIC s'écrit des deux façons équivalentes suivantes :

$$P_{MUSIC}(f) = \frac{1}{\sum_{k=p+1}^M |e^H \mathbf{v}_k|^2}$$

$$= \frac{1}{M - \sum_{k=1}^p |e^H \mathbf{v}_k|^2}$$

- Quel est l'intérêt de la seconde forme ? La relation précédente est-elle valable pour le pseudo-spectre P_{EV} .
- Pratiquement, comment évalue t-on $P_{MUSIC}(f)$?

Exercice 14 (Estimation d'un chirp). On considère le signal suivant

$$x(n) = Ae^{j(\phi + a_1 n + a_2 n^2)} + b(n)$$

$$= s(n) + b(n) \quad n = 1, \dots, N \quad (\text{A.1})$$

où ϕ est une phase aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$, a_1 et a_2 sont des paramètres déterministes et $b(n)$ est un bruit blanc complexe circulaire et Gaussien, de moyenne nulle et de variance σ^2 , e.g. $\mathbf{E}\{b^*(n)b(n+m)\} = \sigma^2\delta(m)$, $\mathbf{E}\{b(n)b(n+m)\} = 0$. On souhaite estimer les paramètres a_1 et a_2 à partir des N échantillons $\{x(n)\}_{n=1, \dots, N}$.

- Calculer la moyenne et la fonction d'autocorrélation $r_{xx}(m) = \mathbb{E}\{x^*(n)x(n+m)\}$ de $x(n)$. Ce processus est-il stationnaire ? Pourrait-on utiliser directement les méthodes du cours (type MUSIC, ESPRIT, Tufts-Kumaresan) sur $x(n)$?
- On définit alors un nouveau signal

$$y(n; \tau) = x^*(n)x(n + \tau)$$

où τ est une constante **strictement positive**. Montrer que

$$y(n) = \tilde{A}e^{jn\omega} + v(n)$$

et donner l'expression de l'amplitude complexe \tilde{A} , de la pulsation ω et du bruit $v(n)$.

- Le bruit additif $v(n)$ est-il de moyenne nulle ? Est-il stationnaire ? Donner sa fonction de corrélation $\mathbb{E}\{v^*(n)v(n+m)\}$. On rappelle que pour des variables aléatoires Gaussiennes de moyenne nulle $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ on a

$$\mathbb{E}\{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\} = \mathbb{E}\{\beta_1\beta_2\}\mathbb{E}\{\beta_3\beta_4\} + \mathbb{E}\{\beta_1\beta_3\}\mathbb{E}\{\beta_2\beta_4\} + \mathbb{E}\{\beta_1\beta_4\}\mathbb{E}\{\beta_2\beta_3\}$$

- Proposer une méthode pour estimer a_2 à partir du signal $y(n; \tau)$. Donner par exemple la démarche pour implanter ESPRIT ou la méthode de Tufts-Kumaresan. Dans le cas présent d'une seule exponentielle, est-il préférable d'utiliser ESPRIT ou MUSIC.
- En supposant qu'on dispose maintenant d'une estimée \hat{a}_2 de a_2 , on construit alors le signal

$$z(n) = x(n)e^{-j\hat{a}_2 n^2}$$

En supposant l'erreur d'estimation $\hat{a}_2 - a_2$ faible, quelle est la forme de $z(n)$? En déduire une méthode pour estimer a_1 .

Problème 1 (Estimation AR(2) d'un sinus bruité). Dans ce problème, on s'intéresse à l'estimation autoregressive d'ordre 2 (AR(2)) d'un sinus bruité ou non. On étudie l'influence du bruit sur l'estimation de la fréquence du sinus.

Soit $x(n)$ le signal sinusoidal suivant :

$$x(n) = \sqrt{2} \cos(n\omega_0 + \varphi)$$

où φ est une phase aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ et ω_0 est la fréquence du signal, que l'on désire estimer.

- Donner l'expression de la fonction de corrélation $r_{xx}(m) = \mathbb{E}\{x(n)x(n+m)\}$.
- En supposant connue cette fonction de corrélation, donner l'expression des paramètres $\{a_1, a_2\}$ d'un modèle AR(2) obtenus en résolvant les équations de Yule-Walker. Donner $\{a_1, a_2\}$ en fonction de $\{r_{xx}(0), r_{xx}(1), r_{xx}(2)\}$ puis uniquement en fonction de ω_0 .
- Où se situent les pôles du modèle ?

On suppose maintenant le **signal bruité** et on considère :

$$y(n) = x(n) + b(n)$$

où $b(n)$ est un bruit blanc de variance σ^2 .

- Que deviennent les nouveaux paramètres $\{b_1, b_2\}$ d'une modélisation AR(2) de $y(n)$? Donner $\{b_1, b_2\}$ en fonction de $\{\omega_0, \sigma^2\}$.

- Calculer, en fonction de $\{b_1, b_2\}$, la fréquence ω_m obtenue par recherche du maximum du spectre et la fréquence ω_p obtenue par recherche des pôles. Les fréquences obtenues sont-elles égales à ω_0 ? Ces 2 fréquences sont-elles égales? Dans quel cas peuvent-elles l'être? Pour $\omega_p = 1$, donner la valeur de ω_m lorsque le module du pôle est 0.9, 0.99.
- On suppose maintenant que le rapport signal sur bruit est fort, i.e. $\sigma^2 \ll 1$. En écrivant que $(1 + \sigma^2)^2 \approx 1 + 2\sigma^2$, $(1 + a\sigma^2)^{-1} \approx 1 - a\sigma^2$, montrer que :

$$b_1 \approx -2 \cos(\omega_0) [1 + \delta b_1]$$

$$b_2 \approx 1 - \delta b_2$$

et donner les expressions de $\delta b_1, \delta b_2$. En déduire, à l'aide d'un développement limité au 1er ordre, les valeurs de $\omega_m - \omega_0, \omega_p - \omega_0$. Conclusions?

On suppose maintenant **ne plus connaître la fonction de corrélation** mais n'avoir que N échantillons $y(0), y(1), \dots, y(N-1)$ du signal.

- Donner l'expression de paramètres $\{c_1, c_2\}$ en fonction des échantillons du signal (on utilisera la méthode des covariances).
- Quel est le nombre d'opérations (additions, multiplications) nécessaires pour calculer $\{c_1, c_2\}$?
- Quelle serait la méthode la plus rapide en temps de calcul pour estimer la fréquence à partir de $\{c_1, c_2\}$?

Problème 2 (Estimation de fréquence; amplitude variant dans le temps). On considère le signal suivant :

$$y(n) = x(n) \times e^{i(n\omega_0 + \varphi)} + e(n)$$

où :

- $x(n)$ est un processus **réel** Gaussien aléatoire, stationnaire au second ordre, de moyenne nulle et de fonction de corrélation $r_{xx}(m) = \mathbb{E}\{x(n)x(n+m)\}$. $x(n)$ désigne l'enveloppe du signal.
- ω_0 est la pulsation que l'on cherche à estimer.
- φ est une phase déterministe.
- $e(n)$ est un bruit blanc **complexe** Gaussien **circulaire** de moyenne nulle, de variance σ_e^2 , indépendant de $x(n)$. On a donc $\mathbb{E}\{e(n)e^*(n+m)\} = \sigma_e^2 \delta(m)$, $\mathbb{E}\{e(n)e(n+m)\} = 0$.

Propriétés du modèle

- Donner la fonction de corrélation $r_{yy}(m) = \mathbb{E}\{y^*(n)y(n+m)\}$ en fonction de $\omega_0, r_{xx}(m)$ et σ_e^2 .
- En déduire la forme de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) $S_y(\omega)$ de $y(n)$ en fonction de la DSP $S_x(\omega)$ de $x(n)$. Où se situe le max de $S_y(\omega)$ en fonction du max de $S_x(\omega)$?
- On considère maintenant le signal

$$z(n) = y^2(n)$$

Donner l'expression de sa fonction de corrélation et de sa DSP $S_z(\omega)$. On utilisera le fait que, si a, b, c et d sont des variables aléatoires Gaussiennes (réelles ou complexes),

de moyenne nulle

$$E\{abcd\} = E\{ab\}E\{cd\} + E\{ac\}E\{bd\} + E\{ad\}E\{bc\}$$

et que, pour un processus $s(n)$ complexe circulaire $E\{s^*(n_1)s^*(n_2)\} = E\{s(n_3)s(n_4)\} = 0$. A quelle fréquence la DSP de $z(n)$ atteint-elle son maximum ? Donner un tracé de $S_z(\omega)$.

