TUGAS PEKAN 15-16 APLIKASI KOMPUTER

BAB LaTeX dan Markdown

Ardi Budi Setiawan
22305141017
Matematika B 2022

PRODI MATEMATIKA
DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2023

DAFTAR ISI

BAB 1

KB PEKAN 2 : BELAJAR MENGGUNAKAN SOFTWARE EMT

Pendahuluan dan Pengenalan Cara Kerja EMT

Selamat datang! Ini adalah pengantar pertama ke Euler Math Toolbox (disingkat EMT atau Euler). EMT adalah sistem terintegrasi yang merupakan perpaduan kernel numerik Euler dan program komputer aljabar Maxima.

- Bagian numerik, GUI, dan komunikasi dengan Maxima telah dikembangkan oleh R. Grothmann, seorang profesor matematika di Universitas Eichstätt, Jerman. Banyak algoritma numerik dan pustaka software open source yang digunakan di dalamnya.

- Maxima adalah program open source yang matang dan sangat kaya untuk perhitungan simbolik dan aritmatika tak terbatas. Software ini dikelola oleh sekelompok pengembang di internet.

- Beberapa program lain (LaTeX, Povray, Tiny C Compiler, Python) dapat digunakan di Euler untuk memungkinkan perhitungan yang lebih cepat maupun tampilan atau grafik yang lebih baik.

Yang sedang Anda baca (jika dibaca di EMT) ini adalah berkas notebook di EMT. Notebook aslinya bawaan EMT (dalam bahasa Inggris) dapat dibuka melalui menu File, kemudian pilih "Open Tutorias and Example", lalu pilih file "00 First Steps.en". Perhatikan, file notebook EMT memiliki ekstensi ".en". Melalui notebook ini Anda akan belajar menggunakan software Euler untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.

Panduan ini ditulis dengan Euler dalam bentuk notebook Euler, yang berisi teks (deskriptif), baris-baris perintah, tampilan hasil perintah (numerik, ekspresi matematika, atau gambar/plot), dan gambar yang disisipkan dari file gambar.

Untuk menambah jendela EMT, Anda dapat menekan [F11]. EMT akan menampilkan jendela grafik di layar desktop Anda. Tekan [F11] lagi untuk kembali ke tata letak favorit Anda. Tata letak disimpan untuk sesi berikutnya.

Anda juga dapat menggunakan [Ctrl]+[G] untuk menyembunyikan jendela grafik. Selanjutnya Anda dapat beralih antara grafik dan teks dengan tombol [TAB].

Seperti yang Anda baca, notebook ini berisi tulisan (teks) berwarna hijau, yang dapat Anda edit dengan mengklik kanan teks atau tekan menu Edit -> Edit Comment atau tekan [F5], dan juga baris perintah EMT yang ditandai dengan ">" dan berwarna merah. Anda dapat menyisipkan baris perintah baru dengan cara menekan tiga tombol bersamaan: [Shift]+[Ctrl]+[Enter].

Komentar (Teks Uraian)

Komentar atau teks penjelasan dapat berisi beberapa "markup" dengan sintaks sebagai berikut.

```
- * Judul
- ** Sub-Judul
- miktex: F (x) = \int_a^x f (t) \, dt
- mathjax: \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1
- maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
- http://www.euler-math-toolbox.de
- See: http://www.google.de | Google
- image: hati.png
- ---
```

Hasil sintaks-sintaks di atas (tanpa diawali tanda strip) adalah sebagai berikut.

Judul

Sub-Judul

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$$

$$\int x^3\, dx = C + \frac{x^4}{4}$$

http://www.euler-math-toolbox.de
See: http://www.google.de | Google
image: hati.png

Gambar diambil dari folder images di tempat file notebook berada dan tidak dapat dibaca dari Web. Untuk "See:", tautan (URL)web lokal dapat digunakan.

Paragraf terdiri atas satu baris panjang di editor. Pergantian baris akan memulai baris baru. Paragraf harus dipisahkan dengan baris kosong.

```
>// baris perintah diawali dengan >, komentar (keterangan) diawali dengan //
```

Baris Perintah

Mari kita tunjukkan cara menggunakan EMT sebagai kalkulator yang sangat canggih.

EMT berorientasi pada baris perintah. Anda dapat menuliskan satu atau lebih perintah dalam satu baris perintah. Setiap perintah harus diakhiri dengan koma atau titik koma.

- Titik koma menyembunyikan output (hasil) dari perintah.
- Sebuah koma mencetak hasilnya.
- Setelah perintah terakhir, koma diasumsikan secara otomatis (boleh tidak ditulis).

Dalam contoh berikut, kita mendefinisikan variabel r yang diberi nilai 1,25. Output dari definisi ini adalah nilai variabel. Tetapi karena tanda titik koma, nilai ini tidak ditampilkan. Pada kedua perintah di belakangnya, hasil kedua perhitungan tersebut ditampilkan.

```
>r=1.25; pi*r^2, 2*pi*r
```

```
4.90873852123
7.85398163397
```

Latihan untuk Anda

- Sisipkan beberapa baris perintah baru
- Tulis perintah-perintah baru untuk melakukan suatu perhitungan yang Anda inginkan, boleh menggunakan variabel, boleh tanpa variabel.

Jawaban Latihan diatas :

```
>a=2, b=4, c=7
```

```
2
4
7
```

```
>3*a + 2*b - 2*c
```

```
0
```

```
>cos(120°) * sin(45°)
```

```
-0.353553390593
```

CARA MENYISIPKAN BARIS PERINTAH BARU PADA TEKS KOMENTAR :

- Pilih baris komentar yang ingin disisipkan, lalu klik pada baris perintah yang ada dibawah baris komentar tersebut.
- Setelah itu, pilih 'Extras' lalu pilih 'Edit komentar' atau bisa langsung klik F5.
- Setelah itu, pilih bagian mana yang akan disisipkan baris komentar :
contoh :

Latihan anda....
(Bagian yang ingin anda sisipkan)
Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.

....

- Kemudian, blok kebawah pada baris 'Beberapa catatan yang harus Anda...' sampai kebawah. Lalu, klik CTRL+C untuk menyalin teks itu. Lalu hapus.
- Kemudian, keluar dari ekstras. Lalu, klik baris perintah tadi lakukan CTRL + SHIFT + ENTER pada depan kalimat perintah. (Otomatis akan membuat baris perintah baru.
- Setelah itu edit komentar lagi pada baris perintah yang lama. Paste kalimat yang tadi disalin. lalu OK, maka otomatis akan ada baris perintah yang tersisipkan antara paragraf tadi.

Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.

- Pastikan untuk menggunakan titik desimal, bukan koma desimal untuk bilangan!
- Gunakan * untuk perkalian dan ^ untuk eksponen (pangkat).
- Seperti biasa, * dan / bersifat lebih kuat daripada + atau -.
- ^ mengikat lebih kuat dari *, sehingga pi * r ^ 2 merupakan rumus luas lingkaran.
- Jika perlu, Anda harus menambahkan tanda kurung, seperti pada 2 ^ (2 ^ 3).

Perintah r = 1.25 adalah menyimpan nilai ke variabel di EMT. Anda juga dapat menulis r: = 1.25 jika mau. Anda dapat menggunakan spasi sesuka Anda.

Anda juga dapat mengakhiri baris perintah dengan komentar yang diawali dengan dua garis miring (//).

```
>r := 1.25 // Komentar: Menggunakan  := sebagai ganti =
```

```
1.25
```

Argumen atau input untuk fungsi ditulis di dalam tanda kurung.

```
>sin(45°), cos(pi), log(sqrt(E))
```

```
0.707106781187
-1
0.5
```

Seperti yang Anda lihat, fungsi trigonometri bekerja dengan radian, dan derajat dapat diubah dengan °. Jika keyboard Anda tidak memiliki karakter derajat tekan [F7], atau gunakan fungsi deg() untuk mengonversi.

EMT menyediakan banyak sekali fungsi dan operator matematika.Hampir semua fungsi matematika sudah tersedia di EMT. Anda dapat melihat daftar lengkap fungsi-fungsi matematika di EMT pada berkas Referensi (klik menu Help -> Reference)

Untuk membuat rangkaian komputasi lebih mudah, Anda dapat merujuk ke hasil sebelumnya dengan "%". Cara ini sebaiknya hanya digunakan untuk merujuk hasil perhitungan dalam baris perintah yang sama.

```
>(sqrt(5)+1)/2, %^2-%+1 // Memeriksa solusi x^2-x+1=0
```

```
1.61803398875
2
```

Latihan untuk Anda

- Buka berkas Reference dan baca fungsi-fungsi matematika yang tersedia di EMT.
- Sisipkan beberapa baris perintah baru.
- Lakukan contoh-contoh perhitungan menggunakan fungsi-fungsi matematika di EMT.

Jawaban Latihan diatas

```
>cot(90°)
```

```
0
```

```
>log10(10)
```

```
1
```

```
>5!
```

```
120
```

```
>15>5
```

```
1
```

```
>abs(7-10)
```

```
3
```

```
>log(E)
```

```
1
```

```
>logbase(3,9)
```

```
0.5
```

```
>random(10)
```

```
[0.655416,  0.200995,  0.893622,  0.281887,  0.525,  0.314127,
0.444616,  0.299474,  0.28269,  0.883227]
```

```
>A = [1,4,2; 4,3,7; 9,6,3] // penulisan matriks
```

```
            1             4             2
            4             3             7
            9             6             3
```

Satuan

EMT dapat mengubah unit satuan menjadi sistem standar internasional (SI). Tambahkan satuan di belakang angka untuk konversi sederhana.

```
>1miles  // 1 mil = 1609,344 m
```

```
1609.344
```

Beberapa satuan yang sudah dikenal di dalam EMT adalah sebagai berikut. Semua unit diakhiri dengan tanda dolar ($), namun boleh tidak perlu ditulis dengan mengaktifkan easyunits.

kilometer$:=1000;
km$:=kilometer$;
cm$:=0.01;
mm$:=0.001;
minute$:=60;
min$:=minute$;
minutes$:=minute$;
hour$:=60*minute$;
h$:=hour$;
hours$:=hour$;
day$:=24*hour$;
days$:=day$;
d$:=day$;
year$:=365.2425*day$;
years$:=year$;
y$:=year$;
inch$:=0.0254;
in$:=inch$;
feet$:=12*inch$;
foot$:=feet$;

ft$:=feet$;
yard$:=3*feet$;
yards$:=yard$;
yd$:=yard$;
mile$:=1760*yard$;
miles$:=mile$;
kg$:=1;
sec$:=1;
ha$:=10000;
Ar$:=100;
Tagwerk$:=3408;
Acre$:=4046.8564224;
pt$:=0.376mm;

Untuk konversi ke dan antar unit, EMT menggunakan operator khusus, yakni ->.

```
>4km -> miles, 4inch -> " mm"
```

```
2.48548476895
101.6 mm
```

Format Tampilan Nilai

Akurasi internal untuk nilai bilangan di EMT adalah standar IEEE, sekitar 16 digit desimal. Aslinya, EMT tidak mencetak semua digit suatu bilangan. Ini untuk menghemat tempat dan agar terlihat lebih baik. Untuk mengatrtamilan satu bilangan, operator berikut dapat digunakan.

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

```
>long pi
```

```
3.14159265359
```

```
>short pi
```

```
3.1416
```

```
>shortest pi
```

```
   3.1
```

```
>fraction pi
```

```
312689/99532
```

```
>short 1200*1.03^10, long E, longest pi
```

```
1612.7
2.71828182846
      3.141592653589793
```

Format aslinya untuk menampilkan nilai menggunakan sekitar 10 digit. Format tampilan nilai dapat diatur secara global atau hanya untuk satu nilai.

Anda dapat mengganti format tampilan bilangan untuk semua perintah selanjutnya. Untuk mengembalikan ke format aslinya dapat digunakan perintah "defformat" atau "reset".

```
>longestformat; pi, defformat; pi
```

```
3.141592653589793
3.14159265359
```

Kernel numerik EMT bekerja dengan bilangan titik mengambang (floating point) dalam presisi ganda IEEE (berbeda dengan bagian simbolik EMT). Hasil numerik dapat ditampilkan dalam bentuk pecahan.

```
>1/7+1/4, fraction %
```

```
0.392857142857
11/28
```

Perintah Multibaris

Perintah multi-baris membentang di beberapa baris yang terhubung dengan "..." di setiap akhir baris, kecuali baris terakhir. Untuk menghasilkan tanda pindah baris tersebut, gunakan tombol [Ctrl]+[Enter]. Ini akan menyambung perintah ke baris berikutnya dan menambahkan "..." di akhir baris sebelumnya. Untuk menggabungkan suatu baris ke baris sebelumnya, gunakan [Ctrl]+[Backspace].

Contoh perintah multi-baris berikut dapat dijalankan setiap kali kursor berada di salah satu barisnya. Ini juga menunjukkan bahwa ... harus berada di akhir suatu baris meskipun baris tersebut memuat komentar.

```
>a=4; b=15; c=2; // menyelesaikan a*x^2+b*x+c=0 secara manual ...
>D=sqrt(b^2/(a^2*4)-c/a); ...
>-b/(2*a) + D, ...
>-b/(2*a) - D
```

```
-0.138444501319
-3.61155549868
```

Menampilkan Daftar Variabe

Untuk menampilkan semua variabel yang sudah pernah Anda definisikan sebelumnya (dan dapat dilihat kembali nilainya), gunakan perintah "listvar".

```
>listvar
```

```
r                    1.25
a                    4
b                    15
c                    2
D                    1.73655549868123
```

Perintah listvar hanya menampilkan variabel buatan pengguna. Dimungkinkan untuk menampilkan variabel lain, dengan menambahkan string termuat di dalam nama variabel yang diinginkan.

Perlu Anda perhatikan, bahwa EMT membedakan huruf besar dan huruf kecil. Jadi variabel "d" berbeda dengan variabel "D".

Contoh berikut ini menampilkan semua unit yang diakhiri dengan "m" dengan mencari semua variabel yang berisi "m$".

```
>listvar m$
```

```
km$                  1000
cm$                  0.01
mm$                  0.001
nm$                  1853.24496
gram$                0.001
m$                   1
hquantum$            6.62606957e-34
atm$                 101325
```

Untuk menghapus variabel tanpa harus memulai ulang EMT gunakan perintah "remvalue".

```
>remvalue a,b,c,D
>D
```

```
Variable D not found!
Error in:
D ...
 ^
```

Menampilkan Panduan

Untuk mendapatkan panduan tentang penggunaan perintah atau fungsi di EMT, buka jendela panduan dengan menekan [F1] dan cari fungsinya. Anda juga dapat mengklik dua kali pada fungsi yang tertulis di baris perintah atau di teks untuk membuka jendela panduan.

Coba klik dua kali pada perintah "intrandom" berikut ini!

```
>intrandom(10,6)
```

```
[4,  2,  6,  2,  4,  2,  3,  2,  2,  6]
```

Di jendela panduan, Anda dapat mengklik kata apa saja untuk menemukan referensi atau fungsi.

Misalnya, coba klik kata "random" di jendela panduan. Kata tersebut boleh ada dalam teks atau di bagian "See:" pada panduan. Anda akan menemukan penjelasan fungsi "random", untuk menghasilkan bilangan acak berdistribusi uniform antara 0,0 dan 1,0. Dari panduan untuk "random" Anda dapat menampilkan panduan untuk fungsi "normal", dll.

```
>random(10)
```

```
[0.270906,  0.704419,  0.217693,  0.445363,  0.308411,  0.914541,  0.193585,
0.463387,  0.095153,  0.595017]
```

```
>normal(10)
```

```
[-0.495418,  1.6463,  -0.390056,  -1.98151,  3.44132,  0.308178,  -0.733427,
-0.526167,  1.10018,  0.108453]
```

Matriks dan Vektor

EMT merupakan suatu aplikasi matematika yang mengerti "bahasa matriks". Artinya, EMT menggunakan vektor dan matriks untuk perhitungan-perhitungan tingkat lanjut. Suatu vektor atau matriks dapat didefinisikan dengan tanda kurung siku. Elemen-elemennya dituliskan di dalam tanda kurung siku, antar elemen dalam satu baris dipisahkan oleh koma(,), antar baris dipisahkan oleh titik koma (;).

Vektor dan matriks dapat diberi nama seperti variabel biasa.

```
>v=[4,5,6,3,2,1]
```

```
[4,  5,  6,  3,  2,  1]
```

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
```

Karena EMT mengerti bahasa matriks, EMT memiliki kemampuan yang sangat canggih untuk melakukan perhitungan matematis untuk masalah-masalah aljabar linier, statistika, dan optimisasi.

Vektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan rentang nilai dengan interval tertentu menggunakan tanda titik dua (:),seperti contoh berikut ini.

```
>c=1:5
```

```
[1,  2,  3,  4,  5]
```

```
>w=0:0.1:1
```

```
[0,  0.1,  0.2,  0.3,  0.4,  0.5,  0.6,  0.7,  0.8,  0.9,  1]
```

```
>mean(w^2)
```

```
0.35
```

Bilangan Kompleks

EMT juga dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan imaginer

$$i = \sqrt{-1}$$

dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

```
re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.
im(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.
complex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.
conj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan komplkes x.
arg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.
real(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.
```

Apabila bagian imaginer x terlalu besar, hasilnya akan menampilkan pesan kesalahan.

```
>sqrt(-1) // Error!
>sqrt(complex(-1))
```

```
>z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arctan(3/2))
```

```
2+3i
2
3
2-3i
0.982793723247
56.309932474
56.309932474
```

```
>deg(arg(I)) // 90°
```

```
90
```

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Error in:
sqrt(-1) ...
        ^
```

```
>sqrt(complex(-1))
```

```
0+1i
```

EMT selalu menganggap semua hasil perhitungan berupa bilangan riil dan tidak akan secara otomatis mengubah ke bilangan kompleks.

Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan, tetapi akar kuadrat kompleks didefinisikan untuk bidang koordinat dengan cara seperti biasa. Untuk mengubah bilangan riil menjadi kompleks, Anda dapat menambahkan 0i atau menggunakan fungsi "complex".

```
>complex(-1), sqrt(%)
```

```
-1+0i
0+1i
```

Matematika Simbolik

EMT dapat melakukan perhitungan matematika simbolis (eksak) dengan bantuan software Maxima. Software Maxima otomatis sudah terpasang di komputer Anda ketika Anda memasang EMT. Meskipun demikian, Anda dapat juga memasang software Maxima tersendiri (yang terpisah dengan instalasi Maxima di EMT).

Pengguna Maxima yang sudah mahir harus memperhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks ekspresi simbolik di EMT.

Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah Maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>&(a+b)^2
```

```
                                    2
                             (b + a)
```

```
>$&expand((a+b)^2), &factor(x^2+5*x+6)
```

$$b^2+2\,a\,b+a^2$$

```
                          (x + 2) (x + 3)
```

```
>&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

```
                         2                            2
           (- sqrt(b  - 4 a c)) - b          sqrt(b  - 4 a c) - b
      [x = ------------------------, x = --------------------]
                     2 a                            2 a
```

```
>&(a^2-b^2)/(a+b), &ratsimp(%) // ratsimp menyederhanakan bentuk pecahan
```

```
 2    2
a  - b
-------
 b + a


 a - b
```

```
>10! // nilai faktorial (modus EMT)
```

```
3628800
```

```
>&10! //nilai faktorial (simbolik dengan Maxima)
```

```
3628800
```

Untuk menggunakan perintah Maxima secara langsung (seperti perintah pada layar Maxima) awali perintahnya dengan tanda "::" pada baris perintah EMT. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "modus kompatibilitas").

```
>factor(1000) // mencari semua faktor 1000 (EMT)
```

```
[2,  2,  2,  5,  5,  5]
```

```
>:: factor(1000) // faktorisasi prima 1000 (dengan Maxima)
```

```
 3  3
2  5
```

```
>:: factor(20!)
```

```
 18  8  4  2
2   3  5  7  11 13 17 19
```

Jika Anda sudah mahir menggunakan Maxima, Anda dapat menggunakan sintaks asli perintah Maxima dengan menggunakan tanda ":::" untuk mengawali setiap perintah Maxima di EMT. Perhatikan, harus ada spasi antara ":::" dan perintahnya.

```
>::: binomial(5,2); // nilai C(5,2)
```

```
10
```

```
>::: binomial(m,4); // C(m,4)=m!/(4!(m-4)!)
```

```
(m - 3) (m - 2) (m - 1) m
-------------------------
           24
```

```
>::: trigexpand(cos(x+y)); // rumus cos(x+y)=cos(x) cos(y)-sin(x)sin(y)
```

```
cos(x) cos(y) - sin(x) sin(y)
```

```
>::: trigexpand(sin(x+y));
```

```
cos(x) sin(y) + sin(x) cos(y)
```

```
>::: trigsimp(((1-sin(x)^2)*cos(x))/cos(x)^2+tan(x)*sec(x)^2) //menyederhanakan fungsi tri
```

```
               4
sin(x) + cos (x)
----------------
        3
     cos (x)
```

Untuk menyimpan ekspresi simbolik ke dalam suatu variabel digunakan tanda "&=".

```
>p1 &= (x^3+1)/(x+1)
```

```
 3
x  + 1
------
x + 1
```

```
>&ratsimp(p1)
```

```
                                   2
                                  x  - x + 1
```

Untuk mensubstitusikan suatu nilai ke dalam variabel dapat digunakan perintah "with".

```
>&p1 with x=3 // (3^3+1)/(3+1)
```

```
                                      7
```

```
>&p1 with x=a+b, &ratsimp(%) //substitusi dengan variabel baru
```

```
                                        3
                                 (b + a)  + 1
                                 ------------
                                  b + a + 1

                           2                    2
                          b  + (2 a - 1) b + a  - a + 1
```

```
>&diff(p1,x) //turunan p1 terhadap x
```

```
                                   2       3
                                3 x       x  + 1
                                ----- - --------
                                x + 1          2
                                        (x + 1)
```

```
>&integrate(p1,x) // integral p1 terhadap x
```

```
                                   3      2
                                2 x  - 3 x  + 6 x
                                -----------------
                                        6
```

Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX

Anda dapat menampilkan hasil perhitunagn simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Untuk melakukan hal ini, tambahkan tanda dolar ($) di depan tanda & pada setiap perintah Maxima.
Perhatikan, hal ini hanya dapat menghasilkan tampilan yang diinginkan apabila komputer Anda sudah terpasang software LaTeX.

```
>$&(a+b)^2
```

$$\left(b+a\right)^2$$

```
>$&expand((a+b)^2), $&factor(x^2+5*x+6)
```

$$b^2+2\,a\,b+a^2$$

$$\left(x+2\right)\,\left(x+3\right)$$

```
>$&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a} , x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a} \right]$$

```
>$&(a^2-b^2)/(a+b), $&ratsimp(%)
```

$$\frac{a^2-b^2}{b+a}$$

$$a-b$$

Selamat Belajar dan Berlatih!

Baik, itulah sekilas pengantar penggunaan software EMT. Masih banyak kemampuan EMT yang akan Anda pelajari dan praktikkan.

Sebagai latihan untuk memperlancar penggunaan perintah-perintah EMT yang sudah dijelaskan di atas, silakan Anda lakukan hal-hal sebagai berikut.

- Carilah soal-soal matematika dari buku-buku Matematika.
- Tambahkan beberapa baris perintah EMT pada notebook ini.
- Selesaikan soal-soal matematika tersebut dengan menggunakan EMT.

Pilih soal-soal yang sesuai dengan perintah-perintah yang sudah dijelaskan dan dicontohkan di atas.

Latihan dari soal-soal matematika

1. Carilah nilai x dari persamaan x^2 + 4*x + 6 = 0 !

```
>$&solve(1*x^2 + 3*x + 18 = 0,x) // rumus abc
```

$$\left[x=\frac{-3\,\sqrt{7}\,i-3}{2} , x=\frac{3\,\sqrt{7}\,i-3}{2}\right]$$

2. Tentukan turunan dari x^2*cos(y^3*x) !

```
>$&diff(x^2*cos(y^3*x),x)
```

$$2\,x\,\cos \left(x\,y^3\right)-x^2\,y^3\,\sin \left(x\,y^3\right)$$

```
>$&diff(x^2*cos(y^3*x),y)
```

$$-3\,x^3\,y^2\,\sin \left(x\,y^3\right)$$

3. Tentukan integral dari persamaan 1/(1-x^2) !

```
>$&integrate(1/(1-x^2),x)
```

$$\frac{\log \left(x+1\right)}{2}-\frac{\log \left(x-1\right)}{2}$$

4. Tentukan rata-rata dari himpunan H!

```
>h=254:328
```

```
[254,  255,  256,  257,  258,  259,  260,  261,  262,  263,  264,  265,
266,  267,  268,  269,  270,  271,  272,  273,  274,  275,  276,  277,
278,  279,  280,  281,  282,  283,  284,  285,  286,  287,  288,  289,
290,  291,  292,  293,  294,  295,  296,  297,  298,  299,  300,  301,
302,  303,  304,  305,  306,  307,  308,  309,  310,  311,  312,  313,
314,  315,  316,  317,  318,  319,  320,  321,  322,  323,  324,  325,
326,  327,  328]
```

```
>mean(h)
```

```
291
```

5. Tentukan faktor dari 10 faktorial !

```
>factor(10!)
```

```
[2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  2,  3,  3,  3,  3,  5,  5,  7]
```

BAB 2

KB PEKAN 3-4 : MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH-MASALAH ALJABAR

EMT untuk Perhitungan Aljabar

Pada notebook ini Anda belajar menggunakan EMT untuk melakukan berbagai perhitungan terkait dengan materi atau topik dalam Aljabar. Kegiatan yang harus Anda lakukan adalah sebagai berikut:

- Membaca secara cermat dan teliti notebook ini;
- Menerjemahkan teks bahasa Inggris ke bahasa Indonesia;
- Mencoba contoh-contoh perhitungan (perintah EMT) dengan cara meng-ENTER setiap perintah EMT yang ada (pindahkan kursor ke baris perintah)
- Jika perlu Anda dapat memodifikasi perintah yang ada dan memberikan keterangan/penjelasan tambahan terkait hasilnya.
- Menyisipkan baris-baris perintah baru untuk mengerjakan soal-soal Aljabar dari file PDF yang saya berikan;
- Memberi catatan hasilnya.
- Jika perlu tuliskan soalnya pada teks notebook (menggunakan format LaTeX).
- Gunakan tampilan hasil semua perhitungan yang eksak atau simbolik dengan format LaTeX. (Seperti contoh-contoh pada notebook ini.)

Contoh pertama

Menyederhanakan bentuk aljabar:

$$6x^{-3}y^5 \times -7x^2y^{-9}$$

```
>$&6*x^(-3)*y^5*-7*x^2*y^(-9)
```

Menjabarkan:

$$(6x^{-3}+y^5)(-7x^2-y^{-9})$$

```
>$&showev('expand((6*x^(-3)+y^5)*(-7*x^2-y^(-9))))
```

Baris Perintah

Sebuah baris perintah dari Euler terdiri atas satu atau beberapa perintah Euler diikuti dengan titik koma ";" atau koma ",". Titik koma mencegah pencetakan hasil. Koma setelah perintah terakhir dapat dihilangkan

Baris perintah berikut hanya akan mencetak hasil dari ekspresi, bukan tugas atau perintah format.

```
>r:=2; h:=4; pi*r^2*h/3
```

```
16.7551608191
```

Perintah harus dipisahkan dengan yang kosong. Baris perintah berikut mencetak dua hasilnya.

```
>pi*2*r*h, %+2*pi*r*h // Ingat tanda % menyatakan hasil perhitungan terakhir sebelumnya
```

```
50.2654824574
100.530964915
```

Baris perintah dieksekusi dalam urutan yang ditekan pengguna kembali. Jadi anda mendapatkan nilai baru setiap kali anda menjalankan baris kedua.

```
>x := 1;
>x := cos(x) // nilai cosinus (x dalam radian)
```

```
0.540302305868
```

```
>x := cos(x)
```

```
0.857553215846
```

Jika dua garis terhubung dengan "..." kedua garis akan selalu dieksekusi secara bersamaan.

```
>x := 1.5; ...
>x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2,
```

```
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
```

Ini juga merupakan cara yang baik untuk menyebarkan perintah panjang pada dua atau lebih baris. Kamu dapat menekan Ctrl+Return untuk membagi garis menjadi dua pada posisi kursor saat ini atau Ctrl+Back untuk menggabungkan baris.

Untuk melipat semua multi baris tekan Ctrl+L. Kemudian garis-garis berikutnya hanya akan terlihat, jika salah satunya memiliki fokus. Untuk melipat multi baris, mulailah baris pertama dengan "%+".

```
>%+ x=4+5; ...
```

Sebuah garis yang dimulai dengan %% tidak akan terlihat sama sekali.

```
81
```

Euler mendukung pengulangan pada baris perintah, selama mereka masuk ke dalam satu baris atau multi baris. Dalam program, pembatasan tentu saja tidak berlaku. Untuk informasi lebih lanjut, lihat pengantar berikut.

```
>x=1; for i=1 to 5; x := (x+2/x)/2, end; // menghitung akar 2
```

```
1.5
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
1.41421356237
```

Tidak apa-apa untuk menggunakan multi baris. Pastikan baris diakhiri dengan "...".

```
>x := 1.5; // Komentar ada di sini sebelum ...
>repeat xnew:=(x+2/x)/2; until xnew~=x; ...
>   x := xnew; ...
>end; ...
>x,
```

```
1.41421356237
```

Struktur bersyarat juga berfungsi.

```
>if E^pi>pi^E; then "Thought so!", endif;
```

```
Thought so!
```

Saat anda menjalankan sebuah perintah,kursor dapat berada di posisi manapun di baris perintah. Kamu bisa kembali ke perintah sebelumnya atau melompat ke perintah berikutnya dengan tombol panah. Atau anda bisa mengklik ke bagian komentar di atas perintah untuk menuju ke perintah.

Ketika kamu menggerakkan kursor di sepanjang garis, pasangan tanda kurung atau tanda kurung buka dan tutup akan disorot. Juga, perhatikan baris status. Setelah kurung buka fungsi sqrt(), baris status akan menampilkan teks bantuan untuk fungsi tersebut. Jalankan perintah dengan tombol kembali.

```
>sqrt(sin(10°)/cos(20°))
```

```
0.429875017772
```

Untuk melihat bantuan guna perintah baru, buka jendela help dengan F1. Di sana, anda dapat memasukkan teks untuk dicari. Pada baris kosong, bantuan untuk jendela help akan ditampilkan. Kamu bisa menekan escape untuk menghapus baris atau untuk menutup jendela help.

Anda dapat mengklik dua kali pada perintah apapun untuk membuka bantuan perintah ini. Coba klik dua kali pada perintah exp di bawah ini, di baris perintah.

```
>exp(log(2.5))
```

```
2.5
```

Anda dapat menyalin dan menempel di Euler juga. Gunakan Ctrl+C dan Ctrl+V untuk ini. Untuk menandai teks, seret mouse atau gunakan shift bersama dengan tombol kursor apapun. Selain itu, anda dapat menyalin tanda kurung yang disorot.

Dasar Sintaks

Euler mengetahui fungsi matematika biasa. Seperti yang telah anda lihat di atas, fungsi trigonometri bekerja dalam radian atau derajat. Untuk mengonversi ke derajat, tambahkan simbol derajat (dengan tombol F7) ke nilainya, atau menggunakan fungsi rad(x). Fungsi akar kuadrat disebut sqrt di Euler. Tentu saja, x^(1/2) juga dimungkinkan.

Untuk menyetel variabel, gunakan "=" atau ":=". Demi kejelasan, pengantar ini menggunakan bentuk yang terakhir. Spasi tidak masalah. Tapi diharapkan ada ruang di antara perintah.

Beberapa perintah dalam satu baris dipisahkan dengan "," atau ";". Titik koma menekan output dari perintah. Di akhir baris perintah sebuah "," diasumsikan, jika ";" hilang.

```
>g:=9.81; t:=2.5; 1/2*g*t^2
```

```
30.65625
```

EMT menggunakan sintaks pemrograman untuk ekspresi. Untuk memasukkan

$$e^2 \cdot \left(\frac{1}{3+4\log(0.6)} + \frac{1}{7}\right)$$

Anda harus mengatur tanda kurung yang benar dan menggunakan / untuk pecahan. Perhatikan tanda kurung yang disorot untuk bantuan. Perhatikan bahwa konstanta Euler e diberi nama E dalam EMT.

```
>E^2*(1/(3+4*log(0.6))+1/7)
```

```
8.77908249441
```

Untuk menghitung ekspresi rumit seperti

$$\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)^2 \pi$$

Anda harus memasukkannya dalam bentuk baris.

```
>((1/7 + 1/8 + 2) / (1/3 + 1/2))^2 * pi
```

```
23.2671801626
```

Letakkan tanda kurung dengan hati-hati di sekitar sub-ekspresi yang perlu dihitung terlebih dahulu. EMT membantu anda dengan menyorot ekspresi bahwa tanda kurung tutup selesai. Anda juga harus memasukkan nama "pi" untuk huruf Yunani pi

Hasil dari perhitungan ini adalah bilangan floating point. Secara default dicetak dengan akurasi sekitar 12 digit. Di baris perintah berikut, kita juga belajar bagaimana kita bisa merujuk ke hasil sebelumnya dalam baris yang sama.

```
>1/3+1/7, fraction %
```

```
0.47619047619
10/21
```

Sebuah perintah Euler dapat berupa ekspresi atau perintah primitif. Ekspresi dibuat dari operator dan fungsi. Jika perlu, fungsi harus mengandung tanda kurung untuk memaksa urutan eksekusi yang benar. Jika ragu, memasang tanda kurung adalah ide yang bagus. Perhatikan bahwa EMT menunjukkan tanda kurung buka dan kurung tutup saat mengedit baris perintah.

```
>(cos(pi/4)+1)^3*(sin(pi/4)+1)^2
```

```
14.4978445072
```

Operator numerik Euler termasuk

```
+ unary atau operator pertambahan
- unary atau operator pengurangan
* operator perkalian
/ operator pembagian
. produk matriks
a^b pangkat untuk a positif atau bilangan bulat b
(a**b juga berfungsi)
n! operator faktorial
dan banyak lagi
```

Berikut adalah beberapa fungsi yang mungkin anda butuhkan. Ada banyak lagi.

```
sin,cos,tan,atan,asin,acos,rad,deg
log,exp,log10,sqrt,logbase
bin,logbin,logfac,mod,floor,ceil,round,abs,sign
conj,re,im,arg,conj,real,complex
beta,betai,gamma,complexgamma,ellrf,ellf,ellrd,elle
bitand,bitor,bitxor,bitnot
```

Beberapa perintah memiliki alias, misalnya ln untuk log.

```
>ln(E^2), arctan(tan(0.5))
```

```
2
0.5
```

```
> log(E^2), arctan(tan(0.5))
```

```
2
0.5
```

```
>sin(30°)
```

```
0.5
```

Pastikan untuk menggunakan tanda kurung (kurung bulat), setuap kali ada keraguan tentang urutan eksekusi! Berikut ini tidak sama dengan (2^3)^4, yang merupakan default untuk 2^3^4 di EMT (beberapa sistem numerik melakukannya dengan cara lain).

```
>2^3^4, (2^3)^4, 2^(3^4)
```

```
2.41785163923e+24
4096
2.41785163923e+24
```

Bilangan Riil

Tipe data utama dalam Euler adalah bilangan riil. Riil direpresentasikan dalam format IEEE dengan akurasi sekitar 16 digit desimal.

```
>longest 1/3
```

```
     0.3333333333333333
```

Representasi ganda internal membutuhkan 8 byte.

```
>printdual(1/3)
```

```
1.0101010101010101010101010101010101010101010101010101*2^-2
```

```
>printdual(129/29)
```

```
1.0001110010110000100011010011110111001011000010001101*2^2
```

```
>printhex(99999/99)
```

```
3.F21745D1745D2*16^2
```

```
>printhex(1/3)
```

```
5.5555555555554*16^-1
```

String

Sebuah string dalam Euler didefinisikan dengan "..."

```
>"Sebuah string dapat berisi apa saja."
```

```
Sebuah string dapat berisi apa saja.
```

String dapat digabungkan dengan | atau dengan +. Ini juga berfungsi dengan angka yang dikonversi menjadi string dalam kasus itu.

```
>"Luas lingkaran dengan jari-jari "+ 2 + " cm adalah " + pi*4 +  " cm^2."
```

```
Luas lingkaran dengan jari-jari 2 cm adalah 12.5663706144 cm^2.
```

Fungsi print juga mengonversi angka menjadi string. Ini dapat mengambil sejumlah digit dan sejumlah tempat (0 untuk keluaran padat), dan secara optimal satu unit.

```
>"Golden Ratio : " + print((1+sqrt(5))/2,5,0)
```

```
Golden Ratio : 1.61803
```

Ada string khusus tidak ada yang tidak dicetak. Itu dikembalikan oleh beberapa fungsi, ketika hasilnya tidak masalah. (Ini dikembalikan secara otomatis, jika fungsi tidak memiliki beberapa pernyataan kembali).

```
>none
```

Untuk mengonversi string menjadi angka, cukup evaluasi saja. Ini juga berfungsi untuk ekspresi (lihat di bawah).

```
>"1234.5"()
```

```
1234.5
```

```
>p = "1234.5"()
```

```
1234.5
```

```
>p*2 /Terbukti bahwa evaluasi di atas dapat merubah string menjadi angka
```

```
Variable Terbukti not found!
Error in:
p*2 /Terbukti bahwa evaluasi di atas dapat merubah string menj ...
              ^
```

Untuk mendefinisikan vektor string, gunakan notasi vektor [...].

```
>v:=["affe","charlie","bravo"]
```

```
affe
charlie
bravo
```

Vektor string kosong dilambangkan dengan [none]. Vektor string dapat digabungkan..

```
>w:=[none]; w|v|v
```

```
affe
charlie
bravo
affe
charlie
bravo
```

String dapat berisi karakter Unicode. Secara internal, string ini berisi kode UTF-8. Untuk menghasilkan string seperti itu, gunakan u"..." dan salah satu entitas HTML.

String Unicode dapat digabungkan seperti string lainnya.

```
>u"&alpha; = " + 45 + u"&deg;" // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
 = 45°
```

I

Dalam komentar, entitas sama seperti , , dll dapat digunakan. Ini mungkin alternatif cepat untuk Latex. (Lebih detail di komentar bawah).

Ada beberapa fungsi untuk membuat atau menganalisis string Unicode. Fungsi strtochar() akan mengenali string Unicode, dan menerjemahkannya dengan benar.

```
>v=strtochar(u"&Auml; is a German letter")
```

```
[196,  32,  105,  115,  32,  97,  32,  71,  101,  114,  109,  97,  110,
32,  108,  101,  116,  116,  101,  114]
```

Hasilnya adalah vektor angka Unicode. Fungsi kebalikannya adalah chartoutf().

```
>v[1]=strtochar(u"&Uuml;")[1]; chartoutf(v)
```

```
Ü is a German letter
```

Fungsi utf() dapat menerjemahkan string dengan entitas dalam variabel menjadi string Unicode.

```
>s="We have &alpha;=&beta;."; utf(s) // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
We have =.
```

Dimungkinkan juga untuk menggunakan entitas numerik.

```
>u"&#196;hnliches"
```

```
Ähnliches
```

Nilai Boolean

Nilai Boolean direpresentasikan dengan 1=true atau 0=false dalam Euler. String dapat dibandingkan, seperti halnya angka.

```
>2<1, "apel"<"banana"
```

```
0
1
```

"and" adalah operator "&&" dan "or" adalah operator "||", seperti dalam bahasa C. (Kata "and" dan "or" hanya dapat digunakan dalam kondisi "if".)

```
>2<E && E<3
```

```
1
```

Operator Boolean mematuhi aturan bahasa matriks.

```
>(1:10)>5, nonzeros(%)
```

```
[0,  0,  0,  0,  0,  1,  1,  1,  1,  1]
[6,  7,  8,  9,  10]
```

Anda dapat menggunakan fungsi nonzeros() untuk mengekstrak elemen tertentu dari vektor. Dalam contoh, kita menggunakan syarat isprime(n).

```
>N=2|3:2:99 // N berisi elemen 2 dan bilangan2 ganjil dari 3 s.d. 99
```

```
[2,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29,
31,  33,  35,  37,  39,  41,  43,  45,  47,  49,  51,  53,  55,  57,
59,  61,  63,  65,  67,  69,  71,  73,  75,  77,  79,  81,  83,  85,
87,  89,  91,  93,  95,  97,  99]
```

```
>N[nonzeros(isprime(N))] //pilih anggota2 N yang prima
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47,
53,  59,  61,  67,  71,  73,  79,  83,  89,  97]
```

Format Output

Format Output default EMT mencetak 12 digit. Untuk memastikan bahwa kita melihat default, kita atur ulang format.

```
>defformat; pi
```

```
3.14159265359
```

Secara mendalam, EMT menggunakan standar IEEE untuk bilangan ganda dengan sekitar 16 digit desimal. Untuk melihat jumlah digit penuh, gunakan perintah "longestformat", atau kita gunakan operator "longest" untuk menampilkan hasil dalam format terpanjang.

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

Berikut adalah representasi internal heksadesimal dari bilangan ganda.

```
>printhex(pi)
```

```
3.243F6A8885A30*16^0
```

Format output dapat diubah secara permanen dengan perintah format.

```
>format(12,5); 1/3, pi, sin(1)
```

```
    0.33333
    3.14159
    0.84147
```

Standarnya adalah format(12).

```
>format(12); 1/3
```

```
0.333333333333
```

Fungsi seperti "shortestformat", "shortformat", "longformat" bekerja untuk vektor dengan cara berikut.

```
>shortestformat; random(3,8)
```

```
  0.66    0.2   0.89   0.28   0.53   0.31   0.44    0.3
  0.28   0.88   0.27    0.7   0.22   0.45   0.31   0.91
  0.19   0.46  0.095    0.6   0.43   0.73   0.47   0.32
```

Format standar untuk skalar adalah format(12). Tapi ini bisa diubah.

```
>setscalarformat(5); pi
```

```
3.1416
```

Fungsi "longestformat" mengatur format skalar juga.

```
>longestformat; pi
```

```
  3.141592653589793
```

Untuk referensi, berikut adalah daftar format output yang paling penting

```
shortestformat shortformat longformat, longestformat
format(length,digits) goodformat(length)
fracformat(length)
defformat
```

Akurasi internal EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan standar IEEE. Angka disimpan dalam format internal ini.
Tetapi format output EMT dapat diatur dengan cara yang fleksibel.

```
>longestformat; pi,
```

```
  3.141592653589793
```

```
>format(10,5); pi
```

```
    3.14159
```

Standarnya adalah defformat().

```
>defformat; // default
```

Ada operator pendek yang hanya mencetak satu nilai. Operator "longest" akan mencetak semua digit angka yang valid.

```
>longest pi^2/2
```

```
          4.934802200544679
```

Ada juga operator pendek untuk mencetak hasil dalam format pecahan. Kita sudah menggunakannya di atas.

```
>fraction pi^2/2
```

```
  366868/74343
```

```
>fraction pi
```

```
  312689/99532
```

```
>fraction 1+1/2+1/3+1/4
```

```
25/12
```

Karena format internal menggunakan cara biner untuk menyimpan angka, nilai 0.1 tidak akan direpresentasikan dengan tepat. Kesalahan bertambah sedikit, seperti yang anda lihat dalam perhitungan berikut.

```
>longest 0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
 -1.110223024625157e-16
```

Tetapi dengan standar "longformat" anda tidak akan melihat ini. Untuk kemudahan, output dari bilangan yang sangat kecil adalah 0.

```
>0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
0
```

Ekspresi

String atau nama dapat digunakan untuk menyimpan ekspresi matematika, yang dapat dievaluasi oleh EMT. Untuk ini, gunakan tanda kurung setelah ekspresi. Jika anda bermaksud menggunakan string sebagai ekspresi, gunakan konvensi untuk menamainya "fx" atau "fxy" dll. Ekspresi lebih diutamakan daripada fungsi.

Variabel global dapat digunakan dalam evaluasi.

```
>r:=2; fx:="pi*r^2"; longest fx()
```

```
      12.56637061435917
```

Parameter ditetapkan ke x, y, dan z dalam urutan tersebut. Parameter tambahan dapat ditambahkan menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx:="a*sin(x)^2"; fx(5,a=-1)
```

```
-0.919535764538
```

Perhatikan bahwa ekspresi akan selalu menggunakan variabel global, bahkan jika ada variabel dalam fungsi dengan nama yang sama. (Jika tidak, evaluasi dalam fungsi dapat memberikan hasil yang sangat membingungkan bagi pengguna yang memanggil fungsi tersebut.)

```
>at:=4; function f(expr,x,at) := expr(x); ...
>f("at*x^2",3,5) // computes 4*3^2 not 5*3^2
```

```
36
```

Jika Anda ingin menggunakan nilai lain untuk "at" daripada nilai global, Anda perlu menambahkan "at=value".

```
>at:=4; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...
>f("at*x^2",3,5)
```

```
45
```

Untuk referensi, kita berkomentar bahwa kumpulan panggilan (dibahas di tempat lain) dapat berisi ekspresi. Jadi kita bisa membuat contoh di atas sebagai berikut.

```
>at:=4; function f(expr,x) := expr(x); ...
>f({{"at*x^2",at=5}},3)
```

```
45
```

Ekspresi dalam x sering digunakan seperti fungsi.
Perhatikan bahwa mendefinisikan fungsi dengan nama yang sama seperti ekspresi simbolik global menghapus variabel ini untuk menghindari kebingungan antara ekspresi simbolik dan fungsi.

```
>f &= 5*x;
>function f(x) := 6*x;
>f(2)
```

```
12
```

Dengan cara konvensi, ekspresi simbolik atau numerik harus diberi nama fx, fxy, dll. Skema penamaan ini tidak boleh digunakan untuk fungsi.

```
>fx &= diff(x^x,x); $&fx
```

$$x^x\,\left(\log x+1\right)$$

Bentuk khusus dari ekspresi memungkinkan variabel apapun sebagai parameter tanpa nama untuk mengevaluasi ekspresi, bukan hanya "x", "y", dll. Untuk ini, mulai ekspresi dengan "@(variables) ...".

```
>"@(a,b) a^2+b^2", %(4,5)
```

```
@(a,b) a^2+b^2
41
```

Ini memungkinkan untuk memanipulasi ekspresi dalam variabel lain untuk fungsi EMT yang membutuhkan ekspresi dalam "x".

Cara paling dasar untuk mendefinisikan fungsi sederhana adalah dengan menyimpan rumusnya dalam ekspresi simbolik atau numerik. Jika variabel utama adalah x, ekspresi dapat dievaluasi seperti fungsi.

Seperti yang Anda lihat dalam contoh berikut, variabel global terlihat selama evaluasi.

```
>fx &= x^3-a*x;  ...
>a=1.2; fx(0.5)
```

```
-0.475
```

Semua variabel lain dalam ekspresi dapat ditentukan dalam evaluasi menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx(0.5,a=1.1)
```

```
-0.425
```

Sebuah ekspresi tidak perlu menjadi simbolik. Ini diperlukan, jika ekspresi berisi fungsi yang hanya diketahui oleh kernel numerik, bukan di Maxima.

Matematika Simbolik

EMT melakukan matematika simbolik dengan bantuan Maxima. Untuk detailnya, mulailah dengan tutorial berikut, atau telusuri referensi untuk Maxima. Para ahli dalam Maxima harus mencatat bahwa ada perbedaan sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks default ekspresi simbolik di EMT.

Matematika simbolik terintegrasi dengan mulus ke dalam Euler dengan &. Ekspresi apapun yang dimulai dengan & adalah ekspresi simbolik. Itu dievaluasi dan dicetak oleh Maxima.

Pertama-tama, Maxima memiliki aritmetika "infinite" yang dapat menangani angka yang sangat besar.

```
>$&44!
```

$$2658271574788448768043625811014615890319638528000000000$$

Dengan cara ini, Anda dapat menghitung hasil yang besar dengan tepat. Mari kita hitung

$$C(44,10)=\frac{44!}{34!\cdot 10!}$$

```
>$& 44!/(34!*10!) // nilai C(44,10)
```

$$2481256778$$

Tentu saja, Maxima memiliki fungsi yang lebih efisien untuk ini (seperti halnya bagian numerik dari EMT).

```
>$binomial(44,10) //menghitung C(44,10) menggunakan fungsi binomial()
```

$$2481256778$$

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang fungsi tertentu, klik dua kali di atasnya. Misalnya, coba klik dua kali pada "&binomial" di baris perintah sebelumnya. Ini membuka dokumentasi Maxima seperti yang disediakan oleh program itu.

Anda akan belajar bahwa yang berikut ini juga berfungsi.

$$C(x,3) = \frac{x!}{(x-3)!3!} = \frac{(x-2)(x-1)x}{6}$$

```
>$binomial(x,3) // C(x,3)
```

$$\frac{(x-2)\,(x-1)\,x}{6}$$

Jika Anda ingin mengganti x dengan nilai tertentu gunakan "with".

```
>$&binomial(x,3) with x=10 // substitusi x=10 ke C(x,3)
```

$$120$$

Dengan begitu, Anda dapat menggunakan solusi persamaan dalam persamaan lain.

Ekspresi simbolik dicetak oleh Maxima dalam bentuk 2D. Alasan untuk ini adalah bendera simbolik khusus dalam string.

Seperti yang akan Anda lihat pada contoh sebelumnya dan berikut, jika Anda telah menginstal LaTeX, Anda dapat mencetak ekspresi simbolik dengan Latex. Jika tidak, perintah berikut akan mengeluarkan pesan kesalahan.

Untuk mencetak ekspresi simbolik dengan LaTeX, gunakan $ di depan & (atau Anda dapat menghilangkan &) sebelum perintah. Jangan menjalankan perintah Maxima dengan $, jika anda tidak menginstal LaTeX.

```
>$(3+x)/(x^2+1)
```

$$\frac{x+3}{x^2+1}$$

Ekspresi simbolik diuraikan oleh Euler. Jika anda membutuhkan sintaks yang kompleks dalam satu ekspresi, Anda dapat menyertakan ekspresi dalam "...". Untuk menggunakan lebih dari ekspresi sederhana adalah mungkin, tetapi sangat tidak disarankan.

```
>&"v := 5; v^2"
```

```
                                  25
```

Untuk kelengkapan, Kita menyatakan bahwa ekspresi simbolik dapat digunakan dalam program, tetapi perlu diapit dalam tanda kutip. Selain itu, jauh lebih efektif untuk memanggil Maxima pada waktu kompilasi jika memungkinkan.

```
>$&expand((1+x)^4), $&factor(diff(%,x)) // diff: turunan, factor: faktor
```

$$4\,(x+1)^3$$

Sekali lagi, % mengacu pada hasil sebelumnya.

Untuk mempermudah, Kita simpan solusi ke variabel simbolik. Variabel simbolik didefinisikan dengan "&=".

```
>fx &= (x+1)/(x^4+1); $&fx
```

$$\frac{x+1}{x^4+1}$$

Ekspresi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&factor(diff(fx,x))
```

$$\frac{-3\,x^4-4\,x^3+1}{\left(x^4+1\right)^2}$$

Masukan langsung dari perintah Maxima juga tersedia. Mulai baris perintah dengan "::". Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT(disebut "compatibility mode").

```
>&factor(20!)
```

```
2432902008176640000
```

```
>::: factor(10!)
```

```
 8  4  2
2  3  5  7
```

```
>:: factor(20!)
```

```
 18  8  4  2
2   3  5  7  11 13 17 19
```

Jika Anda ahli dalam Maxima, Anda mungkin ingin menggunakan sintaks asli Maxima. Anda dapat melakukannya dengan ":::".

```
>::: av:g$ av^2;
```

```
 2
g
```

```
>fx &= x^3*exp(x), $fx
```

```
 3  x
x  E
```

Variabel tersebut dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya. Perhatikan, bahwa dalam perintah berikut sisi kanan &= dievaluasi sebelum assignment ke Fx.

```
>&(fx with x=5), $%, &float(%)
```

```
      5
125 E
```

```
18551.64488782208
```

```
>fx(5)
```

```
18551.6448878
```

Untuk evaluasi ekspresi dengan nilai variabel tertentu, Anda dapat menggunakan operator "with".

Baris perintah berikut juga menunjukkan bahwa Maxima dapat mengevaluasi ekspresi secara numerik dengan float().

```
>&(fx with x=10)-(fx with x=5), &float(%)
```

```
       10         5
1000 E    - 125 E
```

```
2.20079141499189e+7
```

```
>$factor(diff(fx,x,2))
```

$$0$$

Untuk mendapatkan kode Latex untuk ekspresi, Anda dapat menggunakan perintah tex.

```
>tex(fx)
```

```
Variable or function fx not found.
Error in:
tex(fx) ...
      ^
```

Ekspresi simbolik dapat dievaluasi seperti ekspresi numerik.

```
>fx(0.5)
```

```
0.206090158838
```

Dalam ekspresi simbolik, ini tidak berfungsi, karena Maxima tidak mendukungnya. Sebagai gantinya, gunakan sintaks "with" (bentuk yang lebih bagus dari perintah at(...) dari Maxima).

```
>$&fx with x=1/2
```

$$fx$$

Assignment juga bisa bersifat simbolik.

```
>$&fx with x=1+t
```

$$fx$$

Perintah solve dapat memecahkan ekspresi simbolik untuk variabel di Maxima. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>$&solve(x^2+x=4,x)
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{17}-1}{2},x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$$

Bandingkan dengan perintah numerik "solve" di Euler, yang membutuhkan nilai awal, dan secara opsional nilai target.

```
>solve("x^2+x",1,y=4)
```

```
1.56155281281
```

Nilai numerik dari solusi simbolik dapat dihitung dengan evaluasi hasil simbolik. Euler akan membaca assignment x= dll. Jika anda tidak memerlukan hasil numerik untuk perhitungan lebih lanjut, Anda juga dapat membiarkan Maxima menemukan nilai numerik.

```
>sol &= solve(x^2+2*x=4,x); $&sol, sol(), $&float(sol)
```

$$\left[x=-\sqrt{5}-1 , x=\sqrt{5}-1\right]$$

```
[-3.23607,  1.23607]
```

$$[x=-3.23606797749979 , x=1.23606797749979]$$

Untuk mendapatkan solusi simbolik tertentu, seseorang dapat menggunakan "with" dan indeks.

```
>$&solve(x^2+x=1,x), x2 &= x with %[2]; $&x2
```

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan, gunakan vektor persamaan. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>sol &= solve([x+y=3,x^2+y^2=5],[x,y]); $&sol, $&x*y with sol[1]
```

$$2$$

Ekspresi simbolik dapat memiliki flag, yang menunjukkan perlakuan khusus di Maxima. Beberapa flag dapat digunakan sebagai perintah juga, yang lain tidak. Bendera ditambahkan dengan "|" (bentuk yang lebih bagus dari "ev(...,flags)")

```
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) //turunan bentuk pecahan
```

$$\frac{3\,x^2}{x+1}-\frac{x^3-1}{\left(x+1\right)^2}$$

```
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) | ratsimp //menyederhanakan pecahan
```

$$\frac{2\,x^3+3\,x^2+1}{x^2+2\,x+1}$$

```
>$&factor(%)
```

$$\frac{2\,x^3+3\,x^2+1}{\left(x+1\right)^2}$$

Fungsi

Dalam EMT, fungsi adalah program yang didefinisikan dengan perintah "function". Ini bisa berupa fungsi satu baris atau fungsi multibaris.
Fungsi satu baris dapat berupa numerik atau simbolik. Funggsi satu baris didefinisikan dengan ":=".

```
>function f(x) := x*sqrt(x^2+1)
```

Untuk gambaran umum, kita tunjukkan semua kemungkinan definisi untuk fungsi satu baris. Suatu fungsi dapat dievaluasi sama seperti fungsi Euler bawaan lainnya.

```
>f(2)
```

```
4.472135955
```

Fungsi ini akan bekerja untuk vektor juga, dengan mematuhi bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi divektorkan.

```
>f(0:0.1:1)
```

```
[0,  0.100499,  0.203961,  0.313209,  0.430813,  0.559017,  0.699714,
0.854459,  1.0245,  1.21083,  1.41421]
```

Fungsi dapat diplot. Alih-alih ekspresi, kita hanya perlu memberikan nama fungsi.

Berbeda dengan ekspresi simbolik atau numerik, nama fungsi harus diberikan dalam string.

```
>solve("f",1,y=1)
```

```
0.786151377757
```

Secara default, jika Anda perlu menimpa fungsi bawaan, Anda harus menambahkan kata kunci "overwrite". Menimpa fungsi bawaan berbahaya dan dapat menyebabkan masalah untuk fungsi lain tergantung pada fungsi tersebut.
Anda masih dapat memanggil fungsi bawaan sebagai "_...", jika itu adalah fungsi di inti Euler.

```
>function overwrite sin (x) := _sin(x°) // redine sine in degrees
>sin(45)
```

```
0.707106781187
```

Lebih baik kita menghapus redefinisi sin ini.

```
>forget sin; sin(pi/4)
```

```
0.707106781187
```

Parameter Default

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default.

```
>function f(x,a=1) := a*x^2
```

Menghilangkan parameter ini menggunakan nilai default.

```
>f(4)
```

```
16
```

Menyetelnya akan menimpa nilai default.

```
>f(4,5)
```

```
80
```

Parameter yang ditetapkan menimpanya juga. Ini digunakan oleh banyak fungsi Euler seperti plot2d, plot3d.

```
>f(4,a=1)
```

```
16
```

Jika suatu variabel bukan parameter, variabel harus global. Fungsi satu baris dapat mengetahui variabel global.

```
>function f(x) := a*x^2
>a=6; f(2)
```

```
24
```

Tetapi parameter yang ditetapkan menimpa nilai global.
Jika argumen tidak ada dalam daftar parameter yang telah ditentukan sebelumnya, argumen tersebut harus dideklarasikan dengan ":="!

```
>f(2,a:=5)
```

```
20
```

Fungsi simbolik didefinisikan dengan "&=". Mereka didefinisikan dalam Euler dan Maxima, dan bekerja di kedua dunia. Ekspresi yang mendefinisikan dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function g(x) &= x^3-x*exp(-x); $&g(x)
```

$$x^3-x\,e^{-x}$$

Fungsi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik.

```
>$&diff(g(x),x), $&% with x=4/3
```

$$\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3}+\frac{16}{3}$$

$$\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3}+\frac{16}{3}$$

Mereka juga dapat menggunakan ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menginterpretasikan semua yang ada dalam fungsi tersebut.

```
>g(5+g(1))
```

```
178.635099908
```

Mereka dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi atau ekspresi simbolik.

```
>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); $&G(c) // integrate: mengintegralkan
```

$$\frac{e^{-c}\,\left(c^4\,e^{c}+4\,c+4\right)}{4}$$

```
>solve(&g(x),0.5)
```

```
0.703467422498
```

Berikut ini juga berfungsi, karena Euler menggunakan ekspresi simbolik dalam fungsi g, jika tidak menemukan variabel simblok g, dan jika tidak ada fungsi simbolik g.

```
>solve(&g,0.5)
```

```
0.703467422498
```

```
>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)
```

$$(2\,x-1)^n$$

```
>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)
```

$$(x+2)^n$$

```
>$&P(x,4), $&expand(%)
```

$$16\,x^4-32\,x^3+24\,x^2-8\,x+1$$

```
>P(3,4)
```

```
625
```

```
>$&P(x,4)+ Q(x,3), $&expand(%)
```

$$16\,x^4-31\,x^3+30\,x^2+4\,x+9$$

```
>$&P(x,4)-Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$

```
>$&P(x,4)*Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(x+2)^3\,(2\,x-1)^4$$

```
>$&P(x,4)/Q(x,1), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$\frac{(2\,x-1)^4}{x+2}$$

$$\frac{16\,x^4}{x+2}-\frac{32\,x^3}{x+2}+\frac{24\,x^2}{x+2}-\frac{8\,x}{x+2}+\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{(2\,x-1)^4}{x+2}$$

```
>function f(x) &= x^3-x; $&f(x)
```

$$x^3-x$$

Dengan &= fungsinya simbolik, dan dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&integrate(f(x),x)
```

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$$

Dengan := fungsinya numerik. Contoh yang baik adalah integral tentu seperti

$$f(x)=\int_1^x t^t\,dt,$$

Yang tidak dapat dievaluasi secara simbolik.

Jika kita mendefinisikan kembali fungsi dengan kata kunci "map", fungsi dapat digunakan untuk vektor x. Secara internal, fungsi dipanggil untuk semua nilai x satu kali, dan hasilnya disimpan dalam sebuah vektor.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
>f(0:0.5:2)
```

```
[-0.783431,  -0.410816,  0,  0.676863,  2.05045]
```

Fungsi dapat memiliki nilai default untuk parameter.

```
>function mylog (x,base=10) := ln(x)/ln(base);
```

Sekarang fungsi dapat dipanggil dengan atau tanpa parameter "base".

```
>mylog(100), mylog(2^6.7,2)
```

```
2
6.7
```

Selain itu, dimungkinkan untuk menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>mylog(E^2,base=E)
```

```
2
```

Seringkali, kita ingin menggunakan fungsi untuk vektor di satu tempat, dan untuk elemen individual di tempat lain. Ini dimungkinkan dengan parameter vektor.

```
>function f([a,b]) &= a^2+b^2-a*b+b; $&f(a,b), $&f(x,y)
```

$$y^2 - x\,y + y + x^2$$

Fungsi simbolik seperti itu dapat digunakan untuk variabel simbolik.
Tetapi fungsi tersebut dapat juga digunakan untuk vektor numerik.

```
>v=[3,4]; f(v)
```

```
17
```

Ada juga fungsi simbolik murni, yang tidak dapat digunakan secara numerik.

```
>function lapl(expr,x,y) &&= diff(expr,x,2)+diff(expr,y,2)//turunan parsial kedua
```

```
diff(expr, y, 2) + diff(expr, x, 2)
```

```
>$&realpart((x+I*y)^4), $&lapl(%,x,y)
```

$$0$$

Tetapi tentu saja, mereka dapat digunakan dalam ekspresi simbolik atau dalam definisi fungsi simbolik.

```
>function f(x,y) &= factor(lapl((x+y^2)^5,x,y)); $&f(x,y)
```

$$10\,\left(y^2+x\right)^3\,\left(9\,y^2+x+2\right)$$

Ringkasan

- &= mendefinisikan fungsi simbolik,
- := mendefinisikan fungsi numerik,
- &&= mendefinisikan fungsi simbolik murni.

Menyelesaikan Ekspresi

Ekspresi dapat diselesaikan secara numerik dan simbolik.

Untuk menyelesaikan ekspresi sederhana dari satu variabel, kita dapat menggunakan fungsi solve(). Diperlukan nilai awal untuk memulai pencarian. Secara internal, solve() menggunakan metode secant.

```
>solve("x^2-2",1)
```

```
1.41421356237
```

Ini juga berfungsi untuk ekspresi simbolis. Ambil fungsi berikut.

```
>$&solve(x^2=2,x)
```

$$\left[x=-\sqrt{2} , x=\sqrt{2}\right]$$

```
>$&solve(x^2-2,x)
```

$$\left[x=-\sqrt{2} , x=\sqrt{2}\right]$$

```
>$&solve(a*x^2+b*x+c=0,x)
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a} , x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a} \right]$$

```
>$&solve([a*x+b*y=c,d*x+e*y=f],[x,y])
```

$$\left[\left[x=-\frac{c\,e}{b\,\left(d-5\right)-a\,e} , y=\frac{c\,\left(d-5\right)}{b\,\left(d-5\right)-a\,e} \right] \right]$$

```
>px &= 4*x^8+x^7-x^4-x; $&px
```

$$4\,x^8+x^7-x^4-x$$

Sekarang kita mencari titik, di mana polinomialnya adalah 2. Dalam solve(), nilai target default y=0 dapat diubah dengan variabel yang ditetapkan.
Kita gunakan y=2 dan memeriksa dengan mengevaluasi polinomial pada hasil sebelumnya.

```
>solve(px,1,y=2), px(%)
```

```
0.966715594851
2
```

Menyelesaikan sebuah ekspresi simbolik dalam bentuk simbolik mengembalikan daftar solusi. Kita menggunakan penyelesaian simbolik solve() yang disediakan oleh Maxima.

```
>sol &= solve(x^2-x-1,x); $&sol
```

$$\left[x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$$

Cara termudah untuk mendapatkan nilai numerik adalah dengan mengevaluasi solusi secara numerik seperti ekspresi.

```
>longest sol()
```

```
    -0.6180339887498949       1.618033988749895
```

Untuk menggunakan solusi secara simbolik dalam ekspresi lain, cara termudah adalah "with".

```
>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^2-x-1 with sol[2])
```

$$0$$

Menyelesaikan sistem persamaan secara simbolik dapat dilakukan dengan vektor persamaan dan penyelesaian simbolik solve(). Jawabannya adalah daftar-daftar persamaan.

```
>$&solve([x+y=2,x^3+2*y+x=4],[x,y])
```

$$\left[\left[x=-1,y=3\right],\left[x=1,y=1\right],\left[x=0,y=2\right]\right]$$

Fungsi f() dapat mengetahui variabel global. Namun seringkali kita ingin menggunakan parameter lokal.

$$a^x-x^a=0.1$$

dengan a=3.

```
>function f(x,a) := x^a-a^x;
```

Salah satu cara untuk meneruskan parameter tambahan ke f() adalah dengan menggunakan daftar dengan nama fungsi dan parameter (sebaliknya adalah parameter titik koma).

```
>solve({{"f",3}},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Ini juga bekerja dengan ekspresi. Tapi kemudian, elemen daftar bernama harus digunakan. (Lebih lanjut tentang daftar di tutorial tentang sintaks EMT).

```
>solve({{"x^a-a^x",a=3}},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Menyelesaikan Pertidaksamaan

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya, melainkan dengan bantuan Maxima, artinya secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah fourier_elim(), yang harus dipanggil dengan perintah "load(fourier_elim)" terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

```
        D:/Documents/TUGAS KULIAH/APLIKASI KOMPUTER/Euler x64/maxima/\
share/maxima/5.35.1/share/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1>0],[x]) // x^2-1 > 0
```

$$[1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1<0],[x]) // x^2-1 < 0
```

$$[-1 < x, x < 1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1 # 0],[x]) // x^-1 <> 0
```

$$[-1 < x, x < 1] \vee [1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x # 6],[x])
```

$$[x < 6] \vee [6 < x]$$

```
>$&fourier_elim([x < 1, x > 1],[x]) // tidak memiliki penyelesaian
```

$$emptyset$$

```
>$&fourier_elim([minf < x, x < inf],[x]) // solusinya R
```

$$universalset$$

```
>$&fourier_elim([x^3 - 1 > 0],[x])
```

$$\left[1 < x, x^2 + x + 1 > 0\right] \vee \left[x < 1, -x^2 - x - 1 > 0\right]$$

```
>$&fourier_elim([cos(x) < 1/2],[x]) // ??? gagal
```

$$[1 - 2\,\cos x > 0]$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[x,y]) // sistem pertidaksamaan
```

$$[y - 5 < x, x < y + 7, 10 < y]$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[y,x])
```

$$[max\,(10, x - 7) < y, y < x + 5, 5 < x]$$

```
>$&fourier_elim((x + y < 5) and (x - y >8),[x,y])
```

$$\left[y + 8 < x, x < 5 - y, y < -\frac{3}{2}\right]$$

```
>$&fourier_elim(((x + y < 5) and x < 1) or  (x - y >8),[x,y])
```

$$[y+8<x] \vee [x<min\,(1,5-y)]$$

```
>&fourier_elim([max(x,y) > 6, x # 8, abs(y-1) > 12],[x,y])
```

```
        [6 < x, x < 8, y < - 11] or [8 < x, y < - 11]
 or [x < 8, 13 < y] or [x = y, 13 < y] or [8 < x, x < y, 13 < y]
 or [y < x, 13 < y]
```

```
>$&fourier_elim([(x+6)/(x-9) <= 6],[x])
```

$$[x=12] \vee [12<x] \vee [x<9]$$

Bahasa Matriks

Dokumentasi inti EMT berisi diskusi terperinci tentang bahasa matriks Euler.

Vektor dan matriks dimasukkan dengan tanda kurung siku, elemen dipisahkan dengan koma, baris dipisahkan dengan titik koma.

```
>A=[1,2;3,4]
```

```
              1             2
              3             4
```

Produk matriks dilambangkan dengan titik.

```
>b=[3;4]
```

```
              3
              4
```

```
>b' // transpose b
```

```
 [3,  4]
```

```
>inv(A) //inverse A
```

```
             -2             1
            1.5          -0.5
```

```
>A.b //perkalian matriks
```

```
            11
            25
```

```
>A*b //perkalian skalar
```

```
             3             6
            12            16
```

```
>A.inv(A)
```

```
             1             0
             0             1
```

Poin utama dari bahasa matriks adalah bahwa semua fungsi dan operator bekerja elemen untuk elemen.

```
>A.A
```

```
             7            10
            15            22
```

```
>A^2 //perpangkatan elemen2 A
```

```
             1             4
             9            16
```

```
>A.A.A
```

```
            37            54
            81           118
```

```
>power(A,3) //perpangkatan matriks
```

```
            37            54
            81           118
```

```
>A/A //pembagian elemen-elemen matriks yang seletak
```

```
             1             1
             1             1
```

```
>A/b //pembagian elemen2 A oleh elemen2 b kolom demi kolom (karena b vektor kolom)
```

```
       0.333333      0.666667
           0.75             1
```

```
>A\b // hasilkali invers A dan b, A^(-1)b
```

```
             -2
            2.5
```

```
>inv(A).b
```

```
             -2
            2.5
```

```
>A\A   //A^(-1)A
```

```
              1             0
              0             1
```

```
>inv(A).A
```

```
              1             0
              0             1
```

```
>A*A //perkalin elemen-elemen matriks seletak
```

```
              1             4
              9            16
```

Ini bukan produk matriks, tetapi perkalian elemen demi elemen. Hal yang sama berlaku untuk vektor.

```
>b^2 // perpangkatan elemen-elemen matriks/vektor
```

```
              9
             16
```

Jika salah satu operan adalah vektor atau skalar, itu diperluas secara alami.

```
>2*A
```

```
              2             4
              6             8
```

Misalnya, jika operan adalah vektor kolom, elemen-elemennya diterapkan ke semua baris A.

```
>[1,2]*A
```

```
              1             4
              3             8
```

Jika itu adalah vektor baris, itu diterapkan ke semua kolom A.

```
>A*[2,3]
```

```
              2             6
              6            12
```

Seseorang dapat membayangkan perkalian ini seolah-olah vektor baris v telah digandakan untuk membentuk matriks dengan ukuran yang sama dengan A.

```
>dup([1,2],2) // dup: menduplikasi/menggandakan vektor [1,2] sebanyak 2 kali (baris)
```

```
              1             2
              1             2
```

```
>A*dup([1,2],2)
```

```
              1             4
              3             8
```

Hal ini juga berlaku untuk dua vektor di mana satu adalah vektor baris dan yang lainnya adalah vektor kolom. Kita hitung i*j untuk i,j dari 1 hingga 5. Caranya adalah dengan mengalikan 1:5 dengan transposnya. Bahasa matriks Euler secara otomatis menghasilkan tabel nilai.

```
>(1:5)*(1:5)' // hasilkali elemen-elemen vektor baris dan vektor kolom
```

```
              1             2             3             4             5
              2             4             6             8            10
              3             6             9            12            15
              4             8            12            16            20
              5            10            15            20            25
```

Sekali lagi, ingat bahwa ini bukan produk matriks!

```
>(1:5).(1:5)' // hasilkali vektor baris dan vektor kolom
```

```
  55
```

```
>sum((1:5)*(1:5)) // sama hasilnya
```

```
  55
```

Bahkan operator seperti < atau == bekerja dengan cara yang sama.

```
>(1:10)<6 // menguji elemen-elemen yang kurang dari 6
```

```
[1,  1,  1,  1,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Misalnya, kita dapat menghitung jumlah elemen yang memenuhi kondisi tertentu dengan fungsi sum().

```
>sum((1:10)<6) // banyak elemen yang kurang dari 6
```

```
5
```

Euler memiliki operator perbandingan, seperti "==", yang memeriksa kesetaraan.
Kita mendapatkan vektor 0 dan 1, di mana 1 berarti benar.

```
>t=(1:10)^2; t==25 //menguji elemen2 t yang sama dengan 25 (hanya ada 1)
```

```
[0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Dari vektor seperti itu, "nonzeros" memilih elemen bukan nol.
Dalam hal ini kita mendapatkan indeks dari semua elemen yang lebih besar dari 50.

```
>nonzeros(t>50) //indeks elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[8,  9,  10]
```

Tentu saja, kita dapat menggunakan vektor indeks ini untuk mendapatkan nilai yang sesuai dalam t.

```
>t[nonzeros(t>50)] //elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[64,  81,  100]
```

Sebagai contoh, mari kita cari semua kuadrat dari angka 1 sampai 1000, yaitu 5 modulo 11 dan 3 modulo 13.

```
>t=1:1000; nonzeros(mod(t^2,11)==5 && mod(t^2,13)==3)
```

```
[4,  48,  95,  139,  147,  191,  238,  282,  290,  334,  381,  425,
433,  477,  524,  568,  576,  620,  667,  711,  719,  763,  810,  854,
862,  906,  953,  997]
```

EMT tidak sepenuhnya efektif untuk perhitungan bilangan bulat. Ini menggunakan floating point presisi ganda secara internal. Namun, seringkali sangat berguna.
Kita dapat memeriksa keprimaan. Mari kita cari tahu, berapa banyak kuadrat ditambah 1 adalah bilangan prima.

```
>t=1:1000; length(nonzeros(isprime(t^2+1)))
```

```
112
```

Fungsi nonzeros() hanya berfungsi untuk vektor. Untuk matriks, ada mnonzeros().

```
>seed(2); A=random(3,4)
```

```
    0.765761      0.401188      0.406347      0.267829
     0.13673      0.390567      0.495975      0.952814
    0.548138      0.006085      0.444255      0.539246
```

Ini mengembalikan indeks elemen, yang bukan nol.

```
>k=mnonzeros(A<0.4) //indeks elemen2 A yang kurang dari 0,4
```

```
           1             4
           2             1
           2             2
           3             2
```

Indeks ini dapat digunakan untuk mengatur elemen ke beberapa nilai.

```
>mset(A,k,0) //mengganti elemen2 suatu matriks pada indeks tertentu
```

```
    0.765761      0.401188      0.406347             0
           0             0      0.495975      0.952814
    0.548138             0      0.444255      0.539246
```

Fungsi mset() juga dapat mengatur elemen pada indeks ke entri dari beberapa matriks lainnya.

```
>mset(A,k,-random(size(A)))
```

```
    0.765761      0.401188      0.406347     -0.126917
   -0.122404     -0.691673      0.495975      0.952814
    0.548138     -0.483902      0.444255      0.539246
```

Dan dimungkinkan untuk mendapatkan elemen dalam vektor.

```
>mget(A,k)
```

```
 [0.267829,  0.13673,  0.390567,  0.006085]
```

Fungsi lain yang berguna adalah extrema, yang mengembalikan nilai minimal dan maksimal di setiap baris matriks dan posisinya.

```
>ex=extrema(A)
```

```
    0.267829             4      0.765761             1
     0.13673             1      0.952814             4
    0.006085             2      0.548138             1
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak nilai maksimal di setiap baris.

```
>ex[,3]'
```

```
[0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Ini, tentu saja, sama dengan fungsi max().

```
>max(A)'
```

```
[0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Tetapi dengan mget(), kita dapat mengekstrak indeks dan menggunakan informasi ini untuk mengekstrak elemen pada posisi yang sama dari matriks lain.

```
>j=(1:rows(A))'|ex[,4], mget(-A,j)
```

```
            1            1
            2            4
            3            1
[-0.765761,  -0.952814,  -0.548138]
```

Fungsi Matriks Lainnya (Matriks Membangun)

Untuk membangun matriks, kita dapat menumpuk satu matriks di atas matriks lainnya. Jika keduanya tidak memiliki jumlah kolom yang sama, kolom yang lebih pendek akan diisi dengan 0.

```
>v=1:3; v_v
```

```
            1            2            3
            1            2            3
```

Demikian juga, kita dapat menempelkan matriks ke yang lain secara berdampingan, jika keduanya memiliki jumlah baris yang sama.

```
>A=random(3,4); A|v'
```

```
     0.032444     0.0534171     0.595713     0.564454            1
      0.83916      0.175552     0.396988      0.83514            2
    0.0257573      0.658585     0.629832     0.770895            3
```

Jika mereka tidak memiliki jumlah baris yang sama, matriks yang lebih pendek diisi dengan 0.

Ada pengecualian untuk aturan ini. Sebuah bilangan riil yang dilampirkan pada matriks akan digunakan sebagai kolom yang diisi dengan bilangan riil tersebut.

```
>A|1
```

```
     0.032444     0.0534171     0.595713     0.564454            1
      0.83916      0.175552     0.396988      0.83514            1
    0.0257573      0.658585     0.629832     0.770895            1
```

Dimungkinkan untuk membuat matriks vektor baris dan vektor kolom.

```
>[v;v]
```

```
              1             2             3
              1             2             3
```

```
>[v',v']
```

```
              1             1
              2             2
              3             3
```

Tujuan utama dari ini adalah untuk menafsirkan vektor ekspresi untuk vektor kolom.

```
>"[x,x^2]"(v')
```

```
              1             1
              2             4
              3             9
```

Untuk mendapatkan ukuran A, kita dapat menggunakan fungsi berikut.

```
>C=zeros(2,4); rows(C), cols(C), size(C), length(C)
```

```
 2
 4
 [2,  4]
 4
```

Untuk vektor, ada length().

```
>length(2:10)
```

```
 9
```

Ada banyak fungsi lain, yang menghasilkan matriks.

```
>ones(2,2)
```

```
              1             1
              1             1
```

Ini juga dapat digunakan dengan satu parameter. Untuk mendapatkan vektor dengan angka selain 1, gunakan yang berikut ini.

```
>ones(5)*6
```

```
 [6,  6,  6,  6,  6]
```

Juga matriks bilangan acak dapat dihasilkan dengan acak (distribusi uniform) atau normal (distribusi Gau).

```
>random(2,2)
```

```
      0.66566      0.831835
        0.977      0.544258
```

Berikut adalah fungsi lain yang berguna, yang merestrukturisasi elemen matriks menjadi matriks lain.

```
>redim(1:9,3,3) // menyusun elemen2 1, 2, 3, ..., 9 ke bentuk matriks 3x3
```

```
              1             2             3
              4             5             6
              7             8             9
```

Dengan fungsi berikut, kita dapat menggunakan ini dan fungsi dup untuk menulis fungsi rep(), yang mengulang vektor n kali.

```
>function rep(v,n) := redim(dup(v,n),1,n*cols(v))
```

Mari kita uji.

```
>rep(1:3,5)
```

```
 [1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3]
```

Fungsi multdup() menduplikasi elemen vektor.

```
>multdup(1:3,5), multdup(1:3,[2,3,2])
```

```
 [1,  1,  1,  1,  1,  2,  2,  2,  2,  2,  3,  3,  3,  3,  3]
 [1,  1,  2,  2,  2,  3,  3]
```

Fungsi flipx() dan flipy() mengembalikan urutan baris atau kolom matriks. Yaitu, fungsi flipx() membalik secara horizontal.

```
>flipx(1:5) //membalik elemen2 vektor baris
```

```
 [5,  4,  3,  2,  1]
```

Untuk rotasi, Euler mempunyai rotleft() dan rotright().

```
>rotleft(1:5) // memutar elemen2 vektor baris
```

```
 [2,  3,  4,  5,  1]
```

Fungsi khusus adalah drop(v,i), yang menghilangkan elemen dengan indeks di i dari vektor v.

```
>drop(10:20,3)
```

```
[10,  11,  13,  14,  15,  16,  17,  18,  19,  20]
```

Perhatikan bahwa vektor i di drop(v,i) mengacu pada indeks elemen di v, bukan nilai dari elemen. Jika Anda ingin menghapus elemen, Anda harus menemukan elemennya terlebih dahulu. Fungsi indexof(v,x) dapat digunakan untuk menemukan elemen x dalam vektor yang diurutkan v.

```
>v=primes(50), i=indexof(v,10:20), drop(v,i)
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
[0,  5,  0,  6,  0,  0,  0,  7,  0,  8,  0]
[2,  3,  5,  7,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
```

Seperti yang Anda lihat, tidak ada salahnya untuk memasukkan indeks di luar rentang (seperti 0), indeks ganda, atau indeks yang tidak diurutkan.

```
>drop(1:10,shuffle([0,0,5,5,7,12,12]))
```

```
[1,  2,  3,  4,  6,  8,  9,  10]
```

Ada beberapa fungsi khusus untuk mengatur diagonal atau untuk menghasilkan matriks diagonal.

Kita mulai dengan matriks identitas.

```
>A=id(5) // matriks identitas 5x5
```

```
          1           0           0           0           0
          0           1           0           0           0
          0           0           1           0           0
          0           0           0           1           0
          0           0           0           0           1
```

Kemudian kita atur diagonal bawah (-1) menjadi 1:4.

```
>setdiag(A,-1,1:4) //mengganti diagonal di bawah diagonal utama
```

```
          1           0           0           0           0
          1           1           0           0           0
          0           2           1           0           0
          0           0           3           1           0
          0           0           0           4           1
```

Perhatikan bahwa Kita tidak mengubah matriks A. Kita mendapatkan matriks baru sebagai hasil dari setdiag().

```
>function tridiag (n,a,b,c) := setdiag(setdiag(b*id(n),1,c),-1,a); ...
>tridiag(5,1,2,3)
```

```
2            3            0            0            0
1            2            3            0            0
0            1            2            3            0
0            0            1            2            3
0            0            0            1            2
```

Diagonal suatu matriks juga dapat diekstraksi dari matriks tersebut. Untuk mendemonstrasikan ini, kita merestrukturisasi vektor 1:9 menjadi matriks 3x3.

```
>A=redim(1:9,3,3)
```

```
1            2            3
4            5            6
7            8            9
```

Sekarang kita dapat mengekstrak diagonal.

```
>d=getdiag(A,0)
```

```
[1,  5,  9]
```

Misalnya, kita dapat membagi matriks dengan diagonalnya. Bahasa matriks memperhatikan bahwa vektor kolom d diterapkan ke matriks baris demi baris.

```
>fraction A/d'
```

```
   1          2          3
 4/5          1        6/5
 7/9        8/9          1
```

Vektorisasi

Hampir semua fungsi di Euler bekerja untuk matriks dan input vektor juga, kapanpun ini masuk akal. Misalnya, fungsi sqrt() yang menghitung akar kuadrat dari semua elemen vektor atau matriks.

```
>sqrt(1:3)
```

```
[1,  1.41421,  1.73205]
```

Jadi Anda dapat dengan mudah membuat tabel nilai. Ini adalah salah satu cara untuk memplot suatu fungsi (alternatifnya menggunakan eskpresi).

```
>x=1:0.01:5; y=log(x)/x^2; // terlalu panjang untuk ditampilkan
```

Dengan ini dan operator titik dua a:delta:b, vektor nilai fungsi dapat dihasilkan dengan mudah.

Dalam contoh berikut, kita menghasilkan sebuah nilai vektor t[i] dengan jarak 0,1 dari -1 hingga 1. Kemudian kita menghasilkan nilai vektor fungsi.

$$s = t^3 - t$$

```
>t=-1:0.1:1; s=t^3-t
```

```
[0,  0.171,  0.288,  0.357,  0.384,  0.375,  0.336,  0.273,  0.192,
0.099,  0,  -0.099,  -0.192,  -0.273,  -0.336,  -0.375,  -0.384,
-0.357,  -0.288,  -0.171,  0]
```

EMT memperluas operator untuk skalar, vektor, dan matriks dengan cara yang jelas.

Misalnya, vektor kolom kali vektor baris berkembang menjadi matriks, jika operator diterapkan. Berikut ini, v' adalah vektor yang ditranspos (vektor kolom).

```
>shortest (1:5)*(1:5)'
```

```
     1       2       3       4       5
     2       4       6       8      10
     3       6       9      12      15
     4       8      12      16      20
     5      10      15      20      25
```

Perhatikan, bahwa ini sangat berbeda dari produk matriks. Produk matriks dilambangkan dengan titik "." di EMT.

```
>(1:5).(1:5)'
```

```
55
```

Secara default, vektor baris dicetak dalam format yang ringkas.

```
>[1,2,3,4]
```

```
[1,  2,  3,  4]
```

Untuk matriks operator khusus, menunjukkan perkalian matriks, dan A' menunjukkan transpos. Matriks A 1x1 dapat digunakan seperti bilangan riil.

```
>v:=[1,2]; v.v', %^2
```

```
5
25
```

Untuk mentranspos matriks kita menggunakan apostrophe.

```
>v=1:4; v'
```

```
                1
                2
                3
                4
```

Jadi kita dapat menghitung matriks A kali vektor b.

```
>A=[1,2,3,4;5,6,7,8]; A.v'
```

```
               30
               70
```

Perhatikan bahwa v masih merupakan vektor baris. Jadi v'.v berbeda dari vv'.

```
>v'.v
```

```
                1             2             3             4
                2             4             6             8
                3             6             9            12
                4             8            12            16
```

v.v' menghitung norm v kuadrat untuk vektor baris v. Hasilnya adalah vektor 1x1, yang bekerja seperti bilangan riil.

```
>v.v'
```

```
30
```

Ada juga fungsi norm (bersama dengan banyak fungsi lain dari Aljabar Linier).

```
>norm(v)^2
```

```
30
```

Operator dan fungsi memathui bahasa matriks Euler.

Berikut ringkasan aturannya.

- Sebuah fungsi yang diterapkan ke vektor atau matriks diterapkan ke setiap elemen.

- Sebuah operator yang beroperasi pada dua matriks dengan ukuran yang sama diterapkan berpasangan ke elemen matriks.

- Jika kedua matriks memiliki dimensi yang berbeda, keduanya diperluas dengan cara yang masuk akal, sehingga memiliki ukuran yang sama.

Misalnya, nilai skalar kali vektor mengalikan setiap elemen vektor. Atau matriks kali vektor (dengan *, bukan .) memperluas vektor ke ukuran matriks dengan menduplikasinya.

Berikut adalah kasus sederhana dengan operator ^.

```
>[1,2,3]^2
```

```
[1,  4,  9]
```

Berikut adalah kasus yang lebih rumit. Vektor baris dikalikan dengan vektor kolom diekspansi ke keduanya dengan menduplikasi.

```
>v:=[1,2,3]; v*v'
```

```
            1            2            3
            2            4            6
            3            6            9
```

Perhatikan bahwa produk skalar menggunakan produk matriks, bukan *!

```
>v.v'
```

```
14
```

Ada banyak fungsi matriks. Kita berikan daftar singkat. Anda harus berkonsultasi dengan dokumentasi untuk informasi lebih lanjut tentang perintah ini.

```
sum,prod computes the sum and products of the rows
cumsum,cumprod does the same cumulatively
computes the extremal values of each row
extrema returns a vector with the extremal information
diag(A,i) returns the i-th diagonal
setdiag(A,i,v) sets the i-th diagonal
id(n) the identity matrix
det(A) the determinant
charpoly(A) the characteristic polynomial
eigenvalues(A) the eigenvalues
```

```
>v*v, sum(v*v), cumsum(v*v)
```

```
[1,  4,  9]
14
[1,  5,  14]
```

Operator : menghasilkan vektor baris yang sama jarak, opsional dengan ukuran langkah.

```
>1:4, 1:2:10
```

```
[1,  2,  3,  4]
[1,  3,  5,  7,  9]
```

Untuk menggabungkan matriks dan vektor ada operator "|" dan "_".

```
>[1,2,3]|[4,5], [1,2,3]_1
```

```
[1,   2,   3,   4,   5]
              1                 2                 3
              1                 1                 1
```

Unsur-unsur matriks disebut dengan "A[i,j]".

```
>A:=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; A[2,3]
```

```
6
```

Untuk vektor baris atau vektor kolom, v[i] adalah elemen ke-i dari vektor. Untuk matriks, ini mengembalikan baris ke-i lengkap dari matriks.

```
>v:=[2,4,6,8]; v[3], A[3]
```

```
6
[7,   8,   9]
```

Indeks juga bisa menjadi vektor baris dari indeks. : menunjukkan semua indeks.

```
>v[1:2], A[:,2]
```

```
[2,   4]
              2
              5
              8
```

Bentuk singkat untuk : adalah menghilangkan indeks sepenuhnya.

```
>A[,2:3]
```

```
              2                 3
              5                 6
              8                 9
```

Untuk tujuan vektorisasi, elemen matriks dapat diakses seolah-olah mereka adalah vektor.

```
>A{4}
```

```
4
```

Sebuah matriks juga dapat diratakan, menggunakan fungsi redim(). Ini diimplementasikan dalam fungsi flatten().

```
>redim(A,1,prod(size(A))), flatten(A)
```

```
[1,   2,   3,   4,   5,   6,   7,   8,   9]
[1,   2,   3,   4,   5,   6,   7,   8,   9]
```

Untuk menggunakan matriks untuk tabel, mari kita reset ke format default, dan menghitung tabel nilai sinus dan kosinus. Perhatikan bahwa sudut dalam radian secara default.

```
>defformat; w=0°:45°:360°; w=w'; deg(w)
```

```
                0
               45
               90
              135
              180
              225
              270
              315
              360
```

Sekarang kita menambahkan kolom ke matriks.

```
>M = deg(w)|w|cos(w)|sin(w)
```

```
                0             0             1             0
               45      0.785398      0.707107      0.707107
               90        1.5708             0             1
              135       2.35619     -0.707107      0.707107
              180       3.14159            -1             0
              225       3.92699     -0.707107     -0.707107
              270       4.71239             0            -1
              315       5.49779      0.707107     -0.707107
              360       6.28319             1             0
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menghasilkan beberapa tabel dari beberapa fungsi sekaligus.

Dalam contoh berikut, kita menghitung t[j]^i untuk i dari 1 hingga n. Kita dapatkan matriks, di mana setiap baris adalah t^i untuk satu i. Yaitu, matriks memiliki elemen

$$a_{i,j} = t_j^i, \quad 1 \leq j \leq 101, \quad 1 \leq i \leq n$$

Sebuah fungsi yang tidak bekerja untuk input vektor harus "divektorisasi". Ini dapat dicapai dengan kata kunci "map" dalam definisi fungsi. Kemudian fungsi tersebut akan dievaluasi untuk setiap elemen dari parameter vektor.

Integrasi numerik integrate() hanya berfungsi untuk batas interval skalar. Jadi kita perlu membuat vektor.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
```

Kata kunci "map" membuat vektor fungsi. Fungsi akan bekerja sekarang untuk vektor angka.

```
>f([1:5])
```

```
  [0,  2.05045,  13.7251,  113.336,  1241.03]
```

Sub-Matriks dan Matriks-Elemen

Untuk mengakses elemen matriks, gunakan notasi kurung siku.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9], A[2,2]
```

```
                  1                   2                   3
                  4                   5                   6
                  7                   8                   9
   5
```

Kita dapat mengakses satu baris matriks yang lengkap.

```
>A[2]
```

```
   [4,   5,   6]
```

Dalam kasus vektor baris atau kolom, ini mengembalikan elemen vektor.

```
>v=1:3; v[2]
```

```
   2
```

Untuk memastikan, Anda mendapatkan baris pertama untuk matriks 1xn dan mxn, tentukan semua kolom menggunakan indeks kedua kosong.

```
>A[2,]
```

```
   [4,   5,   6]
```

Jika indeks adalah vektor indeks, Euler akan mengembalikan baris matriks yang sesuai.

```
>A[[1,2]]
```

```
                  1                   2                   3
                  4                   5                   6
```

Kita bahkan dapat mengurutkan ulang A menggunakan vektor indeks. Tepatnya, kita tidak mengubah A di sini, tetapi menghitung versi A yang disusun ulang.

```
>A[[3,2,1]]
```

```
                  7                   8                   9
                  4                   5                   6
                  1                   2                   3
```

Trik index juga berfungsi dengan kolom.

Contoh ini memilih semua baris A dan kolom kedua dan kolom ketiga.

```
>A[1:3,2:3]
```

```
                    2                   3
                    5                   6
                    8                   9
```

Untuk singkatan ":" menunjukkan semua indeks baris atau kolom.

```
>A[:,3]
```

```
                    3
                    6
                    9
```

Atau, biarkan indeks pertama kosong.

```
>A[,2:3]
```

```
                    2                   3
                    5                   6
                    8                   9
```

Kita juga bisa mendapatkan baris terakhir A.

```
>A[-1]
```

```
   [7,   8,   9]
```

Sekarang mari kita ubah elemen A dengan menetapkan submatriks A ke beberapa nilai. Ini sebenarnya mengubah matriks A yang tersimpan.

```
>A[1,1]=4
```

```
                    4                   2                   3
                    4                   5                   6
                    7                   8                   9
```

Kita juga dapat menetapkan nilai ke baris A.

```
>A[1]=[-1,-1,-1]
```

```
                   -1                  -1                  -1
                    4                   5                   6
                    7                   8                   9
```

Kita bahkan dapat menetapkan ke sub-matriks jika memiliki ukuran yang tepat.

```
>A[1:2,1:2]=[5,6;7,8]
```

```
              5             6            -1
              7             8             6
              7             8             9
```

Selain itu, beberapa pintasan diperbolehkan.

```
>A[1:2,1:2]=0
```

```
              0             0            -1
              0             0             6
              7             8             9
```

Peringatan : Indeks di luar batas mengembalikan matriks kosong, atau pesan kesalahan, tergantung pengurutan sistem. Standarnya adalah pesan kesalahan. Ingat, bagaimanapun, bahwa indeks negatif dapat digunakan untuk mengakses elemen matriks yang dihitung dari akhir.

```
>A[4]
```

```
Row index 4 out of bounds!
Error in:
A[4] ...
    ^
```

Mengurutkan dan Mengacak

Fungsi sort() mengurutkan vektor baris.

```
>sort([5,6,4,8,1,9])
```

```
[1,  4,  5,  6,  8,  9]
```

Seringkali perlu untuk mengetahui indeks dari vektor yang diurutkan dalam vektor aslinya. Ini dapat digunakan untuk menyusun ulang vektor lain dengan cara yang sama.

Mari kita mengacak vektor.

```
>v=shuffle(1:10)
```

```
[4,  5,  10,  6,  8,  9,  1,  7,  2,  3]
```

Indeks berisi urutan yang tepat dari v.

```
>{vs,ind}=sort(v); v[ind]
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Ini bekerja untuk vektor string juga.

```
>s=["a","d","e","a","aa","e"]
```

```
a
d
e
a
aa
e
```

```
>{ss,ind}=sort(s); ss
```

```
a
a
aa
d
e
e
```

Seperti yang Anda lihat, posisi entri ganda agak acak.

```
>ind
```

```
[4,   1,   5,   2,   6,   3]
```

Fungsi tunggal mengembalikan daftar elemen unik vektor yang diurutkan.

```
>intrandom(1,10,10), unique(%)
```

```
[4,   4,   9,   2,   6,   5,   10,   6,   5,   1]
[1,   2,   4,   5,   6,   9,   10]
```

Ini bekerja untuk vektor string juga.

```
>unique(s)
```

```
a
aa
d
e
```

Aljabar Linier

EMT memiliki banyak fungsi untuk menyelesaikan sistem linier, sistem sparse, atau masalah regresi.

Untuk sistem linier Ax=b, Anda dapat menggunakan algoritma Gauss, matriks invers, atau kesesuaian linier. Operator A/b menggunakan versi algoritma Gauss.

```
>A=[1,2;3,4]; b=[5;6]; A\b
```

```
         -4
        4.5
```

Untuk contoh lain, kita buat matriks 200x200 dan jumlah barisnya. Kemudian kita selesaikan Ax=b menggunakan matriks invers. Kita ukur kesalahan sebagai deviasi maksimal semua elemen dari 1, yang tentu saja merupakan solusi yang benar.

