МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

по дисциплине
'ИНФОРМАТИКА'
Система верстки LaTeX

Вариант №89

Выполнил:
Студент группы P3118
Кравец Роман Денисович
Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург, 2021

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов применяется при обработке измерений для сглаживания «шума» эксперимента: этот метод позволяет исправлять случайные ошибки, неизбежно возникающие при изменениях, в том случае, когда характер зависимости измеряемой величины от независимой переменной задан.

Рассмотрим простейшую ситуацию, когда измеряемая величина у зависит линейно от одной переменной х. Пусть произведено n измерений и для значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ переменной х получены замеры $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Задача состоит в проведении прямой $y = ax + b$, наилучшим образом прилегающей к точкам $P(x_1; y_1), P(x_2; y_2), \ldots, P(x_n; y_n)$.

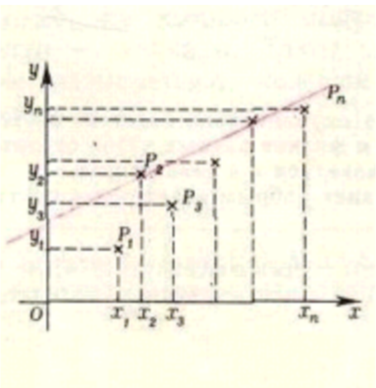
Решение задачи, разумеется, зависит от того, что понимается под словами «наилучшим образом прилегающей». Суть метода наименьших квадратов (его называют так же методом Гаусса) состоит в том, что «наилучшей» считается та прямая, для которой принимает наименьшее значение сумма квадратов отклонений, т. е. выражение

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i) + b))^2. \qquad (1)$$

На рисунке изображена искомая прямая $y = ax + b$ и точки $P_1, \ldots, P_n$. Разность $y_i - (ax_i + b)$ показывает отклонение (вдоль оси ординат) экспериментальной точки $P_i(x_i, y_i)$ от искомой прямой.

Как найти значение a и b, минимизирующие выражения (1)? Предположим, что такие значения существуют, и параметр a нами уже найден. Чтобы найти b, перепишем A_n в виде

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_y)^2 - \sum_{i=1}^{n} 2b(y_i - ax_i) + \\ + \sum_{i=1}^{n} b^2 = n * b^2 - 2b\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i) + \\ + \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2.$$



Рассмотрим A_n как (квадратичную) функцию от b. Она достигает минимума при

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i) = \\ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Положив

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} x_i;\ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

можно написать $b = \bar{y} - a\bar{x}$, откуда для A_n получим

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}((y_i - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x}))^2 = \\ = a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - \\ -2a\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2.$$

Рассмотрим теперь A_n как квадратичную функцию от a. Она очевидно достигает минимума при

$$a = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) \Big/ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Наилучшей оказалась прямая $y = ax + b$, где

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad b = \bar{y} - \frac{\bar{x}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Задачи

1. Решить задачу о сглаживании шума методом Гаусса для следующих не линейных функций от одной переменной
   (a) $y = ax^2 + bx + c$;
   (b) $y = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$.
2. Как «работает» метод Гаусса в пространстве (для двух независимых переменных)? Рассмотрите задачу для плоскости $z = ax + by + c$*)
3. Найти точку, для которой
   (a) сумма расстояний от трех заданных точек (не лежащих на одной прямой) минимальна;
   (b) задача 3a) - для n точек, не лежащих на одной прямой;
   (c) сумма расстояний от трех заданных окружностей минимальна.

А. Строгова

*) Геометрическая иллюстрация к этой задаче дана на первой полосе обложки «Кванта» № 8.

Таблица 1

$\lvert\Delta K\rvert$	$h_б$	h_M	$\lvert\Delta K\rvert$	$h_б$	h_M	$\lvert\Delta K\rvert$	$h_б$	h_M
0-3	**50**	**50**	**122-129**	**67**	**33**	**279-290**	**84**	**16**
4-10	**51**	**49**	**130-137**	**68**	**32**	**291-302**	**85**	**15**
11-17	**52**	**48**	**138-145**	**69**	**31**	**303-315**	**86**	**14**
18-25	**53**	**47**	**146-153**	**70**	**30**	**316-328**	**87**	**13**
26-32	**54**	**46**	**154-162**	**71**	**29**	**329-344**	**88**	**12**
33-39	**55**	**45**	**163-170**	**72**	**28**	**345-357**	**89**	**11**
40-46	**56**	**44**	**171-179**	**73**	**27**	**358-374**	**90**	**10**
47-53	**57**	**43**	**180-188**	**74**	**26**	**375-391**	**91**	**9**
54-61	**58**	**42**	**189-197**	**75**	**25**	**392-411**	**92**	**8**
62-68	**59**	**41**	**198-206**	**76**	**24**	**412-432**	**93**	**7**
69-76	**60**	**40**	**207-215**	**77**	**23**	**433-456**	**94**	**6**
77-83	**61**	**39**	**216-225**	**78**	**22**	**457-484**	**95**	**5**
84-91	**62**	**38**	**226-235**	**79**	**21**	**485-517**	**96**	**4**
92-98	**63**	**37**	**236-245**	**80**	**20**	**518-559**	**97**	**3**
99-106	**64**	**36**	**246-256**	**81**	**19**	**560-619**	**98**	**2**
107-113	**65**	**35**	**257-267**	**82**	**18**	**620-735**	**99**	**1**
114-121	**66**	**34**	**268-278**	**83**	**17**	**свыше 735**	**100**	**0**

Дополнительное задание № 2(Вариант 1)