Estimation de ω_0

Dans cette partie, on s'intéresse à l'estimation de ω_0 à partir de N échantillons $\{y(n)\}_{n=0,\dots,N-1}$. Pour cela, on propose d'estimer ω_0, φ et $\{x(n)\}_{n=0,\dots,N-1}$ en minimisant la fonctionnelle suivante

$$J(\varphi, \omega, \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} |y(n) - x(n)e^{i(n\omega+\varphi)}|^2$$

On note $\mathbf{x} = [x(0), \dots, x(N-1)]^T$, $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y(N-1)]^T$ et $\Phi = \text{diag}(1, e^{i\omega}, \dots, e^{i(N-1)\omega})$ de telle sorte que J se réécrit

$$J(\varphi, \omega, \mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - e^{i\varphi}\Phi\mathbf{x}\|^2$$

- Dans le cas où **l'enveloppe est constante**, donner l'expression de l'estimée $\hat{\omega}_0^{(0)}$ qui minimise le critère avec $x(n) = A \quad \forall n$.
- On considère maintenant le cas où $x(n)$ varie. En dérivant J par rapport à \mathbf{x} , montrer que, pour ω et φ fixés, le vecteur \mathbf{x} qui minimise J est donné par

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2} \{e^{-i\varphi}\Phi^H \mathbf{y} + e^{i\varphi}\Phi \mathbf{y}^*\}$$

- En reportant cette valeur dans J , montrer qu'on cherche alors à maximiser

$$\tilde{J}(\varphi, \omega) = e^{-i2\varphi} \mathbf{y}^T (\Phi^2)^H \mathbf{y} + e^{i2\varphi} \mathbf{y}^H (\Phi^2) \mathbf{y}^*$$

- Sachant que pour tout complexe a , la valeur maximum de $\text{Re}[ae^{-i2\varphi}]$ est $|a|$, en déduire que la fréquence estimée $\hat{\omega}_0^{(1)}$ est obtenue par recherche du maximum de la fonction suivante

$$J_1(\omega) = \left| \mathbf{y}^T (\Phi^2)^H \mathbf{y} \right| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} y^2(n) e^{-i2n\omega} \right|$$

- Que reconnaît-on dans l'équation précédente ? Cela vous semble-t-il logique ?
- Comment mettriez-vous en oeuvre la maximisation ?
- Si l'enveloppe était constante, quelle serait $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\omega}_0^{(1)}$?
- Quels sont les avantages et inconvénients de la méthode précédente ? Serait-il judicieux d'utiliser une modélisation de l'enveloppe $x(n)$?

Annexe B

Rappels sur les signaux et spectres

On rappelle ici quelques notions sur les spectres pour des signaux déterministes ou aléatoires.

B.1 Signaux déterministes

Considérons un signal discret $\{x(n)\}_{n=0,\pm 1,\dots}$ que l'on obtient en général par échantillonnage d'un signal continu. Si l'on suppose que ce signal est à *énergie finie*, c'est-à-dire

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x^2(n)| < \infty \quad (\text{B.1})$$

alors il possède une *Transformée de Fourier Discrète* (**TFD**) que l'on définit comme suit

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-in\omega} \quad (\text{B.2})$$

La Transformée de Fourier Discrète inverse s'écrit alors comme

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{in\omega} d\omega \quad (\text{B.3})$$

Définissons maintenant la quantité

$$S(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (\text{B.4})$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(m)e^{-i\omega(n-m)} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(m) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega(n-m)} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x^2(n)| \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

L'équation précédente est connue comme le *théorème de Parseval*. Elle indique que $S(\omega)$ représente la distribution de l'énergie du signal selon la fréquence. C'est pourquoi on l'appelle *Densité Spectrale d'Énergie (DSE)*. Notons que si l'on définit la fonction de "corrélation" de la séquence $x(n)$ comme

$$\rho(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n+m) \quad (\text{B.6})$$

alors on vérifie immédiatement que la DSE est la TFD de cette séquence, *i.e.*

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho(m)e^{-im\omega} \quad (\text{B.7})$$

B.2 Densité Spectrale de Puissance pour les signaux aléatoires

La plupart des signaux que l'on rencontre en pratique ne sont pas déterministes et l'on ne peut connaître exactement leur évolution au cours du temps. On ne peut que faire des conjectures sur cette évolution. On les décrit alors comme une séquence aléatoire qui consiste en un ensemble de réalisations possibles et dont on a observé une réalisation. Théoriquement, ces processus sont caractérisés par une fonction de densité de probabilité. Nous les décrirons ici seulement au second ordre, c'est-à-dire par leurs fonctions de corrélation (voir ce qui suit). Notons que si le processus est Gaussien, il est entièrement déterminé par celle-ci. Contrairement aux signaux déterministes, une réalisation d'un signal aléatoire n'est pas d'énergie finie. On ne peut donc pas transposer les définitions du paragraphe précédent. Par contre, il possède en moyenne une puissance finie, ce qui fait qu'on définit la *Densité Spectrale de Puissance (DSP)*. On rappelle maintenant les définitions des termes mentionnés ci-avant. Supposons que $\{x(n)\}_{n=0,\pm 1,\dots}$ est une séquence de variables aléatoires, de moyenne nulle

$$\mathbb{E} \{x(n)\} = 0 \quad (\text{B.8})$$

où \mathbb{E} désigne l'opérateur espérance mathématique (moyenne sur l'ensemble des réalisations). On définit la *fonction de corrélation* (ou de covariance puisque le moyenne est nulle) comme

$$r_{xx}(m) = \mathbb{E} \{x^*(n)x(n+m)\} \quad (\text{B.9})$$

qui ne dépend que de m . On suppose donc que le processus est **stationnaire au second ordre**. La DSP se définit alors comme la TFD de la corrélation

$$S_x(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m)e^{-im\omega} \quad (\text{B.10})$$

On montre alors que

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(\omega)e^{im\omega} d\omega \quad (\text{B.11})$$

ce qui implique en particulier que $r_{xx}(0)$ est la **puissance moyenne** de $x(t)$. On montre de plus que la DSP peut se redéfinir de la façon suivante

$$S_x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^N x(n) e^{-jn\omega} \right|^2 \right\} \quad (\text{B.12})$$

à la condition que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=-N}^N |m| |r_{xx}(m)| = 0 \quad (\text{B.13})$$

B.3 Corrélation-Stationnarité-Ergodicité

On donne ici quelques rappels sur la notion d'ergodicité. Celle-ci est essentielle dans la mesure où l'opérateur ne dispose souvent que d'une seule réalisation du signal. La question est donc de savoir s'il va pouvoir accéder aux grandeurs corrélation ou DSP uniquement à partir d'une seule réalisation observée.

* Un processus est ergodique au 1^{er} ordre ssi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) = \mathbb{E} \{x(n)\} \quad (\text{B.14})$$

ce qui est vérifié ssi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|n|}{2N+1} \right) r_{xx}(n) = 0$$

* Un processus est ergodique au second ordre ssi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*(n) x(n+m) = r_{xx}(m) \quad (\text{B.15})$$

ce qui est vérifié ssi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|n|}{2N+1} \right) r_{zz}(n) = 0$$

où $z(n) = x^*(n)x(n+m)$.

On peut montrer les deux résultats suivants, qui prouvent que de nombreux processus sont ergodiques (dans le sens où les conditions ne sont pas difficiles à remplir) :

Lemme B.1. Soit $x(n)$ un processus stationnaire tel que $r_{xx}(m) \rightarrow 0$ quand $|m| \rightarrow \infty$. Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) = \mathbb{E} \{x(n)\}$$

Lemme B.2. Soient deux processus stationnaires linéaires $z_1(n)$ et $z_2(n)$:

$$z_1(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \times e_1(n-k)$$

$$z_2(n) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \times e_2(n-k)$$

où e_1, e_2 sont des bruits blancs de moment d'ordre 4 fini. Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N z_1^*(n) z_2(n+m) = r_{z_1 z_2}(m)$$

Intéressons nous maintenant aux estimées des fonctions de corrélation à partir d'un nombre fini N d'échantillons du signal $\{x(n)\}_{n=0, \dots, N-1}$. Il existe deux méthodes principales :

1. Estimateur **non biaisé**

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N-m} \times \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n) x(n+m) \quad (\text{B.16})$$

2. Estimateur **biaisé**

$$\tilde{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \times \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n) x(n+m) \quad (\text{B.17})$$

Quel est l'intérêt de l'ergodicité ?