```
>A=normal(200,200); b=sum(A); longest totalmax(abs(inv(A).b-1))
```

```
    8.790745908981989e-13
```

Jika sistem tidak memiliki solusi, kecocokan linier meminimalkan norma kesalahan Ax-b

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
              1              2              3
              4              5              6
              7              8              9
```

Determinan dari matriks ini adalah 0.

```
>det(A)
```

```
  0
```

Matriks Simbolik

Maxima memiliki matriks simbolik. Tentu saja, Maxima dapat digunakan untuk masalah aljabar linier sederhana seperti itu. Kita dapat mendefinisikan matriks untuk Euler dan Maxima dengan &:=, dan kemudian menggunakannya dalam ekspresi simbolik. Bentuk [...] biasa untuk mendefinisikan matriks dapat digunakan di Euler untuk mendefinisikan matriks simbolik.

```
>A &= [a,1,1;1,a,1;1,1,a]; $A
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

```
>$&det(A), $&factor(%)
```

$$(a-1)^2\,(a+2)$$

```
>$&invert(A) with a=0
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
>A &= [1,a;b,2]; $A
```

$$\begin{pmatrix}1 & a \\ b & 2\end{pmatrix}$$

Seperti semua variabel simbolik, matriks ini dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&det(A-x*ident(2)), $&solve(%,x)
```

$$\left[x=\frac{3-\sqrt{4\,a\,b+1}}{2} , x=\frac{\sqrt{4\,a\,b+1}+3}{2}\right]$$

$$\left[x=\frac{3-\sqrt{4\,a\,b+1}}{2} , x=\frac{\sqrt{4\,a\,b+1}+3}{2}\right]$$

Nilai eigen juga dapat dihitung secara otomatis. Hasilnya adalah vektor dengan dua vektor nilai eigen dan kelipatannya.

```
>$&eigenvalues([a,1;1,a])
```

$$\left[\left[a-1 , a+1\right] , \left[1 , 1\right]\right]$$

Untuk mengekstrak vektor eigen tertentu perlu pengindeksan yang cermat.

```
>$&eigenvectors([a,1;1,a]), &%[2][1][1]
```

$$\left[\left[\left[a-1 , a+1\right] , \left[1 , 1\right]\right] , \left[\left[\left[1 , -1\right]\right] , \left[\left[1 , 1\right]\right]\right]\right]$$

```
[1, - 1]
```

Matriks simbolik dapat dievaluasi dalam Euler secara numerik seperti ekspresi simbolik lainnya.

```
>A(a=4,b=5)
```

```
              1             4
              5             2
```

Dalam ekspresi simbolik, gunakan with.

```
>$&A with [a=4,b=5]
```

$$\begin{pmatrix}1 & 4 \\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

Akses ke baris matriks simbolik bekerja seperti halnya dengan matriks numerik.

```
>$&A[1]
```

$$[1, a]$$

Ekspresi simbolik dapat berisi assignment. Dan itu mengubah matriks A.

```
>&A[1,1]:=t+1; $&A
```

$$\begin{pmatrix} t+1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Ada fungsi simbolik di Maxima untuk membuat vektor dan matriks. Untuk ini, lihat dokumentasi Maxima atau tutorial tentang Maxima di EMT.

```
>v &= makelist(1/(i+j),i,1,3); $v
```

$$\left[\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j+2}, \frac{1}{j+3}\right]$$

```
>B &:= [1,2;3,4]; $B, $&invert(B)
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hasilnya dapat dievaluasi secara numerik dalam Euler. Untuk informasi lebih lanjut tentang Maxima, lihat pengantar Maxima.

```
>$&invert(B)()
```

```
            -2                 1
           1.5              -0.5
```

Euler juga memiliki fungsi xinv() yang kuat, yang dapat membuat upaya lebih besar dan mendapatkan hasil yang lebih tepat.

Perhatikan, bahwa dengan &:= matriks B telah didefinisikan sebagai simbolik dalam ekspresi simbolik dan sebagai numerik dalam ekspresi numerik. Jadi kita bisa menggunakannya di sini.

```
>longest B.xinv(B)
```

```
                     1                       0
                     0                       1
```

Misalnya nilai eigen dari A dapat dihitung secara numerik.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; real(eigenvalues(A))
```

```
  [16.1168,  -1.11684,  0]
```

Atau secara simbolik. Lihat tutorial tentang Maxima untuk detailnya.

```
>$&eigenvalues(@A)
```

$$\left[\left[\frac{15-3\sqrt{33}}{2},\frac{3\sqrt{33}+15}{2},0\right],[1,1,1]\right]$$

Nilai Numerik dalam Ekspresi Simbolik

Ekspresi simbolik hanyalah string yang berisi ekspresi. Jika kita ingin mendefinisikan nilai baik untuk ekspresi simbolik maupun ekspresi numerik, kita harus menggunakan "&:=".

```
>A &:= [1,pi;4,5]
```

```
             1        3.14159
             4              5
```

Masih ada perbedaan antara bentuk numerik dan simbolik. Saat mentransfer matriks ke bentuk simbolik, pendekatan pecahan untuk riil akan digunakan.

```
>$&A
```

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1146408}{364913}\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Untuk menghindarinya, ada fungsi "mxset(variable)".

```
>mxmset(A); $&A
```

$$\begin{pmatrix}1 & 3.141592653589793\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Maxima juga dapat menghitung angka floating point, dan bahkan dengan angka float besar dengan 32 digit. Namun, evaluasinya jauh lebih lambat.

```
>$&bfloat(sqrt(2)), $&float(sqrt(2))
```

$$1.414213562373095$$

Ketepatan angka floating point besar juga dapat diubah.

```
>&fpprec:=100; &bfloat(pi)
```

```
        3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\
  4592307816406286208998628034825342117068b0
```

Variabel numerik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik apapun menggunakan "@var".

Perhatikan bahwa ini hanya diperlukan, jika variabel telah didefinisikan dengan ":=" atau "=" sebagai variabel numerik.

```
>B:=[1,pi;3,4]; $&det(@B)
```

$$-5.424777960769379$$

Demo - Suku Bunga

Di bawah ini, kita gunakan Euler Math Toolbox (EMT) untuk perhitungan suku bunga. Kita melakukannya secara numerik dan simbolik untuk menunjukkan kepada Anda bagaimana Euler dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kehidupan nyata.

Asumsikan Anda memiliki modal awal 5000 (katakanlah dalam dolar).

```
>K=5000
```

```
  5000
```

Sekarang kita asumsikan suku bunga per tahun 3%. Mari kita tambahkan satu tarif sederhana dan hitung hasilnya.

```
>K*1.03
```

```
  5150
```

Euler akan memahami sintaks berikut juga.

```
>K+K*3%
```

```
  5150
```

Tapi lebih mudah menggunakan faktornya.

```
>q=1+3%, K*q
```

```
1.03
5150
```

Selama 10 tahun, kita cukup mengalikan faktornya dan mendapatkan nilai akhir dengan suku bunga majemuk.

```
>K*q^10
```

```
6719.58189672
```

Untuk tujuan kita, kita dapat mengatur format menjadi 2 digit setelah titik desimal.

```
>format(12,2); K*q^10
```

```
    6719.58
```

Mari kita cetak yang dibulatkan menjadi 2 digit dalam kalimat lengkap.

```
>"Starting from " + K + "$ you get " + round(K*q^10,2) + "$."
```

```
Starting from 5000$ you get 6719.58$.
```

Bagaimana jika kita ingin mengetahui hasil antara dari tahun 1 sampai tahun 9? Untuk ini, bahasa matriks Euler sangat membantu. Anda tidak perlu menulis loop, cukup masukkan.

```
>K*q^(0:10)
```

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     5150.00     5304.50     5463.64     ...
```

Bagaimana keajaiban ini bekerja? Pertama ekspresi 0:10 mengembalikan vektor bilangan bulat.

```
>short 0:10
```

```
[0,  1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Kemudian semua operator dan fungsi dalam Euler dapat diterapkan pada elemen vektor untuk elemen. Jadi

```
>short q^(0:10)
```

```
[1,  1.03,  1.0609,  1.0927,  1.1255,  1.1593,  1.1941,  1.2299,
1.2668,  1.3048,  1.3439]
```

adalah vektor faktor q^0 sampai q^10. Ini dikalikan dengan K, dan kita mendapatkan nilai vektor.

```
>VK=K*q^(0:10);
```

Tentu saja, cara realistis untuk menghitung suku bunga ini adalah dengan membulatkan ke sen terdekat setelah setiap tahun. Mari kita tambahkan fungsi untuk ini.

```
>function oneyear (K) := round(K*q,2)
```

Mari kita bandingkan dua hasil, dengan dan tanpa pembulatan.

```
>longest oneyear(1234.57), longest 1234.57*q
```

```
             1271.61
            1271.6071
```

Sekarang tidak ada rumus sederhana untuk tahun ke-n, dan kita harus mengulang selama bertahun-tahun. Euler memberikan banyak solusi untuk ini.

Cara termudah adalah iterasi, yang mengulangi fungsi tertentu beberapa kali.

```
>VKr=iterate("oneyear",5000,10)
```

```
 Real 1 x 11 matrix

    5000.00    5150.00    5304.50    5463.64    ...
```

Kita dapat mencetaknya dengan cara yang ramah, menggunakan format kita dengan tempat desimal tetap.

```
>VKr'
```

```
    5000.00
    5150.00
    5304.50
    5463.64
    5627.55
    5796.38
    5970.27
    6149.38
    6333.86
    6523.88
    6719.60
```

Untuk mendapatkan elemen tertentu dari vektor, kita gunakan indeks dalam tanda kurung siku.

```
>VKr[2], VKr[1:3]
```

```
    5150.00
    5000.00    5150.00    5304.50
```

Anehnya, kita juga bisa menggunakan vektor indeks. Ingat bahwa 1:3 menghasilkan vektor [1,2,3].

Mari kita bandingkan elemen terakhir dari nilai yang dibulatkan dengan nilai penuh.

```
>VKr[-1], VK[-1]
```

```
      6719.60
      6719.58
```

Perbedaannya sangat kecil.

Menyelesaikan persamaan

Sekarang kita mengambil fungsi yang lebih maju, yang menambahkan tingkat uang tertentu setiap tahun.

```
>function onepay (K) := K*q+R
```

Kita tidak perlu menentukan q atau R untuk definisi fungsi. Hanya jika kita menjalankan perintah, kita harus mendefinisikan nilai-nilai ini. Kita pilih R=200.

```
>R=200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
  Real 1 x 11 matrix

      5000.00      5350.00      5710.50      6081.82      ...
```

Bagaumana jika kita menghapus jumlah yang sama setiap tahun?

```
>R=-200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
  Real 1 x 11 matrix

      5000.00      4950.00      4898.50      4845.45      ...
```

Kita melihat bahwa uang berkurang. Jelas, jika kita hanya mendapatkan 150 bunga di tahun pertama, tetapi menghapus 200, kita kehilangan uang setiap tahun.

Bagaimana kita bisa menentukan berapa tahun uang itu akan bertahan? Kita harus menuliskan loop untuk ini. Cara termudah adalah dengan iterasi yang cukup lama.

```
>VKR=iterate("onepay",5000,50)
```

```
  Real 1 x 51 matrix

      5000.00      4950.00      4898.50      4845.45      ...
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menentukan nilai negatif pertama dengan cara berikut.

```
>min(nonzeros(VKR<0))
```

```
        48.00
```

Alasan untuk ini adalah bukan nonzeros(VKR<0) mengembalikan vektor indeks i, di mana VKR[i]<0, dan min menghitung indeks minimal.

Karena vektor selalu dimulai dengan indeks 1, jawabannya adalah 47 tahun.

Fungsi iterate() memiliki satu trik lagi. Itu bisa mengambil kondisi akhir sebagai argumen. Kemudian akan mengembalikan nilai dan jumlah iterasi.

```
>{x,n}=iterate("onepay",5000,till="x<0"); x, n,
```

```
-19.83
 47.00
```

Mari kita coba menjawab pertanyaan yang lebih ambigu. Asumsikan kita tahu bahwa nilainya adalah 0 setelah 50 tahun. Apa yang akan menjadi suku bunga?

Ini adalah pertanyaan yang hanya bisa dijawab dengan angka. Di bawah ini, kita akan mendapatkan formula yang diperlukan. Kemudian Anda akan melihat bahwa tidak ada formula yang mudah untuk suku bunga. Tapi untuk saat ini, kita bertujuan untuk solusi numerik.

Langkah pertama adalah mendefinisikan fungsi yang melakukan iterasi sebanyak n kali. Kita tambahkan semua parameter ke fungsi ini.

```
>function f(K,R,P,n) := iterate("x*(1+P/100)+R",K,n;P,R)[-1]
```

Iterasinya sama seperti di atas

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) + R$$

Tapi kita lebih lama menggunakan nilai global dari R dalam ekspresi kita. Fungsi seperti iterate() mempunyai trik khusus di Euler. Anda dapat meneruskan nilai variabel dalam ekspresi sebagai parameter titik koma. Dalam hal ini P dan R.

Selain itu, kita hanya tertarik pada nilai terakhir. Jadi kita ambil indeks [-1].

Mari kita coba tes.

```
>f(5000,-200,3,47)
```

```
-19.83
```

Sekarang kita bisa menyelesaikan masalah kita.

```
>solve("f(5000,-200,x,50)",3)
```

```
3.15
```

Penyelesaian rutin menyelesaikan ekspresi=0 untuk variabel x. Jawabannya adalah 3.15% per tahun. Kita ambil nilai awal 3% untuk algoritma. Fungsi solve() selalu membutuhkan nilai awal.

Kita dapat menggunakan fungsi yang sama untuk menyelesaikan pertanyaan berikut: Berapa banyak yang dapat kita keluarkan per tahun sehingga modal awla habis setelah 20 tahun dengan asumsi tingkat bunga 3% per tahun.

```
>solve("f(5000,x,3,20)",-200)
```

```
-336.08
```

Perhatikan bahwa Anda tidak dapat menyelesaikan jumlah tahun, karena fungsi kita mengasumsikan n sebagai nilai integer.

Solusi simbolik untuk Masalah Suku Bunga

Kita dapat menggunakan bagian simbolik dari Euler untuk mempelajari masalah tersebut. Pertama kita definisikan fungsi onepay() kita secara simbolik.

```
>function op(K) &= K*q+R; $&op(K)
```

$$R + q\,K$$

Kita sekarang dapat mengiterasi ini.

```
>$&op(op(op(op(K)))), $&expand(%)
```

$$q^3\,R + q^2\,R + q\,R + R + q^4\,K$$

Kita lihat sebuah pola. Setelah n periode kita dapatkan

$$K_n = q^n K + R(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = q^n K + \frac{q^n - 1}{q - 1} R$$

Rumusnya adalah rumus untuk jumlah geometrik, yang telah diketahui Maxima.

```
>&sum(q^k,k,0,n-1); $& % = ev(%,simpsum)
```

$$\sum_{k=0}^{n-1}{q^k} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ini agak rumit. Jumlahnya dievaluasi dengan flag "simpsum" untuk menguranginya menjadi hasil bagi.

Mari kita membuat fungsi untuk ini.

```
>function fs(K,R,P,n) &= (1+P/100)^n*K + ((1+P/100)^n-1)/(P/100)*R; $&fs(K,R,P,n)
```

$$\frac{100\,\left(\left(\frac{P}{100}+1\right)^n-1\right)\,R}{P} + K\,\left(\frac{P}{100}+1\right)^n$$

Fungsi tersebut melakukan hal yang sama seperti fungsi f sebelumnya. Tapi itu lebih efektif.

```
>longest f(5000,-200,3,47), longest fs(5000,-200,3,47)
```

```
-19.82504734650985
-19.82504734652684
```

Kita sekarang dapat menggunakannya untuk menanyakan waktu n. Kapan modal kita habis? Dugaan awal kita adalah 30 tahun.

```
>solve("fs(5000,-330,3,x)",30)
```

```
20.51
```

Jawaban ini mengatakan bahwa itu akan menjadi negatif setelah 21 tahun.

Kita juga dapat menggunakan sisi simbolik Euler untuk menghitung formula pembayaran.

Asumsikan kita mendapatkan pinjaman sebesar K, dan membayar n pembayaran sebesar R (dimulai setelah tahun pertama) meninggalkan sisa hutang sebesar Kn (pada saat pembayaran terakhir). Rumus ini dengan jelas

```
>equ &= fs(K,R,P,n)=Kn; $&equ
```

$$\frac{100\left(\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}-1\right)\,R}{P}+K\,\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}=Kn$$

Biasanya rumus ini diberikan dalam bentuk

$$i=\frac{P}{100}$$

```
>equ &= (equ with P=100*i); $&equ
```

$$\frac{\left((i+1)^{n}-1\right)\,R}{i}+(i+1)^{n}\,K=Kn$$

Kita dapat menyelesaikan laju R secara simbolis.

```
>$&solve(equ,R)
```

$$\left[R=\frac{i\,Kn-i\,(i+1)^{n}\,K}{(i+1)^{n}-1}\right]$$

Seperti yang Anda lihat dari rumus, fungsi ini mengembalikan kesalahan titik mengambang untuk i=0. Euler tetap merencanakannya.

Tentu saja, kami memiliki limit berikut.

```
>$&limit(R(5000,0,x,10),x,0)
```

$$\lim_{x\rightarrow 0}{R\left(5000 , 0 , x , 10\right)}$$

Jelas, tanpa bunga kita harus membayar kembali 10 suku dari 500.

Persamaan juga dapat diselesaikan untuk n. Kelihatannya lebih bagus, jika kita menerapkan beberapa penyederhanaan untuk itu.

```
>fn &= solve(equ,n) | ratsimp; $&fn
```

$$\left[n=\frac{\log \left(\frac{R+i\,K\,n}{R+i\,K}\right)}{\log \left(i+1\right)} \right]$$

Nama: Ardi Budi Setiawan
Kelas: Matematika-B
NIM: 22305141017

contoh penyelesaian soal-soal Aljabar

---

1. Tulis persamaan yang setara tanpa eksponen negatif (Sederhanakan)

a.

$$\frac{m^{-1}n^{-12}}{t^{-6}}$$

b.

$$m^{12}\cdot m^{-25}$$

c.

$$\frac{x^2y^2}{x^{-1}y}$$

d.

$$(8ab^7)(-7a^{-5}b^2)$$

e.

$$n^9 \cdot n^{-9}$$

```
>"a. Hasilnya adalah ", $&(m^(-1)*n^(-12))/t^-6
```

```
 a. Hasilnya adalah
```

$$\frac{t^6}{m\,n^{12}}$$

Seperti yang kita ketahui bahwa:

$$x^{-1}$$

akan sama dengan

$$\frac{1}{x}$$

Maka, dari soal yang (a) dapat kita rubah penyebut dan pembilangnya sesuai dengan aturan eksponen tersebut, agar pangkat negatif bisa hilang.

```
>"b. Hasilnya adalah ", $&(m^(12-25))
```

```
 b. Hasilnya adalah
```

$$\frac{1}{m^{13}}$$

```
>"c. Hasilnya adalah ", $&((x^2*y^2)/(x^-1*y))
```

```
 c. Hasilnya adalah
```

$$x^3\,y$$

```
>"d. Hasilnya adalah ", $&((8*a*b^7)/(-7*a^-5*b^2))
```

```
 d. Hasilnya adalah
```

$$-\frac{8\,a^6\,b^5}{7}$$

```
>"e. Hasilnya adalah ", $&(n^(9-9))
```

```
e. Hasilnya adalah
```

$$1$$

Untuk soal (b), (c), (d), (e):
Seperti yang kita ketahui bahwa:

$$x^2 : x^1 = x^{2-1}$$

sehingga, akan berlaku juga pada pecahan:
sebagai contoh

$$\frac{x^5}{x^3}$$

$$= x^{5-3}$$

Maka, hasil soal-soal diatas adalah benar.

---

2. Faktorkan persamaan berikut ini:
a.

$$2x^2 + 13x + 15 = 0$$

b.

$$2x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0$$

c.

$$5a^3 - 10a^2 + 25a - 50 = 0$$

```
>"a. Menulis persamaan kuadrat: ", ...
>$& (2*x^2)+13*x+15=0, $factor(%), "Itu adalah Memfaktorkan persamaannya "
```

```
a. Menulis persamaan kuadrat:
```

$$2\,x^2 + 13\,x + 15 = 0$$

$$(x + 5)\,(2\,x + 3) = 0$$

```
Itu adalah Memfaktorkan persamaannya
```

```
>"b. Menulis persamaan kuadrat: ", ...
>$& (2*x^3)+(9*x^2)+12*x+4=0, $factor(%), "Itu adalah Memfaktorkan persamaannya "
```

```
b. Menulis persamaan kuadrat:
```

$$2\,x^3+9\,x^2+12\,x+4=0$$

$$\left(x+2\right)^2\,\left(2\,x+1\right)=0$$

```
Itu adalah Memfaktorkan persamaannya
```

```
>"c. Menulis persamaan kuadrat: ", ...
>$& (5*a^3)-(10*a^2)+25*a-50=0, $factor(%), "Itu adalah Memfaktorkan persamaannya "
```

```
c. Menulis persamaan kuadrat:
```

$$5\,a^3-10\,a^2+25\,a-50=0$$

$$5\,\left(a-2\right)\,\left(a^2+5\right)=0$$

```
Itu adalah Memfaktorkan persamaannya
```

Pastikan koefisien a tidak nol. Pastikan koefisien a dalam persamaan kuadrat ax^2 + bx + c = 0 tidak sama dengan nol. Cari faktor-faktor a dan c. Faktorkan a dan c menjadi faktor-faktor yang mengalikan keduanya. Cari dua bilangan yang menjumlahkan b. Temukan dua bilangan yang dapat menjumlahkan b dan mengalikan a dan c.

Tulis persamaan dalam bentuk faktorisasi. Tulis persamaan dalam bentuk (ax - p)(x - q) = 0 dengan menggunakan bilangan-bilangan yang ditemukan pada langkah sebelumnya. Atasi faktorisasi lebih lanjut jika mungkin. Faktorkan lebih lanjut masing-masing faktor jika memungkinkan.

---

3. Temukan solusi dari persamaan berikut:

a.

$$2(x+7)=5x+14$$

b.

$$9y^2+15y+4=0$$

c.

$$3x^3+6x^2-27x-54=0$$

d.

$$\sqrt{x+4}-2=1$$

```
>"a.", fx &=(2*(x+7)=5*x+14) ; sol &= solve(2*(x+7)=5*x+14,x); ...
>"Menulis persamaan kuadrat", $& fx, ...
>"Ditemukan solusi untuk x yakni", $&sol
```

```
a.
Menulis persamaan kuadrat
```

$$2\,(x+7)=5\,x+14$$

```
Ditemukan solusi untuk x yakni
```

$$[x=0]$$

```
>"b.", fy &=(9*y^2+15*y+4=0) ; sol &= solve(9*y^2+15*y+4=0,y); ...
>"Menulis persamaan kuadrat", $& fy, ...
>"Ditemukan solusi untuk y yakni", $&sol
```

```
b.
Menulis persamaan kuadrat
```

$$9\,y^2+15\,y+4=0$$

```
Ditemukan solusi untuk y yakni
```

$$\left[y=-\frac{4}{3},y=-\frac{1}{3}\right]$$

```
>"c.", fx &=(3*x^3+6*x^2-27*x-54=0) ; sol &= solve(3*x^3+6*x^2-27*x-54=0,x); ...
>"Menulis persamaan kuadrat", $& fx, ...
>"Ditemukan solusi untuk x yakni", $&sol
```

```
c.
Menulis persamaan kuadrat
```

$$3\,x^3+6\,x^2-27\,x-54=0$$

```
Ditemukan solusi untuk x yakni
```

$$[x=-3,x=-2,x=3]$$

```
>"d.", fx &=(sqrt(x+4)-2=1) ; sol &= solve(sqrt(x+4)-2=1,x); ...
>"Menulis persamaan kuadrat", $& fx, ...
>"Ditemukan solusi untuk x yakni", $&sol
```

```
d.
Menulis persamaan kuadrat
```

$$\sqrt{x+4}-2=1$$

```
Ditemukan solusi untuk x yakni
```

$$[x=5]$$

Hitung Nilai Diskriminan

$$(D=b^2-4ac)$$

untuk menentukan jenis solusi:
- Jika D > 0, maka terdapat dua akar berbeda (solusi riil).
- Jika D = 0, maka terdapat satu akar ganda (solusi riil).
- Jika D < 0, maka terdapat dua akar kompleks konjugat (solusi kompleks).

Lalu Hitung Nilai x1 dan x2 dengan menggunakan rumus kuadrat

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(}b^2-4ac)}{2a}$$

untuk menghitung nilai x1 dan x2 berdasarkan diskriminan dan koefisien a, b, dan c.

---

4. Tentukan solusi dari pertidaksamaan tersebut

a.

$$|x+8|<9$$

b.

$$|p-4|+|p+4|<8$$

c.

$$|\frac{2x+1}{3}|>5$$

```
>"a. Solusinya adalah ", $&fourier_elim([abs(x+8)<9],[x])
```

```
a. Solusinya adalah
```

$$[-17<x,x<1]$$

```
>"b. Solusinya adalah ", $&fourier_elim([abs(p-4)+abs(p+4)<8],[p])
```

```
b. Solusinya adalah
```

$$emptyset$$

```
>"c. Solusinya adalah ", $&fourier_elim([abs((2*x+1)/3)>5],[x])
```

```
c. Solusinya adalah
```

$$[7 < x] \vee [x < -8]$$

Pertidaksamaan Nilai Mutlak (|ax + b| < c atau |ax + b| > c):
Bagi pertidaksamaan menjadi dua kasus: ketika nilai dalam nilai mutlak positif (ax + b) dan ketika nilai dalam nilai mutlak negatif (-(ax + b)). Selesaikan kedua kasus tersebut secara terpisah dan gabungkan solusi-solusi dari kedua kasus. Maka, akan ditemukan solusinya seperti jawaban diatas.

---

5. Diberikan matriks sebagai berikut

a.

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

b.

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 & 15 \\ 3 & -7 & 14 & -8 \\ -7 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Tentukan determinan dari matriks tersebut.
```

```
>"Membuat matriks", A&=[-2,5,3;4,-1,3;7,-2,5]; $ A,  ...
>"Determinannya adalah", $ det(A)
```

```
Membuat matriks
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

```
Determinannya adalah
```

$$0$$

```
>"Membuat matriks", B&=[10,20,-30,15;3,-7,14,-8;-7,-2,-1,2;4,4,-3,1]; $ B,  ...
>"Determinannya adalah", $ det(B)
```

```
Membuat matriks
```

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 & 15 \\ 3 & -7 & 14 & -8 \\ -7 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Determinannya adalah
```

$$125$$

Cara menentukan determinan matriks
Gunakan Metode Ekspansi Kofaktor:
Untuk matriks 4x4, Anda dapat menggunakan metode ekspansi kofaktor, yang melibatkan langkah-langkah berikut:

```
a. Pilih salah satu baris atau kolom (biasanya yang memiliki elemen
```

nol adalah pilihan yang baik).

```
b. Untuk setiap elemen di baris atau kolom yang Anda pilih, hitung
```

kofaktornya (produk dari matriks 3x3 yang dihasilkan dengan menghilangkan baris dan kolom yang berisi elemen tersebut) dan kalikan dengan elemen tersebut.

```
c. Jumlahkan semua produk yang Anda hitung dalam langkah sebelumnya.
```

Ini adalah rumus umum untuk mencari determinan matriks 4x4 dengan metode ekspansi kofaktor.

BAB 3

KB PEKAN 5-6: MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENGAMBAR GRAFIK 2 DIMENSI (2D)

Menggambar Grafik 2D dengan EMT

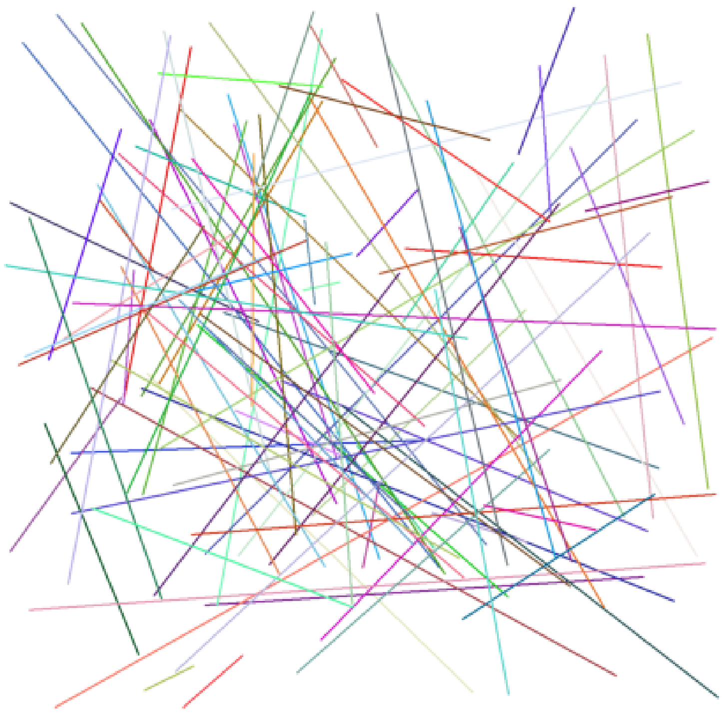
Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagaikurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi plot2d() untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

Plot Dasar

Ada fungsi plot yang sangat mendasar. Ada koordinat layar, yang selalu berkisar dari 0 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya persegi atau tidak. Dan ada koordinat plot, yang dapat diatur dengan setplot(). Pemetaan antara koordinat tergantung pada jendela plot saat ini. Misalnya, shrinkwindow() default menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.

Dalam contoh, kita hanya menggambar beberapa garis acak dalam berbagai warna. Untuk detail tentang fungsi ini, pelajari fungsi inti EMT.

```
>clg; // membersihkan layar
>window(0,0,1024,1024); // menggunakan semua jendela
>setplot(0,1,0,1); // mengatur koordinat plot
>hold on; // memulai mode timpa
>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2);  // mendapatkan titik acak
>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // mendapatkan warna acak
>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot
>hold off; // mengakhiri mode timpa
>insimg; // menyisipkan ke notebook
```



```
>reset;
```

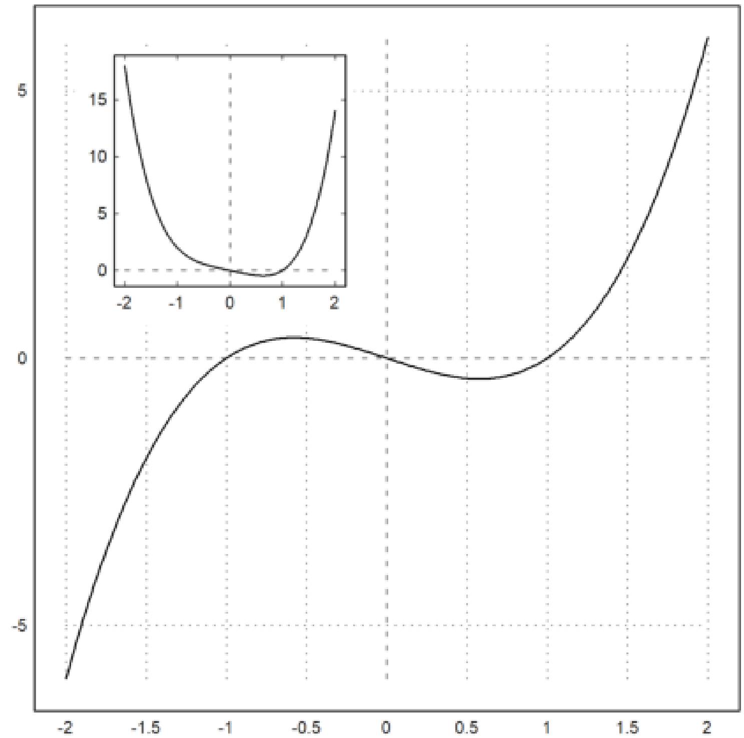
Grafik perlu ditahan, karena plot() akan menghapus jendela plot.

Untuk menghapus semua yang kita lakukan, kita gunakan reset().

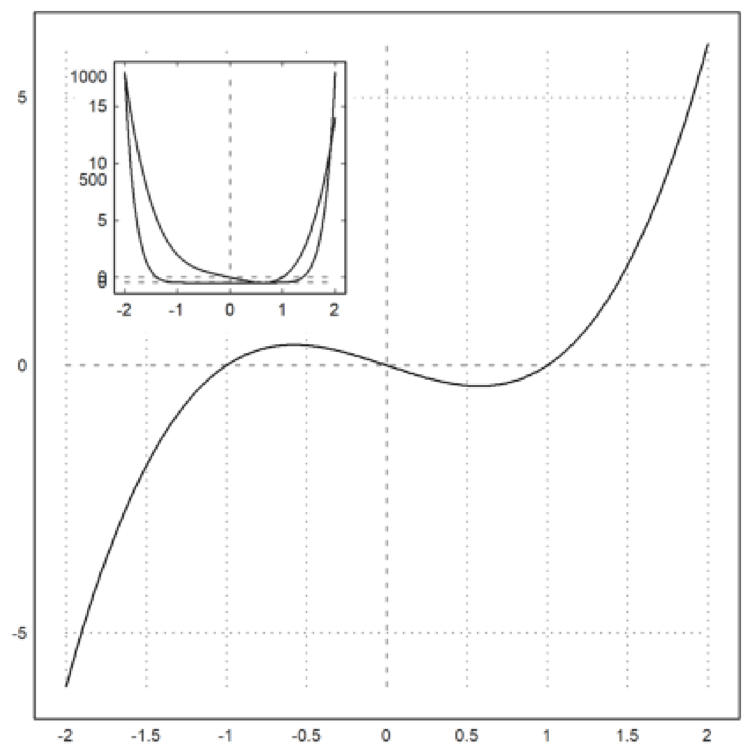
Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah plot2d() dapat diakhiri dengan titik dua (:). Cara lain adalah perintah plot2d() diakhiri dengan titik koma (;), kemudian menggunakan perintah insimg() untuk menampilkan gambar hasil plot.

Untuk contoh lain, kita gambar plot sebagai sisipan dalam plot lain. Ini dilakukan dengan mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil. Perhatikan bahwa jendela ini tidak menyediakan ruang untuk label sumbu di luar jendela. Kita harus menambahkan beberapa margin untuk ini sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kita menyimpan dan memulihkan jendela penuh, dan menahan plot saat ini saat kita memplot inset.

```
>plot2d("x^3-x");
>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300; // xw,yw,ww,hw, huruf "w" merupakan window yakni jika dit
>ow=window();
>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);
>hold on;
>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60);
>plot2d("x^4-x",grid=6):
```




```
>plot2d("x^10-2",grid=10):
```



```
>hold off;
>window(ow);
```

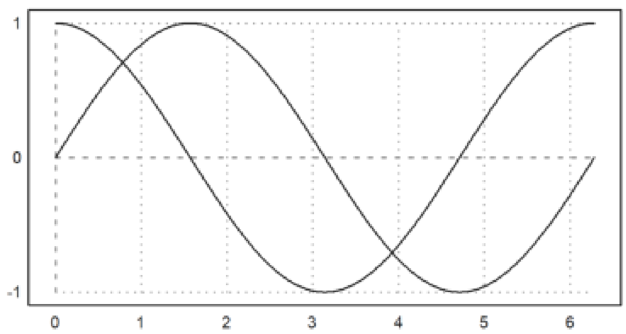
Plot dengan banyak angka dicapai dengan cara yang sama. Ada fungsi figure() utilitas untuk ini.

Aspek Plot

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubahnya dengan fungsi aspect(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspek nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan "Set Aspect" ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafis saat ini.

Tetapi Anda juga dapat mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini diubah, dan jendela diatur sehingga label mempunyai cukup ruang.

```
>aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi):
```




```
>aspect();
>reset;
```

Fungsi reset() mengembalikan plot default termasuk rasio aspek.

EMT Math Toolbox mempunyai plot dalam 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi plot2d. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.

Dimungkinkan untuk membuat plot di Maxima menggunakan Gnuplot atau dengan Python menggunakan Math Plot Lib.

Euler dapat memplot plot 2D dari

- ekspresi
- fungsi, variabel, atau kurva parameter,
- vektor nilai xy
- titik awan pada bidang
- kurva implisit dengan level atau daerah level
- fungsi kompleks

Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang dan plot berbayang.

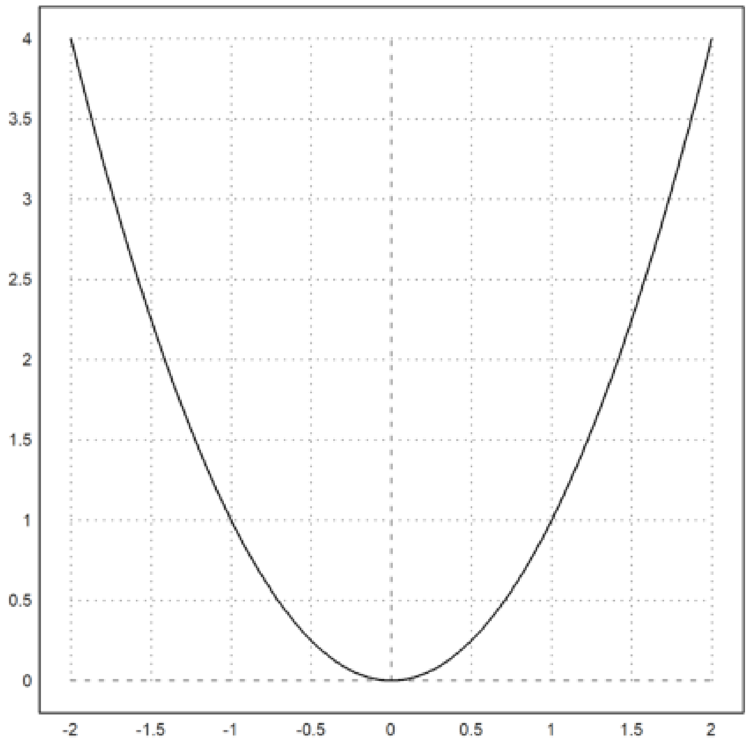
Plot Ekspresi atau Variabel

Sebuah ekspresi tunggal dalam "x" (misalnya "4*x^2") atau nama suatu fungsi (misalnya "f") menghasilkan grafik fungsi tersebut.

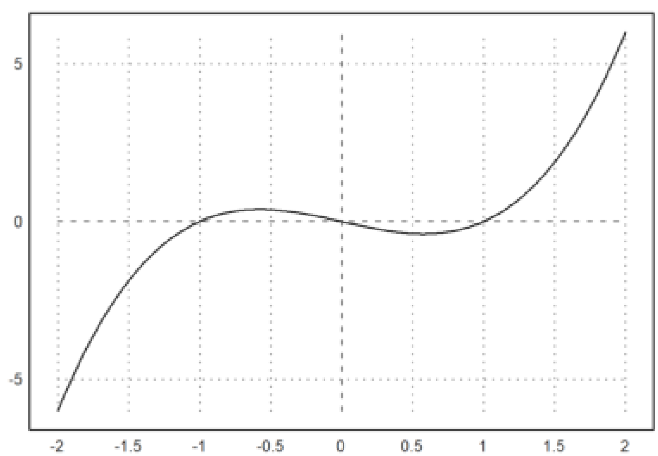
Berikut adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsi.

Catatan: Jika anda mengakhiri baris perintah dengan titik dua ":", plot akan dimasukkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

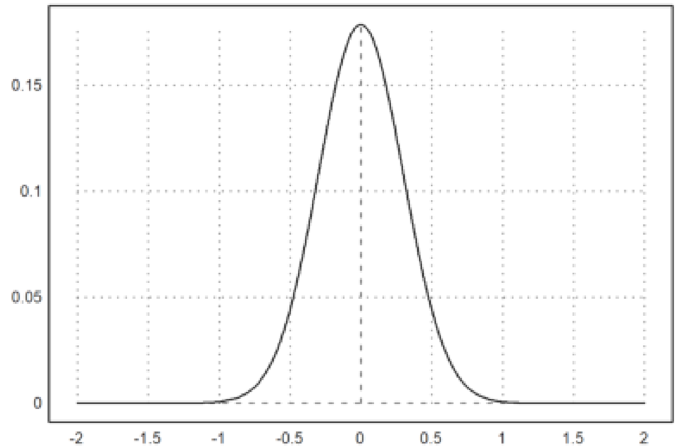
```
>plot2d("x^2"):
```




```
>aspect(1.5); plot2d("x^3-x"):
```



```
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil plot setinggi 25
```

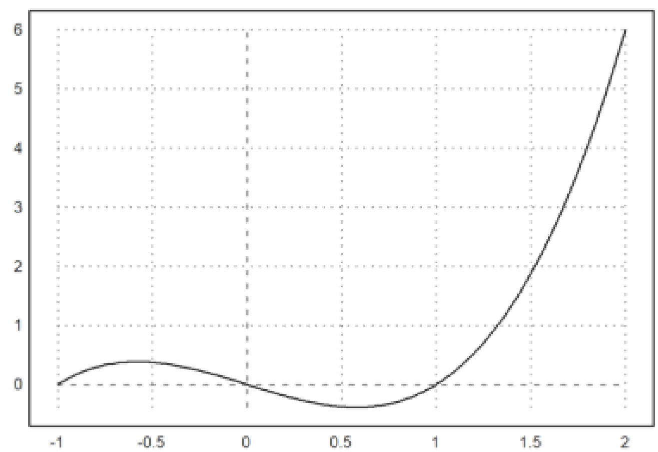


Dari beberapa contoh sebelumnya Anda dapat melihat bahwa aslinya gambar plot menggunakan sumbu X dengan rentang nilai dari -2 sampai dengan 2. Untuk mengubah rentang nilai X dan Y, Anda dapat menambahkan nilai-nilai batas X (dan Y) di belakang ekspresi yang digambar.

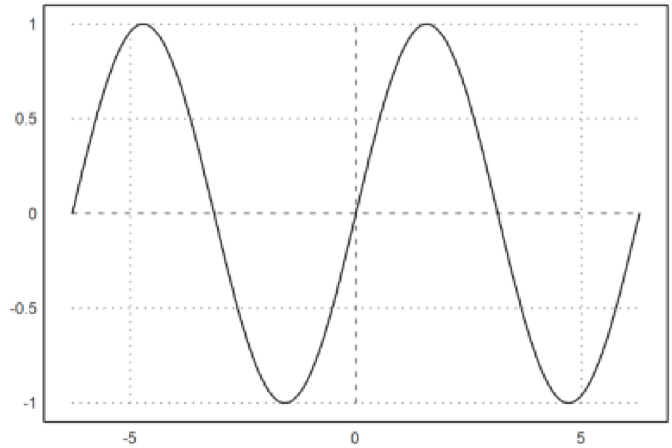
Rentang plot diatur dengan parameter yang ditetapkan berikut

- a,b: x-range (default -2,2)
- c,d: y-range (default: skala dengan nilai)
- r: sebagai alternatif radius di sekitar pusat plot
- cx,cy: koordinat pusat plot (default 0,0)

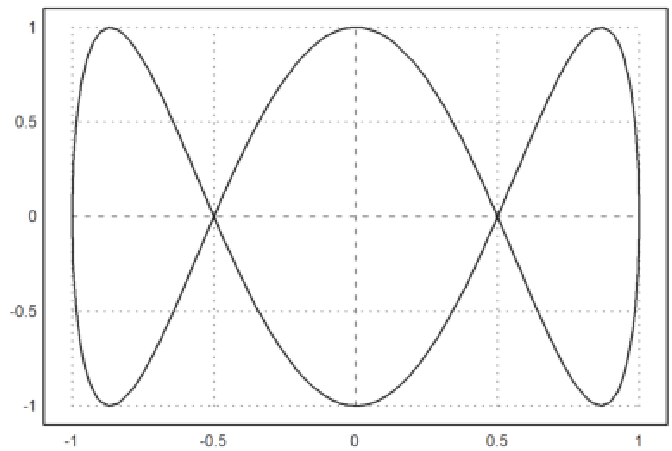
```
>plot2d("x^3-x",-1,2):
```




```
>plot2d("sin(x)",-2*pi,2*pi): // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]
```




```
>plot2d("cos(x)","sin(3*x)",xmin=0,xmax=2pi):
```



Alternatif untuk titik dua adalah perintah insimg(lines), yang menyisipkan plot menempati sejumlah baris teks tertentu.

Dalam opsi, plot dapat diatur untuk muncul

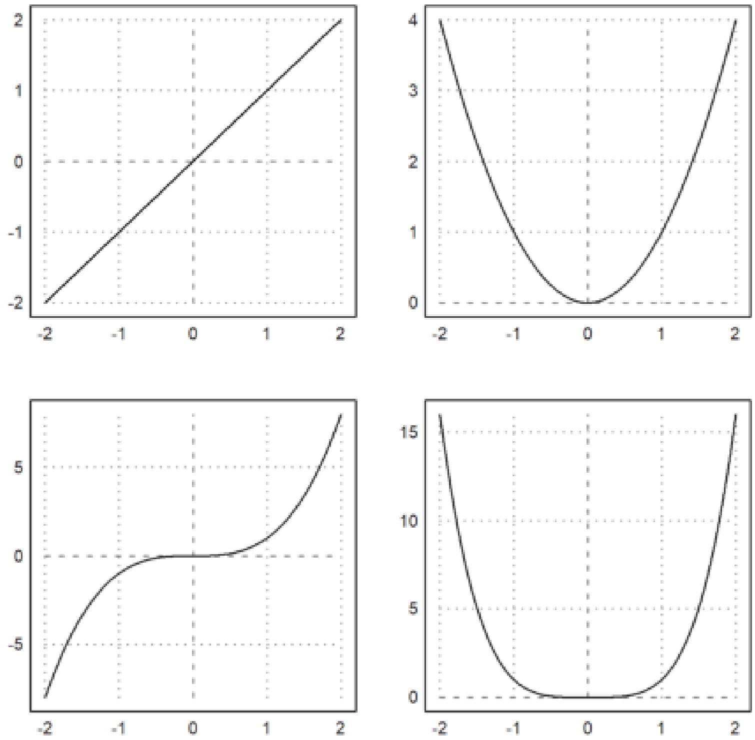
- di jendela yang dapat diubah ukurannya,
- di jendela notebook

Lebih banyak gaya yang dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.

Bagaimanapun, tekan tombol tabulator untuk melihat plot jika disembunyikan.

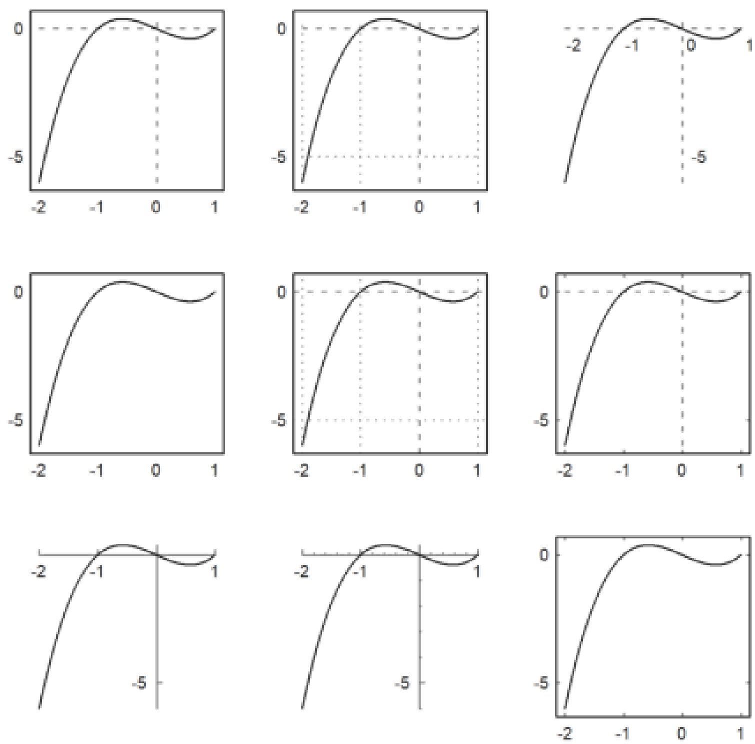
Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Dalam contoh, kita memplot x^1 hingga x^4 menjadi 4 bagian jendela. figure(0) mengatur ulang jendela default.

```
>reset;
>figure(2,2); ...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end; ...
>figure(0):
```



Dalam plot2d(), ada gaya alternatif yang tersedia dengan grid=x. Untuk gambaran umum, kita tunjukkan berbagai gaya kisi dalam satu gambar (lihat di bawah untuk perintah figure()). Gaya grid=0 tidak disertakan. Ini menunjukkan tidak ada grid dan tidak ada bingkai.

```
>figure(3,3); ...
>for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; ...
>figure(0):
```

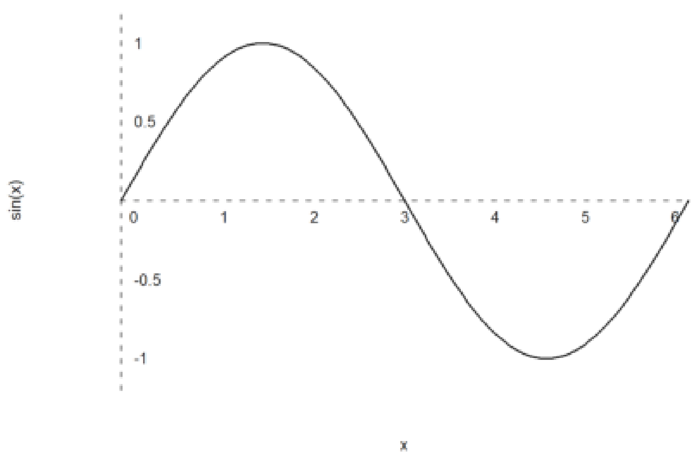


Jika argumen ke plot2d() adalah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka ini adalah rentang x dan y untuk plot.

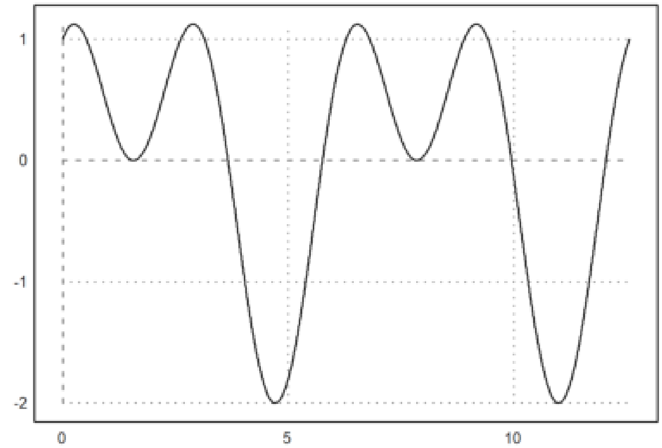
Atau, a, b, c, d dapat ditentukan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=... dll.

Dalam contoh berikut, kita ubah gaya kisi, menambahkan label, dan menggunakan label vertikan untuk sumbu y.

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi,-1.2,1.2,grid=3,xl="x",yl="sin(x)"):
```




```
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)",0,4pi):
```

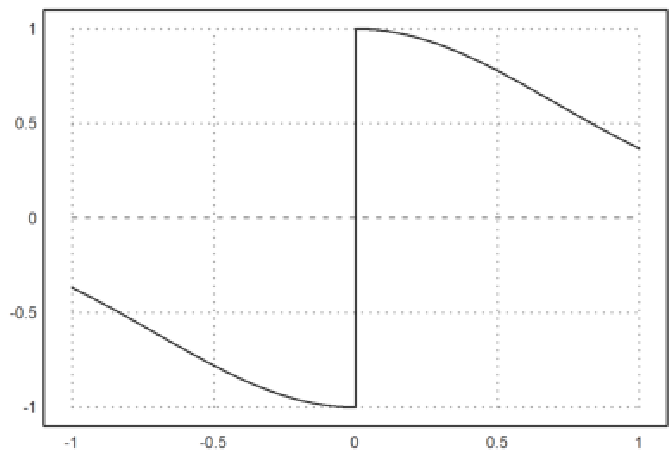


Gambar yang dihasilkan dengan memasukkan plot ke dalam jendela teks disimpan di direktori yang sama dengan notebook, secara default di subdirektori bernama "images". Mereka juga digunakan oleh ekspor HTML.

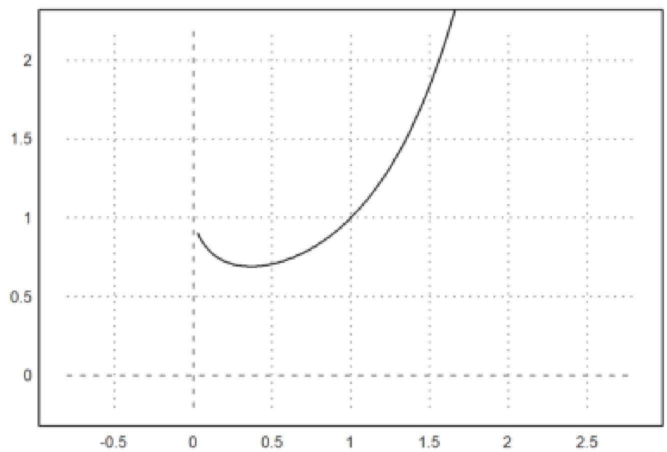
Anda cukup menandai gambar apa saja dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi di menu File.

Fungsi atau ekspresi dalam plot2d dievaluasi secara adaptif. Untuk kecepatan lebih, matikan plot adaptif dengan <adaptive dan tentukan jumlah subinterval dengan n=.... Ini hanya diperlukan dalam kasus yang jarang terjadi.

```
>plot2d("sign(x)*exp(-x^2)",-1,1,<adaptive,n=10000):
```

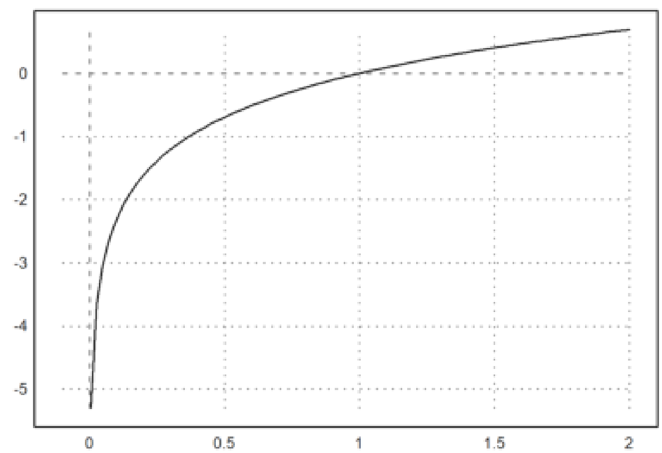



```
>plot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1):
```



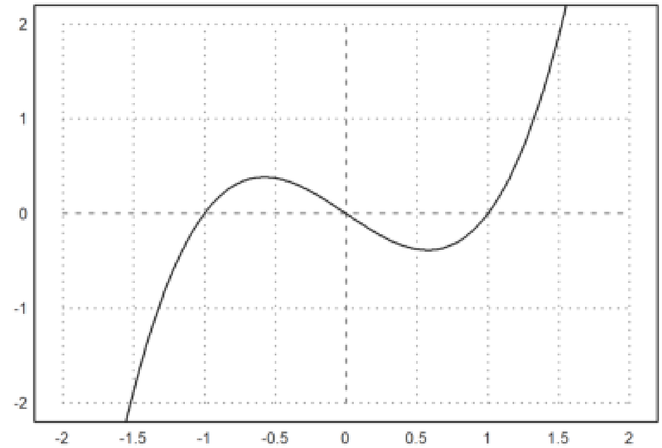
Perhatikan bahwa x^x tidak didefinisikan untuk x<=0. Fungsi plot2d menangkap kesalahan ini, dan mulai merencanakan segera setelah fungsi didefinisikan. Ini berfungsi untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN keluar dari jangkauan definisinya.

```
>plot2d("log(x)",-0.1,2):
```

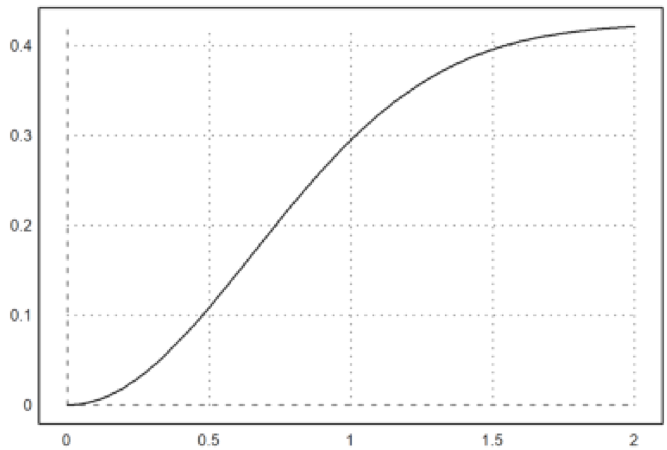


Parameter square=true (atau>square) memilih rentang y secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan ruang persegi di dalam jendela plot.

```
>plot2d("x^3-x",>square):
```

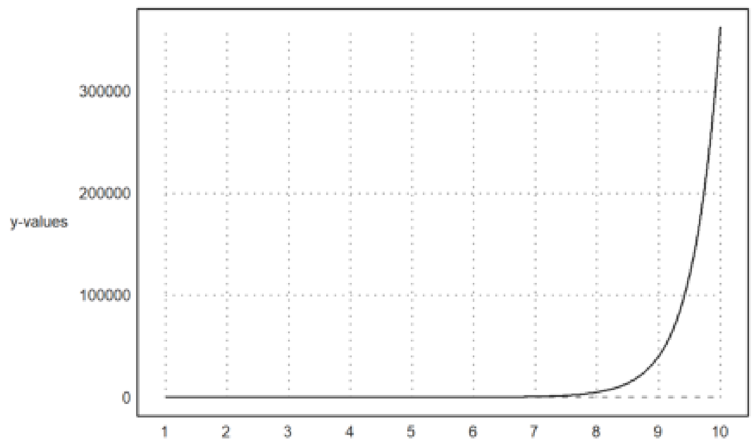



```
>plot2d(''integrate("sin(x)*exp(-x^2)",0,x)'',0,2): // plot integral
```



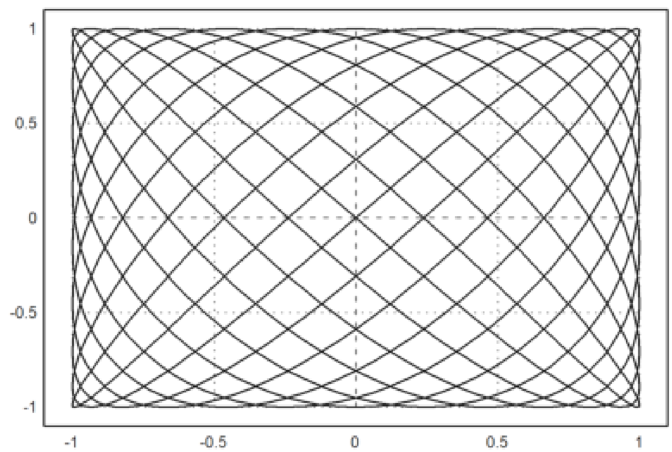
Jika Anda membutuhkan lebih banyak ruang untuk label y, panggil shrinkwindow() dengan parameter yang lebih kecil, atau tetapkan nilai positif untuk "lebih kecil" di plot2d().

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):
```

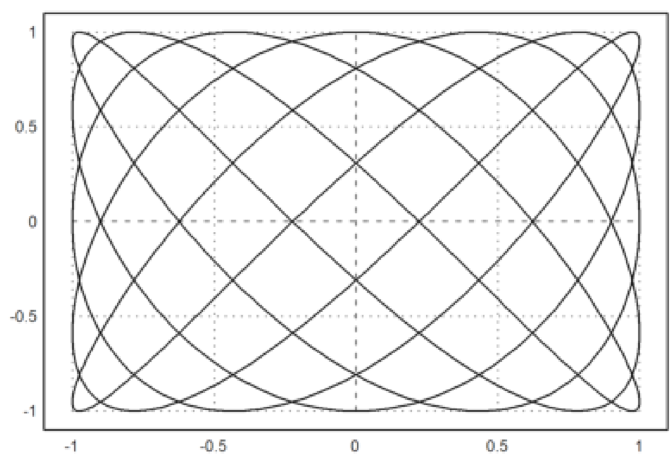


Ekspresi simbolik juga dapat digunakan, karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

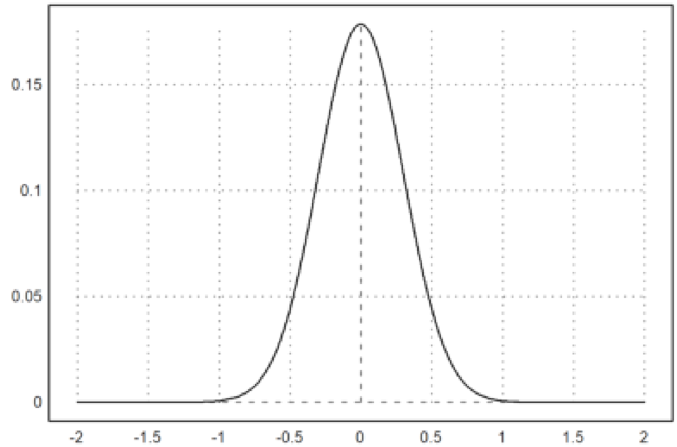
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(10x),cos(13x)):
```



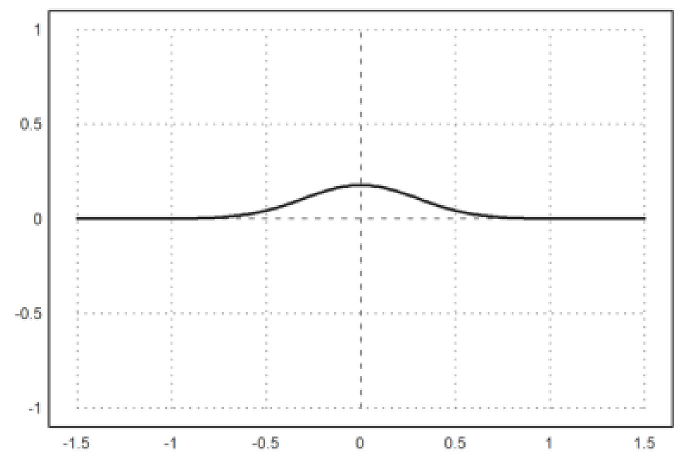

```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):
```



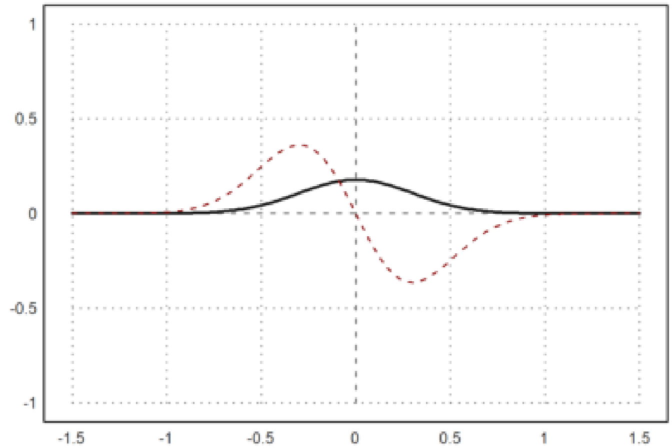
```
>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // mendefinisikan ekspresi
>plot2d(expr,-2,2): // plot dari -2 hingga 2
```



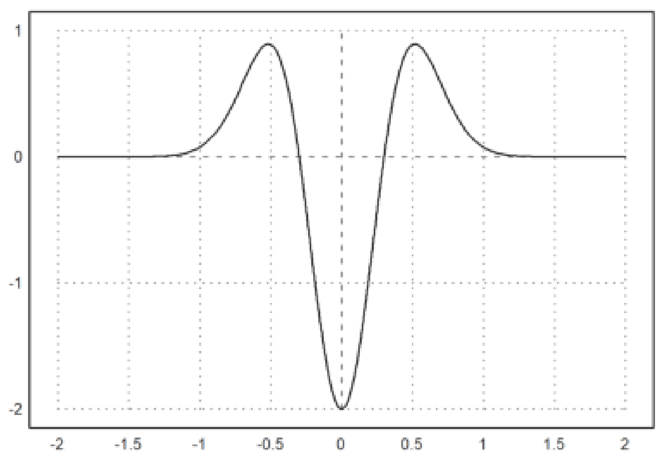

```
>plot2d(expr,r=1,thickness=2): // plot di sekitar persegi (0,0)
```



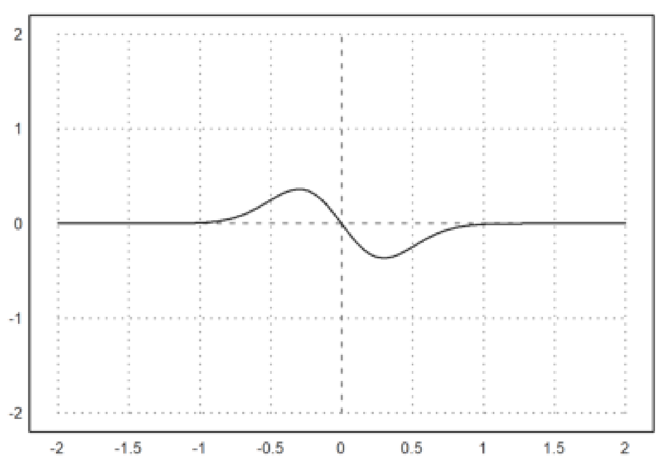

```
>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="--",color=red): // menambahkan plot lain (dalam hal ini
```



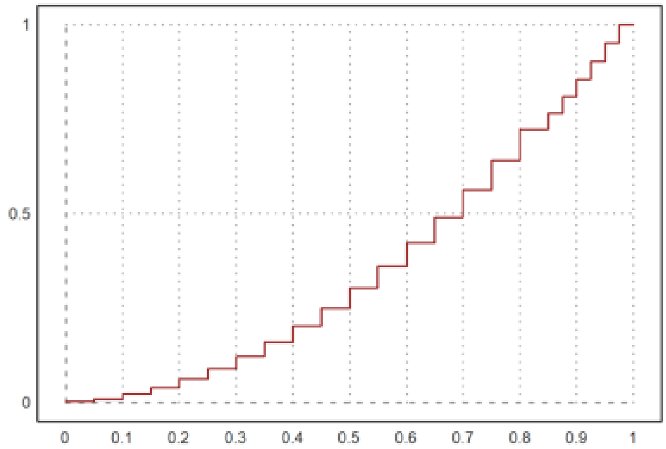

```
>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1): // plot dalam persegi panjang
```



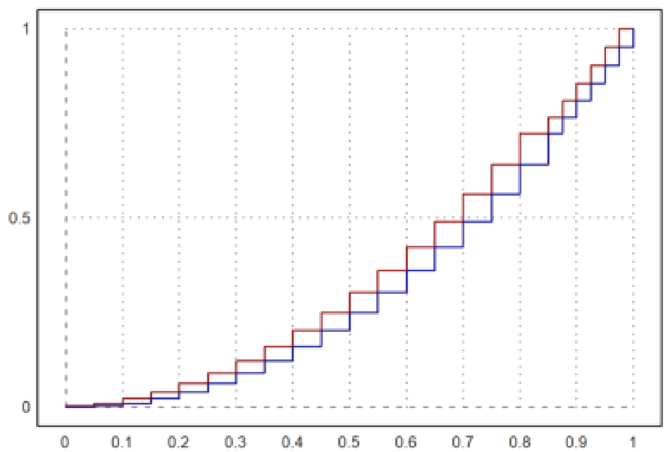

```
>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square): // menyimpan plot persegi
```



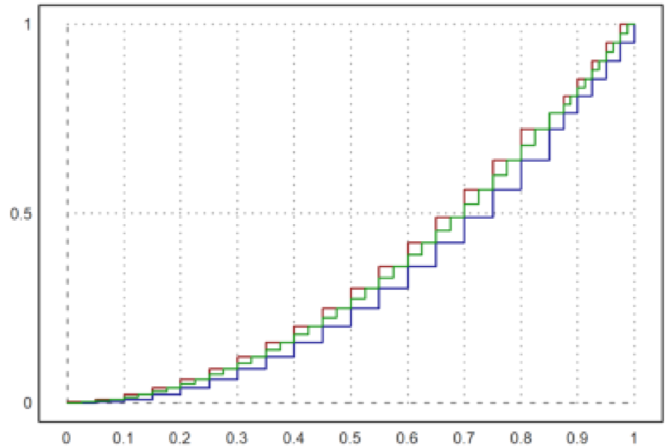
```
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10): // plot membentuk anak tangga
```




```
>plot2d("x^2",>add,steps=2,color=blue,n=10): // plot membentuk DNA
```




```
>plot2d("x^2",>add,steps=10,color=green,n=20):
```



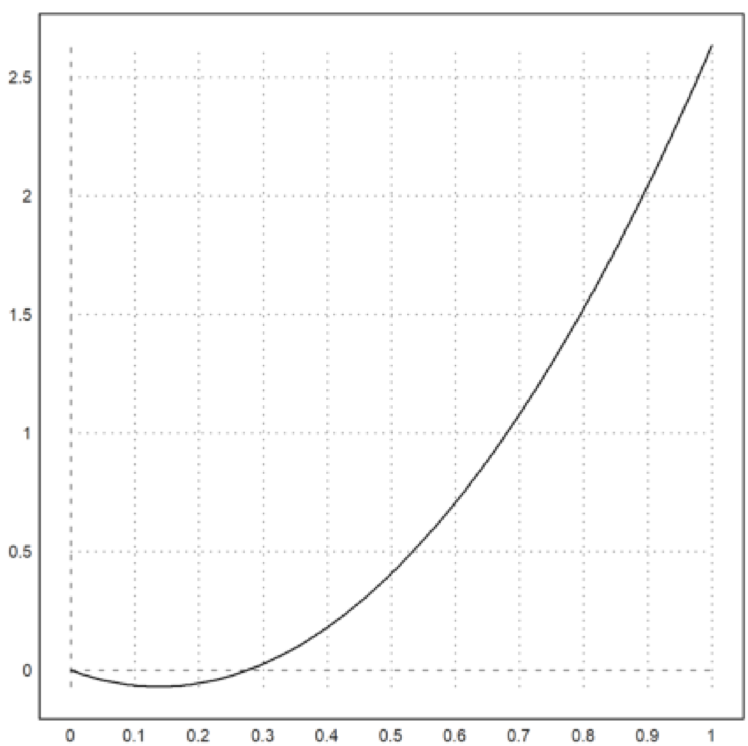

```
>reset;
```

Fungsi dalam satu Parameter

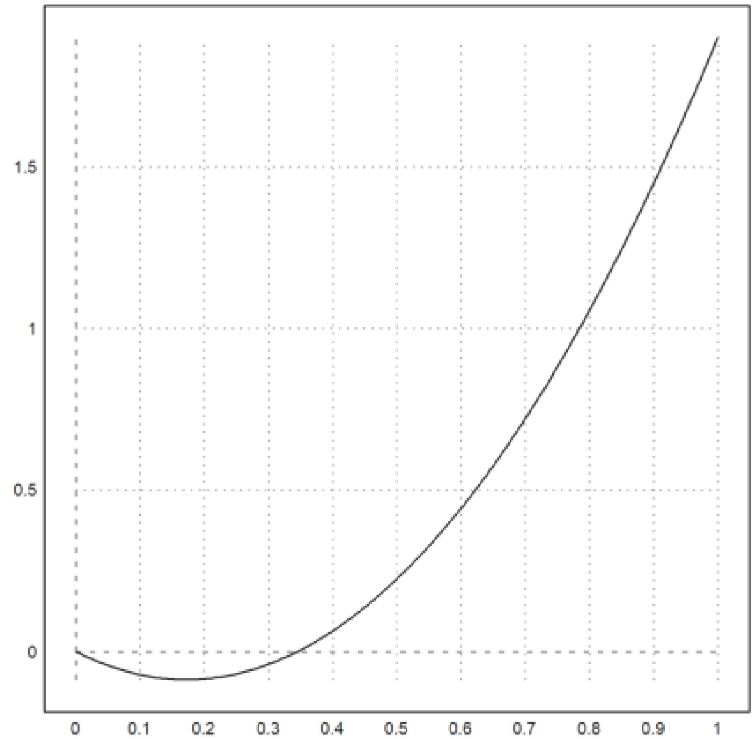
Fungsi plot yang paling penting untuk plot nalar adalah plot2d(). Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler dalam file "plot.e", yang dimuat di awal program.

Berikut adalah beberapa contoh menggunakan fungsi. Seperti biasa di EMT, fungsi yang berfungsi untuk fungsi atau ekspresi lain, Anda dapat meneruskan parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan kumpulan panggilan.

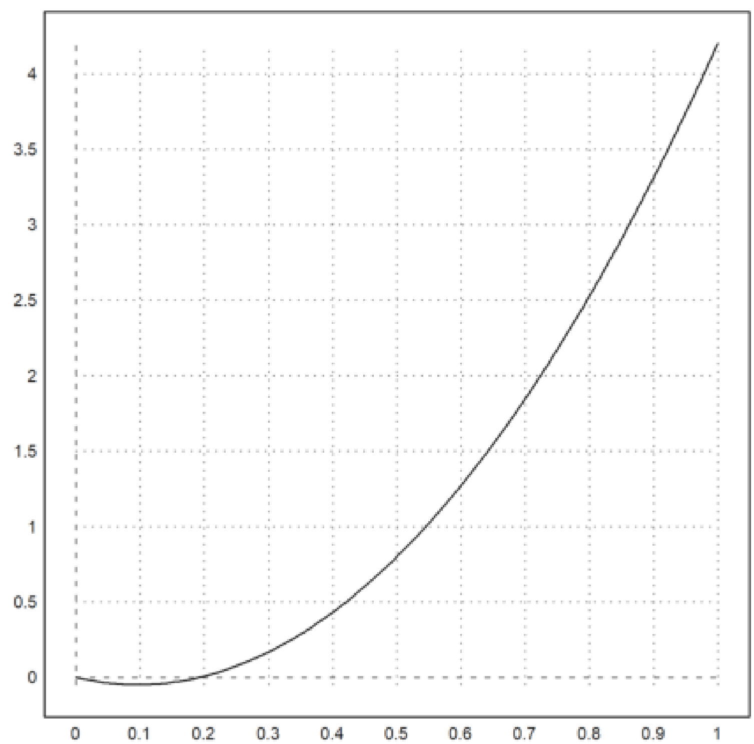
```
>function f(x,a) := x^2/a+a*x^2-x; // mendefinisikan fungsi
>a=0.3; plot2d("f",0,1;a): // plot dengan a=0.3
```



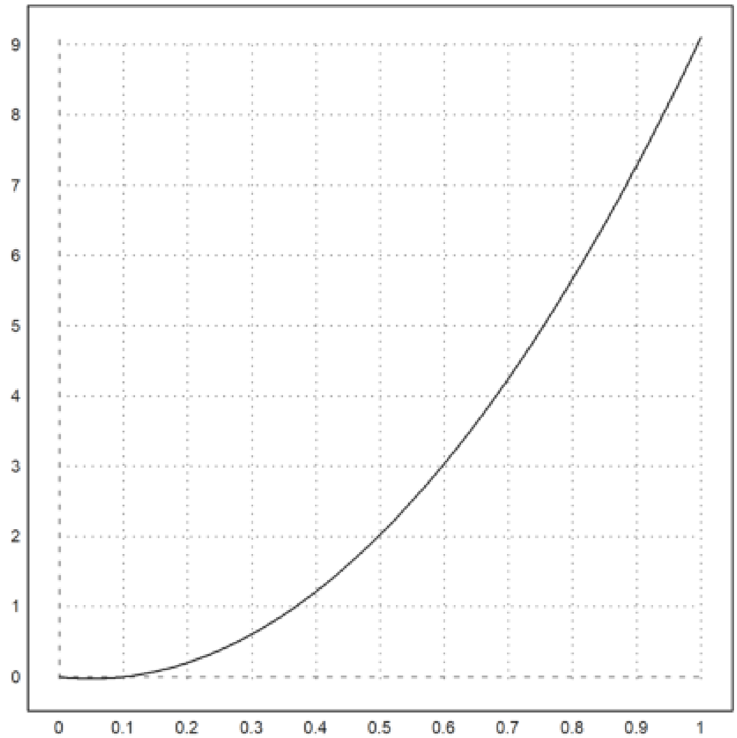
```
>plot2d("f",0,1;0.4): // plot dengan a=0.4
```



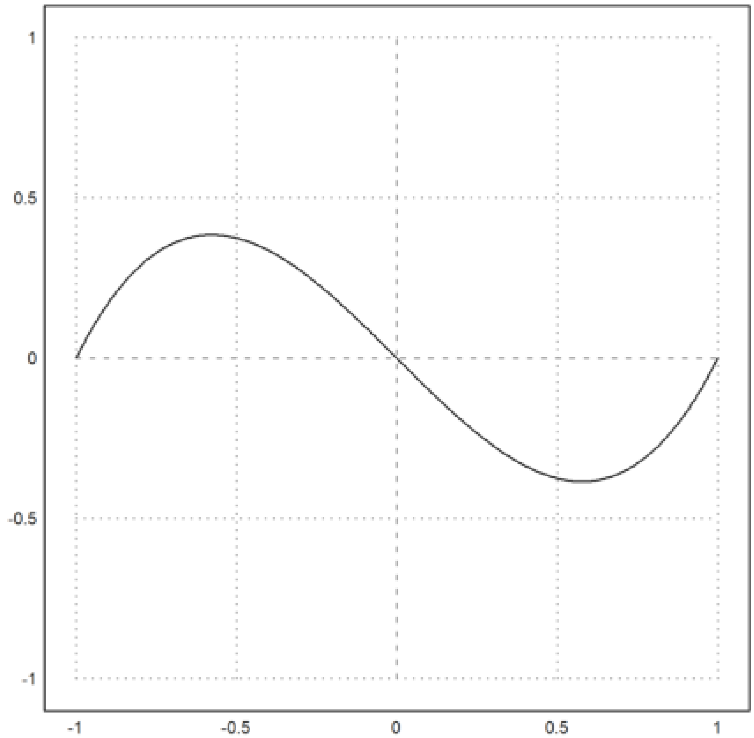

```
>plot2d({{"f",0.2}},0,1): // plot dengan a=0.2
```



```
>plot2d({{"f(x,b)",b=0.1}},0,1): // plot dengan b=0.1
```




```
>function f(x) := x^3-x; ...
>plot2d("f",r=1):
```



Berikut adalah ringkasan dari fungsi yang diterima

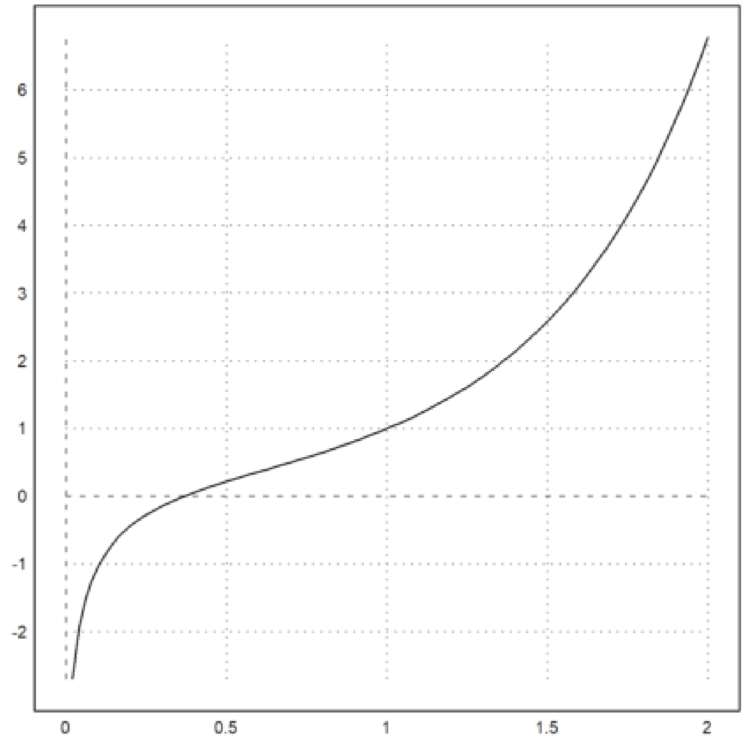
- ekspresi atau ekspresi simbolik dalam x
- fungsi atau fungsi simbolik dengan nama sebagai "f"
- fungsi simbolik hanya dengan nama f

Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolik. Untuk fungsi simbolik, nama saja yang berfungsi.

```
>function f(x) &= diff(x^x,x)
```

```
                                 x
                                x   (log(x) + 1)
```

```
>plot2d(f,0,2):
```

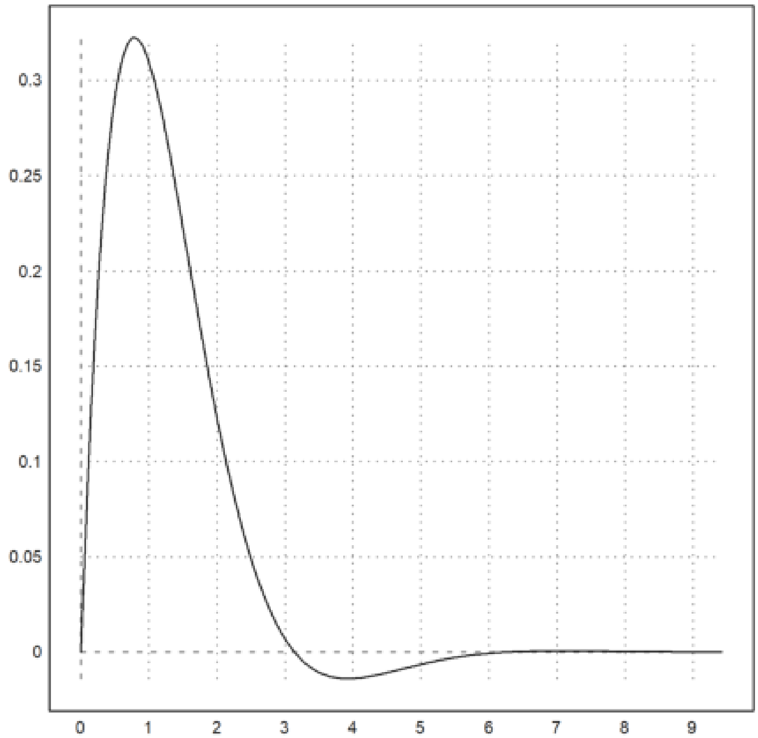


Tentu saja, untuk ekspresi atau ekspresi simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

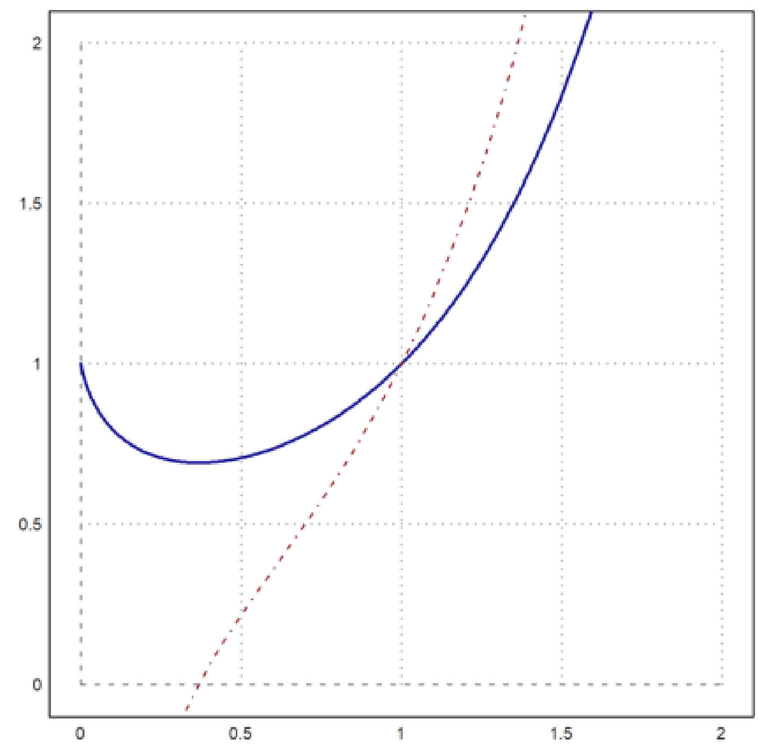
```
>expr &= sin(x)*exp(-x)
```

```
                                 - x
                                E    sin(x)
```

```
>plot2d(expr,0,3pi):
```




```
>function f(x) &= x^x;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2);
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):
```



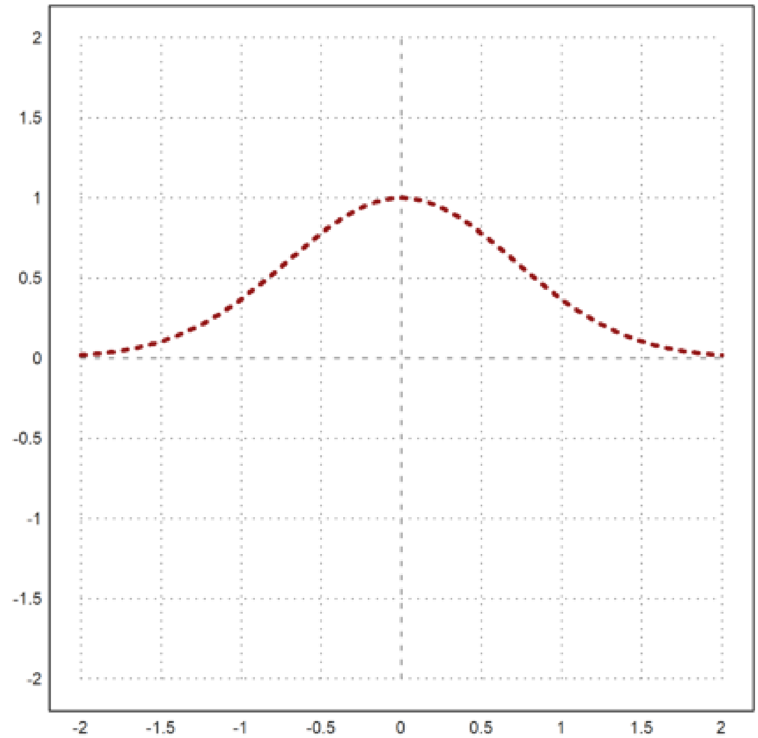
Untuk gaya garis ada berbagai variasi opsi.

- style="...". Pilih dari "-", "–", "-.", ".", ".-.", "-.-".
- color: Lihat di bawah untuk warna.
- thickness: Default adalah 1.

Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.

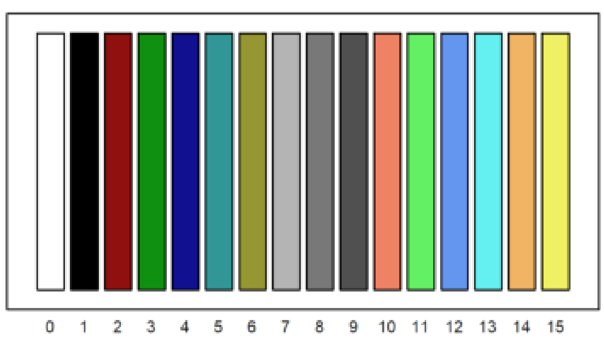
- 0..15: indeks warna default.
- konstanta warna: white, black, red, green, blue, cyan, olive, lightgray, gray, darkgray, orange, lightgreen, turquoise, lightblue, lightorange, yellow
- rgb(red,green,blue): parameternya adalah real di [0,1].

```
>plot2d("exp(-x^2)",r=2,color=red,thickness=3,style="--"):
```



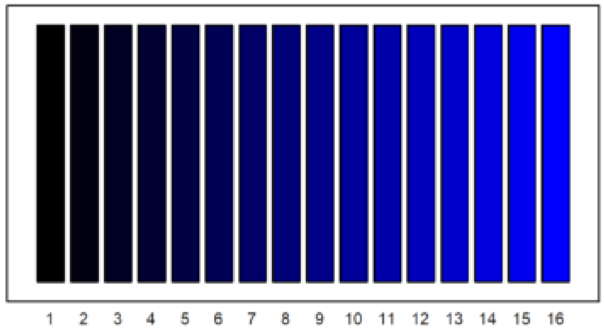
Berikut adalah tampilan warna EMT yang telah ditentukan sebelumnya.

```
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16),lab=0:15,grid=0,color=0:15):
```



Tapi Anda bisa menggunakan warna apa saja.

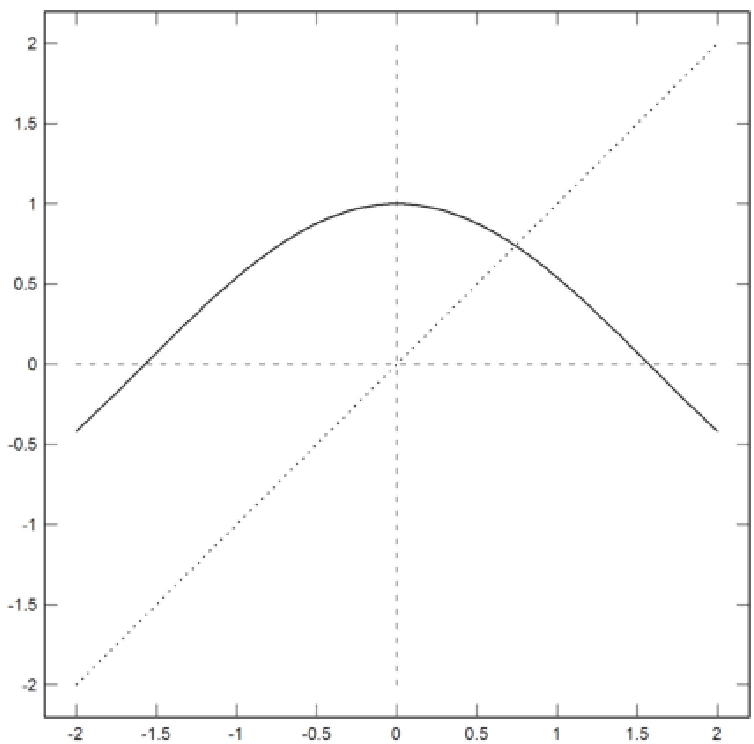
```
>columnsplot(ones(1,16),grid=0,color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))):
```



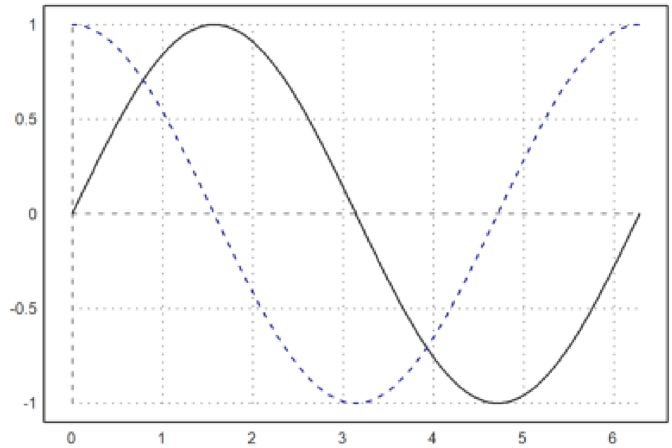
Menggambar Beberapa Kurva pada bidang koordinat yang sama

Plot lebih dari satu fungsi (multi fungsi) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu metodenya menggunakan >add untuk beberapa panggilan ke plot2d secara keseluruhan, tetapi panggilan pertama. Kita telah menggunakan fitur ini dalam contoh di atas.

```
>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):
```

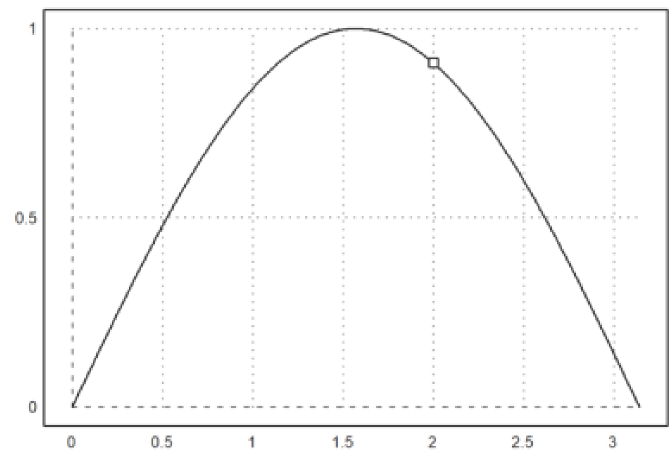


```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="--",>add):
```



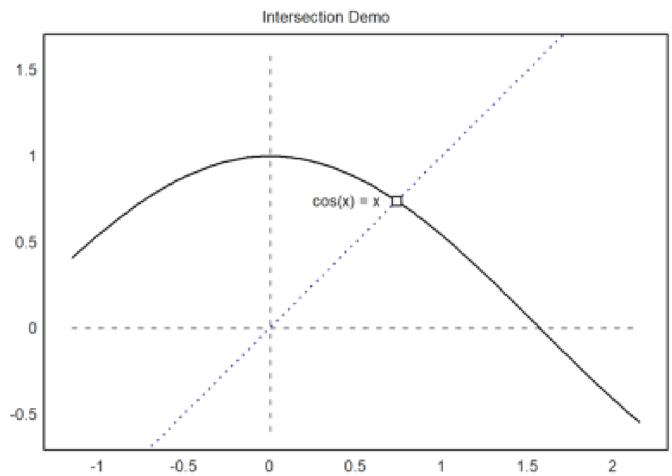
Salah satu kegunaan >add adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

```
>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):
```



Kita telah menambahkan titik potong dengan label (pada posisi "cl" untuk kiri tengah), dan memasukkan hasilnya ke dalam notebook. Kita juga telah menambahkan judul ke plot.

```
>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...
>  color=[black,blue],style=["-","."], ...
>  grid=1);
>x0=solve("cos(x)-x",1);  ...
>  plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo");  ...
>  label("cos(x) = x",x0,x0,pos="cl",offset=20):
```



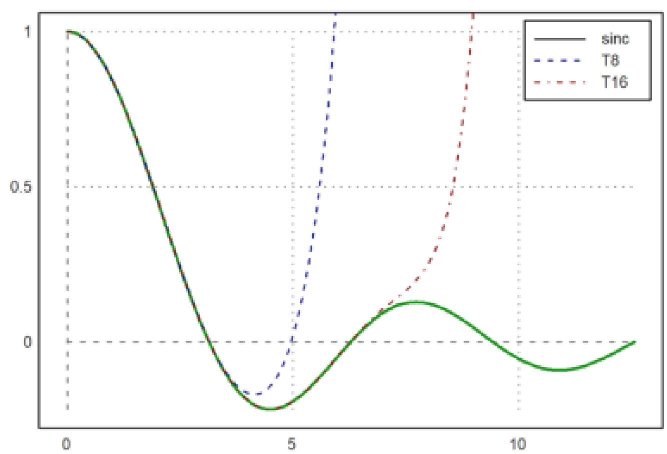
Dalam demo berikut, kita memplot fungsi sinc(x)=sin(x)/x dan ekspresi Taylor ke-8 dan ke-16. Kita hitung ekspansi ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolik. Plot ini dilakukan dalam perintah multi baris berikut dengan tiga panggilan ke plot2d(). Yang kedua dan yang ketiga memiliki set flaf>add, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.

Kita tambahkan kotak label yang menjelaskan fungsi.

```
>$taylor(sin(x)/x,x,0,4)
```

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

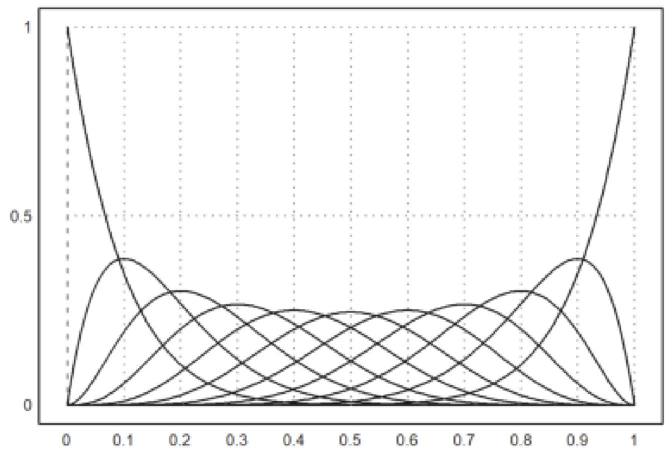
```
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-.-"); ...
>  labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=["-","--","-.-"], ...
>    colors=[black,blue,red]):
```



Dalam contoh berikut, kita menghasilkan Bernstein-Polinomial.

$$B_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

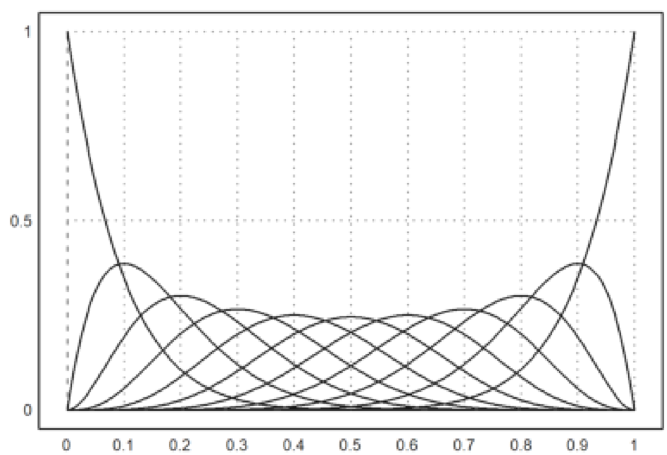
```
>plot2d("(1-x)^10",0,1); // plot fungsi pertama
>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i)",>add); end;
>insimg;
```



Metode kedua menggunakan pasangan matriks nilai-x dan matriks nilai-y dari ukuran yang sama.

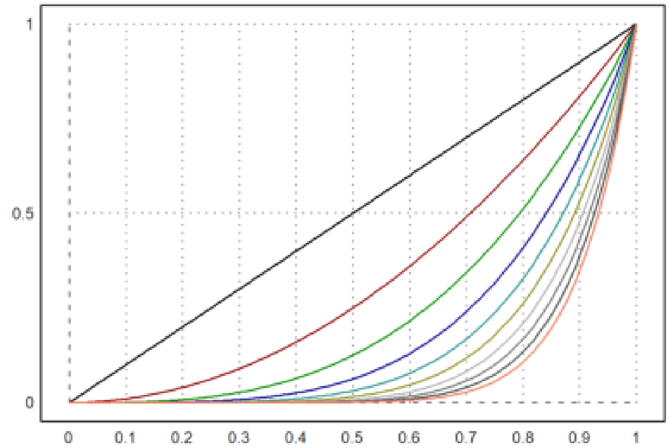
Kita hasilkan matriks nilai dnegan satu Bernstein-Polynomial di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihat pengantar tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih detail.

```
>x=linspace(0,1,500);
>n=10; k=(0:n)'; // n adalah vektor baris, k adalah vektor kolom
>y=bin(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k); // y adalah matriks maka
>plot2d(x,y):
```



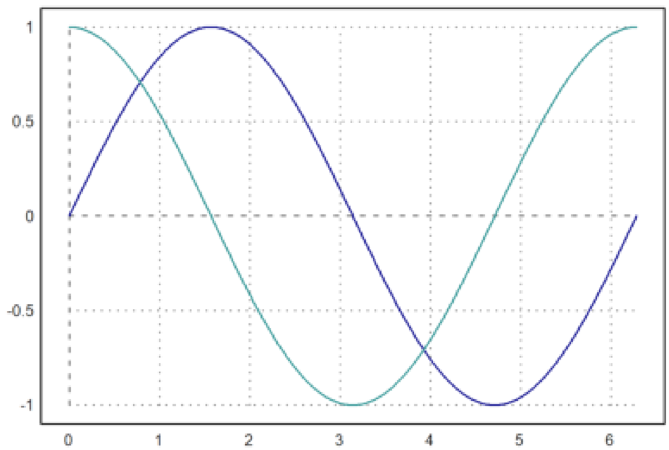
Perhatikan bahwa parameter warna dapat berupa vektor. Kemudian setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

```
>x=linspace(0,1,200); y=x^(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):
```

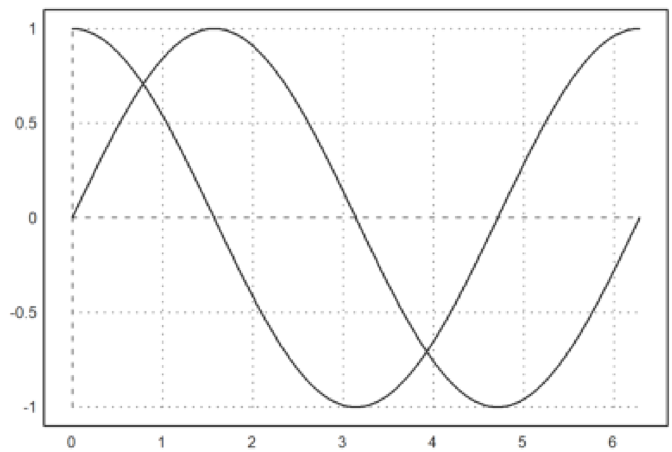


Metode lain adalah menggunakan vektor ekspresi (string). Anda kemudian dapat menggunakan larik warna, larik gaya, dan larik ketebalan dengan panjang yang sama.

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=4:5):
```




```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi): // plot ekspresi vektor
```



Kita bisa mendapatkan vektor seperti itu dari Maxima menggunakan makelist() dan mxm2str().

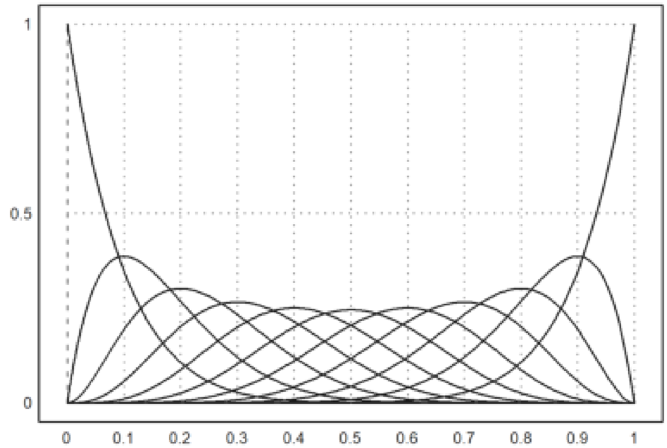
```
>v &= makelist(binomial(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i),i,0,10) // membuat list
```

```
               10             9                8   2              7   3
       [(1 - x)   , 10 (1 - x)   x, 45 (1 - x)   x , 120 (1 - x)   x ,
           6   4              5   5              4   6              3   7
 210 (1 - x)   x , 252 (1 - x)   x , 210 (1 - x)   x , 120 (1 - x)   x ,
          2   8             9   10
 45 (1 - x)   x , 10 (1 - x) x , x   ]
```

```
>mxm2str(v) // mendapatkan vektor string dari vektor simbolik
```

```
 (1-x)^10
 10*(1-x)^9*x
 45*(1-x)^8*x^2
 120*(1-x)^7*x^3
 210*(1-x)^6*x^4
 252*(1-x)^5*x^5
 210*(1-x)^4*x^6
 120*(1-x)^3*x^7
 45*(1-x)^2*x^8
 10*(1-x)*x^9
 x^10
```

```
>plot2d(mxm2str(v),0,1): // plot fungsi
```

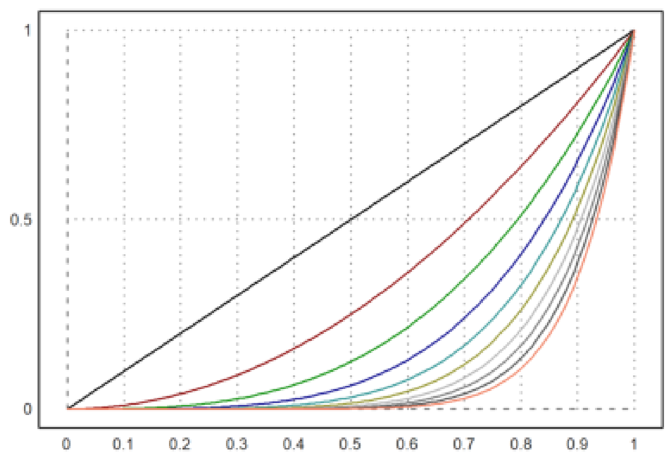


Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.

Jika ekspresi menghasilkan matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi ini akan diplot ke dalam satu plot.

Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika larik warna ditambahkan, itu akan digunakan untuk setiap baris plot.

```
>n=(1:10)'; plot2d("x^n",0,1,color=1:10):
```

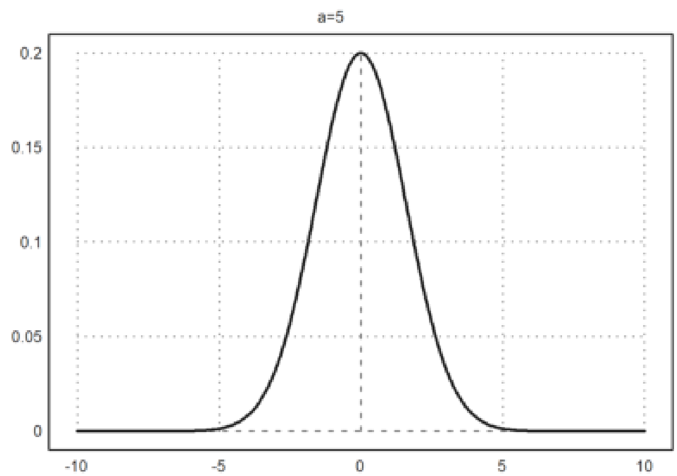


Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan meneruskan parameter ini sebagai parameter titik koma.

Berhati-hatilah, untuk meletakkan semua parameter yang ditetapkan di akhir perintah plot2d. Dalam contoh kita meneruskan a=5 ke fungsi f, yang kita plot dari -10 hingga 10.

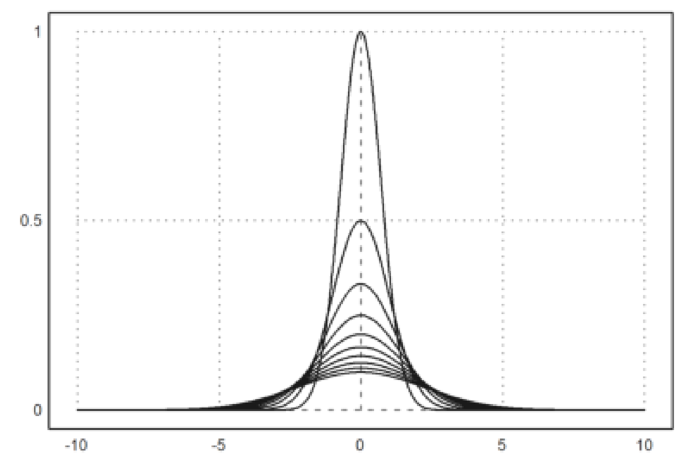
```
>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...
>plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5"):
```



Atau, gunakan kumpulan dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut kumpulan panggilan, dan itu adalah cara yang lebih disukai untuk meneruskan argumen ke fungsi yang dengan sendirinya diteruskan sebagai argumen ke fungsi lain.

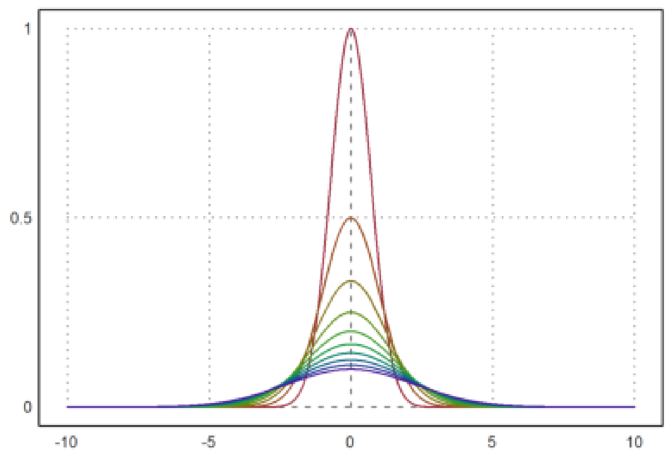
Dalam contoh berikut, kita gunakan loop untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman untuk loop).

```
>plot2d({{"f",1}},-10,10); ...
>for a=2:10; plot2d({{"f",a}},>add); end:
```



Kita dapat mencapai hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahas matriks EMT. Setiap baris matriks f(x,a) adalah satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasannya.

```
>x=-10:0.01:10; a=(1:10)'; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10)):
```



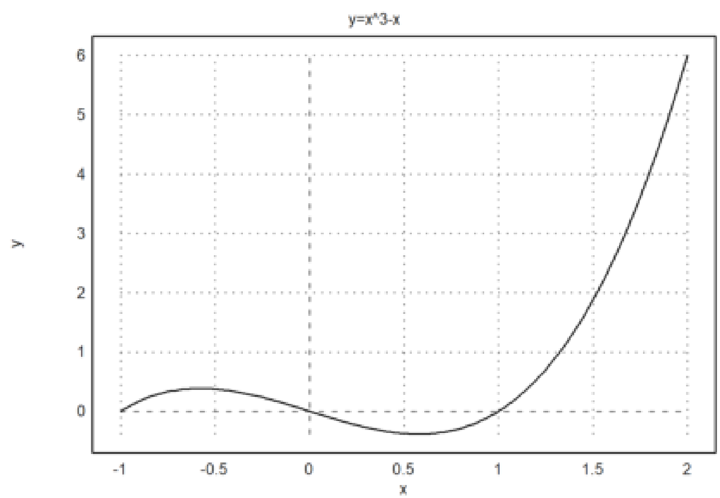
Label Teks

Dekorasi sederhana dapat berupa

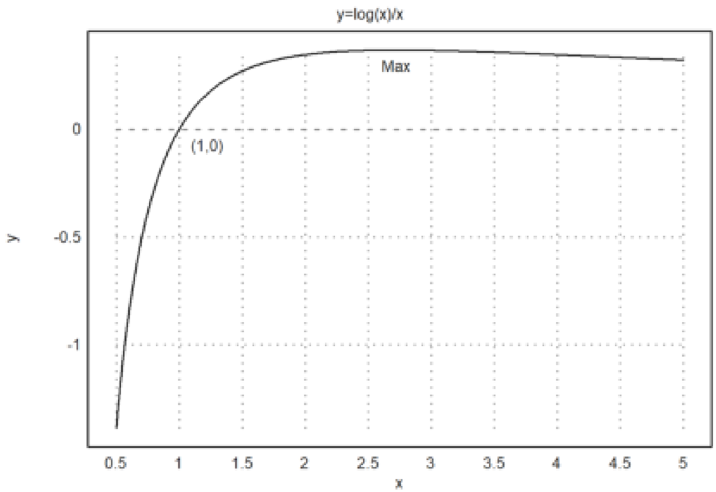
- sebuah judul dengan title="..."
- label x dan y dengan xl="...", yl="..."
- label teks lain dengan label("...",x,y)

Perintah label akan memplot ke plot saat ini pada koordinat plot(x,y). Itu mengambil argumen posisi.

```
>plot2d("x^3-x",-1,2,title="y=x^3-x",yl="y",xl="x"):
```

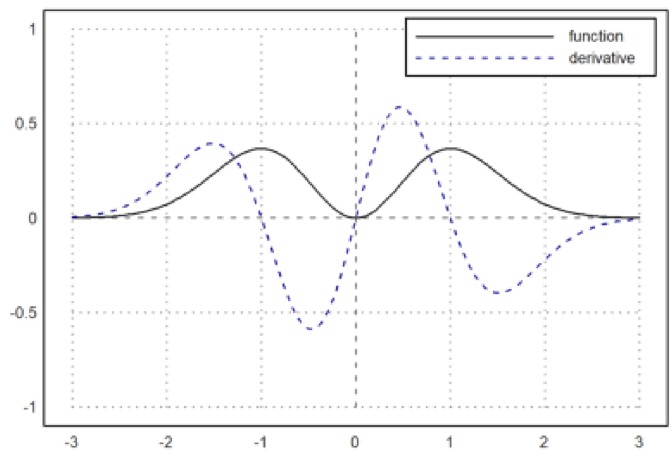



```
>expr := "log(x)/x"; ...
>  plot2d(expr,0.5,5,title="y="+expr,xl="x",yl="y"); ...
>  label("(1,0)",1,0); label("Max",E,expr(E),pos="lc"):
```



Ada juga fungsi labelbox(), yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Dibutuhkan vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

```
>function f(x) &= x^2*exp(-x^2);  ...
>plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1);  ...
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="--"); ...
>labelbox(["function","derivative"],styles=["-","--"], ...
>   colors=[black,blue],w=0.4):
```

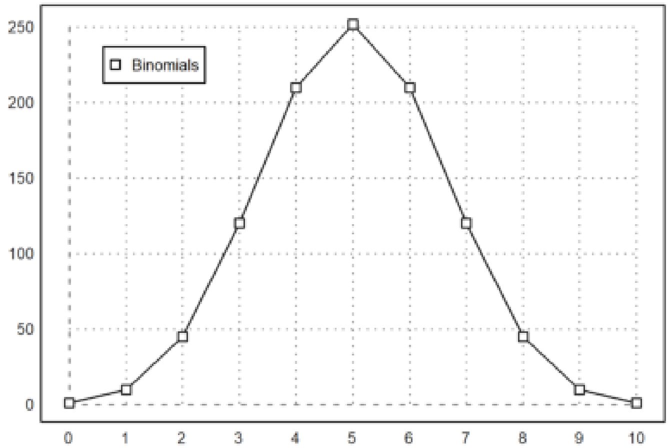


Kotak ditambatkan di kanan atas secara default, tetapi >left menambatkannya di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat yang Anda suka. Posisi jangkar adalah sudut kanan atas kotak, dan angkanya adalah pecahan dari ukuran jendela grafik. Lebarnya otomatis.

Untuk plot titik, kotak label juga berfungsi. Tambahkan parameter >points, atau vektor flag, satu untuk setiap label.

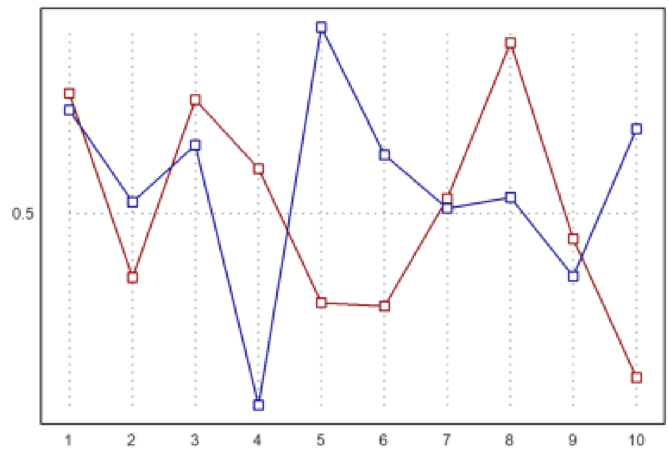
Dalam contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi kita bisa menggunakan string sebagai pengganti vektor string. Kita atur warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

```
>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); ...
>labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, ...
>tcolor=black,>left):
```



Gaya plot ini juga tersedia di statplot(). Seperti di plot2d() warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Ada lebih banyak plot khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

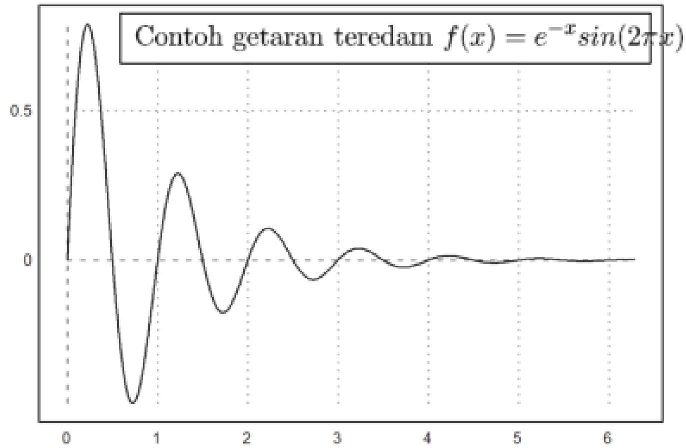
```
>statplot(1:10,random(2,10),color=[red,blue]):
```



Fitur serupa adalah fungsi textbox().

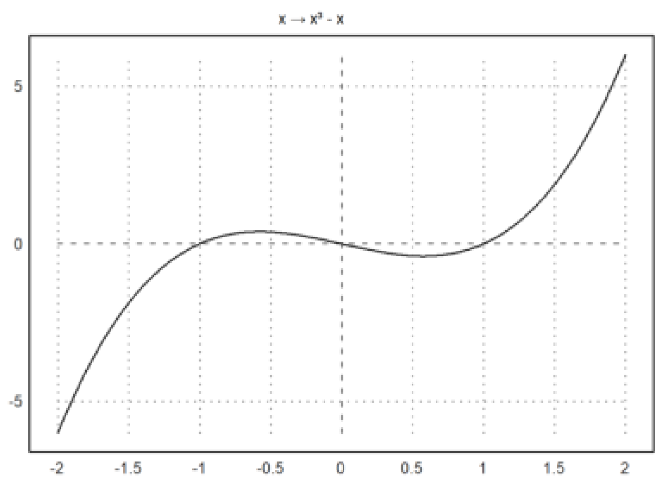
Lebar secara default adalah lebar maksimal dari baris teks. Tapi itu bisa diatur oleh pengguna juga.

```
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); ...
>plot2d("f(x)",0,2pi); ...
>textbox(latex("\text{Contoh getaran teredam}\ f(x)=e^{-x}sin(2\pi x)"),w=0.85):
```



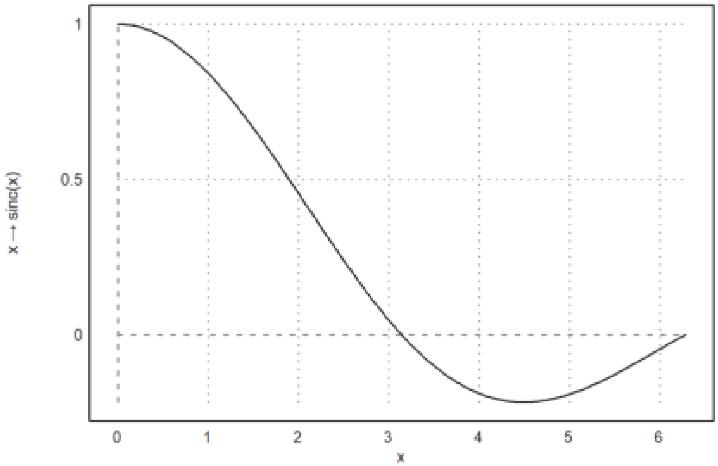
Label teks, judul, kotak label, dan teks lainnya dapat berisi string Unicode (lihat sintaks EMT untuk mengetahui lebih lanjut tentang string Unicode).

```
>plot2d("x^3-x",title=u"x &rarr; x&sup3; - x"):
```



Label pada sumbu-x dan sumbu-y bisa vertikal, begitu juga sumbunya.

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,xl="x",yl=u"x &rarr; sinc(x)",>vertical):
```



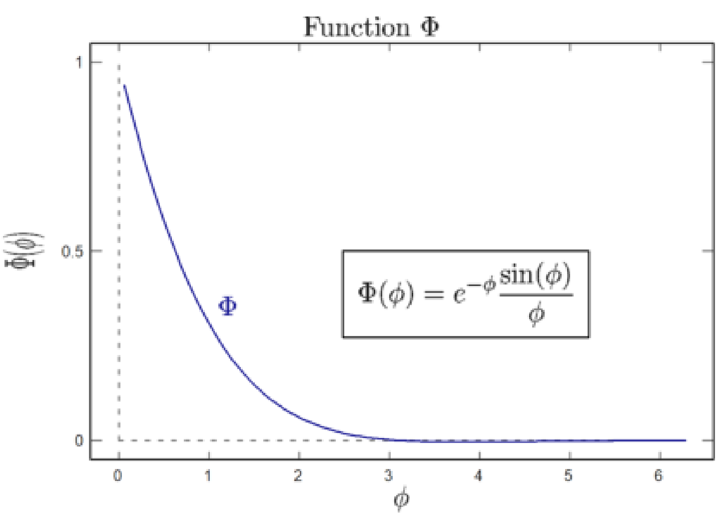
LaTeX

Anda juga dapat memplot rumus LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke biner "latex" dan "dviping" harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX di menu opsi.

Parhatikan bahwa penguraian LaTeX lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil latex() sebelum loop sekali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).

Dalam plot berikut, kita gunakan LaTeX untuk label-x dan label-y, label, kotak label, dan judul plot.

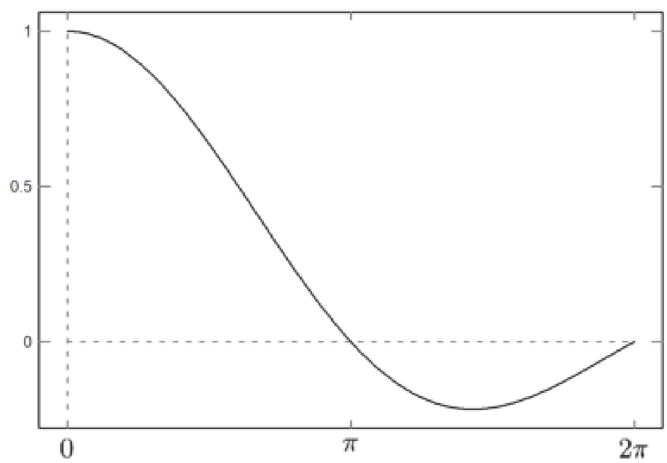
```
>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
>  title=latex("\text{Function $\Phi$}"), ...
>  xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)")); ...
>textbox( ...
>  latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
>label(latex("\Phi",color=blue),1,0.4):
```



Seringkali, kita menginginkan spasi dan label teks non-konformal pada sumbu-x. Kita dapat menggunakan xaxis() dan yaxis() seperti yang akan kita tunjukkan nanti.

Cara termudah adalah dengan membuat plot kosong dengan bingkai menggunakan grid=4, lalu menambahkan grid dengan ygrid() dan xgrid(). Dalam contoh berikutm kita gunakan tiga string LaTeX untuk label pada sumbu x dengan xtick().

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
>ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
>xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6);  ...
>xtick([0,pi,2pi],["0","\pi","2\pi"],>latex):
```



Tentu saja, fungsi juga dapat digunakan.

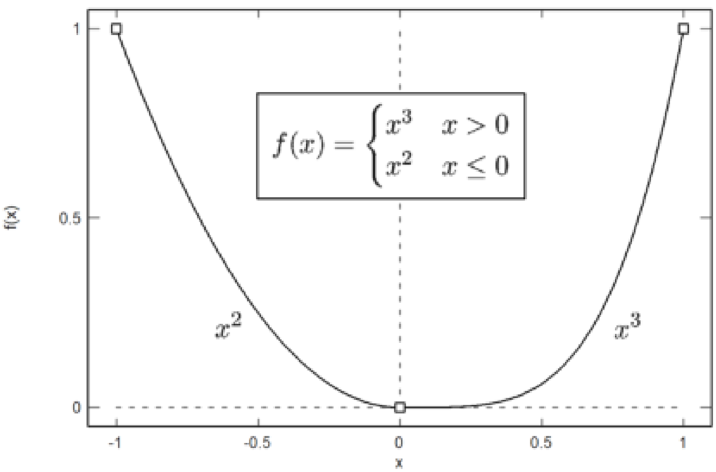
```
>function map f(x) ...
```

```
  if x>0 then return x^4
  else return x^2
  endif
  endfunction
```

Parameter "map" membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk plot, itu tidak perlu. Tetapu untuk menunjukkan bahwa vektorisasi berguna, kita tambahkan beberapa poin kunci ke plot di x=-1, x=0, dan x=1.

Pada plot berikut, kita juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kita gunakan untuk dua label dan kotak teks. Tentu saja, Anda hanya akan dapat menggunakan LaTeX jika anda telah menginstal LaTeX dengan benar.

```
>plot2d("f",-1,1,xl="x",yl="f(x)",grid=6);  ...
>plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...
>label(latex("x^3"),0.72,f(0.72)); ...
>label(latex("x^2"),-0.52,f(-0.52),pos="ll"); ...
>textbox( ...
>  latex("f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \le 0\end{cases}"), ...
>  x=0.7,y=0.2):
```



Interaksi Pengguna

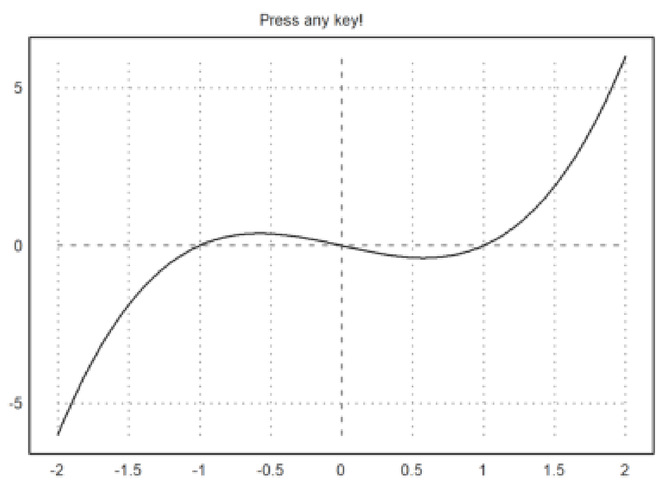
Saat merencanakan fungsi atau ekspresi, parameter >user memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol kursor atau mouse. Pengguna dapat

- memperbesar dengan + atau -
- memindahkan plot dengan tombol kursor
- memilih jendela plot dengan mouse
- mengatur ulang tampilan dengan spasi
- keluar dengan kembali

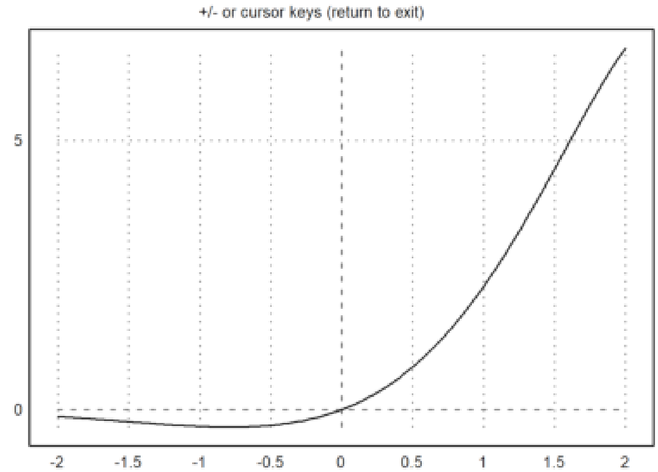
Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot asli.

Saat memplot data, flag >user hanya akan menunggu penekanan tombol.

```
>plot2d({{"x^3-a*x",a=1}},>user,title="Press any key!"):
```




```
>plot2d("exp(x)*sin(x)",user=true, ...
>  title="+/- or cursor keys (return to exit)"):
```



Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).

Fungsi bawaan mousedrag() menunggu event mouse atau keyboard. Ini melaporkan mouse ke bawah, mouse dipindahkan atau mouse ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi dragpoints() memanfaatkan ini, dan memungkinkan pengguna menyeret titik mana pun dalam plot.

Kita membutuhkan fungsi plot terlebih dahulu. Sebagai contoh, kita interpolasi dalam 5 titik dengan polinomial. Fungsi harus diplot ke area plot tetap.

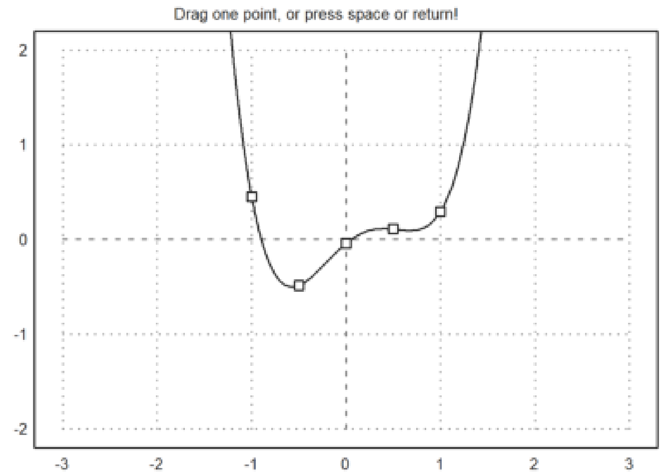
```
>function plotf(xp,yp,select) ...
```

```
    d=interp(xp,yp);
    plot2d("interpval(xp,d,x)";d,xp,r=2);
    plot2d(xp,yp,>points,>add);
    if select>0 then
      plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add);
    endif;
    title("Drag one point, or press space or return!");
  endfunction
```

Catat parameter titik koma di plot2d(d dan xp), yang diteruskan ke evaluasi fungsi interp(). Tanpa ini, kita harus menulis fungsi plotinterp() terlebih dahulu, mengakses nilai secara global.

Sekarang kita menghasilkan beberapa nilai acak, dan membiarkan pengguna menyeret poin.

```
>t=-1:0.5:1; dragpoints("plotf",t,random(size(t))-0.5):
```



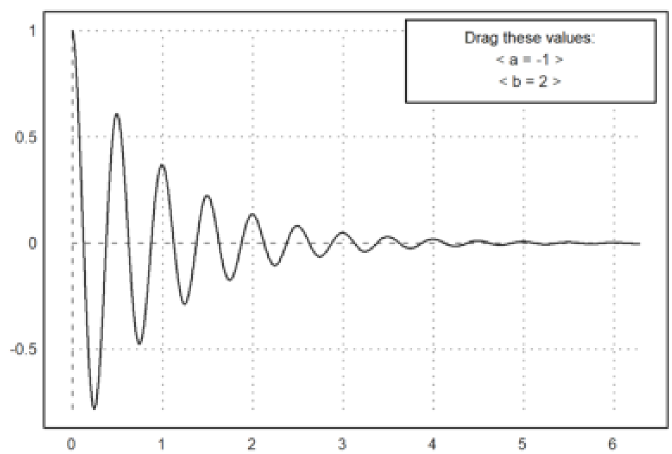
Ada juga fungsi, yang memplot fungsi lain tergantung pada vektor parameter, dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter ini.

Pertama kita membutuhkan fungsi plot.

```
>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)",0,2pi;a,b);
```

Kemudian kita membutuhkan nama untuk parameter, nilai awal dan matriks rentang nx2, opsional baris judul.
Ada slider interaktif, yang dapat mengatur nilai oleh pengguna. Fungsi dragvalues() menyediakan ini.

```
>dragvalues("plotf",["a","b"],[-1,2],[[-2,2];[1,10]], ...
>  heading="Drag these values:",hcolor=black):
```



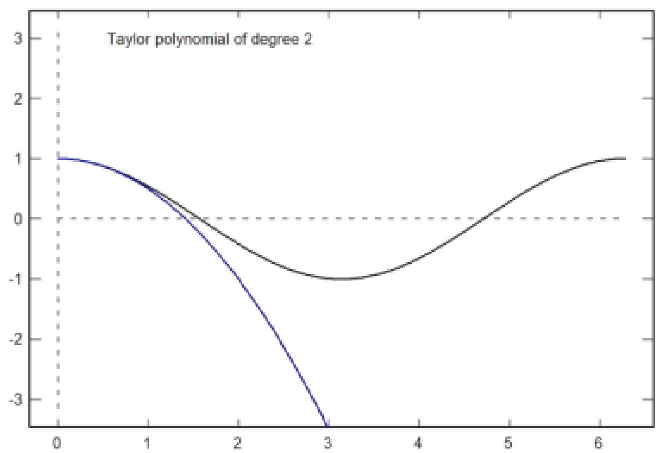
Dimungkinkan untuk membatasi nilai yang diseret ke bilangan bulat. Sebagai contoh, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor derajat n ke fungsi kosinus.

```
>function plotf(n) ...
```

```
plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);
textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);
endfunction
```

Sekarang kita mengizinkan derajat n bervariasi dari 0 sampai 20 dalam 20 stop. Hasil dragvalues() digunakan untuk memplot sketsa dengan n ini, dan untuk memasukkan plot ke dalam notebook.

```
>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8, ...
>   heading="Drag the value:"); ...
>plotf(nd):
```



Berikut adalah demonstrasi sederhana dari fungsi tersebut. Pengguna dapat menggambar di atas jendela plot, meninggalkan jejak poin.

```
>function dragtest ...
```

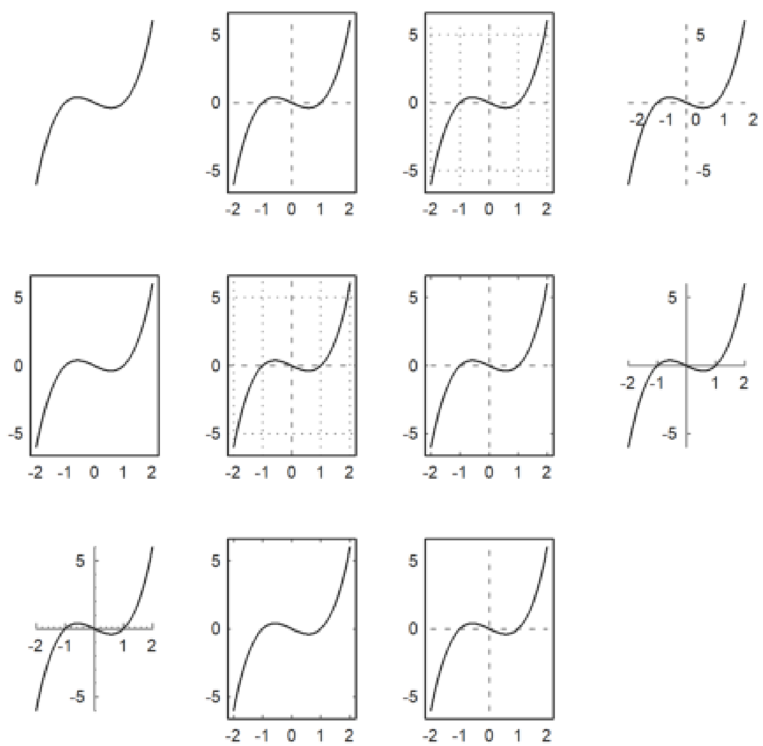
```
  plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");
  start=0;
  repeat
    {flag,m,time}=mousedrag();
    if flag==0 then return; endif;
    if flag==2 then
      hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;
    endif;
  end
endfunction
```

```
>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!
```

Gaya plot 2D

Secara default, EMT menghitung tick sumbu otomatis dan menambahkan label ke setiap tick. Ini dapat diubah dengan parameter grid. Gaya default sumbu dan label dapat dimodifikasi. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk mengatur ulang ke gaya default, gunakan reset().

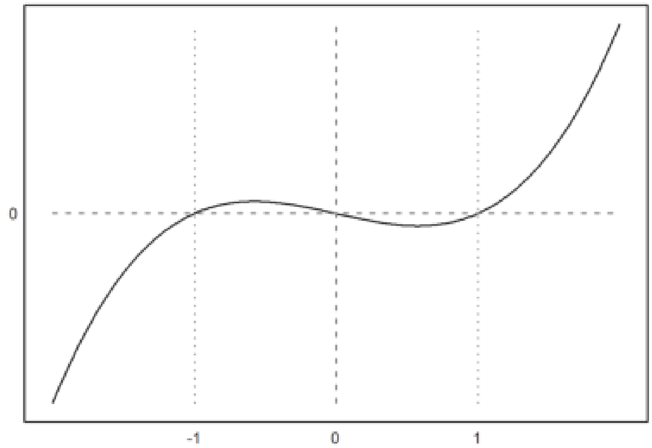
```
>aspect();
>figure(3,4); ...
> figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ... // tanpa kisi, frame atau sumbu
> figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ... // sumbu-xy
> figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ... // ticks default
> figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ... // sumbu-x dan sumbu-y dengan label di dalamnya
> figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ... // tanpa ticks, hanya label
> figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ... // default, tetapi tanpa margin
> figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ... // hanya sumbu
> figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ... //
> figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ... // hanya sumbu, tick lebih halus dalam sumbu
> figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ... // default, tick kecil di dalam
> figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ...// tanpa tick, hanya sumbu
> figure(0):
```



Parameter <frame mematikan frame, dan framecolor=blue mengatur frame ke warna biru.

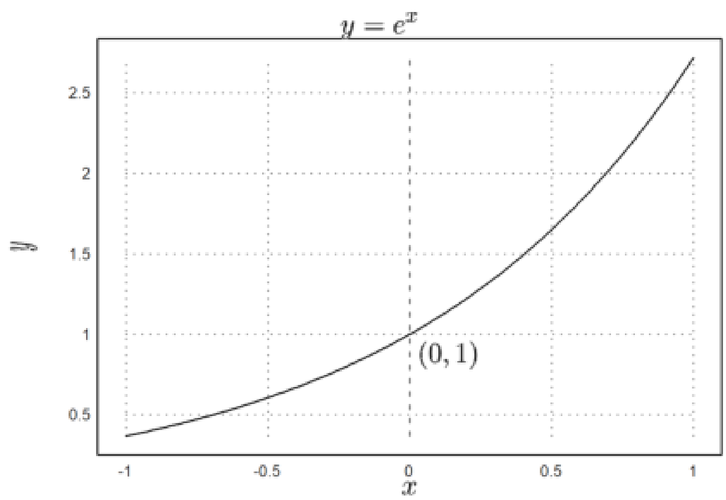
Jika Anda ingin centang sendiri, Anda dapat menggunakan style=0, dan menambahkan semuanya nanti.

```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^3-x",grid=0); // plot
>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0): // menambahkan frame dan kisi
```



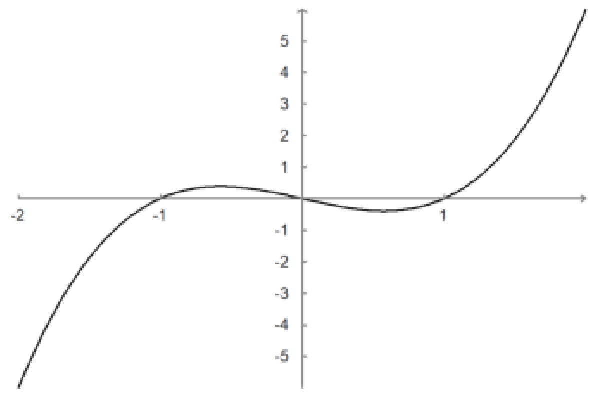
Untuk juudl plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.

```
>plot2d("exp(x)",-1,1);
>textcolor(black); // mengatur warna teks menjadi hitam
>title(latex("y=e^x")); // judul di atas plot
>xlabel(latex("x")); // "x" untuk sumbu-x
>ylabel(latex("y"),>vertical); // vertikal "y" untuk sumbu-y
>label(latex("(0,1)"),0,1,color=blue): // titik pada label
```



Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan xaxis() dan yaxis().

```
>plot2d("x^3-x",<grid,<frame);
>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->"):
```

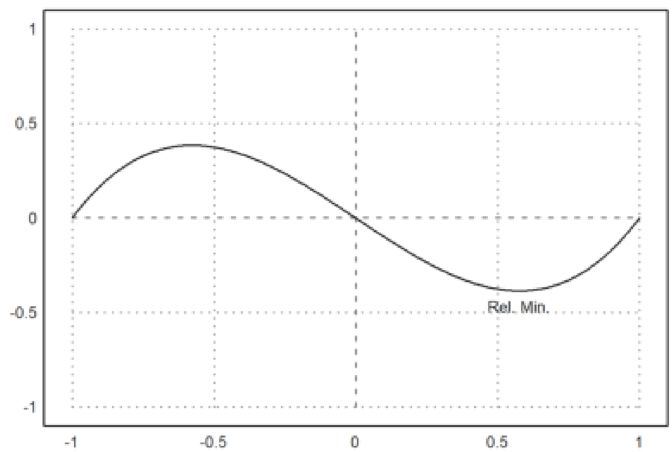


Teks pada plot dapat diatur dengan label(). Dalam contoh berikut, "lc" berarti tengah bawah. Ini mengatur posisi label relatif terhadap koordinat plot.

```
>function f(x) &= x^3-x
```

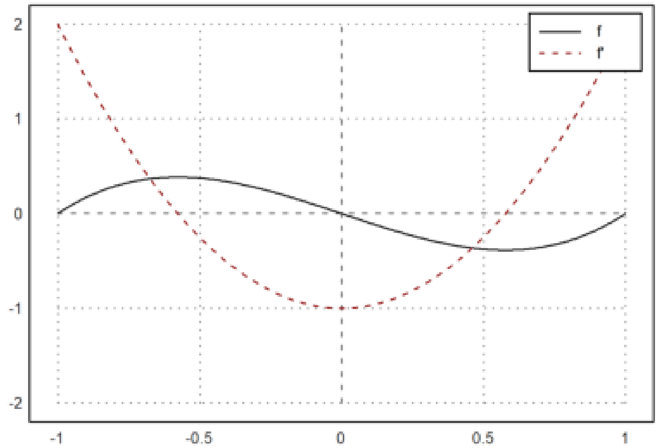
```
                             3
                            x  - x
```

```
>plot2d(f,-1,1,>square);
>x0=fmin(f,0,1); // menghitung titik minimum
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"): // menambahkan label di sana
```

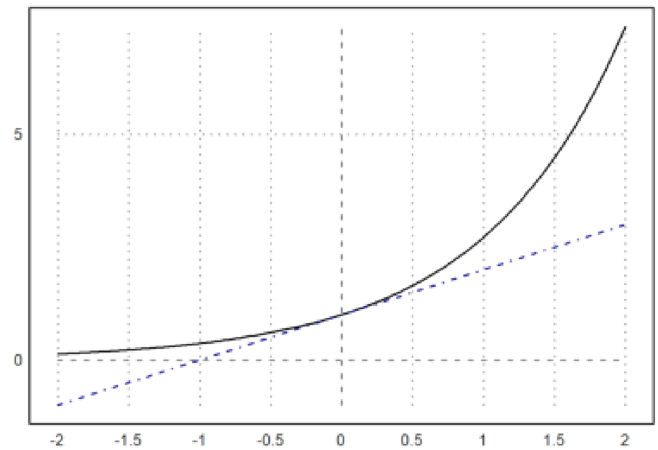


Ada juga kotak teks.

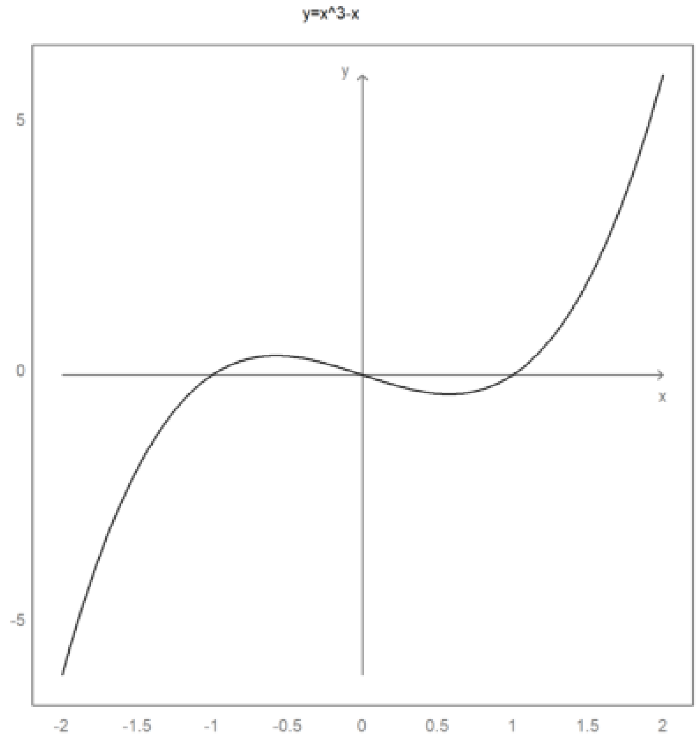
```
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // fungsi
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="--",color=red); // diferensial
>labelbox(["f","f'"],["-","--"],[black,red]): // label box
```




```
>plot2d(["exp(x)","1+x"],color=[black,blue],style=["-","-.-"]):
```



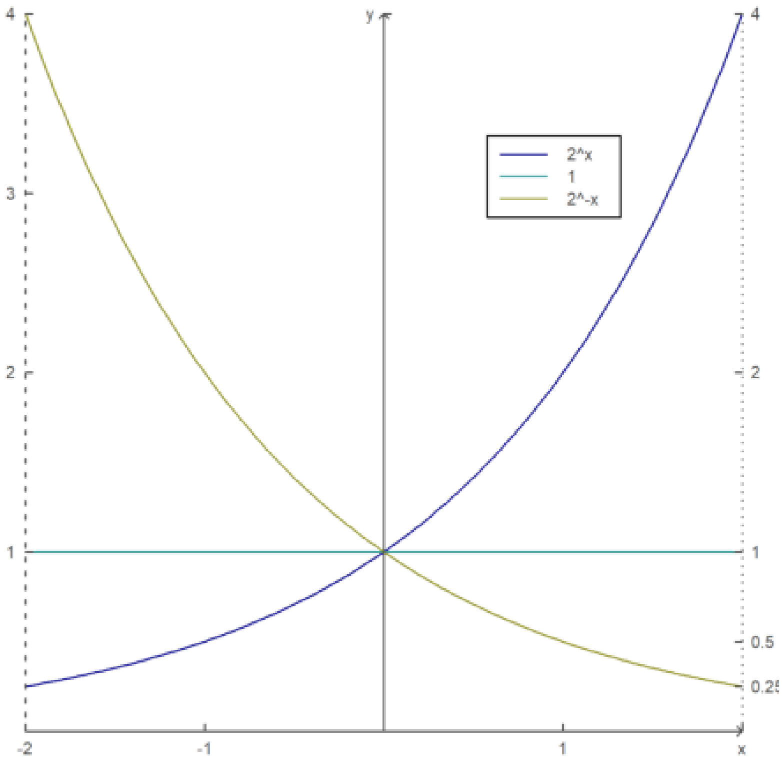
```
>gridstyle("->",color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray);  ...
> plot2d("x^3-x",grid=1);   ...
> settitle("y=x^3-x",color=black); ...
> label("x",2,0,pos="bc",color=gray);  ...
> label("y",0,6,pos="cl",color=gray); ...
> reset():
```



Untuk kontrol lebih, sumbu-x dan sumbu-y dapat dilakukan secara manual.

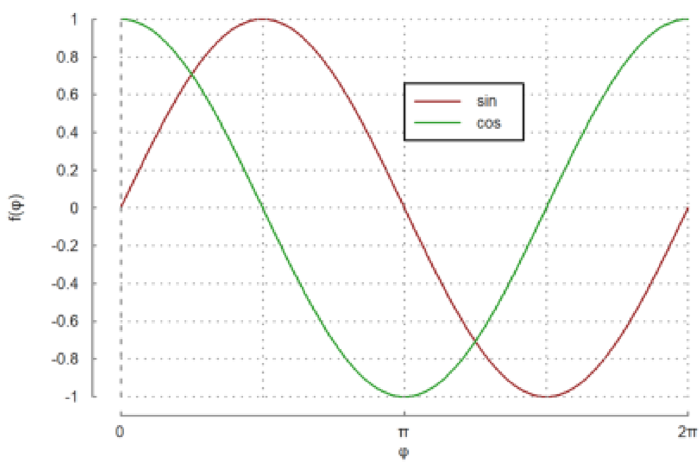
Perintah fullwindow() memperluas jendela plot karena kita tidak lagi membutuhkan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan shrinkwindow() atau reset() untuk mengatur ulang ke default.

```
>fullwindow; ...
> gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); ...
> plot2d(["2^x","1","2^(-x)"],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); ...
> xaxis(0,-2:1,style="->"); xaxis(0,2,"x",<axis); ...
> yaxis(0,4,"y",style="->"); ...
> yaxis(-2,1:4,>left); ...
> yaxis(2,2^(-2:2),style=".",<left); ...
> labelbox(["2^x","1","2^-x"],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); ...
> reset:
```



Berikut adalah contoh lain, di mana string Unicode digunakan dan sumbu di luar area plot.

```
>aspect(1.5);
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); ...
> xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=["0",u"&pi;",u"2&pi;"],style="-",>ticks,>zero);  ...
> xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...
> yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style="-",>zero,>grid); ...
> labelbox(["sin","cos"],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...
> xlabel(u"&phi;"); ylabel(u"f(&phi;)"):
```



Memplot data 2D

Jika x dan y adalah vektor data, data ini akan digunakan sebagai koordinat kurva-x dan kurva-y. Dalam hal ini, a, b, c, dan d, atau radius r dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan secara otomatis dengan data. Atau, >square dapat diatur untuk menjaga rasio aspek persegi.

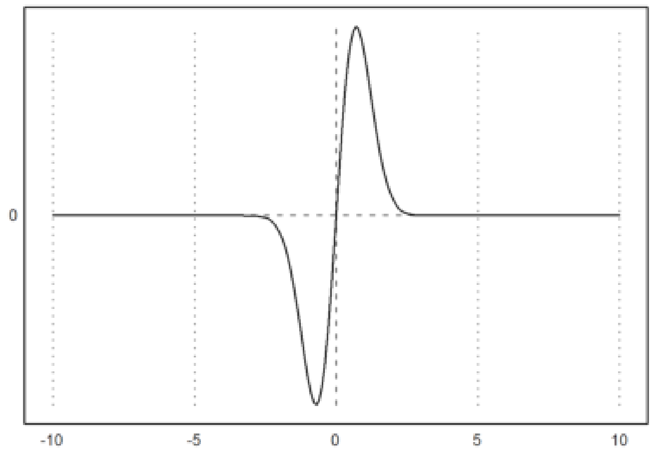
Memplot ekspresi hanyalah singkatan untuk plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai x, dan satu atau beberapa baris nilai y. Dari rentang dan nilai-x, fungsi plot2d akan menghitung data yang akan diplot, secara default dengan evaluasi fungsi yang adaptif. Untuk plot titik gunakan ">point", untuk garis campuran dan titik gunakan ">addpoints".

Tapi Anda bisa memasukkan data secara langsung.

- Gunakan vektor baris untuk x dan y untuk satu fungsi.
- Matriks untuk x dan y diplot baris demi baris.

Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk x dan y.

```
>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y):
```

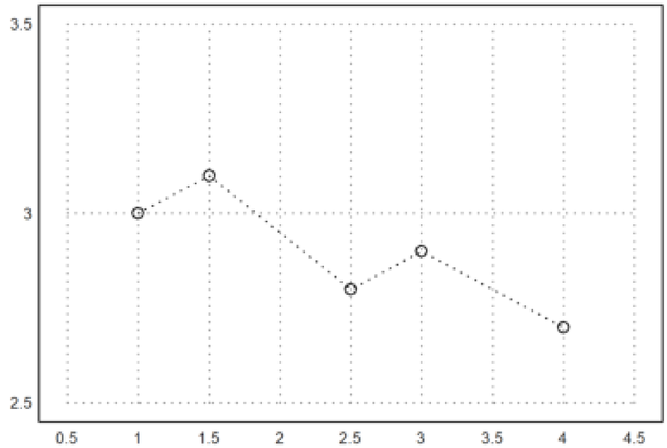


Data juga dapat diplot sebagai titik. Gunakan points=true untuk ini. Plot bekerja seperti poligon, tetapi hanya menggambar sudut-sudutnya.

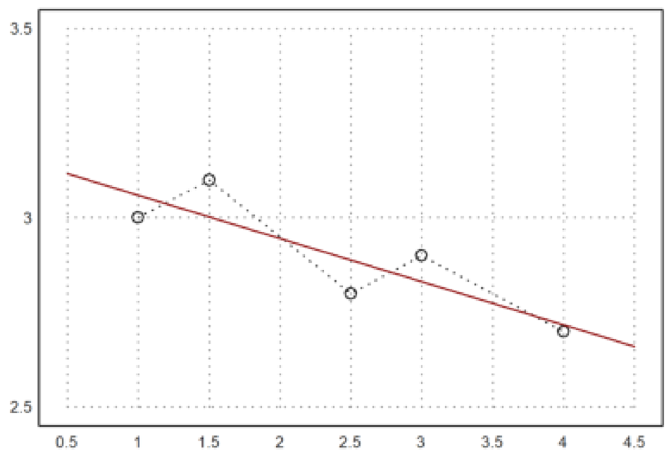
- style="...": Select from "[]", "<>", "o", ".", "..", "+", "*", "[]", "<>", "o", "..", "", "|".

Untuk memplot titik set gunakan >points. Jika warna merupakan vektor warna, setiap titik mendapatkan warna yang berbeda. Untuk matriks koordinat dan vektor kolom, warna berlaku untuk baris matriks.
Parameter >addpoints menambahkan titik ke segmen garis untuk plot data.

```
>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // garis
>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"): // menambahkan titik
```




```
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // mendapatkan garis regresi
>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red): // menambahkan garis plot
```



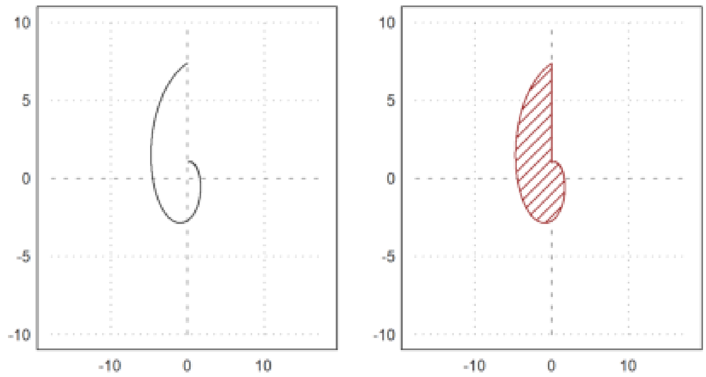
Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva

Plot data benar-benar poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva terisi.

- filled=true mengisi plot.
- style="...": Pilih dari "", "/", "\", "\/".
- fillcolor: Lihat di atas untuk warna yang tersedia.

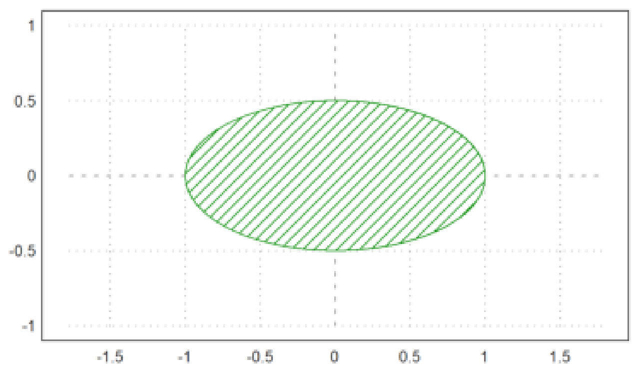
Warna isian ditentukan oleh argumen "fillcolor", dan pada opsi <outline mencegah menggambar batas untuk semua gaya kecuali yang default.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter untuk kurva
>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) dan y(t)
>figure(1,2); aspect(16/9)
>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot kurva
>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // mewarnai isi kurva
>figure(0):
```

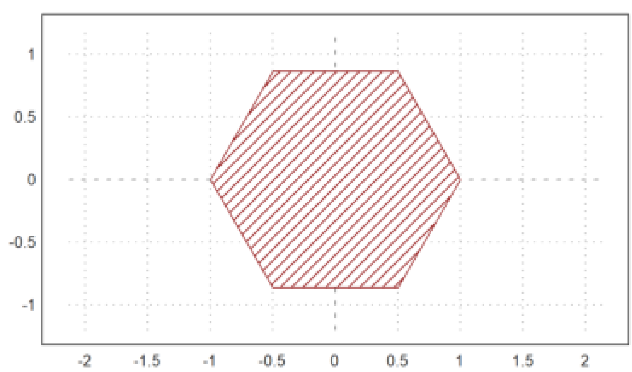


Dalam contoh berikut kita memplot elips terisi dan dua segi enam terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian berbeda.

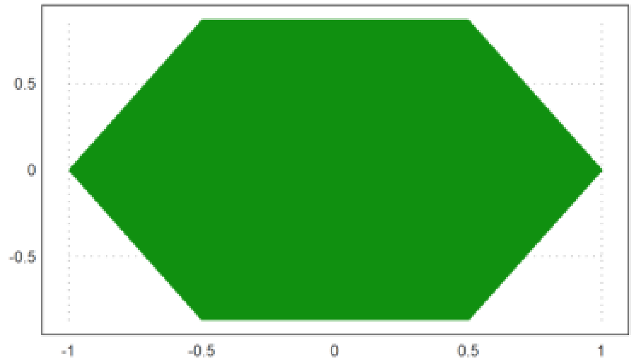
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/"):
```



```
>t=linspace(0,2pi,6); ...
>plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2):
```

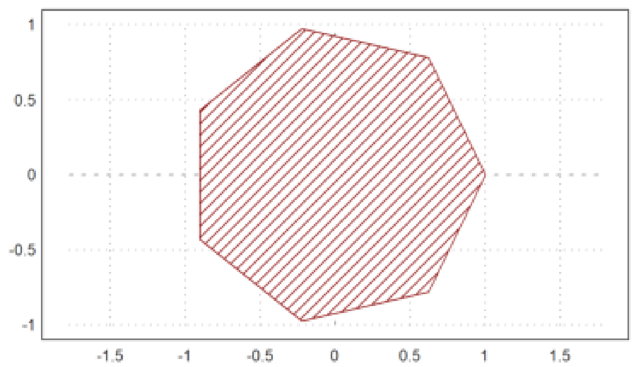


```
>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#"):
```



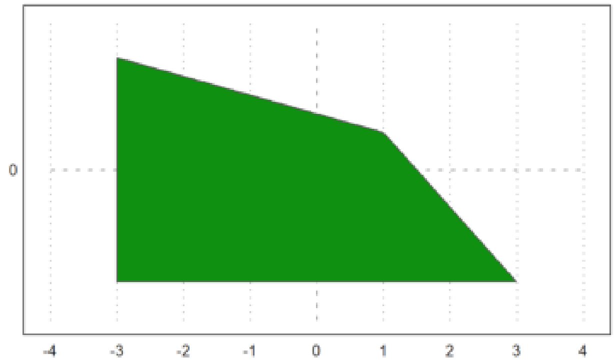
Contoh lainnya adalah segi empat, yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran satuan.

```
>t=linspace(0,2pi,7);  ...
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="/",fillcolor=red):
```



Berikut ini adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier yang kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah A[k].v<=3 untuk semua baris A. Untuk mendapatkan sudut yang bagus, kita menggunakan n yang relatif besar.

```
>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1];
>function f(x,y) := max([x,y].A');
>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111):
```

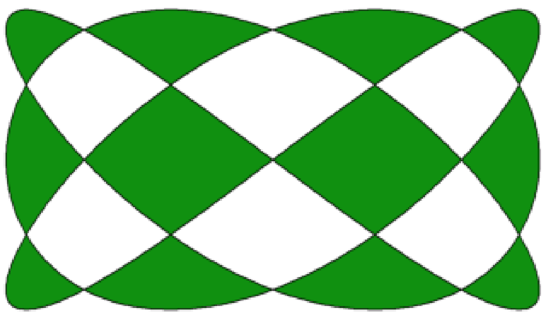


Poin utama dari bahasa matriks adalah memungkinkan untuk menghasilkan tabel fungsi dengan mudah.

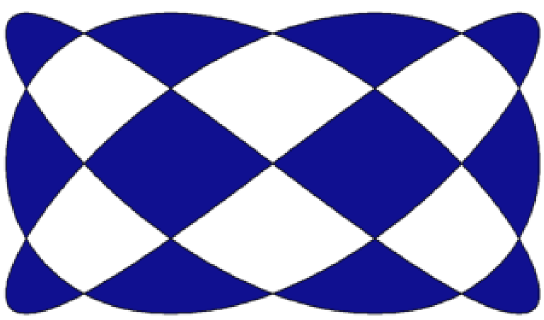
```
>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);
```

Kita sekarang memiliki vektor nilai x dan y. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai kurva yang menghubungkan titik-titik. Plotnya bisa diisi. Dalam hal ini, ini menghasilkan hasil yang bagus karena aturan penggulungan, yang digunakan untuk isian.

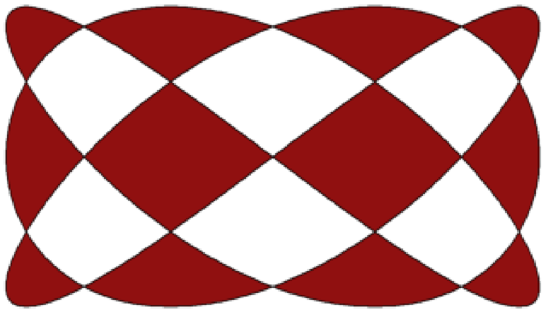
```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled):
```



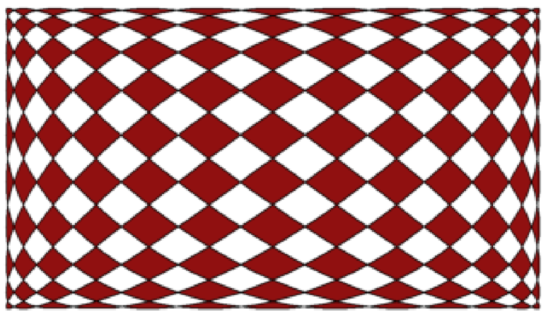
```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled,fillcolor=blue):
```



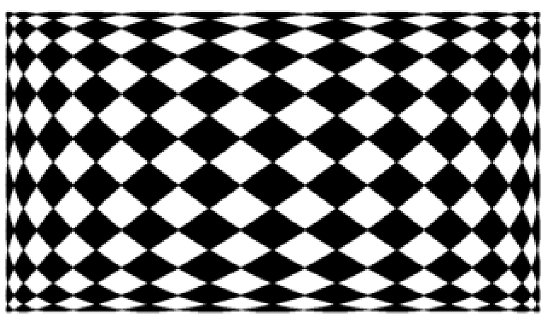
```
>plot2d(x+2,y+2,<grid,<frame,>filled,fillcolor=red):
```



```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(10x),cos(13x),<grid,<frame,>filled,fillcolor=red):
```



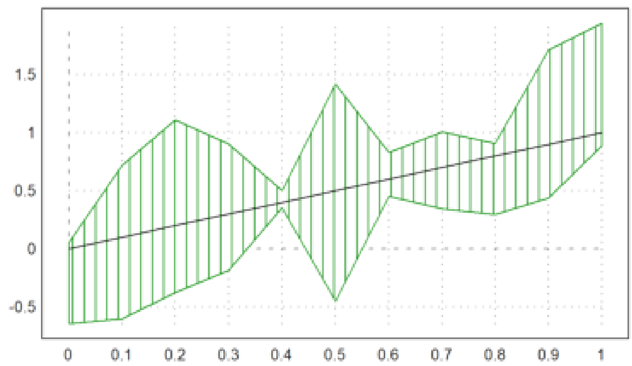
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(10x),cos(13x),<grid,<frame,>filled,fillcolor=black):
```



Sebuah vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai daerah yang terisi antara nilai interval yang lebih rendah dan yang lebih tinggi.

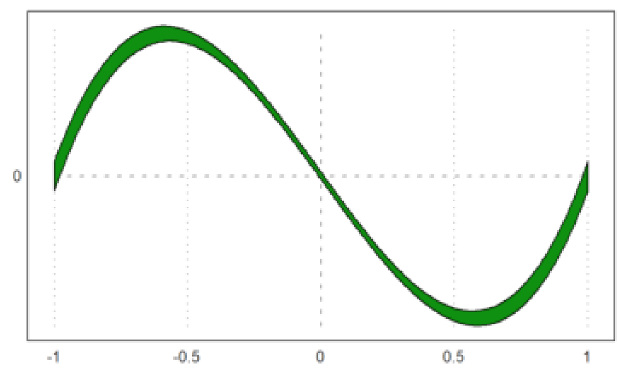
Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Tapi juga dapat digunakan untuk merencanakan kesalahan statistik.

```
>t=0:0.1:1; ...
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|");  ...
> plot2d(t,t,add=true):
```



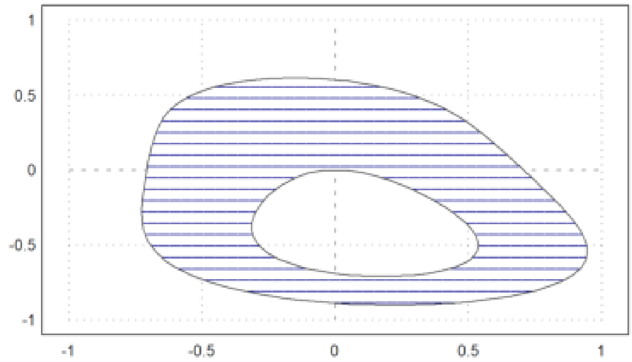
Jika x adalah vektor yang terurut, dan y adalah vektor interval, maka plot2d akan memplot rentang interval yang terisi dalam bidang. Gaya isian sama dengan gaya poligon.

```
>t=-1:0.01:1; x=~t-0.01,t+0.01~; y=x^3-x;
>plot2d(t,y):
```



Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

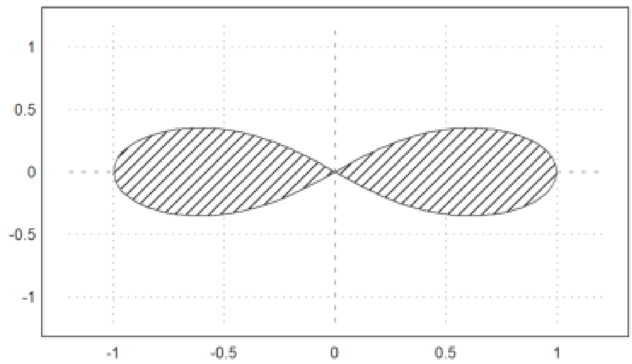
```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // mendefinisikan eskpresi f(x,y)
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```



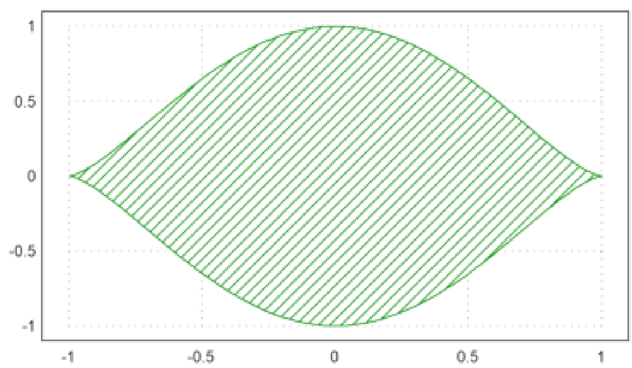
Kita juga bisa mengisi rentang nilai seperti

$$-1 \leq (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 \leq 0.$$

```
>plot2d("(x^2+y^2)^2-x^2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="/"):
```




```
>plot2d("cos(x)","sin(x)^3",xmin=0,xmax=2pi,>filled,style="/"):
```



Grafik Fungsi Parametrik

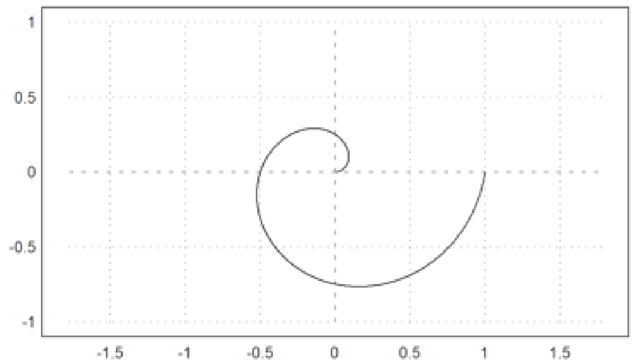
Nilai-x tidak perlu diurutkan. (x,y) hanya menggambarkan kurva. Jika x diurutkan, kurva tersebut merupakan grafik fungsi.

Dalam contoh berikut, kita memplot spiral

$$\gamma(t) = t \cdot (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

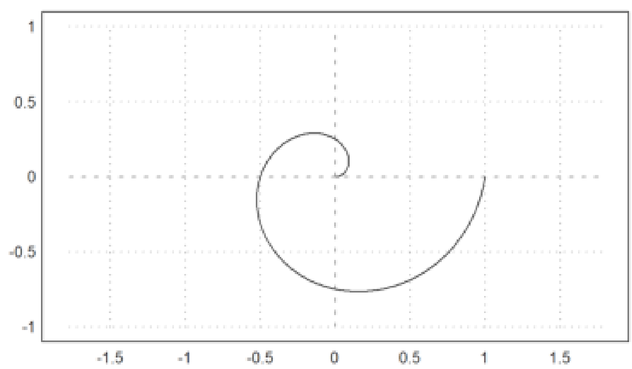
Kita juga perlu menggunakan banyak titik untuk kelancaran look atau fungsi adaptive() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptive() untuk lebih jelasnya).

```
>t=linspace(0,1,1000); ...
>plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1):
```

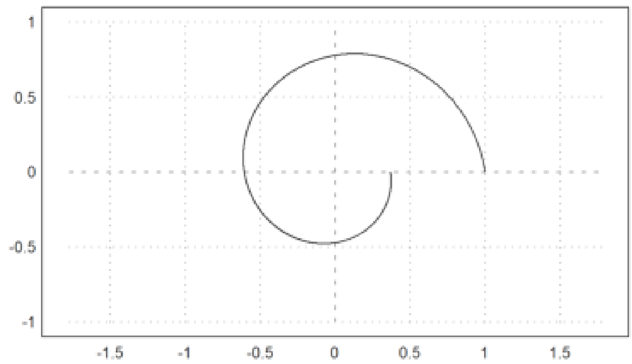


Atau, dimungkinkan untuk menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini plot kurva yang sama seperti di atas.

```
>plot2d("x*cos(2*pi*x)","x*sin(2*pi*x)",xmin=0,xmax=1,r=1):
```




```
>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2pi*t); y=r*sin(2pi*t);
>plot2d(x,y,r=1):
```



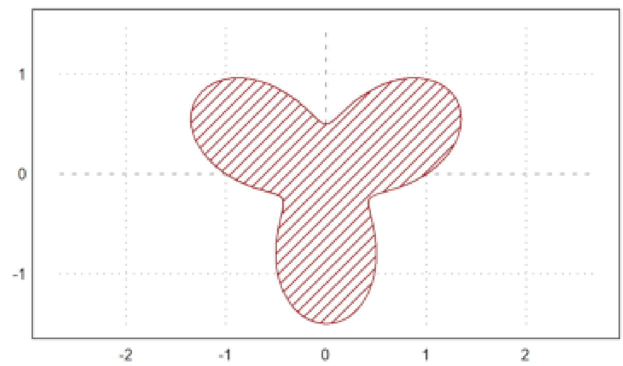
Pada contoh berikut, kita plotkan kurva

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

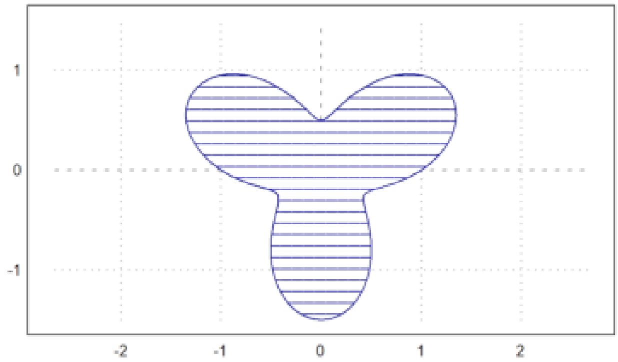
dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}.$$

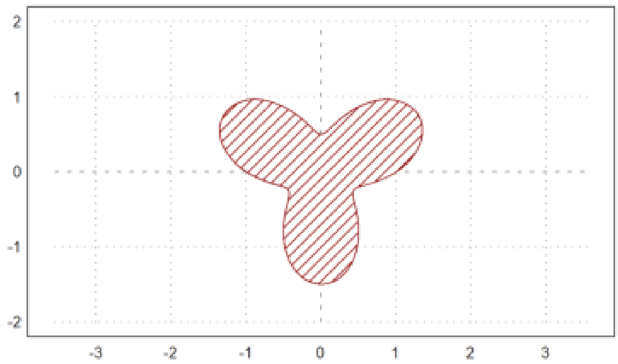
```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5):
```



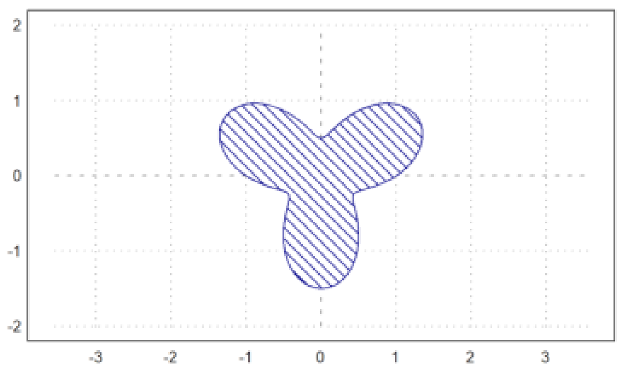

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=blue,style="-",r=1.5):
```



```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=2):
```



```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=blue,style="\",r=2):
```



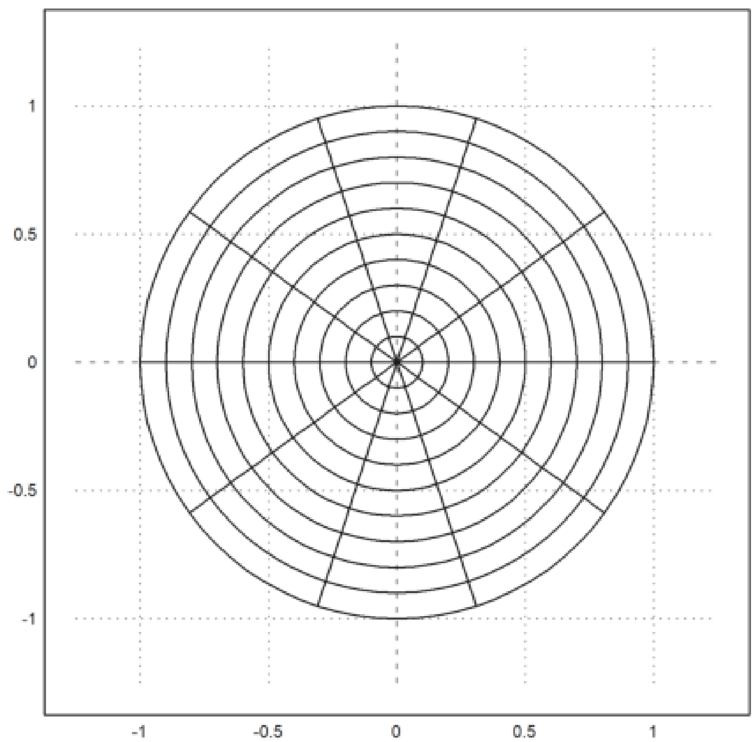
Menggambar Grafik Bilangan Kompleks

Sebuah larik bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik kisi akan terhubung. Jika sejumlah garis kisi ditentukan (atau vektor garis kisi 1x2) dalam argumen cgrid, hanya haris kisi tersebut yang terlihat.

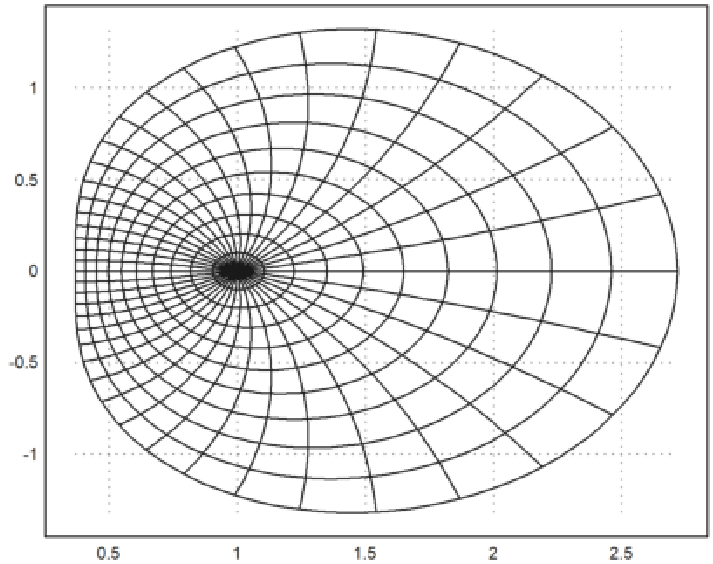
Matriks bilangan kompleks akan secara otomatis diplot sebagai kisi di bidang kompleks.

Dalam contoh berikut, kita memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter cgrid menyembunyikan beberapa kisi kurva.

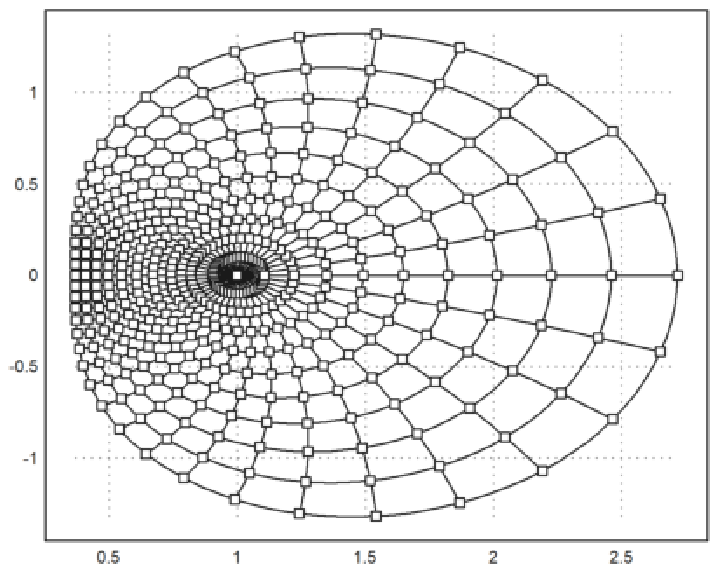
```
>aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a);...
>plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10):
```




```
>aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]):
```




```
>r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),>points,>add):
```

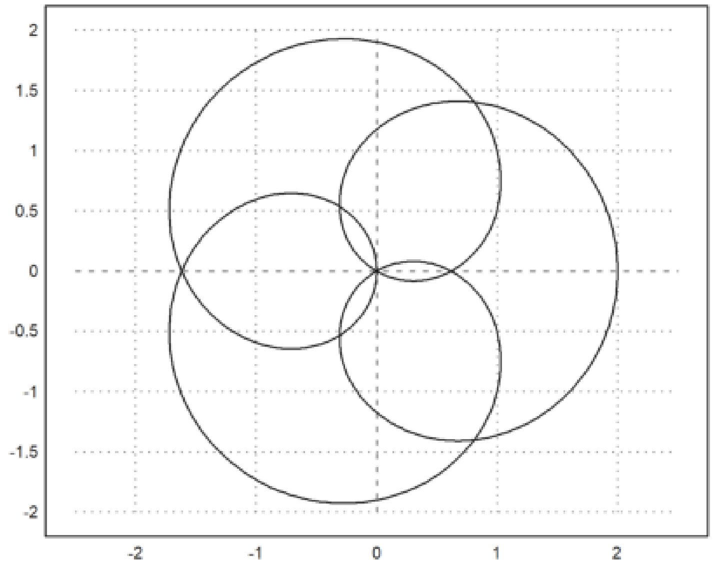


Sebuah vektor bilangan kompleks secara ototmatis diplot sebagai kurva pada bidang kompleks dengan bagian riil dan imajiner.

Dalam contoh, kita memplot lingkaran satuan dengan

$$\gamma(t) = e^{it}$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); ...
>plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2):
```



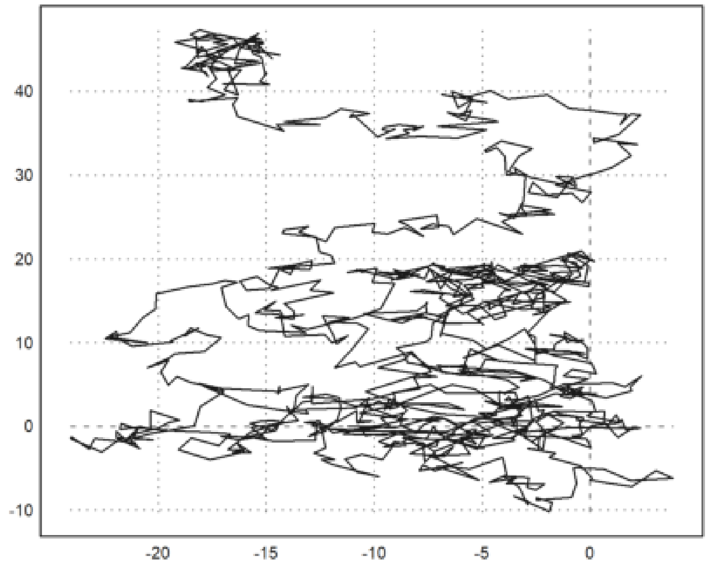
Plot Statistik

Ada banyak fungsi yang dikhususkan pada plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.
Jumlah kumulatif dari nilai terdistribusi normal 0-1 menghasilkan jalan acak.

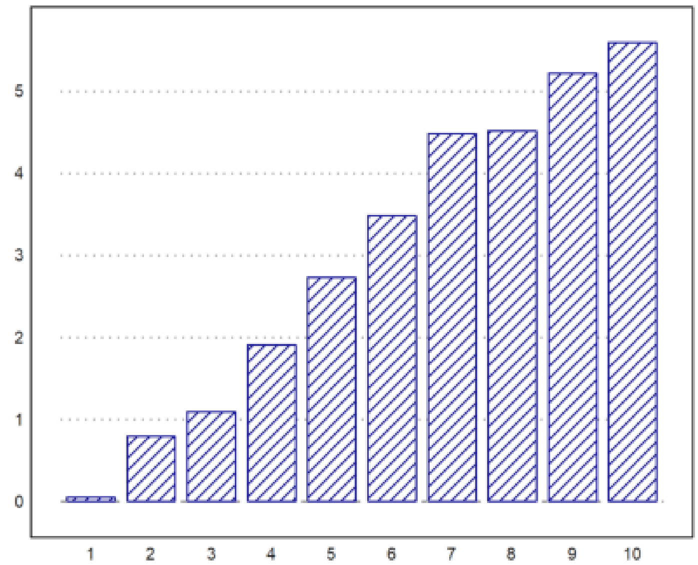
```
>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000))):
```

Menggunakan dua baris menunjukkan jalan dalam dua dimensi.

```
>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]):
```

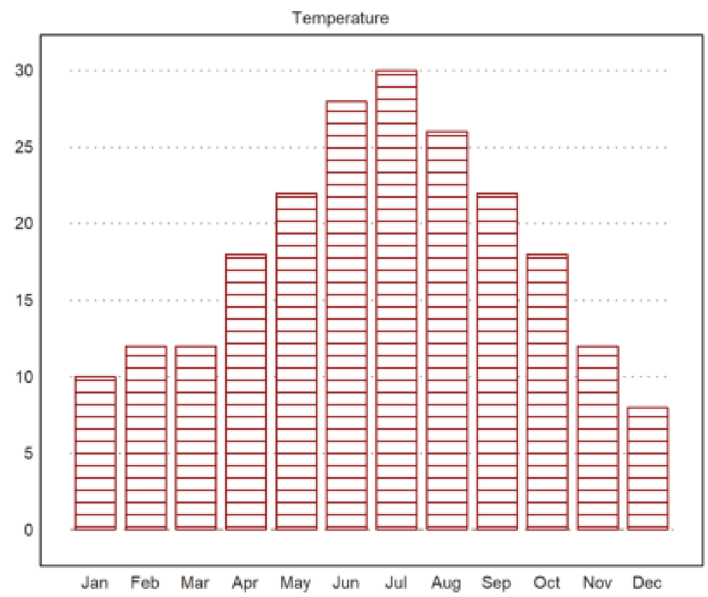



```
>columnsplot(cumsum(random(10)),style="/",color=blue):
```

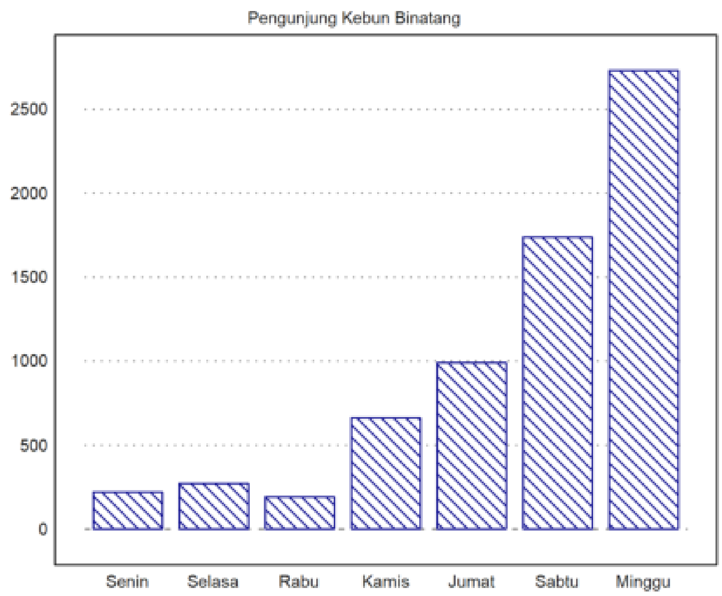


Itu juga dapat menampilkan string sebagai label.

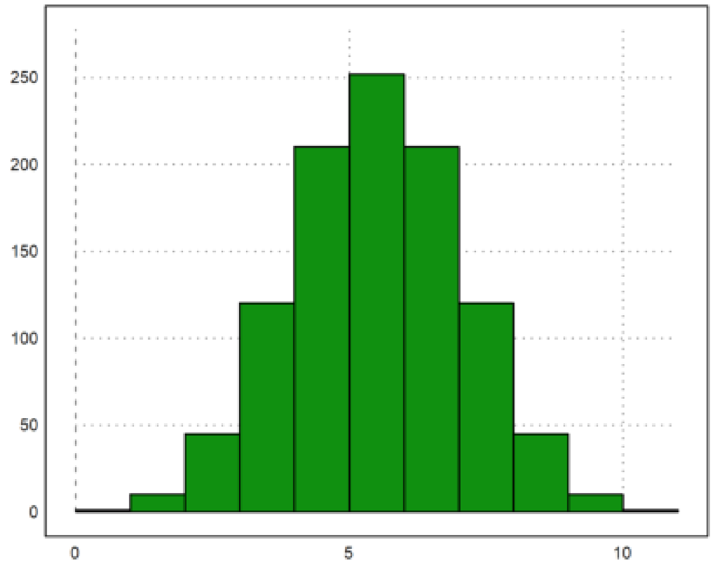
```
>months=["Jan","Feb","Mar","Apr","May","Jun", ...
>  "Jul","Aug","Sep","Oct","Nov","Dec"];
>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];
>columnsplot(values,lab=months,color=red,style="-");
>title("Temperature"):
```



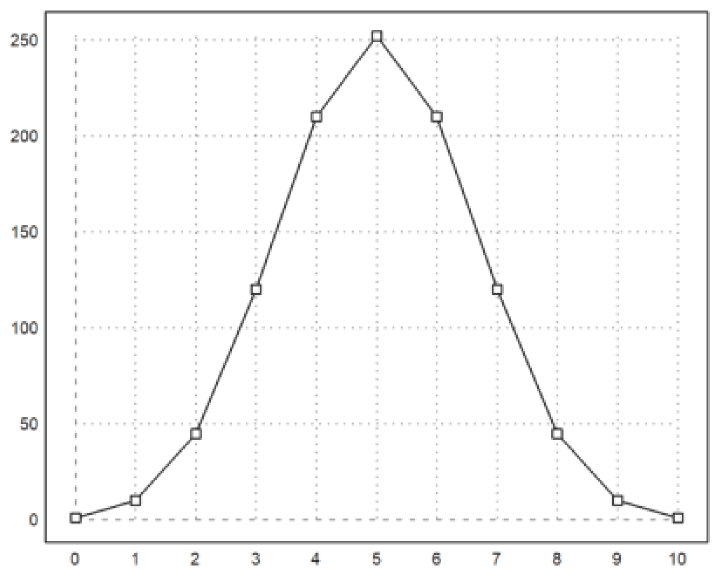

```
>hari=["Senin","Selasa","Rabu","Kamis","Jumat","Sabtu","Minggu"];
>pengunjung=[219,272,192,661,991,1738,2731];
>columnsplot(pengunjung,lab=hari,color=blue,style="\");
>title("Pengunjung Kebun Binatang"):
```



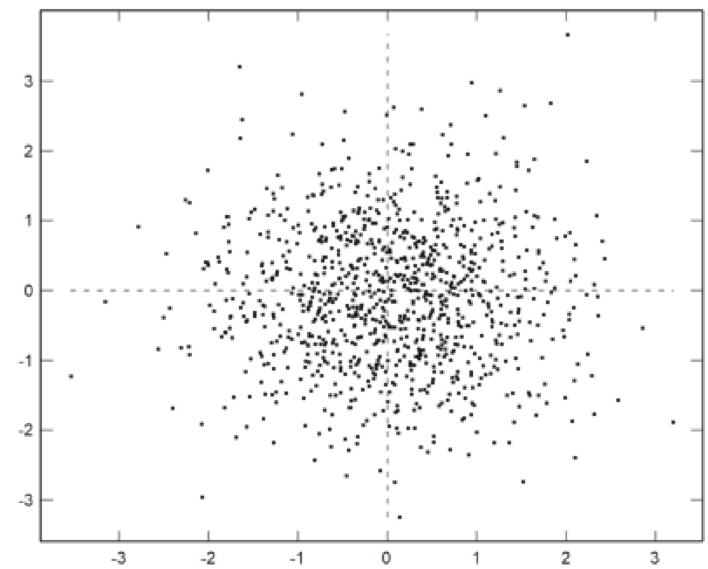

```
>k=0:10;
>plot2d(k,bin(10,k),>bar):
```



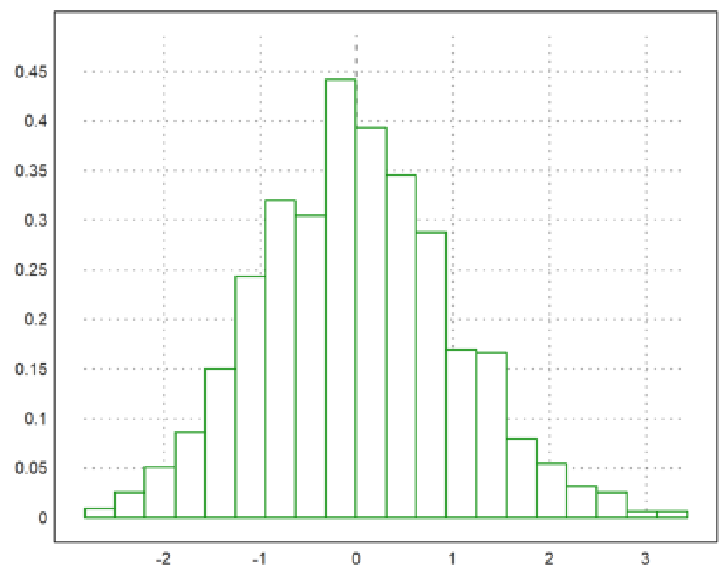

```
>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add):
```



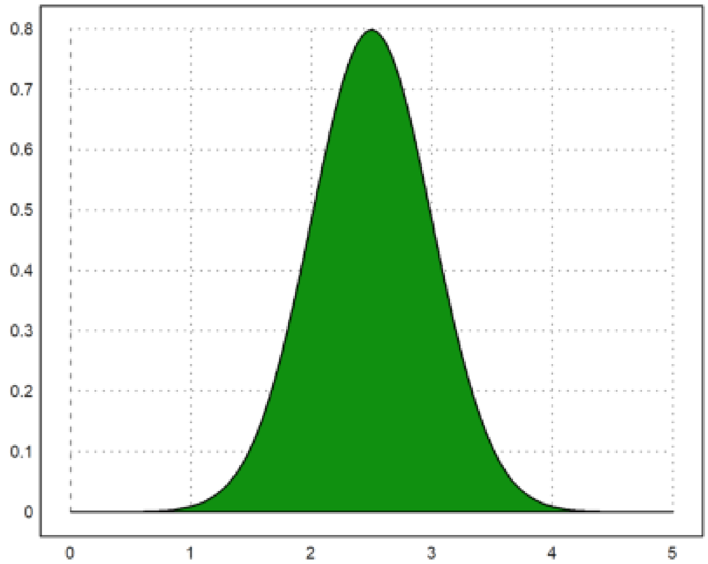

```
>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style=".."):
```




```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="O"):
```

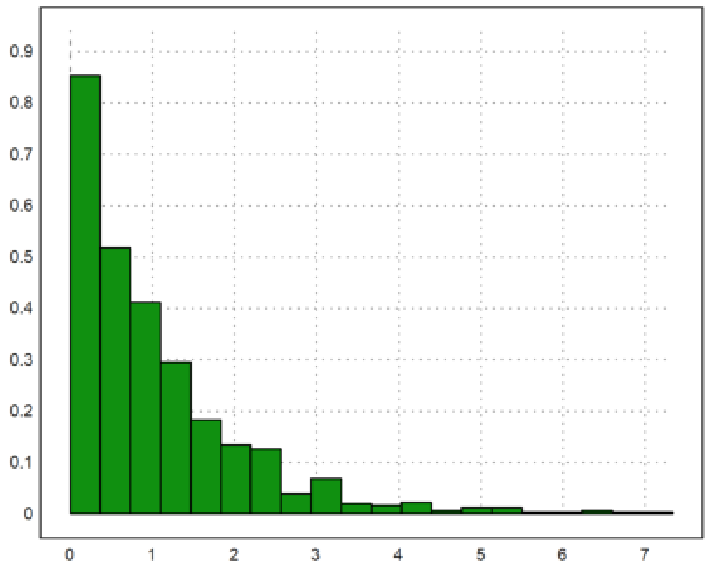



```
>plot2d("qnormal",0,5;2.5,0.5,>filled):
```



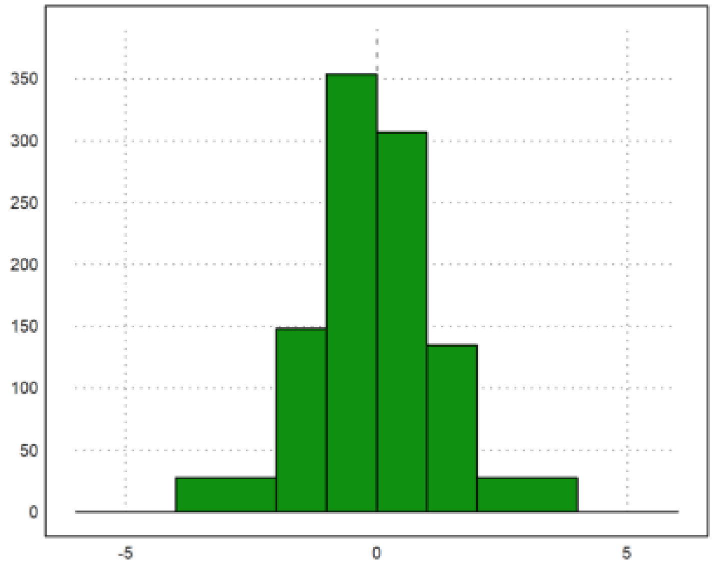
Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan distribution=n dengan plot2d.

```
>w=randexponential(1,1000); // distribusi eksponensial
>plot2d(w,>distribution): // atau distribusi=n dengan n interval
```



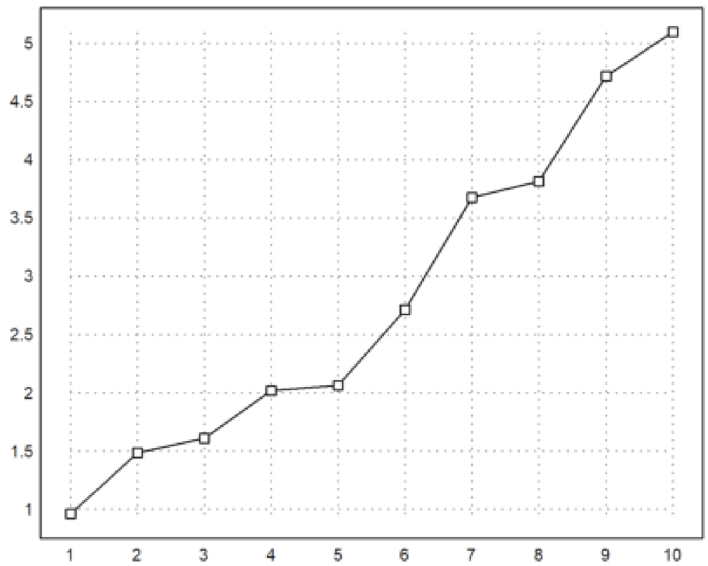
Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan >bar di plot3d, atau dengan plot kolom.

```
>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval batas v
>plot2d(x,y,>bar):
```

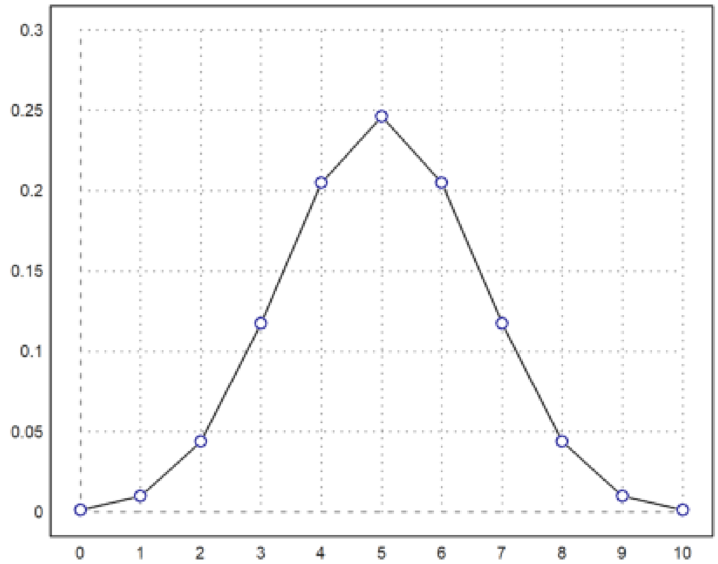


Fungsi statplot() menyetel gaya dengan string sederhana.

```
>statplot(1:10,cumsum(random(10)),"b"):
```



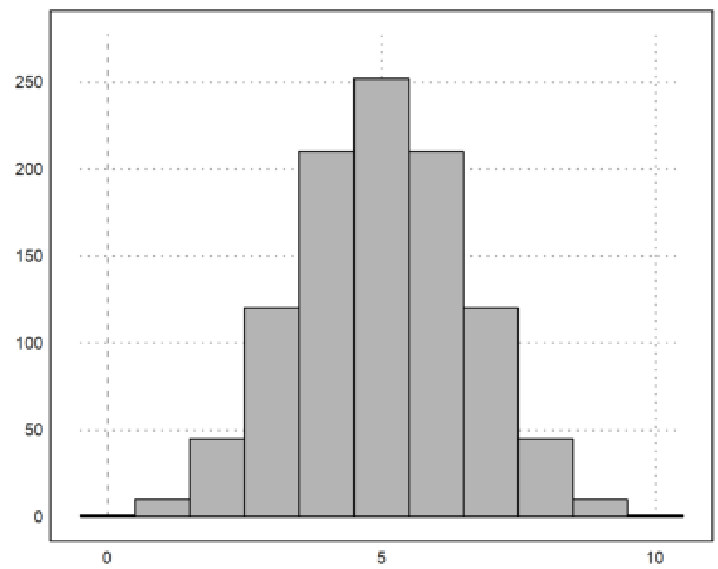

```
>n=10; i=0:n; ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style="ow",add=true,color=blue):
```



Selain itu, data dapat diplot sebagai batang. Dalam hal ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Bilah akan memanjang dari x[i] ke x[i+1] dengan nilai y[i]. Jika x memiliki ukuran yang sama dengan y, maka akan diperpanjang satu elemen dengan spasi terakhir.