Le premier intérêt est que les estimateurs précédents (B.16) et (B.17) convergent vers la véritable fonction de corrélation lorsque $N \rightarrow \infty$ si le processus est ergodique. Ainsi, à mesure que le nombre de points de signal augmente, les estimées seront de plus en plus proches (au sens de l'erreur quadratique moyenne) des vraies valeurs. En corollaire, si les vraies fonctions d'autocorrélation vérifient certaines propriétés et si l'on dispose de suffisamment de points, alors les estimées "vérifieront" (à leur variance près) ces propriétés.

Et alors ?

Si l'on ne prouve pas (par exemple) qu'à fonction de corrélation connue, une méthode d'estimation fournit la valeur exacte du paramètre cherché, il y a peu de chances qu'il en soit ainsi lorsqu'on utilisera des estimées. Pour être plus précis, supposons que le vecteur $\gamma = [r_{xx}(0), \dots, r_{xx}(m)]^T$ dépend d'un vecteur θ que l'on cherche à estimer à partir du signal. S'il existe une fonctionnelle \mathcal{F} telle que

$$\mathcal{F}(\gamma) = \theta \quad (\text{B.18})$$

alors on aura, sous certaines conditions de régularité pour \mathcal{F} :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\hat{\gamma}) = \theta \quad (\text{B.19})$$

où $\hat{\gamma}$ désigne une estimée de γ , utilisant par exemple (B.16) ou (B.17). Par contre, si $\mathcal{G}(\gamma) \neq \theta$, il y a peu de chances que l'on ait $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{G}(\hat{\gamma}) = \theta$. Il est donc important, avant même d'estimer θ de trouver \mathcal{F} qui vérifie la condition (B.18). Alors, avec l'hypothèse d'ergodicité, on est fondé à utiliser \mathcal{F} avec des estimées.

Enfin, notons qu'à partir des estimées de la fonction de corrélation, on peut estimer la DSP simplement :

– à partir de la corrélation

$$\hat{S}_x(\omega) = \sum_{m=-M}^M \hat{r}_{xx}(m) \times w(m) \times e^{-jm\omega} \quad (\text{B.20})$$

– à partir des données

$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \times e^{-jn\omega} \right|^2 \quad (\text{B.21})$$

$$= \sum_{m=-N-1}^{N-1} \tilde{r}_{xx}(m) \times e^{-jm\omega} \quad (\text{B.22})$$

Annexe C

Estimation de paramètres

C.1 Généralités

Soit θ un paramètre à estimer à partir des données $\{x(n)\}_{n=0..N-1}$. On considère un estimateur $\hat{\theta}$ de θ . On définit :

Biais : $B(\hat{\theta}) = E\{\hat{\theta}\} - \theta$

Variance : $\text{var}(\hat{\theta}) = E\left\{\left[\hat{\theta} - E\{\theta\}\right]^2\right\}$

Erreur Quadratique Moyenne : $\text{eqm}(\hat{\theta}) = E\left\{\left[\hat{\theta} - \theta\right]^2\right\}$

Un estimateur est dit consistant si $\lim_{N \rightarrow \infty} P\left[\left|\hat{\theta} - \theta\right| > \epsilon\right] = 0$. Notons que l'on s'intéresse en majorité à la convergence en moyenne quadratique, c'est-à-dire à des estimateurs pour lesquels

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\left[\hat{\theta} - \theta\right]^2\right\} = 0 \quad (\text{C.1})$$

Quel que soit l'estimateur non biaisé choisi, sa variance sera toujours supérieure à la borne de Cramér-Rao :

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq BCR(\theta) = \frac{-1}{E\left\{\frac{\partial^2 \log(p(\mathbf{x}; \theta))}{\partial \theta^2}\right\}} = \frac{1}{E\left\{\left[\frac{\partial \log(p(\mathbf{x}; \theta))}{\partial \theta}\right]^2\right\}} \quad (\text{C.2})$$

Un estimateur est dit efficace si sa variance est égale à la borne de Cramér-Rao.

Si $\boldsymbol{\theta}$ est un vecteur de dimension p , la matrice de covariance vérifie :

$$E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\theta}}^T\right\} \geq \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} \quad (\text{C.3})$$

où $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}$ est la *matrice d'information de Fischer*, définie par :

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}} = E\left\{\left(\frac{\partial \log(p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)\left(\frac{\partial \log(p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^T\right\} \quad (\text{C.4})$$

En analyse spectrale paramétrique, on utilise deux grandes classes d'estimateur :

► utilisation de la corrélation ou des moments d'ordre supérieur

► **estimateur du maximum de vraisemblance**

Sous “certaines conditions généralement vérifiées”, l’estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement (*i.e.* $N \rightarrow \infty$) non biaisé, efficace et distribué selon une loi normale.

C.2 Estimation des fonctions de corrélation

La plupart des méthodes présentées dans ce cours utilise, implicitement ou explicitement, des estimées de la fonction de corrélation du processus étudié. C’est, bien sur, le cas du périodogramme qui correspond à une Transformée de Fourier de l’estimée de la séquence d’autocorrélation. C’est également le cas des méthodes utilisant les équations de Yule-Walker pour les processus AR, MA, ARMA. Enfin, les méthodes haute résolution d’estimation de fréquences (MUSIC, TK, ...) utilisent toutes des matrices de covariances estimées. On a décrit dans la section précédente les deux estimateurs communément utilisés de la fonction de corrélation. On s’intéresse ici à leurs statistiques, c’est-à-dire leurs biais et leurs variances. En effet, les statistiques des estimées du spectre, des paramètres AR ou des fréquences vont dépendre des statistiques des estimées de la fonction d’autocorrélation (cf Problème n°3).

Considérons tout d’abord le cas d’un processus stationnaire régulier $x(n)$, dont on observe N échantillons $\{x(i)\}_{i=1..N}$. Les estimées de la moyenne et de la fonction de corrélation sont données par

$$\begin{aligned}\hat{m} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n) \\ \hat{r}_{xx}(k) &= \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} x(n)x(n+k)\end{aligned}\tag{C.5}$$

Il est aisé de vérifier que les moyennes de ces estimateurs sont respectivement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\hat{m}\} &= m \\ \mathbb{E}\{\hat{r}_{xx}(k)\} &= r_{xx}(k)\end{aligned}\tag{C.6}$$

Intéressons nous maintenant aux covariances de ces estimées. On fait pour cela les hypothèses suivantes :

H0 : Les covariances sont absolument sommables, *i.e.*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |r_{xx}(n)| \leq R_0 < \infty$$

H1 : Les cumulants d’ordre 4 vérifient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\kappa_x(n+k, n, l)| \leq K_0 < \infty$$

Alors, on peut montrer que :

Théorème C.1. Si $x(n)$ vérifie **H0**, la variance asymptotique de \hat{m} est donnée par

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \text{var}(\hat{m}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n) = S_x(0) \quad (\text{C.7})$$

Théorème C.2. Si $x(n)$ vérifie **H0** et **H1**, alors

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{cov} \{ \hat{r}_{xx}(k), \hat{r}_{xx}(m) \} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n) r_{xx}(n+k-m) + r_{xx}(n+k) r_{xx}(n-m) \\ &+ \kappa_{xx}(n+k, n, m) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Le théorème C.2 est connu sous le nom de formule de Bartlett. Il est à noter que si le processus $x(n)$ est Gaussien, alors le dernier terme de (C.8) est nul, c'est-à-dire que $\kappa_{xx}(n+k, n, m) = 0$. Ce théorème s'applique en particulier aux processus ARMA Gaussiens. Les formules précédentes permettent de calculer les moyennes et covariances de nombreux estimateurs (périodogramme, AR, ...).

Considérons maintenant le cas spécial de signaux sinusoïdaux.