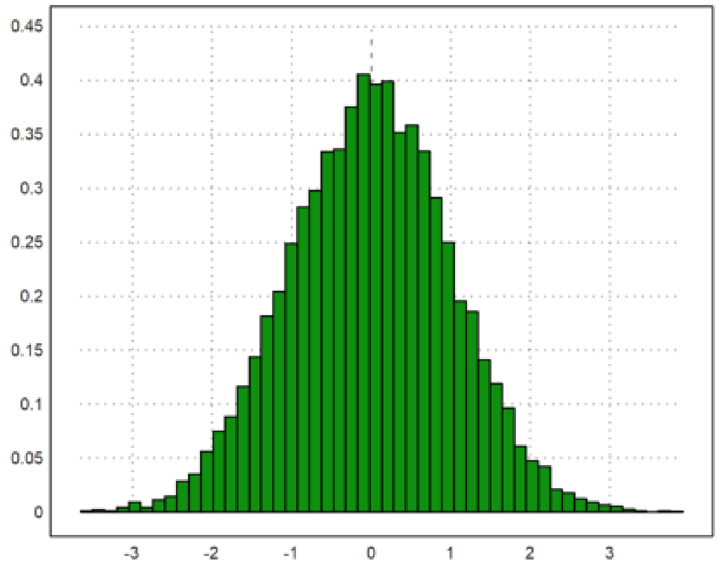
Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

```
>n=10; k=bin(n,0:n); ...
>plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray):
```

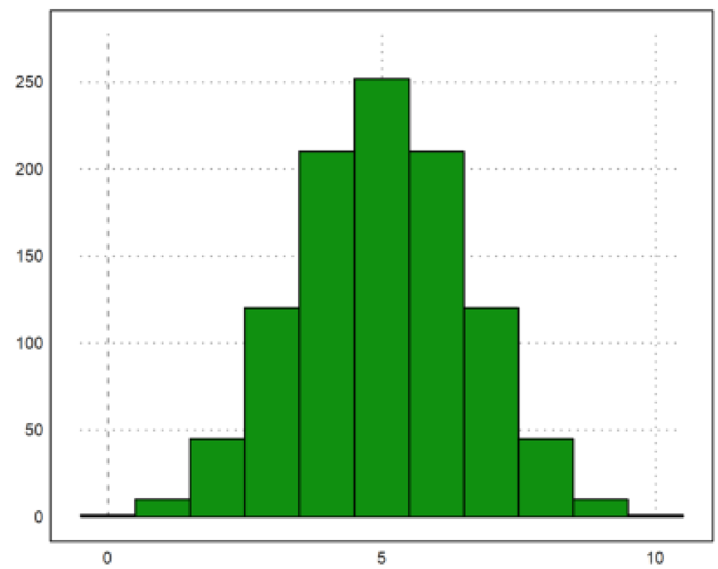


Data untuk plot batang (bar=1) dan histogram (histogram=1) dapat dinyatakan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan >distribution (atau distribution=n). Histogram nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan >histogram. Jika >even ditentukan, nilai xv akan dihitung dalam interval bilangan bulat.

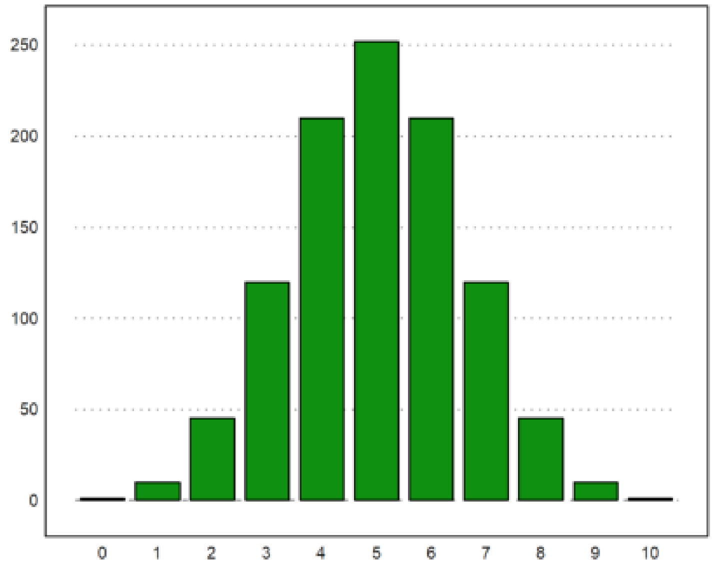
```
>plot2d(normal(10000),distribution=50):
```



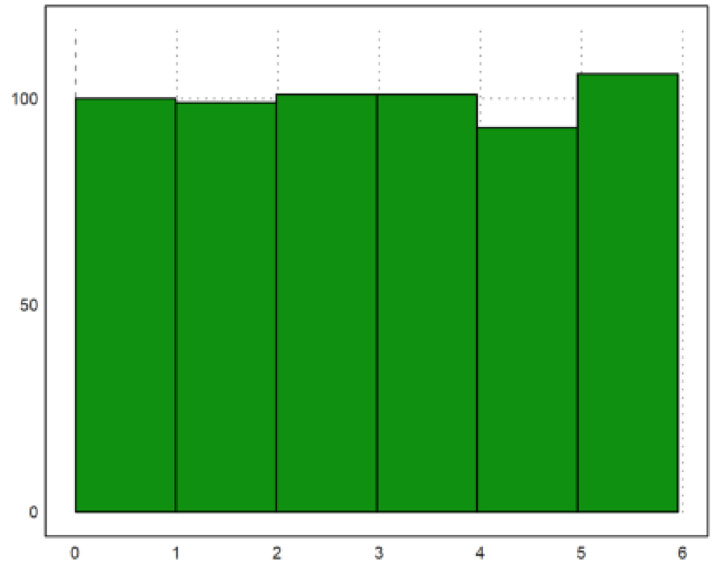

```
>k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar):
```




```
>columnsplot(m,k):
```

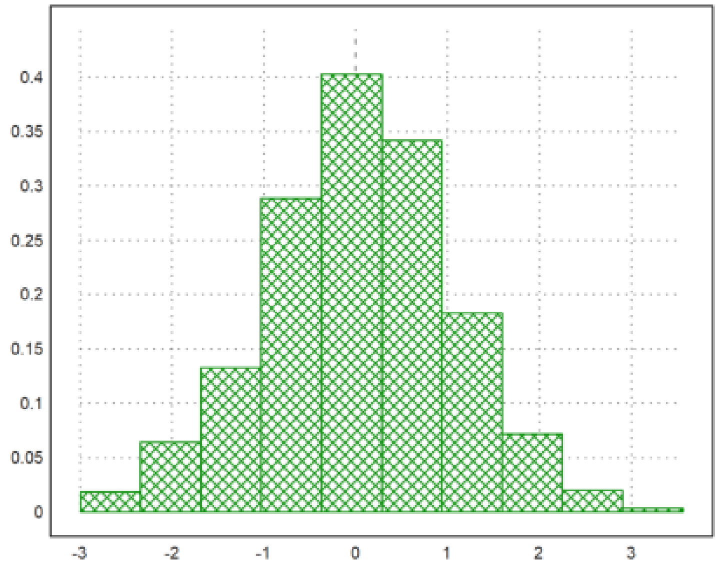



```
>plot2d(random(600)*6,histogram=6):
```



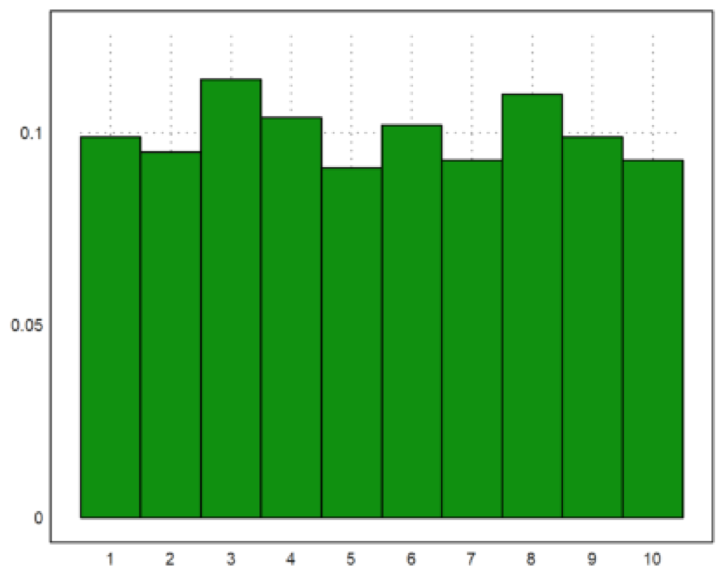
Untuk distribusi, ada parameter distribusi=n, yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-interval.

```
>plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="\/"):
```



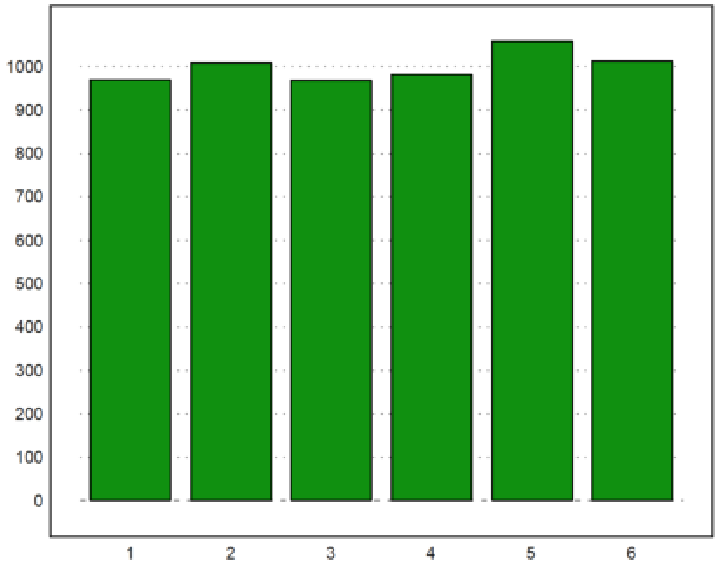
Dengan parameter even=true, ini akan menggunakan interval bilangan bulat.

```
>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true):
```

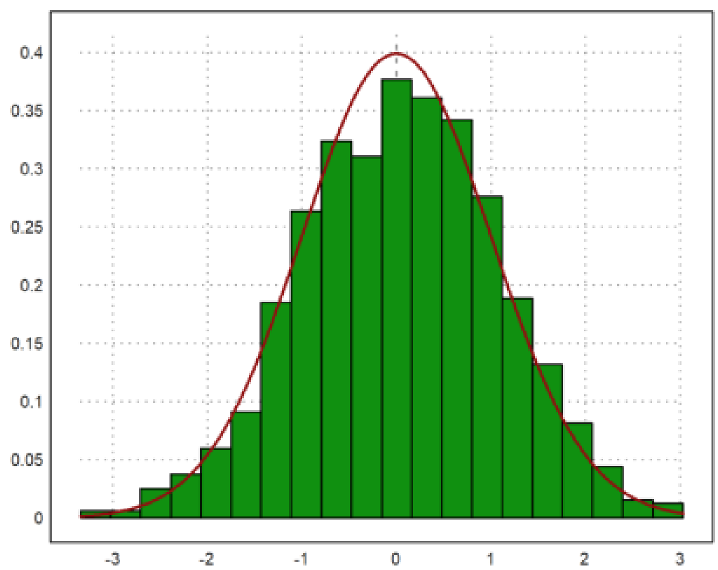


Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik, yang mungkin berguna. Silahkan lihat tutorial tentang statistik.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6))):
```

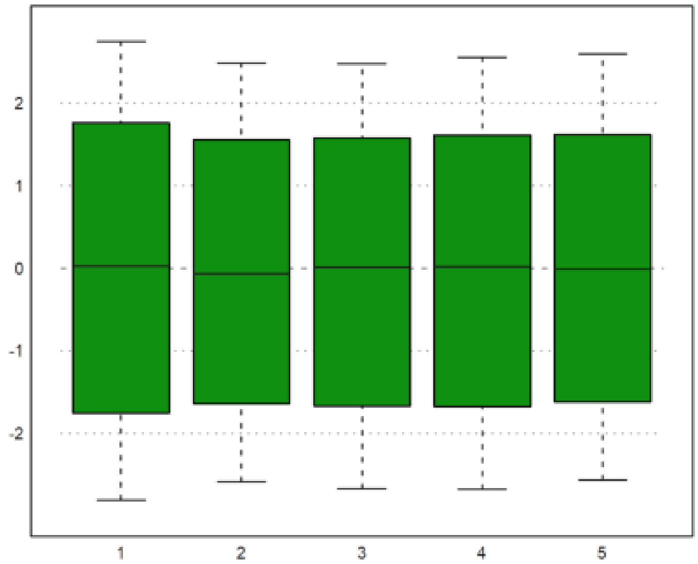



```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); ...
>  plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add):
```



Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. Boxplot menunjukkan kuartil dari distribusi ini dan banyak outlier. Menurut definisi, outlier dalam boxplot adalah data yang melebihi 1.5 kali kisaran 50% tengah plot.

```
>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M)):
```



Fungsi Implisit

Plot implisit menunjukkan garis level yang menyelesaikan f(x,y)=level, di mana "level" dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika level="auto", akan ada garis level nc, yang akan menyebar di antara fungsi minimum dan maksimum secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat ditambahkan dengan >hue untuk menunjukkan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit, xv harus berupa fungsi atau ekspresi dari parameter x dan y, atau, sebagai alternatif, xv dapat berupa matriks nilai.

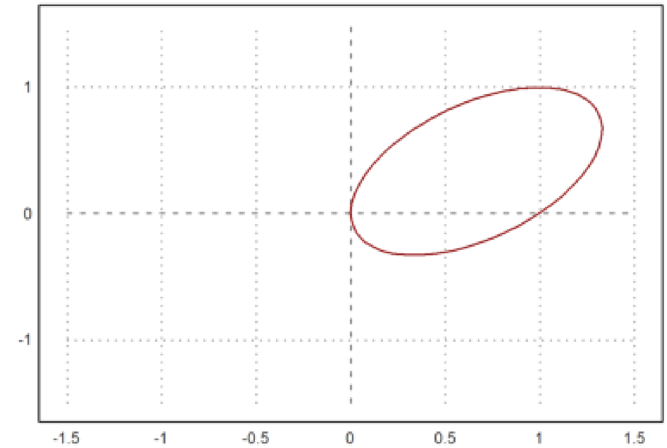
Euler dapat menandai garis level

$$f(x, y) = c$$

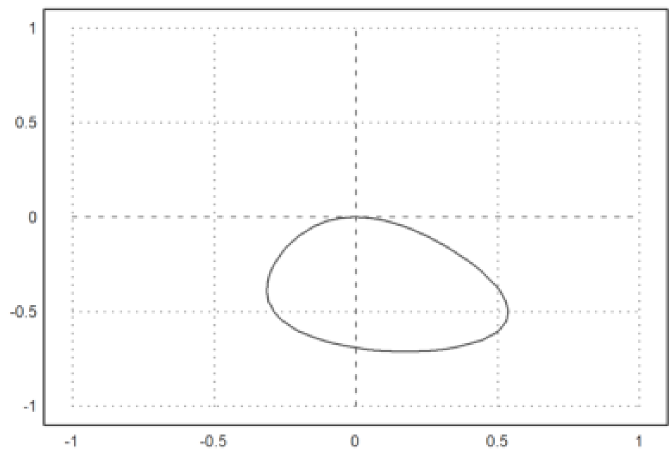
dari fungsi apapun.

Untuk menggambar himpunan f(x,y)=c untuk satu atau lebih konstanta c, Anda dapat menggunakan plot2d() dengan plot implisitnya di dalam bidang. Parameter untuk c adalah level=c, di mana c dapat berupa vektor garis level. Selain itu, skema warna dapat digambar di latar belakang untuk menunjukkan nilai fungsi untuk setiap titik dalam plot. Parameter "n" menentukan kehalusan plot.

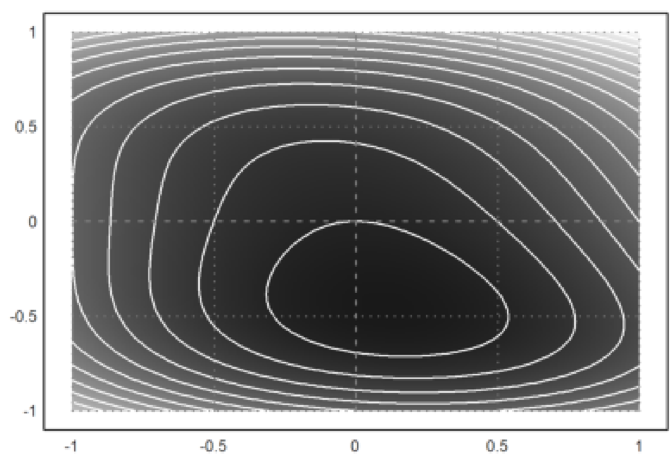
```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^2+y^2-x*y-x",r=1.5,level=0,contourcolor=red):
```



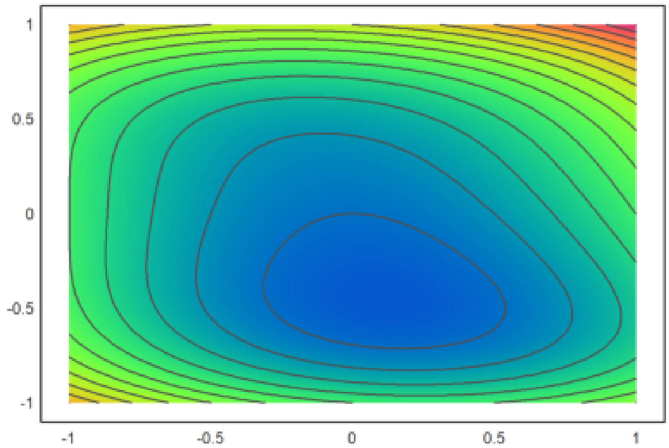

```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // mendefinisikan ekspresi f(x,y)
>plot2d(expr,level=0): // solusi dari f(x,y)=0
```




```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200): // nice
```

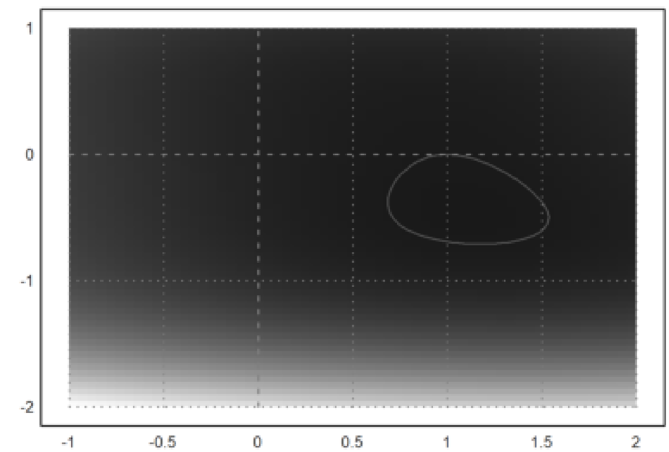


```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4): // nicer
```

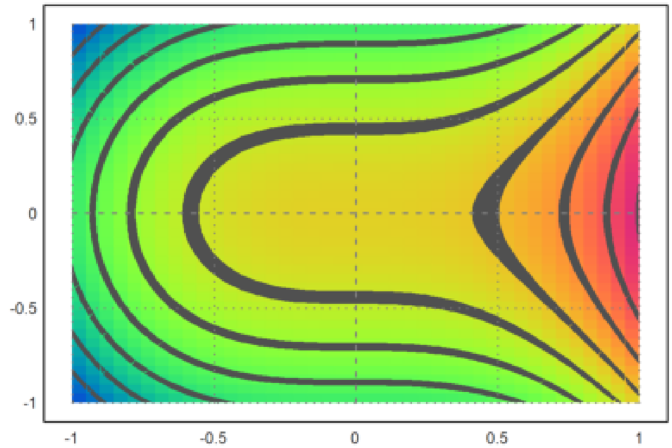


Ini berfungsi untuk plot data juga. Tetapi Anda harus menentukan rentang untuk label sumbu.

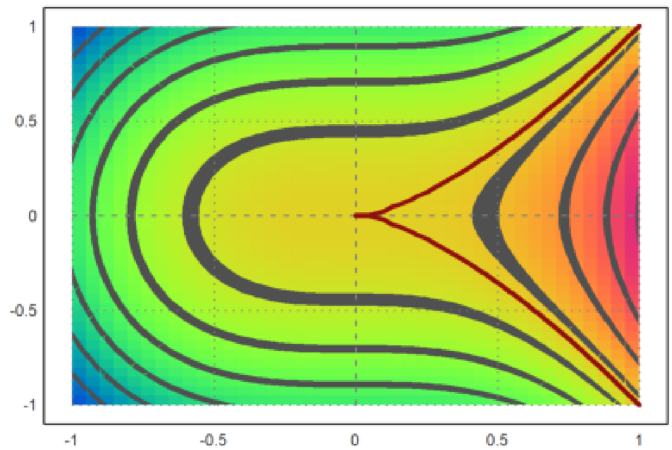
```
>x=-2:0.05:1; y=x'; z=expr(x,y);
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue):
```



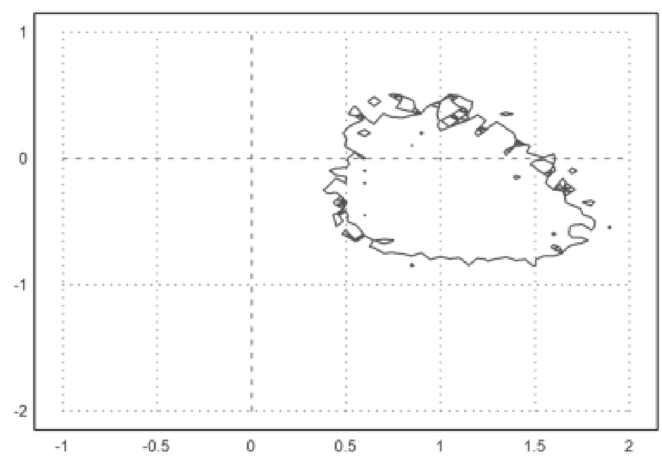
```
>plot2d("x^3-y^2",>contour,>hue,>spectral):
```



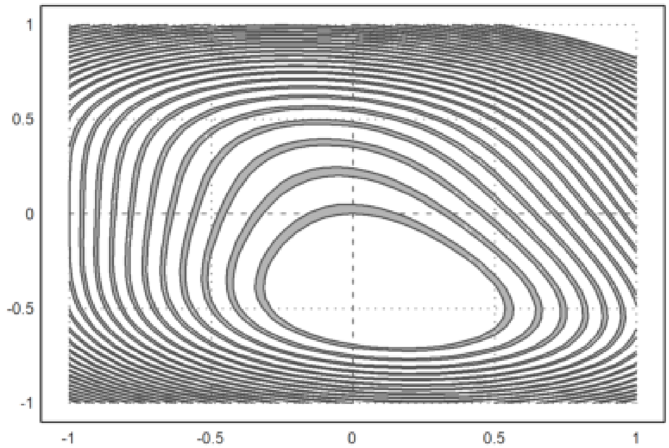

```
>plot2d("x^3-y^2",level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red):
```



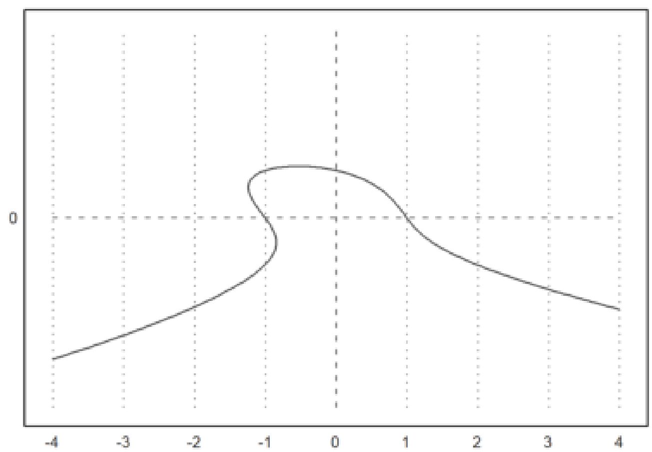

```
>z=z+normal(size(z))*0.2;
>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1):
```



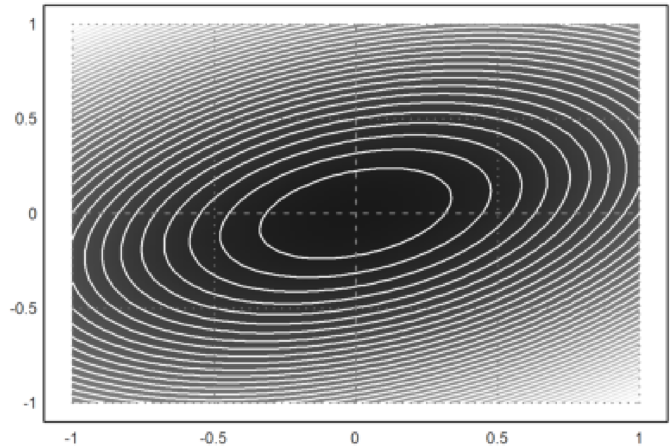
```
>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray):
```




```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=1,r=4,n=100):
```




```
>plot2d("x^2+2*y^2-x*y",level=0:0.1:10,n=100,contourcolor=white,>hue):
```



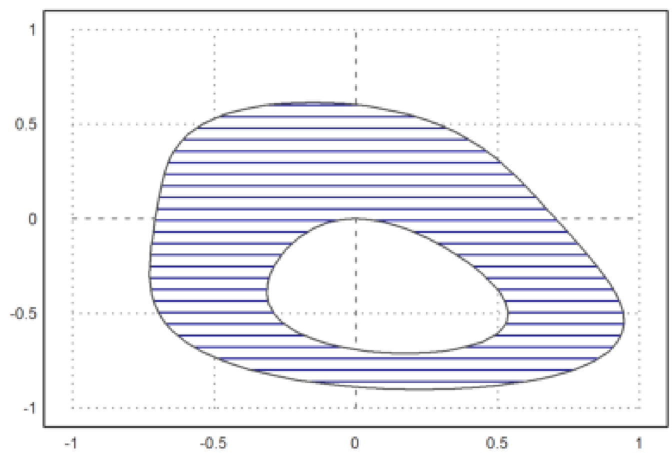
Dimungkinkan juga untuk mengisi himpunan

$$a \leq f(x, y) \leq b$$

dengan rentang level.

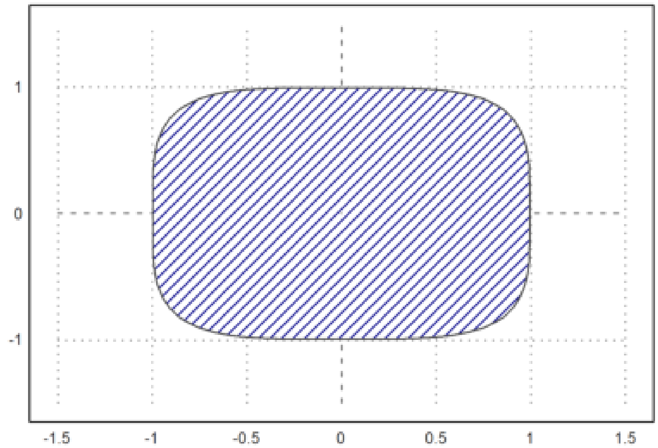
Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

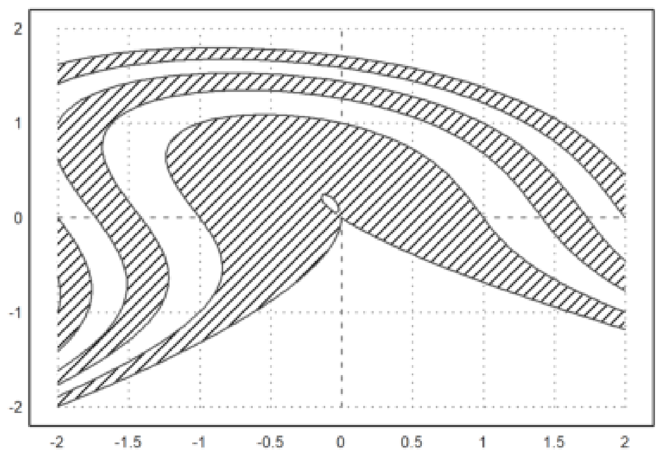


Plot implisit juga bisa menunjukkan rentang level. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn dari interval level, di mana baris pertama berisi awal dan baris kedua adalah akhir dari setiap interval. Atau, vektor baris sederhana dapat digunakan untuk level, dan parameter dl memperluas nilai level ke interval.

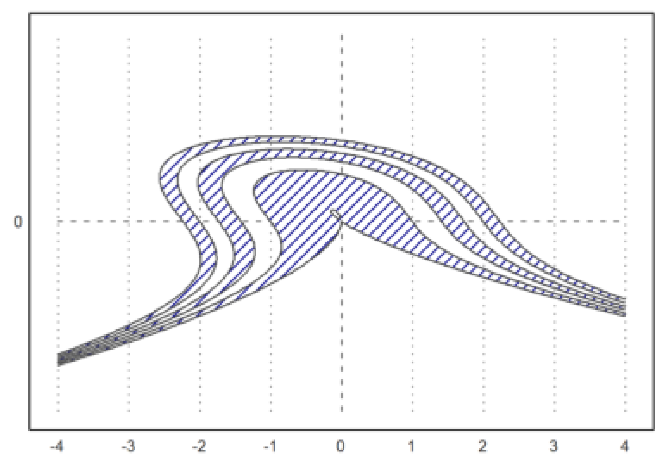
```
>plot2d("x^4+y^4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="/"):
```



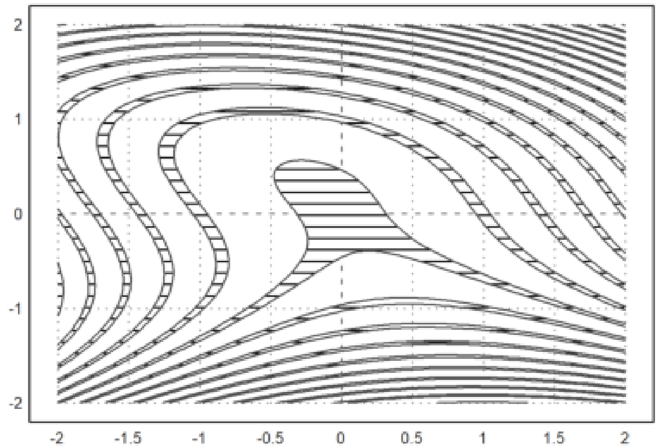

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],style="/",r=2,n=100):
```



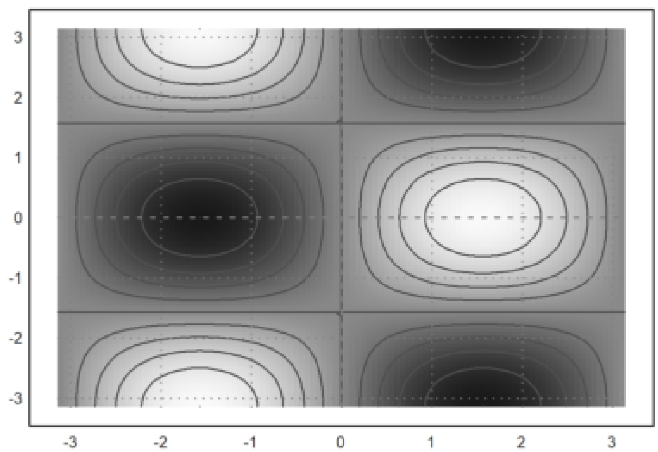

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],color=blue,style="/",r=4,n=200):
```



```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=-10:20,r=2,style="-",dl=0.1,n=100):
```




```
>plot2d("sin(x)*cos(y)",r=pi,>hue,>levels,n=100):
```

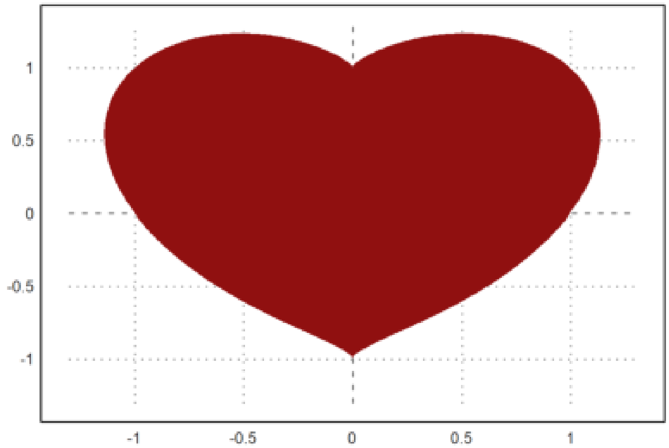


Dimungkinkan juga untuk menandai

$$a \leq f(x,y) \leq b.$$

Ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

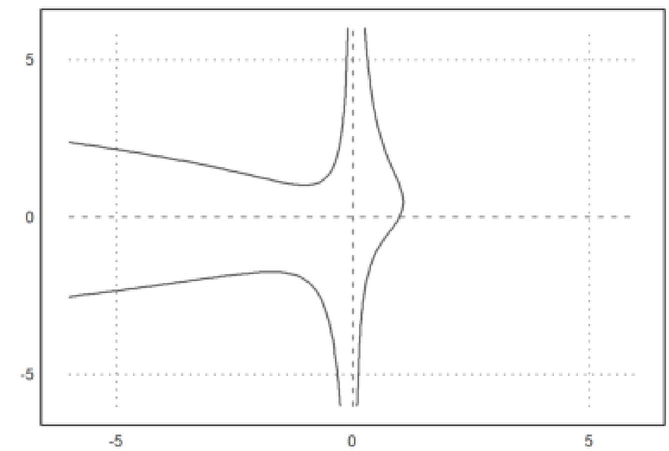
```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>   style="#",color=red,<outline, ...
>   level=[-2;0],n=100):
```



Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi persamaan seperti

$$x^3 - xy + x^2y^2 = 6$$

```
>plot2d("x^3-x*y+x^2*y^2",r=6,level=1,n=100):
```



```
>function starplot1 (v, style="/", color=green, lab=none) ...
```

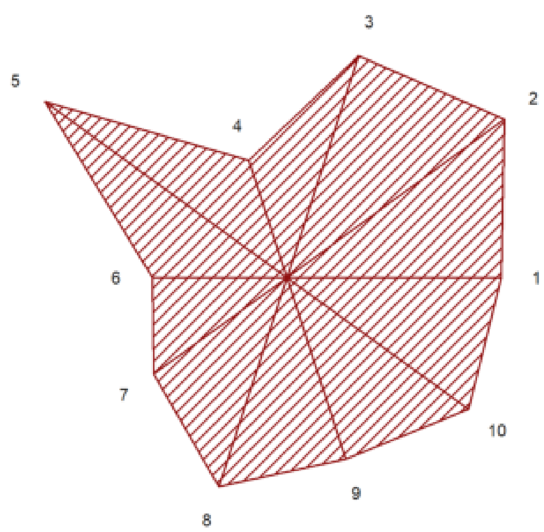
```
  if !holding() then clg; endif;
  w=window(); window(0,0,1024,1024);
  h=holding(1);
  r=max(abs(v))*1.2;
  setplot(-r,r,-r,r);
  n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
  v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
  cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
  loop 1 to n
    polygon([0,c[#],c[#+1]],[0,s[#],s[#+1]],1);
    if lab!=none then
```

```
      rlab=v[#]+r*0.1;
      {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
      ctext(""+lab[#],col,row-textheight()/2);
    endif;
  end;
  barcolor(cl); barstyle(st);
  holding(h);
  window(w);
endfunction
```

Tidak ada kotak atau kisi di sini. Selain itu, kita menggunakan jendela penuh untuk plot.

Kita panggil reset sebelum kita menguji plot ini untuk mengembalikan default grafis. Ini tidak perlu, jika Anda yakin plot Anda berhasil.

```
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10):
```



Terkadang, Anda mungkin ingin merencanakan sesuatu yang tidak dapat dilakukan plot2d, tetapi hampir.

Dalam fungsi berikut, kita lakukan plot impuls logaritmik. plot2d dapat dilakukan plot logaritmik, tetapi tidak untuk batang impuls.

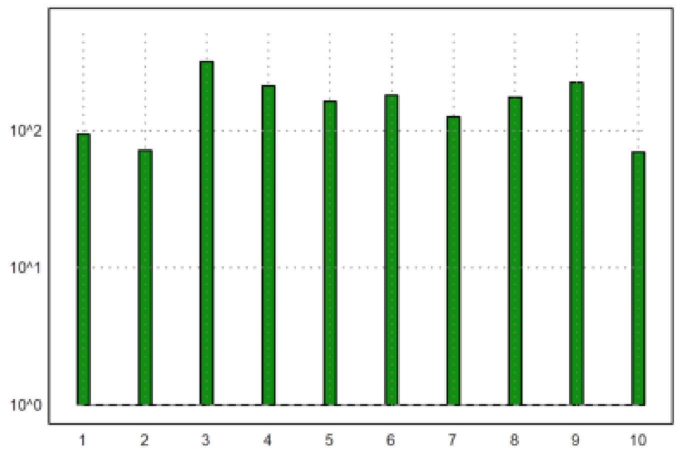
```
>function logimpulseplot1 (x,y) ...
```

```
  {x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
  plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
  h=holding(1);
  frame();
  xgrid(ticks(x));
```

```
  p=plot();
  for i=-10 to 10;
    if i<=p[4] and i>=p[3] then
       ygrid(i,yt="10^"+i);
    endif;
  end;
  holding(h);
endfunction
```

Mari kita uji dengan nilai yang terdistribusi secara eksponensial.

```
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; ...
>logimpulseplot1(x,y):
```



Mari kita menganimasikan kurva 2D menggunakan plot langsung. Perintah plot(x,y) hanya memplot kurva ke jendela plot. setplot(a,b,c,d) mengatur jendela ini.

Fungsi wait(0) memaksa plot untuk muncul di jendela grafik. Jika tidak, menggambar ulang terjadi dalam interval waktu yang jarang.

```
>function animliss (n,m) ...
```

```
t=linspace(0,2pi,500);
f=0;
c=framecolor(0);
l=linewidth(2);
setplot(-1,1,-1,1);
repeat
  clg;
  plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
  wait(0);
  if testkey() then break; endif;
  f=f+0.02;
end;
framecolor(c);
linewidth(l);
endfunction
```

Tekan kunci mana saja untuk memberhentikan animasi ini.

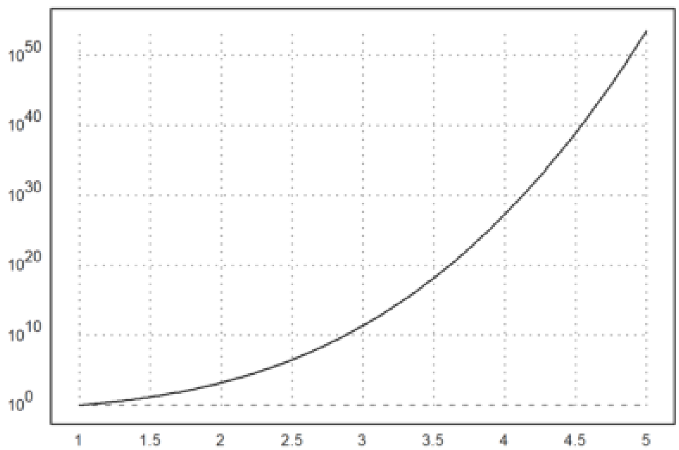
```
>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER
```

Plot Logaritma

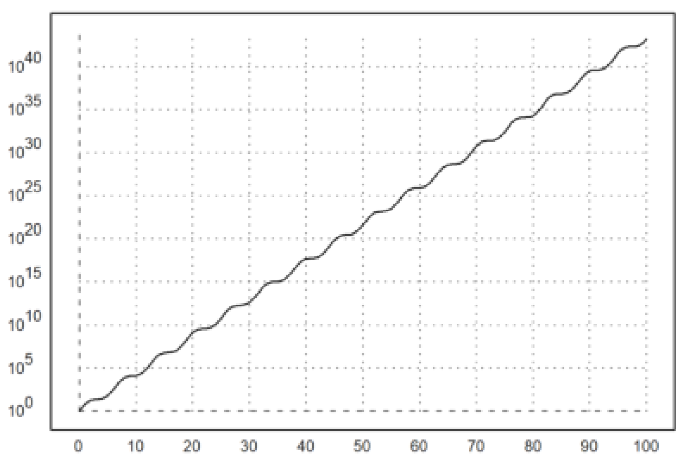
EMT menggunakan parameter "logplot" untuk skala logaritmik.
Plot logaritma dapat diplot baik menggunakan skala logaritma dalam y dengan longplot=1, atau menggunakan skala logaritma dalam x dan y dengan longplot=2, atau dalam x dengan longplot=3.

```
 - logplot=1: logaritma-y
 - logplot=2: logaritma-xy
 - logplot=3: logaritma-x
```

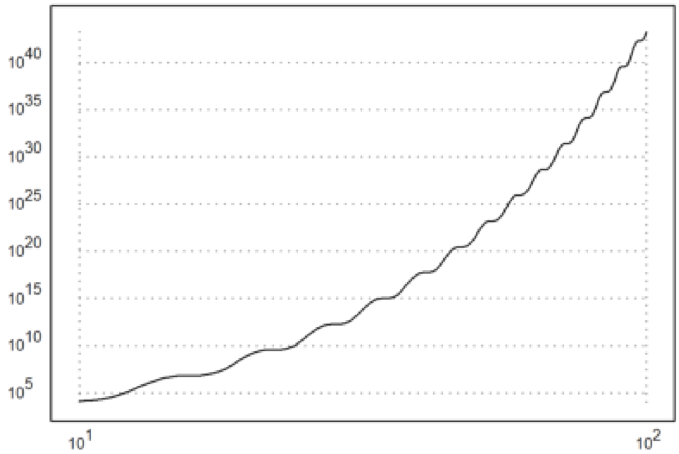
```
>plot2d("exp(x^3-x)*x^2",1,5,logplot=1):
```



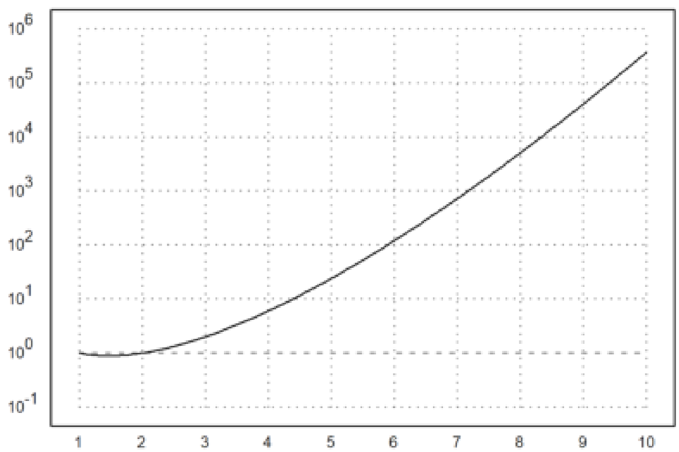

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",0,100,logplot=1):
```



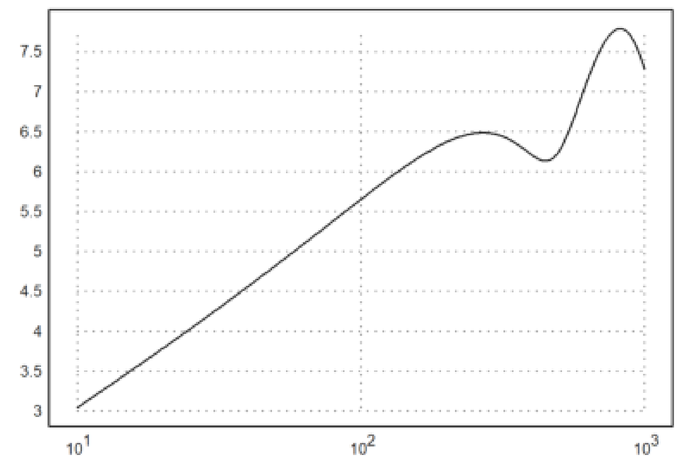
```
>plot2d("exp(x+sin(x))",10,100,logplot=2):
```




```
>plot2d("gamma(x)",1,10,logplot=1):
```

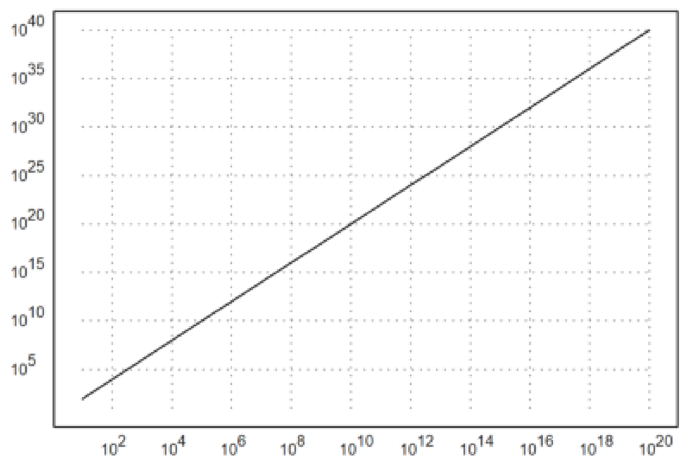



```
>plot2d("log(x*(2+sin(x/100)))",10,1000,logplot=3):
```



Ini juga bekerja dengan plot data.

```
>x=10^(1:20); y=x^2-x;
>plot2d(x,y,logplot=2):
```



```
>
```

Contoh Penyelesaian Masalah tentang materi Plot2D

1. Buatlah Grafik dari Fungsi-fungsi dibawah ini:

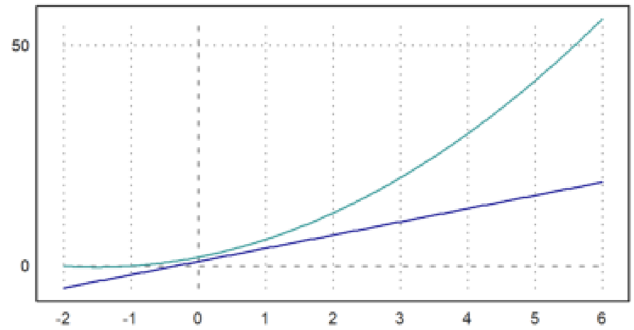
a.

$$f(x) = 3x + 1$$

b.

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

```
>reset;
>function a(x) := 3*x+1
>function b(x) := x^2+3*x+2
>aspect(2), plot2d(["a(x)","b(x)"],-2,6,color=4:5):
```



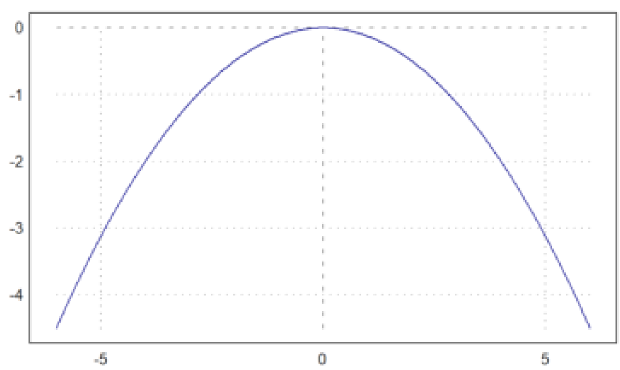
Untuk menggambar suatu grafik dari fungsi satu varibel adalah dengan mencari titik potong garis:
pertama, titik potong pada sumbu y, x=0 disubsitusikan pada fungsi
kedua, titik potong pada sumbu x, y=0 disubsitusikan pada fungsi
Maka, akan ditemukan nilai x dan y sehingga dapat dibuat sebuah garis lurus yang memlalu titik x dan y.

---

2. Buatlah grafik dari suatu persamaan berikut, supaya dapat membentuk suatu bidang geometri:

$$x^2 = -8y$$

```
>reset;
>aspect(16,9), plot2d("-(x^2)/8",-6,6,color=blue):
```



Persamaan

$$x^2 = -8y$$

merupakan persamaan parabola, dikarenakan persamaan parabola memiliki rumus yaitu:

$$x^2 = -4px$$

Persamaan pada soal diketahui bahwa p=4.
Dikarenakan pada plot2d di EMT tidak dapat menggunakan suatu persamaan dengan 2 variabel. Maka, persamaan parabola tersebut akan diubah menjadi suatu fungsi:

$$x^2 = -8y$$

$$\frac{-x^2}{8} = y$$

$$f(x) = \frac{-x^2}{8}$$

---

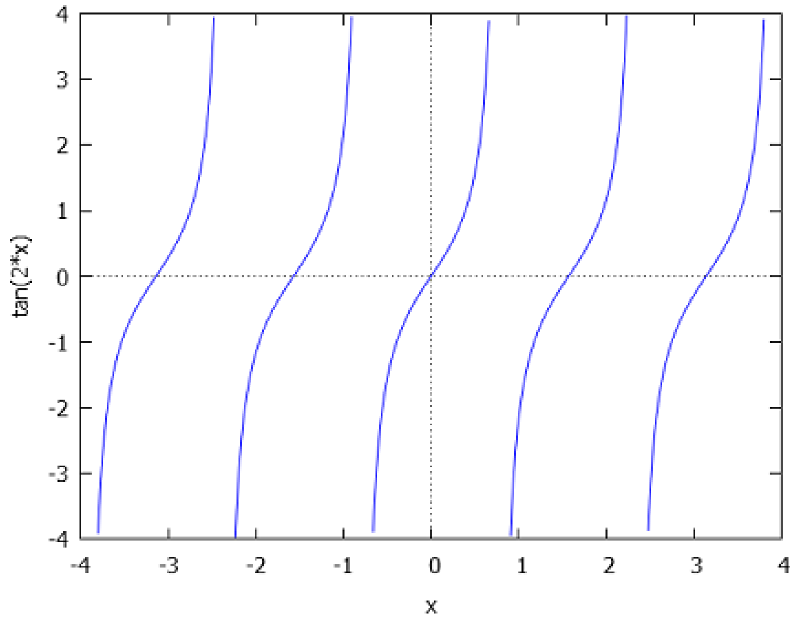
3. Buatlah grafik dari fungsi trigonometri berikut:
a.

$$tan(2x)$$

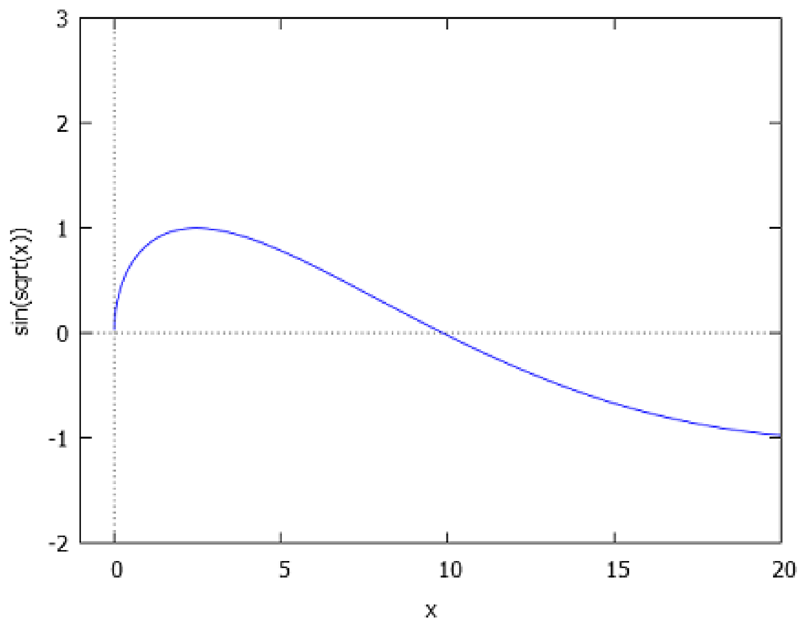
b.

$$sin(\sqrt{x})$$

```
>reset;
>aspect(2), &plot2d(tan(2*x),[x,-4,4],[y,-4,4]):
```



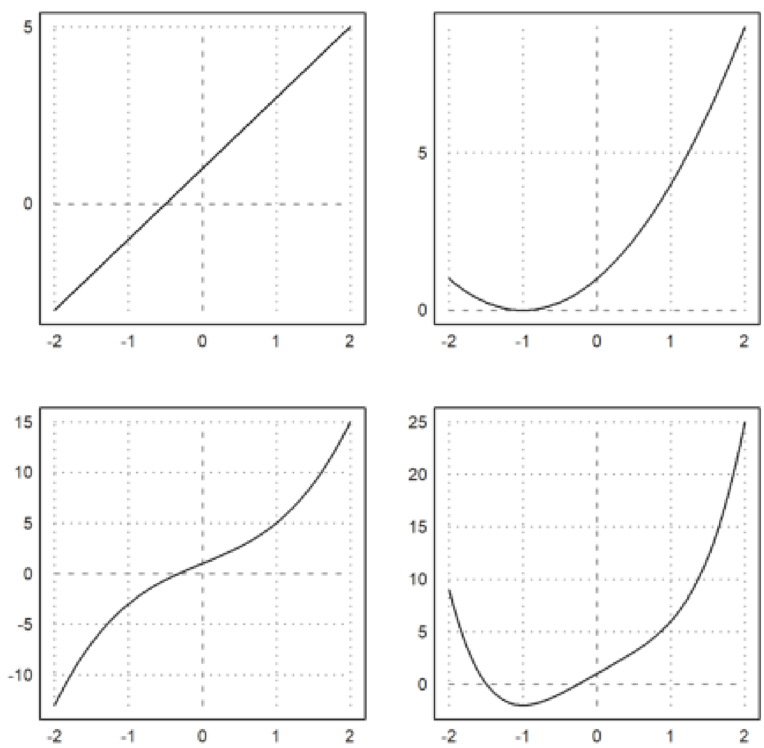

```
>reset;
>aspect(2), &plot2d(sin(sqrt(x)),[x,-1,20],[y,-2,3]):
```



4. Buatlah beberapa grafik dari fungsi

$$f(x) = x^n + nx + 1$$

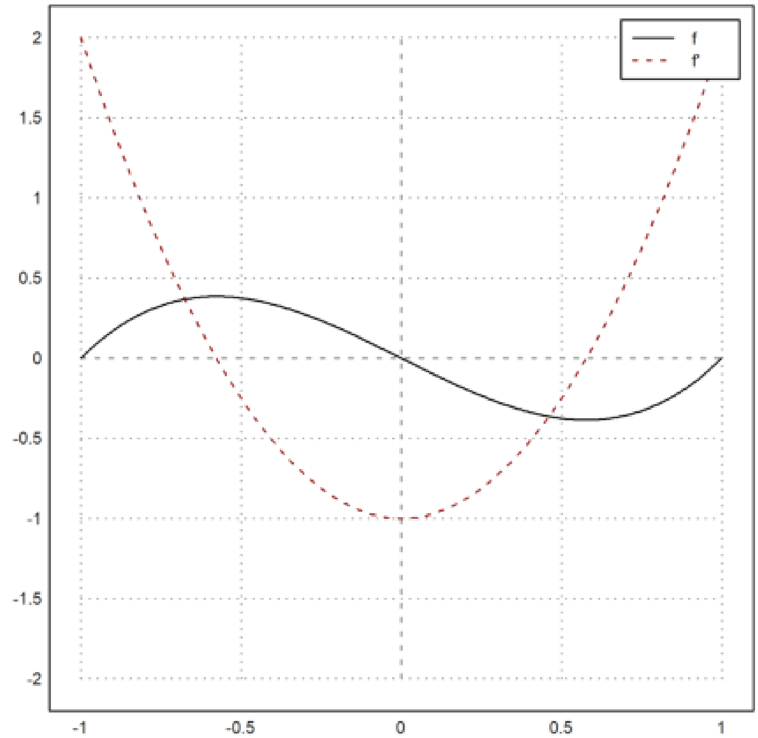
```
>reset;
>figure(2,2); ...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^n+n*x+1"); end; ...
>figure(0):
```



5. Buat grafik dari suatu fungsi serta grafik dari turunan fungsi tersebut:

$$f(x) = x^3 + x^2 + 4x + 1$$

```
>reset;
>function f(x):= x^3+x^2+4*x+1
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2);
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="--",color=red);
>labelbox(["f","f'"],["-","--"],[black,red]):
```



Turunan dari

$$f(x) = x^3 + x^2 + 4x + 1$$

adalah

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 4$$

Untuk Menentukan grafik suatu fungsi 1 varibel dapat dilihat penjelasannya pada contoh soal 1.

Rujukan Lengkap Fungsi plot2d()

```
function plot2d (xv, yv, btest, a, b, c, d, xmin, xmax, r, n,  ..
logplot, grid, frame, framecolor, square, color, thickness, style, ..
auto, add, user, delta, points, addpoints, pointstyle, bar, histogram,  ..
distribution, even, steps, own, adaptive, hue, level, contour,  ..
nc, filled, fillcolor, outline, title, xl, yl, maps, contourcolor, ..
contourwidth, ticks, margin, clipping, cx, cy, insimg, spectral,  ..
cgrid, vertical, smaller, dl, niveau, levels)
```

Multipurpose plot function for plots in the plane (2D plots). This function can do plots of functions of one variables, data plots, curves in the plane, bar plots, grids of complex numbers, and implicit plots of functions of two variables.

Parameters
x,y : equations, functions or data vectors
a,b,c,d : Plot area (default a=-2,b=2)
r : if r is set, then a=cx-r, b=cx+r, c=cy-r, d=cy+r

```
r can be a vector [rx,ry] or a vector [rx1,rx2,ry1,ry2].
```

xmin,xmax : range of the parameter for curves
auto : Determine y-range automatically (default)
square : if true, try to keep square x-y-ranges
n : number of intervals (default is adaptive)
grid : 0 = no grid and labels,

```
1 = axis only,
2 = normal grid (see below for the number of grid lines)
3 = inside axis
4 = no grid
5 = full grid including margin
6 = ticks at the frame
7 = axis only
8 = axis only, sub-ticks
```

frame : 0 = no frame
framecolor: color of the frame and the grid
margin : number between 0 and 0.4 for the margin around the plot
color : Color of curves. If this is a vector of colors,

```
it will be used for each row of a matrix of plots. In the case of
point plots, it should be a column vector. If a row vector or a
full matrix of colors is used for point plots, it will be used for
each data point.
```

thickness : line thickness for curves

```
This value can be smaller than 1 for very thin lines.
```

style : Plot style for lines, markers, and fills.

```
For points use
"[]", "<>", ".", "..", "...",
"*", "+", "|", "-", "o"
"[]#", "<>#", "o#" (filled shapes)
"[]w", "<>w", "ow" (non-transparent)
For lines use
"-", "--", "-.", ".", ".-.", "-.-", "->"
For filled polygons or bar plots use
"#", "#O", "O", "/", "\", "\/",
"+", "|", "-", "t"
```

points : plot single points instead of line segments
addpoints : if true, plots line segments and points
add : add the plot to the existing plot
user : enable user interaction for functions
delta : step size for user interaction
bar : bar plot (x are the interval bounds, y the interval values)
histogram : plots the frequencies of x in n subintervals
distribution=n : plots the distribution of x with n subintervals
even : use inter values for automatic histograms.
steps : plots the function as a step function (steps=1,2)
adaptive : use adaptive plots (n is the minimal number of steps)
level : plot level lines of an implicit function of two variables
outline : draws boundary of level ranges.
If the level value is a 2xn matrix, ranges of levels will be drawn
in the color using the given fill style. If outline is true, it
will be drawn in the contour color. Using this feature, regions of
f(x,y) between limits can be marked.
hue : add hue color to the level plot to indicate the function

```
value
```

contour : Use level plot with automatic levels
nc : number of automatic level lines
title : plot title (default "")
xl, yl : labels for the x- and y-axis
smaller : if >0, there will be more space to the left for labels.
vertical :

```
Turns vertical labels on or off. This changes the global variable
verticallabels locally for one plot. The value 1 sets only vertical
text, the value 2 uses vertical numerical labels on the y axis.
```

filled : fill the plot of a curve
fillcolor : fill color for bar and filled curves
outline : boundary for filled polygons
logplot : set logarithmic plots

```
1 = logplot in y,
2 = logplot in xy,
3 = logplot in x
```

own :

```
A string, which points to an own plot routine. With >user, you get
the same user interaction as in plot2d. The range will be set
before each call to your function.
```

maps : map expressions (0 is faster), functions are always mapped.
contourcolor : color of contour lines
contourwidth : width of contour lines
clipping : toggles the clipping (default is true)
title :

This can be used to describe the plot. The title will appear above the plot. Moreover, a label for the x and y axis can be added with xl="string" or yl="string". Other labels can be added with the functions label() or labelbox(). The title can be a unicode string or an image of a Latex formula.

cgrid :

Determines the number of grid lines for plots of complex grids. Should be a divisor of the the matrix size minus 1 (number of subintervals). cgrid can be a vector [cx,cy].

Overview

The function can plot

- expressions, call collections or functions of one variable,
- parametric curves,
- x data against y data,
- implicit functions,
- bar plots,
- complex grids,
- polygons.

If a function or expression for xv is given, plot2d() will compute values in the given range using the function or expression. The expression must be an expression in the variable x. The range must be defined in the parameters a and b unless the default range should be used. The y-range will be computed automatically, unless c and d are specified, or a radius r, which yields the range
r,r
for x and y. For plots of functions, plot2d will use an adaptive evaluation of the function by default. To speed up the plot for complicated functions, switch this off with <adaptive, and optionally decrease the number of intervals n. Moreover, plot2d() will by default use mapping. I.e., it will compute the plot element for element. If your expression or your functions can handle a vector x, you can switch that off with <maps for faster evaluation.

Note that adaptive plots are always computed element for element. If functions or expressions for both xv and for yv are specified, plot2d() will compute a curve with the xv values as x-coordinates and the yv values as y-coordinates. In this case, a range should be defined for the parameter using xmin, xmax. Expressions contained in strings must always be expressions in the parameter variable x.

BAB 4

KB PEKAN 7-8: MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENGAMBAR GRAFIK 3 DIMENSI (3D)

Menggambar Plot 3D dengan EMT

Ini adalah pengenalan plot 3D di Euler. Kita membutuhkan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dari dua variabel.

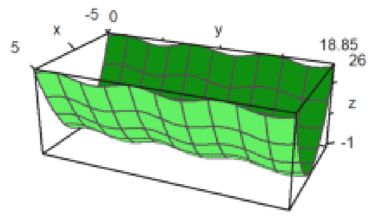
Euler menggambar fungsi tersebut menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian latar belakang. Secara umum, Euler menggunakan proyeksi pusat. Defaultnya adalah dari kuadran-xy positif menuju titik asal x=y=z=0, tetapi angle=0° terlihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan ketinggian dapat diubah.

Euler dapat memplot

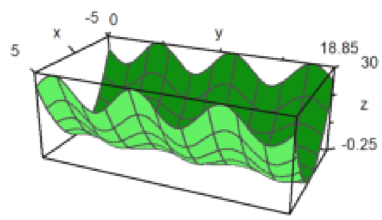
- permukaan dengan bayangan dan garis level atau rentang level,
- titik awan,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D dari suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur kisaran plot di sekitar (0,0).

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",-5,5,0,6*pi):
```

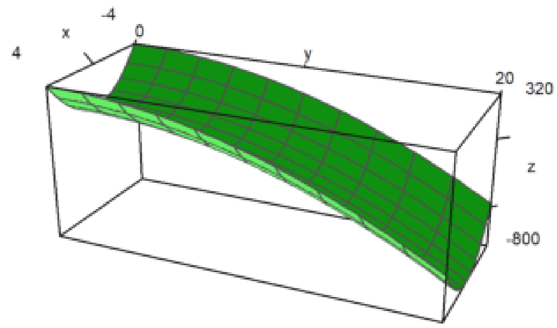



```
>plot3d("x^2+x*sin(y)",-5,5,0,6*pi):
```

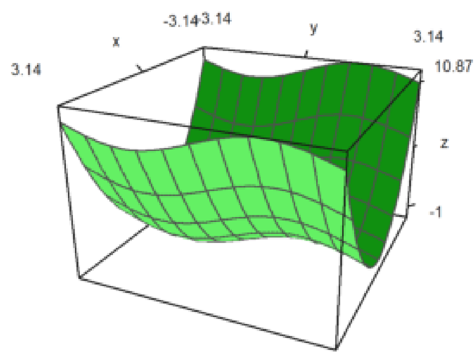


Silakan lakukan modifikasi agar gambar "talang bergelombang" tersebut tidak lurus melainkan melengkung/melingkar, baik melingkar secara mendatar maupun melingkar turun/naik (seperti papan peluncur pada kolam renang. Temukan rumusnya.

```
>aspect(1); plot3d("20*x^2-2*y^2",-4,4,0,20):
```




```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",r=pi):
```



Fungsi Dua Variabel

Untuk grafik suatu fungsi, gunakan

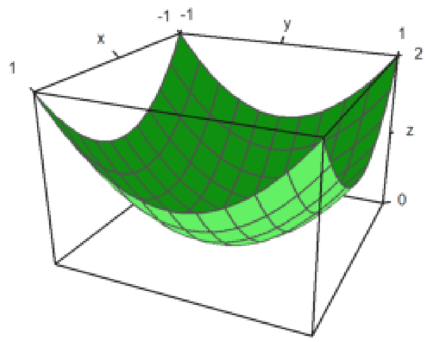
- ekspresi sederhana dalam x dan y,
- nama fungsi dari dua variabel,
- atau data matriks.

Defaultnya adalah kotak kawat yang diisi dengan warna berbeda di kedua sisi. Perhatikan bahwa jumlah default interval kisi adalah 10, tetapi plot menggunakan jumlah default 40x40 persegi panjang untuk membangun permukaan. Ini bisa diubah.

- n=40, n=[40,40]: jumlah garis kisi di setiap arah
- grid=10, grid=[10,10]: jumlah garis kisi di setiap arah

Kita gunakan default n=40 dan grid=10

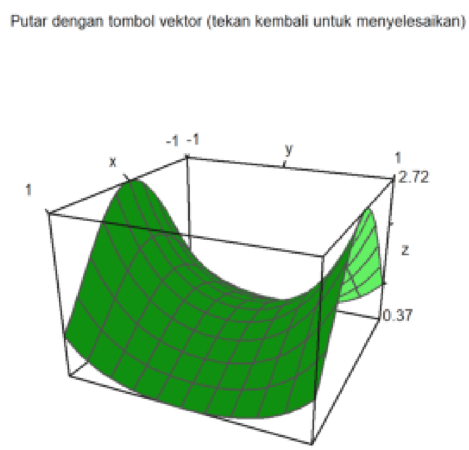
```
>plot3d("x^2+y^2"):
```



Interaksi pengguna dimungkinkan dengan parameter >user. Pengguna dapat menekan tombol berikut.

- kiri, kanan, atas, bawah: memutar sudut pandang
- +,-: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat bawah)
- l: beralih memutar sumber cahaya (lihat bawah)
- spasi: mengatur ulang ke default
- kembali: mengakhiri interaksi

```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user, ...
>  title="Putar dengan tombol vektor (tekan kembali untuk menyelesaikan)"):
```



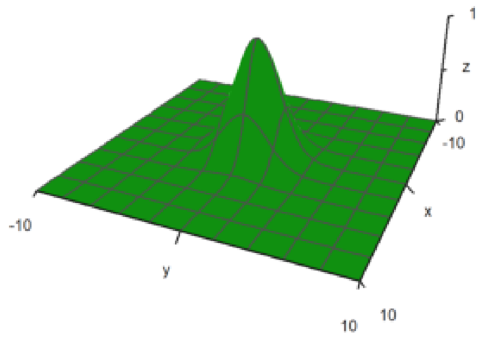
Rentang plot untuk fungsi dapat ditentukan dengan

- a,b: rentang-x
- c,d: rentang-y
- r: persegi simetris di sekitar (0,0).
- n: jumlah subinterval untuk plot.

Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.

fscale: skala ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale).
scale: angka atau vektor 1x2 untuk skala ke arah x dan y.
frame: jenis bingkai (default 1).

```
>plot3d("exp(-(x^2+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):
```



Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.

- distance: jarak pandang ke plot.
- zoom: nilai perbesaran.
- angle: sudut terhadap sumbu-y negatif dalam radian.
- height: ketinggian tampilan dalam radian.

Nilai default dapat diperiksa atau diubah dengan fungsi view(). Ini mengembalikan parameter dalam urutan di atas.

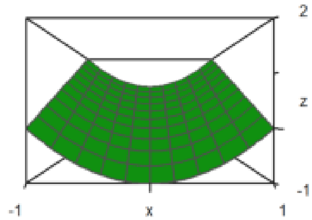
```
>view
```

```
[5,   2.6,   2,   0.4]
```

Jarak yang lebih dekat membutuhkan lebih sedikit perbesaran. Efeknya lebih seperti lensa sudut lebar.

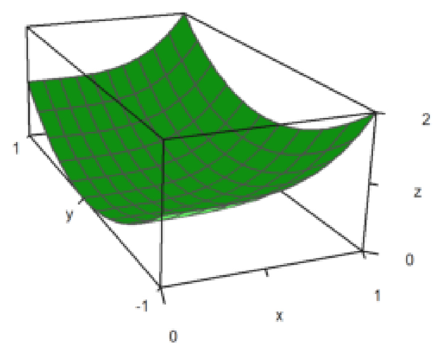
Dalam contoh berikut, angle=0 dan height=0 terlihat dari sumbu-y negatif. Label sumbu untuk y disembunyikan dalam kasus ini.

```
>plot3d("x^2+y",distance=3,zoom=1,angle=0,height=0):
```



Plot terlihat selalu ke pusat plot kubus. Anda dapat memindahkan pusat dengan parameter center.

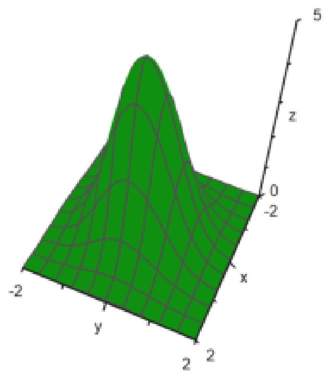
```
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
>   center=[0.4,0,0],zoom=4):
```



Plot diskalakan agar sesuai dengan kubus satuan untuk dilihat. Jadi tidak perlu mengubah jarak atau perbesaran tergantung pada ukuran plot. Namun, label mengacu pada ukuran sebenarnya.

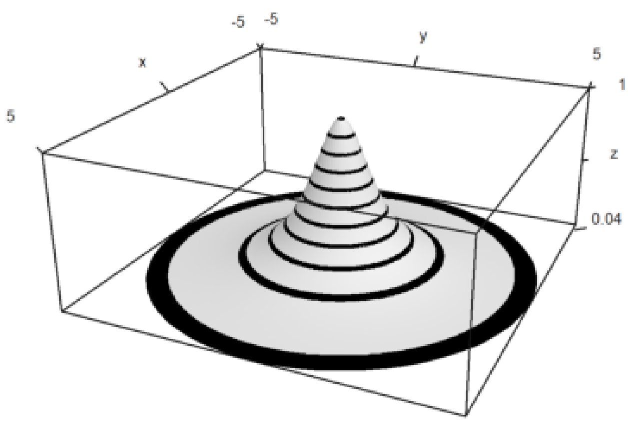
Jika Anda mematikannya dengan scale=false, Anda perlu berhati-hati, bahwa plot masih cocok dengan jendela plot, dengan mengubah jarak pandang atau perbesaran, dan memindahkan pusat.

```
>plot3d("5*exp(-x^2-y^2)",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
>   center=[0,0,-2],frame=3):
```

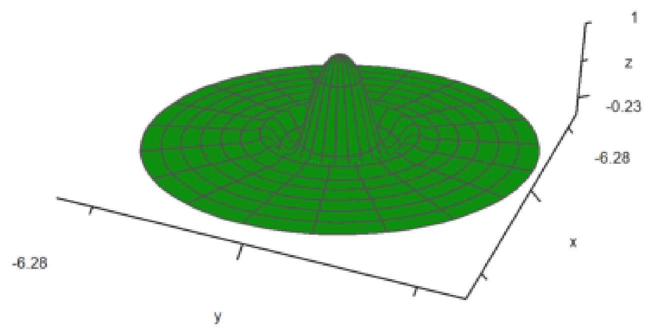


Sebuah plot polar juga tersedia. Parameter polar=true menggambar plot polar. Fungsi tersebut harus tetap merupakan fungsi dari x dan y. Parameter "fscale" menskalakan fungsi dengan skala sendiri. Jika tidak, fungsi diskalakan agar sesuai dengan kubus.

```
>plot3d("1/(x^2+y^2+1)",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=gray):
```



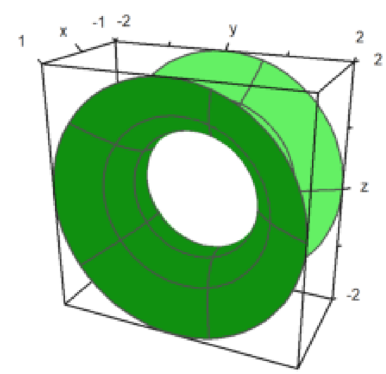

```
>function f(r) := exp(-r/2)*cos(r); ...
>plot3d("f(x^2+y^2)",>polar,scale=[1,1,0.4],r=2pi,frame=3,zoom=4):
```



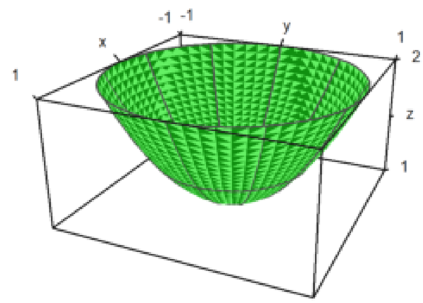
Parameter rotate memutar fungsi dalam x di sekitar sumbu-x.

- rotate=1: Menggunakan sumbu-x
- rotate=2: Menggunakan sumbu-z

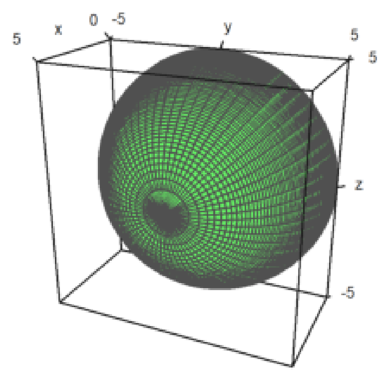
```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5):
```



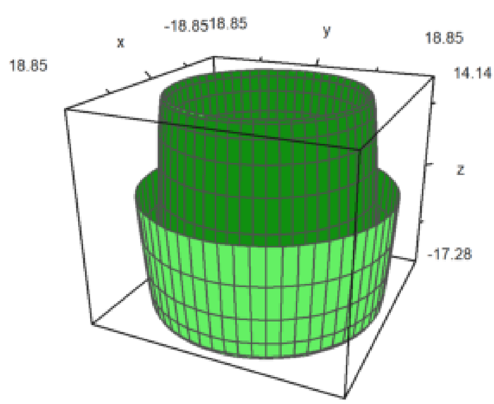

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=2,grid=5):
```




```
>plot3d("sqrt(25-x^2)",a=0,b=5,rotate=1):
```

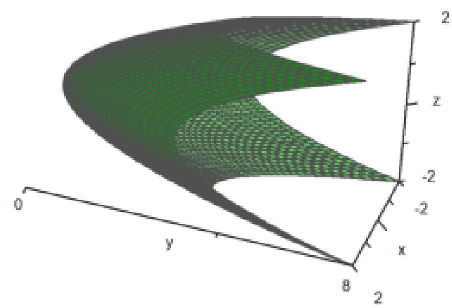



```
>plot3d("x*sin(x)",a=0,b=6pi,rotate=2):
```



Berikut adalah plot dengan tiga fungsi.

```
>plot3d("x","x^2+y^2","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):
```



Plot Kontur

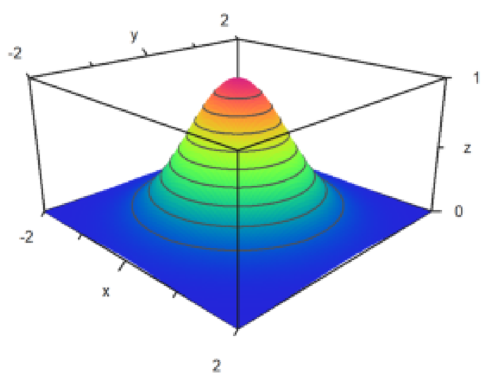
Untuk plot, Euler menambahkan garis kisi. Sebagai gantinya dimungkinkan untuk menggunakan garis level dan rona satu warna atau rona berwarna spektral. Euler dapat menggambar fungsi tinggi pada plot dengan bayangan. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph merah/cyan.

- >hue: Menyalakan bayangan cahaya alih-alih kabel.
- >contour: Memplot garis kontur otomatis pada plot.
- level=... (atau levels): Sebuah vektor nilai untuk garis kontur.

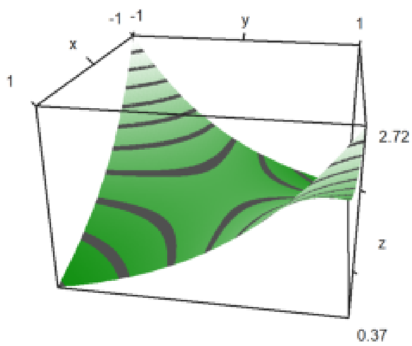
Defaultnya adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.

Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kita gunakan kisi yang lebih halus untuk 100x100 poin, skala fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)",r=2,n=100,level="thin", ...
> >contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):
```



```
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green):
```

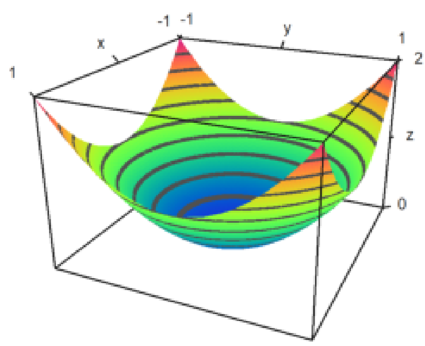


Bayangan default menggunakan warna abu-abu. Tetapi, rentang warna spektral juga tersedia.

- >spectral: Menggunakan skema spektral default
- color=...: Menggunakan warna khusus atau skema spektral

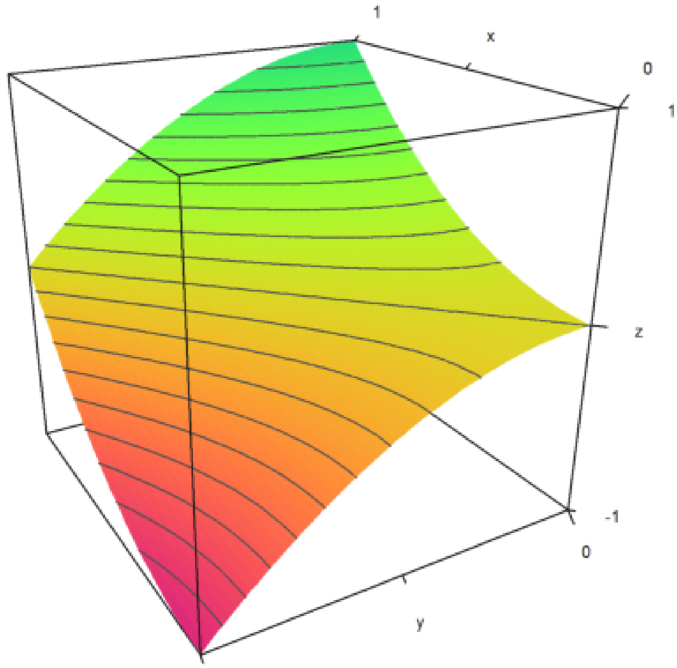
Untuk plot berikut, kita gunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan yang sangat halus.

```
>plot3d("x^2+y^2",>spectral,>contour,n=100):
```



Alih-alih garis level otomatis, kita juga dapat mengatur nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level tipis alih-alih rentang level.

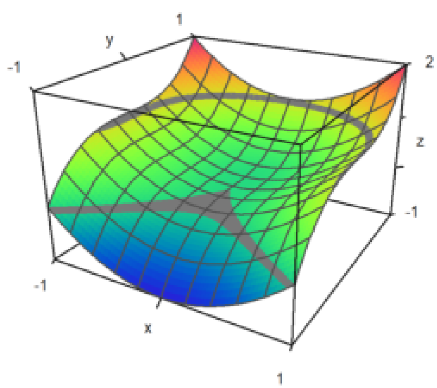
```
>plot3d("x^2-y^2",0,1,0,1,angle=240°,level=-1:0.1:1,color=redgreen):
```



Dalam plot berikut, kita gunakan dua pita level yang sangat luas dari -0.1 hingga 1, dan dari 0.9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas level sebagai kolom.

Selain itu, kita lapisi kisi dengan 10 interval di setiap arah.

```
>plot3d("x^2+y^3",level=[-0.1,0.9;0,1], ...
>   >spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray):
```

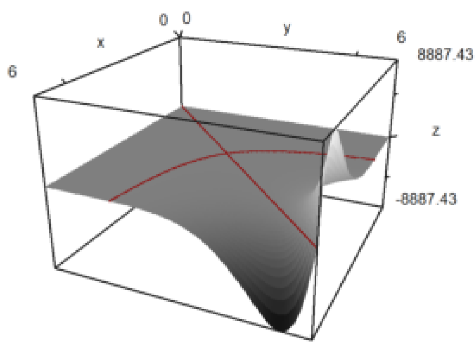


Dalam contoh berikut, kita memplot himpunan, di mana

$$f(x,y) = x^y - y^x = 0$$

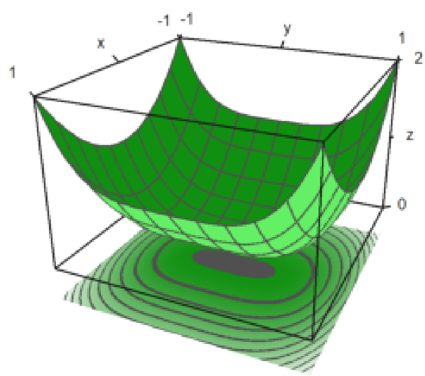
Kita gunakan garis tipis tunggal untuk garis level.

```
>plot3d("x^y-y^x",level=0,a=0,b=6,c=0,d=6,contourcolor=red,n=100):
```



Dimungkinkan untuk menunjukkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

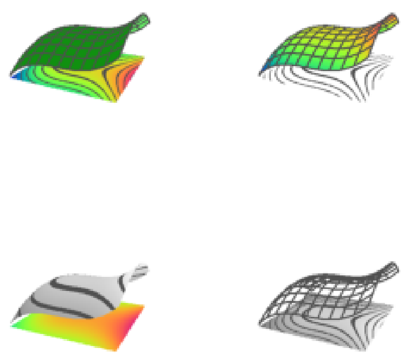
```
>plot3d("x^2+y^4",>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.2):
```



Berikut adalah beberapa gaya lagi. Kita selalu mematikan frame, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan kisi.

```
>figure(2,2); ...
>expr="y^3-x^2"; ...
>figure(1);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
>figure(2);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
```

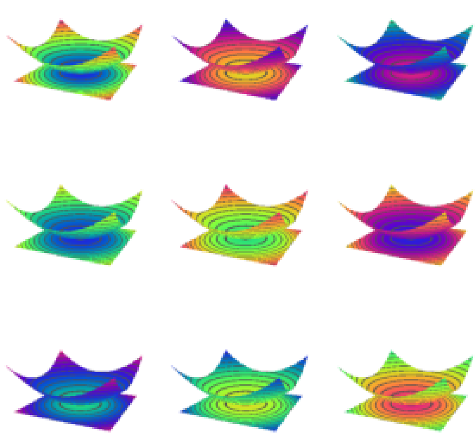
```
>figure(3);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
>figure(4);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
>figure(0):
```



Ada beberapa skema spektral lainnya, diberi nomor 1 hingga 9. Tetapi Anda juga dapat mengggunakan color=value, di mana nilai

- spectral: untuk rentang dari biru ke merah
- white: untuk rentang yang lebih redup
- yellowblue,purplegreen,blueyellow,greenred
- blueyellow, greenpurple,yellowblue,redgreen

```
>figure(3,3); ...
>for i=1:9;  ...
>  figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4);  ...
>end; ...
>figure(0):
```

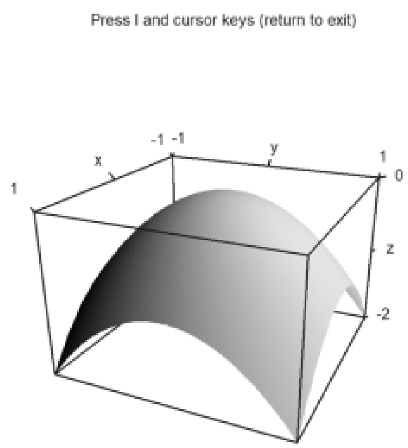


Sumber cahaya dapat diubah dengan 1 dan tombol kursor selama interaksi pengguna. Itu juga dapat diatur dengan parameter.

- light: arah cahaya
- amb: cahaya sekitar antara 0 dan 1

Perhatikan bahwa program tidak membuat perbedaan antara sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda perlu Povray.

```
>plot3d("-x^2-y^2", ...
>  hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, ...
>  title="Press l and cursor keys (return to exit)"):
```

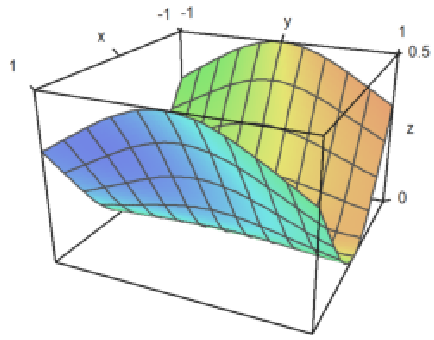


Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga dapat diubah.

```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...
>  zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```

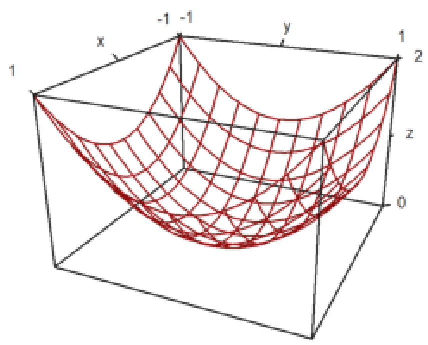
Warna 0 memberikan efek pelangi khusus.

```
>plot3d("x^2/(x^2+y^2+1)",color=0,hue=true,grid=10):
```



Permukaannya juga bisa transparan.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red):
```



Plot Implisit

Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan pemotongan melalui objek. Fitur plot3d termasuk plot implisit. Plot-plot ini menunjukkan himpunan nol dari suatu fungsi dalam tiga variabel.
Solusi dari

$$f(x, y, z) = 0$$

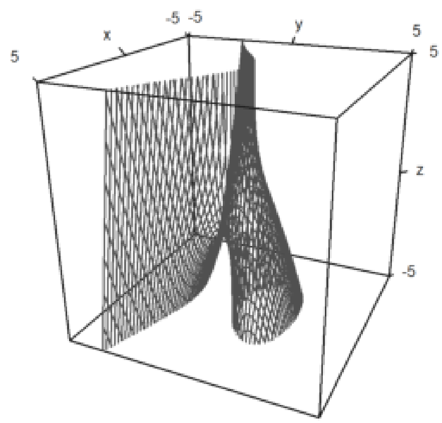
Dapat divisualisasikan dalam potongan sejajar dengan bidang x-y-, x-z-, dan y-z-.

- implicit=1: memotong sejajar dengan bidang-yz
- implicit=2: memotong sejajar dengan bidang-xz
- implicit=4: memotong sejajar dengan bidang-xy

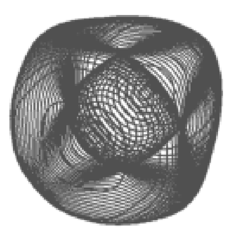
Tambahkan nilai ini, jika Anda mau. Dalam contoh kita memplot

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 + zy = 1\}$$

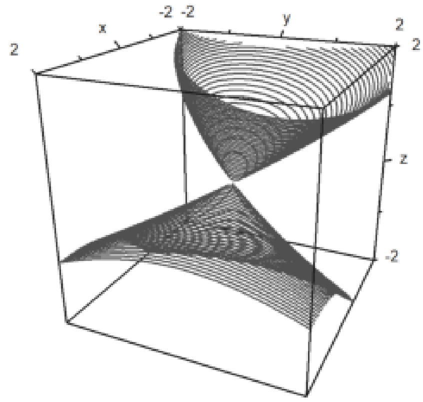
```
>plot3d("x^2+y^3+z*y-1",r=5,implicit=3):
```




```
>c=1; d=1;
>plot3d("((x^2+y^2-c^2)^2+(z^2-1)^2)*((y^2+z^2-c^2)^2+(x^2-1)^2)*((z^2+x^2-c^2)^2+(y^2-1)^
```



```
>plot3d("x^2+y^2+4*x*z+z^3",>implicit,r=2,zoom=2.5):
```



Memplot Data 3D

Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, Anda perlu menyediakan matriks nilai x,y, dan z atau tiga fungsi atau ekspresi fx(x,y), fy(x,y), fz(x,y).

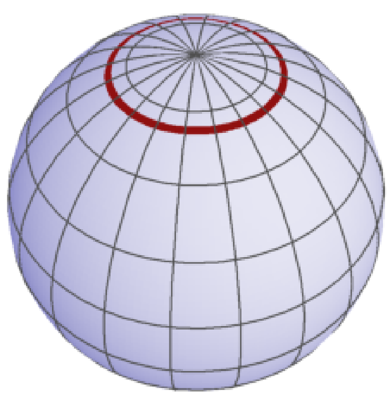
$$\gamma(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$$

Karena x,y,z adalah matriks, kita asumsikan bahwa (t,s) berlari melalui kotak perseg. Hasilnya, Anda dapat memplot gambar persehi panjang di ruang angkasa.

Anda dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.

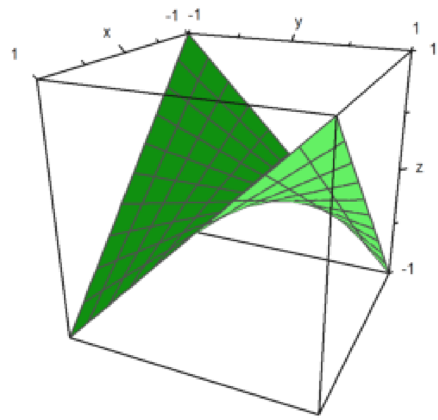
Dalam contoh berikut, kita gunakan vektor nilai t baris dan vektor nilai kolom s untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar kita dapat menandai daerah, dalam kasus kita daerah kutub.

```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)'; ...
>x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s); ...
>plot3d(x,y,z,>hue, ...
>color=blue,<frame,grid=[10,20], ...
>values=s,contourcolor=red,level=[90°-24°;90°-22°], ...
>scale=1.4,height=50°):
```



Berikut adalah contoh, yang merupakan grafik fungsi.

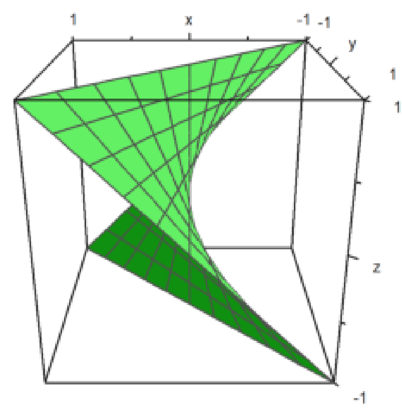
```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s,grid=10):
```



Namun, kita dapat membuat segala macam permukaan. Berikut adalah permukaan yang sama dengan fungsi

$$x = y\,z$$

```
>plot3d(t*s,t,s,angle=180°,grid=10):
```



Dengan lebih banyak usaha, kita dapat menghasilkan banyak permukaan.

Dalam contoh berikut, kita membuat tampilan bayangan dari bola yang terdistorsi. Koordinat biasa untuk bola adalah

$$\gamma(t,s) = (\cos(t)\cos(s), \sin(t)\sin(s), \cos(s))$$

dengan

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad \frac{-\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kita distorsi ini dengan faktor

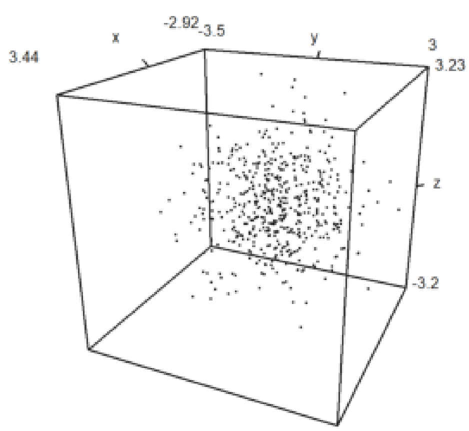
$$d(t, s) = \frac{\cos(4t) + \cos(8s)}{4}.$$

```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)'; ...
>d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s)); ...
>plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1, ...
>  light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```

Tentu saja, titik awan juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita membutuhkan tiga vektor untuk koordinat titik-titik tersebut.