LE CAS DE SIGNAUX SINUSOÏDAUX

On suppose que

$$x(n) = \sum_{k=1}^p A_k \cos(n\omega_k + \varphi_k) + b(n) = s(n) + b(n) \quad (\text{C.9})$$

où les $\{\varphi_k\}$ sont supposées uniformément distribuées sur $[0, 2\pi[$ et $b(n)$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La fonction de covariance est alors

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{2} A_k^2 \cos(m\omega_k) + \sigma^2 \delta(m) \quad (\text{C.10})$$

On peut alors montrer que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{cov} \{ \hat{r}_{xx}(k), \hat{r}_{xx}(m) \} \\ = 2\sigma^2 [r_{ss}(k+m) + r_{ss}(k-m)] + \sigma^4 \delta_{k,m} + (\mu - 2\sigma^4) \delta_{k,0} \delta_{m,0} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

où $\mu = E \{b^4(n)\}$ ($NB : \mu = 3\sigma^4$ si $b(n)$ est Gaussien).

C.3 Analyse statistique des estimateurs basés sur $\hat{r}_{xx}(m)$

Comme nous l'avons indiqué précédemment, en général on s'intéresse à d'autres paramètres que les échantillons de covariance. Dans le cas de processus AR ou ARMA, ce sont les paramètres du modèle et/ou les pôles du système qui présentent l'intérêt principal. Dans le cas d'exponentielles complexes, les fréquences sont les paramètres à estimer. On cherche donc à connaître les propriétés statistiques des ces estimées. De façon générale, on s'intéresse au biais et à la variance de celles-ci (parfois la loi est possible à calculer). De plus, on ne sait -le plus souvent- que calculer ces paramètres qu'asymptotiquement (c'est-à-dire pour $N \rightarrow \infty$). Une des questions importantes est de savoir à partir de quel nombre de points la théorie asymptotique s'applique : si celui-ci est "raisonnable", alors les formules théoriques permettent de qualifier l'estimateur.

En général, la démarche suivie peut être illustrée par le tableau ci-dessous :

$\hat{\gamma} = [\hat{r}_{xx}(0), \dots, \hat{r}_{xx}(M)]^T$	\longrightarrow	$P_{\gamma} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ (\hat{\gamma} - \gamma) (\hat{\gamma} - \gamma)^T \right\}$
\Downarrow		\Downarrow
$\hat{\mathbf{a}} = \mathcal{F}(\hat{\gamma})$ $\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\gamma}) + O(1/N)$	\rightarrow	$\begin{cases} P_a = \lim_{N \rightarrow \infty} NE \left\{ (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T \right\} = \mathbf{X}^T \mathbf{S} \mathbf{X} \\ \mathbf{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} NE \left\{ \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\gamma}) \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\gamma})^T \right\} \end{cases}$
\Downarrow		\Downarrow
$\hat{\omega} = \mathcal{G}(\hat{\mathbf{a}})$ $\hat{\omega} - \omega = \mathbf{Y}^T (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) + O(1/N)$	\rightarrow	$P_{\omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} NE \left\{ (\hat{\omega} - \omega) (\hat{\omega} - \omega)^T \right\} = \mathbf{Y}^T P_a \mathbf{Y}$

On a vu que les statistiques des estimées de la covariance sont connues pour une large classe de processus. Supposons qu'on ait alors à estimer un vecteur \mathbf{a} (par exemple paramètres AR) à partir des $\hat{r}_{xx}(k)$. En général, il s'agit d'une fonction complexe \mathcal{F} . Néanmoins, on peut souvent écrire

$$\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\gamma}) + O(1/N) \quad (\text{C.12})$$

où \mathbf{X} est une matrice constante, $\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\gamma})$ est une fonction simple de $\hat{\gamma}$ dont on peut calculer la matrice de covariance. Le terme $O(1/N)$ désigne un vecteur aléatoire dont l'écart type est de l'ordre de $1/N$, donc négligeable par rapport aux erreurs $\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$ qui sont $O(1/\sqrt{N})$.

Considérons par exemple le cas AR où le vecteur $\hat{\mathbf{a}}$ est donné par

$$\hat{\mathbf{a}} = -\hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{C.13})$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{N} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) &= -\sqrt{N} \hat{\mathbf{R}}^{-1} (\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}} \mathbf{a}) \\ &= -\sqrt{N} \hat{\mathbf{R}}^{-1} [(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}) + (\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}) \mathbf{a}] \\ &= -\mathbf{R}^{-1} \left\{ \sqrt{N} [(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}) + (\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}) \mathbf{a}] \right\} + O(1/\sqrt{N}) \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Soit \mathbf{S} la matrice de covariance asymptotique de $\left\{ \sqrt{N} [(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}) + (\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}) \mathbf{a}] \right\}$. Le (k, m) element de \mathbf{S} est donné par

$$S(k, m) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p a_i a_j \sigma_{k-i, m-j} \quad (\text{C.15})$$

où $\sigma_{k,m} = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{cov} \{ \hat{r}_{xx}(k), \hat{r}_{xx}(m) \}$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} P_a &= \lim_{N \rightarrow \infty} NE \left\{ (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T \right\} \\ &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Le même raisonnement s'applique lorsqu'on veut estimer les fréquences $\hat{\omega}_k$ à partir des coefficient \hat{a}_k par calcul des racines du polynome

$$\hat{A}(z) = \sum_{k=0}^p \hat{a}_k z^{-k} = \prod_{k=1}^{\ell} (1 - \hat{\rho}_k e^{j\hat{\omega}_k} z^{-1})(1 - \hat{\rho}_k e^{-j\hat{\omega}_k} z^{-1}) \quad (\text{C.17})$$

On a supposé ici que $p = 2\ell$ est pair et que les racines sont complexes et complexes conjugués. On peut alors montrer le résultat suivant

Théorème C.3. *Soit pour $k \in [1, \ell]$:*

$$\alpha_k = [\rho_k^{-2} \cos(\omega_k) \quad \cdots \quad p \rho_k^{-p-1} \cos(p\omega_k)]^T \mathbf{a} \quad (\text{C.18})$$

$$\beta_k = [\rho_k^{-2} \sin(\omega_k) \quad \cdots \quad p \rho_k^{-p-1} \sin(p\omega_k)]^T \mathbf{a} \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{g}_k = [\rho_k^{-2} \sin(\omega_k) \quad \cdots \quad \rho_k^{-p-1} \sin(p\omega_k)]^T \quad (\text{C.20})$$

$$\mathbf{h}_k = [\rho_k^{-2} \cos(\omega_k) \quad \cdots \quad \rho_k^{-p-1} \cos(p\omega_k)]^T \quad (\text{C.21})$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} & 0 & \frac{-\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & \frac{\beta_\ell}{\alpha_\ell^2 + \beta_\ell^2} & 0 & \frac{-\alpha_\ell}{\alpha_\ell^2 + \beta_\ell^2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_h \\ \mathbf{G}_g \end{pmatrix}, \mathbf{G}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{h}_\ell^T \end{pmatrix}, \mathbf{G}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{g}_\ell^T \end{pmatrix} \quad (\text{C.23})$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\omega &= \lim_{N \rightarrow \infty} \text{NE} \left\{ (\hat{\omega} - \omega) (\hat{\omega} - \omega)^T \right\} \\ &= \mathbf{F} \mathbf{G} \mathbf{P}_a \mathbf{G}^T \mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Ce résultat se base sur le fait que

$$\begin{pmatrix} \hat{\omega}_1 - \omega_1 \\ \vdots \\ \hat{\omega}_\ell - \omega_\ell \end{pmatrix} = \mathbf{F} \mathbf{G} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) + O(|\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}|^2) \quad (\text{C.25})$$

Nota : Dans le cas de méthodes utilisant des décompositions en valeurs propres ou singulières, il convient de relier les estimées $\hat{\mathbf{v}}_k$ des vecteurs propres (singuliers) à la matrice $\hat{\mathbf{R}}$ avant de calculer la statistique des estimées de fréquence. Ceci peut se faire par théorie de perturbation sur les matrices (voir [Golub96] par exemple).

C.4 Estimateur du Maximum de Vraisemblance pour une exponentielle bruitée

On s'intéresse à l'estimation du signal suivant :

$$y(n) = Ae^{j(n\omega_0 + \varphi)} + b(n) \quad (\text{C.26})$$

où $b(n)$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 , les variables A, φ, ω_0 étant supposées déterministes et à estimer à partir de N échantillons $y(0), \dots, y(N-1)$. On illustre maintenant comment construire l'estimateur du maximum de vraisemblance. Sous l'hypothèse gaussienne pour le bruit $b(n)$, la densité de probabilité du vecteur $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y(N-1)]^T$ s'écrit :

$$p(\mathbf{y}; A, \varphi, \omega_0) = \frac{1}{\pi^N \sigma^{2N}} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} [\mathbf{y} - \mathbf{e}(\omega_0)]^H [\mathbf{y} - \mathbf{e}(\omega_0)] \right\} \quad (\text{C.27})$$

où $\mathbf{e}(\omega_0) = [1, e^{j\omega_0}, \dots, e^{j(N-1)\omega_0}]$ désigne le vecteur signal. L'estimateur du maximum de vraisemblance de A, φ, ω_0 consiste donc à maximiser $p(\mathbf{y}; A, \varphi, \omega_0)$ par rapport à A, φ, ω_0 , soit à minimiser

$$J = [\mathbf{y} - \mathbf{e}(\omega_0)]^H [\mathbf{y} - \mathbf{e}(\omega_0)] \quad (\text{C.28})$$

Soit $A_c = Ae^{j\varphi}$ l'amplitude complexe du signal. Alors :

$$J(A_c, \omega_0) = [\mathbf{y} - A_c \mathbf{e}(\omega_0)]^H [\mathbf{y} - A_c \mathbf{e}(\omega_0)] \quad (\text{C.29})$$

A une fréquence donnée, l'amplitude qui minimise $J(A_c, \omega_0)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{A}_c &= \frac{\mathbf{e}(\omega_0)^H \mathbf{y}}{\mathbf{e}(\omega_0)^H \mathbf{e}(\omega_0)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-jn\omega_0} \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

\hat{A}_c sera l'estimateur du maximum de vraisemblance de A_c si ω_0 est remplacé par son estimateur du maximum de vraisemblance dans l'équation précédente. En substituant \hat{A}_c dans l'expression de $J(A_c, \omega_0)$, l'estimateur MLE de ω_0 est donné par la fréquence qui minimise :

$$\begin{aligned} J(\hat{A}_c, \omega_0) &= [\mathbf{y} - \hat{A}_c \mathbf{e}(\omega_0)]^H [\mathbf{y} - \hat{A}_c \mathbf{e}(\omega_0)] \\ &= \mathbf{y}^H [\mathbf{y} - \hat{A}_c \mathbf{e}(\omega_0)] - \hat{A}_c^* \mathbf{e}(\omega_0)^H [\mathbf{y} - \hat{A}_c \mathbf{e}(\omega_0)] \\ &= \mathbf{y}^H [\mathbf{y} - \hat{A}_c \mathbf{e}(\omega_0)] \\ &= \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \frac{1}{N} |\mathbf{e}(\omega_0)^H \mathbf{y}|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Finalement, pour minimiser $J(\hat{A}_c, \omega_0)$, on doit maximiser par rapport à ω_0

$$\frac{1}{N} |\mathbf{e}(\omega_0)^H \mathbf{y}|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-jn\omega_0} \right| \quad (\text{C.32})$$

On reconnaît en fait le périodogramme !

Pour le cas que nous venons de considérer (une seule exponentielle bruitée), les bornes de Cramér-Rao ont été calculées par Rife et Boorstyn et s'écrivent :

$$BCR(\omega_0) = \frac{6\sigma^2}{A^2 N(N^2 - 1)} \quad (\text{C.33})$$

Rappelons, à titre de comparaison, les variances obtenues dans ce cas par les méthodes HOYW, MUSIC et ESPRIT lorsque N est "grand" :

$$\begin{aligned} \text{var}_{HOYW}(\hat{\omega}_0) &= \frac{1}{N} \frac{\sigma^4}{A^4} \frac{2(2L+1)}{3L(L+1)M^2} \\ \text{var}_{MUSIC}(\hat{\omega}_0) &= \frac{1}{N-M+1} \frac{12\sigma^4}{5A^4} \frac{M^2+1}{M^3(M^2-1)} \\ \text{var}_{ESPRIT}(\hat{\omega}_0) &= \frac{1}{N-M+1} \frac{2\sigma^4}{A^4} \frac{1}{M^2(M-1)} \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

NB : Les calculs de bornes de Cramér-Rao et des estimateurs du maximum de vraisemblance pour des processus AR ou ARMA peuvent être trouvés dans les ouvrages cités en référence.

C.5 Maximum de Vraisemblance pour une somme d'exponentielles

On considère l'estimateur du maximum de Vraisemblance pour une somme d'exponentielles complexes dans un bruit blanc Gaussien. Le vecteur signal s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [\mathbf{e}(\omega_1) \quad \mathbf{e}(\omega_2) \quad \cdots \quad \mathbf{e}(\omega_p)] \begin{bmatrix} A_1 e^{j\varphi_1} \\ A_2 e^{j\varphi_2} \\ \vdots \\ A_p e^{j\varphi_p} \end{bmatrix} + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{H}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{a} + \mathbf{b} \end{aligned}$$

et $\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$. Le problème revient à minimiser la fonction log-vraisemblance soit

$$\min_{\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}} [\mathbf{y} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{a}]^H [\mathbf{y} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{a}] \quad (\text{C.35})$$

Au lieu de maximiser conjointement par rapport à $\boldsymbol{\omega}$ et \mathbf{a} , on constate que le problème est séparable. En effet, quel que soit $\boldsymbol{\omega}$, l'estimateur ML de \mathbf{a} s'écrit

$$\hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{H}^H(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{H}(\boldsymbol{\omega})]^{-1} \mathbf{H}^H(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{y} \quad (\text{C.36})$$

En reportant cette expression dans (C.35), l'estimateur ML de $\boldsymbol{\omega}$ s'obtient en résolvant :

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \arg \min_{\boldsymbol{\omega}} [\mathbf{y} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{y}]^H [\mathbf{y} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{y}] \quad (\text{C.37})$$

où $\mathbf{P}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\omega}) [\mathbf{H}^H(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{H}(\boldsymbol{\omega})]^{-1} \mathbf{H}^H(\boldsymbol{\omega})$. Ceci revient à résoudre

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \arg \min_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{y}^H [\mathbf{I} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega})]^H [\mathbf{I} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega})] \mathbf{y} \quad (\text{C.38})$$

$$= \arg \min_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{y}^H [\mathbf{I} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega})] \mathbf{y} \quad (\text{C.39})$$

$$= \arg \max_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{y}^H \mathbf{P}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{y} \quad (\text{C.40})$$

Ainsi, on estime $\boldsymbol{\omega}$ en maximisant la projection orthogonale sur l'espace auquel appartiennent les exponentielles. Le problème est que la fonctionnelle à minimiser est fonction de plusieurs paramètres et possède des maxima locaux, ce qui rend cette procédure délicate.

Annexe D

Rappels d'algèbre linéaire

Cette annexe regroupe un certain nombre de résultats sur les matrices utilisés dans les méthodes de localisation ou de formation de faisceaux.

Généralités

On considère une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ d'éléments $\mathbf{A}(k, \ell)$. On définit la transposée de \mathbf{A} comme $\mathbf{A}^T(k, \ell) = \mathbf{A}(\ell, k)$ et la transposée hermitienne $\mathbf{A}^H(k, \ell) = \mathbf{A}^*(\ell, k)$. \mathbf{A} est symétrique si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, hermitienne si $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$.

La norme d'une matrice peut se définir de plusieurs façons, la plus utilisée étant celle de Frobenius

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n |\mathbf{A}(k, \ell)|^2} = \sqrt{\text{Tr} \{ \mathbf{A}^H \mathbf{A} \}}$$

où $\text{Tr} \{(\mathbf{X})\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{X}(k, k)$ désigne la trace de la matrice considérée. On peut également définir la norme d'une matrice à partir des normes vectorielles correspondantes, i.e.

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$$

où la norme- p d'un vecteur se définit comme $\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$. Notons que la norme-2 (ou norme Euclidienne) est la plus usitée.