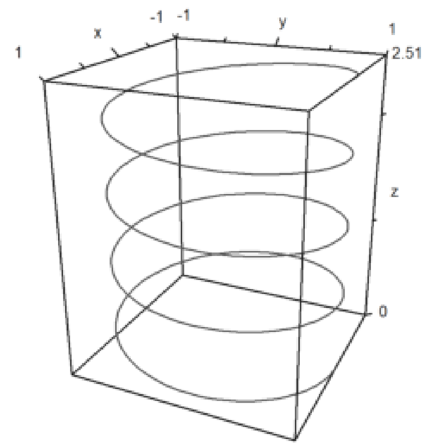
Gayanya sama seperti di plot2d dengan points=true;

```
>n=500;  ...
>  plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style="."):
```

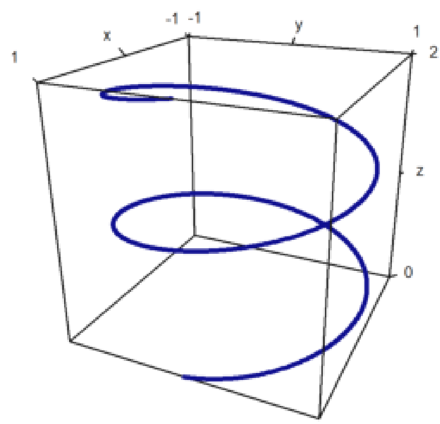


Dimungkinkan juga untuk memplot kurva dalam 3D. Dalam hal ini, lebih mudah untuk menghitung titik-titik kurva. Untuk kurva di bidang kita gunakan urutan koordinat dan parameter wire=true.

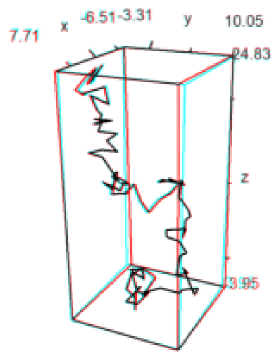
```
>t=linspace(0,8pi,500); ...
>plot3d(sin(t),cos(t),t/10,>wire,zoom=3):
```




```
>t=linspace(0,4pi,1000); plot3d(cos(t),sin(t),t/2pi,>wire, ...
>linewidth=3,wirecolor=blue):
```

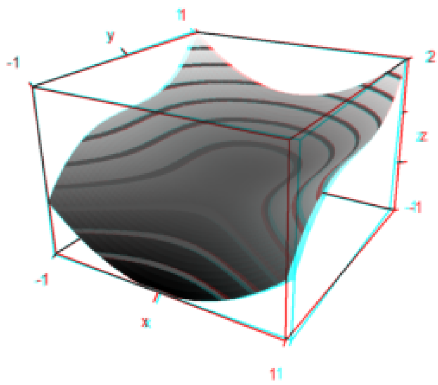



```
>X=cumsum(normal(3,100)); ...
> plot3d(X[1],X[2],X[3],>anaglyph,>wire):
```



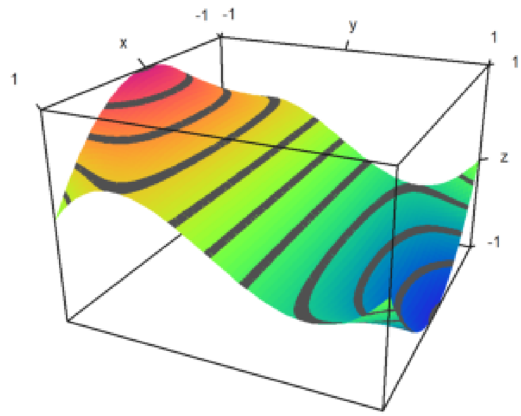
EMT juga dapat memplot dalam mode anaglyph. Untuk melihat plot seperti itu, Anda memerlukan kacamata merah/cyan

```
> plot3d("x^2+y^3",>anaglyph,>contour,angle=30°):
```



Seringkali, skema warna spektral digunakan untuk plot. Ini menekankan fungsi tinggi.

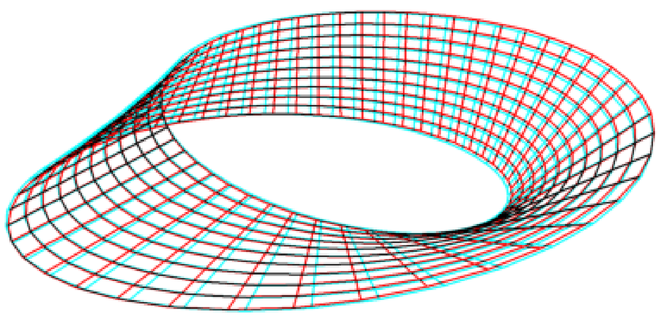
```
>plot3d("x^2*y^3-y",>spectral,>contour,zoom=3.2):
```



Euler juga dapat memplot permukaan berparameter, ketika parameternya adalah nilai x, y, dan z dari gambar kotak persegi panjang dalam ruang.

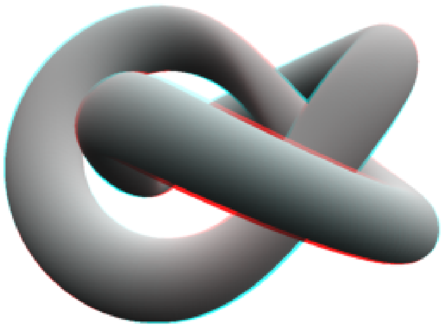
Untuk demo berikut, kita atur parameter u dan v, dan menghasilkan koordinat ruang dari ini.

```
>u=linspace(-1,1,10); v=linspace(0,2*pi,50)'; ...
>X=(3+u*cos(v/2))*cos(v); Y=(3+u*cos(v/2))*sin(v); Z=u*sin(v/2); ...
>plot3d(X,Y,Z,>anaglyph,<frame,>wire,scale=2.3):
```



Berikut adalah contoh yang lebih rumit, yang megah dengan kacamata merah/cyan.

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)';  ...
>x:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); ...
> z=sin(u)+2*cos(3*v); ...
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=2.8,>anaglyph):
```



Plot Statistik

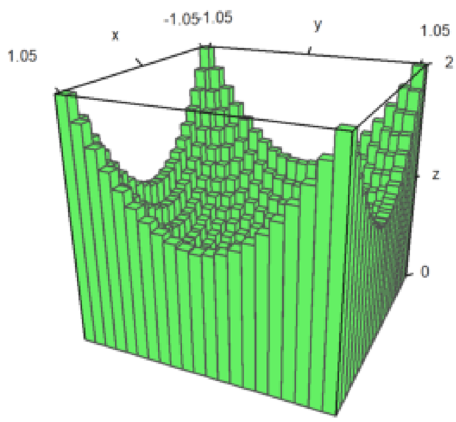
Plot batang juga dimungkinkan. Untuk ini, kita harus menyediakan

- x: vektor baris dengan n+1 elemen
- y: vektor kolom dengan n+1 elemen
- z: nxn nilai matriks

z bisa lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.

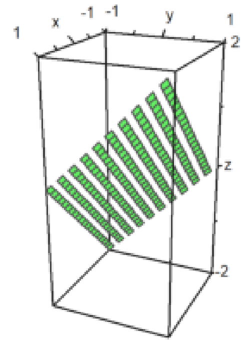
Dalam contoh, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita sesuaikan x dan y, sehingga vektor berpusat pada nilai yang digunakan.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2+y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```



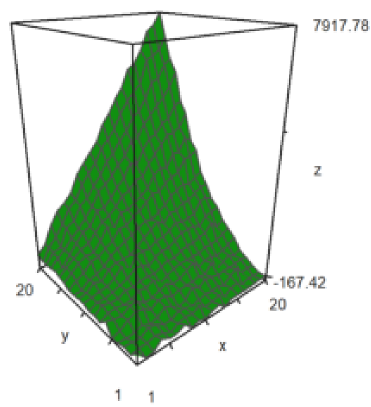
Dimungkinkan untuk membagi plot permukaan menjadi dua atau lebih bagian.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):
```

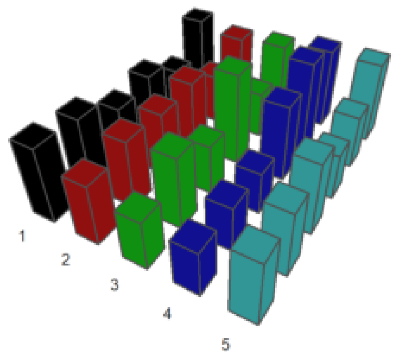


Jika memuat atau menghasilkan matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan scale(M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individu yang diterapkan sebagai tambahan.

```
>i=1:20; j=i'; ...
>plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8):
```

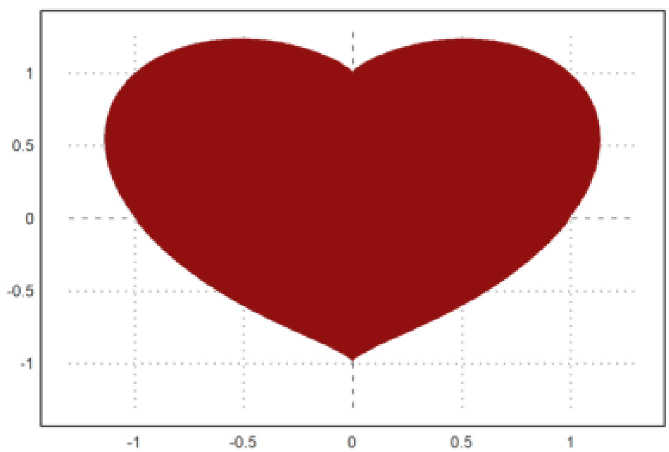



```
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
>loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
```



Permukaan Benda Putar

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>style="#",color=red,<outline, ...
>level=[-2;0],n=100):
```




```
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

$$\left(y^2+x^2-1\right)^3-x^2\,y^3$$

Kita ingin memutar lekukan hati di sekitar sumbu-y. Berikut adalah ekspresi, yang mendefinisikan hati:

$$f(x,y)=(x^2+y^2-1)^3-x^2.y^3.$$

Selanjutnya kita atur

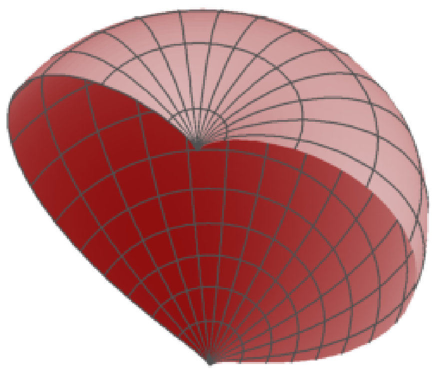
$$x = r.cos(a), \quad y = r.sin(a).$$

```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $fr(r,a)
```

$$\left(r^2-1\right)^3+\frac{\left(\sin\left(5\,a\right)-\sin\left(3\,a\right)-2\,\sin a\right)\,r^5}{16}$$

Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang memecahkan r, jika a diberikan. Dengan fungsi itu kita dapat memplot jantung yang diputar sebagai permukaan parametrik.

```
>function map f(a) := bisect("fr",0,2;a); ...
>t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t);  ...
>s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
>plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
>>hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0,max=0.7,grid=12,height=50°):
```

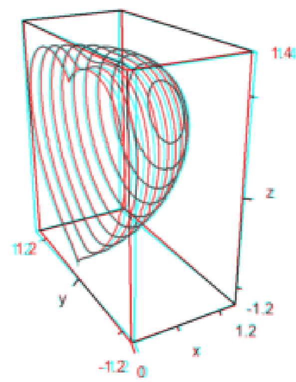


Berikut ini adalah plot3D dari gambar di atas yang diputar di sekitar sumbu-z. Kita definisikan fungsi, yang menggambarkan objek.

```
>function f(x,y,z) ...
```

```
  r=x^2+y^2;
  return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
   endfunction
```

```
>plot3d("f(x,y,z)", ...
>xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
>implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,60,60],>anaglyph):
```



Plot 3D Khusus

Fungsi plot3d bagus untuk dimiliki, tetapi tidak memenuhi semua kebutuhan. Selain rutinitas yang lebih mendasar, dimungkinkan untuk mendapatkan plot berbingkai dari objek apapun yang Anda suka.

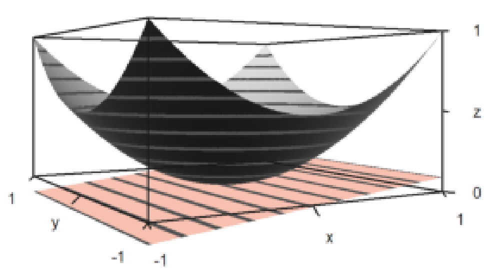
Meskipun Euler bukan program 3D, ia dapat menggabungkan beberapa objek dasar. Kita coba memvisualisasikan paraboloida dan garis singgungnya.

```
>function myplot ...
```

```
    y=-1:0.01:1; x=(-1:0.01:1)';
    plot3d(x,y,0.2*(x-0.1)/2,<scale,<frame,>hue, ..
      hues=0.5,>contour,color=orange);
    h=holding(1);
    plot3d(x,y,(x^2+y^2)/2,<scale,<frame,>contour,>hue);
    holding(h);
  endfunction
```

Sekarang framedplot() menyediakan bingkai, dan mengatur tampilan.

```
>framedplot("myplot",[-1,1,-1,1,0,1],height=0,angle=-30°, ...
>  center=[0,0,-0.7],zoom=3):
```

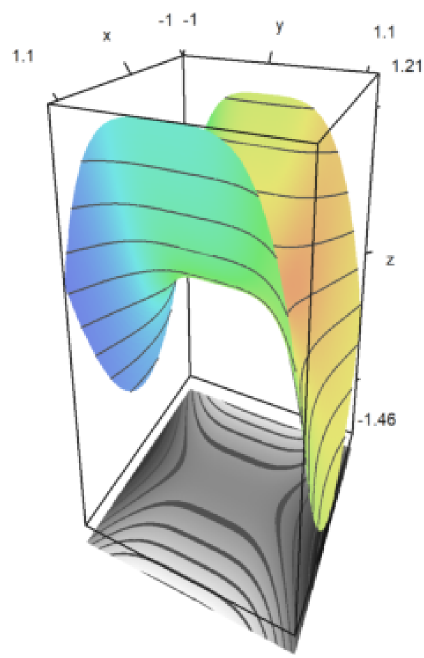


Dengan cara yang sama, Anda dapat memplot bidang kontur secara manual. Perhatikan bahwa plot3d() mengatur jendela ke fullwindow() secara default, tetapi plotcontourplane() mengasumsikan itu.

```
>x=-1:0.02:1.1; y=x'; z=x^2-y^4;
>function myplot (x,y,z) ...
```

```
    zoom(2);
    wi=fullwindow();
    plotcontourplane(x,y,z,level="auto",<scale);
    plot3d(x,y,z,>hue,<scale,>add,color=white,level="thin");
    window(wi);
    reset();
  endfunction
```

```
>myplot(x,y,z):
```



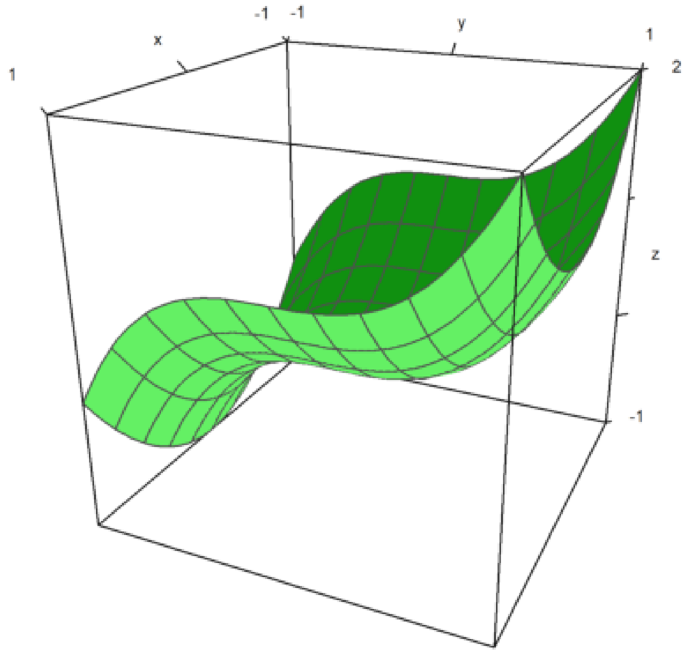
Animasi

Euler dapat menggunakan frame untuk menghitung animasi terlebih dahulu.

Salah satu fungsi yang memanfaatkan teknik ini adalah rotate. Ini dapat mengubah sudut pandang dan menggambar ulang plot 3D. Fungsi memanggil addpage() untuk setiap plot baru. Akhirnya itu menganimasikan plot.

Silakan pelajari sumber rotate untuk melihat lebih detail.

```
>function testplot () := plot3d("x^2+y^3"); ...
>rotate("testplot"); testplot():
```



Menggambar Povray

Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.

Anda perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari http://www.povray.org/
dan meletakkan sub-direktori "bin" dari Povray ke path lingkungan, atau mengatur variabel "defaultpovray" dengan path lengkap yang menunjuk ke :pvengine.exe".

Antarmuka Povray dari Euler menghasilkan file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk mengurai file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori default adalah eulerhome(), biasanya c:Users\Username\Euler. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam notebook. Untuk mmebersihkan file-file ini, gunakan povclear().

Fungsi pov3d memiliki semangat yang sama dengan plot3d. Ini bisa menghasilkan grafik fungsi f(x,y), atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat adegan ke dalam notebook Euler.

Selain pov3d(), ada banyak fungsi yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, yang berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart(). Kemudian gunakan write1n(...) untuk menulis objek ke file adegan. Terakhir, akhiri file dengan povend(). Secara default, raytracer akan dimulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam notebook Euler.

Fungsi objek memiliki parameter yang disebut "look", yang membutuhkan string dengan kode Povray untuk tekstur dan hasil akhir objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Shading Pong dll.

Perhatikan bahwa dunia Povray memiliki sistem koordinat lain. Antarmuka ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk vertikal ke atas, dan sumbu x,y,z dalam arti tangan kanan.
Anda perlu memuat file povray.

```
>load povray;
```

Pastikan direktori Povray bin di path. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi path ke povray yang dapat dieksekusi.

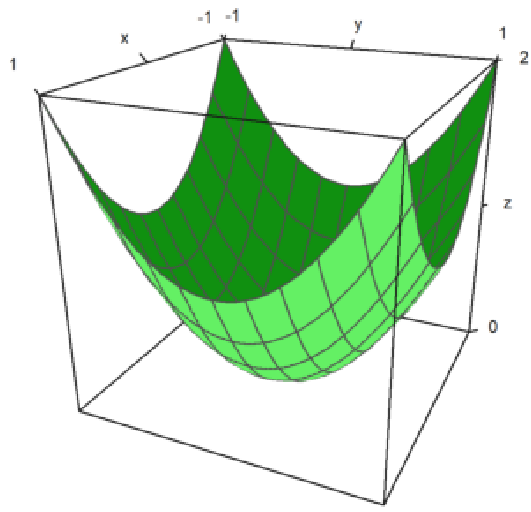
```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

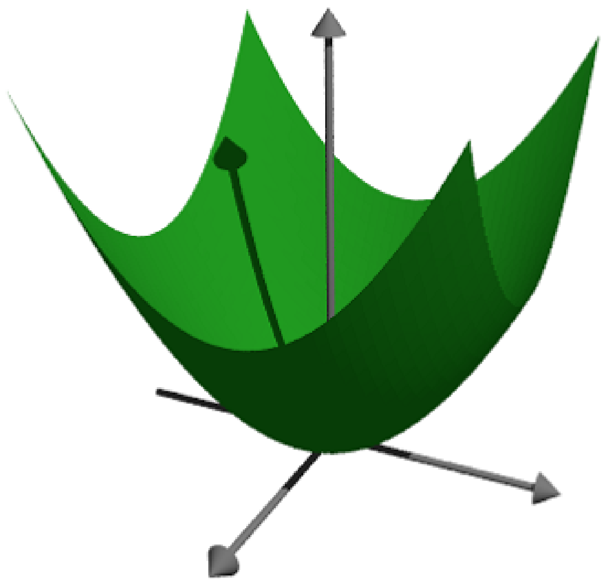
Untuk kesan pertama, kita memplot fungsi sederhana. Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna Anda, dan menjalankan Povray untuk ray tracing file ini.

Jika Anda memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, Anda akan ditanya, apakah Anda ingin mengizinkan file exe untuk dijalankan. Anda dapat menekan cancel untuk menghentikan pertanyaan lebih lanjut. Anda mungkin harus menekan OK di jendela Povray untuk mengakui dialog awal Povray.

```
>plot3d("x^2+y^2",zoom=2):
```

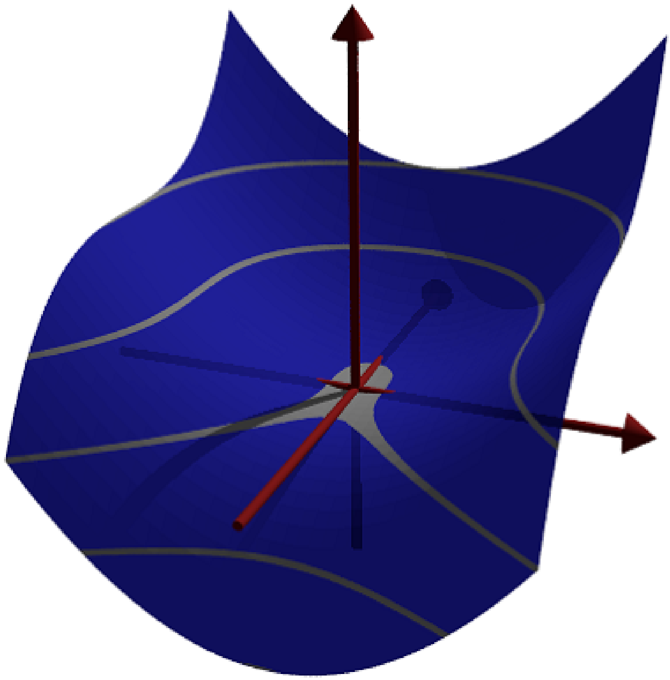



```
>pov3d("x^2+y^2",zoom=3);
```



Kita dapat membuat fungsi transparan dan menambahkan hasil akhir lainnya. Kita juga dapat menambahkan garis level ke plot fungsi.

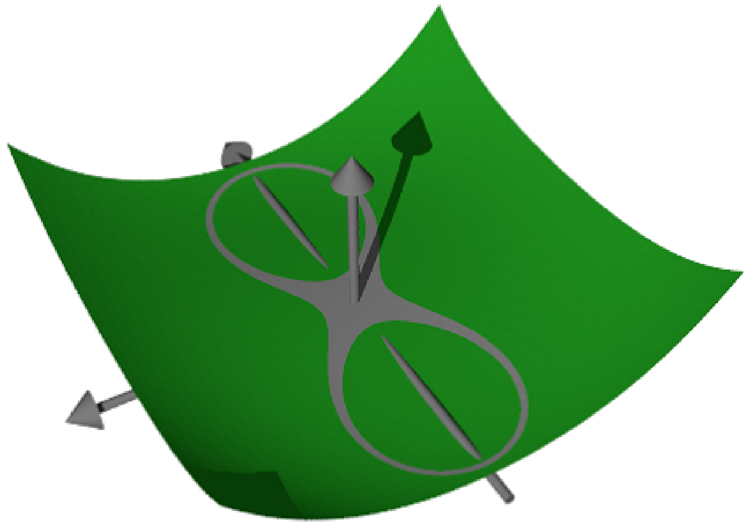
```
>pov3d("x^2+y^3",axiscolor=red,angle=20°, ...
>  look=povlook(blue,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3.8);
```



Terkadang perlu untuk mencegah penskalaan fungsi, dan menskalakan fungsi dengan tangan.

Kita plot himpunan titik di bidang kompleks, di mana produk dari jarak ke 1 dan -1 sama dengan 1.

```
>pov3d("((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)/40",r=1.5, ...
>  angle=-120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=45°,n=50, ...
>  <fscale,zoom=3.8);
```



Memplot dengan Koordinat

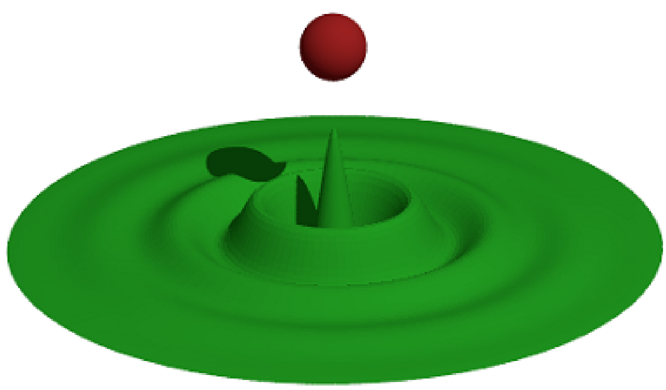
Alih-alih fungsi, kita dapat memplot dengan koordinat. Seperti pada plot3d, kita membutuhkan tiga matriks untuk mendefinisikan objek.

Dalam contoh kita memutar fungsi di sekitar sumbu-z.

```
>function f(x) := x^3-x+1; ...
>x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,8)'; ...
>Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...
>pov3d(X,Y,Z,angle=40°,height=20°,axis=0,zoom=4,light=[10,-5,5]);
```

Dalam contoh berikut, kita plot gelombang teredam. Kita hasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler. Kita juga tunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d meskalakan plot, sehingga cocok dengan kubus satuan.

```
>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...
>x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3;  ...
>pov3d(x,y,z,zoom=5,axis=0,add=povsphere([0,0,0.5],0.1,povlook(red)), ...
>  w=500,h=300);
```



Dengan metode bayangan yang canggih dari Povray, sangat sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya di perbatasan dan dalam bayang-bayang triknya mungkin menjadi jelas.

Untuk ini, kita perlu menambahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```

```
 2  3
x  y
```

Persamaan permukaannya adalah [x,y,z]. Kita hitung dua turunan terhadap x dan y ini dan mengambil produk silang sebagai normal.

```
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);
```

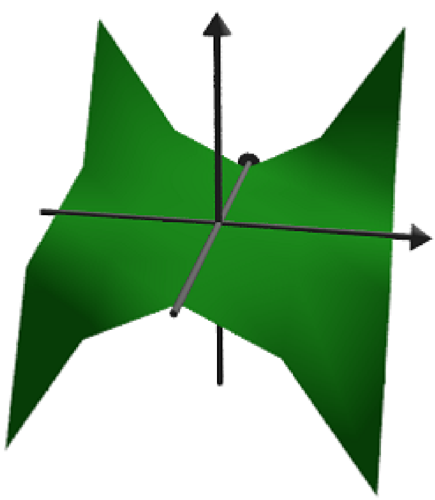
Kita definisikan normal sebagai produk silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat.

```
>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,
```

```
           3         2  2
[- 2 x y , - 3 x  y , 1]
```

Kita hanya menggunakan 25 titik.

```
>x=-1:0.5:1; y=x';
>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...
>  xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y),<shadow);
```



Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dilakukan oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang ditingkatkan dari ini dalam contoh.

See: Examples\Trefoil Knot | Trefoil Knot

Untuk tampilan yang bagus dengan tidak terlalu banyak titik, kita tambahkan vektor normal di sini. Kita gunakan Maxima untuk menghitung normal untuk kita. Pertama, ketiga fungsi koordinat sebagai ekspresi simbolik.

```
>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
>Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
>Z &= sin(x)+2*cos(3*y);
```

Kemudian kedua vektor turunan terhadap x dan terhadap y.

```
>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);
```

Sekarang normal, yang merupakan produk silang dari dua turunan.

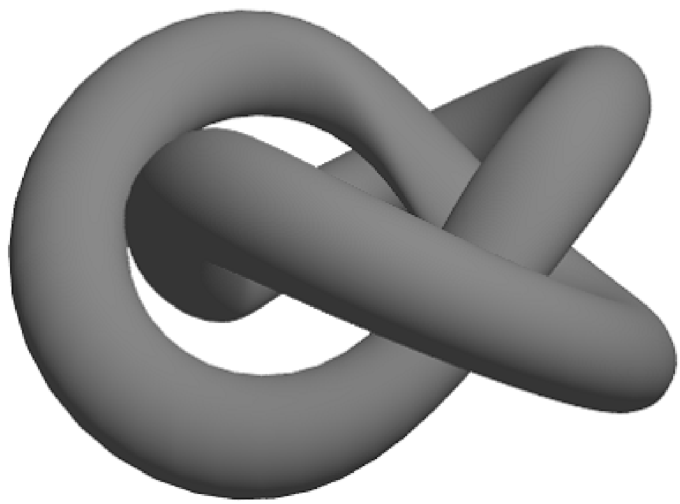
```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

Kita sekarang mengevaluasi semua ini secara numerik.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

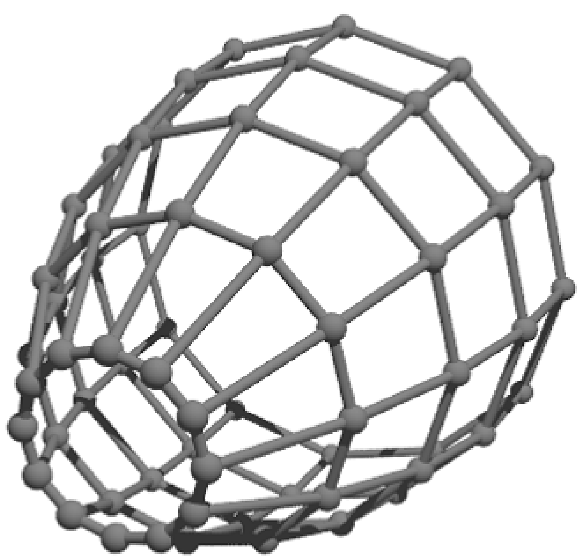
Vektor normal adalah evaluasi dari ekspresi simbolik dn[i] untuk i=1,2,3. Sintaks untuk ini adalah &"expression"(paramters). Ini adalah alternatif dari metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
>  <shadow,look=povlook(gray), ...
>  xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```



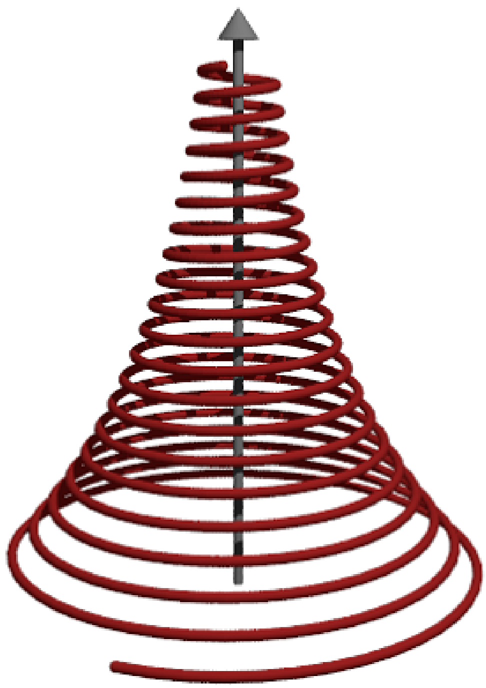
Kita juga dapat menghasilkan kisi dalam 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```



Dengan povgrid(), kurva dimungkinkan.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
>t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
>x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
>writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
>writeAxis(0,2,axis=3); ...
>povend();
```



Objek Povray

Di atas, kita menggunakan pov3d untuk memplot permukaan. Antarmuka povray di Euler juga dapat menghasilkan objek Povray. Objek-objek ini disimpan sebagai string di Euler, dan perlu ditulis ke file Povray.

Kita memulai output dengan povstart().

```
>povstart(zoom=4);
```

Pertama kita mendefinisikan tiga silinder, dan menyimpannya dalam string di Euler.

Fungsi povx() dll. hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(red)); ...
>c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(green)); ...
>c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(blue)); ...
```

String berisi kode Povray, yang tidak perlu kita pahami pada saat itu.

```
>c1
```

```
 cylinder { <-1,0,0>, <1,0,0>, 1
  texture { pigment { color rgb <0.564706,0.0627451,0.0627451> }  }
  finish { ambient 0.2 }
  }
```

Seperti yang Anda lihat, kita menambahkan tekstur ke objek dalam tiga warna berbeda.

Ini dilakukan oleh povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan warna Euler default, atau menentukan warna kita sendiri. Kita juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

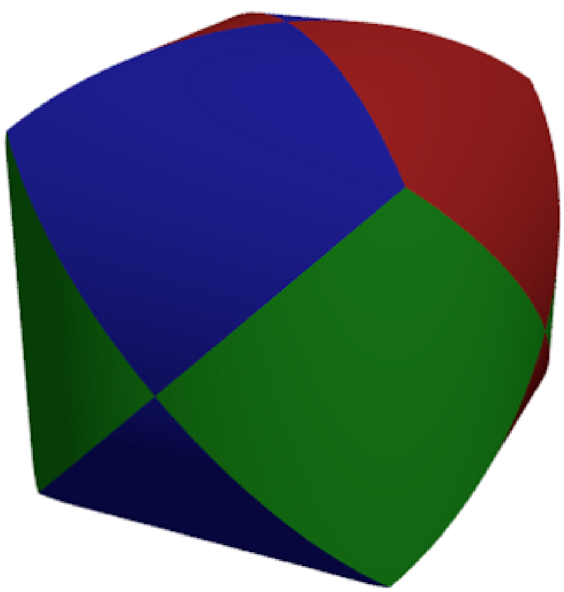
```
  texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1> }  }
  finish { ambient 0.5 }
```

Sekarang kita mendefinisikan objek persimpangan, dan menulis hasilnya ke file.

```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
```

Persimpangan tiga silinder sulit untuk divisualisasikan, jika Anda belum pernah melihatnya sebeleumnya.

```
>povend;
```



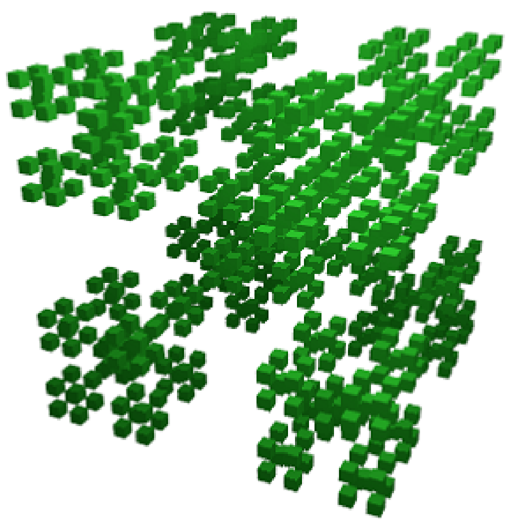
Fungsi berikut menghasilkan pecahan secara rekursif.

Fungsi pertama menunjukkan, bagaimana Euler menangani objek Povray sederhana. Fungsi povbox() mengembalikan string, yang berisi kooordinat kotak, tekstur, dan hasil akhir.

```
>function onebox(x,y,z,d) := povbox([x,y,z],[x+d,y+d,z+d],povlook());
>function fractal (x,y,z,h,n) ...
```

```
   if n==1 then writeln(onebox(x,y,z,h));
   else
     h=h/3;
     fractal(x,y,z,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y,z,h,n-1);
     fractal(x,y+2*h,z,h,n-1);
     fractal(x,y,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y+2*h,z,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+h,y+h,z+h,h,n-1);
   endif;
  endfunction
```

```
>povstart(fade=10,<shadow);
>fractal(-1,-1,-1,2,4);
>povend();
```



Perbedaan memungkinkan memotong satu objek dari yang lain. Seperti persimpangan, ada bagian dari objek CSG Povray.

```
>povstart(light=[5,-5,5],fade=10);
```

Untuk demonstrasi ini, kita definisikan objek di Povray, alih-alih menggunakan string di Euler. Definisi ditulis ke file segera.

Koordinat kotak -1 berarti [-1,-1,-1].

```
>povdefine("mycube",povbox(-1,1));
```

Kita dapat menggunakan objek di povobject(), yang mengembalikan string seperti biasa.

```
>c1=povobject("mycube",povlook(red));
```

Kita hasilkan kubus kedua, dan memutar dan menskalakannya sedikit.

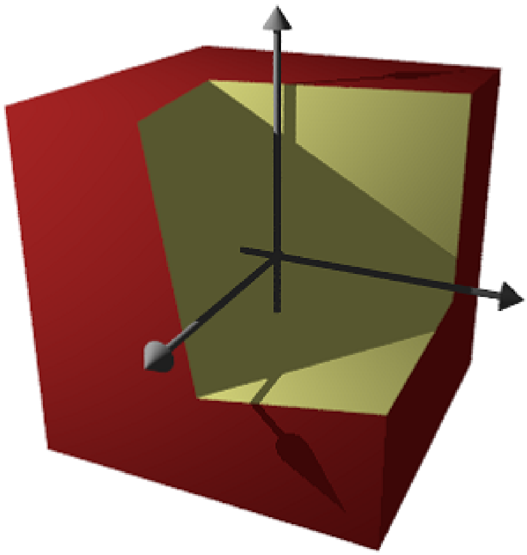
```
>c2=povobject("mycube",povlook(yellow),translate=[1,1,1], ...
>  rotate=xrotate(10°)+yrotate(10°), scale=1.2);
```

Kemudian kita ambil selisih kedua benda tersebut.

```
>writeln(povdifference(c1,c2));
```

Sekarang tambahkan tiga sumbu.

```
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=1); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=2); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=4); ...
>povend();
```



Fungsi Implisit

Povray dapat memplot himpunan di mana f(x,y,z)=0, seperti parameter implisit di plot3d. Namun, hasilnya terlihat jauh lebih baik.

Sintaks untuk fungsinya sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan output dari ekspresi Maxima atau Euler.

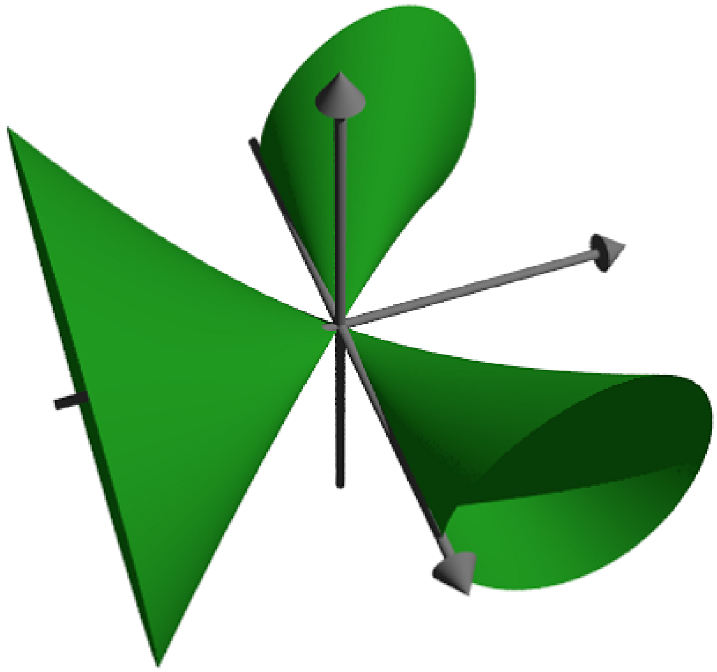
```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
>c=0.1; d=0.1; ...
>writeln(povsurface("(pow(pow(x,2)+pow(y,2)-pow(c,2),2)+pow(pow(z,2)-1,2))*(pow(pow(y,2)+p
>povend();
```

```
>povstart(angle=25°,height=10°);
>writeln(povsurface("pow(x,2)+pow(y,2)*pow(z,2)-1",povlook(blue),povbox(-2,2,"")));
>povend();
```

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
```

Buat permukaan implisit. Perhatikan sintaks yang berbeda dalam ekspresi.

```
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...
>writeAxes(); ...
>povend();
```



Objek Mesh

Dalam contoh ini, kita tunjukkan cara membuat objek mesh, dan menggambarnya dengan informasi tambahan.

Kita ingin memaksimalkan xy di bawah kondisi x+y=1 dan menunjukkan sentuhan tangensial dari garis level.

```
>povstart(angle=-10°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=7);
```

Kita tidak dapat menyimpan objek dalam string seperti sebelumnya, karena terlalu besar. Jadi kita mendefinisikan objek dalam file Povray menggunakan declare. Fungsi povtriangle() melakukan ini secara otomatis. Itu dapat menerima vektor normal seperti pov3d().

Berikut ini mendefinisikan objek mesh, dan langsung menulisnya ke dalam file.

```
>x=0:0.02:1; y=x'; z=x*y; vx=-y; vy=-x; vz=1;
>mesh=povtriangles(x,y,z,"",vx,vy,vz);
```

Sekarang kita mendefinisikan dua cakram, yang akan berpotongan dengan permukaan.

```
>cl=povdisc([0.5,0.5,0],[1,1,0],2); ...
>ll=povdisc([0,0,1/4],[0,0,1],2);
```

Tulis permukaan yang dikurangi dua cakram.

```
>writeln(povdifference(mesh,povunion([cl,ll]),povlook(green)));
```

Tulis dua persimpangan.

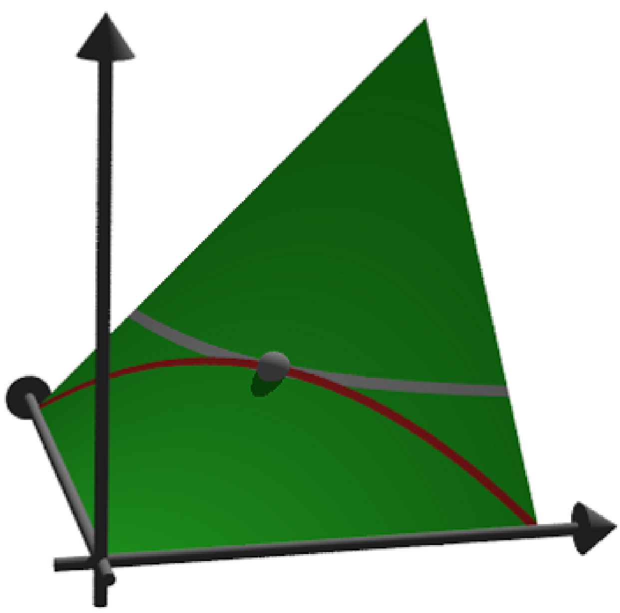
```
>writeln(povintersection([mesh,cl],povlook(red))); ...
>writeln(povintersection([mesh,ll],povlook(gray)));
```

Tulis titik maksimum.

```
>writeln(povpoint([1/2,1/2,1/4],povlook(gray),size=2*defaultpointsize));
```

Tambahkan sumbu dan selesaikan.

```
>writeAxes(0,1,0,1,0,1,d=0.015); ...
>povend();
```



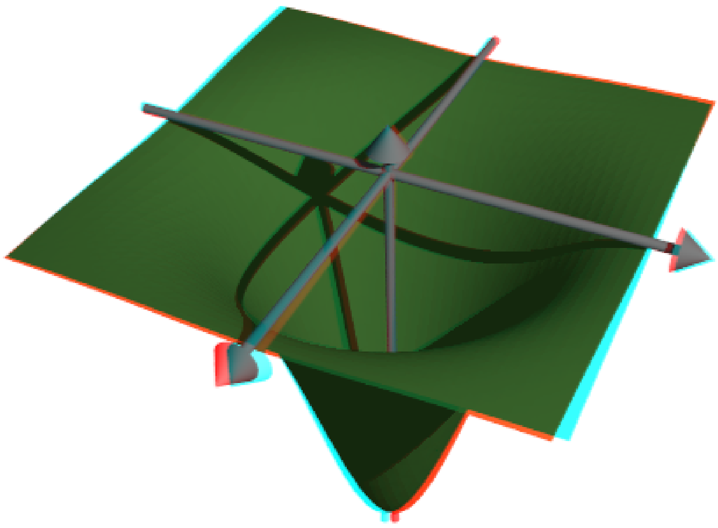
Anaglyphs di Povray

Untuk menghasilkan anglyph untuk kacamata merah/cyan, Povray harus dijalankan dua kali dari posisi kamera yang berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph().

Tentu saja, Anda memerlukan kacamata merah/cyan untuk melihat contoh berikut dengan benar.

Fungsi pov3d() memiliki pengalihan sederhana untuk menghasilkan anaglyhph.

```
>pov3d("-exp(-x^2-y^2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
>  center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```



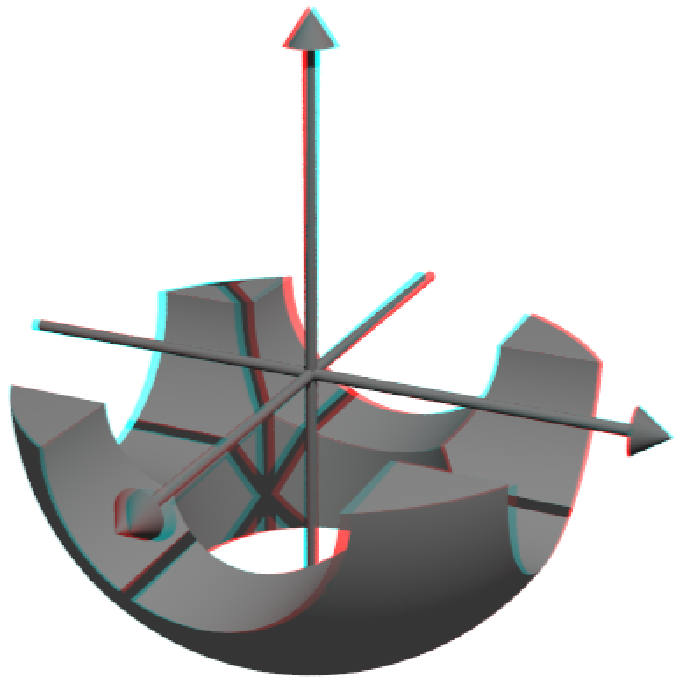
Jika Anda membuat adegan dengan objek, Anda perlu menempatkan generasi adegan ke dalam fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai yang berbeda untuk parameter anaglyph.

```
>function myscene ...
```

```
    s=povsphere(povc,1);
    cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);
    clx=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));
    cly=povobject(cl,rotate=yrotate(90°));
    c=povbox([-1,-1,0],1);
    un=povunion([cl,clx,cly,c]);
    obj=povdifference(s,un,povlook(red));
    writeln(obj);
    writeAxes();
  endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameternya seperti di povstart() dan povend() digabungkan.

```
>povanaglyph("myscene",zoom=4.5);
```



Mendefinisikan Objek

Antarmuka Povray Euler sendiri berisi banyak objek. Tapi Anda tidak terbatas pada ini. Anda dapat membuat objek sendiri, yang menggabungkan objek lain, atau objek yang sama sekali baru.

Kita mendemonstrasikan sebuah torus. Perintah Povray untuk ini adalah "torus". Jadi kita kembalikan string dengan perintah ini dan parameternya. Perhatikan bahwa torus selalu berpusat di titik asal.

```
>function povdonat (r1,r2,look="") ...
```

```
    return "torus {"+r1+","+r2+look+"}";
  endfunction
```

Inilah torus pertama kita.

```
>t1=povdonat(0.8,0.2)
```

```
  torus {0.8,0.2}
```

Mari kita gunakan objek ini untuk membuat torus kedua, diterjemahkan dan diputar.

```
>t2=povobject(t1,rotate=xrotate(90°),translate=[0.8,0,0])
```

```
object { torus {0.8,0.2}
 rotate 90 *x
 translate <0.8,0,0>
 }
```

Sekarang kita menempatkan objek-objek ini ke dalam sebuah adegan. Untuk tampilan, kita menggunakan Shading Pong.

```
>povstart(center=[0.4,0,0],angle=0°,zoom=3.8,aspect=1.5); ...
>writeln(povobject(t1,povlook(green,phong=1))); ...
>writeln(povobject(t2,povlook(green,phong=1))); ...
```

```
>povend();
```

memanggil program Povray. Namun, jika terjadi kesalahan, itu tidak menampilkan kesalahan. Karena itu Anda harus menggunakan

```
>povend(<exit);
```

Jika ada yang tidak berhasil. Ini akan membiarkan jendela Povray terbuka.

```
>povend(h=320,w=480);
```

Berikut adalah contoh yang lebih rumit. Kita pecahkan

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad c.x \to \text{Max}.$$

dan menunjukkan titik-titik yang layak dan optimal dalam plot 3D.

```
>A=[10,8,4;5,6,8;6,3,2;9,5,6];
>b=[10,10,10,10]';
>c=[1,1,1];
```

Pertama, mari kita periksa, apakah contoh ini memiliki solusi sama sekali.

```
>x=simplex(A,b,c,>max,>check)'
```

```
[0,   1,   0.5]
```

Ya, sudah.

Selanjutnya kita definisikan dua objek. Yang pertama adalah

$$a \cdot x \leq b$$

```
>function oneplane (a,b,look="") ...
```

```
    return povplane(a,b,look)
  endfunction
```

Kemudian kita definisikan perpotongan semua setengah ruang dan sebuah kubus.

```
>function adm (A, b, r, look="") ...
```

```
    ol=[];
    loop 1 to rows(A); ol=ol|oneplane(A[#],b[#]); end;
    ol=ol|povbox([0,0,0],[r,r,r]);
    return povintersection(ol,look);
  endfunction
```

Kita sekarang dapat merencanakan adegannya.

```
>povstart(angle=120°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=3.5); ...
>writeln(adm(A,b,2,povlook(green,0.4))); ...
>writeAxes(0,1.3,0,1.6,0,1.5); ...
```

Berikut ini adalah lingkaran di sekitar optimal.

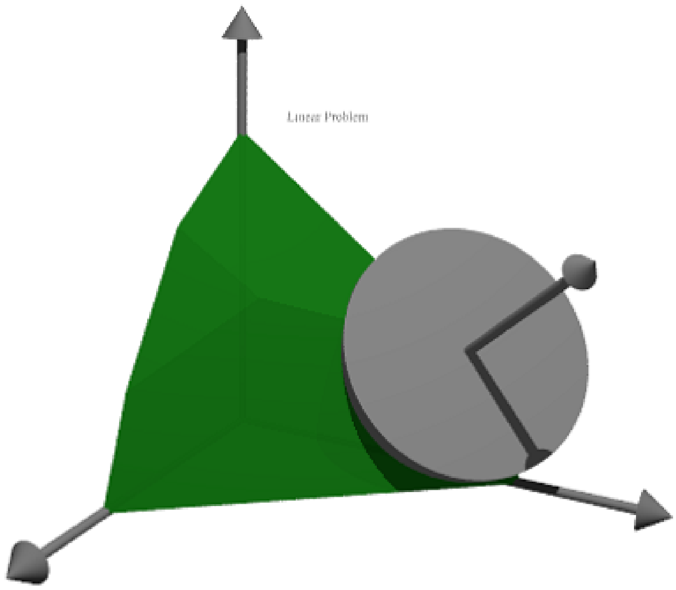
```
>writeln(povintersection([povsphere(x,0.5),povplane(c,c.x')], ...
>  povlook(red,0.9)));
```

Dan kesalahan ke arah yang optimum.

```
>writeln(povarrow(x,c*0.5,povlook(red)));
```

Kita tambahkan teks ke layar. Teks hanyalah objek 3D. Kita perlu menempatkan dan memutarnya menurut pandangan kita.

```
>writeln(povtext("Linear Problem",[0,0.2,1.3],size=0.05,rotate=125°)); ...
>povend();
```



Contoh Lainnya

Anda dapat menemukan beberapa contoh lagi untuk Povray di Euler dalam file berikut.

See: Examples/Dandelin Spheres
See: Examples/Donat Math
See: Examples/Trefoil Knot
See: Examples/Optimization by Affine Scaling

Percobaan beberapa contoh lainnya

Bola Dandelin

Bola Dandelin adalah satu atau dua bola yang bersinggungan baik dengan pesawat dan kerucut yang memotong bidang.

Pertama kita hitung jari-jari bola.
Kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

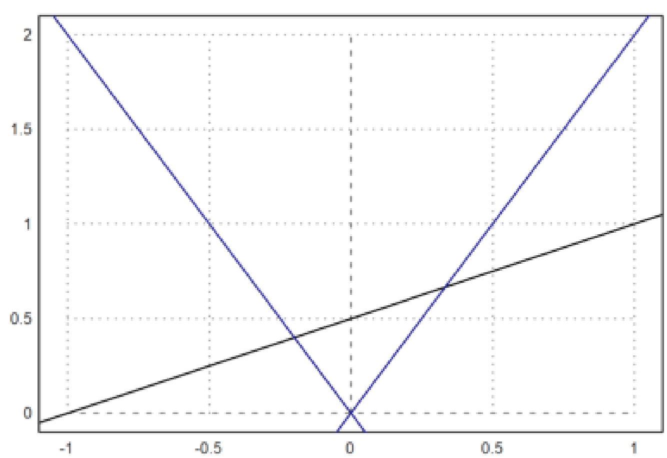
```
[- a, - 1, 0]
```

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Buat plot untuk mengecek perpotongan garis.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum sumbu-y.

```
>P &= [0,u]
```

```
                              [0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1))
```

```
                      2                2   2
                     a  u        2    a  u
             sqrt((------ - u)  + ---------)
                     2                2     2
                    a  + 1          (a  + 1)
```

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g))
```

```
                                          2
                   u + 2      2   (2 u - 1)
             sqrt((----- - u)  + ----------)
                     5               25
```

Dan temukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u)
```

```
                              2            2
          - sqrt(5) sqrt(a  + 1) + 2 a  + 2
     [u = ---------------------------------,
                           2
                        4 a  - 1
                                              2            2
                                  sqrt(5) sqrt(a  + 1) + 2 a  + 2
                              u = -------------------------------]
                                                 2
                                              4 a  - 1
```

Ada dua solusi.
Kita evaluasi solusi simbolik, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

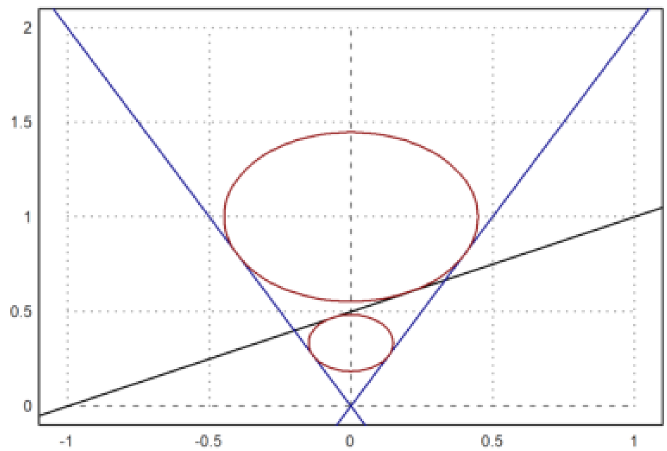
```
[0.33333,   1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.14907,   0.44721]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```



Selanjutnya kita buat dengan Povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Atur adegan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita buat dua bola.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Buat kerucut transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kita hasilkan batas bidang kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian kita hasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus dari elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita hitung P1P2 bidang.

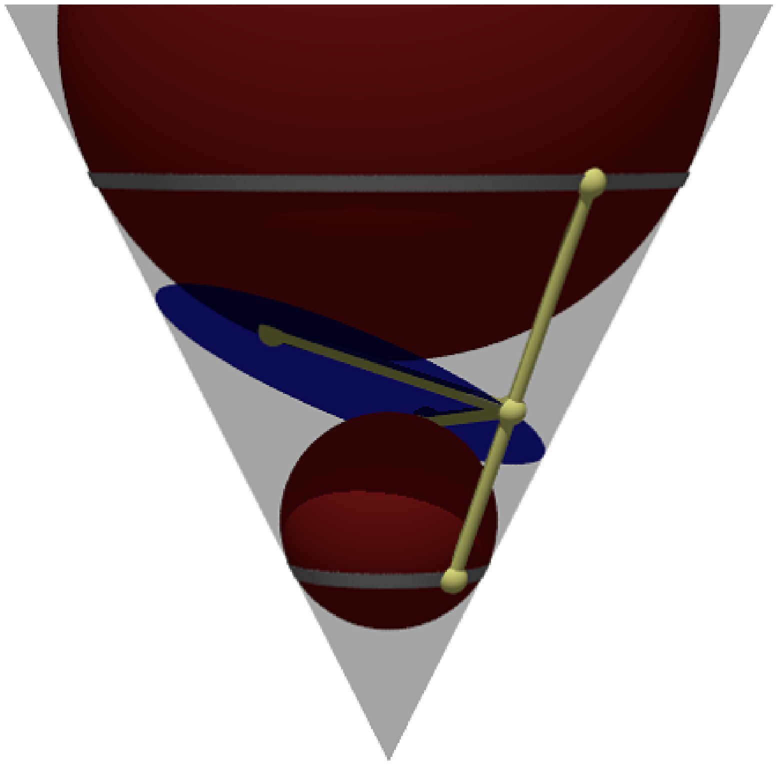
```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kita hubungkan titik-titik dengan segmen garis.

```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
>povend();
```



Donat Matematika

Pertama kita buat donat yang sangat bagus. Kita gunakan Povray untuk itu dengan Shading Phong.

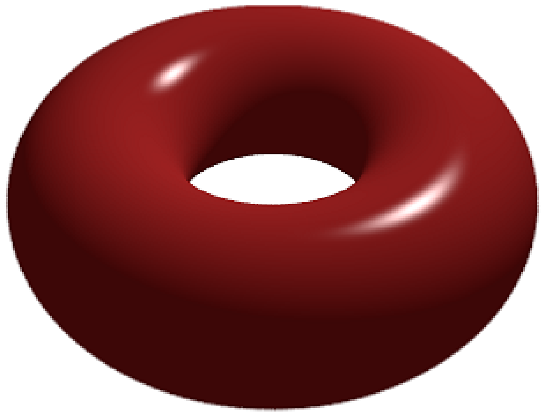
```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

```
>povstart(angle=0,height=40°);
```

Fungsi berikut untuk membuat donat.

```
>function povdonat (r1,r2,look="") := "torus {"+r1+","+r2+look+"}";
>writeln(povobject(povdonat(1,0.5),povlook(red,>phong),xrotate(90°)));
>povend();
```



Torus adalah gambar silinder di bawah pemetaan berikut.

```
>function phi(x,t,z) &= [x*cos(t),x*sin(t),z]
```

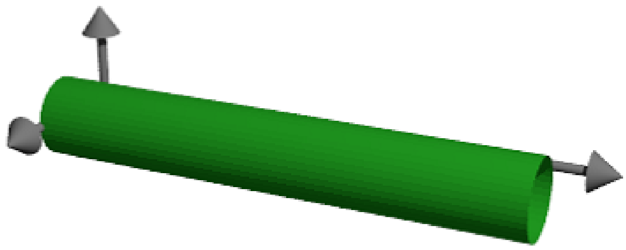
```
[cos(t) x, sin(t) x, z]
```

Untuk Euler, kita membutuhkan koordinat sumbu-x, sumbu-y, dan sumbu-z dari pemetaan ini.

```
>function phix(x,t,z) &= phi(x,t,z)[1];
>function phiy(x,t,z) &= phi(x,t,z)[2];
>function phiz(x,t,z) &= phi(x,t,z)[3];
```

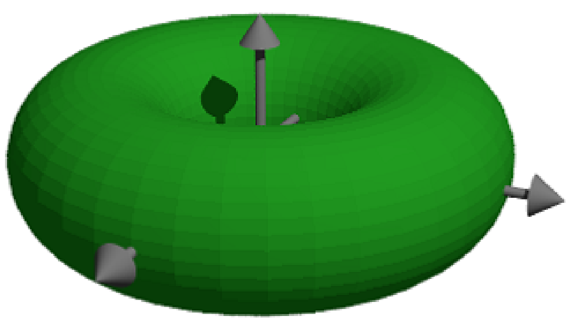
Sekarang kita buat sebuah silinder dengan lingkaran yang berpusat di x=R, y=0, z=0 dengan tinggi 2phi.

```
>s=linspace(0,2pi,40); t=s';
>R=1; r=0.5;
>x=R+r*cos(s); y=t; z=r*sin(s);
>pov3d(x,y,z,zoom=4);
```



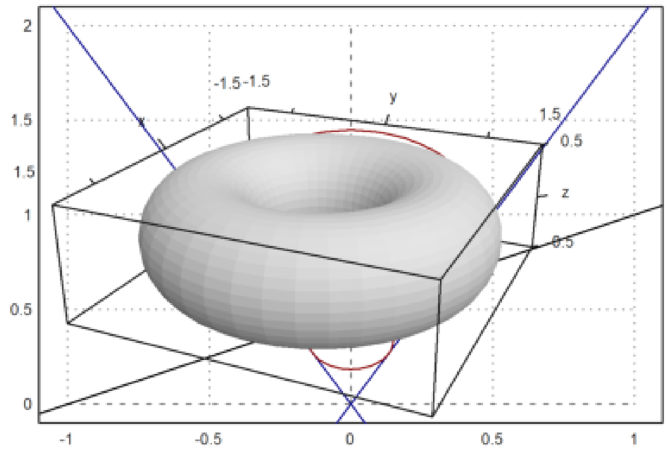
Transformasi phi memetakan silinder ini ke donat. Setiap titik dipetakan dengan phi.

```
>X=phix(x,y,z); Y=phiy(x,y,z); Z=phiz(x,y,z);
>pov3d(X,Y,Z,zoom=3.8);
```



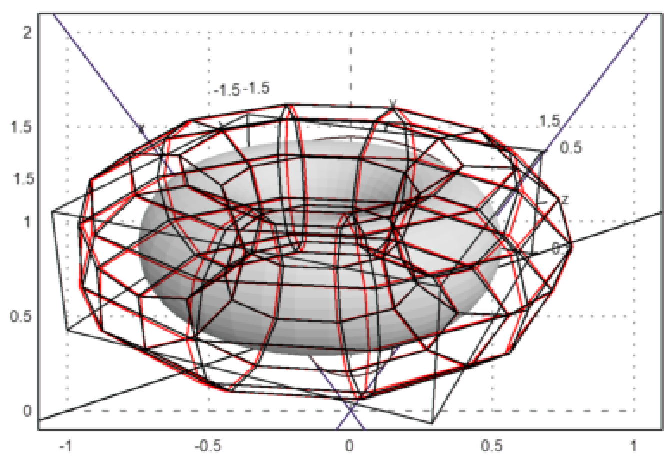
Berikut adalah gambar yang sama di Euler. Kita ambil sumbu-Z, karena bayangan Euler default didasarkan pada sisi permukaan yang benar.

```
>plot3d(X,Y,-Z,>hue,zoom=3.6):
```



Gambar berikut adalah Anagylph untuk kacamata merah/cyan yang menunjukkan kerangka kawat torus dengan detail yang lebih sedikit:

```
>s=linspace(0,2pi,10); t=s'; ...
>R=1; r=0.5; ...
>X=phix(R+r*cos(s),t,r*sin(s)); ...
>Y=phiy(R+r*cos(s),t,r*sin(s)); ...
>Z=phiz(R+r*cos(s),t,r*sin(s)); ...
>plot3d(X,Y,Z,>wire,zoom=5,<frame,>anaglyph):
```



Selanjutnya kita akan memotong donat dengan bidang y=c. Perintah berikut memanggil Povray untuk menghasilkan versi irisan dari donat kita.

```
>povstart(angle=0°,height=40°,light=[0,-0.1,1],zoom=3.6);
```

Menggambar Donat terlebih dahulu.

```
>donat=povobject(povdonat(1,0.5),xrotate(90°));
```

Sekarang kita mendefinisikan sebuah fungsi, yang menghasilkan silinder untuk pemotongan.

```
>function cut(y1,y2) := povcylinder([0,y1,0],[0,y2,0],2);
```

Sekarang definisikan vektor untuk pemotongan.

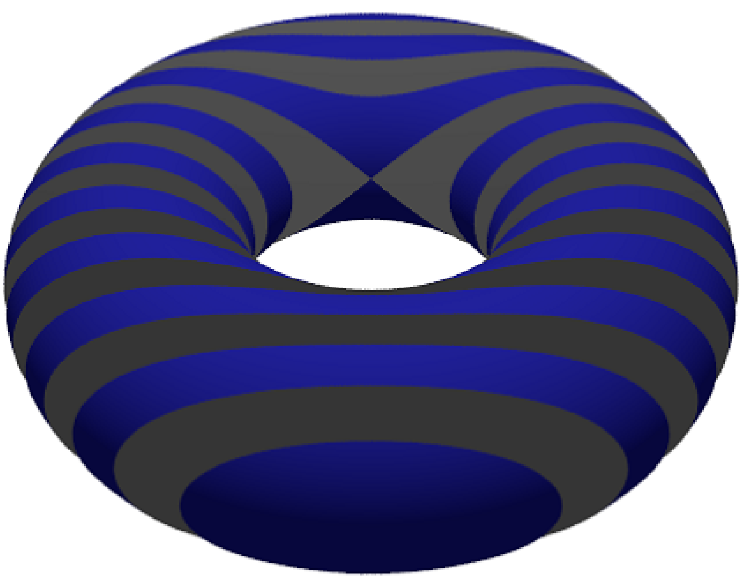
```
>a=linspace(-1.5,1.5,21);
```

Silinder pemotong disimpan dalam vektor string.

```
>s=[]; for i=1 to (length(a)-1)/2; s=s|cut(a[2*i],a[2*i+1]); end;
```

Bentuk penyatuan potongan.

```
>cuts=povunion(s);
>writeln(povdifference(donat,cuts,povlook(blue)));
>povend();
```



1. Gambarlah sebuah grafik dari fungsi-fungsi berikut:

a.

$$f(x, y) = 9x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$$

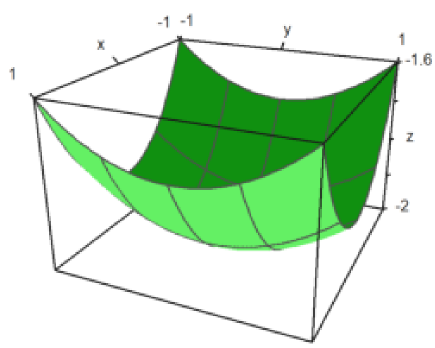
b.

$$g(x, y) = cos(y) * sin(x * y)$$

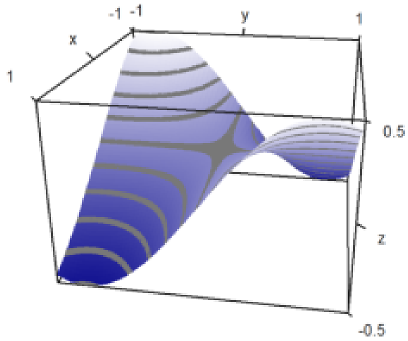
c.

$$h(x, y) = \sqrt{10x^2 + 2y^2}$$

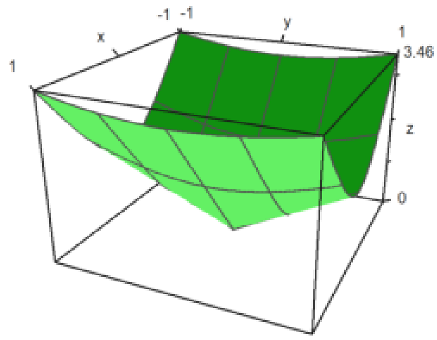
```
>function f(x,y) &= -sqrt(4-x^2-(4*y^2)/9);
>plot3d("f",grid=4):
```




```
>function g(x,y) &= cos(y)*sin(x*y);
>plot3d("g",angle=100°,>contour,color=blue):
```




```
>function h(x,y) &= sqrt(10*x^2+2*y^2);
>plot3d("h",grid=4):
```



---

2. Sketsakan 4 fungsi tersebut pada R3!

a.

$$\frac{x^2}{y}$$

b.

$$e^{-x^2-y^2}$$

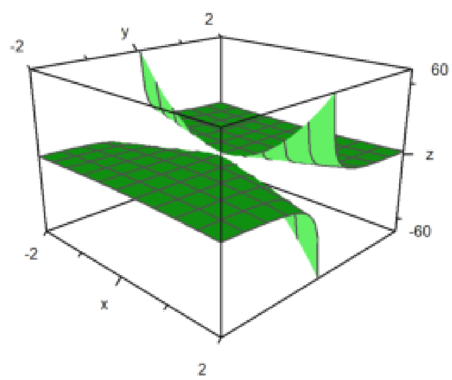
c.

$$3 - x^2 * y^2$$

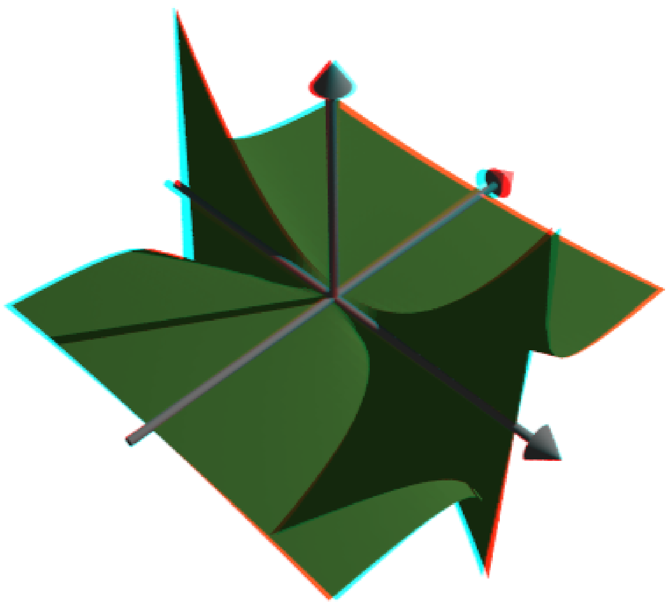
d.

$$-|xy|$$

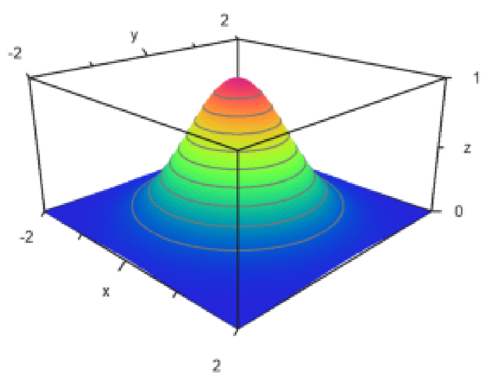
```
>function f(x,y) &= (x^2/y);
>plot3d("f",-2,2,-2,2):
```



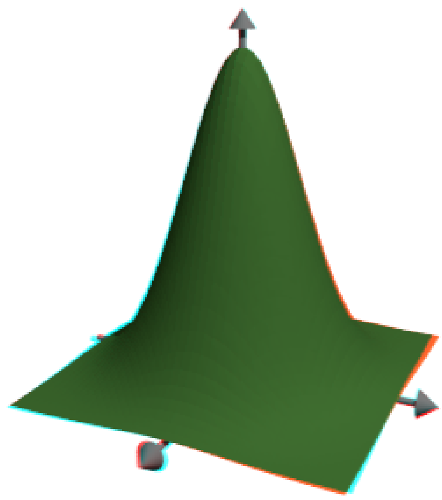

```
>pov3d("x^2*y^-1",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
>  center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```



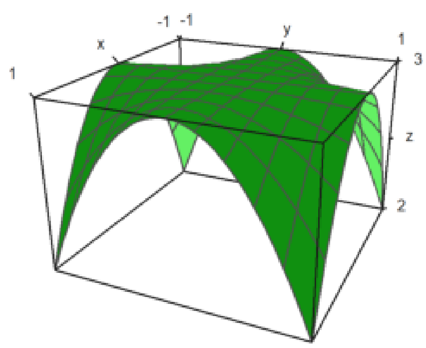
```
>function g(x,y) &= E^(-x^2-y^2);
>plot3d("g",r=2,n=100,level="thin", ...
>>contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):
```



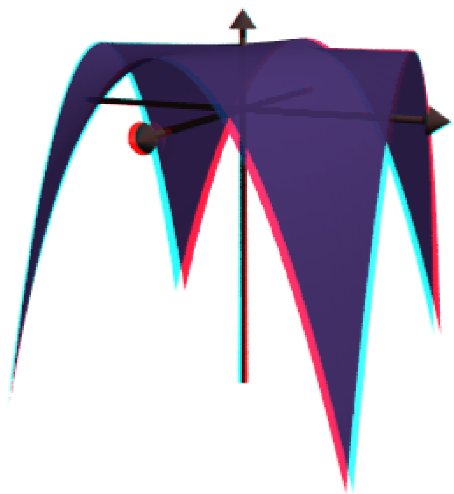

```
>pov3d("g",r=2,height=15°,>anaglyph,center=[0,0,0.5],zoom=2.5);
```



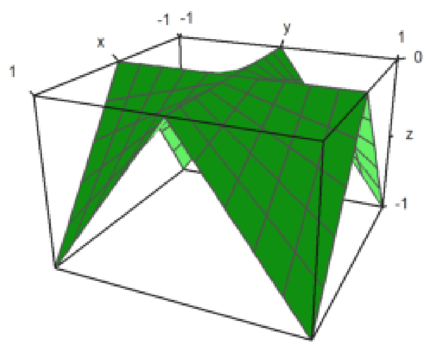
```
>function k(x,y) &= 3-x^2*y^2;
>plot3d("k"):
```



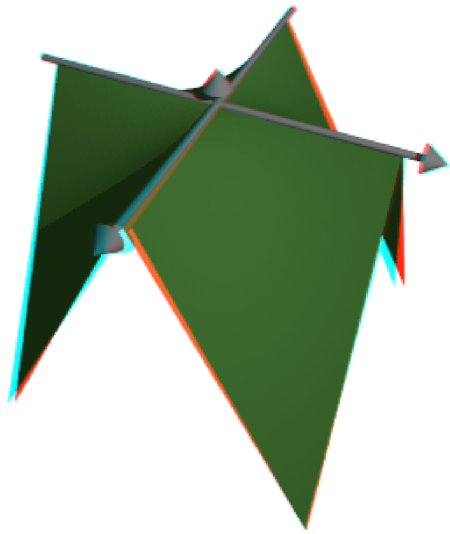

```
>pov3d("k",axiscolor=red,look=povlook(blue,0.2),r=2,height=15°,>anaglyph,center=[0,0,0.5],
```



```
>function h(x,y) &= -abs(x*y);
>plot3d("h"):
```




```
>pov3d("h",r=2,height=45°,>anaglyph,center=[0,0,0.5],zoom=2.5)
```



3. Sketsa kurva ketinggian z=k, untuk k=-2,-1,0,1,2 pada permukaan z=y-sin(x)!

jawab:
k=-2
ketika x=0, maka y=-2
ketika y=0, maka sin(x)=2

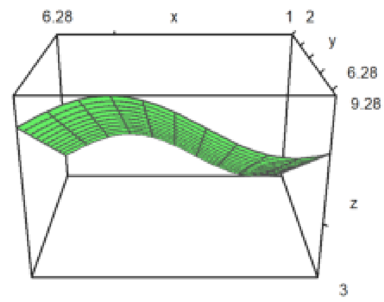
k=-1
ketika x=0, maka y=-1
ketika y=0, maka sin(x)=1

k=0
ketika x=0, maka y=0
ketika y=0, maka sin(x)=0

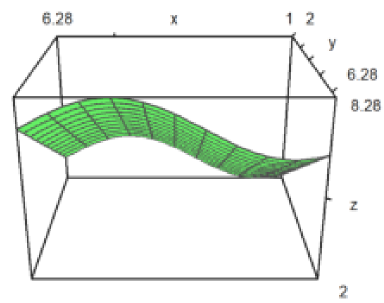
k=1
ketika x=0, maka y=1
ketika y=0, maka sin(x)=-1

k=2
ketika x=0, maka y=2
ketika y=0, maka sin(x)=-2

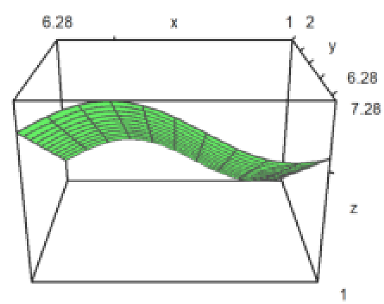
```
>plot3d("y-sin(x)+2",1,2*pi,2,2*pi, angle=180°):
```



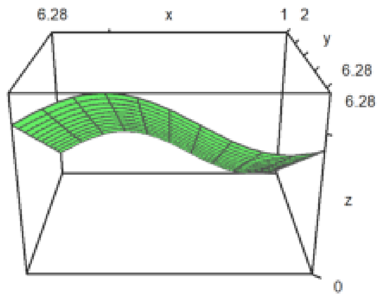

```
>plot3d("y-sin(x)+1",1,2*pi,2,2*pi, angle=180°):
```



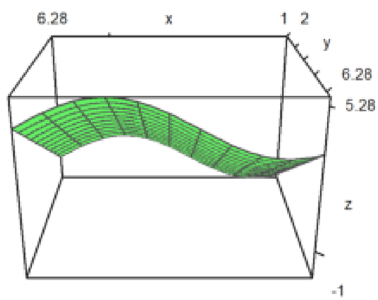

```
>plot3d("y-sin(x)",1,2*pi,2,2*pi, angle=180°):
```



```
>plot3d("y-sin(x)-1",1,2*pi,2,2*pi, angle=180°):
```




```
>plot3d("y-sin(x)-2",1,2*pi,2,2*pi, angle=180°):
```



4.Sketsakan grafik fungsi berikut:

$$f(x,y) = x^3y + 3xy^2$$

Lalu, Tentukan vektor gradien fungsinya , kemudian
tentukan persamaan bidang singgung di titik (2,-2)

jawab:
Vektor gradien fungsi f(x,y)=

$$(fx(x,y))i+(fy(x,y))j$$

$$(3x^2y+3y^2)i+(x^3+6xy)j$$

Vektor gradien fungsi f(2,-2)=

$$-12i+(-16)j$$

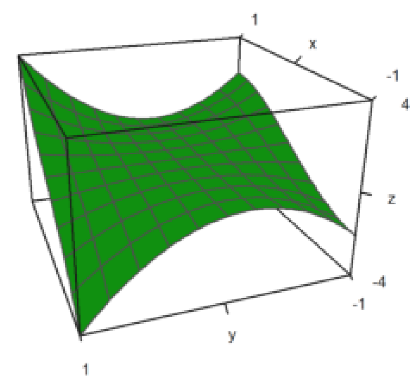
Persamaan bidang singgung di (2,-2)

$$Z=f(2,-2)+(-12i-16j).((x-2)i+(y+2)j)$$

$$=8+12x+24-16y-32$$

$$Z=-12x-16y$$

```
>plot3d("x^3*y+3*x*y^2", angle=250°):
```



BAB 5

KB PEKAN 9-10: MENGGUNAKAN EMT UNTUK KALKULUS

Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi.

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

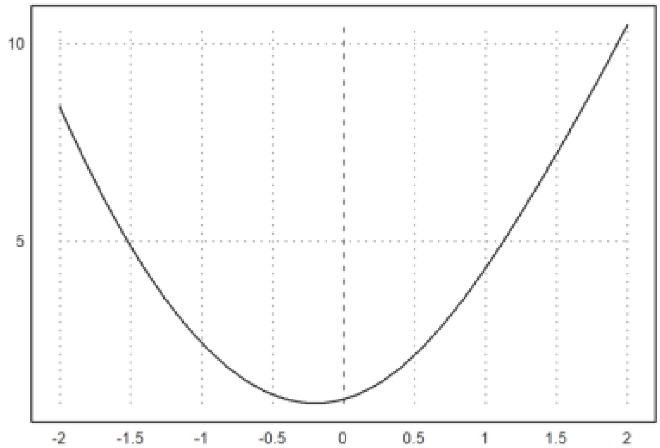
```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

```
>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya
```

```
Variable or function a not found.
Error in:
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...
   ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
>plot2d("f(x)"):
```



Berikutnya kita definisikan fungsi:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1}.$$

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

```
0
```

```
>g(0)
```

```
0
```

```
>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
g:
    useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
```

```
Error in:
g(1) // akan eror karena tidak dapat menghitung akar bilangan  ...
    ^
```

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

```
2.20920171961
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

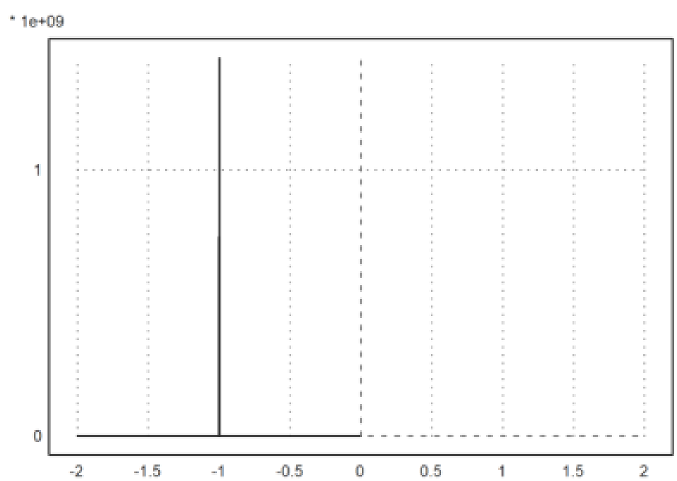
$$h(x) = f(g(x))$$

dan

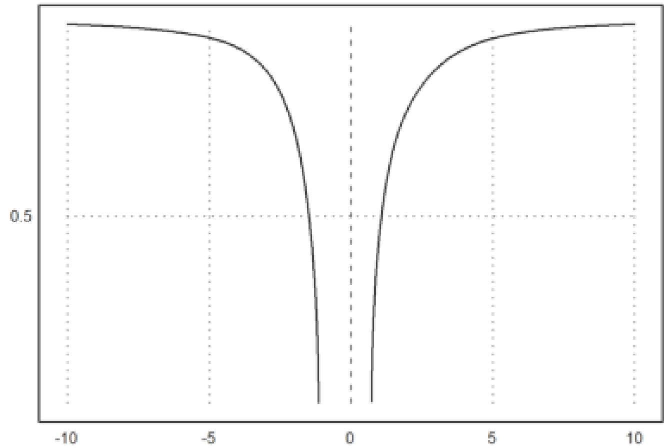
$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>plot2d("h(x)"):
```




```
>function u(x) := g(f(x)) // definisi komposisi fungsi
>plot2d("u(x)",-10,10):
```




```
>f(0:10) // nilai-nilai f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
    if x>0 then return x^3
    else return x^2
    endif;
  endfunction
```

```
>f(1)
```

```
1
```

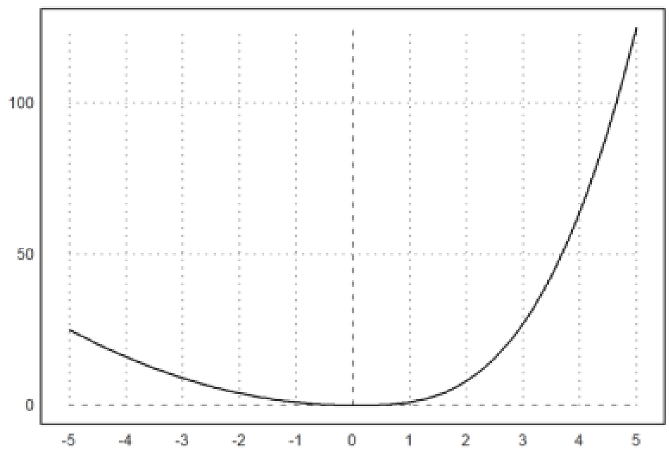
```
>f(-2)
```

```
4
```

```
>f(-5:5)
```

```
[25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```




```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

```
      x
   2 E
```

```
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik
```

$$2\,e^{a}$$

```
>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal
```

```
30.308524483
```

```
>$f(E), $float(%)
```

$$30.30852448295852$$

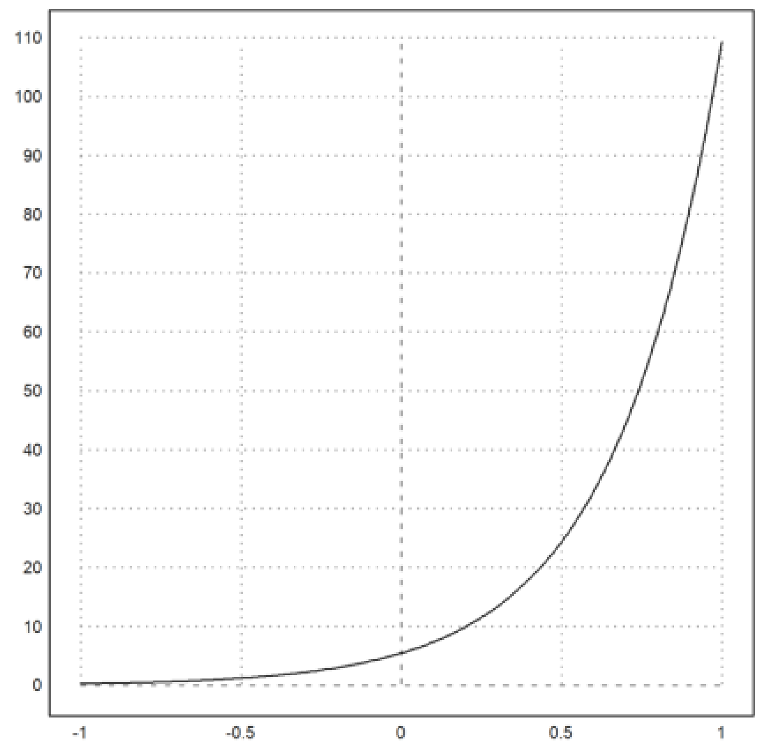
```
>function g(x) &= 3*x+1
```

```
                                   3 x + 1
```

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

```
                                     3 x + 1
                                  2 E
```

```
>plot2d("h(x)",-1,1):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik tersebut.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.
1. Akan didefinisikan fungsi berikut!

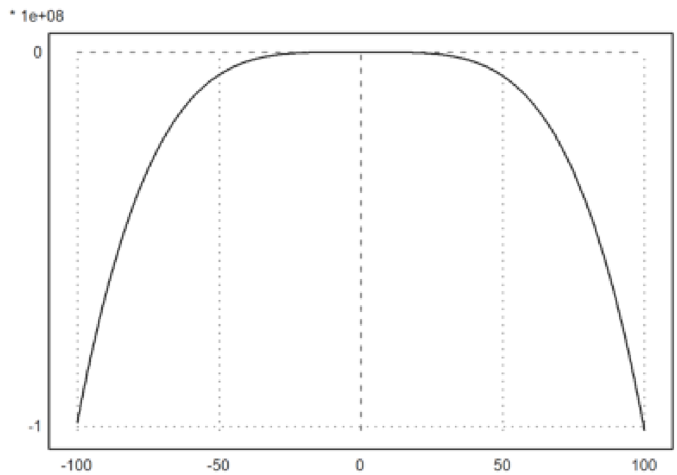
$$f(x) = -(x)^4 - x^3$$

```
Serta tentukan nilai f(11), f(32), f(51)!
```

```
>function f(x) := -x^4-x^3
>f(11), f(32), f(51)
```

```
-15972
-1081344
-6897852
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-100,100):
```



2. Akan didefinisikan fungsi berikut

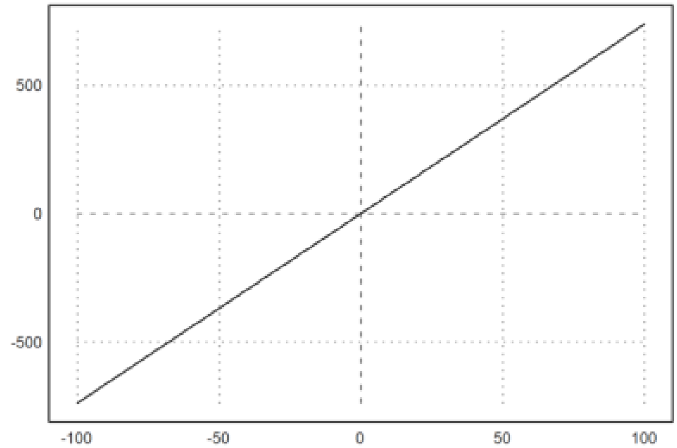
$$f(x) = e^{2x+1}$$

```
Serta tentukan nilai f(10), f(63), f(-11)!
```

```
>function f(x) := E^2*x+1
>f(10), f(63), f(-11)
```

```
74.8905609893
466.510534233
-80.2796170882
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-100,100):
```



3. Akan didefinisikan fungsi berikut

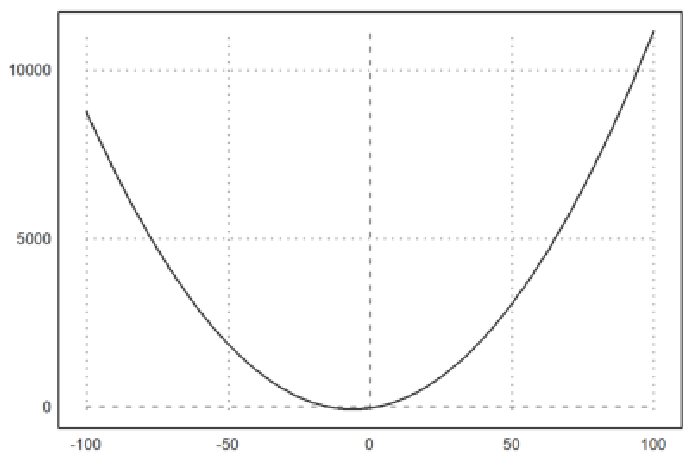
$$f(x) = x^2 + 12x - 32$$

Serta tentukan nilai f(14), f(45), f(122)!

```
>function f(x) := x^2+12*x-32
>f(14), f(45), f(122)
```

```
332
2533
16316
```

```
>aspect(1.5) ; plot2d("f(x)",-100,100):
```



4. Akan didefinisikan fungsi berikut

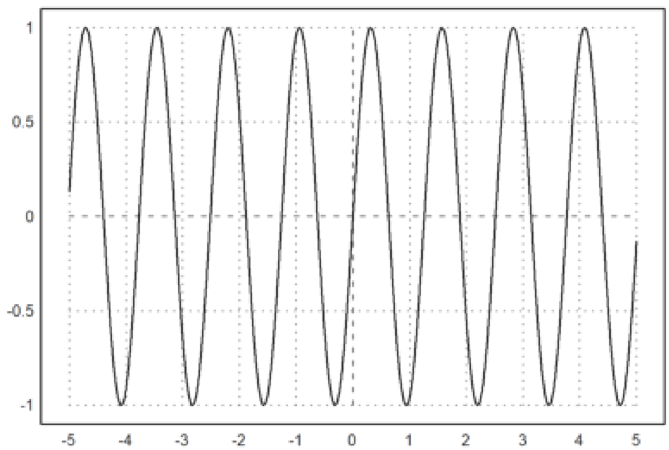
$$f(x) = sin(5x)$$

Serta tentukan nilai f(11), f(29), f(57)!

```
>function f(x) := sin(5*x)
>f(11), f(29), f(0), f(57)
```

```
-0.999755173359
0.467745162045
0
0.773871590208
```

```
>aspect(1.5) ; plot2d("f(x)",-5,5):
```



5. Akan didefinisikan fungsi berikut

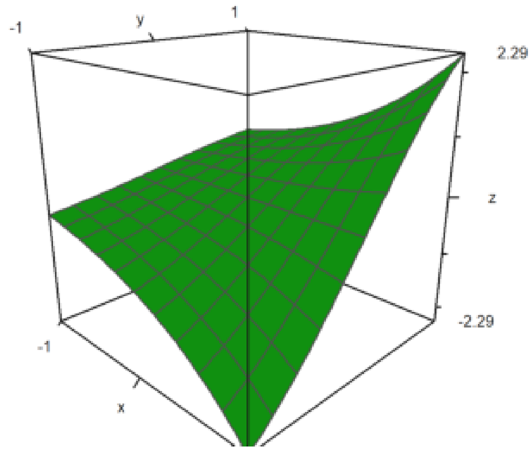
$$f(x,y) = e^x siny$$

Serta tentukan nilai f(0,90), f(12,73), f(150,430)!

```
>function f(x,y) := (E^x)*sin(y)
>f(0,90), f(12,73), f(150,430)
```

```
0.893996663601
-110147.878681
5.4041625518e+64
```

```
>aspect(1.5); plot3d("f(x,y)",fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):
```



Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und' (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga).

Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

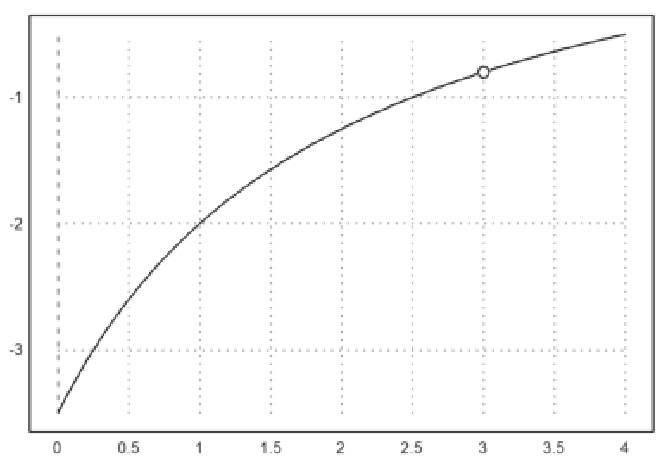
```
>$limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
```

$$-\frac{4}{5}$$

$$\lim_{x\rightarrow 3}{\frac{x^3-13\,x^2+51\,x-63}{x^3-4\,x^{-}3\,x+18}}=-\frac{4}{5}$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya

```
>aspect(1.5); plot2d("(x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18)",0,4); plot2d(3,-4/5,>points
```



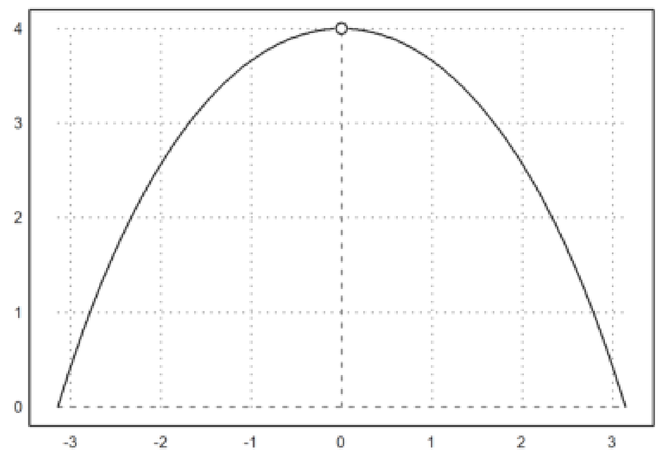
```
>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
```

$$4$$

$$2\left(\lim_{x\rightarrow 0}{\frac{x\,\sin x}{1-\cos x}}\right)=4$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>plot2d("2*x*sin(x)/(1-cos(x))",-pi,pi); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add):
```



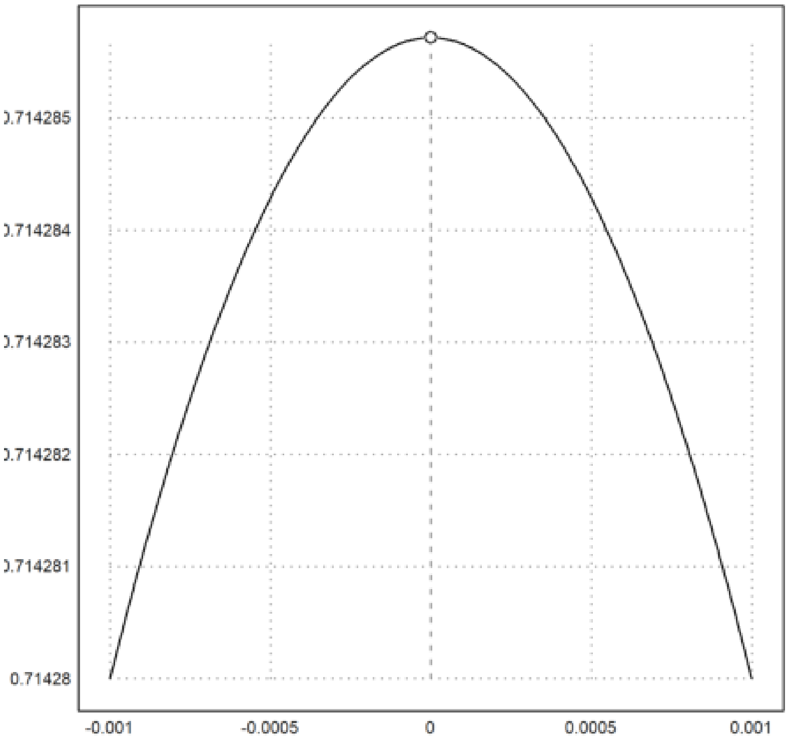

```
>$limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0)
```

$$\frac{5}{7}$$

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\cot \left(7\,h\right)}{\cot \left(5\,h\right)}}=\frac{5}{7}$$

Fungsi tersebut juga diskontinu (karena tidak terdefinisi) di x=0. Berikut adalah grafiknya

```
>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",>add):
```

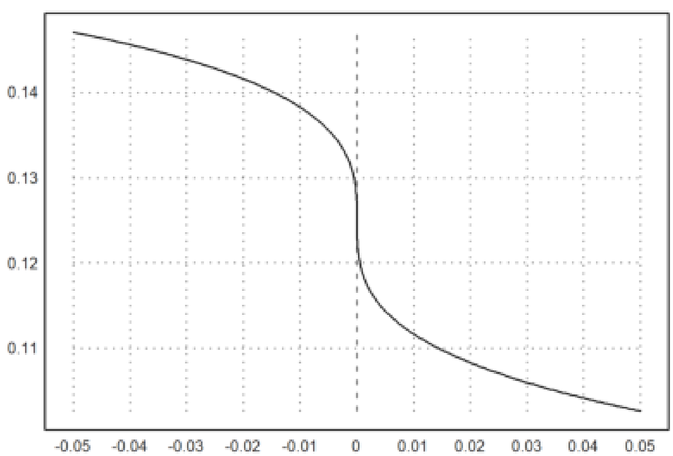



```
>$showev('limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8))
```

$$\lim_{x\to 8}\frac{\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}-1}{x-8}=\frac{1}{24}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("((x/8)^(1/3)-1)/(x-8)",-0.05,0.05); plot2d(0,1/5,>points,style="ow",>add):
```

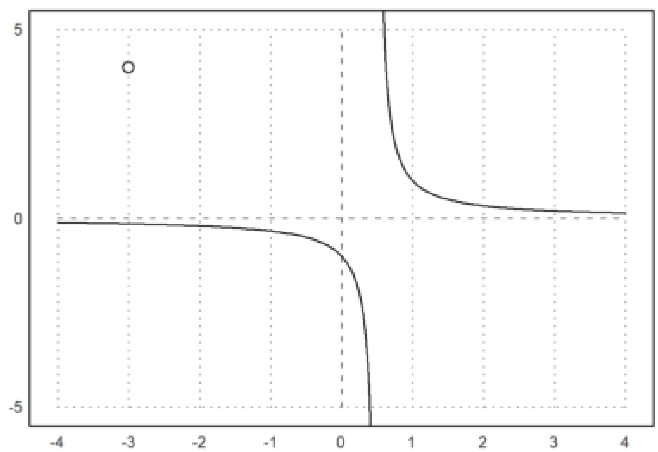


```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x\rightarrow 0}{\frac{1}{2\,x-1}}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya

```
>plot2d("1/(2*x-1)",-4,4,-5,5); plot2d(-3,4,>points,style="ow",>add):
```

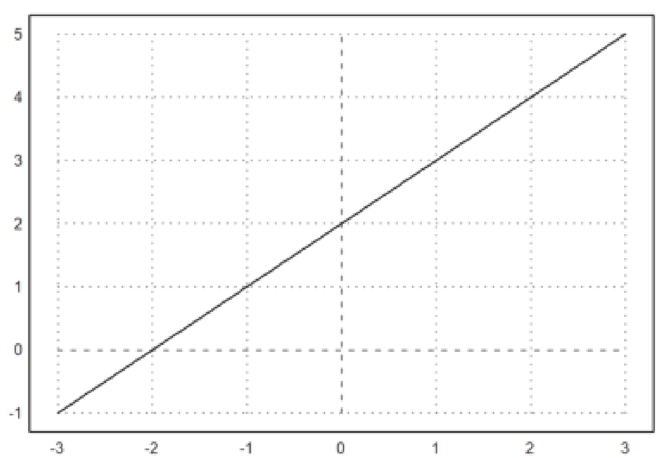


```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x\rightarrow 5}{\frac{x^2-3\,x-10}{x-5}}=7$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya

```
>plot2d("(x^2-3*x-10)/(x-5)",-3,3); plot2d(0,6,>points,style="ow",>add):
```

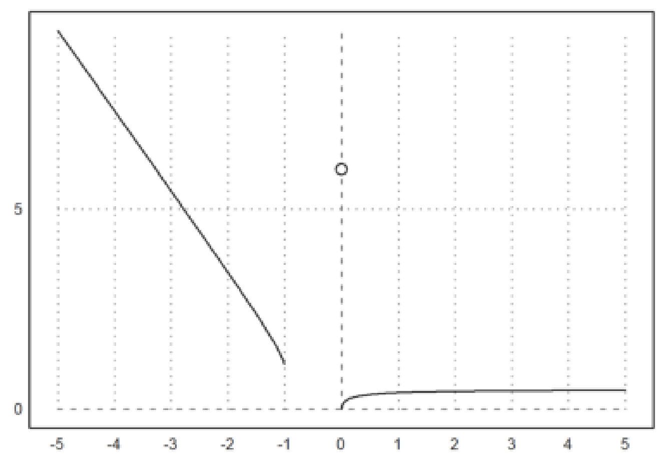


```
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \frac{1}{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya

```
>plot2d("sqrt(x^2+x)-x",-5,5); plot2d(0,6,>points,style="ow",>add):
```

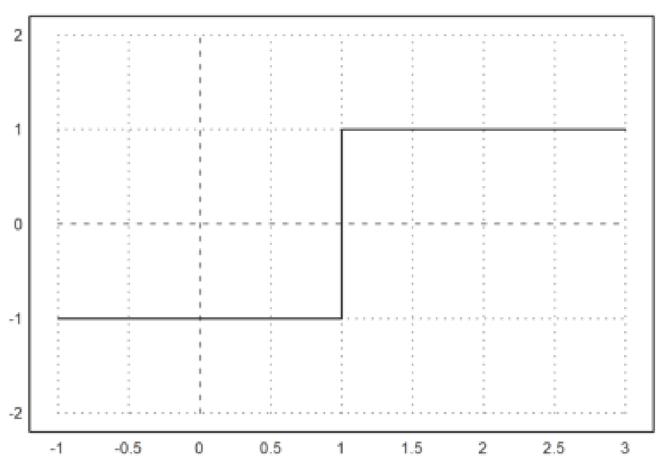



```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))
```

$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} = -1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

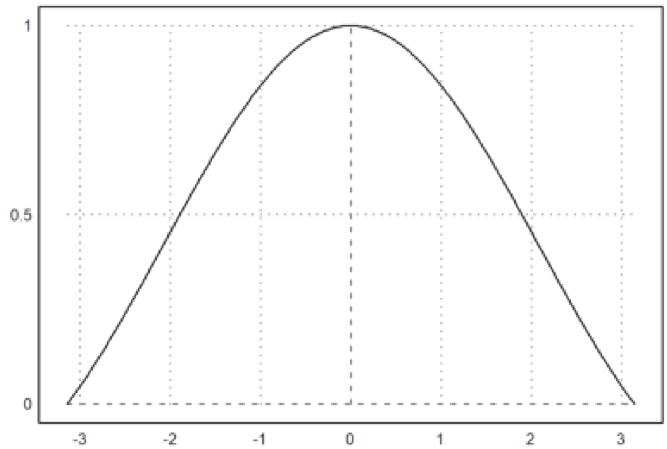
```
>plot2d("abs(x-1)/(x-1)",-1,3,-2,2); plot2d(0,10,>points,style="ow",>add):
```



```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi):
```

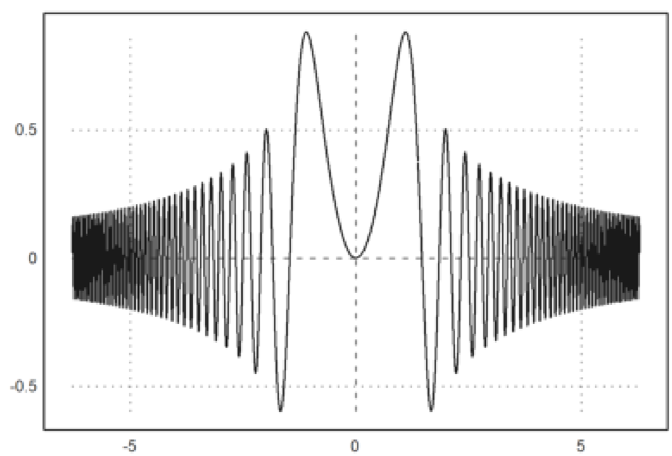



```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("sin(x^3)/x",-2*pi,2*pi); plot2d(0,10,>points,style="ow",>add):
```



```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x\to -\infty} \log x = infinity$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x\to \infty} (-2)^x = infinity$$

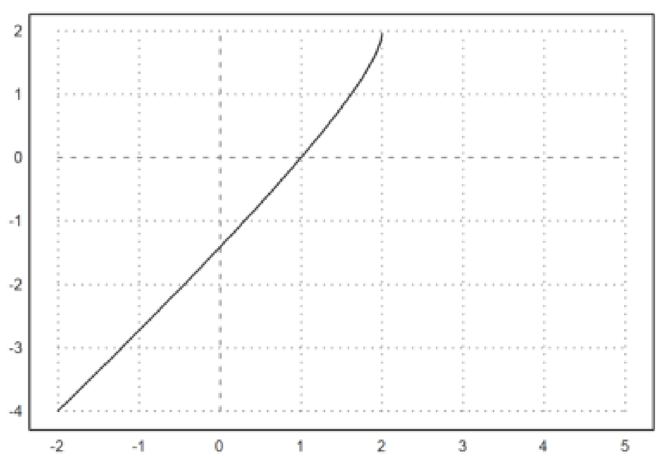
```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t\uparrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t\downarrow 5} t - \sqrt{2-t} = 5 - \sqrt{3}\, i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",-2,5):
```

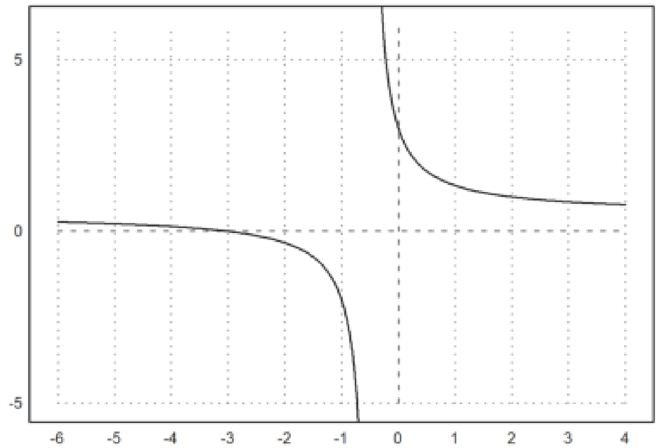



```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{2\,x^2-5\,x-3} = \frac{6}{7}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(x^2-9)/(2*x^2-5*x-3)",-6,4,-5,6); plot2d(0,10,>points,style="ow",>add):
```

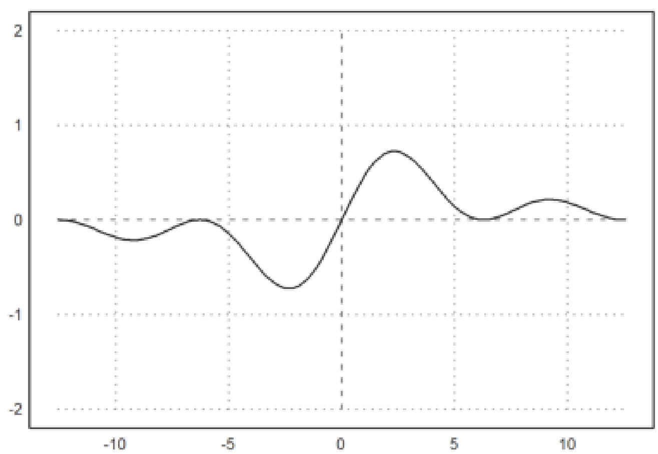



```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(1-cos(x))/x",-4*pi,4*pi,-2,2); plot2d(0,10,>points,style="ow",>add):
```

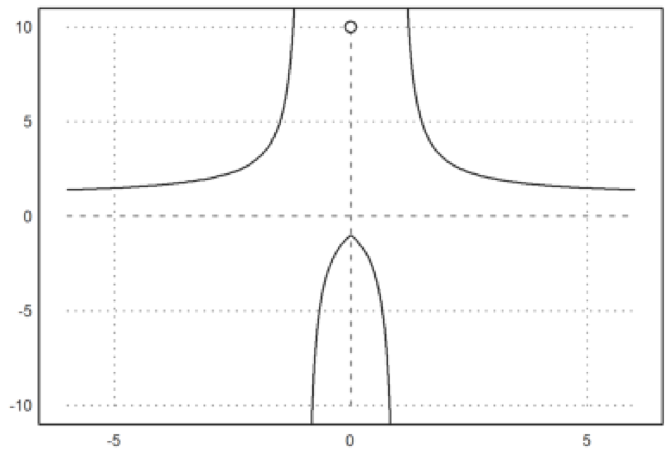



```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| + x^2}{x^2 - |x|} = -1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

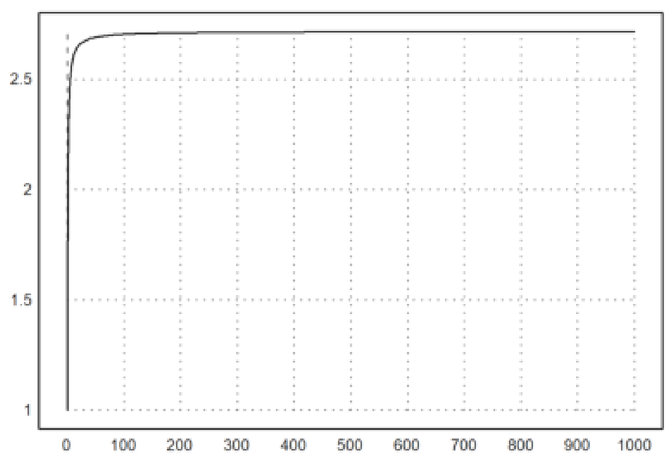
```
>plot2d("(x^2+abs(x))/(x^2-abs(x))",-6,6,-10,10); plot2d(0,10,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}=e$$

```
>plot2d("(1+1/x)^x",0,1000):
```




```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

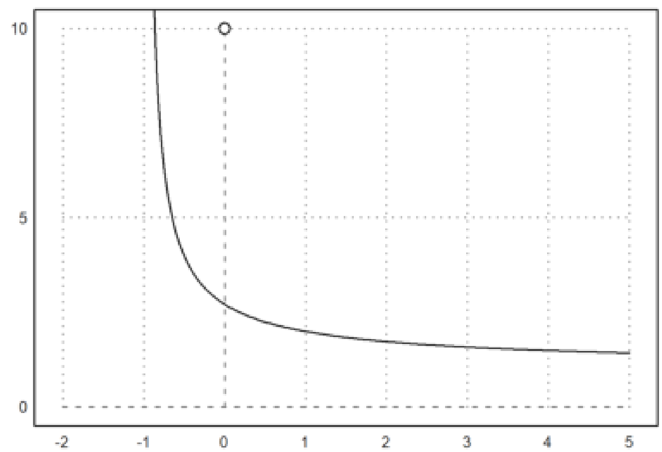
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k}{x}+1\right)^{x}=e^{k}$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}}=e$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(1+x)^(1/x)",-2,5,0,10); plot2d(0,10,>points,style="ow",>add):
```




```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

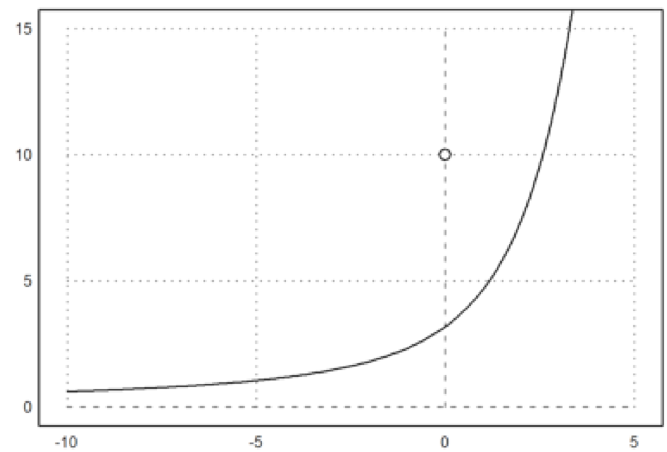
$$\lim_{x\to \infty }{\left(\frac{x}{x+k}\right)^{x}}=e^ {- k }$$

```
>$showev('limit((E^x-E^2)/(x-2),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}{\frac{e^{x}-e^2}{x-2}}=e^2$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>plot2d("(E^x-E^2)/(x-2)",-10,5,0,15); plot2d(0,10,>points,style="ow",>add):
```



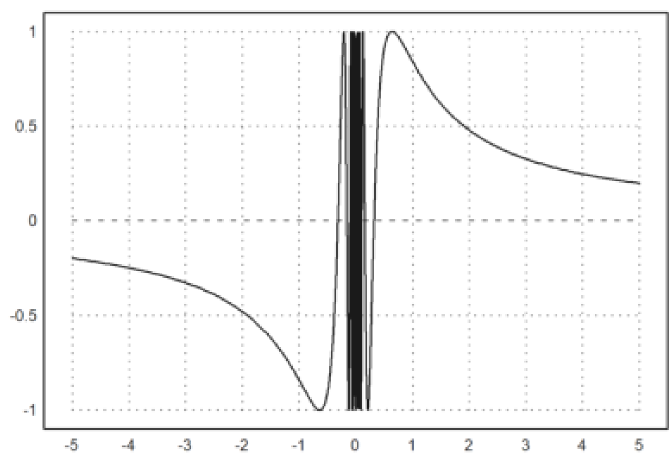

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = ind$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-5,5):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

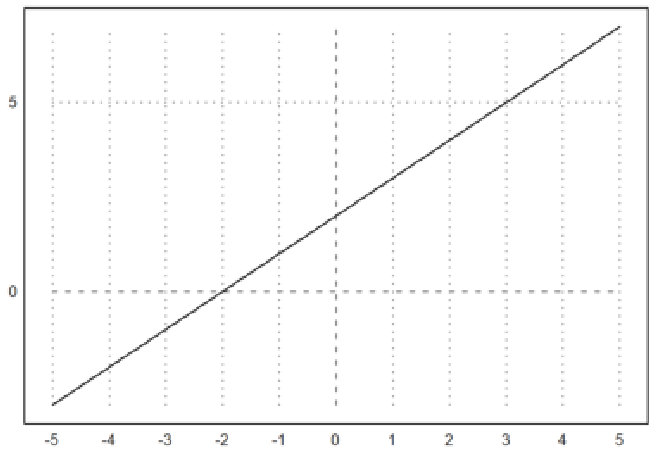
1. Tentukan limit berikut ini serta sketsakan grafiknya!

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$$

```
>$showev('limit((x^2-x-6)/(x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = 5$$

```
>aspect(1.5) ; plot2d("(x^2-x-6)/(x-3)",-5,5):
```



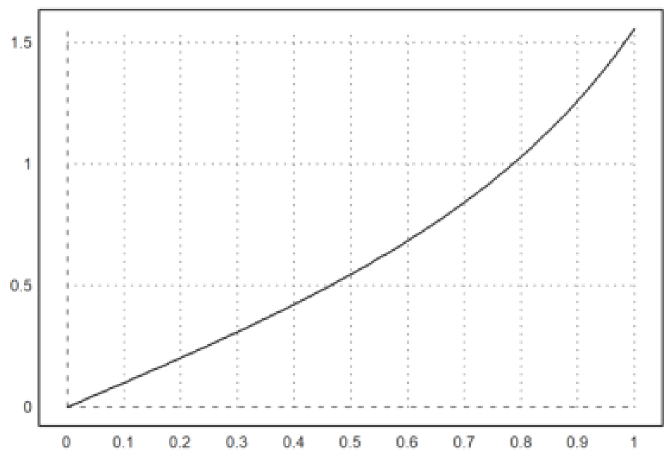
2. Tentukan limit berikut ini serta sketsakan grafiknya!

$$\lim_{x\to \phi} \frac{sinx}{cosx}$$

```
>$showev('limit((sin(x))/cos(x),x,pi))
```

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

```
>aspect(1.5) ; plot2d("(sin(x))/cos(x)",0,1):
```



3. Tentukan limit berikut ini serta sketsakan grafiknya!

$$f(x) = x^2 + 7x + 21$$

$$g(x) = x^2 - 10x + 20$$

$$\lim_{x\to 10} f(g(x))$$

$$\lim_{x\to 10} g(f(x))$$

```
>function f(x) &= x^2+7*x+21
```

```
 2
x  + 7 x + 21
```

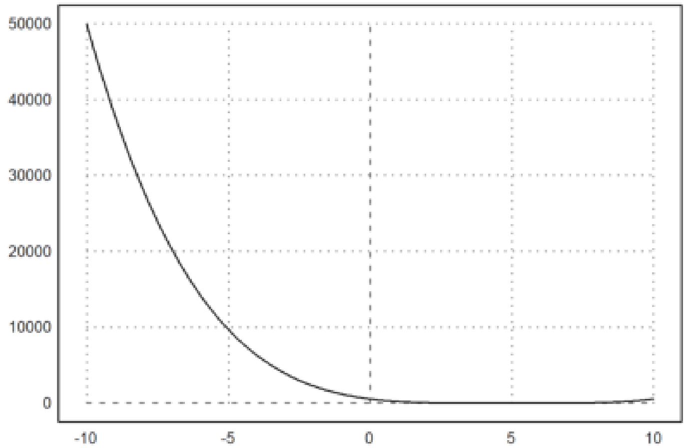
```
>function g(x) &= x^2-10*x+20
```

```
 2
x  - 10 x + 20
```

```
>$showev('limit(f(g(x)),x,10))
```

$$\lim_{x\to 10} \left(x^2 - 10\,x + 20\right)^2 + 7\,\left(x^2 - 10\,x + 20\right) + 21 = 561$$

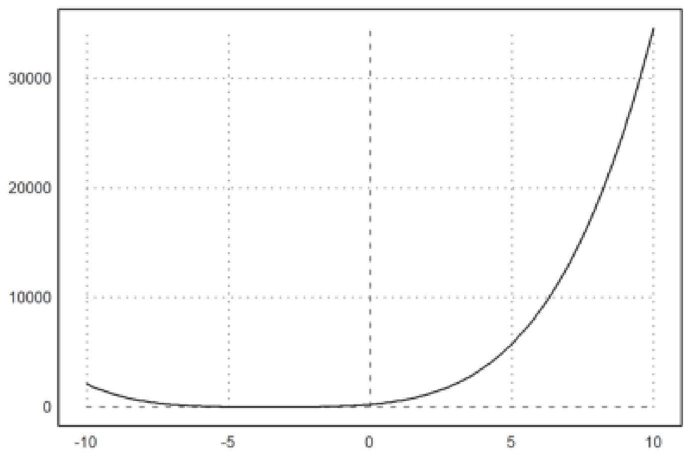
```
>aspect(1.5) ; plot2d("(f(g(x)))",-10,10):
```




```
>$showev('limit(g(f(x)),x,10))
```

$$\lim_{x\rightarrow 10}{\left(x^2+7\,x+21\right)^2-10\,\left(x^2+7\,x+21\right)+20}=34591$$

```
>aspect(1.5) ; plot2d("(g(f(x)))",-10,10):
```



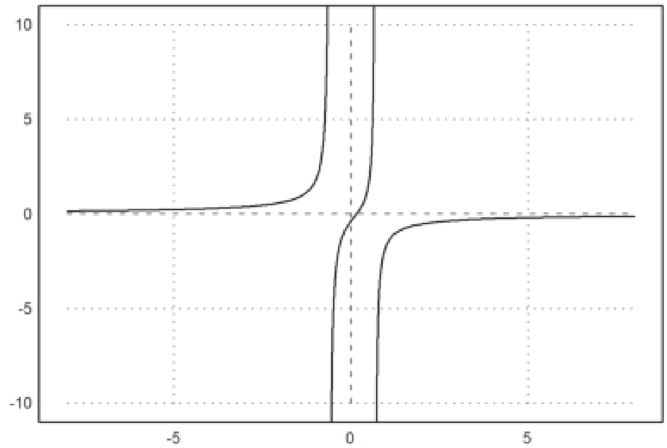
4. Tentukan limit berikut ini serta sketsakan grafiknya!

$$\lim_{x\to 5}\frac{|x+2|-13x}{12x^2-|x+5|}$$

```
>$showev('limit((abs(x+2)-13*x)/(12*x^2-abs(x+5)),x,5))
```

$$\lim_{x\rightarrow 5}{\frac{\left|x+2\right|-13\,x}{12\,x^2-\left|x+5\right|}}=-\frac{1}{5}$$

```
>aspect(1.5) ; plot2d("(abs(x+2)-13*x)/(12*x^2-abs(x+5))",-8,8,-10,10):
```



5. Tentukan limit berikut ini serta sketsakan grafiknya!

$$\lim_{x\to 19} \frac{cos(4x+12)}{sin(3x+2)}$$

```
>function f(x) &= cos(4*x+12)
```

```
cos(4 x + 12)
```

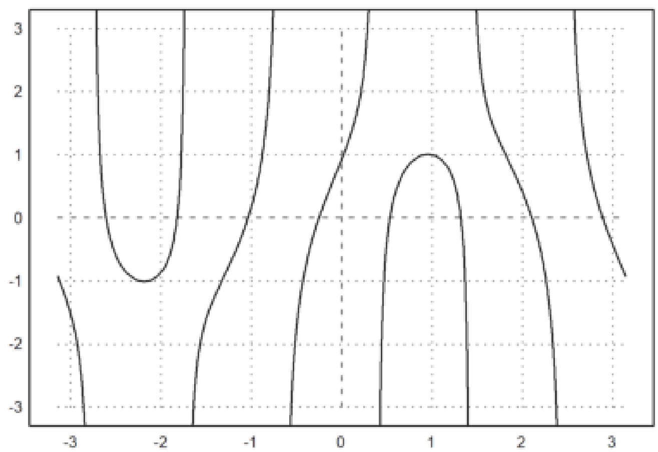
```
>function g(x) &= sin(3*x+2)
```

```
sin(3 x + 2)
```

```
>$&showev('limit(f(x)/g(x),x,19))
```

$$\lim_{x\to 19} \frac{\cos\left(4\,x+12\right)}{\sin\left(3\,x+2\right)}=\frac{\cos 88}{\sin 59}$$

```
>aspect(1.5) ; plot2d("f(x)/g(x)",-pi,pi,-3,3):
```



Turunan Fungsi

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2\,x$$

```
>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$2\,h\,x + h^2$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$2\,x + h$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$2\,x$$

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\, x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan (x+h)^n dengan menggunakan teorema binomial.

Penjelasan

Dalam hal ini kita akan menggunakan Teorema Binomial

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(x+h)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + ... + \binom{n}{n-1} x^1 h^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 h^n$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dax^n}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^n - a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^1h^{n-1} + \binom{n}{n}x^0h^n] - a[x^n]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} a \frac{([\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^1h^{n-1} + \binom{n}{n}x^0h^n] - [x^n])}{h}$$

Perhatikan bahwa nilai dari

$$\binom{n}{0} x^n h^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!}\, x^n = \frac{n!}{n!}\, x^n = \, x^n$$

Substitusikan nilai tersebut terhadap limit di bawah

$$= \lim_{h\to 0} a \frac{([\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^1h^{n-1} + \binom{n}{n}x^0h^n] - [x^n])}{h}$$

Maka diperoleh

$$= \lim_{h\to 0} a \frac{([\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^1h^{n-1} + \binom{n}{n}x^0h^n] - [x^n])}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} a \frac{([x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^1h^{n-1} + \binom{n}{n}x^0h^n] - [x^n])}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} a \frac{(\binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^1h^{n-1} + \binom{n}{n}x^0h^n)}{h}$$

Bagi pembilang dan penyebut dengan h, maka diperoleh

$$= \lim_{h\to 0} a \frac{(\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h}{h} + \frac{\binom{n}{2}x^{n-2}h^2}{h} + ... + \frac{\binom{n}{n-1}x^1h^{n-1}}{h} + \frac{\binom{n}{n}x^0h^n}{h})}{\frac{h}{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} a \frac{(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + ... + \binom{n}{n-1}x^1h^{n-2} + \binom{n}{n}x^0h^{n-1})}{1}$$

Perhatikan bahwa suku pertama tidak memiliki variabel h karena nilai h yang disubstitusi adalah nol, maka hasilnya akan sama dengan nol

Sehingga didapatkan

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dax^n}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^n - a(x)}{h} = a\binom{n}{1} x^{n-1} = a\frac{n!}{(n-1)!1!} x^{n-1}$$

Ingat bahwa

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n$$

Maka didapatkan persamaan akhir

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dax^n}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^n - a(x)}{h} = nax^{n-1}$$

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut
benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan sin(x+h) dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

Penjelasan

$$\lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h) - sinx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sinxcosh + sinhcosx - sinx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-sinx\frac{1-cosh}{h} + cosx\frac{sinh}{h})$$

$$= (-sinx)(\lim_{h\to 0} \frac{1-cosh}{h} + cosx(\lim_{h\to 0} \frac{sinh}{h})$$

$$= (-sinx) * 0 + cosx * 1 = cosx$$

Diperoleh

$$\lim_{h\to 0}\frac{sin(x+h)-sinx}{h}=cosx$$

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(x+h\right)-\log x}{h}=\frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut
benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

Penjelasan

$$\lim_{h\to 0}\frac{log(x+h)-logx}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{log\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,log(1+\frac{h}{x})$$

$$=\lim_{h\to 0}\;log(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

$$=\;log\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

$$=\;log\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}*\frac{x}{h}\frac{h}{x}}$$

$$=\;log\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{(\frac{x}{h})\frac{1}{x}}$$

$$=\;loge^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}$$

Diperoleh

$$\lim_{h\to 0}\frac{log(x+h)-logx}{h}=\frac{1}{x}$$

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
 $showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
                                      ^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

```
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))
```

$$factor\left(e^{x+h}-e^x\right)=\left(e^h-1\right)\,e^x$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\right)e^x=e^x$$

```
>function f(x) &= x^x
```

```
                                    x
                                   x
```

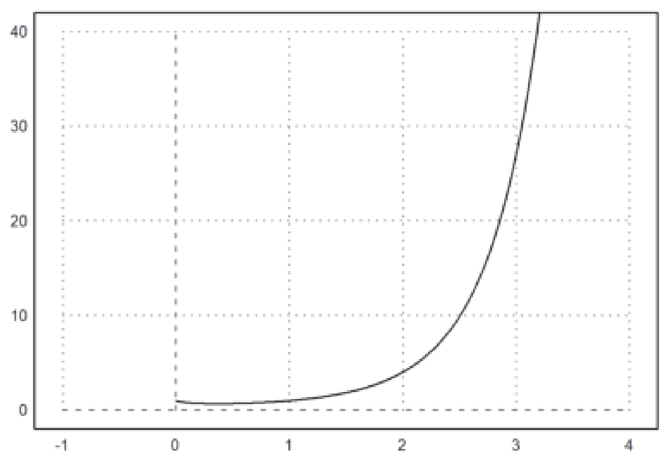
```
>$showev('limit(f(x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}x^x=1$$

Silakan Anda gambar kurva

$$y=x^x.$$

```
>plot2d("x^x",-1,4,0,40):
```




```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h}=\mathit{infinity}$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h} = x^x \left(\log x + 1\right)$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

```
[x > 0]
```

```
>&forget(x<0)
```

```
[x < 0]
```

```
>&facts()
```

```
[]
```

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{\arcsin\left(x+h\right) - \arcsin x}{h} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Penjelasan

Jika

$$y = f(x) = arcsinx$$

,maka

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Bukti:

$$y = arcsinx$$

maka

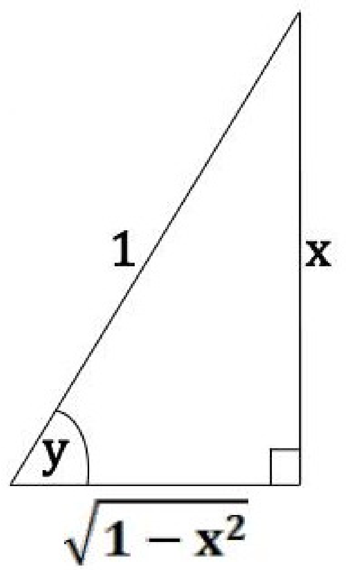
$$siny = x$$

$$cosy\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xosy}$$

Perhatikan segitiga berikut ini!



$$siny = x$$

$$cosy = \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(TERBUKTI)$$

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(x+h\right)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Penjelasan

$$\lim_{h\to 0}\frac{tan(x+h)-tanx}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{tanx+tanh}{1-tanxtanh}-sinx}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{tanx+tanh-tanx+tan^2xtanh}{1-tanxtanh}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{tanh+tan^2xtanh}{h(1-tanxtanh)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+tan^2x}{1=tanxtan0}.(\lim_{h\to 0}\frac{tanh}{h})$$

$$=\frac{1+tan^2x}{1-tanxtan0}.1$$

$$=1+tan^2x$$

$$=sec^2x=\frac{1}{cos^2x}$$

Diperoleh

$$\lim_{h\to 0}\frac{tan(x+h)-tanx}{h}=\frac{1}{cos^2x}$$

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

sinh(x)

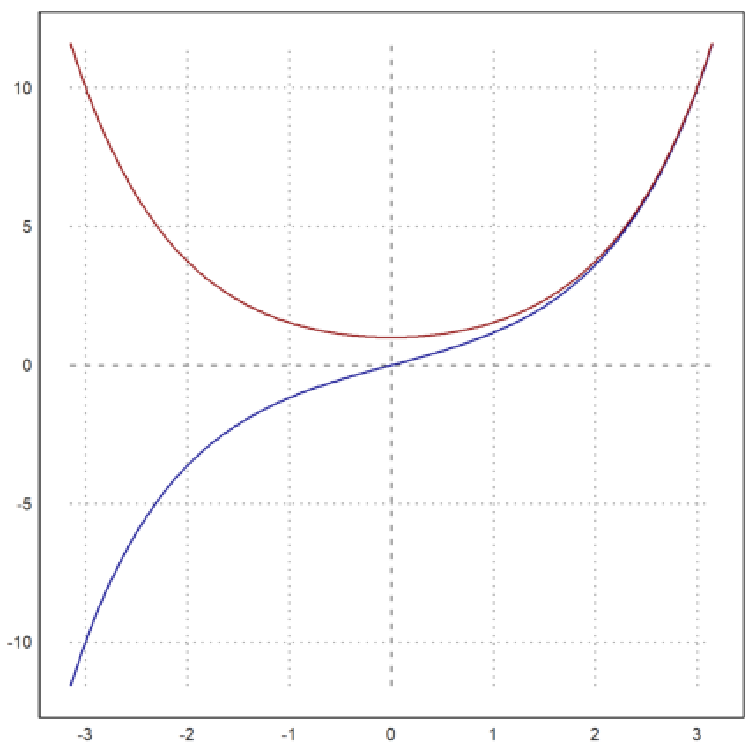
```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x}\,\left(e^{2\,x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```




```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
     2     5
sin  (3 x   + 7)
```

```
>diff(f,3), diffc(f,3)
```

```
1198.32948904
1198.72863721
```

Apakah perbedaan diff dan diffc?

jawab:
"diff" adalah fungsi diferensiasi numerik yang menghitung turunan suatu fungsi tertentu menggunakan perbedaan hingga. Ini dapat digunakan untuk memperkirakan turunan suatu fungsi pada titik tertentu atau pada interval.

Sedangkan "diffc" adalah fungsi diferensiasi numerik lain yang menghitung turunan dari fungsi tertentu menggunakan diferensiasi langkah kompleks. Ini lebih akurat daripada diff dan dapat digunakan untuk menghitung turunan suatu fungsi pada titik tertentu atau pada interval.

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right)=30\,x^4\,\cos\left(3\,x^5+7\right)\,\sin\left(3\,x^5+7\right)$$

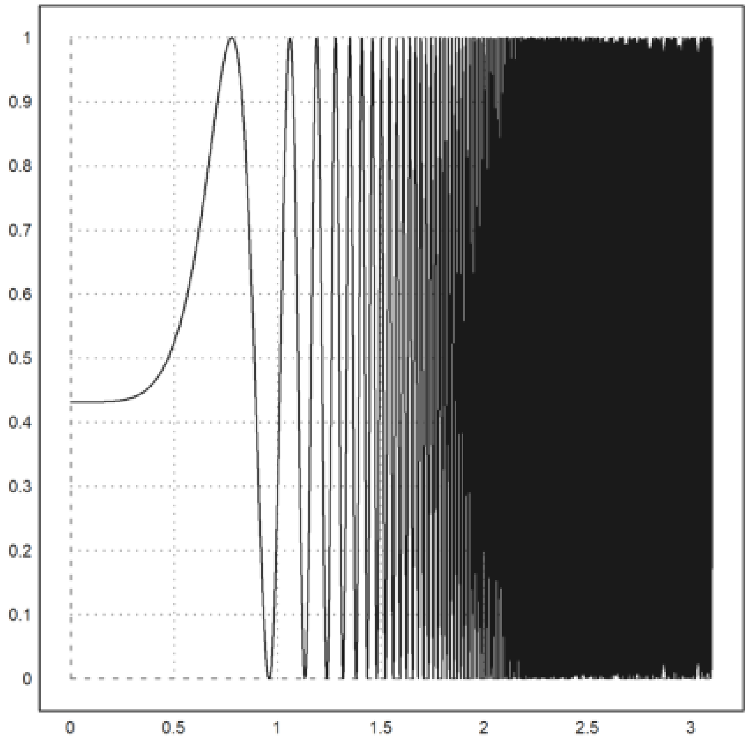
```
>$% with x=3
```

$$\%at\left(\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right)\,,x=3\right)=2430\,\cos 736\,\sin 736$$

```
>$float(%)
```

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{d\,x^{1.0}}\,\sin^2\left(3.0\,x^5+7.0\right)\,,x=3.0\right)=1198.728637211748$$

```
>plot2d(f,0,3.1):
```




```
>function f(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendifinisikan fungsi f
```

```
5 cos(2 x) - 2 x sin(2 x)
```

```
>function df(x) &=diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)
```

```
- 12 sin(2 x) - 4 x cos(2 x)
```

```
>$'f(1)=f(1), $float(f(1)), $'f(2)=f(2), $float(f(2)) // nilai f(1) dan f(2)
```

$$-0.2410081230863468$$

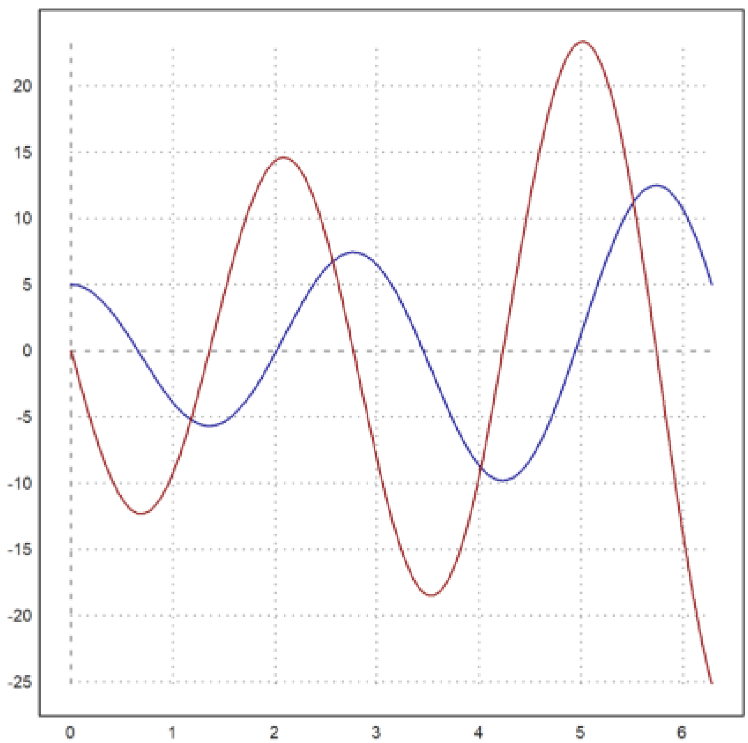
```
>xp=solve("df(x)",1,2,0) // solusi f'(x)=0 pada interval [1, 2]
```

```
1.35822987384
```

```
>df(xp), f(xp) // cek bahwa f'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut
```

```
0
-5.67530133759
```

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```



Perhatikan titik-titik "puncak" grafik y=f(x) dan nilai turunan pada saat grafik fungsinya mencapai titik "puncak" tersebut.

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), seperti contoh-contoh tersebut. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

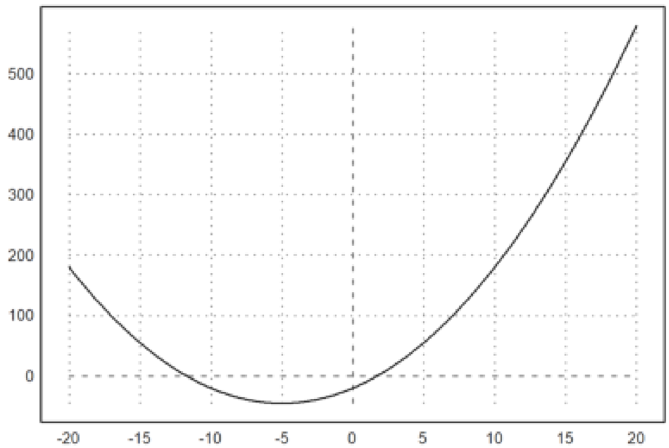
1. Tentukan turunan fungsi berikut ini:

$$f(x) = x^2 + 10x - 20$$

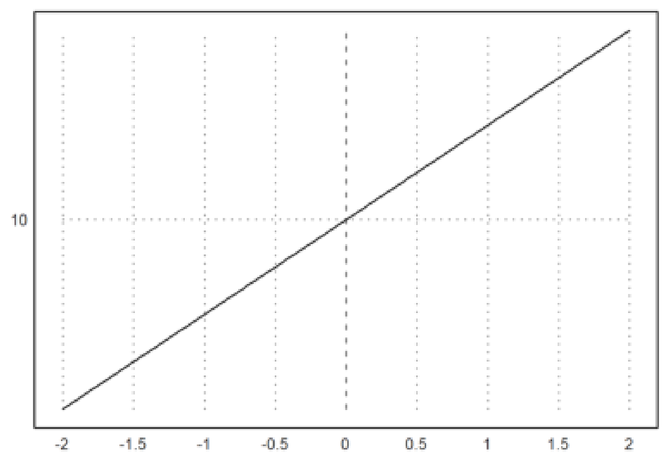
```
>function f(x) &= x^2+10*x-20;
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(x+h\right)^2-x^2+10\,\left(x+h\right)-10\,x}{h}}=2\,x+10$$

```
>aspect(1.5) ; plot2d("f(x)",-20,20):
```




```
>aspect(1.5) ; plot2d(&diff(f(x),x),-2,2):
```



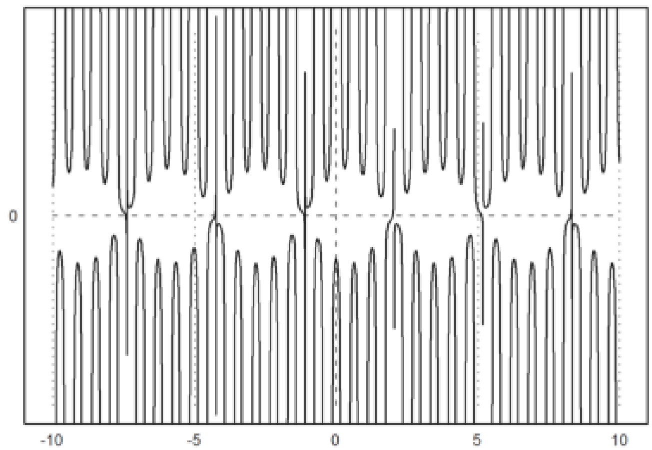
2. Tentukan turunan fungsi berikut ini:

$$f(x)=\frac{sin(x-2)}{cos(10x)}$$

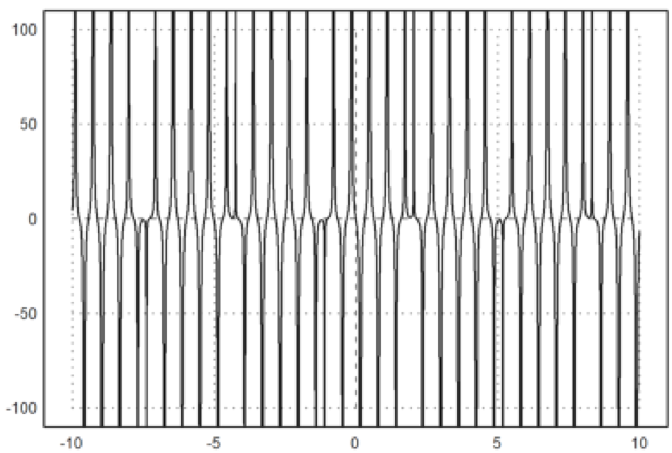
```
>function f(x) &= sin(x-2)/cos(10*x);
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h-2)}{\cos(10\,(x+h))}-\frac{\sin(x-2)}{\cos(10\,x)}}{h}=\frac{10\,\sin\left(x-2\right)\,\sin\left(10\,x\right)+\cos\left(x-2\right)\,\cos\left(10\,x\right)}{\cos^2\left(10\,x\right)}$$

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-10,10,-4,4):
```




```
>aspect(1.5); plot2d(&diff(f(x),x),-10,10,-100,100):
```



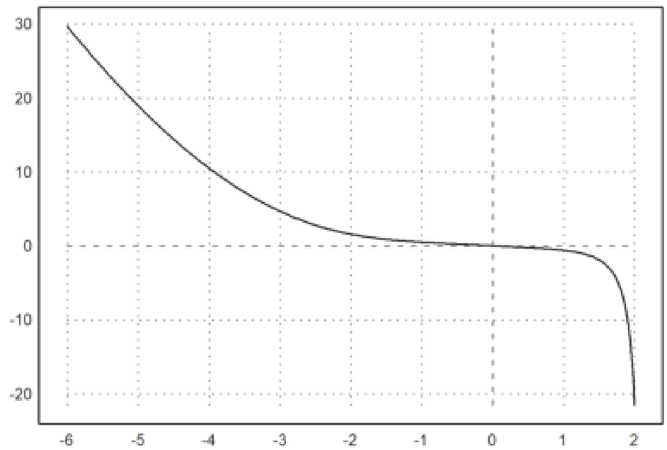
3. Tentukan turunan fungsi berikut ini:

$$f(x)=\frac{x^5-2x^2+10x-1}{x^3+5x-20}$$

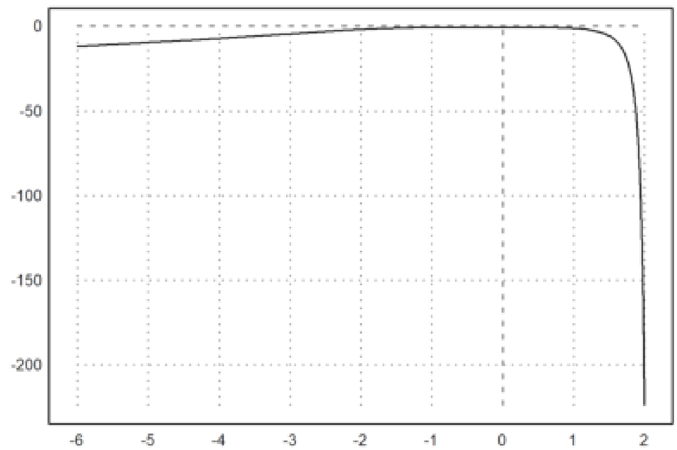
```
>function f(x) &= (x^5-2*x^2+10*x-1)/(x^3+5*x-20);
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\frac{\left(x+h\right)^5-2\,\left(x+h\right)^2+10\,\left(x+h\right)-1}{\left(x+h\right)^3+5\,\left(x+h\right)-20}-\frac{x^5-2\,x^2+10\,x-1}{x^3+5\,x-20}}{h}}=\frac{2\,x^7+20\,x^5-98\,x^4-20\,x^3-7\,x^2+80\,x-195}{x^6+10\,x^4-40\,x^3+25\,x^2-200\,x+400}$$

```
>aspect(1.5) ; plot2d("f(x)",-6,2):
```




```
>aspect(1.5) ; plot2d(&diff(f(x),x),-6,2):
```



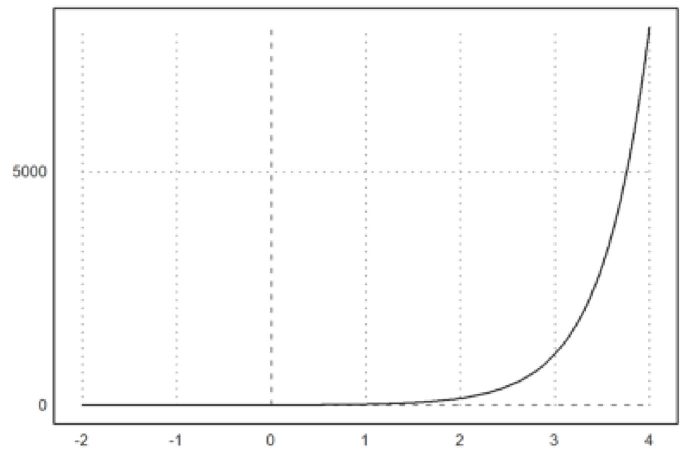
4. Tentukan turunan fungsi berikut ini:

$$f(x)=e^{2x+1}$$

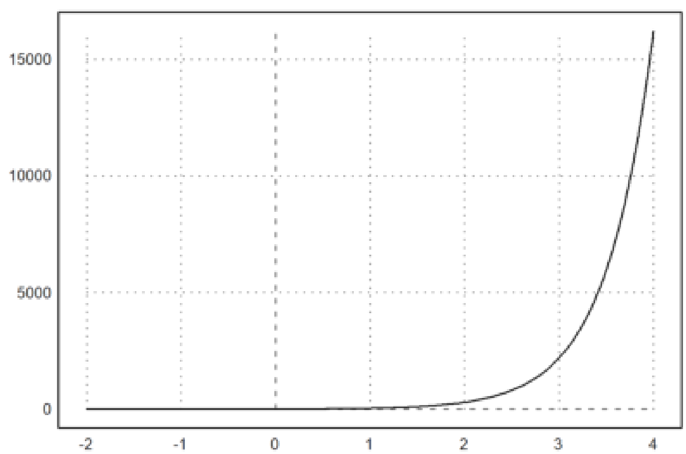
```
>function f(x) &= E^(2*x+1);
>$showev('limit(factor((E^(2*(x+h)+1)-E^(2*x+1))/h),h,0))
```

$$\left(\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(e^{h}-1\right)\,\left(e^{h}+1\right)}{h}}\right)\,e^{2\,x+1}=2\,e^{2\,x+1}$$

```
>aspect(1.5) ; plot2d("f(x)",-2,4):
```




```
>aspect(1.5) ; plot2d(&diff(f(x),x),-2,4):
```



5. Tentukan turunan fungsi berikut ini:

$$f(x)=\frac{7x^2-15x+10}{14x-5}$$

$$g(x)=\frac{4x+8}{9x-7}$$

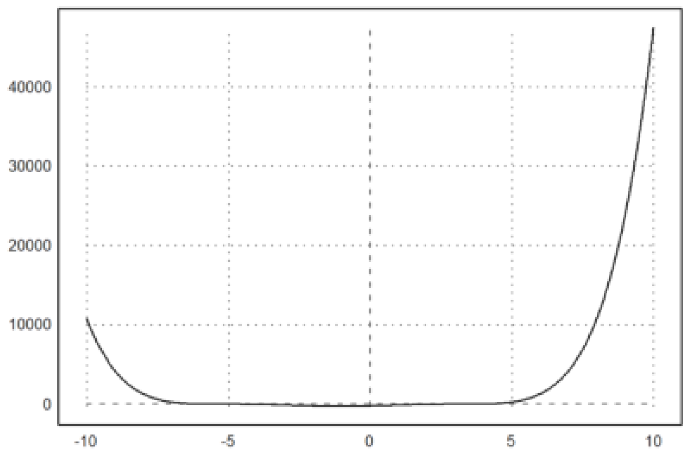
$$h(x) = f(g(x))$$

$$u(x) = g(f(x))$$

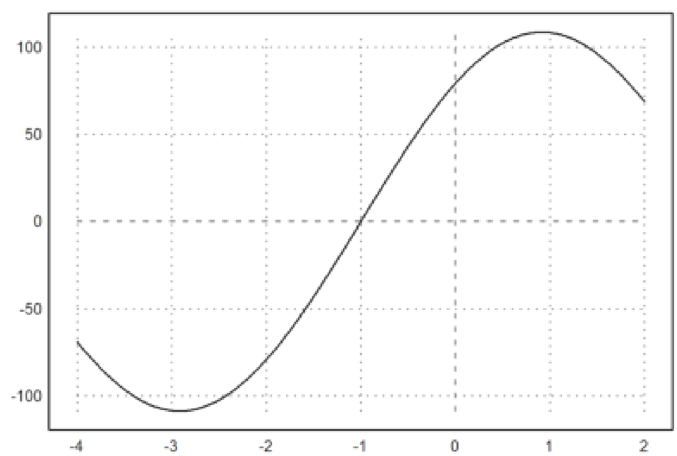
```
>function f(x) &= (7*x^2-15*x+10)/14*x-5;
>function g(x) &= (4*x+8)/9*x-7;
>function h(x) &= f(g(x));
>function u(x) &= g(f(x));
>$showev('limit((h(x+h)-h(x))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\left(\frac{(x+h)\,(4\,(x+h)+8)}{9}-7\right)\left(7\left(\frac{(x+h)\,(4\,(x+h)+8)}{9}-7\right)^2-15\left(\frac{(x+h)\,(4\,(x+h)+8)}{9}-7\right)+10\right)}{14}-\frac{\left(\frac{x\,(4\,x+8)}{9}-7\right)\left(7\left(\frac{x\,(4\,x+8)}{9}-7\right)^2-15\left(\frac{x\,(4\,x+8)}{9}-7\right)+10\right)}{14}}{h} = 44$$

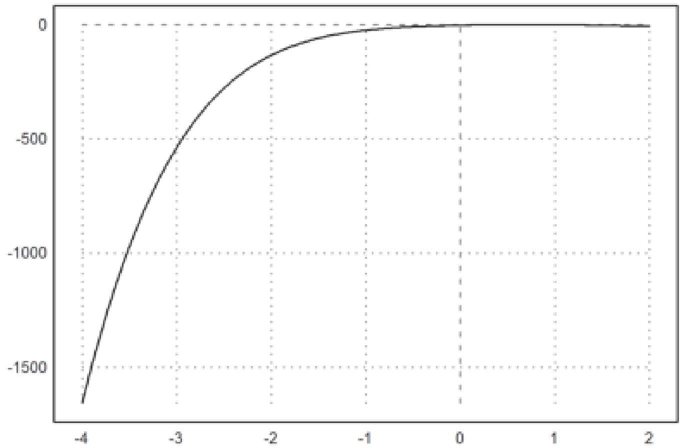
```
>aspect(1.5); plot2d("h(x)",-10,10):
```




```
>aspect(1.5) ; plot2d(&diff(h(x),x),-4,2):
```



```
>aspect(1.5) ; plot2d(&diff(u(x),x),-4,2):
```



Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

```
Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \log\left(x+1\right)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

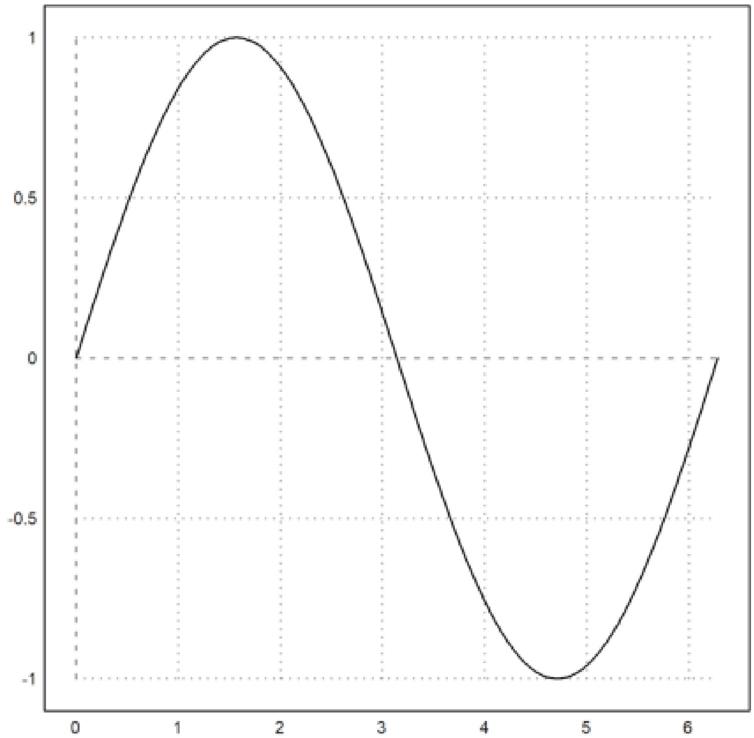
```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 2$$

```
>plot2d("sin(x)",0,2*pi):
```




```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_{a}^{b}\sin x\,dx=\cos a-\cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

```
Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"
```

$$\int_{a}^{b}x^{n}\,dx=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int x^2\,\sqrt{2\,x+1}\,dx=\frac{(2\,x+1)^{\frac{7}{2}}}{28}-\frac{(2\,x+1)^{\frac{5}{2}}}{10}+\frac{(2\,x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_{0}^{2}x^2\,\sqrt{2\,x+1}\,dx=\frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21}-\frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_{0}^{2}x^2\,\sqrt{2\,x+1}\,dx=\frac{2\,5^{\frac{7}{2}}-2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_{0}^{\pi^2}\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a+\left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_{0}^{\pi^2}\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\left(\sin a-\cos a\right)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

```
                                     2
                                  - x
                                 E
```

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(x\right)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

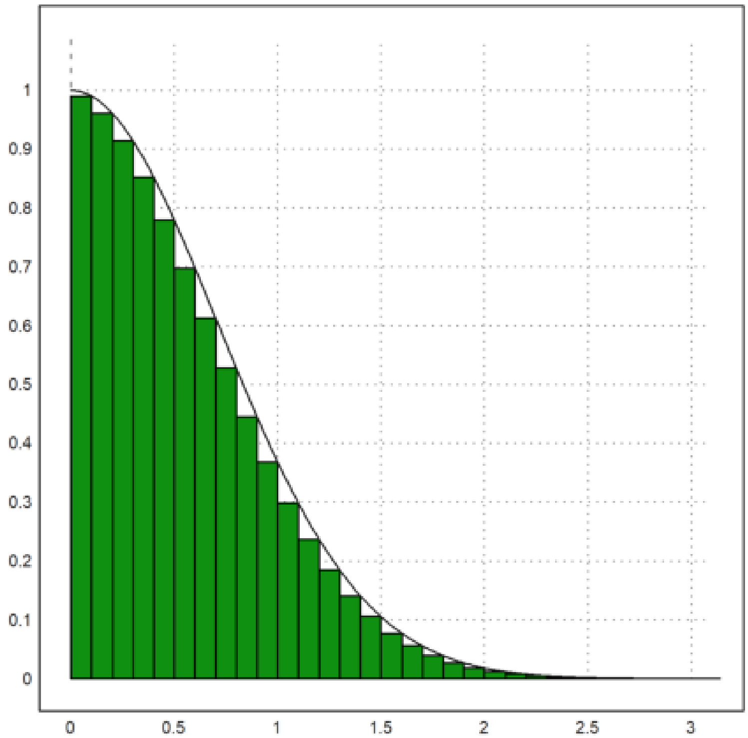
$$erf(x)=\int\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

$$\int_{0}^{\pi}e^{-x^2}\,dx$$

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2}\,dx$$

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

$$\int_0^{\pi} x^x\,dx = 7.834935879025507$$

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, ..., 3.2.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_{0}^{\infty }{e^ {- x^2 }\;dx}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tunjukan kebenaran hasil diatas!

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

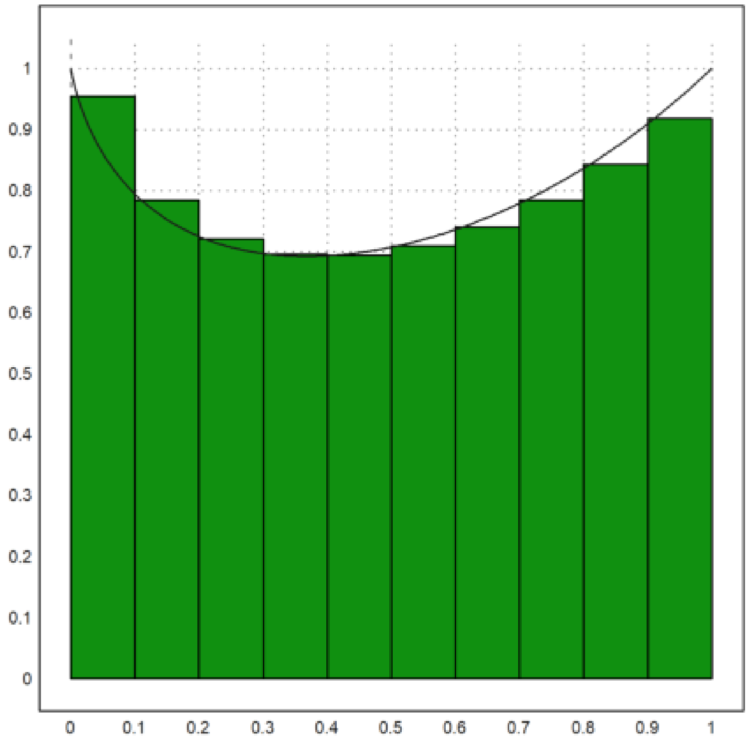
```
>function f(x) &= x^x
```

```
                                    x
                                   x
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}=\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

$$\int_0^1 x^x\,dx = 0.7834935879025506$$

Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
           2      5
        sin (3 x   + 7)
```

```
>integrate(f,0,1)
```

```
  0.542581176074
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_{0}^{1}\sin^2\left(3\,x^5+7\right)\;dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\,\sin 14\,\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{10\,6^{\frac{1}{5}}}-\frac{\left(\left(6^{\frac{4}{5}}\;gamma\_\_incomplete\left(\frac{1}{5},6\,i\right)+6^{\frac{4}{5}}\;gamma\_\_incomplete\left(\frac{1}{5},-6\,i\right)\right)\,\sin 14}{}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{1.0}\sin^2\left(3.0\,x^5+7.0\right)\;dx=0.09820784258795788-0.008333333333333333\;(0.3090169943749474\;(0.1367372182078336\;(4.19$$

```
>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)
```

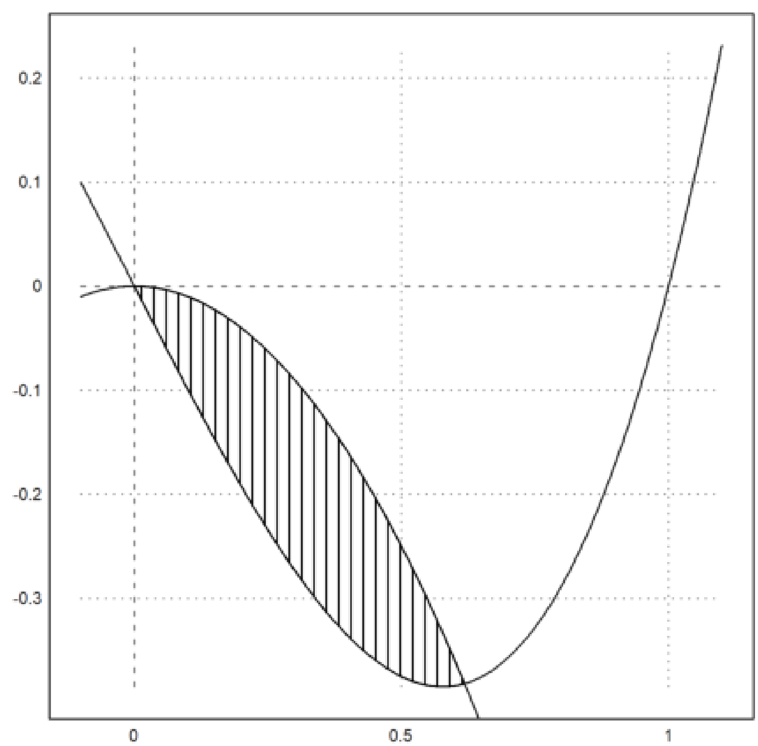
$$\int_{0}^{1}x\,e^{-x}\;dx=1-2\,e^{-1}$$

```
>0.01*sum(f(x+0.01))
```

```
0.0556253559182
```

Aplikasi Integral Tentu

```
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add);  ...
>b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
>plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add): // Plot daerah antara 2 kurv
```



```
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong kedua kurva
```

```
0
0.61803398875
```

```
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir
```

```
0.0758191713542
```

Hasil tersebut akan kita bandingkan dengan perhitungan secara analitik

```
>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a // menentukan absis titik potong kedua kurva secara eksa
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2},x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},x=0\right]$$

```
>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara eksak
```

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{-x^3-x^2+x\;dx}=\frac{13-5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{0.6180339887498949}{-1.0\,x^3-1.0\,x^2+x\;dx}=0.07581917135421037$$

Panjang Kurva

Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah didalam kurva tersebut.

$$\gamma(t)=(r(t)\cos(t),r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t)=1+\frac{\sin(3t)}{2},\quad 0\le t\le 2\pi.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5): // Kita gambar kurvanya terlebih dahul
```

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-228.png

```
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)=r(t)
```

$$r\left(t\right)=\frac{\sin \left(3\,t\right)}{2}+1$$

```
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$$\mathit{fx}\left(t\right)=\cos t\,\left(\frac{\sin \left(3\,t\right)}{2}+1\right)$$

```
>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$\mathit{fy}\left(t\right)=\sin t\,\left(\frac{\sin \left(3\,t\right)}{2}+1\right)$$

```
>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'ds(t)=ds(t
```

$$\mathit{ds}\left(t\right)=\frac{\sqrt{4\,\cos \left(6\,t\right)+4\,\sin \left(3\,t\right)+9}}{2}$$

```
>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva
```

$$\frac{\int_{0}^{2\,\pi}{\sqrt{4\,\cos \left(6\,x\right)+4\,\sin \left(3\,x\right)+9}\;dx}}{2}$$

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.
Berikut kita hitung integralnya secara umerik dengan perintah EMT.

```
>integrate("ds(x)",0,2*pi)
```

```
9.0749467823
```

Spiral Logaritmik

$$x = e^{ax}\cos x,\ y = e^{ax}\sin x.$$

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):
```

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-235.png

```
>&kill(a) // hapus expresi a
```

```
done
```

```
>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$$fx\left(t\right)=e^{a\,t}\,\cos t$$

```
>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$fy\left(t\right)=e^{a\,t}\,\sin t$$

```
>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t
```

$$df\left(t\right)=\sqrt{a^2+1}\,e^{a\,t}$$

```
>S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral)
```

$$\sqrt{a^2+1}\,\left(\frac{e^{2\,\pi\,a}}{a}-\frac{1}{a}\right)$$

```
>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1
```

```
8.78817491636
```

Soal:
Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah K=2.pi.r.
Akan ditunjukan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah K=2.pi.R.
Persamaan lingkaran dengan pusat(0,0) dan berjari-jari R:

$$x^2+y^2=R^2$$

Dengan menentukan turunan implisit, diperoleh:

$$2xdx+2ydy=0$$

jika hanya jika

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

Dapat dilihat bahwa keliling lingkaran = 4 kali panjang kurva pada interval [0,R]. Maka, rumus keliling lingkaran:

$$\frac{1}{4}K = \int_0^R \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\, dx$$
$$= \int_0^R \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$$

Dengan menyubstitusikan persamaan, diperoleh:

$$\frac{1}{4}K = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{R})^2}}\, dx$$

Dengan memisalkan,

$$\frac{x}{R} = sinu,$$

maka,

$$dx = Rcosudu$$

$$x = 0$$

$$u = 0$$

dan

$$x = R$$

$$u = \frac{\pi}{2}$$

Oleh karena itu, Persamaan tadi bisa ditulis sebagai berikut:

$$\frac{1}{4}K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2u}} Rcosu\, du$$
$$= \frac{1}{2}\pi R$$

sehingga rumus keliling lingkaran adalah:

$$K = 2\pi R$$

Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

```
>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):
```

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-255.png

```
>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))
```

$$\int_{-1}^{1}{\sqrt{4\,x^2+1}\;dx}=\frac{\mathrm{asinh}\;2+2\,\sqrt{5}}{2}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{-1.0}^{1.0}{\sqrt{4.0\,x^2+1.0}\;dx}=2.957885715089195$$

```
>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y);  ...
>  plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-258.png

Panjang tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

```
2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

Koordinat Kartesius

Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

```
>z &= x^3+y^3-3*x*y; $z
```

$$y^3 - 3\,x\,y + x^3$$

```
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):
```

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-261.png

Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama

```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-262.png

Kita selesaikan persamaannya untuk x.

```
>$z with y=l*x, sol &= solve(%,x); $sol
```

$$\left[x=\frac{3\,l}{l^3+1},x=0\right]$$

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-264-large.j

Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

```
>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)
```

$$f\left(l\right)=\frac{3\,l}{l^3+1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai y=l*x, yakni x=f(l) dan y=l*f(l).

```
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):
```

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-266.png

Elemen panjang kurva adalah:

$$ds = \sqrt{f'(l)^2 + (lf'(l) + f(l))^2}.$$

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=ds(l)
```

$$ds\left(l\right)=\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}$$

```
>$integrate(ds(l),l,0,1)
```

$$\int_{0}^{1}{\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}\;dl}$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral etrsebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

```
>2*integrate("ds(x)",0,1)
```

```
4.91748872168
```

```
>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampiran integral yang
```

```
4.91748872168
```

Perhitungan di datas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

```
>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...
```

```
ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
return romberg(ds,a,b);
endfunction
```

```
>panjangkurva("x","x^2",-1,1) // cek untuk menghitung panjang kurva parabola sebelumnya
```

```
2.95788571509
```

Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

```
>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1) // cek contoh terakhir, bandingkan hasilnya
```

```
4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

```
>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):
```

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-270.png

```
>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)
```

```
21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

```
>&kill(ds,x,fx,fy)
```

```
done
```

```
>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)
```

```
                2                2
sqrt(diff  (fy, x) + diff  (fx, x))
```

```
>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol // Kita gunakan untuk menghitung panjang kurva terakhi
```

$$\sqrt{\left(\cos x-x\,\sin x\right)^2+\left(\sin x+x\,\cos x\right)^2}$$

```
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

$$\frac{\operatorname{asinh}\,\left(2\,\pi\right)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-273-large.

```
21.2562941482
```

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.
Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

```
>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
```

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-274.png

```
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
```

$$3\,x\,\sqrt{9\,x^2+4}$$

```
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di atas
```

$$6.0 \int_{0.0}^{0.5773502691896258} x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\,dx = 2.337835372767141$$

images/22305141017_Ardi Budi S_kalkulus-277-large.

Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r. Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

$$(rt, r).$$

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula (0,0) dan posisinya pada saat t adalah:

$$(r(t-\sin(t)), r(1-\cos(t))).$$

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika t=0, t=pi/2, t=r*pi.

```
>x &= r*(t-sin(t))
```

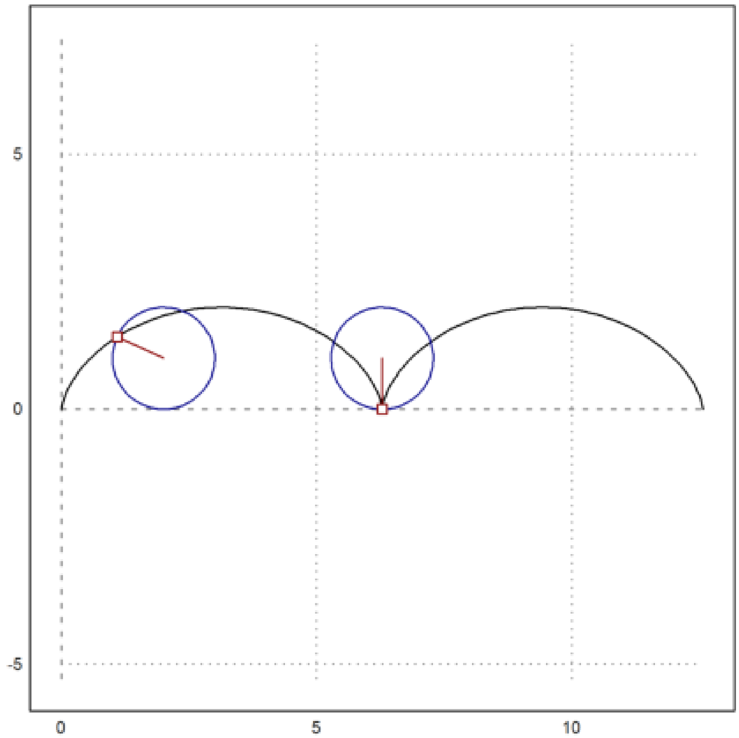
```
r (t - sin(t))
```

```
>y &= r*(1-cos(t))
```

```
r (1 - cos(t))
```

Berikut kita gambar sikloid untuk r=1.

```
>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);
>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
>  plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
>  plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
>  plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add);   ...
>  plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):
```



Berikut dihitung panjang lintasan untuk 1 putaran penuh. (Jangan salah menduga bahwa panjang lintasan 1 putaran penuh sama dengan keliling lingkaran!)

```
>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen panjang kurva s
```

$$\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\,\cos x + 1} = \sqrt{2 - 2\,\cos x}$$

```
>ds &= trigsimp(ds); $ds
```

$$\sqrt{2 - 2\,\cos x}$$

```
>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid satu putaran penuh
```

$$\int_{0}^{2\,\pi}{\sqrt{2-2\,\cos x}\;dx} = 8$$

```
>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik
```

8

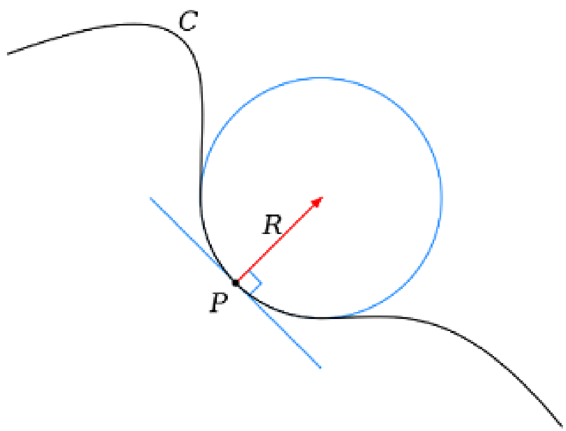
```
>romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik
```

8

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

$$2\pi.$$

Kurvatur (Kelengkungan) Kurva



Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkar-an
oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2pi sejauh 2piR.)
Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekivalen.

Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva

Setiap kurva diferensiabel dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik terhadap panjang kurva s:

$$\gamma(s) = (x(s),\ y(s)),$$

dengan x dan y adalah fungsi riil yang diferensiabel, yang memenuhi:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1.$$

Ini berarti bahwa vektor singgung

$$\mathbf{T}(s) = (x'(s),\ y'(s))$$

memiliki norm 1 dan merupakan vektor singgung satuan.

Apabila kurvanya memiliki turunan kedua, artinya turunan kedua x dan y ada, maka T′(s) ada. Vektor ini merupakan normal kurva yang arahnya menuju pusat kurvatur, norm-nya merupakan nilai kurvatur (kelengkungan):

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(s) &= \gamma'(s),\\ \mathbf{T}^2(s) &= 1 \text{ (konstanta)} \Rightarrow \mathbf{T}'(s)\cdot\mathbf{T}(s) = 0\\ \kappa(s) &= \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}.\end{aligned}$$

Nilai

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

disebut jari-jari (radius) kelengkungan kurva.

Bilangan riil

$$k(s) = \pm\kappa(s)$$

disebut nilai kelengkungan bertanda.

Contoh:

Akan ditentukan kurvatur lingkaran

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

```
>fx &= r*cos(t); fy &=r*sin(t);
>&assume(t>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s // elemen panja
```

```
r t
```

```
>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &=r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan parametrik terha
>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)^2+diff(fy,s,2)^2)); $k // nilai kurvatur lingkaran dengan
```

$$\frac{1}{r}$$

Untuk representasi parametrik umum, misalkan

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

merupakan persamaan parametrik untuk kurva bidang yang terdiferensialkan dua kali. Kurvatur untuk kurva tersebut didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad (\phi \text{ adalah sudut kemiringan garis singgung dan } s \text{ adalah panjang kurva}) \\ &= \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.\end{aligned}$$

Selanjutnya, pembilang pada persamaan di atas dapat dicari sebagai berikut.

$$\sec^2\phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan\phi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{\sec^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.\end{aligned}$$

Jadi, rumus kurvatur untuk kurva parametrik

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Jika kurvanya dinyatakan dengan persamaan parametrik pada koordinat kutub

$$x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta,$$

maka rumus kurvaturnya adalah

$$\kappa(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{(r'(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan rumus tersebut!)

Contoh:

Lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

Nilai kelengkungan lingkaran tersebut adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Hasil cocok dengan definisi kurvatur suatu kelengkungan.

Kurva

$$y = f(x)$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan parametrik

$$x = t,\ y = f(t),\ \text{ dengan } x'(t) = 1,\ x''(t) = 0,$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa(t) = \frac{y''(t)}{(1 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Contoh:
Akan ditentukan kurvatur parabola

$$y = ax^2 + bx + c.$$

```
>function f(x) &= a*x^2+b*x+c; $y=f(x)
```

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan p
```

$$k\left(x\right) = \frac{2\,a}{\left(\left(2\,a\,x + b\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

```
>function f(x) &= x^2+x+1; $y=f(x) // akan kita plot kelengkungan parabola untuk a=b=c=1
```

$$y = x^2 + x + 1$$

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan p
```

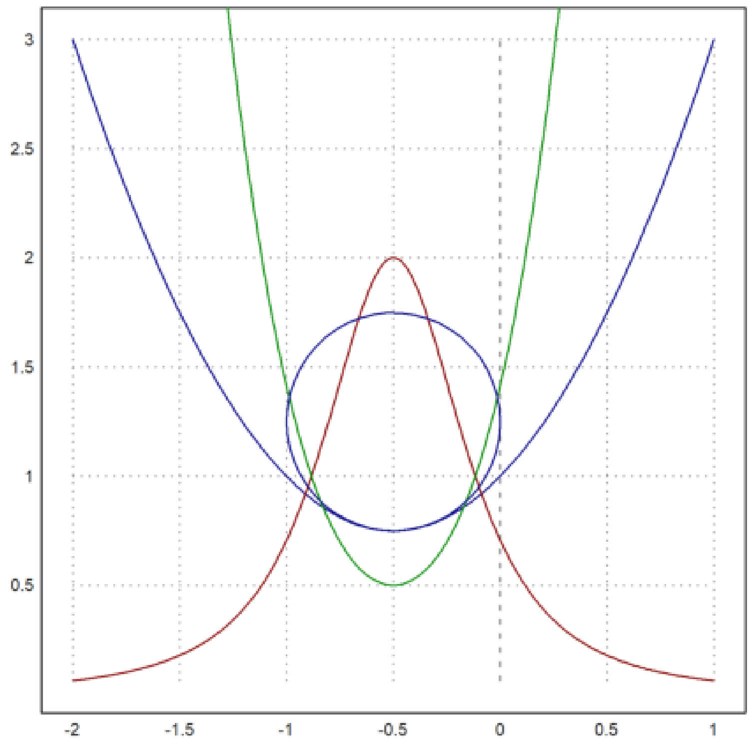
$$k\left(x\right) = \frac{2}{\left(\left(2\,x + 1\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Berikut kita gambar parabola tersebut beserta kurva kelengkungan, kurva jari-jari kelengkungan dan salah satu lingkaran oskulasi di titik puncak parabola. Perhatikan, puncak parabola dan jari-jari lingkaran oskulasi di puncak parabola adalah

$$(-1/2, 3/4),\ 1/k(2) = 1/2,$$

sehingga pusat lingkaran oskulasi adalah (-1/2, 5/4).

```
>plot2d(["f(x)", "k(x)"],-2,1, color=[blue,red]); plot2d("1/k(x)",-1.5,1,color=green,>add)
>plot2d("-1/2+1/k(-1/2)*cos(x)","5/4+1/k(-1/2)*sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue):
```



Untuk kurva yang dinyatakan dengan fungsi implisit

$$F(x, y) = 0$$

dengan turunan-turunan parsial

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial F}{\partial y},\ F_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

berlaku

$$F_x dx + F_y dy = 0 \text{ atau } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan sendiri!)

Contoh 1:

Parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan implisit

$$ax^2 + bx + c - y = 0.$$

```
>function F(x,y) &=a*x^2+b*x+c-y; $F(x,y)
```

$$-y + a\,x^2 + b\,x + c$$

```
>Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y),y), Fxy &=diff(diff(F(x,y)
```

```
2 a x + b

2 a

- 1

0

0
```

```
>function k(x) &= (Fy^2*Fxx-2*Fx*Fy*Fxy+Fx^2*Fyy)/(Fx^2+Fy^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kurvat
```

$$k\left(x\right) = \frac{2\,a}{\left(\left(2\,a\,x + b\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Hasilnya sama dengan sebelumnya yang menggunakan persamaan parabola biasa.

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva y= f(x) yang diputar mengelilingi sumbu x dari x=a sampai x=b, yakni

$$V = \int_a^b \pi (f(x)^2\, dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)
- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub x=f(r,t), y=g(r,t), r=h(t), x=a bersesuaian dengan t=t0 dan x=b bersesuaian dengan t=t1, maka rumus di atas akan menjadi:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

- Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk:

```
a. koordinat Kartesius (persamaan y=f(x))
b. koordinat kutub ( r=r(theta))
c. persamaan parametrik x=x(t), y=y(t)
d. persamaan implit F(x,y)=0
```

- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.

1. Akan didefinisikan fungsi berikut

$$\int_1^{20} x^2 - 4x - 20\, dx$$

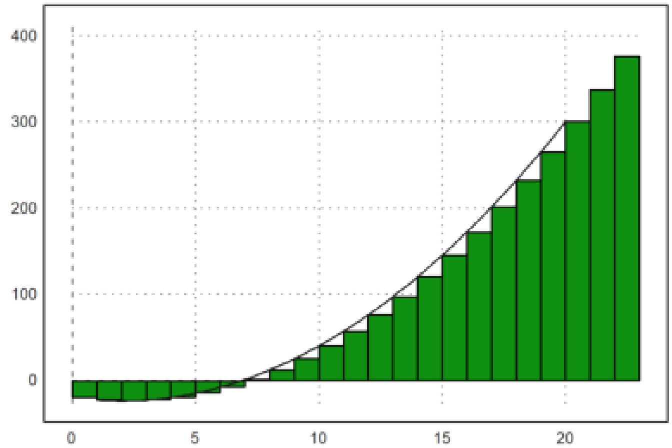
```
>function f(x) &= x^2-4*x-20
```

```
 2
x  - 4 x - 20
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,1,20))
```

$$\int_1^{20} x^2 - 4\,x - 20\, dx = \frac{4465}{3}$$

```
>x=0:1:22; plot2d(x,f(x),>bar); plot2d("f(x)",1,20,>add):
```




```
>$showev('integrate(f(x)^2,x,1,20)*pi) //Menghitung volume benda putar
```

$$\pi \int_{1}^{20}\left(x^2-4\,x-20\right)^2\;dx=\frac{1477649\,\pi}{5}$$

```
>turunan &= diff(f(x),x)
```

```
2 x - 4
```

```
>$showev('integrate(sqrt(1+(turunan)^2),x,1,20)) //Menghitung panjang kurva
```

$$\int_{1}^{20}\sqrt{\left(2\,x-4\right)^2+1}\;dx=\frac{\mathrm{asinh}\;36+36\,\sqrt{1297}}{4}+\frac{\mathrm{asinh}\;2+2\,\sqrt{5}}{4}$$

2. Akan didefinisikan integral berikut

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} cos(x)sin(x)\,dx$$

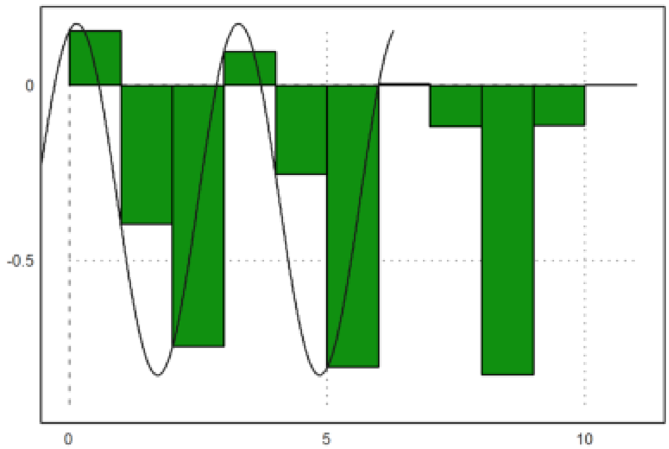
```
>function f(x) &= cos(x+5)*sin(x-10)
```

```
sin(x - 10) cos(x + 5)
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,-2*pi,2*pi))
```

$$\int_{-2\,\pi}^{2\,\pi}\sin\left(x-10\right)\,\cos\left(x+5\right)\;dx=\frac{-4\,\pi\,\sin 15-\cos 5}{4}-\frac{4\,\pi\,\sin 15-\cos 5}{4}$$

```
>x=0:1:10; plot2d(x,f(x),>bar); plot2d("f(x)",-2*pi,2*pi,>add):
```




```
>$showev('integrate(f(x)^2,x,1,10)*pi) //Menghitung volume benda putar
```

$$\pi \int_{1}^{10} \sin^2(x-10)\,\cos^2(x+5)\;dx = \pi\left(\frac{3\,\sin 30 - 40\,\cos 30 + 80}{32} + \frac{4\,\cos 30 - 4\,\sin 18 - 4\,\sin 12 - \sin 6 - 8}{32}\right)$$

```
>turunan &= diff(f(x),x)
```

```
        cos(x - 10) cos(x + 5) - sin(x - 10) sin(x + 5)
```

```
>$showev('integrate(sqrt(1+(turunan)^2),x,1,10)) //Menghitung panjang kurva
```

$$\int_{1}^{10} \sqrt{\left(\cos(x-10)\,\cos(x+5) - \sin(x-10)\,\sin(x+5)\right)^2 + 1}\;dx = \int_{1}^{10} \sqrt{\left(\cos(x-10)\,\cos(x+5) - \sin(x-10)\,\sin(x+5)\right.}$$

3. Akan didefinisikan integral berikut

$$\int_{-1}^{8} \frac{x^2-9}{7x+10}\;dx$$

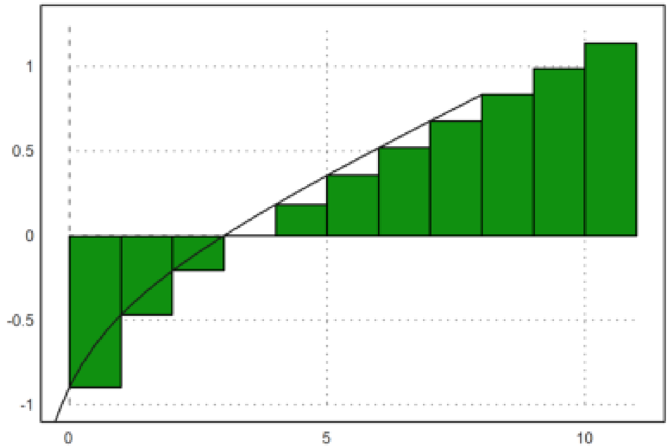
```
>function f(x) &= (x^2-9)/(7*x+10)
```

```
      2
     x  - 9
    --------
    7 x + 10
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,-1,8))
```

$$\int_{-1}^{8}{\frac{x^2-9}{7\,x+10}\;dx}=\frac{682\,\log 3-189}{686}-\frac{341\,\log 66-1008}{343}$$

```
>x=0:1:10; plot2d(x,f(x),>bar); plot2d("f(x)",-2,8,>add):
```




```
>$showev('integrate(f(x)^2,x,-1,8)*pi) //Menghitung volume benda putar
```

$$\pi\,\int_{-1}^{8}{\frac{\left(x^2-9\right)^2}{\left(7\,x+10\right)^2}\;dx}=\pi\,\left(\frac{13640\,\log 66}{16807}-\frac{13640\,\log 3}{16807}+\frac{8033}{4802}\right)$$

```
>turunan &= diff(f(x),x)
```

```
                     2
    2 x        7 (x  - 9)
 -------- - -----------
 7 x + 10             2
            (7 x + 10)
```

```
>$showev('integrate(sqrt(1+(turunan)^2),x,-1,8)) //Menghitung panjang kurva
```

$$\int_{-1}^{8}{\sqrt{\left(\frac{2\,x}{7\,x+10}-\frac{7\,\left(x^2-9\right)}{\left(7\,x+10\right)^2}\right)^2+1}\;dx}=\int_{-1}^{8}{\sqrt{\left(\frac{2\,x}{7\,x+10}-\frac{7\,\left(x^2-9\right)}{\left(7\,x+10\right)^2}\right)^2+1}\;dx}$$

4. Akan didefinisikan integral berikut

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin(2x)}{cos(10x)}\, dx$$

```
>function f(x) &= (sin(5*x))/(cos(7*x))
```

```
sin(5 x)
--------
cos(7 x)
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,-pi,pi))
```

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(5\,x\right)}{\cos\left(7\,x\right)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(5\,x\right)}{\cos\left(7\,x\right)}\,dx$$

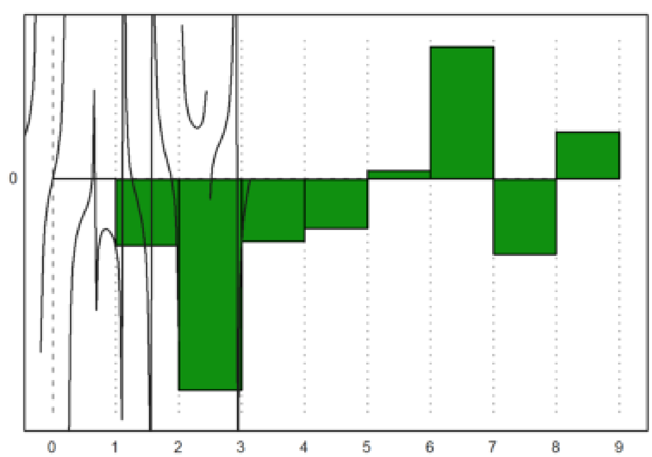
```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
>expr = 0.01*sum(f(x+0.01));
>expr
```

```
-0.0890868904538
```

Hasilnya adalah

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin(2x)}{cos(10x)}\, dx = 0.271679005088$$

```
>x=0:1:8; plot2d(x,f(x),>bar); plot2d("f(x)",-pi,pi,-5,3,>add):
```



```
>$showev('integrate(f(x)^2,x,-pi,pi)*pi) //Menghitung volume benda putar
```

$$\pi\,\int_{-\pi}^{\pi}{\frac{\sin^2\left(5\,x\right)}{\cos^2\left(7\,x\right)}\;dx}=\pi\,\int_{-\pi}^{\pi}{\frac{\sin^2\left(5\,x\right)}{\cos^2\left(7\,x\right)}\;dx}$$

```
>turunan &= diff(f(x),x)
```

```
                   7 sin(5 x) sin(7 x)   5 cos(5 x)
                   ------------------- + ----------
                            2             cos(7 x)
                         cos (7 x)
```

```
>$showev('integrate(sqrt(1+(turunan)^2),x,-1,8)) //Menghitung panjang kurva
```

```
Answering "Is cos(7*x) positive or negative?" with "positive"
```

$$\int_{-1}^{8}{\sqrt{\left(\frac{7\,\sin\left(5\,x\right)\,\sin\left(7\,x\right)}{\cos^2\left(7\,x\right)}+\frac{5\,\cos\left(5\,x\right)}{\cos\left(7\,x\right)}\right)^2+1}\;dx}=\int_{-1}^{8}{\sqrt{\left(\frac{7\,\sin\left(5\,x\right)\,\sin\left(7\,x\right)}{\cos^2\left(7\,x\right)}+\frac{5\,\cos\left(5\,x\right)}{\cos\left(7\,x\right)}\right)^2+1}\;dx}$$

5. Akan didefinisikan Integral berikut

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} x^{2x+1}\,dx$$

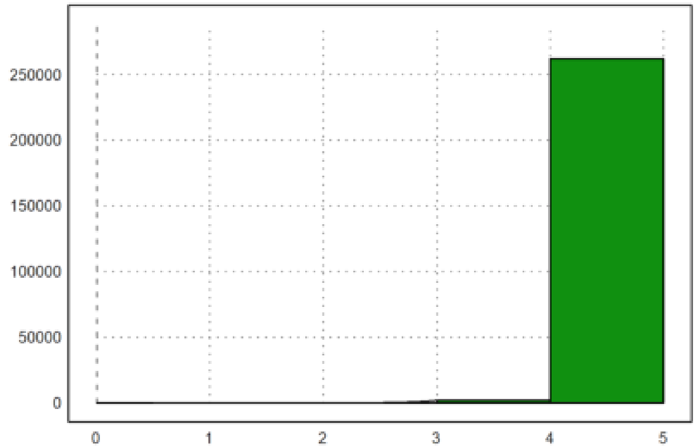
```
>function f(x) &= x^(2*x+1);
>$showev('integrate(f(x),x,1/2,3))
```

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3}{x^{2\,x+1}\;dx}=\int_{\frac{1}{2}}^{3}{x^{2\,x+1}\;dx}$$

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
>expr = 0.01*sum(f(x+0.01));
>expr
```

```
2779.75428427
```

```
>x=0:1:4; plot2d(x,f(x),>bar); plot2d("f(x)",1/2,3,>add):
```




```
>$showev('integrate(f(x)^2,x,-pi,pi)*pi) //Menghitung volume benda putar
```

$$\pi \int_{-\pi}^{\pi} x^{2\,(2\,x+1)}\,dx = \pi \int_{-\pi}^{\pi} x^{2\,(2\,x+1)}\,dx$$

```
>turunan &= diff(f(x),x)
```

```
 2 x + 1              2 x + 1
x        (2 log(x) + -------)
                        x
```

```
>$showev('integrate(sqrt(1+(turunan)^2),x,-1,8)) //Menghitung panjang kurva
```

$$\int_{-1}^{8} \sqrt{x^{2\,(2\,x+1)}\,\left(2\,\log x+\frac{2\,x+1}{x}\right)^2+1}\,dx = \int_{-1}^{8} \sqrt{x^{2\,(2\,x+1)}\,\left(2\,\log x+\frac{2\,x+1}{x}\right)^2+1}\,dx$$

6. Akan didefinisikan integral berikut

$$\int_{\pi}^{2\pi} x^{sin(x)}\,dx$$

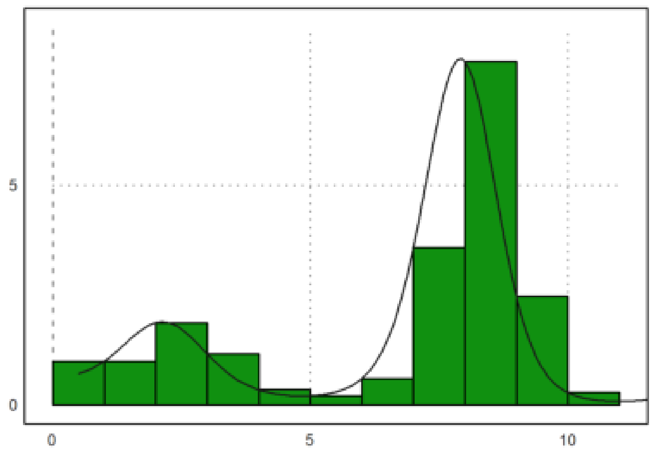
```
>function f(x) &= x^(sin(x));
>$showev('integrate(f(x),x,pi,2*pi))
```

$$\int_{\pi}^{2\,\pi} x^{\sin x}\,dx = \int_{\pi}^{2\,\pi} x^{\sin x}\,dx$$

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
>expr = 0.01*sum(f(x+0.01));
>expr
```

```
0.20339962758
```

```
>x=0:1:10; plot2d(x,f(x),>bar); plot2d("f(x)",1/2,30,>add):
```




```
>$showev('integrate(f(x)^2,x,pi,2*pi)*pi) //Menghitung volume benda putar
```

$$\pi \int_{\pi}^{2\,\pi}{x^{2\,\sin x}\;dx}=\pi \int_{\pi}^{2\,\pi}{x^{2\,\sin x}\;dx}$$

```
>turunan &= diff(f(x),x)
```

```
  sin(x)   sin(x)
 x        (------ + cos(x) log(x))
             x
```

```
>$showev('integrate(sqrt(1+(turunan)^2),x,pi,2*pi)) //Menghitung panjang kurva
```

$$\int_{\pi}^{2\,\pi}{\sqrt{x^{2\,\sin x}\,\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\,\log x\right)^2+1}\;dx}=\int_{\pi}^{2\,\pi}{\sqrt{x^{2\,\sin x}\,\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\,\log x\right)^2+1}\;dx}$$

```
>
```

Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh penggunaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

```
>1:2:30
```

```
[1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29]
```

Iterasi dan Barisan

EMT menyediakan fungsi iterate("g(x)", x0, n) untuk melakukan iterasi

$$x_{k+1} = g(x_k),\ x_0 = x_0, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

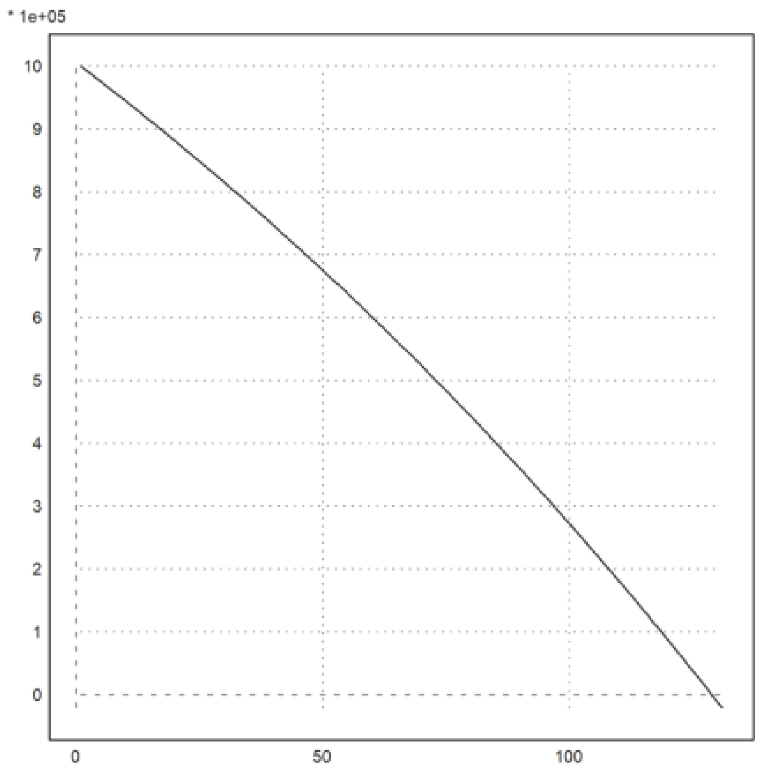
Berikut ini disajikan contoh-contoh penggunaan iterasi dan rekursi dengan EMT. Contoh pertama menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertambahan 5%, selama 10 periode.

```
>q=1.05; iterate("x*q",1000,n=10)'
```

```
   1000
   1050
 1102.5
1157.63
1215.51
1276.28
 1340.1
 1407.1
1477.46
1551.33
1628.89
```

Contoh berikutnya memperlihatkan bahaya menabung di bank pada masa sekarang! Dengan bunga tabungan sebesar 6% per tahun atau 0.5% per bulan dipotong pajak 20%, dan biaya administrasi 10000 per bulan, tabungan sebesar 1 juta tanpa diambil selama sekitar 10 tahunan akan habis diambil oleh bank!

```
>r=0.005; plot2d(iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=130)):
```



Silakan Anda coba-coba, dengan tabungan minimal berapa agar tidak akan habis diambil oleh bank dengan ketentuan bunga dan biaya administrasi seperti di atas.