Si \mathbf{A} est une matrice carrée symétrique (resp. hermitienne) $n \times n$, on définit une forme quadratique (resp. hermitienne) comme $Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ (resp. $Q = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$). \mathbf{A} est dite semi-définie positive si \mathbf{A} hermitienne et $\forall \mathbf{x} \quad \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$. \mathbf{A} est dite définie positive si \mathbf{A} hermitienne et $\forall \mathbf{x} \quad \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$.

Une matrice carrée est inversible ssi $\exists \mathbf{A}^{-1}$ telle que $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$. \mathbf{A}^{-1} est l'inverse de \mathbf{A} . Une matrice unitaire est une matrice pour laquelle $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^H$.

On utilise souvent le lemme d'inversion matricielle (où les inverses sont censées exister) suivant :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1}$$

Dans le cas particulier où \mathbf{B} et \mathbf{D} se réduisent à des vecteurs, on obtient l'égalité suivante

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^H)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^H \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}}$$

Un autre lemme est également utile pour inverser des matrices partitionnées :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} [-\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1} \quad \mathbf{I}] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D})^{-1} [\mathbf{I} \quad -\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}] \end{aligned}$$

On définit le noyau de \mathbf{A} et l'image de \mathbf{A} par

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\mathbf{A}\} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n / \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \\ \mathcal{R}\{\mathbf{A}\} &= \{\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m / \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \end{aligned}$$

Le rang de \mathbf{A} qui est défini comme $\text{rang}(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{R}\{\mathbf{A}\})$ est égal au nombre de vecteurs colonnes (ou lignes) de \mathbf{A} linéairement indépendants. En particulier, on a donc $\text{rang}(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{R}\{\mathbf{A}^T\})$. Les quatre espaces principaux associés à \mathbf{A} vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\mathbf{A}\}^\perp &= \mathcal{R}\{\mathbf{A}^H\} \\ \mathcal{R}\{\mathbf{A}\}^\perp &= \mathcal{N}\{\mathbf{A}^H\} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &= \mathcal{N}\{\mathbf{A}\} \oplus \mathcal{R}\{\mathbf{A}^H\} \\ \mathbb{C}^m &= \mathcal{R}\{\mathbf{A}\} \oplus \mathcal{N}\{\mathbf{A}^H\} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Si \mathbf{A} est une matrice $m \times n$, on définit la *pseudo-inverse* de \mathbf{A} , $\mathbf{A}^\#$ (matrice $n \times m$) par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathcal{R}\{\mathbf{A}^H\} &\Rightarrow \mathbf{A}^\# \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \in \mathcal{N}\{\mathbf{A}^H\} &\Rightarrow \mathbf{A}^\# \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Les relations précédentes définissent complètement la pseudo-inverse. En effet, d'après (D.1),

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathbb{C}^m &\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2; \quad \mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}\{\mathbf{A}\}, \quad \mathbf{x}_2 \in \mathcal{N}\{\mathbf{A}^H\} \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{x}_2; \quad \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \\ &\Rightarrow \mathbf{A}^\# \mathbf{x} = \mathbf{A}^\# \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}^\# \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{y}_2 \end{aligned}$$

où $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ avec $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{N}\{\mathbf{A}\}$ et $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{R}\{\mathbf{A}^H\}$. La pseudo-inverse vérifie $\mathbf{A}\mathbf{A}^\# \mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^\# \mathbf{A}\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^\#$ et les matrices $\mathbf{A}\mathbf{A}^\#$ et $\mathbf{A}^\# \mathbf{A}$ sont hermitiennes. De plus, les relations précédentes impliquent que

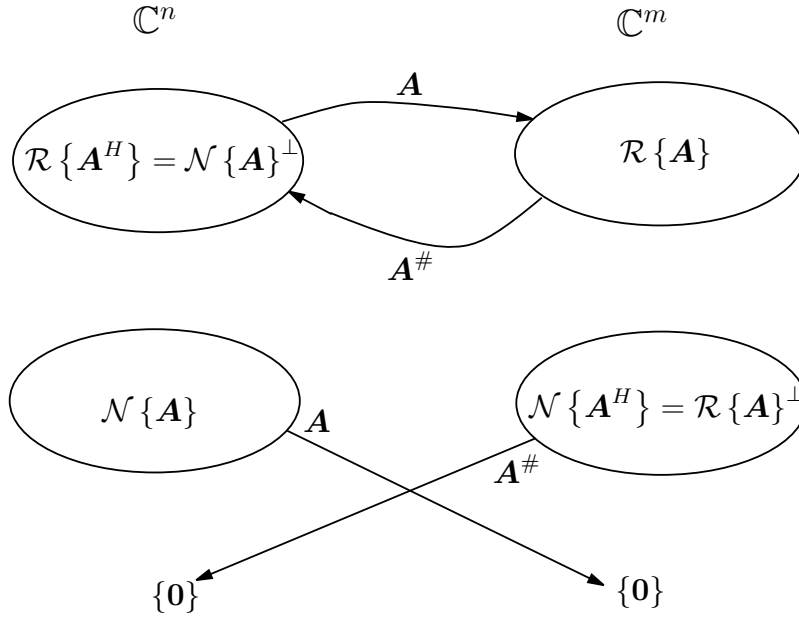
$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\mathbf{A}^\#\} &= \mathcal{N}\{\mathbf{A}^H\} \\ \mathcal{R}\{\mathbf{A}^\#\} &= \mathcal{R}\{\mathbf{A}^H\} \end{aligned}$$

La figure D illustre la séparation des deux espaces \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^m et comment ils se transforment via \mathbf{A} et $\mathbf{A}^\#$.

Dans les cas suivants, on obtient une expression directe :

$$\mathbf{A}^\# = \begin{cases} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H & \text{si } \text{rang}(\mathbf{A}) = n \\ \mathbf{A}^H (\mathbf{A} \mathbf{A}^H)^{-1} & \text{si } \text{rang}(\mathbf{A}) = m \end{cases}$$

La pseudo-inverse joue un rôle important dans la résolution de systèmes d'équations linéaires.

FIG. D.1 – Espaces engendrés par \mathbf{A} et $\mathbf{A}^\#$.

Quelques décompositions

Les décompositions qui suivent sont utilisées particulièrement dans les méthodes paramétriques de localisation de sources.

Décomposition en valeurs propres

Soit \mathbf{A} une matrice carrée $n \times n$. Le vecteur \mathbf{v} est dit vecteur propre de \mathbf{A} si : $\exists \lambda \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. λ est la valeur propre associée au vecteur propre \mathbf{v} (\mathbf{v} est supposé de norme 1). Si \mathbf{A} est hermitienne, on peut toujours trouver n vecteurs propres linéairement indépendants, même s'ils ne sont pas uniques. Les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Si de plus, \mathbf{A} est semi-définie positive (resp. définie positive), les valeurs propres sont non négatives (resp. strictement positives). Le rang d'une matrice définie positive est égal au nombre de valeurs propres non nulles. On a :

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H$$

\mathbf{A} hermitienne est inversible si toutes les valeurs propres sont non nulles. Dans ce cas, l'inverse s'écrit :

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H$$

Décomposition en valeurs singulières(SVD)

Soit \mathbf{A} une matrice *rectangulaire* $m \times n$. Alors, il existe deux matrices unitaires $\mathbf{U}(m \times m)$, $\mathbf{V}(n \times n)$ et une matrice $\mathbf{\Sigma}(m \times n)$ telles que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = \sum_{k=1}^r \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^H$$

avec :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ \hline & & & 0 \\ & & & 0 \end{array} \right)$$

Les σ_k sont les valeurs singulières, r correspondant au rang de \mathbf{A} . La décomposition en valeurs singulières de \mathbf{A} est étroitement liée à la décomposition en valeurs propres de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ ou $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$. En fait, il existe les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{v}_k &= \sigma_k^2 \mathbf{v}_k & k \in [1, r] \\ \mathbf{A} \mathbf{A}^H \mathbf{u}_k &= \sigma_k^2 \mathbf{u}_k & k \in [1, r] \end{aligned}$$

Les \mathbf{v}_k (resp. \mathbf{u}_k) sont donc les vecteurs propres de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$) associés aux valeurs propres σ_k . De même, on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{v}_k &= \sigma_k \mathbf{u}_k & k \in [1, r] \\ \mathbf{A}^H \mathbf{u}_k &= \sigma_k \mathbf{v}_k & k \in [1, r] \end{aligned}$$