Berikut adalah perhitungan minimal tabungan agar aman di bank dengan bunga sebesar r dan biaya administrasi a, pajak bunga 20%.

```
>$solve(0.8*r*A-a,A), $% with [r=0.005, a=10]
```

$$[A = 2500.0]$$

Berikut didefinisikan fungsi untuk menghitung saldo tabungan, kemudian dilakukan iterasi.

```
>function saldo(x,r,a) := round((1+0.8*r)*x-a,2);
>iterate({{"saldo",0.005,10}},1000,n=6)
```

```
[1000,  994,  987.98,  981.93,  975.86,  969.76,  963.64]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2000,n=6)
```

```
[2000,  1998,  1995.99,  1993.97,  1991.95,  1989.92,  1987.88]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2500,n=6)
```

```
[2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500]
```

Tabungan senilai 2,5 juta akan aman dan tidak akan berubah nilai (jika tidak ada penarikan), sedangkan jika tabungan awal kurang dari 2,5 juta, lama kelamaan akan berkurang meskipun tidak pernah dilakukan penarikan uang tabungan.

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},3000,n=6)
```

```
[3000,  3002,  3004.01,  3006.03,  3008.05,  3010.08,  3012.12]
```

Tabungan yang lebih dari 2,5 juta baru akan bertambah jika tidak ada penarikan.

Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi "sequence()". Fungsi ini menghitung nilai-nilai x[n] dari semua nilai sebelumnya, x[1],...,x[n-1] yang diketahui.
Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

```
>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)
```

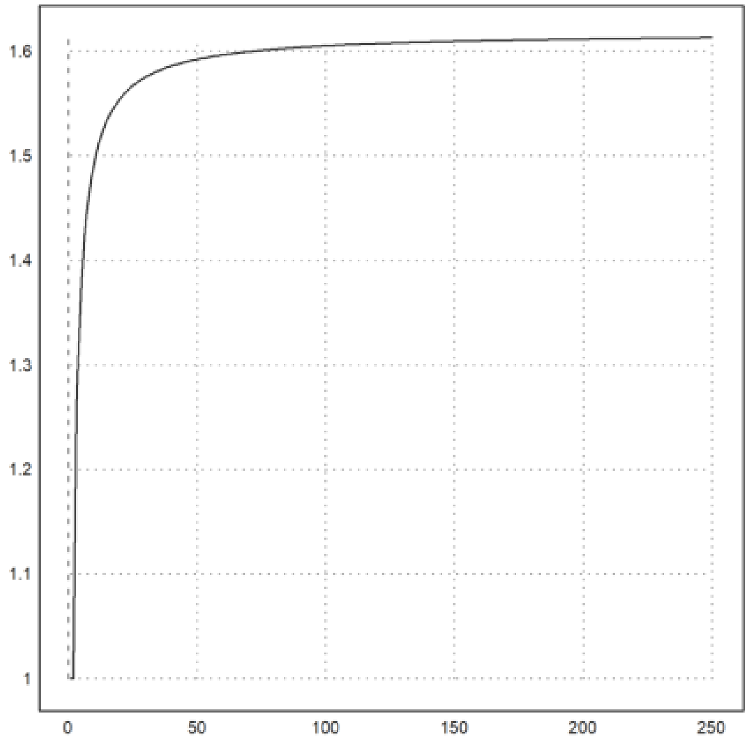
```
[1,  1,  2,  3,  5,  8,  13,  21,  34,  55,  89,  144,  233,  377,  610]
```

Barisan Fibonacci memiliki banyak sifat menarik, salah satunya adalah akar pangkat ke-n suku ke-n akan konvergen ke pecahan emas:

```
>$'(1+sqrt(5))/2=float((1+sqrt(5))/2)
```

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988749895$$

```
>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],250)^(1/(1:250))):
```



Barisan yang sama juga dapat dihasilkan dengan menggunakan loop.

```
>x=ones(500); for k=3 to 500; x[k]=x[k-1]+x[k-2]; end;
```

Rekursi dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang tergantung pada semua elemen sebelumnya. Pada contoh berikut, elemen ke-n merupakan jumlah (n-1) elemen sebelumnya, dimulai dengan 1 (elemen ke-1). Jelas, nilai elemen ke-n adalah 2^(n-2), untuk n=2, 4, 5, ...

```
>sequence("sum(x)",1,10)
```

```
[1,  1,  2,  4,  8,  16,  32,  64,  128,  256]
```

Selain menggunakan ekspresi dalam x dan n, kita juga dapat menggunakan fungsi.

Pada contoh berikut, digunakan iterasi

$$x_n = A \cdot x_{n-1},$$

dengan A suatu matriks 2x2, dan setiap x[n] merupakan matriks/vektor 2x1.

```
>A=[1,1;1,2]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]
>sequence("suku",[1;1],6)
```

```
Real 2 x 6 matrix

            1             2             5            13       ...
            1             3             8            21       ...
```

Hasil yang sama juga dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi perpangkatan matriks "matrixpower()". Cara ini lebih cepat, karena hanya menggunakan perkalian matriks sebanyak log_2(n).

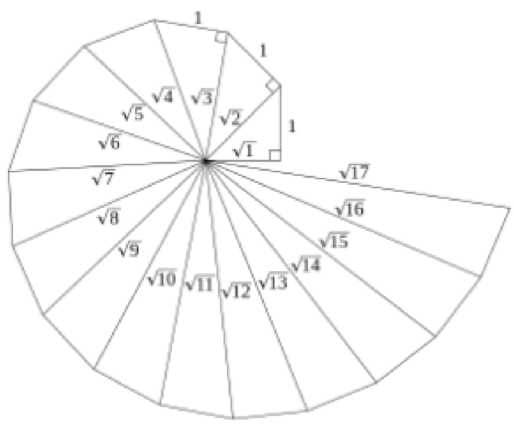
$$x_n = A.x_{n-1} = A^2.x_{n-2} = A^3.x_{n-3} = ... = A^{n-1}.x_1.$$

```
>sequence("matrixpower(A,n).[1;1]",1,6)
```

```
  Real 2 x 6 matrix

             1             5             13            34      ...
             1             8             21            55      ...
```

Spiral Theodorus



Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

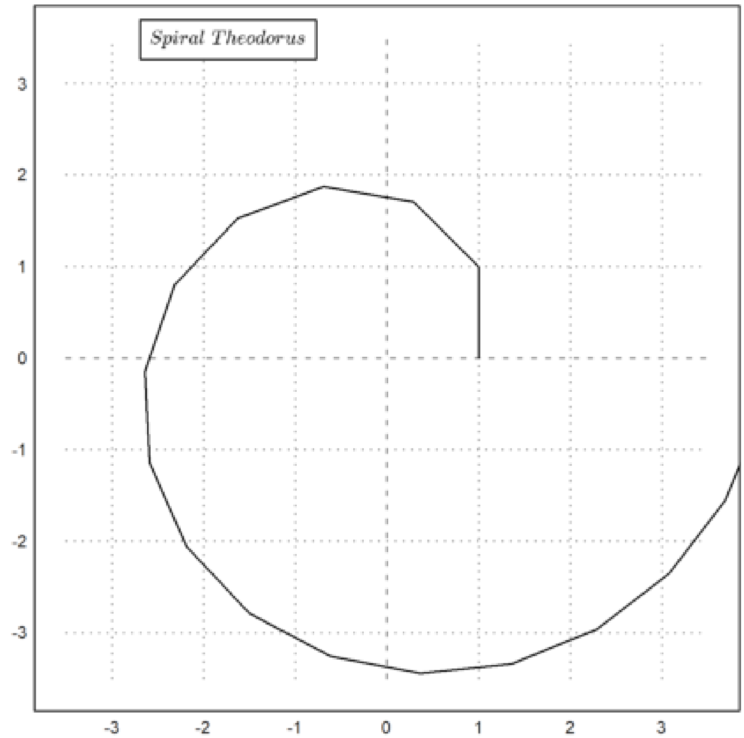
$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

```
>function g(n) := 1+I/sqrt(n)
```

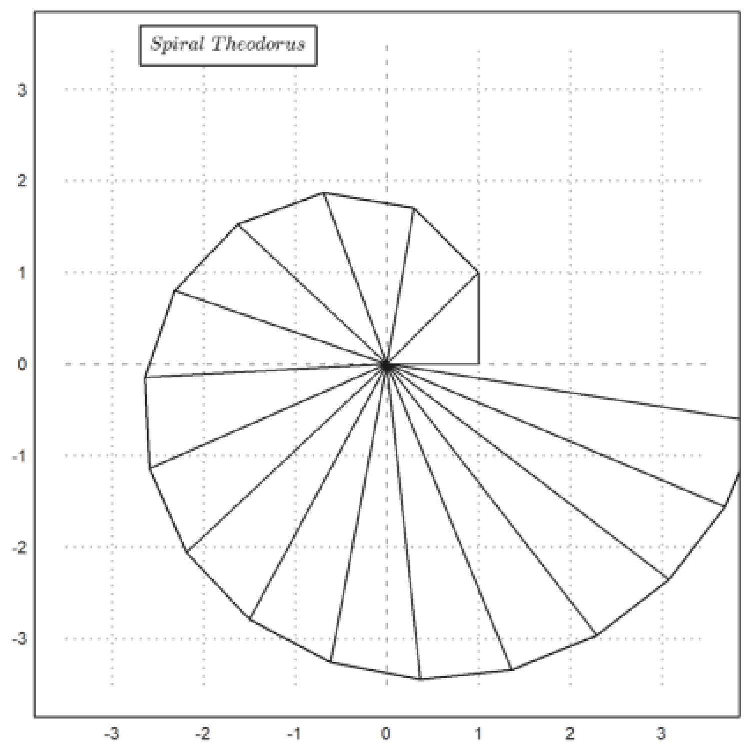
Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,17); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4
```



Selanjutnya dihubungan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

```
>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:
```



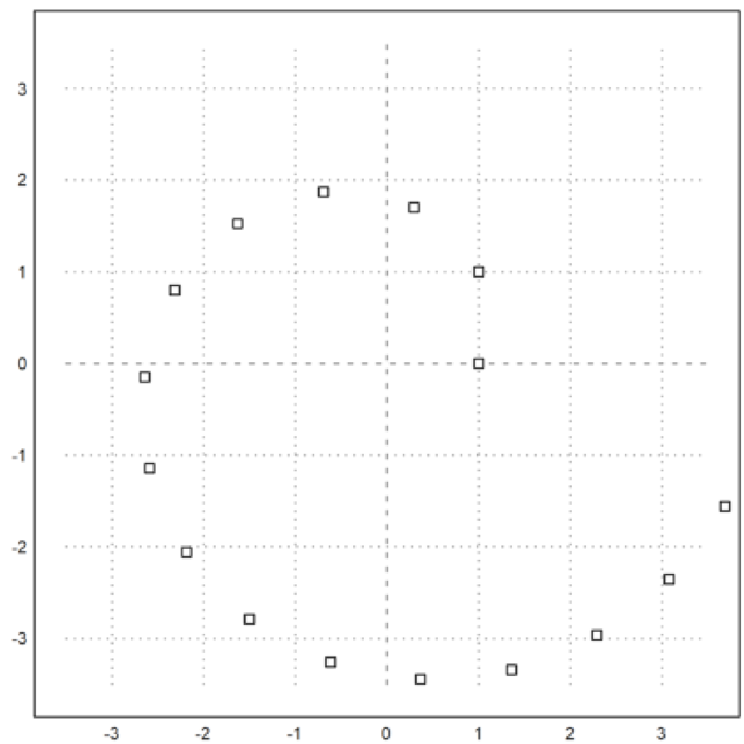
Spiral tersebut juga dapat didefinisikan menggunakan fungsi rekursif, yang tidak memmerlukan indeks dan bilangan kompleks. Dalam hal ini diigunakan vektor kolom pada bidang.

```
>function gstep (v) ...
```

```
  w=[-v[2];v[1]];
  return v+w/norm(w);
  endfunction
```

Jika dilakukan iterasi 16 kali dimulai dari [1;0] akan didapatkan matriks yang memuat vektor-vektor dari setiap iterasi.

```
>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):
```



Kekonvergenan

Terkadang kita ingin melakukan iterasi sampai konvergen. Apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Anda dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

```
>iterate("cos(x)",1) // iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan x(0)=1.
```

```
  0.739085133216
```

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

```
>hasil := iterate("cos(x)",~1,2~) //iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan interval awal (1, 2)
```

```
~0.739085133211,0.7390851332133~
```

Jika interval hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan x=cos(x).

```
>h=expand(hasil,100), cos(h) << h
```

```
~0.73908513309,0.73908513333~
1
```

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

```
>function f(x) := (x+2/x)/2
```

Iterasi x(n+1)=f(x(n)) akan konvergen ke akar kuadrat 2.

```
>iterate("f",2), sqrt(2)
```

```
1.41421356237
1.41421356237
```

Jika pada perintah iterate diberikan tambahan parameter n, maka hasil iterasinya akan ditampilkan mulai dari iterasi pertama sampai ke-n.

```
>iterate("f",2,5)
```

```
[2,  1.5,  1.41667,  1.41422,  1.41421,  1.41421]
```

Untuk iterasi ini tidak dapat dilakukan terhadap interval.

```
>niterate("f",~1,2~,5)
```

```
[ ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~ ]
```

Perhatikan, hasil iterasinya sama dengan interval awal. Alasannya adalah perhitungan dengan interval bersifat terlalu longgar. Untuk meingkatkan perhitungan pada ekspresi dapat digunakan pembagian intervalnya, menggunakan fungsi ieval().

```
>function s(x) := ieval("(x+2/x)/2",x,10)
```

Selanjutnya dapat dilakukan iterasi hingga diperoleh hasil optimal, dan intervalnya tidak semakin mengecil. Hasilnya berupa interval yang memuat akar persamaan:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Satu-satunya solusi adalah

$$x = \sqrt{2}.$$

```
>iterate("s",~1,2~)
```

```
~1.41421356236,1.41421356239~
```

Fungsi "iterate()" juga dapat bekerja pada vektor. Berikut adalah contoh fungsi vektor, yang menghasilkan rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri.

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right)$$

Iterasi ke-n disimpan pada vektor kolom x[n].

```
>function g(x) := [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]
```

Iterasi dengan menggunakan fungsi tersebut akan konvergen ke rata-rata aritmetika dan geometri dari nilai-nilai awal.

```
>iterate("g",[1;5])
```

```
        2.60401
        2.60401
```

Hasil tersebut konvergen agak cepat, seperti kita cek sebagai berikut.

```
>iterate("g",[1;5],4)
```

```
              1             3       2.61803       2.60403       2.60401
              5       2.23607       2.59002       2.60399       2.60401
```

Iterasi pada interval dapat dilakukan dan stabil, namun tidak menunjukkan bahwa limitnya pada batas-batas yang dihitung.

```
>iterate("g",[~1~;~5~],4)
```

```
Interval 2 x 5 matrix

~0.99999999999999778,1.0000000000000022~      ...
~4.9999999999999911,5.0000000000000089~      ...
```

Iterasi berikut konvergen sangat lambat.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

```
>iterate("sqrt(x)",2,10)
```

```
[2,  1.41421,  1.18921,  1.09051,  1.04427,  1.0219,  1.01089,
1.00543,  1.00271,  1.00135,  1.00068]
```

Kekonvergenan iterasi tersebut dapat dipercepatdengan percepatan Steffenson:

```
>steffenson("sqrt(x)",2,10)
```

```
[1.04888,  1.00028,  1,  1]
```

Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan loop untuk melakukan iterasi yang ditulis langsung pada baris perintah.

```
>x=2; repeat x=(x+2/x)/2; until x^2~=2; end; x,
```

```
1.41421356237
```

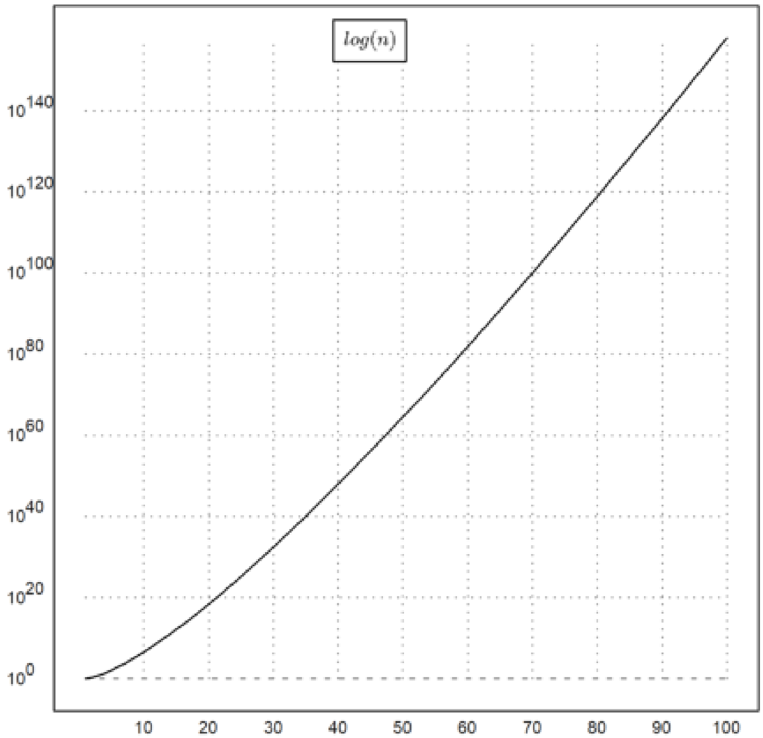
Penggabungan matriks menggunakan tanda "|" dapat digunakan untuk menyimpan semua hasil iterasi.

```
>v=[1]; for i=2 to 8; v=v|(v[i-1]*i); end; v,
```

```
[1,  2,  6,  24,  120,  720,  5040,  40320]
```

hasil iterasi juga dapat disimpan pada vektor yang sudah ada.

```
>v=ones(1,100); for i=2 to cols(v); v[i]=v[i-1]*i; end; ...
>plot2d(v,logplot=1); textbox(latex(&log(n)),x=0.5):
```




```
>A =[0.5,0.2;0.7,0.1]; b=[2;2]; ...
>x=[1;1]; repeat xnew=A.x-b; until all(xnew~=x); x=xnew; end; ...
>x,
```

```
    -7.09677
    -7.74194
```

Iterasi di dalam Fungsi

Fungsi atau program juga dapat menggunakan iterasi dan dapat digunakan untuk melakukan iterasi. Berikut adalah beberapa contoh iterasi di dalam fungsi.

Contoh berikut adalah suatu fungsi untuk menghitung berapa lama suatu iterasi konvergen. Nilai fungsi tersebut adalah hasil akhir iterasi dan banyak iterasi sampai konvergen.

```
>function map hiter(f$,x0) ...
```

```
x=x0;
maxiter=0;
repeat
  xnew=f$(x);
  maxiter=maxiter+1;
  until xnew~=x;
  x=xnew;
end;
return maxiter;
endfunction
```

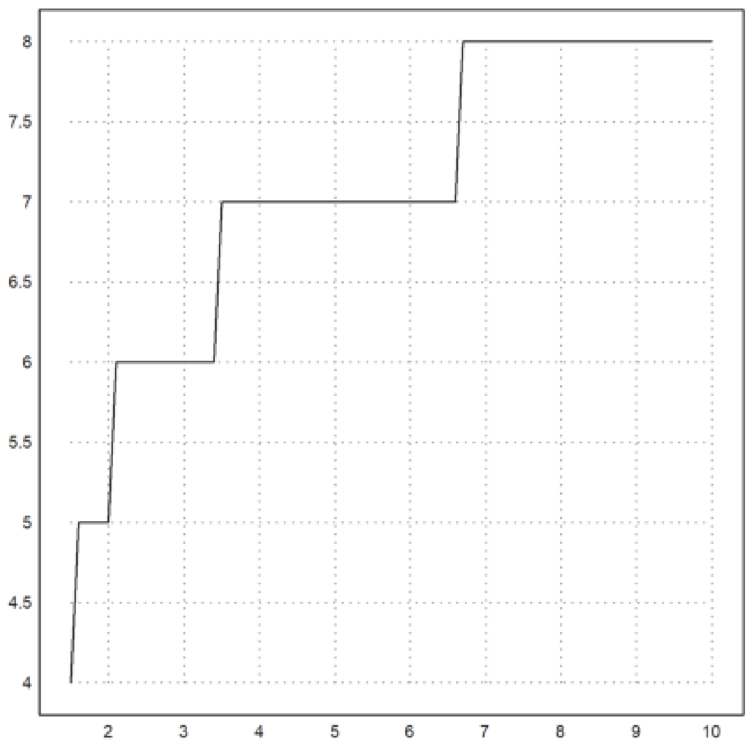
Misalnya, berikut adalah iterasi untuk mendapatkan hampiran akar kuadrat 2, cukup cepat, konvergen pada iterasi ke-5, jika dimulai dari hampiran awal 2.

```
>hiter("(x+2/x)/2",2)
```

```
5
```

Karena fungsinya didefinisikan menggunakan "map". maka nilai awalnya dapat berupa vektor.

```
>x=1.5:0.1:10; hasil=hiter("(x+2/x)/2",x); ...
>  plot2d(x,hasil):
```



Dari gambar di atas terlihat bahwa kekonvergenan iterasinya semakin lambat, untuk nilai awal semakin besar, namun penambahnnya tidak kontinu. Kita dapat menemukan kapan maksimum iterasinya bertambah.

```
>hasil[1:10]
```

```
[4,   5,   5,   5,   5,   5,   6,   6,   6,   6]
```

```
>x[nonzeros(differences(hasil))]
```

```
[1.5,   2,   3.4,   6.6]
```

maksimum iterasi sampai konvergen meningkat pada saat nilai awalnya 1.5, 2, 3.4, dan 6.6.

Contoh berikutnya adalah metode Newton pada polinomial kompleks berderajat 3.

```
>p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton
```

$$x - \frac{x^3 - 1}{3\,x^2}$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi untuk melakukan iterasi (aslinya 10 kali).

```
>function iterasi(f$,x,n=10) ...
```

```
  loop 1 to n; x=f$(x); end;
  return x;
  endfunction
```

Kita mulai dengan menentukan titik-titik grid pada bidang kompleksnya.

```
>r=1.5; x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z);
```

Berikut adalah akar-akar polinomial di atas.

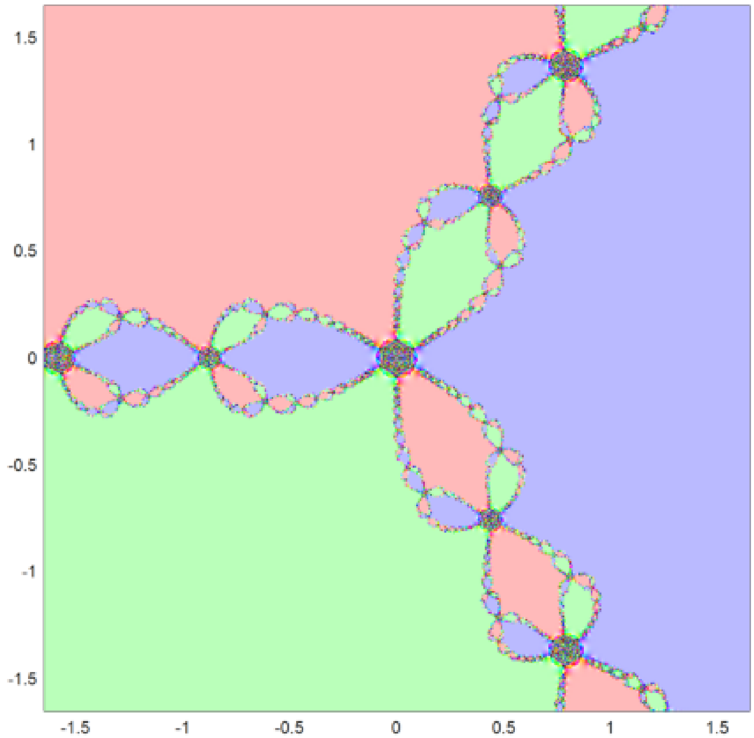
```
>z=&solve(p)()
```

```
  [ -0.5+0.866025i,  -0.5-0.866025i,  1+0i  ]
```

Untuk menggambar hasil iterasinya, dihitung jarak dari hasil iterasi ke-10 ke masing-masing akar, kemudian digunakan untuk menghitung warna yang akan digambar, yang menunjukkan limit untuk masing-masing nilai awal.

Fungsi plotrgb() menggunakan jendela gambar terkini untuk menggambar warna RGB sebagai matriks.

```
>C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1)); ...
>  plot2d(none,-r,r,-r,r); plotrgb(C):
```



Iterasi Simbolik

Seperti sudah dibahas sebelumnya, untuk menghasilkan barisan ekspresi simbolik dengan Maxima dapat digunakan fungsi makelist().

```
>&powerdisp:true // untuk menampilkan deret pangkat mulai dari suku berpangkat terkecil
```

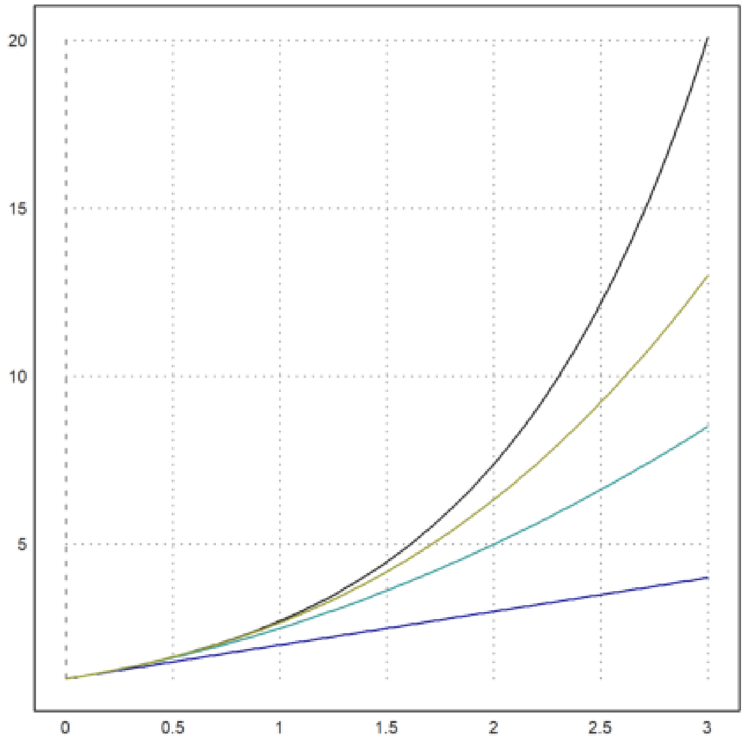
```
true
```

```
>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // barisan deret Taylor untuk e^x
```

$$\left[1+x,1+x+\frac{x^2}{2},1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]$$

Untuk mengubah barisan deret tersebut menjadi vektor string di EMT digunakan fungsi mxm2str(). Selanjutnya, vektor string/ekspresi hasilnya dapat digambar seperti menggambar vektor eskpresi pada EMT.

```
>plot2d("exp(x)",0,3); // plot fungsi aslinya, e^x
>plot2d(mxm2str("deret"),>add,color=4:6): // plot ketiga deret taylor hampiran fungsi ters
```

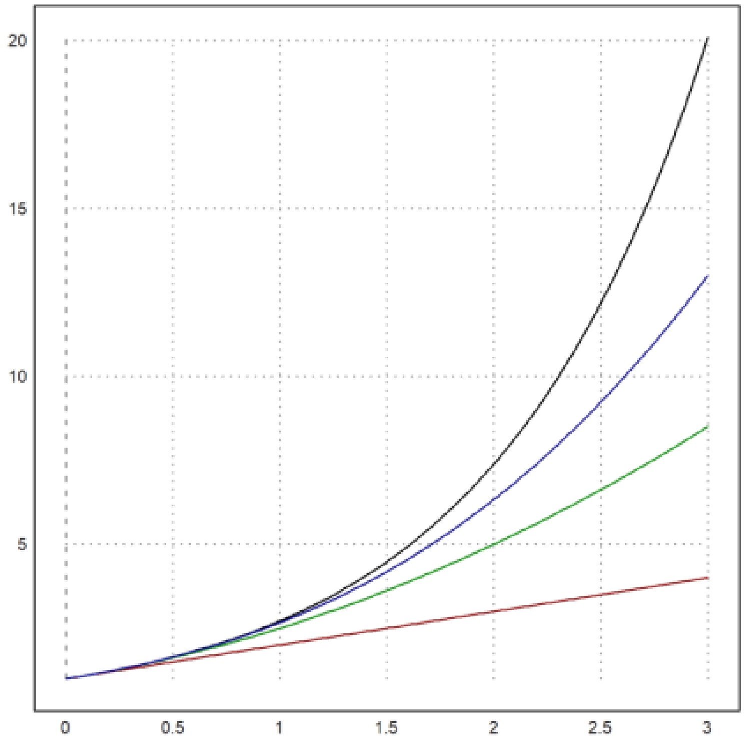


Selain cara di atas dapat juga dengan cara menggunakan indeks pada vektor/list yang dihasilkan.

```
>$deret[3]
```

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

```
>plot2d(["exp(x)",&deret[1],&deret[2],&deret[3]],0,3,color=1:4):
```



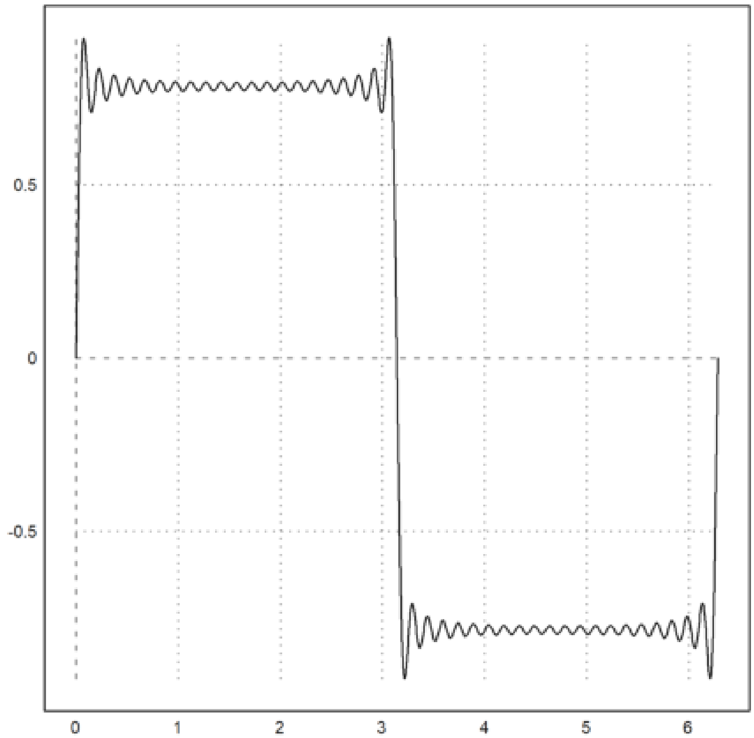

```
>$sum(sin(k*x)/k,k,1,5)
```

$$\sin x+\frac{\sin \left(2\,x\right)}{2}+\frac{\sin \left(3\,x\right)}{3}+\frac{\sin \left(4\,x\right)}{4}+\frac{\sin \left(5\,x\right)}{5}$$

Berikut adalah cara menggambar kurva

$$y=\sin(x)+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots.$$

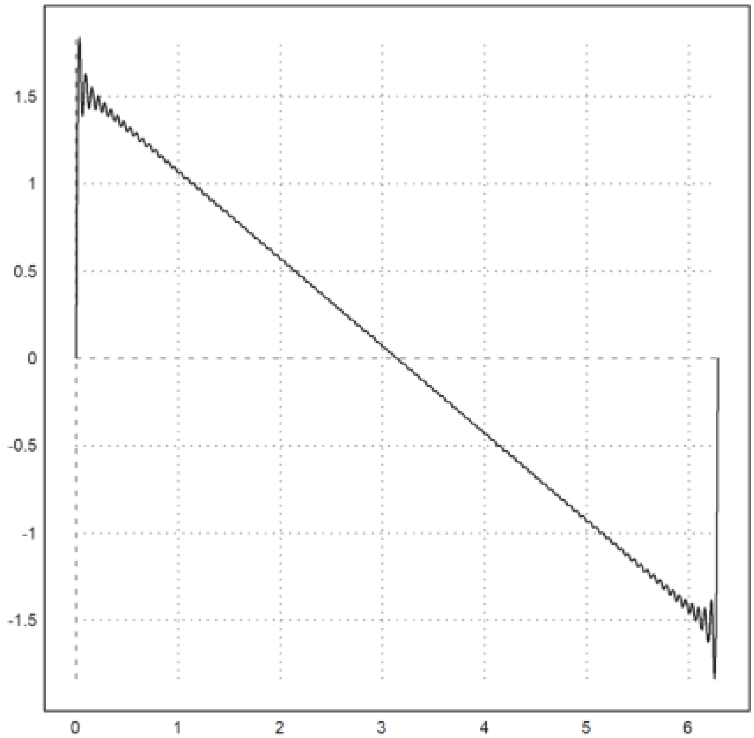
```
>plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi):
```



Hal serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks, misalkan kita akan menggambar kurva

$$y = \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

```
>x=linspace(0,2pi,1000); k=1:100; y=sum(sin(k*x')/k)'; plot2d(x,y):
```



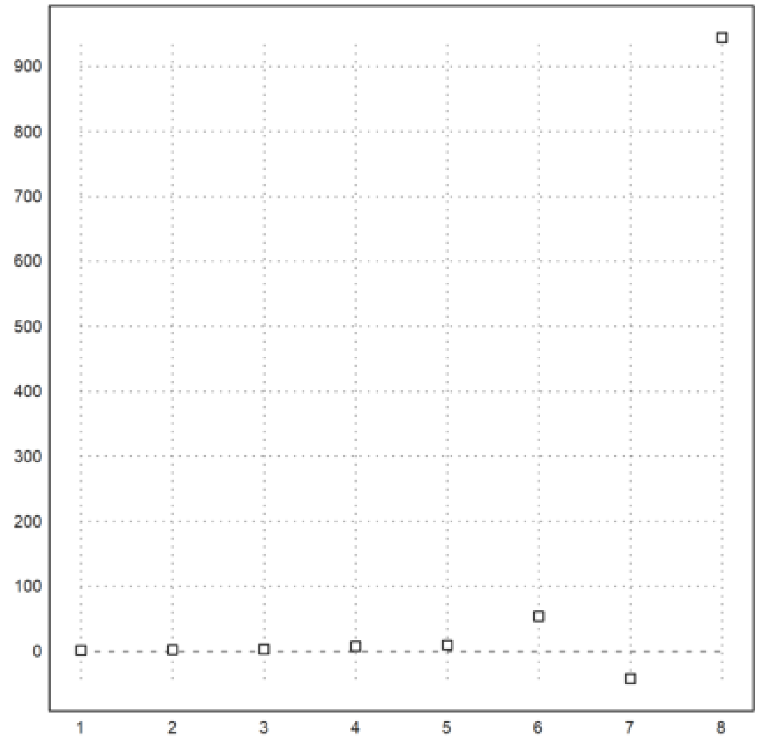
Tabel Fungsi

Terdapat cara menarik untuk menghasilkan barisan dengan ekspresi Maxima. Perintah mxmtable() berguna untuk menampilkan dan menggambar barisan dan menghasilkan barisan sebagai vektor kolom.

Sebagai contoh berikut adalah barisan turunan ke-n x^x di x=1.

```
>mxmtable("diffat(x^x,x=1,n)","n",1,8,frac=1);
```

```
          1
          2
          3
          8
         10
         54
        -42
        944
```




```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret
```

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\,\left(n+1\right)}{2}$$

```
>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{1}{3^{k}+k}}=\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{1}{3^{k}+k}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai e
```

$$\sum_{x=1}^{\infty }{\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi^2}{6}$$

```
>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{k}}=-\sum_{x=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{x}}{x}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k-1}$$

```
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forge
```

$$a\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{a}{1-x}$$

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

```
>$'sum(x^k/k!,k,0,inf)=ev(sum(x^k/k!,k,0,inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

```
>$limit(sum(x^k/k!,k,0,n),n,inf)
```

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

```
>function d(n) &= sum(1/(k^2-k),k,2,n); $'d(n)=d(n)
```

$$d\left(n\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}$$

```
>$d(10)=ev(d(10),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k^2-k} = \frac{9}{10}$$

```
>$d(100)=ev(d(100),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k^2-k} = \frac{99}{100}$$

Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11
```

$$e^x = \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

```
>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1
```

$$\log x = x - \frac{(x-1)^{10}}{10} + \frac{(x-1)^9}{9} - \frac{(x-1)^8}{8} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^2}{2} - 1$$

BAB 6

KB PEKAN 11-12: MENGGUNAKAN EMT UNTUK GEOMETRI

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang
```

koordinat

```
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas
```

sumbu-x dan y adalah -r sd r

```
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label
```

"AB" sejauh d

```
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v):   memutar vektor v ke kiri
turnRight(v):  memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.
```

ax+by=c.

```
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g):  titik pada garis g
perpendicular(A, g):  garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g):  garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h):  titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g):   proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B):  jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B):  kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C):  luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C):   besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c):  pusat lingkaran c
getCircleRadius(c):  jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C):  lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
circleCircleIntersections (c1, c2):  titik potong lingkaran c1 dan
```

c2

```
planeThrough(A, B, C):  bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan
```

y dengan titik A pada

```
sisi positif (kanan/atas) garis
quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni
```

sin(alpha)^2 dengan

```
alpha sudut yang menghadap sisi a.
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga
```

dengan panjang sisi a, b, c.

```
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk
```

suatu segitiga

```
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan
```

sa=sin(phi)^2 spread a.

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang atur tiga poin dan plot.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Lalu tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah [a, b, c], yang merepresentasikan garis dengan persamaan ax + by = c.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1,  2,  2]
```

Hitung garis tegak lurus melalui A pada BC.

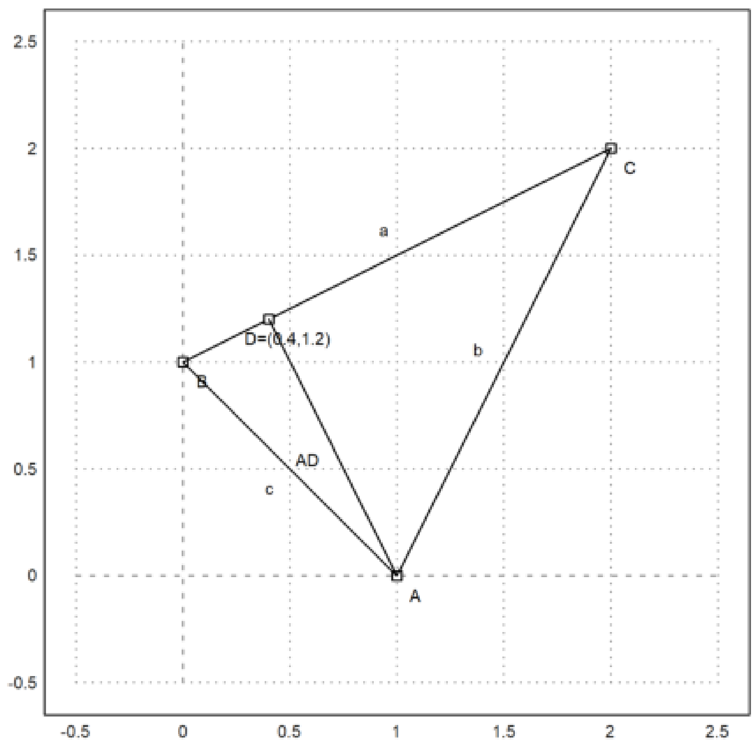
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan perpotongannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plot itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
1.5
```

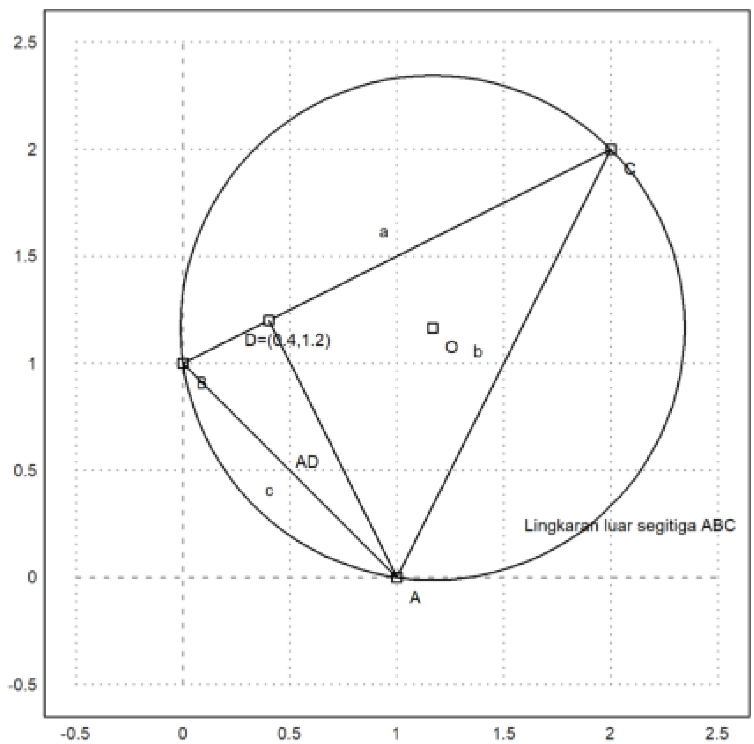
Sudut di C

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
36°52'11.63''
```

Sekarang lingkaran sirkit segitiga.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667,  1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

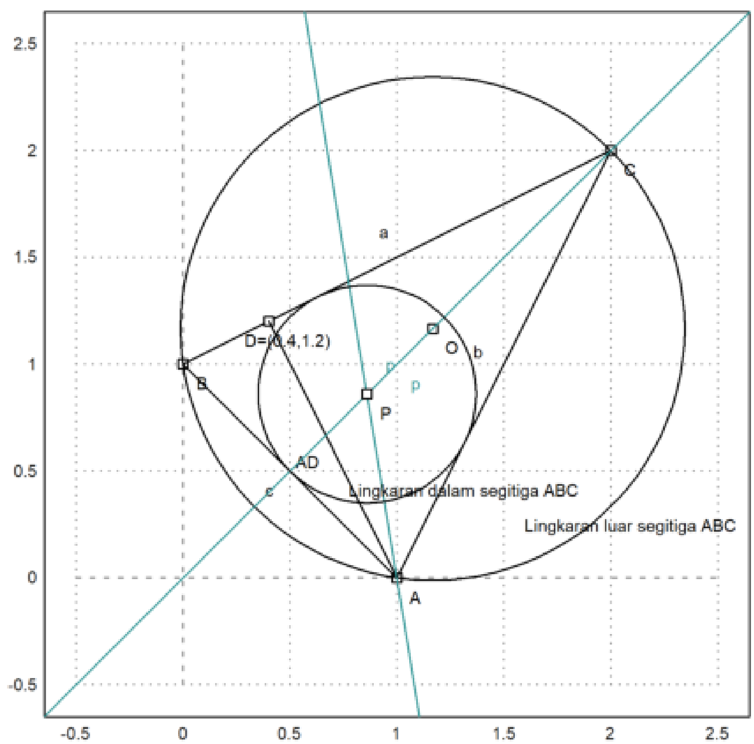
```
[0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semua ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dal
```



1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?
3. Hitung luas segitiga tersebut.
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.
6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

Jawab:

---

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
Titik singgung garis BC dengan lingkaran dalam.

```
>TBC=lineThrough(B,C)
```

```
[-1,  2,  2]
```

```
>m=circleWithCenter(P,r)
```

```
[0.86038,  0.86038,  0.509654]
```

Dimisalkan S

```
>S=lineCircleIntersections(TBC,m)
```

```
[0.632456,  1.31623]
```

Titik singgung garis AC dengan lingkaran dalam.

```
>TAC=lineThrough(A,C)
```

```
[-2,  1,  -2]
```

Dimisalkan Q

```
>Q=lineCircleIntersections(TAC,m)
```

```
[1.31623,  0.632456]
```

Titik singgung garis AB dengan lingkaran dalam.

```
>TAB=lineThrough(A,B)
```

```
[-1,  -1,  -1]
```

Dimisalkan L

```
>L=lineCircleIntersections(TAB,m)
```

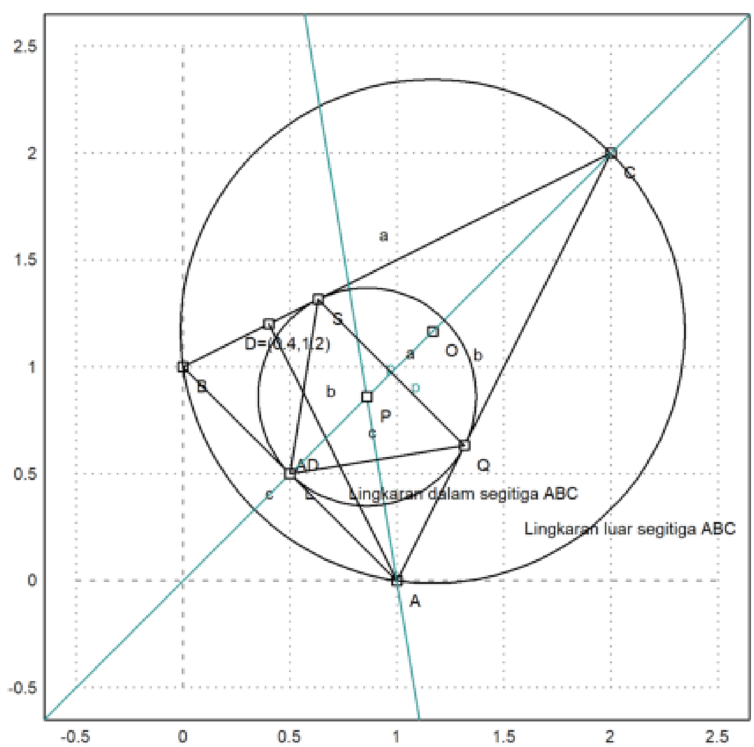
```
[0.5,  0.5]
```

Sehingga, titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga yang diperoleh adalah (0.632456, 1.31623), (1.31632, 0.632456), (0.5, 0.5).

---

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.

```
>plotPoint(S);
>plotPoint(Q);
>plotPoint(L);
>plotSegment(S,Q,"a");
>plotSegment(S,L,"b");
>plotSegment(L,Q,"c"):
```



---

3. Hitung luas segitiga tersebut.

```
>areaTriangle(S,L,Q)
```

```
0.324341649025
```

Diperoleh luas segitiga diatas, yaitu 0,324341649025

---

4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

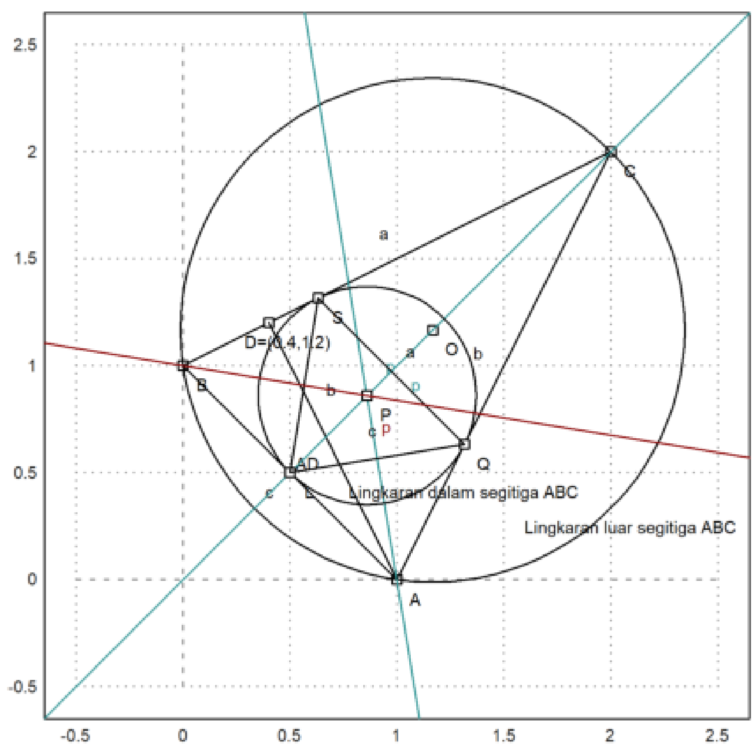
```
> P, r
```

```
[0.86038,  0.86038]
0.509653732104
```

```
>k=angleBisector(A,B,C)
```

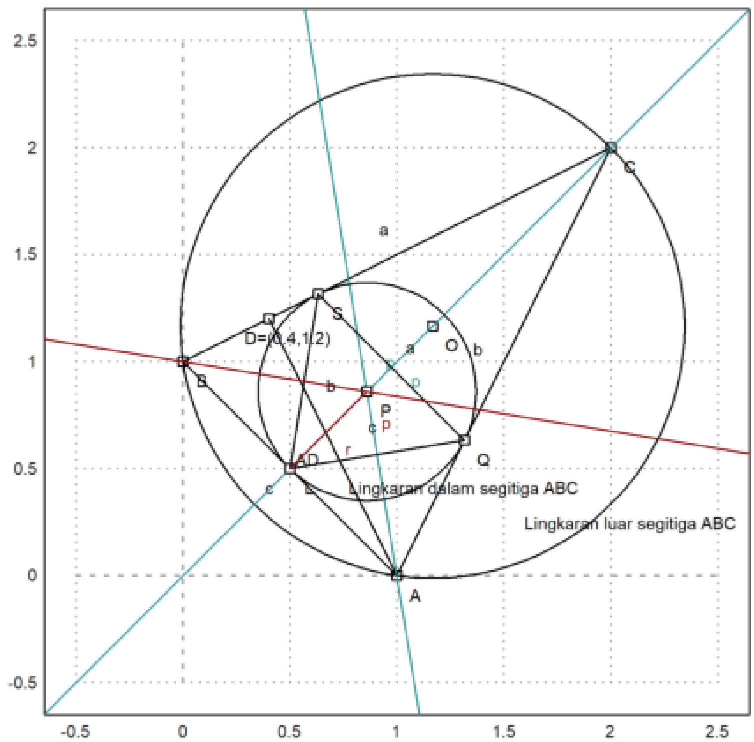
```
[-0.264911,  -1.63246,  -1.63246]
```

```
>color(2); plotLine(k):
```



5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>plotSegment(P,L,"r"):
```



6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

Luas lingkaran luar segitiga ABC

```
>r1 = distance(O,C);
>pi*(r1)^2
```

```
4.36332312999
```

Luas Lingkaran dalam segitiga ABC

```
>r2= distance(P,S);
>pi*(r2)^2
```

```
0.81601903655
```

Contoh 2: Geometri Smbolik

Kita dapat menghitung geometri tepat dan simbolis menggunakan Maxima.

Geometri file.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, sekarang kita dapat menggunakan perhitungan simbolik.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan penghitungan simbolik.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan untuk sebuah garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$


```
>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persamaan garis melalu
```

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$


```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$\left(x_1-1\right)\,y-x\,y_1=-y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
[2, 1, 2]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
 2   6
[-, -]
 5   5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 ga
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6},\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

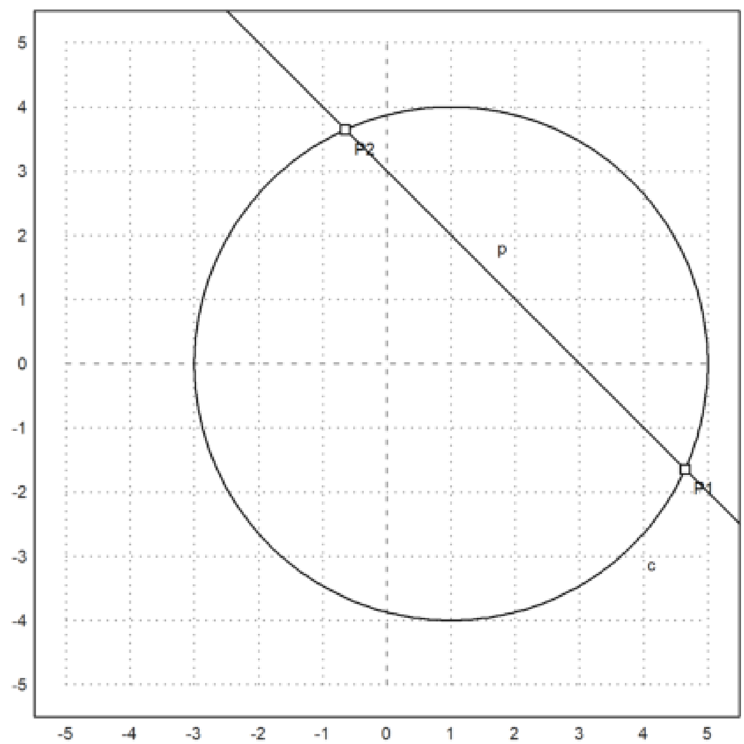
```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran mengembalikan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2, f
```

```
[4.64575,  -1.64575]
[-0.645751,  3.64575]
2
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Hal yang sama di Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

[1, 0, 4]

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

[1, 1, 3]

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\sqrt{7}+2,1-\sqrt{7}\right],\left[2-\sqrt{7},\sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

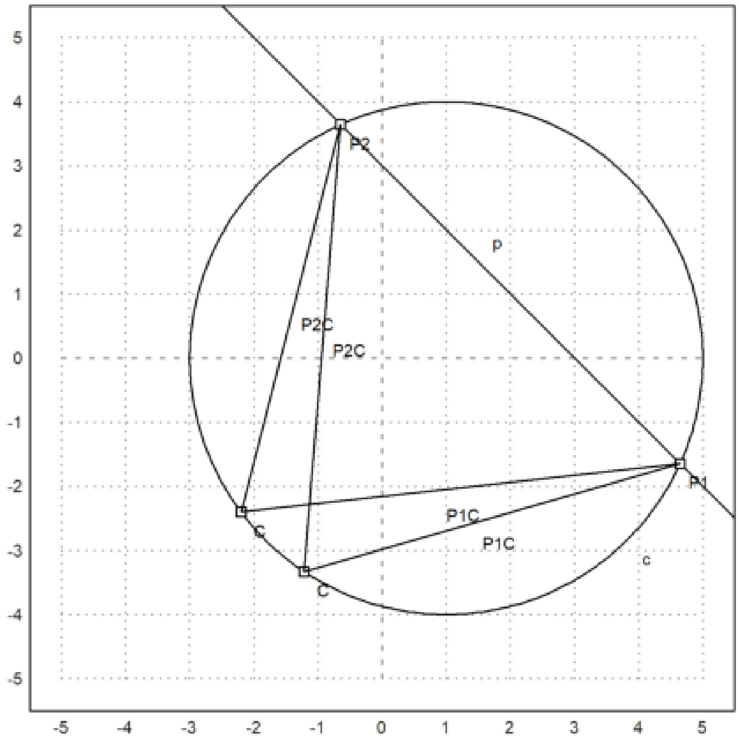
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>insimg;
```

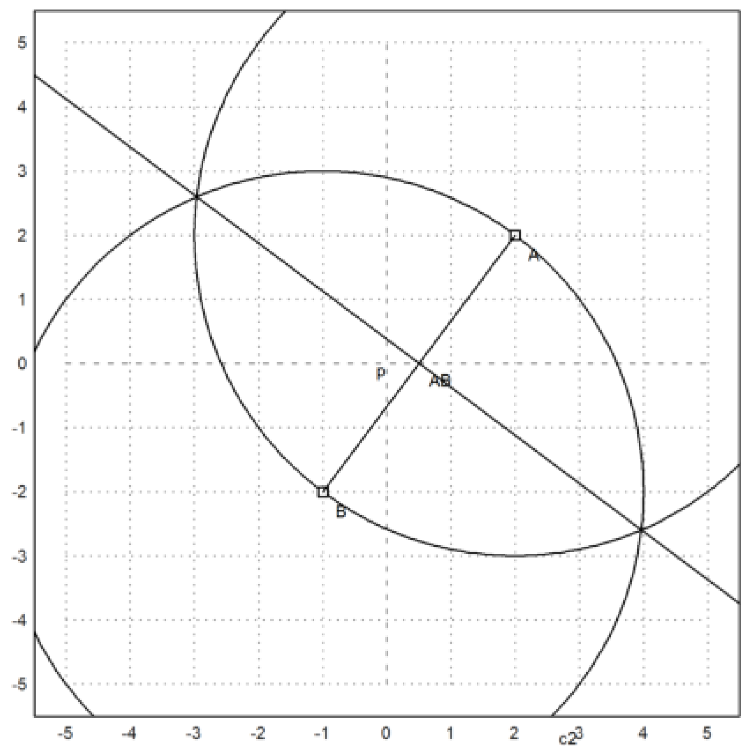


Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



Selanjutnya, kita melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup terlibat. Tapi kita bisa menyederhanakan, jika kita menyelesaikan y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y = \frac{-\left(2\,b_1 - 2\,a_1\right)\,x + {b_2}^2 + {b_1}^2 - {a_2}^2 - {a_1}^2}{2\,b_2 - 2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan tengah tegak lurus, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y = \frac{-\left(2\,b_1 - 2\,a_1\right)\,x + {b_2}^2 + {b_1}^2 - {a_2}^2 - {a_1}^2}{2\,b_2 - 2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y=\frac{(b_2-a_2)\ x-a_1\ b_2+a_2\ b_1}{b_1-a_1}\right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)}\times\frac{(b_2-a_2)}{(b_1-a_1)}=-1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad \text{dengan } s=(a+b+c)/2.$$

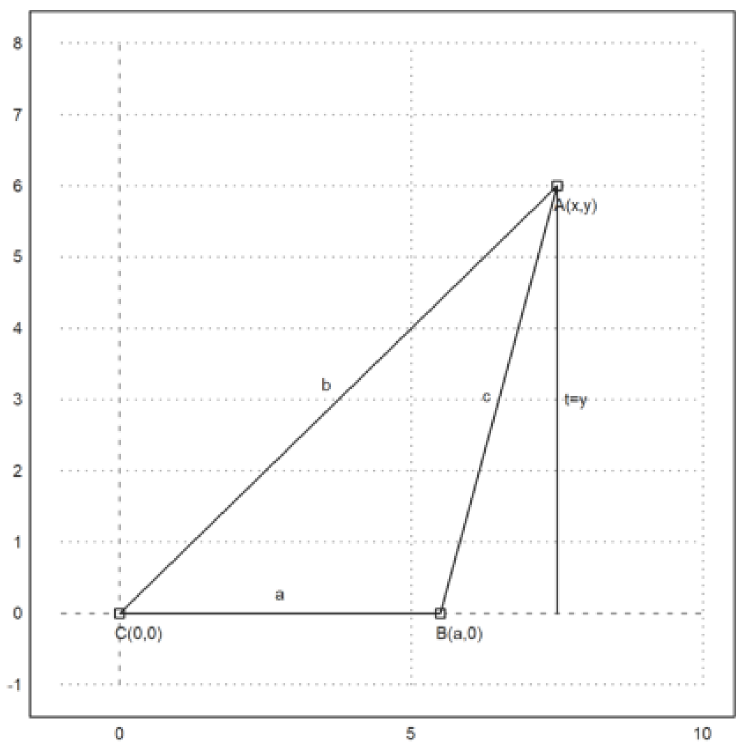
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2+y^2=b^2,\quad (x-a)^2+y^2=c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)");  ...
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15);  ...
>plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```



```
>sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
                  2    2    2
               - c  + b  + a
         [[x = ---------------, y = 
                     2 a
           4      2  2      2  2    4      2  2    4
   sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
 - --------------------------------------------------],
                        2 a
         2    2    2
      - c  + b  + a
 [x = --------------, y = 
          2 a
         4      2  2      2  2    4      2  2    4
 sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
 --------------------------------------------------]]
                      2 a
```

Ekstrak solusi y

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

$$y = \frac{\sqrt{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)}\,\sqrt{c+b+a}}{2\,a}$$

Kita mendapatkan formula Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a,b,c\right) = \frac{\sqrt{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)}\,\sqrt{c+b+a}}{4}$$

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

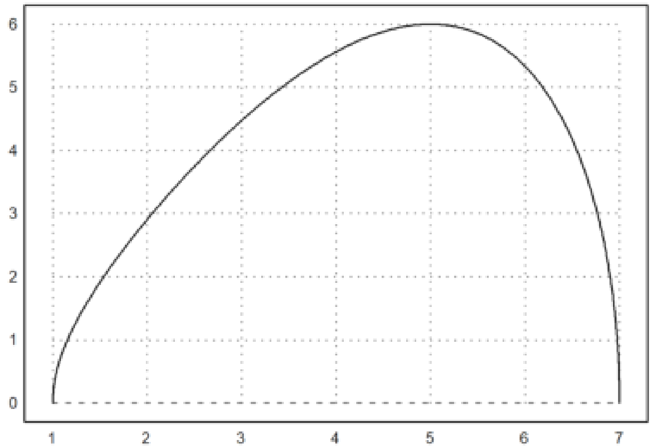
$$Luas = \frac{3^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{13}}{4}$$

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
6
```

Dan jelas juga, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (
```



Kasus umum juga berfungsi.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$\left[c=-\sqrt{b^2+a^2} , c=\sqrt{b^2+a^2} , c=0\right]$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b + c = d untuk beberapa konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

$$\left[x=\frac{\left(d-c\right)^2-c^2+a^2}{2\,a} , y=\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

Dan membuat persamaan seperti ini

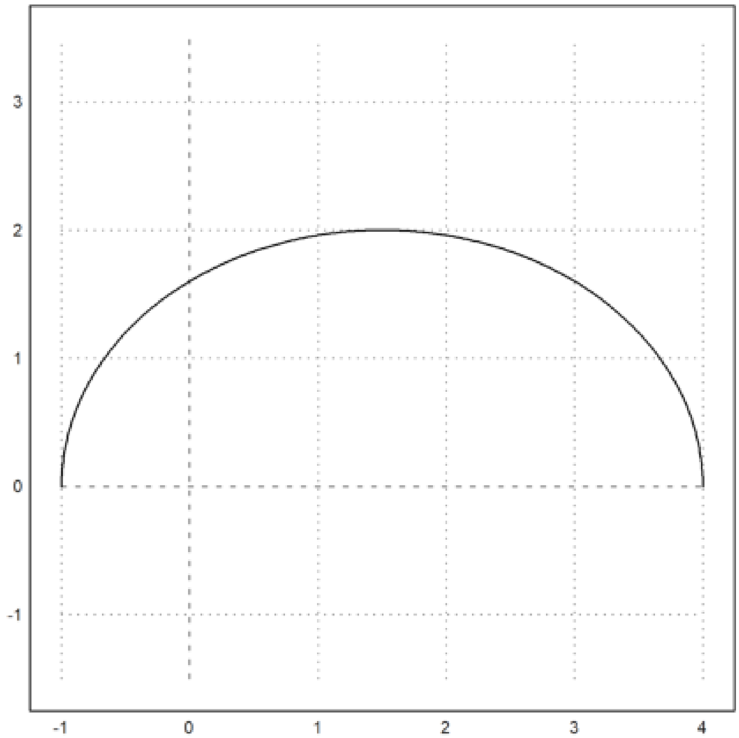
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d
```

$$\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

$$\frac{\sqrt{-\left(d-c\right)^4+2\,c^2\,\left(d-c\right)^2+2\,a^2\,\left(d-c\right)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Diketahui bahwa kita mendapatkan elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum elips ini, yaitu.

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

di mana (xm,ym) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$1$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x = 0. Jadi luas segitiga dengan a + b + c = d adalah maksimal, jika sama sisi. Kami ingin mendapatkan ini secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{d\,\left(d-2\,a\right)\,\left(d-2\,b\right)}{8}-\frac{\left(-d+2\,b+2\,a\right)\,d\,\left(d-2\,b\right)}{8}=0,\frac{d\,\left(d-2\,a\right)\,\left(d-2\,b\right)}{8}-\frac{\left(-d+2\,b+2\,a\right)\,d\,\left(d-2\,a\right)}{8}=0\right]$$

Kami mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi a=b=c=d/3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$\left[\left[a=\frac{d}{3},b=\frac{d}{3}\right],\left[a=0,b=\frac{d}{2}\right],\left[a=\frac{d}{2},b=0\right],\left[a=\frac{d}{2},b=\frac{d}{2}\right]\right]$$

Ada juga metode Lagrange, memaksimalkan H(a,b,c)^2 terhadap a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
>   diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
                          d      d
          [[a = 0, b = -, c = -, la = 0],
                          2      2
       d                d                  d      d
  [a = -, b = 0, c = -, la = 0], [a = -, b = -, c = 0, la = 0],
       2                2                  2      2
                                  3
       d      d      d       d
  [a = -, b = -, c = -, la = ---]]
       3      3      3       108
```

Kita bisa membuat plot situasinya.

Pertama, atur poin di Maxima

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

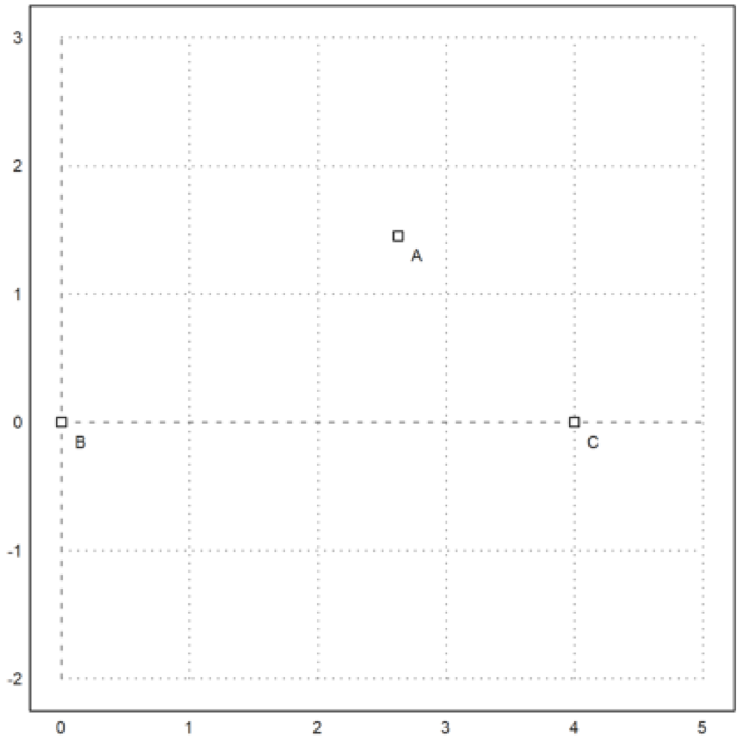
$$\left[\frac{-c^2+b^2+a^2}{2\,a},\frac{\sqrt{-c^4+2\,b^2\,c^2+2\,a^2\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[a,0]$$

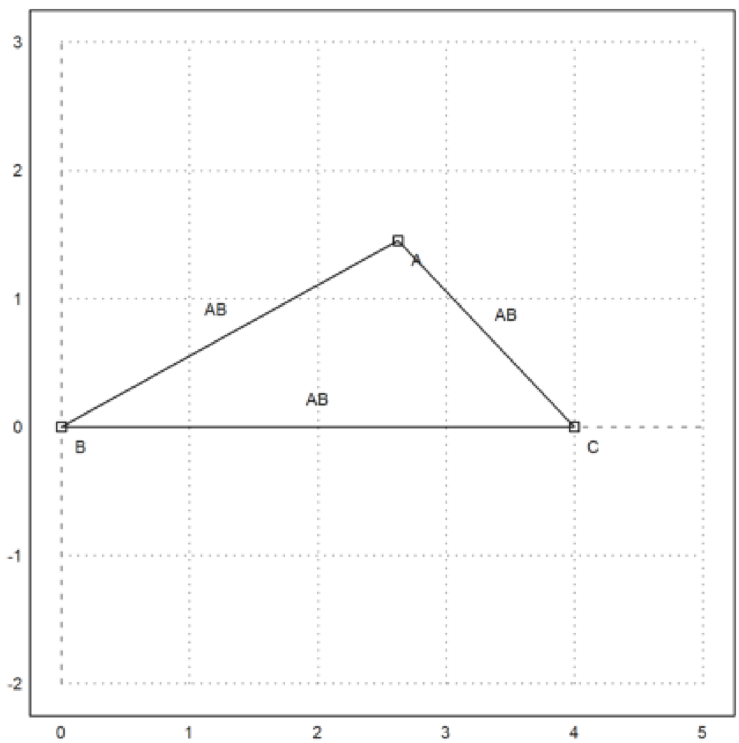
Kemudian atur rentang plot, dan plot poinnya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```



Plot segmennya.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```



Hitung tengah tegak lurus di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan bagian tengah dari keliling.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

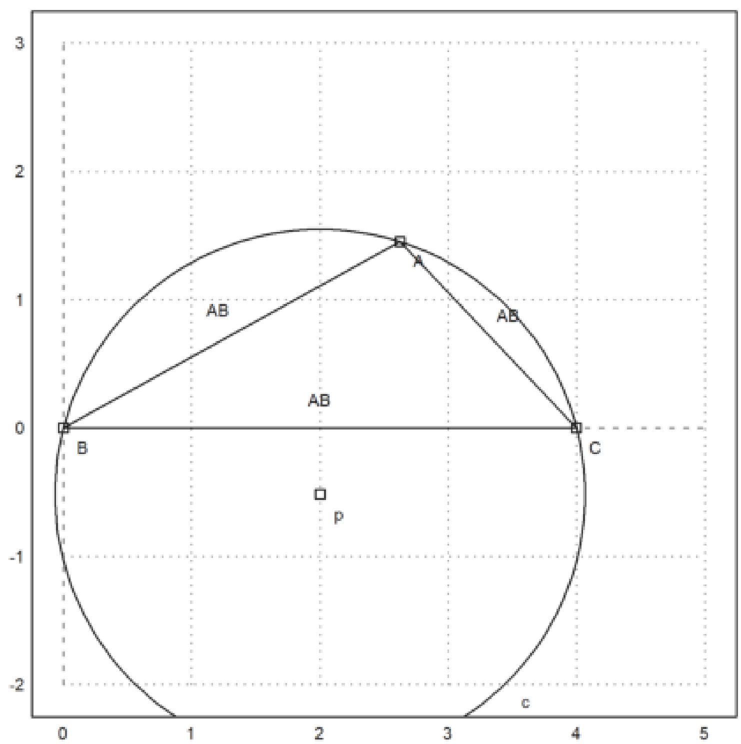
Kita mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{i\,a\,b\,c}{\sqrt{c-b-a}\,\sqrt{c-b+a}\,\sqrt{c+b-a}\,\sqrt{c+b+a}}$$

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```



Menggunakan geometri, kita mendapatkan rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radius. Kita dapat memeriksa, apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan menfaktorkannya hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$-\frac{4\,a^2\,b^2\,c^2}{(c-b-a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga yang tidak sama sisi. Ini adalah garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk pusat ortosentrum, sirkumenter, pusat massa, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam segitiga.

Pertama, kami menentukan sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

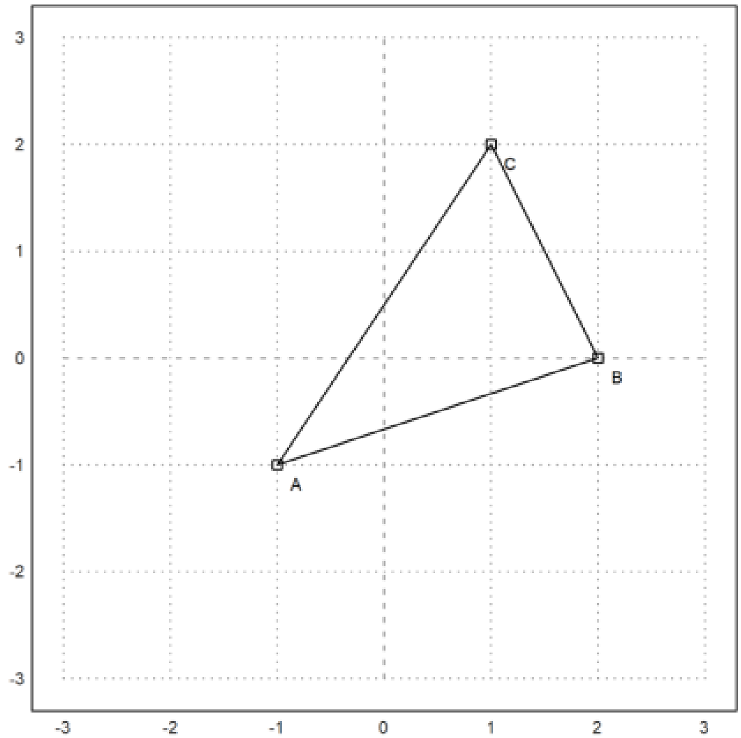
```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kami menyiapkan area plot, dan menambahkan poin ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



Berikut adalah luas segitiga menggunakan rumus determinan. Tentu saja kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien dari sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan juga dapatkan rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3\,y-x=-2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung sirkit ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

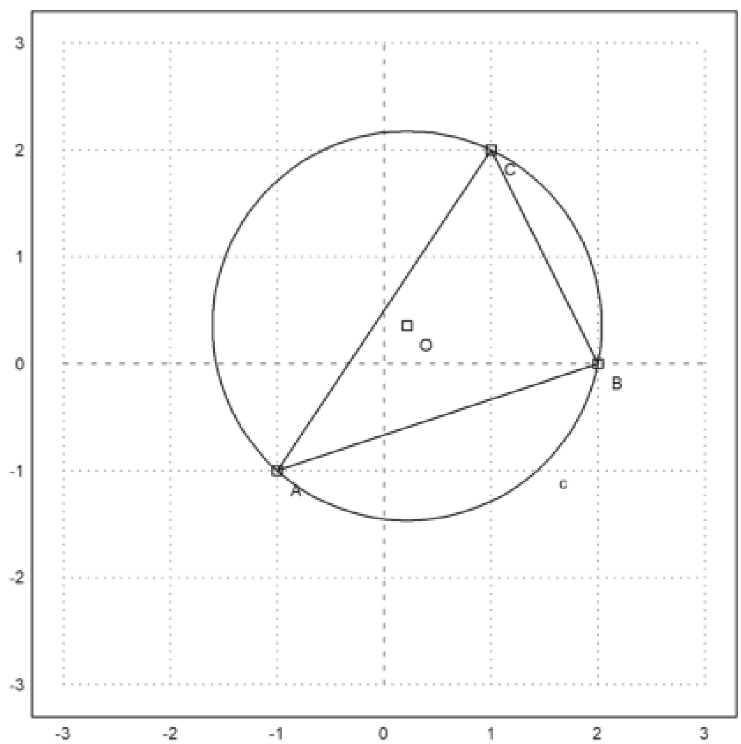
$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolik. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (orthocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7} , \frac{2}{7} \right]$$

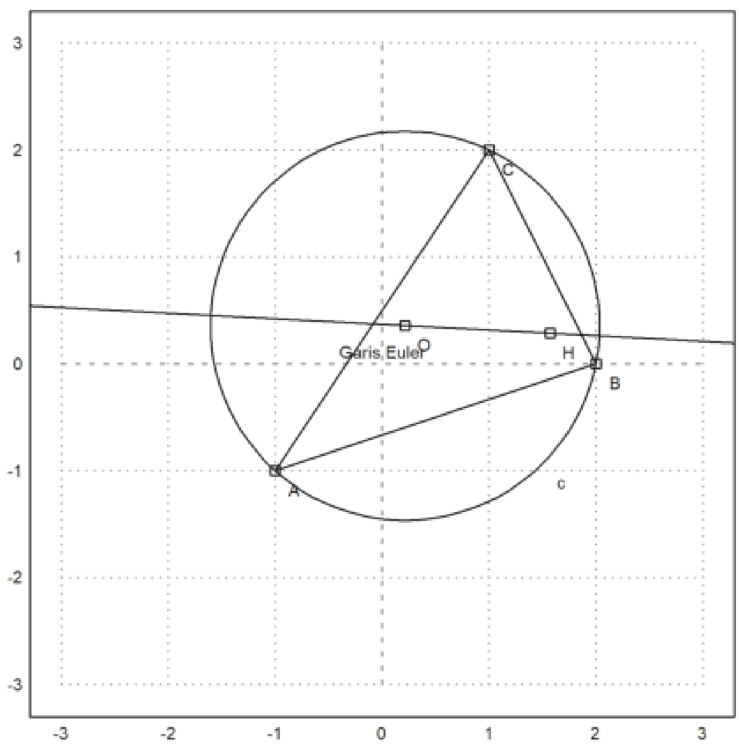
Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19\,y}{14}-\frac{x}{14}=-\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kita.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

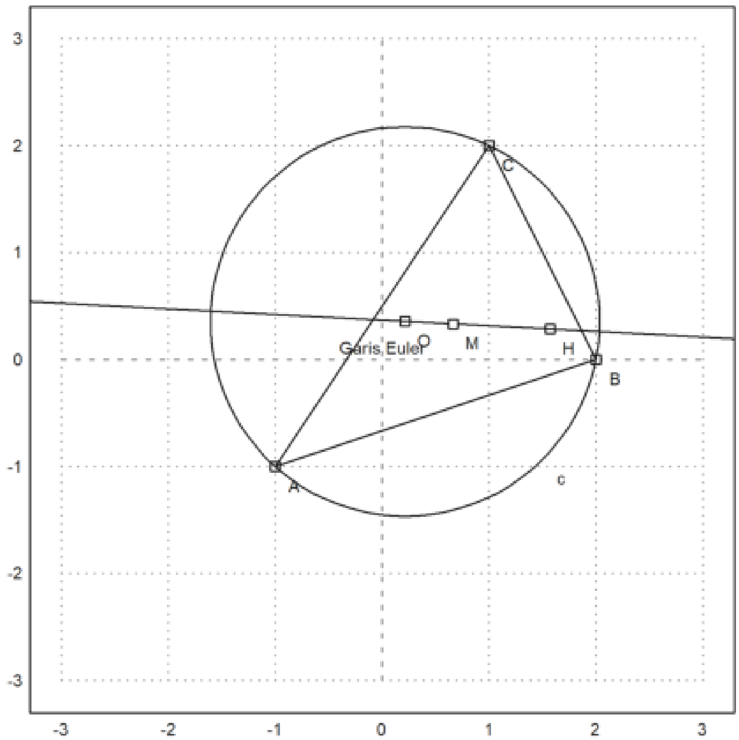


Pusat gravitasi harus berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teorinya mengatakan bahwa MH=2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsinya termasuk fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15'18.43''
```

Persamaan untuk pusat lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14} , \frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi jari-jari lingkaran yang tertulis.

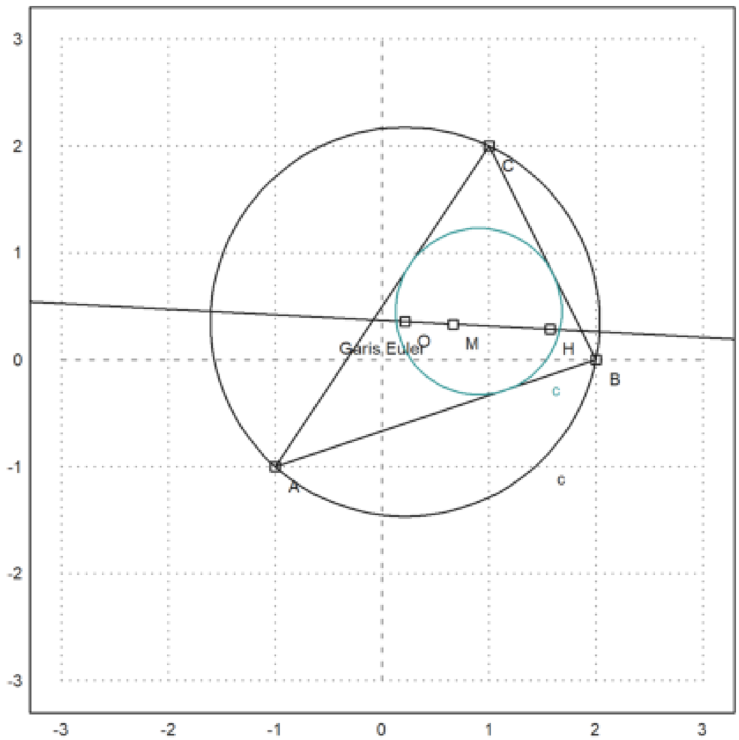
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-41\,\sqrt{2}-31\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+115\,\sqrt{2}+614}}{7\,\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

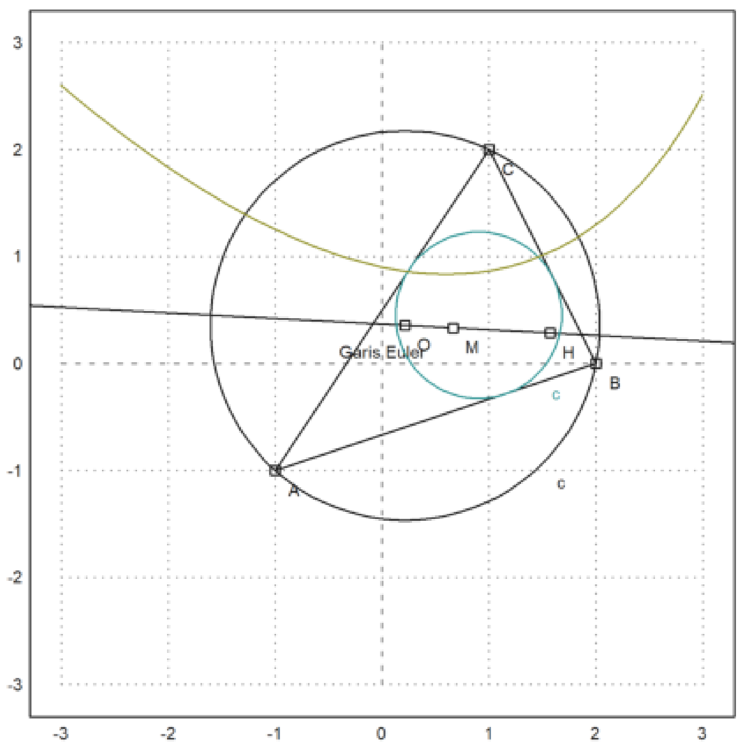
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(1-x\right)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



Ini seharusnya menjadi beberapa fungsi, tetapi pemecah default Maxima dapat menemukan solusi hanya, jika persamaan kita kuadratkan. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

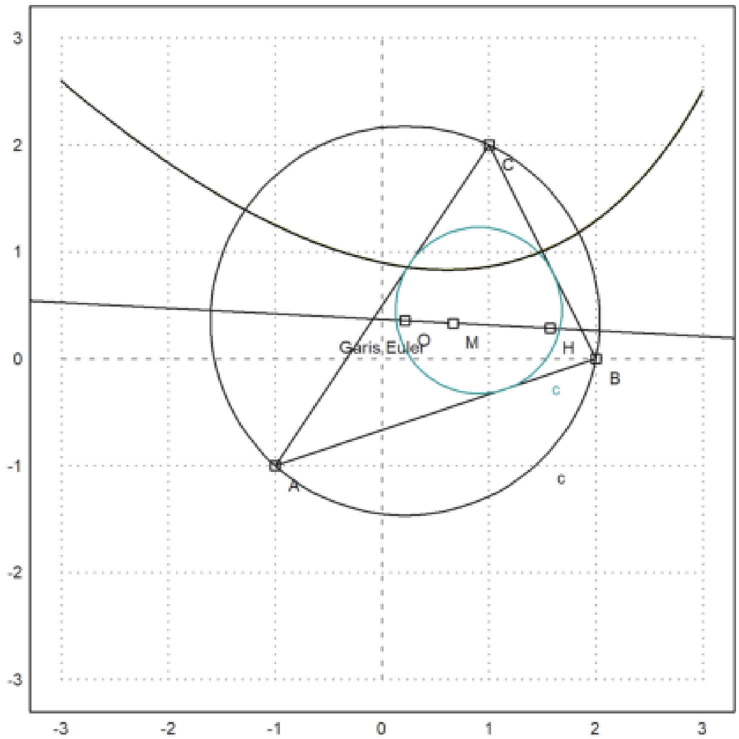
```
        [y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                               y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah

$$y=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

Menambahkan solusi pertama ke pertunjukkan plot, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teori mengatakan kepada kita bajwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```




```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g\left(x\right)=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80-3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10} , \frac{20-\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10} \right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

2.135605779339061

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Ini terinspirasi oleh ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Proporsi Agung", Wildberger mengusulkan untuk menggantikan pengertian klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadransi dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang mungkin untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

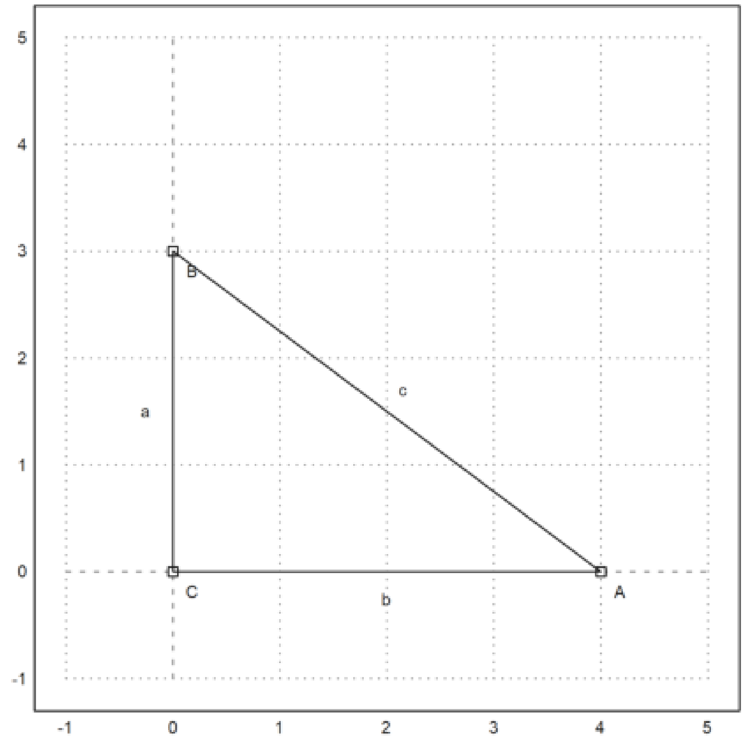
Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional bahwa perhitungan dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda diundang untuk memeriksa hasil tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa perhitungan rasional simbolis sering kali menghasilkan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang mengevaluasi ke pendekatan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pendahuluan pertama, kami menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```



Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan melakukan invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara perkiraan.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Pengertian pertama dari trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Faktanya, itu hanyalah kuadrat jarak. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadran sisi-sisinya.

Teorema Pythogoras menjadi a+b=c lalu.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

```
25 = 25
```

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebarannya. Spread mengukur bukaan antar baris. Ini adalah 0, jika garis sejajar, dan 1, jika garis persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara dua garis.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadrat dari segitiga persegi panjang mana pun dengan satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Ini lebih mudah dihitung daripada sudut, tentu saja. Tetapi Anda kehilangan properti yang sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengubah nilai perkiraan sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum cosinus dari trgonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

$$(c+b-a)^2 = 4bc\,(1-s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah sebaran di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berlawanan dengan sudut A.

Hukum ini diimplementasikan dalam file geometry.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left(cc+bb-aa\right)^2=4\,bb\,cc\,\left(1-saa\right)$$

Dalam kasus kami, kita mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024=1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukan ini, kita menghasilkan crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan menyelesaikannya untuk sebaran yang tidak diketahui sa.

Anda dapat melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah mendapatkannya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$\left[x=\frac{9}{25}\right]$$

$$\left[x=\frac{9}{25}\right]$$

Kami sudah tahu ini. Definisi penyebaran adalah kasus khusus dari hukum lintas hukum.

Kita juga bisa menyelesaikan ini untuk umum a, b, c. Hasilnya adalah rumus yang menghitung sebaran sudut segitiga berdasarkan kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[x=\frac{-cc^2-\left(-2\,bb-2\,aa\right)\,cc-bb^2+2\,aa\,bb-aa^2}{4\,bb\,cc}\right]$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah ditentukan dalam file geometry.e Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita bisa menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga bersisi

$$a,\quad a,\quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

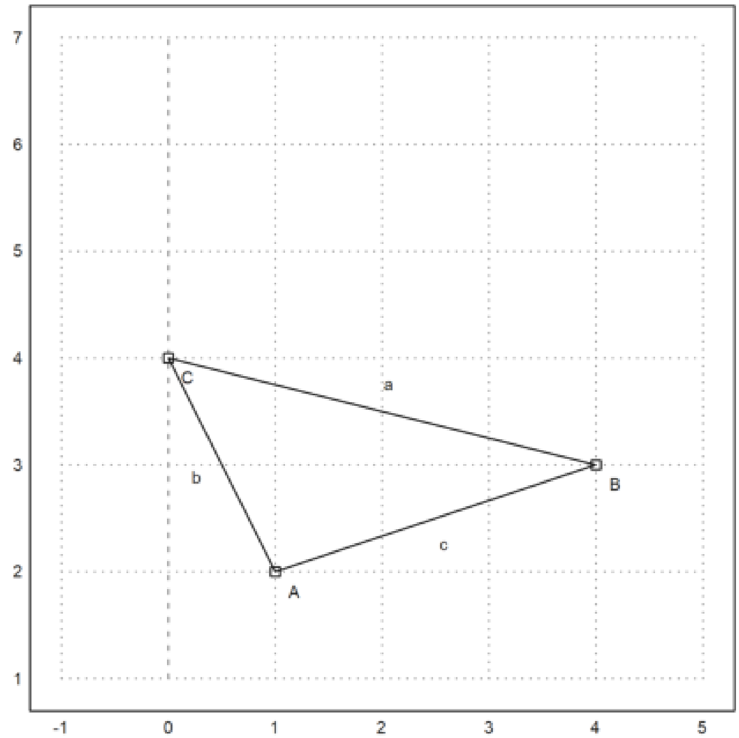
```
67°47'32.44''
```

Contoh lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih canggih.

Kami mengatur tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan jarak fungsi file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memiliki fungsi kuadrans antara dua titik.

Dalam contoh berikut, karena c + b bukan a, segitiga tidak persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$17$$

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan perkalian titik dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa pendekatan floating point.

$$A =< 1,2 > \quad B =< 4,3 >, \quad C =< 0,4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4,1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3,-1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a.c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos\beta$$

$$\cos\angle ABC = \cos\beta = \frac{\mathbf{a.c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12-1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Menggunakan pensil dan kertas, kita bisa melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kami memasukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan menyelesaikan untuk x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x),
```

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Artinya, fungsi penyebaran yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Itu menyelesaikan istilah sin (arccos (...)) menjadi hasil pecahan. Kebanyakan siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita mendapatkan sebaran di B, kita bisa menghitung tinggi ha di sisi a. Ingat bahwa

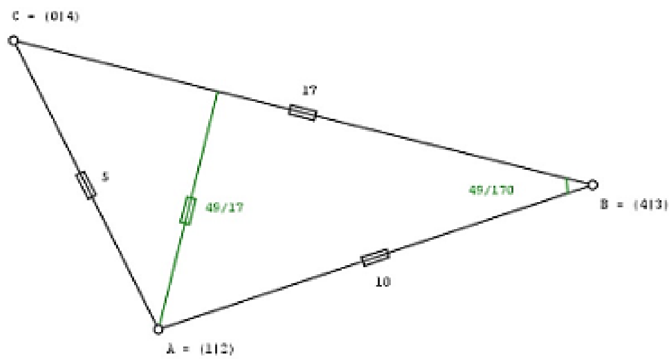
$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

Menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut telah diproduksi dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan menyebar.



Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita bisa menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Formula Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung spread di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kami menghitung luas area yang dikuadratkan ("kuadrea"?), Memfaktorkannya dengan Maxima, dan kami mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}{16}$$

$$\frac{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}{16}$$

Aturan Triple Spread

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut serupa.

Namun, tiga sebaran segitiga memenuhi aturan "penyebaran rangkap tiga" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc+sb+sa)^2 = 2\ \left(sc^2+sb^2+sa^2\right) + 4\ sa\ sb\ sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang bertambah menjadi 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Sejak penyebaran

$$\alpha, \pi-\alpha$$

sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga benar, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Misalnya, kita dapat menghitung sebaran sudut 60°. Ini 3/4. Persamaan memiliki solusi kedua, di mana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x=\frac{3}{4}, x=0\right]$$

Sebaran 90° jelaslah 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90°, penyebarannya menyelesaikan persamaan penyebaran rangkap tiga dengan a, b, 1. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan a+b=1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$[x = 1 - y]$$

Karena penyebaran 180°-t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran rangkap tiga juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau perbedaan dari dua sudut lainnya.