La pseudo-inverse peut être définie à partir de la SVD de \mathbf{A} par :

$$\boxed{\mathbf{A}^\# = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^\# \mathbf{U}^H = \sum_{k=1}^r \frac{1}{\sigma_k} \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^H} \quad (\text{D.2})$$

avec :

$$\mathbf{\Sigma}^\# = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

La SVD permet d'avoir accès aux 4 sous-espaces associés à \mathbf{A} . En effet, supposons que \mathbf{A} soit de rang r , sa SVD s'écrivant :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^H \\ \mathbf{V}_2^H \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{U}_1 = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r]$, $\mathbf{U}_2 = [\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m]$, $\mathbf{V}_1 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r]$, $\mathbf{V}_2 = [\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n]$ et $\mathbf{\Sigma}_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. Alors, les 4 sous-espaces liés à \mathbf{A} sont engendrés par

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\mathbf{A}\} &= \text{span}\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} = \mathcal{R}\{\mathbf{V}_2\} \\ \mathcal{N}\{\mathbf{A}\}^\perp &= \mathcal{R}\{\mathbf{A}^H\} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} = \mathcal{R}\{\mathbf{V}_1\} \\ \mathcal{R}\{\mathbf{A}\} &= \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} = \mathcal{R}\{\mathbf{U}_1\} \\ \mathcal{R}\{\mathbf{A}\}^\perp &= \mathcal{N}\{\mathbf{A}^H\} = \text{span}\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m\} = \mathcal{R}\{\mathbf{U}_2\} \end{aligned}$$

Décomposition QR

Soit \mathbf{A} une matrice $m \times n$. Alors, il existe une matrice orthogonale $\mathbf{Q}(m \times m)$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbf{R}(m \times n)$ telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$$

Si, de plus, \mathbf{A} est de rang plein, les n premières colonnes de \mathbf{A} forment une base orthonormale de l'image de \mathbf{A} . De plus, si l'on note $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_m]$ et $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \cdots \ \mathbf{q}_m]$, on a

$$\mathcal{R}\{\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_k\} = \mathcal{R}\{\mathbf{q}_1 \ \cdots \ \mathbf{q}_k\}$$

$\forall k = 1 : n$. En particulier, si $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}(1 : m, 1 : n)$ et $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}(1 : m, n + 1 : m)$, ceci implique que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\{\mathbf{A}\} &= \mathcal{R}\{\mathbf{Q}_1\} \\ \mathcal{R}\{\mathbf{A}\}^\perp &= \mathcal{R}\{\mathbf{Q}_2\}\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$$

avec $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}(1 : n, 1 : n)$. La décomposition QR est souvent utilisée pour résoudre des systèmes $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, principalement lorsque \mathbf{A} est de rang plein.

En effet, lorsque \mathbf{A} n'est plus de rang plein, la décomposition QR ne fournit pas nécessairement une base orthonormale de l'image de \mathbf{A} . La décomposition QR doit alors être adaptée : on utilise une méthode de pivotement des colonnes qui permet de révéler le rang de \mathbf{A} . On calcule alors une factorisation du type

$$\mathbf{A}\mathbf{\Pi} = \mathbf{Q}\mathbf{R} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

où \mathbf{R}_{11} est $r \times r$, triangulaire supérieure et $\mathbf{\Pi}$ est une matrice de permutation. Si l'on a $\mathbf{A}\mathbf{\Pi} = [\mathbf{a}_{c1} \ \mathbf{a}_{c2} \ \cdots \ \mathbf{a}_{cm}]$ et $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \cdots \ \mathbf{q}_m]$ alors

$$\mathcal{R}\{\mathbf{A}\} = \mathcal{R}\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r\}$$

Notons que contrairement à la SVD, la décomposition QR ne fournit de bases orthogonales que pour 2 des sous-espaces définis dans (D.1).

Décomposition de Cholesky

Soit \mathbf{A} une matrice $n \times n$ hermitienne. Alors, il existe une matrice triangulaire inférieure \mathbf{G} telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^H$$

Notons que la décomposition de Cholesky de $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ est liée à la décomposition QR de \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{R}^H(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q})\mathbf{R} = \mathbf{R}^H\mathbf{R}$$

Matrices de projection

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. On définit le projecteur orthogonal sur $\mathcal{R}\{\mathbf{A}\}$ comme la matrice $\mathbf{P}_\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ telle que 1) $\mathcal{R}\{\mathbf{P}_\mathbf{A}\} = \mathcal{R}\{\mathbf{A}\}$ et 2) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{P}_\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ où $\mathbf{y} \in \mathcal{R}\{\mathbf{A}\}$. Si

$$\mathbf{A} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^H \\ \mathbf{V}_2^H \end{bmatrix}$$

désigne la SVD de \mathbf{A} , alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\mathbf{A} &= \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H \\ \mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp &= \mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{A} = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H \end{aligned}$$

Notons que si \mathbf{A} est de rang plein, on a

$$\mathbf{P}_\mathbf{A} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H = \mathbf{A} \mathbf{A}^\#$$

Enfin, une matrice de projection est idempotente $\mathbf{P}_\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}_\mathbf{A}$.

Systèmes d'équations linéaires

On considère le système d'équations linéaires

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \tag{D.3}$$

où $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times p}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m \times p}$. Le cas $p = 1$ correspond à la recherche d'un vecteur \mathbf{x} . Dans le cas où $m > p$ (resp. $m < p$) le système est dit surdéterminé (resp. sousdéterminé). Il est exactement déterminé lorsque $m = p$. On va considérer les deux cas :

1. le système (D.3) admet une solution exacte
2. le système (D.3) n'admet pas de solution exacte

Systèmes consistants

Le système (D.3) est dit consistant s'il admet une solution exacte. Ceci est vérifié si et seulement si

$$\mathcal{R}\{\mathbf{B}\} \subset \mathcal{R}\{\mathbf{A}\} \Leftrightarrow \text{rang}([\mathbf{A} \quad \mathbf{B}]) = \text{rang}(\mathbf{A})$$

En effet si l'on note $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p]$ et $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p]$, (D.3) est équivalent à $\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k \quad \forall k$. Or, $\mathbf{b}_k \in \mathcal{R}\{\mathbf{B}\} \Rightarrow \mathbf{b}_k \in \mathcal{R}\{\mathbf{A}\} \Rightarrow \exists \mathbf{x}_k \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$. Si l'on note \mathbf{X}_0 une solution particulière de (D.3), alors l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta \quad \Delta \in \mathcal{N}\{\mathbf{A}\}$$

Par conséquent, la **solution est unique si et seulement si \mathbf{A} est de rang plein**. Dans le cas où il existe plusieurs solutions la solution de norme minimum peut être obtenue par SVD. En effet, si

$$\mathbf{A} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^H \\ \mathbf{V}_2^H \end{bmatrix}$$

alors la solution de norme minimale est

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{V}_1 \Sigma_1^{-1} \mathbf{U}_1^H \mathbf{B} = \mathbf{A}^\# \mathbf{B}$$

Systèmes non consistants

Dans la plupart des cas les systèmes ne sont pas consistants, i.e. ils n'admettent pas de solution exacte. C'est par exemple le cas quand les matrices \mathbf{B} et \mathbf{A} correspondent à un système nominal entaché de bruit. Souvent ces systèmes sont surdéterminés et caractérisés par une matrice \mathbf{A} de rang plein, i.e. $\text{rang}(\mathbf{A}) = n < m$. Dans ce cas, on cherche à résoudre au sens des moindres carrés :

$$\widehat{\mathbf{X}}_{LS} = \arg \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\|^2$$

Cela revient à chercher la perturbation $\Delta\mathbf{B}$ de norme minimum qui rende le système $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ consistant :

$$\min \|\Delta\mathbf{B}\|^2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}$$

Il existe alors une solution unique à ce problème

$$\widehat{\mathbf{X}}_{LS} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{B} = \mathbf{A}^\# \mathbf{B}$$

A noter que la matrice $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}$ qui rend le système consistant et qui est la plus proche de \mathbf{B} est donnée par la projection orthogonale de \mathbf{B} sur $\mathcal{R}\{\mathbf{A}\}$ puisque

$$\widehat{\mathbf{A}\mathbf{X}}_{LS} = \mathbf{B}_0 = \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{B} = \mathbf{P}_\mathbf{A} \mathbf{B}$$

Remarque D.1. *Il convient de noter que la solution du système d'équations linéaires (D.3), que celui-ci soit consistant ou non, s'écrit toujours à partir de la pseudo-inverse*

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^\# \mathbf{B}$$

Un mot sur le cas rang déficient

Souvent la matrice \mathbf{A} est de rang plein parce qu'elle est entachée de bruit, e.g. elle s'écrit $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A}$ où $\Delta\mathbf{A}$ est du au bruit. Par contre, il est possible que \mathbf{A}_0 (qui correspondrait au signal utile sans bruit) soit de rang déficient. Dans ces conditions, il est plutôt souhaitable de résoudre $\mathbf{A}_0 \mathbf{X} \simeq \mathbf{B}$. Notons également qu'il est fort possible que \mathbf{A} soit directement de rang déficient. Afin de déterminer \mathbf{A}_0 à partir de \mathbf{A} , on peut utiliser la SVD. Si $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ désigne la SVD de \mathbf{A} , alors le **meilleur approximant de rang r de \mathbf{A}** est donné par

$$\mathbf{A}_r = \sum_{k=1}^r \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^H$$

dans le sens que

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_r\| \leq \|\mathbf{A} - \mathbf{A}'\| \quad \forall \mathbf{A}' \quad \text{rang}(\mathbf{A}') = r$$

On considère alors le problème général suivant

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{A}_r \mathbf{X} - \mathbf{B}\|^2$$

dont la solution est alors

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_r^\# \mathbf{B} = \sum_{k=1}^r \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^H \mathbf{B}}{\sigma_k}$$

Résolution avec Cholesky, QR ou SVD

On s'intéresse à la résolution, au sens des moindres carrés, du système surdéterminé inconsistant

$$\underset{m|nn|1}{\mathbf{A}} \underset{m|1}{\mathbf{x}} = \underset{m|1}{\mathbf{b}}; \quad m \geq n$$

à l'aide des décompositions de Cholesky, QR et SVD. On considère les cas où \mathbf{A} est de rang plein ou non.

- CAS $\text{RANG}(\mathbf{A})=N$

Dans le cas où \mathbf{A} est de rang plein on peut écrire simplement la solution à partir des décompositions de Cholesky, QR et SVD. On sait que la solution vérifie les équations normales $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^H \mathbf{b}$. En posant $\mathbf{R} = \mathbf{A}^H \mathbf{A}$ et $\mathbf{d} = \mathbf{A}^H \mathbf{b}$, on doit résoudre $\mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{d}$. Soit $\mathbf{R} = \mathbf{G} \mathbf{G}^H$ la décomposition de Cholesky de \mathbf{R} . Alors

$$\mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{x} = \mathbf{d}$$

On résout donc successivement et par substitution puisque les matrices sont triangulaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \mathbf{y} &= \mathbf{d} \\ \mathbf{G}^H \mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

De même, soit

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{R} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m-n \end{matrix}$$

Si $\mathbf{Q}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m-n \end{matrix}$, alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{Q}^T \mathbf{b}\|^2 \\ &= \|\mathbf{R}_1 \mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2 \end{aligned}$$

La solution des moindres carrés \mathbf{x}_{LS} est donc donnée par résolution du système $n \times n$

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{x}_{LS} = \mathbf{c}$$

\mathbf{R}_1 étant triangulaire supérieure, ce système peut être résolu de façon simple.

Lorsque une SVD de \mathbf{A} est calculée, la solution est alors simplement donnée par (cf (D.2))

$$\mathbf{x}_{LS} = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{u}_k^H \mathbf{b}}{\sigma_k} \mathbf{v}_k$$

- CAS $\text{RANG}(\mathbf{A})=R, R < N$

Dans ce cas, la SVD fournit toujours une solution élégante et simple

$$\mathbf{x}_{LS} = \sum_{k=1}^r \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{b}}{\sigma_k} \mathbf{v}_k$$

La décomposition QR doit elle être utilisée avec la méthode de pivotement pour obtenir une solution.

Moindres carrés totaux

Lorsqu'on résout $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ au sens des moindres carrés, on écrit de fait $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} + \mathbf{E}$ et on cherche à minimiser $\|\mathbf{E}\|^2$. Par conséquent, on suppose implicitement que l'erreur est confinée dans \mathbf{B} et que \mathbf{A} en est exempte. Or, en traitement du signal, et \mathbf{B} et \mathbf{A} contiennent le signal ; il n'y a donc pas de raison objective pour supposer que l'erreur est uniquement dans \mathbf{B} . L'approche des moindres carrés totaux (TLS) considère que l'on doit trouver les perturbations $\Delta\mathbf{A}$ et $\Delta\mathbf{B}$ qui rendent le système consistant :

$$\min \|\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{A} & \Delta\mathbf{B} \end{bmatrix}\|^2 \quad \text{avec} \quad (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}$$

La solution peut être obtenue par SVD. Si l'on note :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (\text{D.4})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}^H \quad (\text{D.5})$$

où $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{\Sigma}_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{\Sigma}_2 \in \mathbb{C}^{p \times p}$, $\mathbf{V}_{11} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $\mathbf{V}_{22} \in \mathbb{C}^{p \times p}$. Si $\sigma_n > \sigma_{n-1}$ alors la solution des moindres carrés totaux est unique :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{TLS} &= -\mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}^{-1} \\ &= \mathbf{V}_{11}^{-H}\mathbf{V}_{21}^H \end{aligned}$$

Notons que dans le cas où $p = 1$, c'est-à-dire $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ est un vecteur, \mathbf{V}_{22} est un scalaire et la solution est simple à calculer à partir du $(n+1)^{\text{ème}}$ vecteur singulier droit. Enfin, comme pour les moindres carrés, on peut être amené à résoudre au sens des moindres carrés totaux le système $\mathbf{A}_r\mathbf{X} = \mathbf{B}$ où \mathbf{A}_r est le meilleur approximant de rang r de \mathbf{A} . Comme la condition $\sigma_n > \sigma_{n-1}$ n'est plus vérifiée, il n'existe pas de solution unique. On recherche alors la solution de norme minimale. Pour cela, on partitionne \mathbf{V} comme

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}$$

avec cette fois $\mathbf{V}_{11} \in \mathbb{C}^{n \times r}$ et $\mathbf{V}_{22} \in \mathbb{C}^{p \times n-r+p}$. La solution devient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{TLS} &= -\mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}^H (\mathbf{V}_{22}\mathbf{V}_{22}^H)^{-1} \\ &= \mathbf{V}_{11}\mathbf{V}_{21}^H (\mathbf{I} - \mathbf{V}_{21}\mathbf{V}_{21}^H)^{-1} \end{aligned}$$

Minimisation de formes quadratiques

Minimisation sans contraintes

Supposons que $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ soit hermitienne définie positive et soient \mathbf{X} et \mathbf{B} des matrices $n \times m$ et \mathbf{C} une matrice hermitienne $m \times m$. Alors l'unique solution de

$$\min_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}), \quad F(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^H \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{X}^H \mathbf{B} + \mathbf{B}^H \mathbf{X} + \mathbf{C}$$

est donnée par

$$\mathbf{X}_0 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad F(\mathbf{X}_0) = \mathbf{C} - \mathbf{B}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

La minimisation signifie ici que $F(\mathbf{X}_0) \leq F(\mathbf{X})$, c'est-à-dire $F(\mathbf{X}) - F(\mathbf{X}_0)$ est semi-définie positive. Dans le cas où \mathbf{B} est un vecteur, la minimisation de

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^H \mathbf{b} + \mathbf{b}^H \mathbf{x} + c$$

conduit à

$$\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

Minimisation sous contraintes

Un cas spécial des moindres carrés est lorsqu'on veut résoudre

$$\min_{\mathbf{X}} \mathbf{X}^H \mathbf{A} \mathbf{X} \text{ sous contrainte que } \mathbf{X}^H \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Alors la solution s'écrit

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C}^H$$

Dans le cas où \mathbf{X} est un vecteur, le vecteur qui minimise $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$ sous contrainte que $\mathbf{x}^H \mathbf{b} = c$ est donné par

$$\mathbf{x}_0 = \frac{c^* \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}{\mathbf{b}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}$$