Jadi kita bisa menemukan sebaran sudut berlipat ganda. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami menjadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

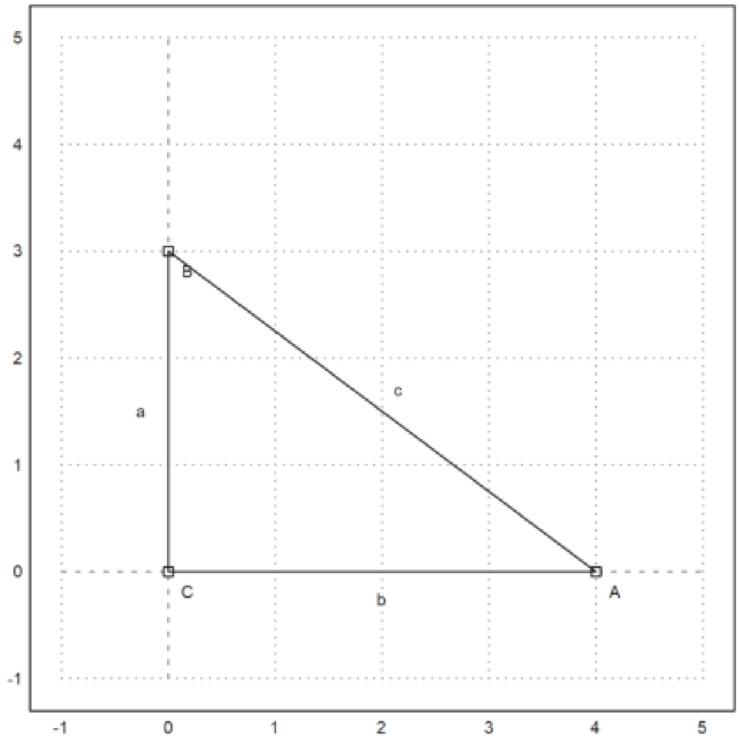
$$\left[x = 4\,a - 4\,a^2 , x = 0\right]$$

```
                          - 4 (a - 1) a
```

Pembagi Sudut

Ini situasinya, kita sudah tahu.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang bisektor sudut pada A. Tapi kita ingin menyelesaikannya untuk umum a, b, c.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita menghitung sebaran sudut terbagi di A, menggunakan rumus sebaran rangkap tiga. Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kami harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbagi 180°-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a},x=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kami dapat mencetak sudut di Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

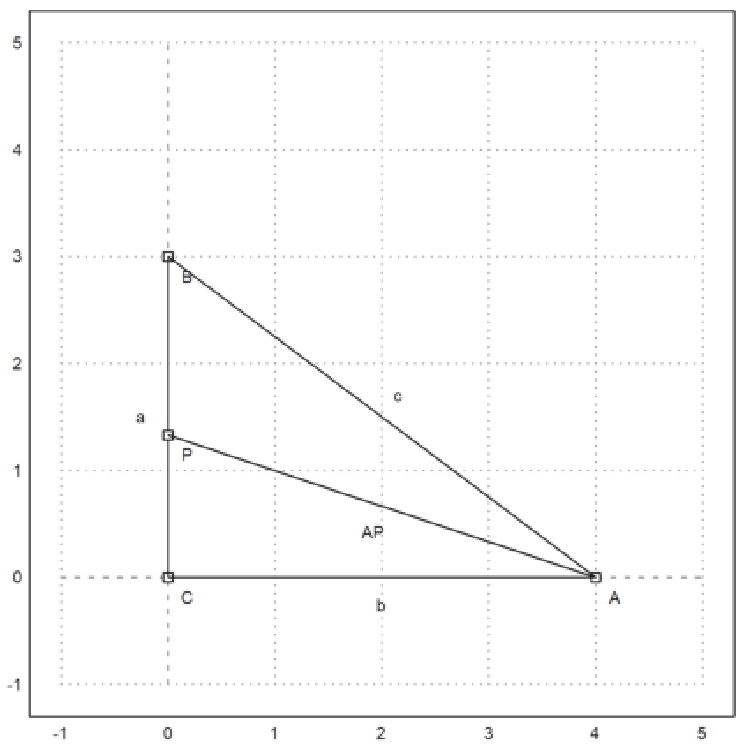
```
18°26'5.82''
```

Titik P adalah perpotongan dari garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita menghitung panjang bisektor AP.
Kita menggunakan teorema sinus di segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

memegang di segitiga apa pun. Persegi itu, itu diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

dimana a, b, c menunjukkan qudrance.

Karena BPA sebaran adalah 1-sa2, kita dapatkan darinya bisa / 1 = b / (1-sa2) dan dapat menghitung bisa (kuadran garis-garis).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,\left(b+a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kami juga dapat menghitung P menggunakan rumus spread.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\,\left(\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

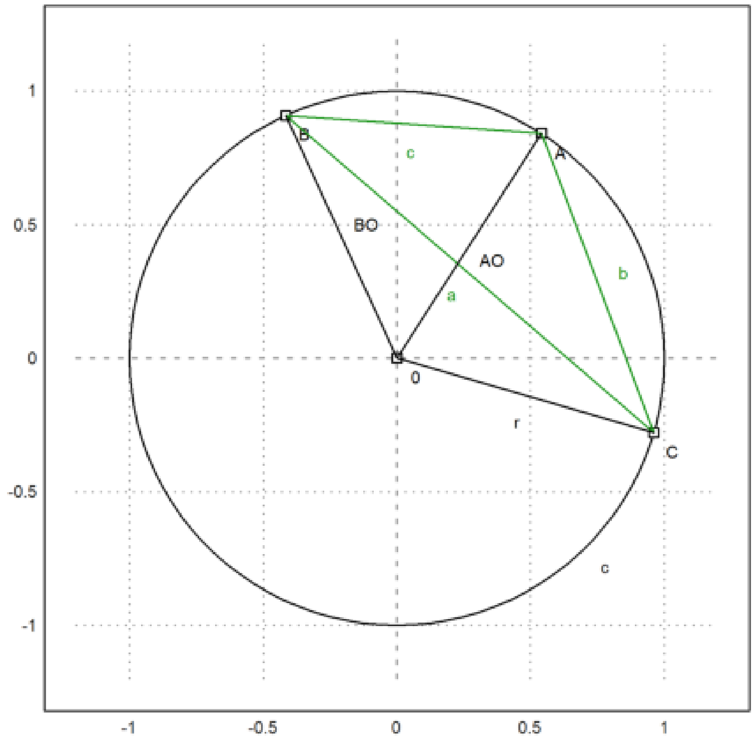
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akord

Perhatikan situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```



Kita bisa menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus sebaran rangkap tiga untuk sudut di pusat O untuk r. Jadi kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari keliling dalam hal kuadrat sisi.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita bisa menjadikannya sebagai fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A, B, C kita.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Radiusnya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

1

Faktanya, penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut akord.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Sebenarnya sebarannya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut akor b adalah setengah dari sudut tengah.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

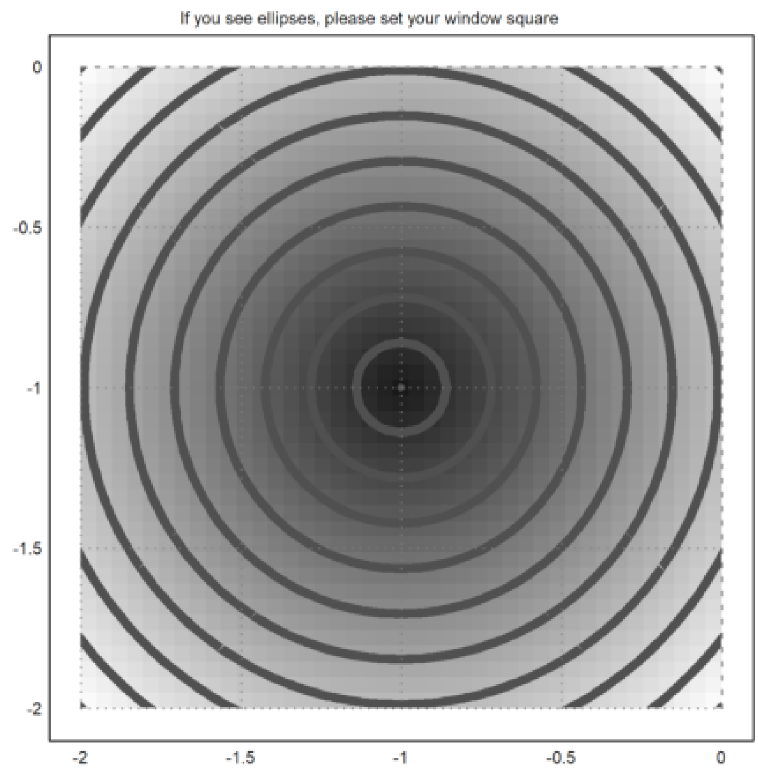
$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan awal

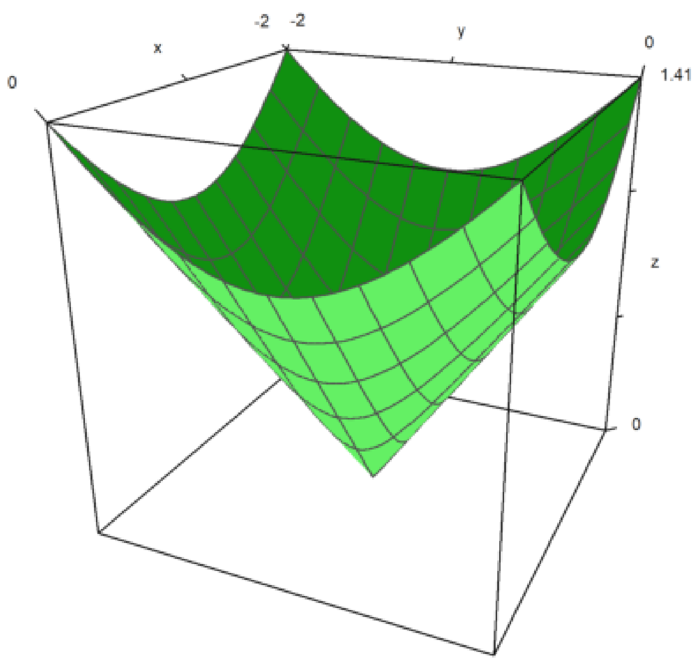
Fungsi yang, ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

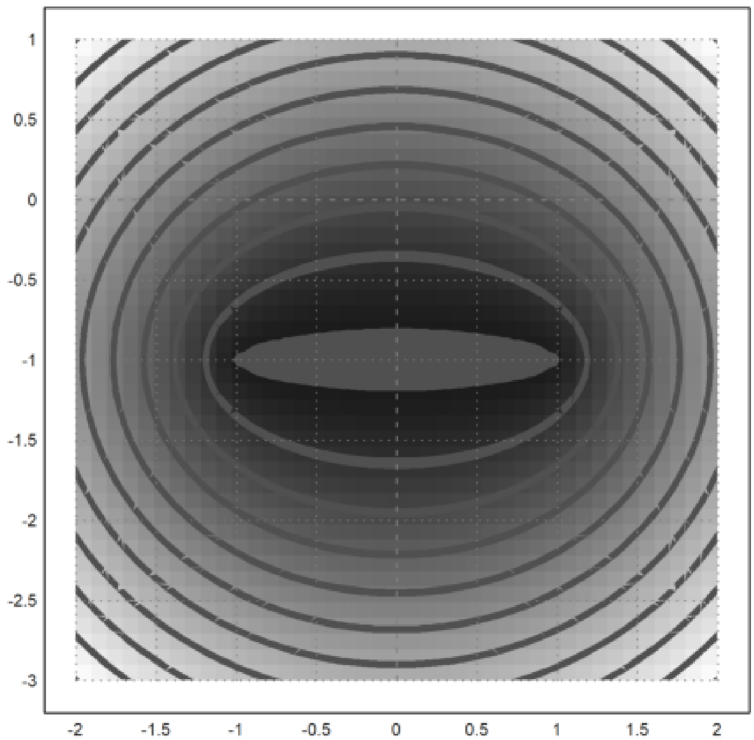


Tentu saja minimal 0 dicapai di A.

Dua titik

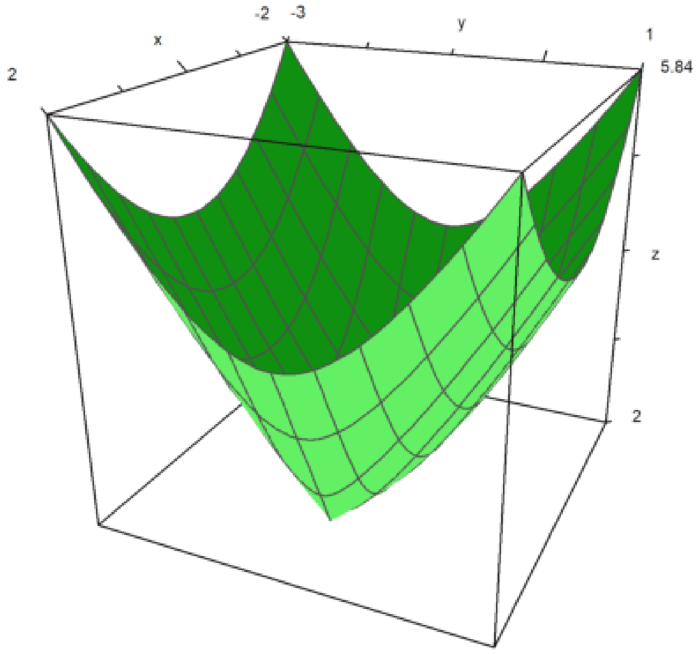
Sekarang kita melihat fungsi MA + MB dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta yang terkenal" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali untuk minimum AB yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



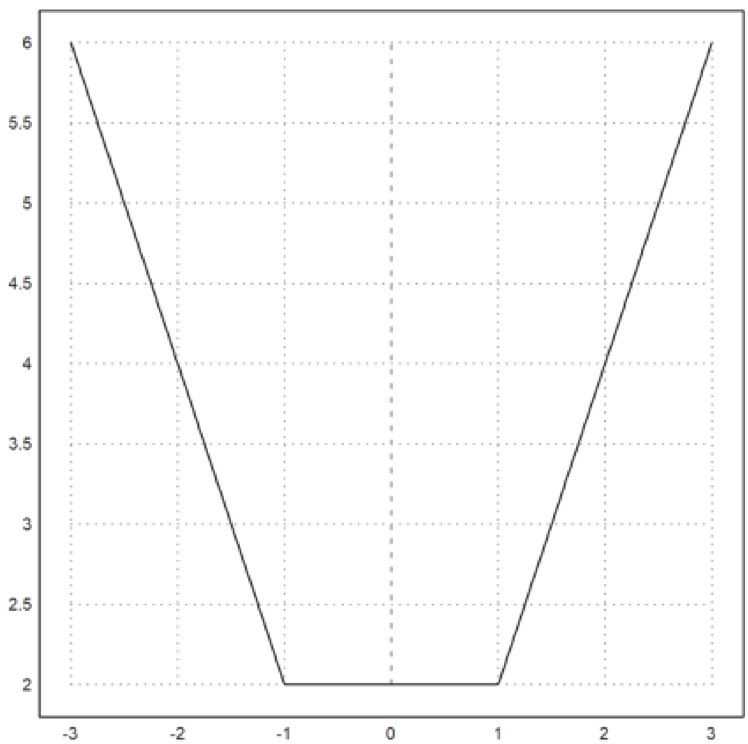
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Batasan ke baris (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

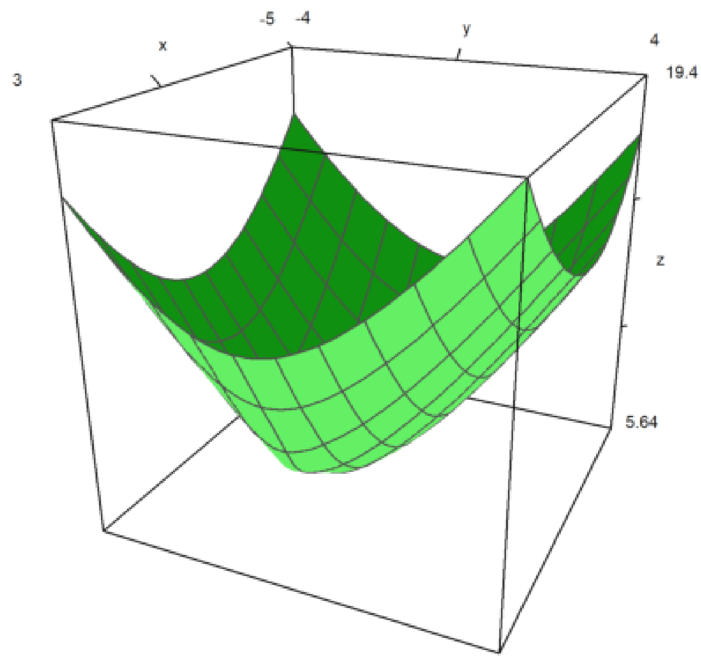


Sekarang hal-hal menjadi kurang sederhana: Sedikit kurang diketahui bahwa MA+MB+MC mencapai minimumnya pada satu titik bidang tetapi untuk menentukannya kurang sederhana:

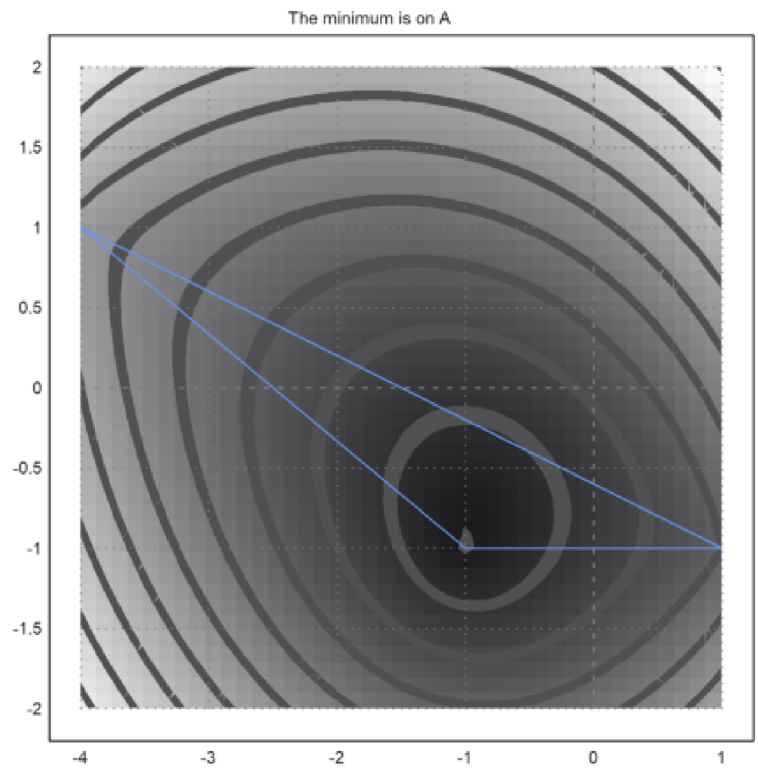
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah dalam A), maka minimum tercapai pada titik ini (katakanlah AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

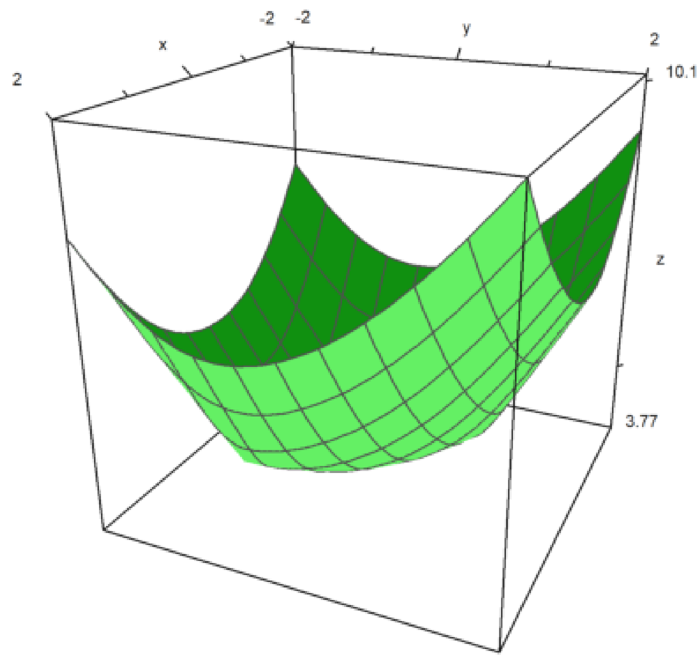



```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

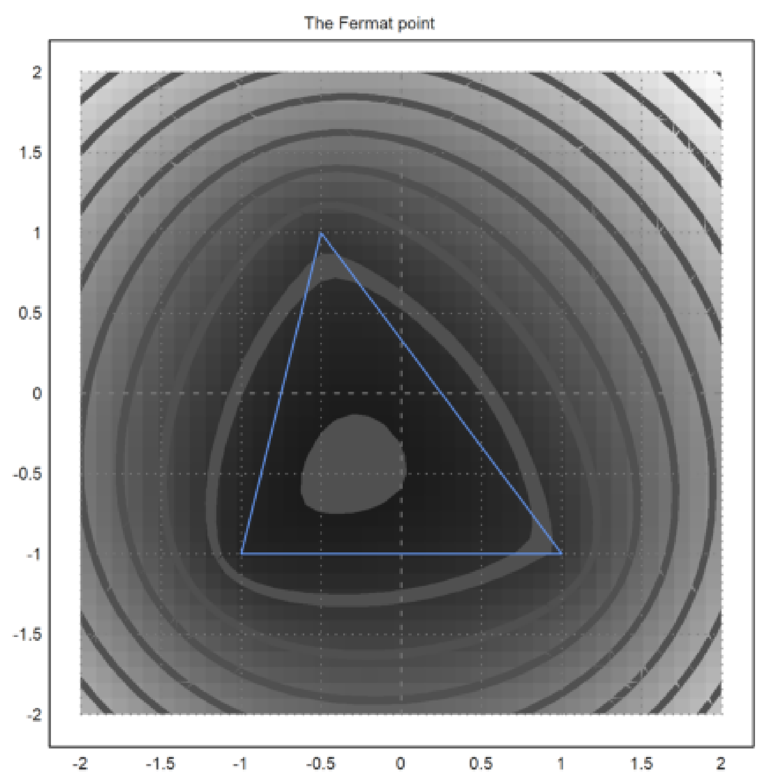


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120°, minimum berada pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi ABC dengan sudut yang sama (lalu masing-masing 120°) :

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```




```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```



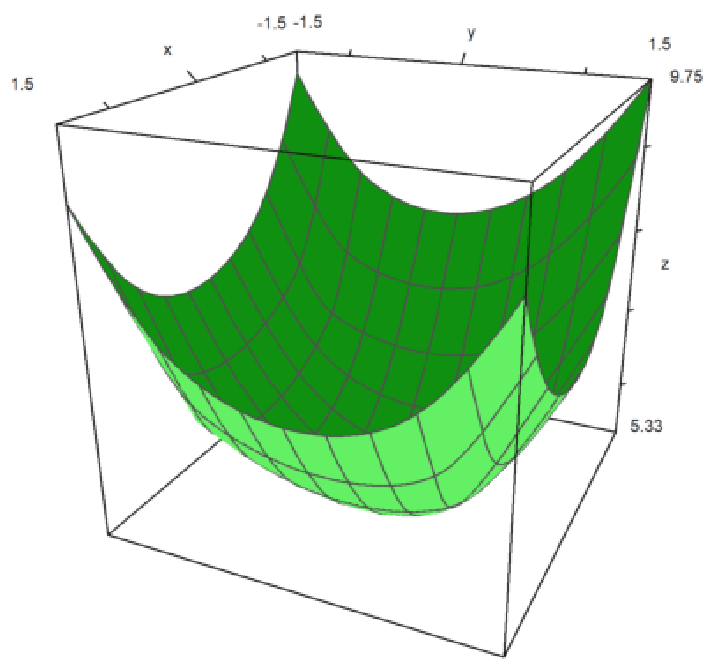
Merupakan kegiatan yang menarik untuk mewujudkan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; sebagai contoh, saya tahu soft tertulis di Java yang memiliki instruksi "garis kontur" ...

Semua ini di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Prancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada para penggila lainnya seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi titik unik F sehingga FA + FB + FC minimal disebut titik Fermat segitiga. Tetapi tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat melakukannya! Pokoknya tradisinya adalah mencatat poin ini ...

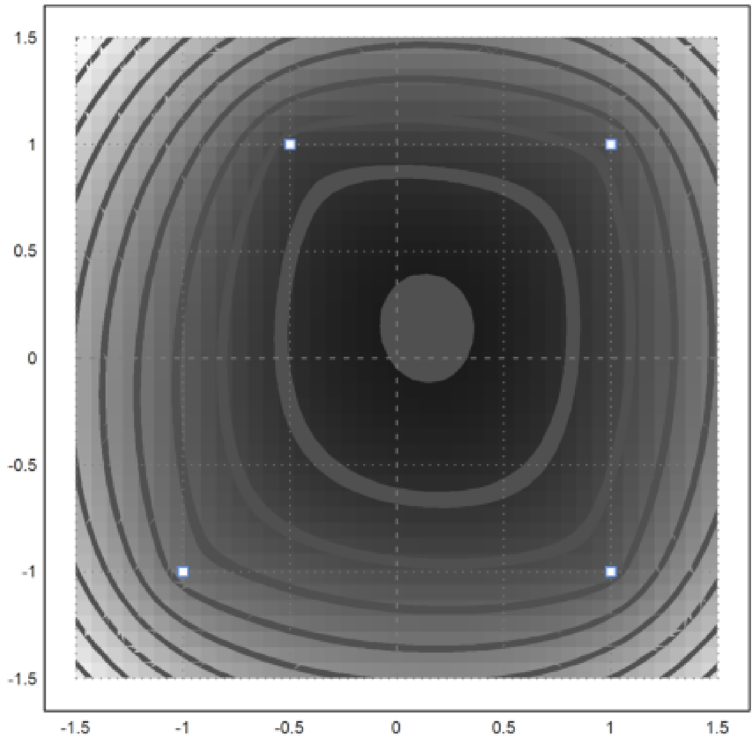
Empat titik

Langkah selanjutnya adalah menambahkan titik D ke-4 dan mencoba meminimalkan MA + MB + MC + MD; katakanlah bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



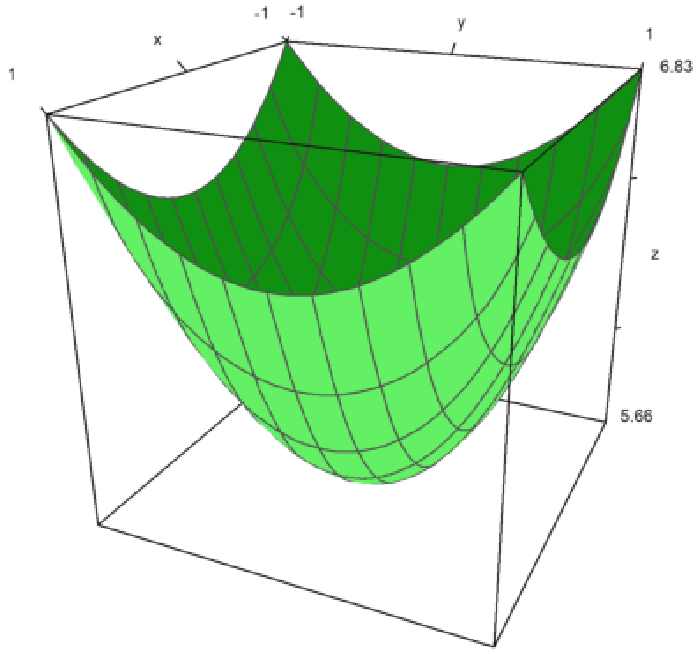
Masih ada minimum dan tidak ada yang dicapai pada simpul A, B, C atau D:

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

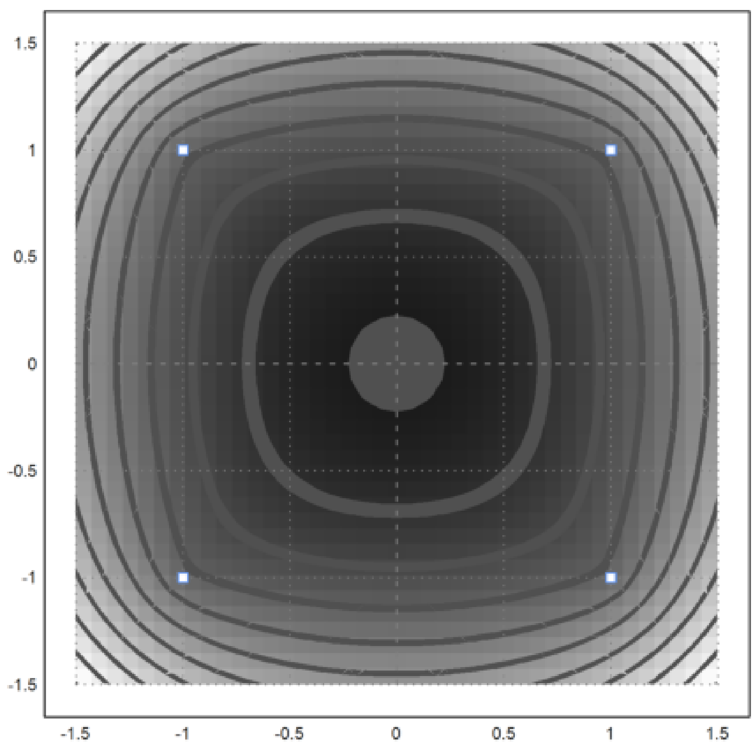
```
[0.142858,  0.142857]
```

Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal rasional atau mendekati rasional ...
Sekarang ABCD adalah bujur sangkar, kami berharap bahwa titik optimal adalah pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda memiliki Povray diinstal, dan pvengine.exe di jalur program.

Pertama kami menghitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah, Anda melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometry.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama, dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

```
[- a, - 1, 0]
```

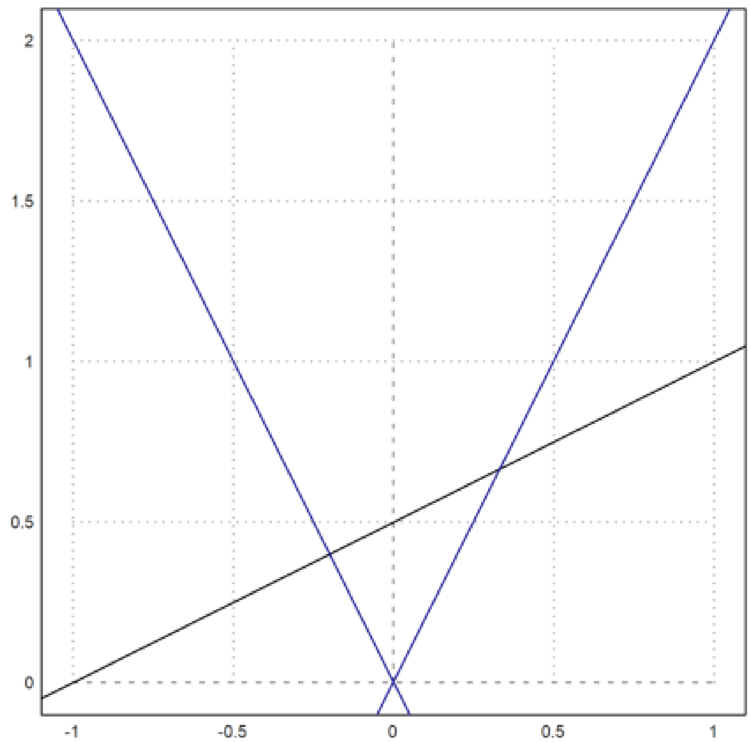
Lalu baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kita merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran, di mana jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1} , u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1} \right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

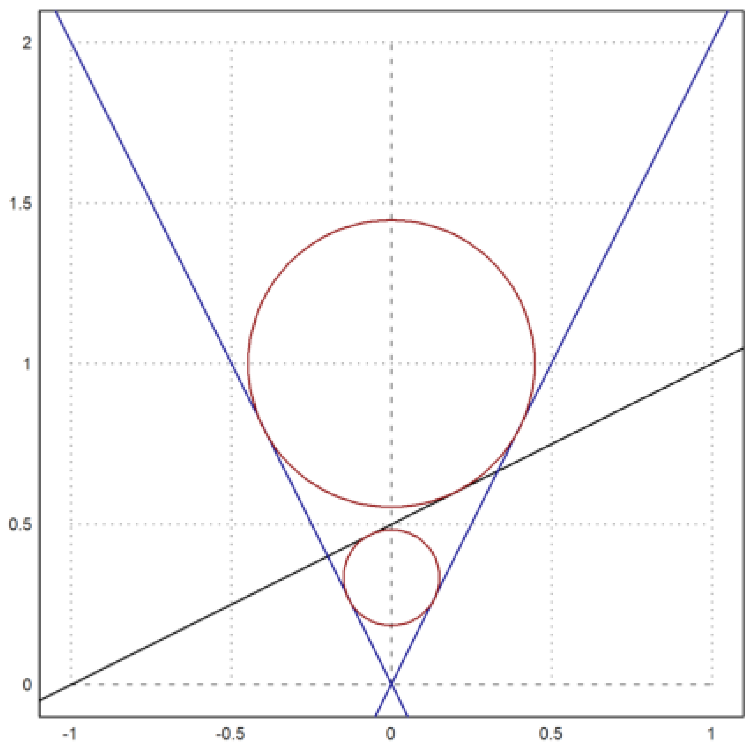
```
[0.333333,  1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071,  0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```



Plot dengan Povray

Selanjutnya kami merencanakan semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kita mengatur adegan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis dua bidang ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan pesawat terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kami menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian kami menghasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita menghitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik dengan segmen garis.

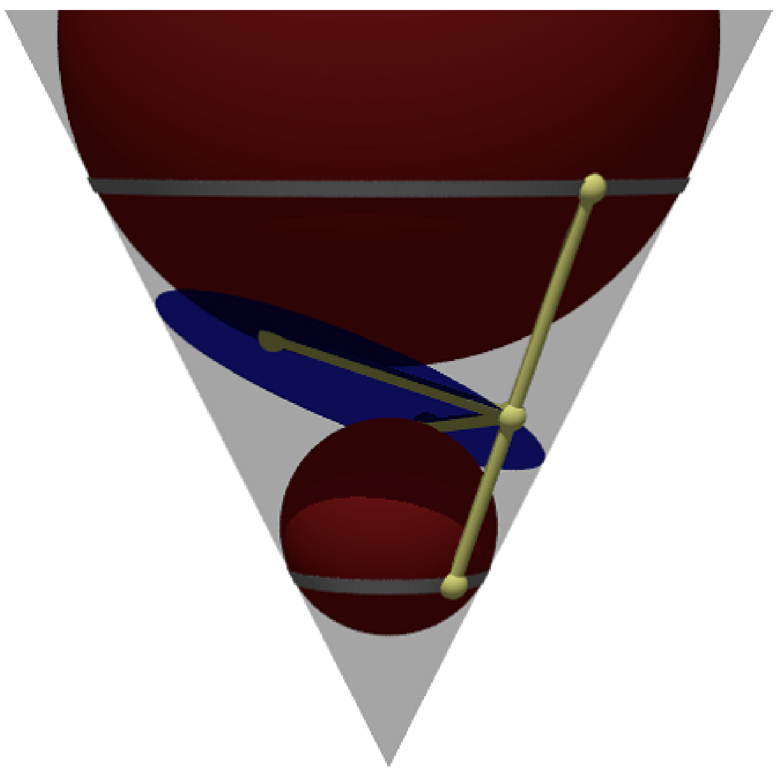
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kami membuat pita abu-abu, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```



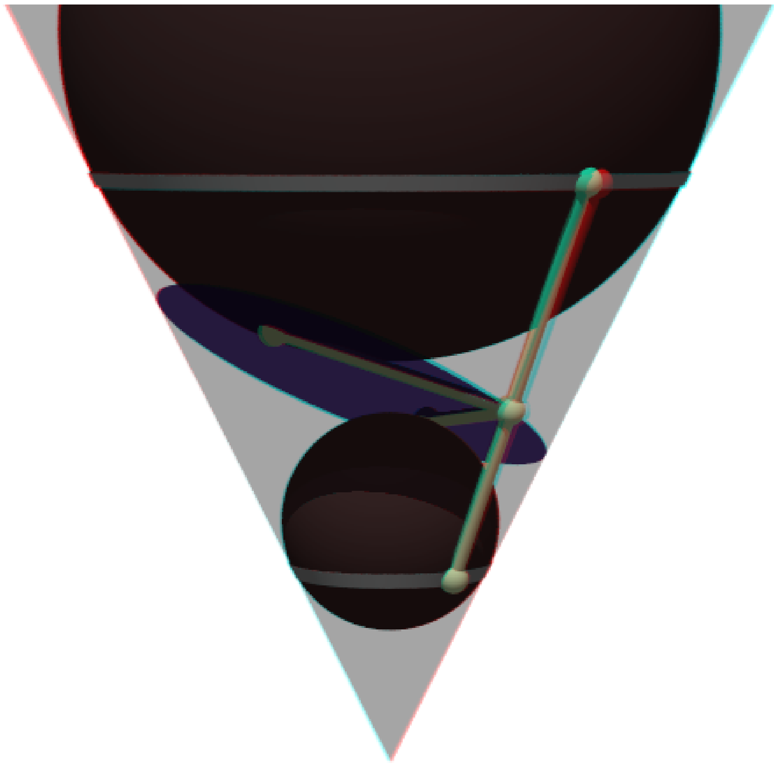
Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda membutuhkan kacamata merah / cyan untuk mengapresiasi efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



Contoh 8: Geometri Bumi

Di notebook ini, kami ingin melakukan beberapa komputasi bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu dulu.

```
>load spherical.e
```

```
Spherical functions for Euler.
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bola).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu bola ke bola lainnya pada bola ideal. Vektor ini adalah [heading, distance] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita mengalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-So
```

```
65°20’26.60’’
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang bagus. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak yang begitu dekat hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km", // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
88.0114026318 km
```

Ada fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk bumi yang elips. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
     65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo);
```

```
180°0’10.77’’
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2", //perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
2116.02948749 km^2
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kami juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Vektor berisi heading dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kami menggunakan svector. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kami menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya 429,66 km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km", // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
431.565659488 km
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, tetapi mengambil perkiraan jari-jari bumi di sepanjang jalan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentunya kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kami jauh dari tujuan yang benar, jika kami menggunakan tajuk yang sama selama perjalanan kami.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh jaraknya, menggunakan heading ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya masih jauh.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
 S 6°11.250' E 106°48.372'
      1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada ketinggian yang sama.

```
> P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran dengan garis lintang 30°, tetapi jalur yang lebih pendek mulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
      79.69°
```

Tapi, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah tujuan kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kami menyesuaikannya pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
>  loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
      79.69°
      81.67°
      83.71°
      85.78°
      87.89°
      90.00°
      92.12°
      94.22°
      96.29°
      98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti tajuk yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan heading setelah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
>  loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
>  loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

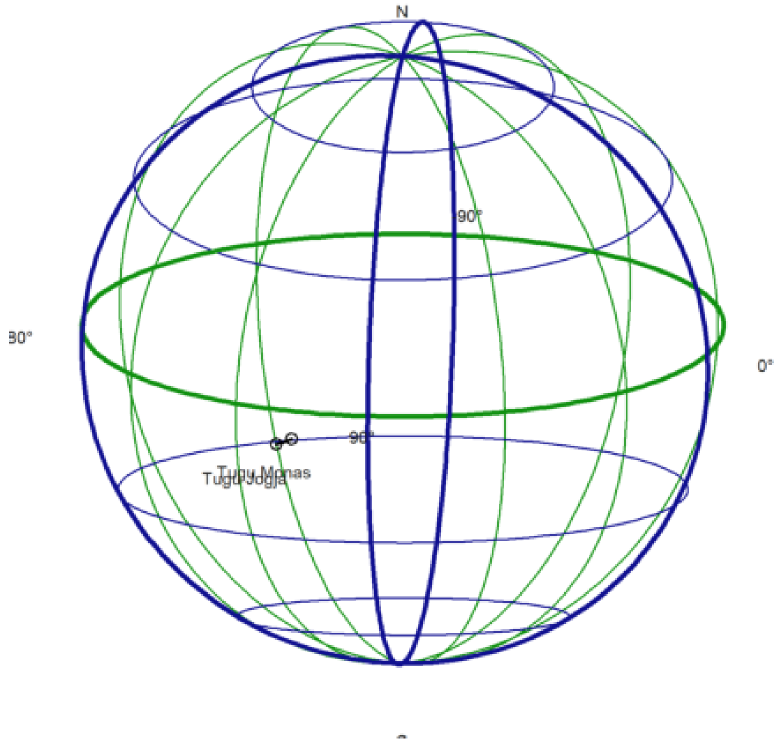
Kami menulis sebuah fungsi, yang menggambarkan bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

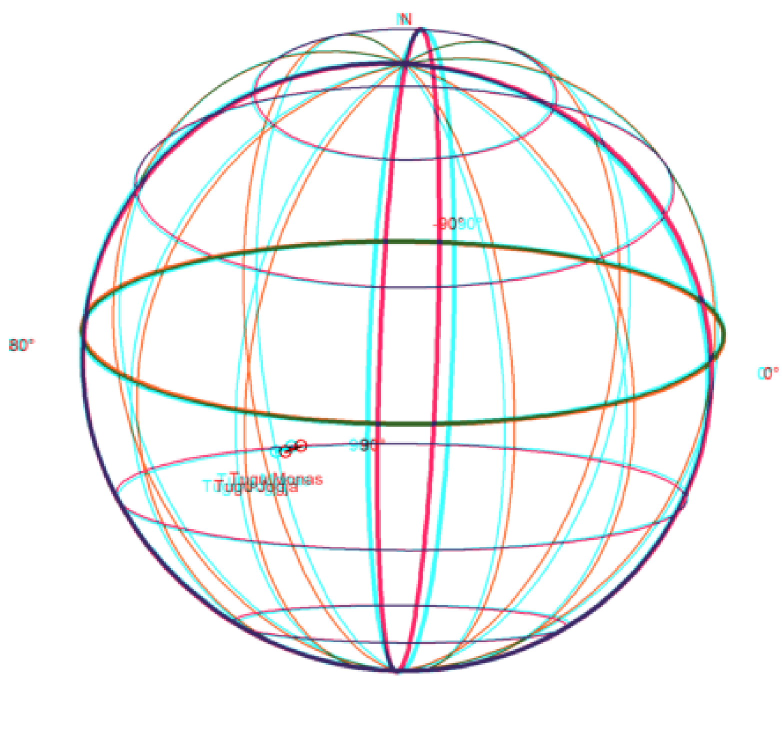
Sekarang plot semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyphnya. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah / cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:
- Misalkan persamaan parabolanya y= ax^2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

```
- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung
```

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

```
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat
```

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

```
- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar
```

lingkaran dalamnya.

```
- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis
```

singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

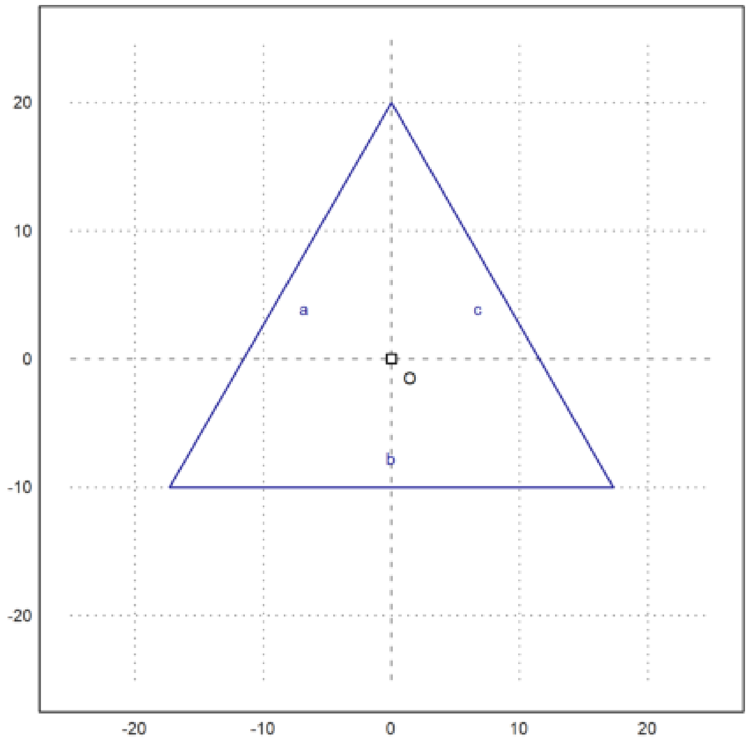
5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Jawab

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut
(jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

a. segi-3

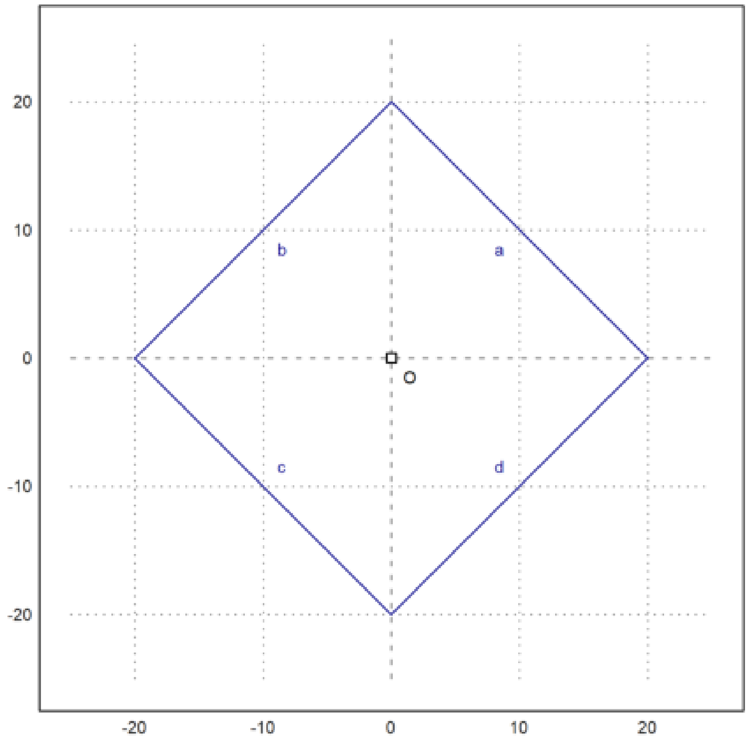
```
>setPlotRange(25);
>v = [1,1];
>O = [0,0];
>color(1); plotPoint(O, "O");
>circ = circleWithCenter(O, 20);
>line1 = lineWithDirection(O, turn(v, pi/4));
>line2 = lineWithDirection(O, turn(v,(11pi)/12));
>line3 = lineWithDirection(O, turn(v, 19pi/12));
>intersect1 = lineCircleIntersections(line1, circ);
>intersect2 = lineCircleIntersections(line2, circ);
>intersect3 = lineCircleIntersections(line3, circ);
>color(4); plotSegment(intersect1, intersect2, "a");
>color(4); plotSegment(intersect2, intersect3, "b");
>color(4); plotSegment(intersect3, intersect1, "c"):
```



b. segi-4

```
>setPlotRange(25);
>v = [1, 1];
>O = [0, 0];
>color(1); plotPoint(O, "O");
>circ = circleWithCenter(O, 20);
>line1 = lineWithDirection(O, turn(v, -pi/4));
>line2 = lineWithDirection(O, turn(v, pi/4));
>line3 = lineWithDirection(O, turn(v, 3pi/4));
>line4 = lineWithDirection(O, turn(v, 5pi/4));
>intersect1 = lineCircleIntersections(line1, circ);
>intersect2 = lineCircleIntersections(line2, circ);
```

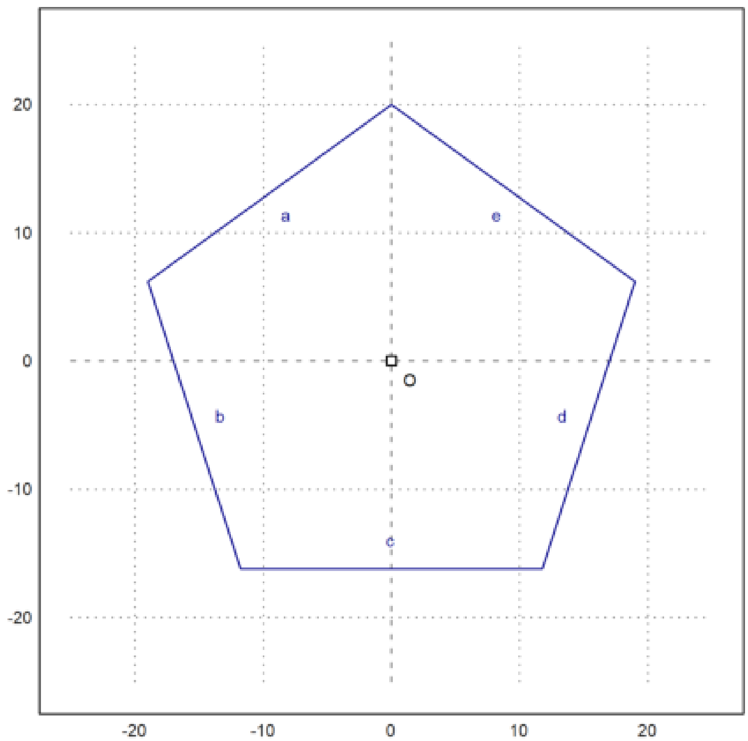
```
>intersect3 = lineCircleIntersections(line3, circ);
>intersect4 = lineCircleIntersections(line4, circ);
>color(4); plotSegment(intersect1, intersect2, "a");
>color(4); plotSegment(intersect2, intersect3, "b");
>color(4); plotSegment(intersect3, intersect4, "c");
>color(4); plotSegment(intersect4, intersect1, "d"):
```



c. segi-5

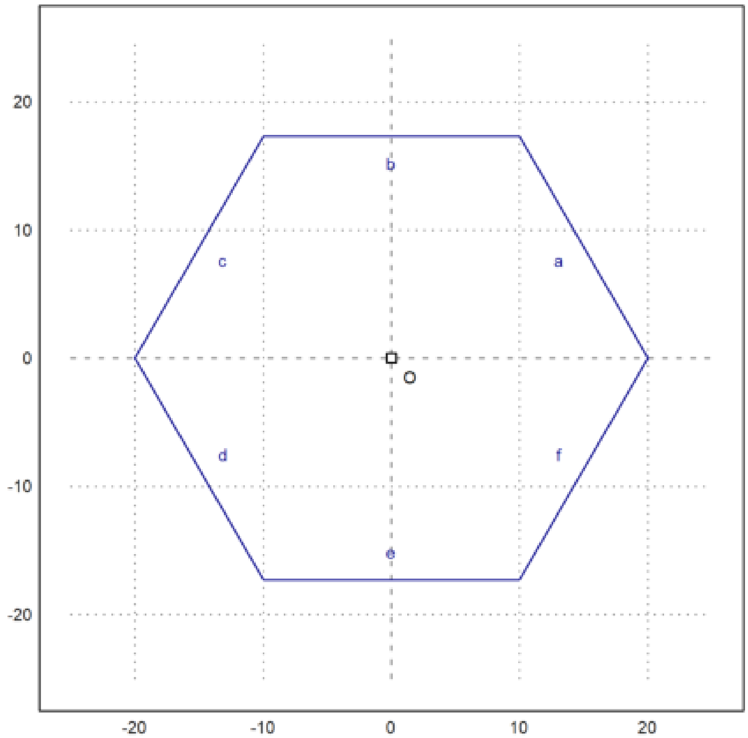
```
>setPlotRange(25);
>v = [1, 1];
>O = [0, 0];
>color(1); plotPoint(O, "O");
>circ = circleWithCenter(O, 20);
>line1 = lineWithDirection(O, turn(v, pi/4));
>line2 = lineWithDirection(O, turn(v, 13pi/20));
>line3 = lineWithDirection(O, turn(v, 21pi/20));
>line4 = lineWithDirection(O, turn(v, 29pi/20));
>line5 = lineWithDirection(O, turn(v, 37pi/20));
>intersect1 = lineCircleIntersections(line1, circ);
>intersect2 = lineCircleIntersections(line2, circ);
>intersect3 = lineCircleIntersections(line3, circ);
>intersect4 = lineCircleIntersections(line4, circ);
>intersect5 = lineCircleIntersections(line5, circ);
>color(4); plotSegment(intersect1, intersect2, "a");
>color(4); plotSegment(intersect2, intersect3, "b");
>color(4); plotSegment(intersect3, intersect4, "c");
>color(4); plotSegment(intersect4, intersect5, "d");
```

```
>color(4); plotSegment(intersect5, intersect1, "e"):
```



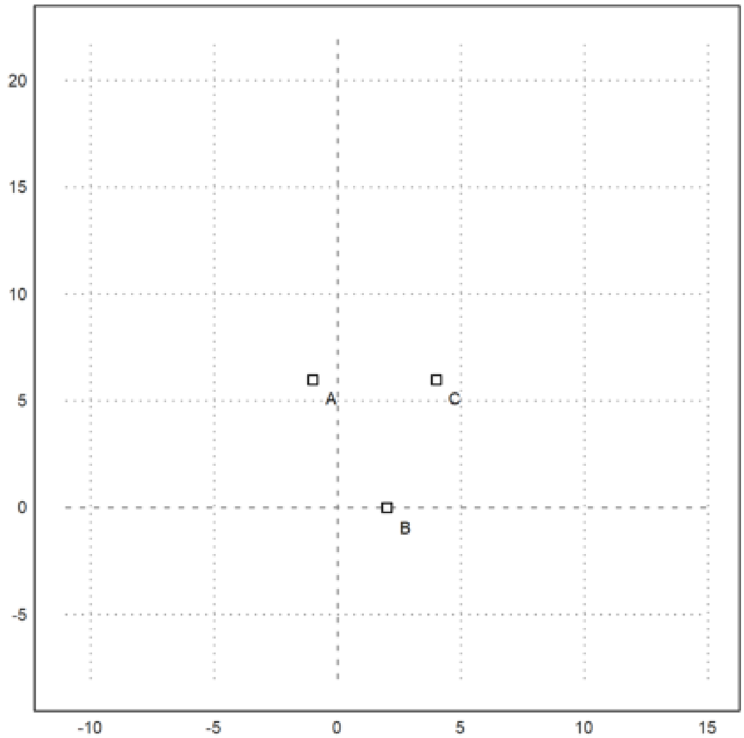
d. segi-6

```
>setPlotRange(25);
>v = [1, 1];
>O = [0, 0];
>color(1); plotPoint(O, "O");
>circ = circleWithCenter(O, 20);
>line1 = lineWithDirection(O, turn(v, -pi/4));
>line2 = lineWithDirection(O, turn(v, pi/12));
>line3 = lineWithDirection(O, turn(v, 5pi/12));
>line4 = lineWithDirection(O, turn(v, 3pi/4));
>line5 = lineWithDirection(O, turn(v, 13pi/12));
>line6 = lineWithDirection(O, turn(v, 17pi/12));
>intersect1 = lineCircleIntersections(line1, circ);
>intersect2 = lineCircleIntersections(line2, circ);
>intersect3 = lineCircleIntersections(line3, circ);
>intersect4 = lineCircleIntersections(line4, circ);
>intersect5 = lineCircleIntersections(line5, circ);
>intersect6 = lineCircleIntersections(line6, circ);
>color(4); plotSegment(intersect1, intersect2, "a");
>color(4); plotSegment(intersect2, intersect3, "b");
>color(4); plotSegment(intersect3, intersect4, "c");
>color(4); plotSegment(intersect4, intersect5, "d");
>color(4); plotSegment(intersect5, intersect6, "e");
>color(4); plotSegment(intersect6, intersect1, "f"):
```



2. Menggambar Parabola melalui 3 titik yang diketahui

```
>setPlotRange(-11,15,-8,22);
>A = [-1, 6];
>B = [2, 0];
>C = [4, 6];
>color(1); plotPoint(A, "A");
>color(1); plotPoint(B, "B");
>color(1); plotPoint(C, "C"):
```



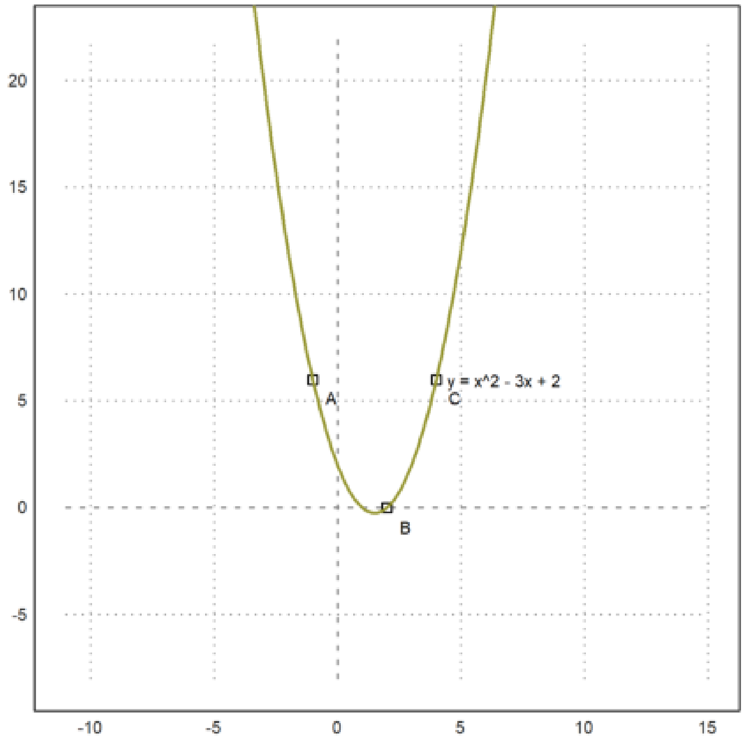

```
>sol &= solve([a-b+c=6, 4*a+2*b+c=0, 16*a+4*b+c=6], [a,b,c]); $sol
```

$$[[a = 1, b = -3, c = 2]]$$

```
>y &= x^2 - 3*x + 2; $y
```

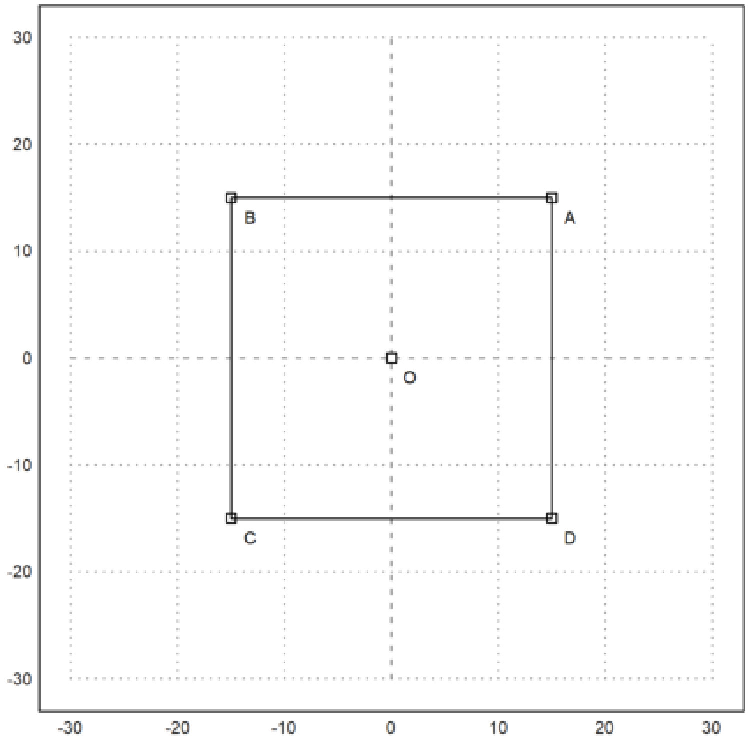
$$x^2 - 3\,x + 2$$

```
>plot2d(&y,add=1,color=olive,thickness=2);
>plotLabel("y = x^2 - 3x + 2", [6,5]):
```



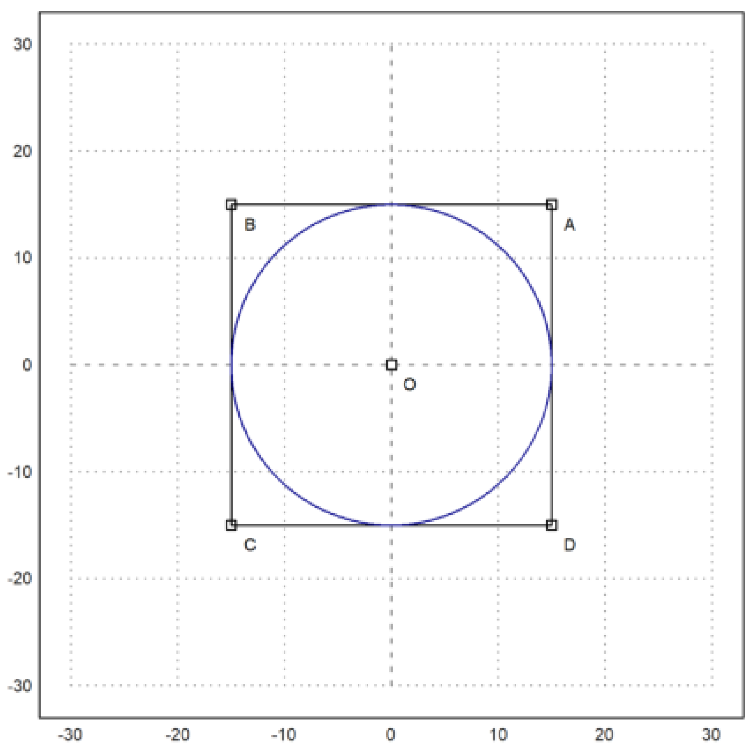
3. Gambar persegi yang diketahui 4 titiknya

```
>setPlotRange(30);
>O = [0, 0];
>color(1); plotPoint(O, "O");
>A = [15, 15];
>B = [-15, 15];
>C = [-15, -15];
>D = [15, -15];
>color(1); plotPoint(A, "A");
>color(1); plotPoint(B, "B");
>color(1); plotPoint(C, "C");
>color(1); plotPoint(D, "D");
>color(1); plotSegment(A, B, "");
>color(1); plotSegment(B, C, "");
>color(1); plotSegment(C, D, "");
>color(1); plotSegment(D, A, ""):
```



a. Akan ditentukan bahwa segi-4 sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran

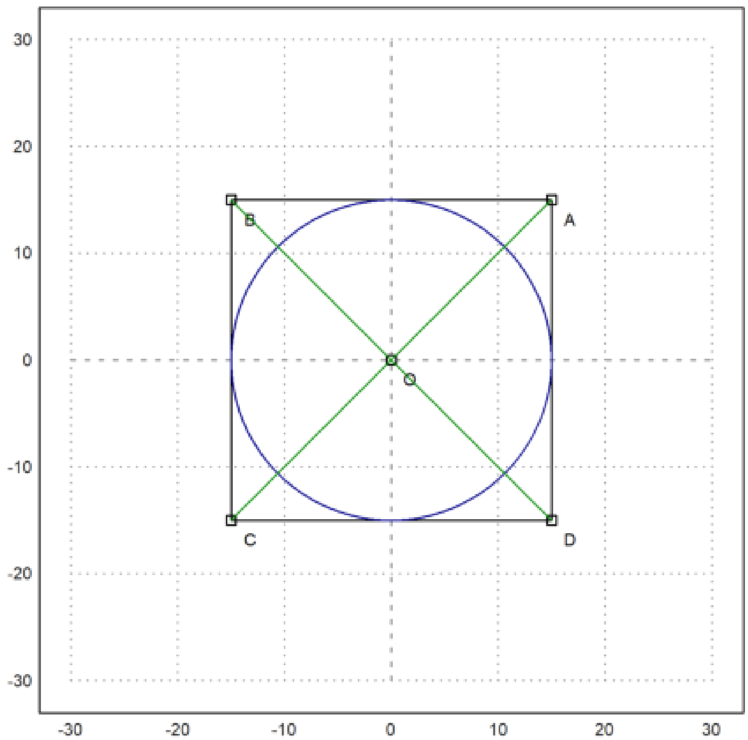
```
>circIn = circleWithCenter(O, 15);
>color(4); plotCircle(circIn, ""):
```



Dari grafik atau gambar terlihat bahwa keempat sisi dari segi-4 adalah garis singgung dari lingkaran dalam segi-4 tersebut.

b. Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

```
>color(3); plotSegment(A, C, "");
>color(3); plotSegment(B, D, ""):
```

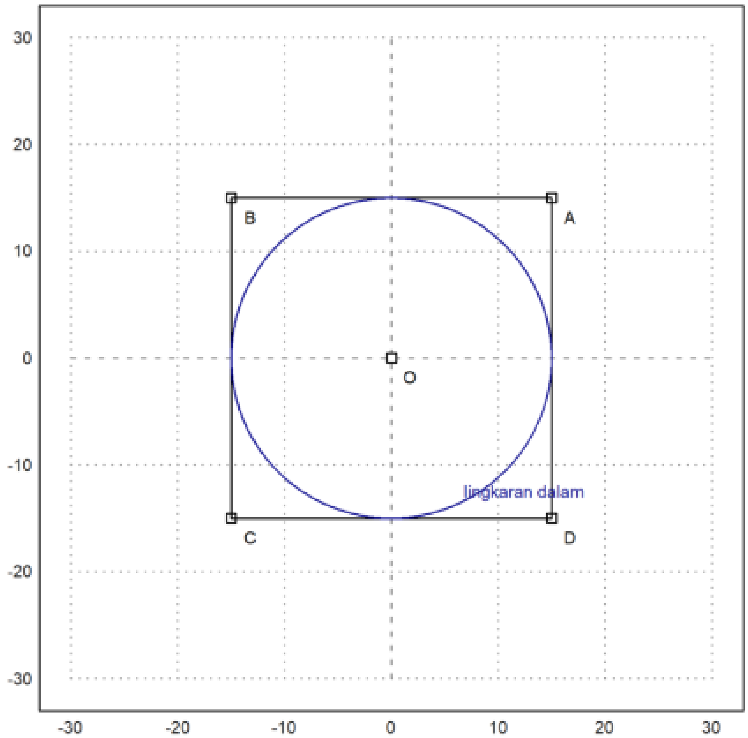


Dari grafik atau gambar diatas terlihat bahwa pada segi-4 garis singgung, keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titk yaitu
titik O(0,0).

c. Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.

```
>setPlotRange(30);
>O = [0, 0];
>color(1); plotPoint(O, "O");
>A = [15, 15];
>B = [-15, 15];
>C = [-15, -15];
>D = [15, -15];
>color(1); plotPoint(A, "A");
>color(1); plotPoint(B, "B");
>color(1); plotPoint(C, "C");
>color(1); plotPoint(D, "D");
>color(1); plotSegment(A, B, "");
>color(1); plotSegment(B, C, "");
>color(1); plotSegment(C, D, "");
>color(1); plotSegment(D, A, "");
```

```
>circIn = circleWithCenter(O, 15);
>color(4); plotCircle(circIn, "lingkaran dalam"):
```



d. Menunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang
berhadapan sama.

- sisi AB dengan sisi CD

```
>AB = distance(A, B);
>CD = distance(C, D);
>AB * CD
```

```
900
```

sisi AD dengan sisi BC

```
>AD = distance(A, D);
>BC = distance(B, C);
>AD * BC
```

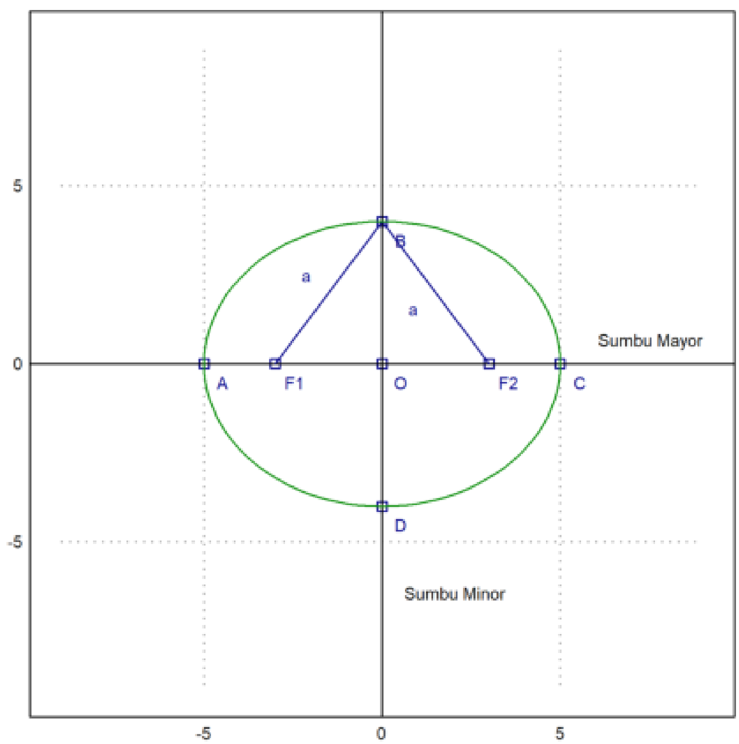
```
900
```

Didapatkan bahwa AB*CD = AD*BC atau hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

---

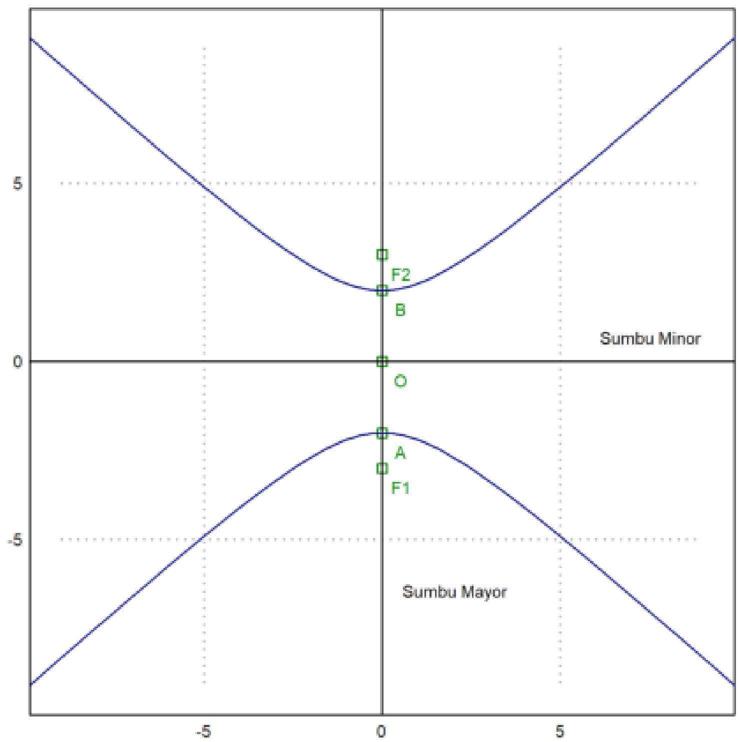
4. Menggambar Ellips dengan titik fokus F1(-3,0) dan F2(3,0)

```
>setPlotRange(9);
>color(4);
>O = [0, 0]; plotPoint(O);
>F1 = [-3, 0]; plotPoint(F1);
>F2 = [3, 0]; plotPoint(F2);
>A = [-5, 0]; plotPoint(A);
>B = [0, 4]; plotPoint(B);
>C = [5, 0]; plotPoint(C);
>D = [0, -4]; plotPoint(D);
>color(1);
>sbMayor = lineThrough(A, C); plotLine(sbMayor, ""); plotLabel("Sumbu Mayor", [7, 0.1]);
>sbMinor = lineThrough(B, D); plotLine(sbMinor, ""); plotLabel("Sumbu Minor", [1.5, -7]);
>color(4);
>plotSegment(F1, B, "a");
>plotSegment(F2, B, "a");
>color(3);
>u = linspace(-2pi,2pi,200); ...
>x = 5*sin(u); y = 4*cos(u); ...
>aspect(1); plot2d(x, y, >add):
```



5. Menggambar hiperbola dengan titik fokus yaitu di F1(0,-2) dan F2(0,2)

```
>setPlotRange(9);
>color(3);
>O = [0, 0]; plotPoint(O);
>F1 = [0, -3]; plotPoint(F1);
>F2 = [0, 3]; plotPoint(F2);
>A = [0, -2]; plotPoint(A);
>B = [0, 2]; plotPoint(B);
>color(1);
>sbMayor = lineThrough(B, D); plotLine(sbMayor, ""); plotLabel("Sumbu Mayor", [1.5, -7]);
>sbMinor = lineWithDirection(O, [1, 0]); plotLine(sbMinor, ""); plotLabel("Sumbu Minor", [
>color(4);
>u = linspace(-2pi,2pi,200); ...
>y = 2*sec(u); x = sqrt(5)*tan(u); ...
>aspect(1); plot2d(x, y, >add):
```



Beberapa soal/masalah yang menarik dari buku

1. Diberikan dua garis yang saling berpotongan yaitu garis AB dan CD. Garis AB melalui titik A(-3,4) dan titik B(4,0), sedangkan garis CD melalui titik C(-1,0) dan titik D(1,5). Tentukan koordinat titik potong pada kedua garis tersebut!

```
>setPlotRange(-6,6,-6,6); // menggambar bidang kartesius
```

Mendefinisikan setiap titik koodinat yang diketahui:
garis AB: titik A(-3,4) dan titik B(4,0)
garis CD: titik C(-1,0) dan titik D(1,5)

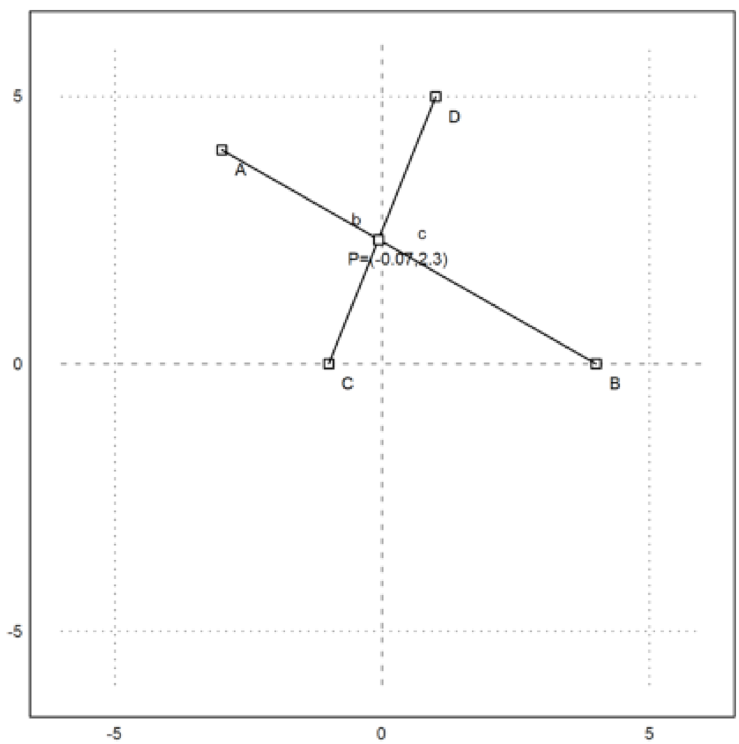
```
>A=[-3,4]; plotPoint(A,"A");
>B=[4,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[-1,0]; plotPoint(C,"C");
>D=[1,5]; plotPoint(D,"D");
```

Mendefinisikan dan Menggambar Garis AB dan CD

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB menggambar garis c dan b
>plotSegment(C,D,"b"); // b=CD
>lineThrough(A,B); // garis yang melalui titik A dan titik B
>lineThrough(C,D); // garis yang melalui titik C dan titik D
```

Menentukan titik potong kedua garis:
Misalkan:
Titik potong garis AB dan garis CD = P

```
>P=lineIntersection(lineThrough(A,B),lineThrough(C,D));
>plotPoint(P,value=1):
```



=> Diperoleh titik P(-0.07,2.3)
Maka, koordinat titik potong garis AB dan garis CD adalah (-0.07,2.3)

2. Tentukan persamaan garis yang melalui titik potong x+2y=5 dan 2x-3y=-4 dengan gradien 3! Lalu Sketsakan!
Diketahui:

$$g := x + 2y = 5$$

$$h := 2x - 3y = -4$$

$$m = 3$$

Ditanya:
Persamaan garis yang melalui titik potong kedua garis dengan m=3?
Jawab:
Akan ditentukan persamaan keluarga garis yang melalui titik potong dua garis yang diberikan.
Persamaan garis :

$$Ax + By + C = 0$$

$$g := A1x + B1y + C1 = 0$$

$$h := A2x + B2y + C2 = 0$$

Maka, akan terbentuk persamaan:

$$g + K.h = 0$$

$$<=> (A1x + B1y + C1) + K(A2x + B2y + C2) = 0$$

$$<=> (A1 + K.A2)x + (B1 + K.B2)y + C1 + K.C2 = 0$$

Akan ditentukan nilai K, melalui gradien:

$$g + K.h = 0$$

$$(x + 2y - 5) + K(2x - 3y + 4) = 0$$

$$(1 + 2K)x + (2 - 3K)y + (-5 + 4K) = 0$$

Persamaan garis dengan gradien 3:

$$m = 3$$

$$-\frac{1 + 2K}{2 - 3K} = 3$$

$$<=> 6 - 9K = -1 - 2K$$

$$<=> 7K = 7$$

$$<=> K = 1$$

Maka, diperoleh Persamaan garis yang melalui titik potong kedua garis dengan gradien 3:

$$y = mx - K$$

$$y = 3x - 1$$

$$3x - y - 1 = 0$$

```
>setPlotRange(-5,5,-5,5);
```

Persamaan garis

$$x + 2y = 5$$

Titiknya :

$$x = 0 \ => y = \frac{5}{2}$$

$$y = 0 \ => x = 5$$

```
>A=[0,2.5]; plotPoint(A);
>B=[5,0]; plotPoint(B);
>G=lineThrough(A, B); // garis melalui A dan B
>plotLine(G, "G");
```

Persamaan garis

$$2x - 3y = -4$$

Titiknya :

$$x = 0 \ => y = \frac{4}{3}$$

$$y = 0 \ => x = -2$$

```
>C=[0,1.33]; plotPoint(C);
>D=[-2,0]; plotPoint(D);
>H=lineThrough(C, D); // garis melalui C dan D
>plotLine(H, "H");
```

Persamaan garis yang melalui titik potong garis G dan H dengan gradien 3

$$3x - y = 1$$

Titiknya :

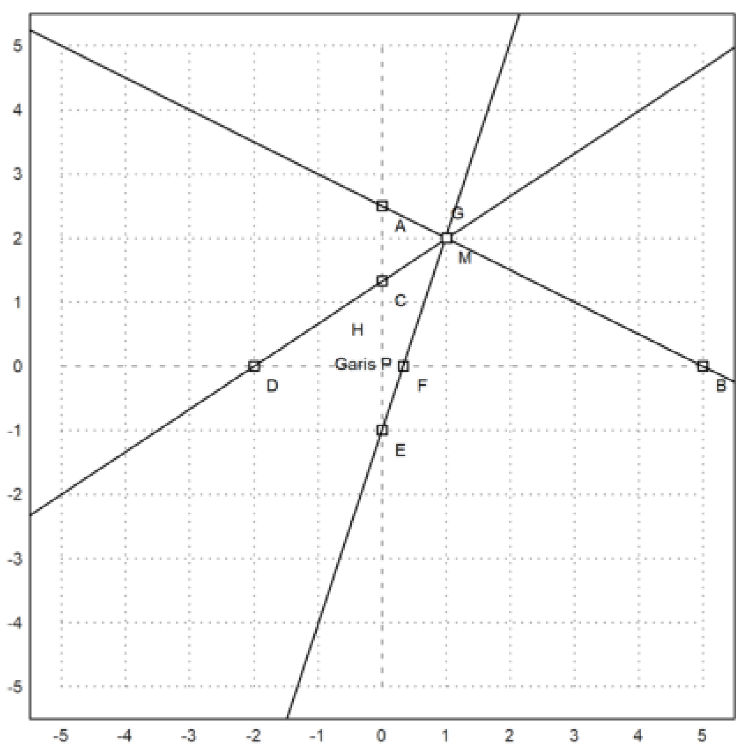
$$x = 0 \;=> y = -1$$

$$y = 0 \;=> x = \frac{1}{3}$$

```
>E=[0,-1]; plotPoint(E);
>F=[0.33,0]; plotPoint(F);
```

Misalkan persamaan garis hasilnya adalah P

```
>P=lineThrough(E, F); // garis melalui E dan F
>plotLine(P, "Garis P     ");
>M=lineIntersection(G,H);
>plotPoint(M):
```



3. Lukislah lingkaran melalui ketiga titik berikut, kemudian tentukan persamaannya.
(0,4); (0,-4); (6,0)

```
>setPlotRange(-7,7,-7,7);
>A = [0,4]; B = [0,-4]; C = [6,0]; // Mendefinisikan titik-titiknya
>&powerdisp:true;
>p1 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=0,y=4]
```

```
16 + 4 B + C = 0
```

```
>p2 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=0,y=-4]
```

```
16 - 4 B + C = 0
```

```
>p3 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=6,y=0]
```

```
36 + 6 A + C = 0
```

```
>$p2 + p1
```

$$32 + 2\,C = 0$$

```
>$p1 - p2
```

$$8\,B = 0$$

Diperoleh C = 16 dan B = 0
Lalu, akan di subsitusikan ke salah satu persamaan p3

```
>nilaiA &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [C=16,B=0,x=6,y=0]
```

```
52 + 6 A = 0
```

```
>&float(-26/3)
```

```
                   - 8.666666666666666
```

Diperoleh A = 8,66
Sehingga, akan diperoleh persamaan lingkaran

```
>pl &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [A=-8.66,B=0,C=16]
```

```
                              2     2
                 16 - 8.66 x + x  + y  = 0
```

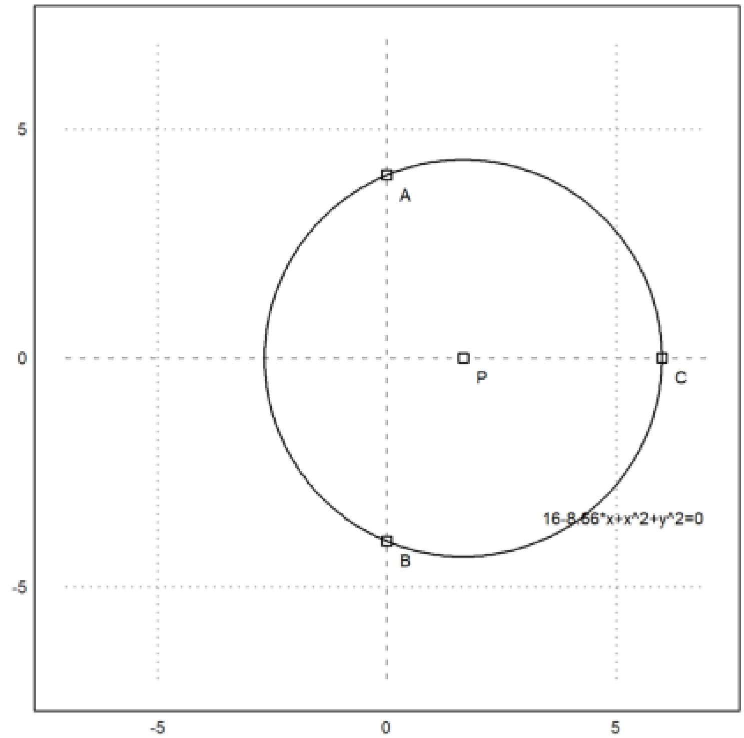
Maka, Persamaan lingkaran yang melalui titik (0,4), (0,-4), dan (6,0) adalah:

$$16 - 8.66x + x^2 + y^2 = 0$$

```
>plotPoint(A);
>plotPoint(B);
>plotPoint(C);
>g = circleThrough(A,B,C);
>R = getCircleRadius(g);
>P = getCircleCenter(g)
```

```
  [1.66667,  0]
```

```
>plotPoint(P,"P")
>plotCircle(g,"16-8.66*x+x^2+y^2=0"):
```


5
0
-5
-5
0
5
A
P
C
B
16-8.66*x+x^2+y^2=0

BAB 7

KB PEKAN 13-14; MENGGUNAKAN EMT UNTUK STATISTIKA

EMT untuk Statistika

Dalam notebook ini, kami mendemonstrasikan plot statistik utama, pengujian, dan distribusi di Euler.

Mari kita mulai dengan beberapa statistik deskriptif. Ini bukan pengantar statistik. Jadi, Anda mungkin memerlukan beberapa latar belakang untuk memahami detailnya.

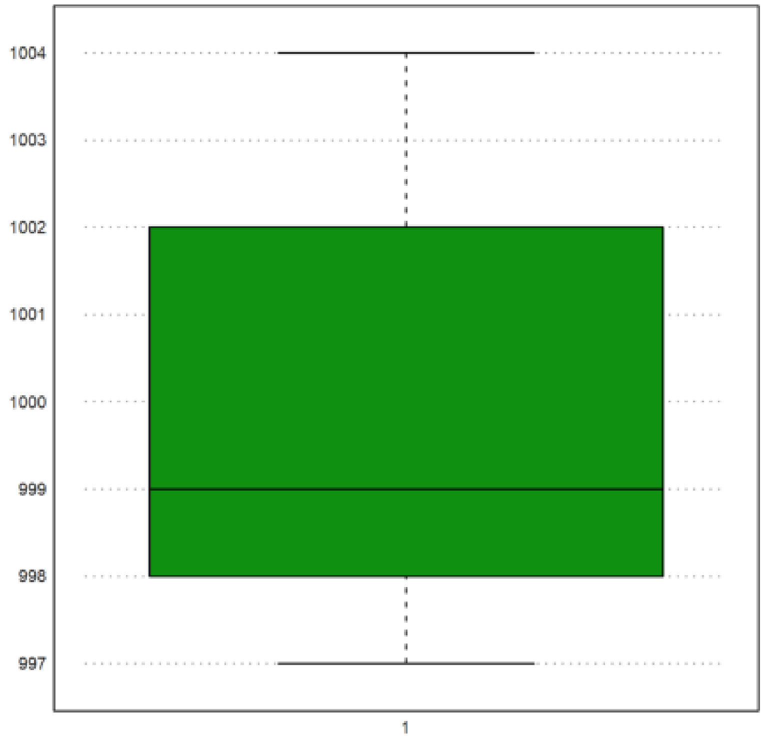
Asumsikan pengukuran berikut. Kami ingin menghitung nilai rata-rata dan standar deviasi yang diukur.

```
>M=[1000,1004,998,997,1002,1001,998,1004,998,997]; ...
>mean(M), dev(M),
```

```
999.9
2.72641400622
```

Kita dapat memplot plot kotak-dan-kumis untuk data. Dalam kasus kami tidak ada outlier.

```
>boxplot(M):
```



Kami menghitung probabilitas bahwa suatu nilai lebih besar dari 1005, dengan asumsi nilai terukur dan distribusi normal.

Semua fungsi untuk distribusi di Euler diakhiri dengan ...dis dan menghitung distribusi probabilitas kumulatif (CPF).

$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2} \, dt.$$

Kami mencetak hasilnya dalam % dengan akurasi 2 digit menggunakan fungsi cetak.

```
>print((1-normaldis(1005,mean(M),dev(M)))*100,2,unit=" %")
```

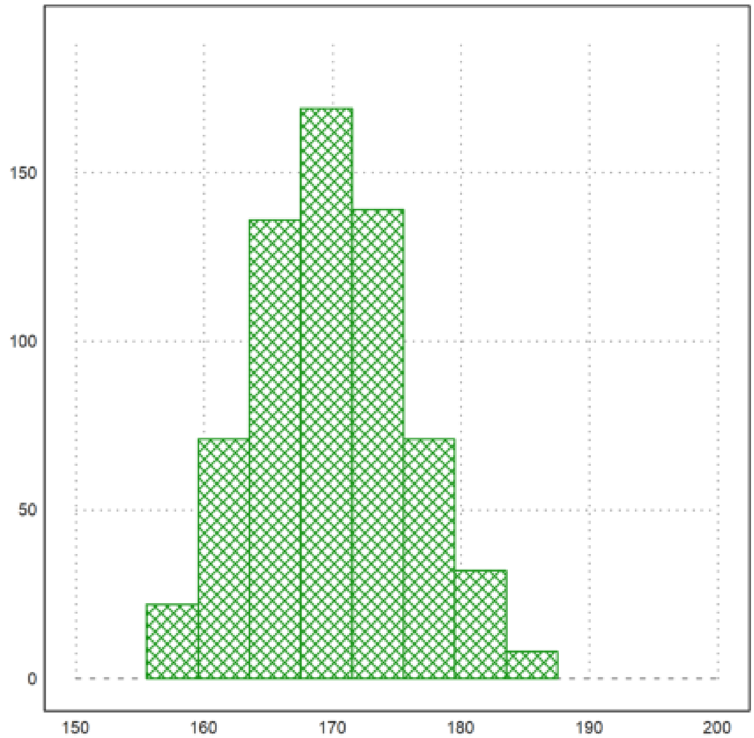
```
        3.07 %
```

Untuk contoh berikutnya, kami mengasumsikan jumlah pria berikut dalam rentang ukuran yang diberikan.

```
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];
```

Berikut adalah plot distribusinya.

```
>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style="\/"):
```



Kita bisa memasukkan data mentah tersebut ke dalam sebuah tabel.

Tabel adalah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal jangkauan, akhir jangkauan, jumlah orang dalam jangkauan.

Tabel dapat dicetak dengan header. Kami menggunakan vektor string untuk mengatur header.

```
>T:=r[1:8]' | r[2:9]' | v'; writetable(T,labc=["from","to","count"])
```

```
     from        to     count
    155.5     159.5        22
    159.5     163.5        71
    163.5     167.5       136
    167.5     171.5       169
    171.5     175.5       139
    175.5     179.5        71
    179.5     183.5        32
    183.5     187.5         8
```

Jika kita membutuhkan nilai rata-rata dan statistik lain dari ukuran, kita perlu menghitung titik tengah rentang. Kita dapat menggunakan dua kolom pertama dari tabel kita untuk ini.

Simbol "|" digunakan untuk memisahkan kolom, fungsi "writetable" digunakan untuk menulis tabel, dengan opsi "labc" adalah untuk menentukan header kolom.

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // titik tengah setiap interval
```

```
        157.5
        161.5
        165.5
        169.5
```

```
173.5
177.5
181.5
185.5
```

Tetapi lebih mudah, untuk melipat rentang dengan vektor [1/2.1/2].

```
>M=fold(r,[0.5,0.5])
```

```
[157.5,  161.5,  165.5,  169.5,  173.5,  177.5,  181.5,  185.5]
```

Sekarang kita dapat menghitung mean dan deviasi sampel dengan frekuensi yang diberikan.

```
>{m,d}=meandev(M,v); m, d,
```

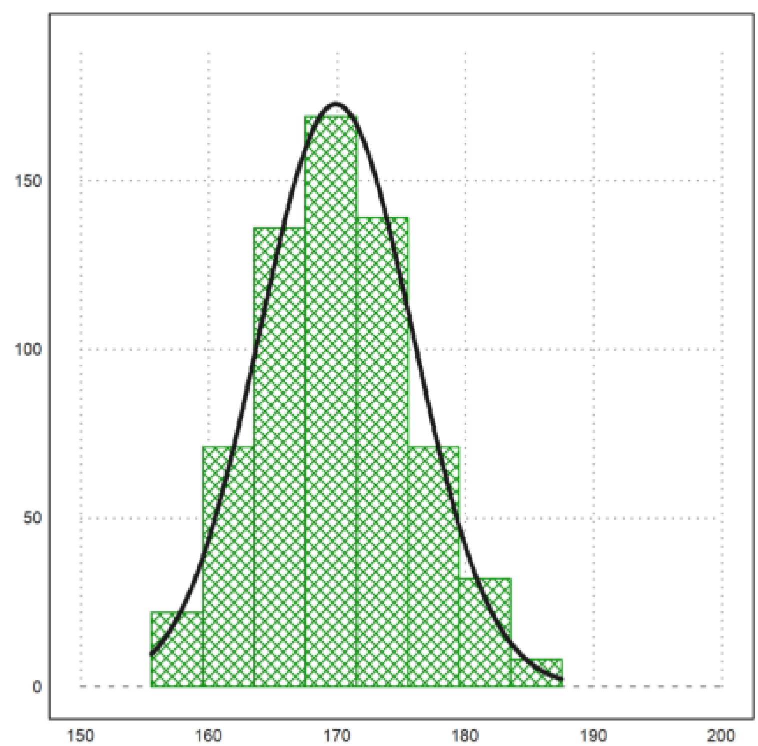
```
169.901234568
5.98912964449
```

Mari kita tambahkan distribusi normal dari nilai-nilai ke plot batang di atas. Rumus untuk distribusi normal dengan mean m dan standar deviasi d adalah:

$$y = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2d^2}}.$$

Karena nilainya antara 0 dan 1, untuk memplotnya pada bar plot harus dikalikan dengan 4 kali jumlah total data.

```
>plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...
>  xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):
```



Di direktori notebook ini Anda menemukan file dengan tabel. Data tersebut mewakili hasil survei. Berikut adalah empat baris pertama dari file tersebut. Data berasal dari buku online Jerman "Einführung in die Statistik mit R" oleh A. Handl.

```
>printfile("table.dat",4);
```

```
Person Sex Age Titanic Evaluation Tip Problem
1 m 30 n . 1.80 n
2 f 23 y g 1.80 n
3 f 26 y g 1.80 y
```

Tabel berisi 7 kolom angka atau tanda (string). Kami ingin membaca tabel dari file. Pertama, kami menggunakan terjemahan kami sendiri untuk tanda.

Untuk ini, kami mendefinisikan set tanda. Fungsi strtokens() mendapatkan vektor string token dari string yang diberikan.

```
>mf:=["m","f"]; yn:=["y","n"]; ev:=strtokens("g vg m b vb");
```

Sekarang kita membaca tabel dengan terjemahan ini.

Argumen tok2, tok4 dll. adalah terjemahan dari kolom tabel. Argumen ini tidak ada dalam daftar parameter readtable(), jadi Anda harus menyediakannya dengan ":=".

```
>{MT,hd}=readtable("table.dat",tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
>load over statistics;
```

Untuk mencetak, kita perlu menentukan set token yang sama. Kami mencetak empat baris pertama saja.

```
>writetable(MT[1:10],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

```
 Person   Sex  Age Titanic Evaluation  Tip Problem
      1     m   30       n          .  1.8       n
      2     f   23       y          g  1.8       n
      3     f   26       y          g  1.8       y
      4     m   33       n          .  2.8       n
      5     m   37       n          .  1.8       n
      6     m   28       y          g  2.8       y
      7     f   31       y         vg  2.8       n
      8     m   23       n          .  0.8       n
      9     f   24       y         vg  1.8       y
     10     m   26       n          .  1.8       n
```

Titik "." mewakili nilai-nilai, yang tidak tersedia.

Jika kita tidak ingin menentukan token untuk terjemahan terlebih dahulu, kita hanya perlu menentukan, kolom mana yang berisi token dan bukan angka.

```
>ctok=[2,4,5,7]; {MT,hd,tok}=readtable("table.dat",ctok=ctok);
```

Fungsi readtable() sekarang mengembalikan satu set token.

```
>tok
```

```
m
n
f
y
g
vg
```

Tabel berisi entri dari file dengan token yang diterjemahkan ke angka.

String khusus NA="." ditafsirkan sebagai "Not Available", dan mendapatkan NAN (bukan angka) dalam tabel. Terjemahan ini dapat diubah dengan parameter NA, dan NAval.

```
>MT[1]
```

```
[1,  1,  30,  2,  NAN,  1.8,  2]
```

Berikut isi tabel dengan angka yang belum diterjemahkan.

```
>writetable(MT,wc=5)
```

```
    1    1   30    2    .  1.8    2
    2    3   23    4    5  1.8    2
    3    3   26    4    5  1.8    4
    4    1   33    2    .  2.8    2
    5    1   37    2    .  1.8    2
    6    1   28    4    5  2.8    4
    7    3   31    4    6  2.8    2
    8    1   23    2    .  0.8    2
    9    3   24    4    6  1.8    4
   10    1   26    2    .  1.8    2
   11    3   23    4    6  1.8    4
   12    1   32    4    5  1.8    2
   13    1   29    4    6  1.8    4
   14    3   25    4    5  1.8    4
   15    3   31    4    5  0.8    2
   16    1   26    4    5  2.8    2
   17    1   37    2    .  3.8    2
   18    1   38    4    5    .    2
   19    3   29    2    .  3.8    2
   20    3   28    4    6  1.8    2
   21    3   28    4    1  2.8    4
   22    3   28    4    6  1.8    4
   23    3   38    4    5  2.8    2
   24    3   27    4    1  1.8    4
   25    1   27    2    .  2.8    4
```

Untuk kenyamanan, Anda dapat memasukkan output readtable() ke dalam daftar.

```
>Table={{readtable("table.dat",ctok=ctok)}};
```

Menggunakan kolom token yang sama dan token yang dibaca dari file, kita dapat mencetak tabel. Kita dapat menentukan ctok, tok, dll. Atau menggunakan daftar Tabel.

```
>writetable(Table,ctok=ctok,wc=5);
```

```
  Person   Sex   Age  Titanic  Evaluation   Tip  Problem
       1     m    30        n           .   1.8        n
       2     f    23        y           g   1.8        n
       3     f    26        y           g   1.8        y
       4     m    33        n           .   2.8        n
       5     m    37        n           .   1.8        n
       6     m    28        y           g   2.8        y
       7     f    31        y          vg   2.8        n
       8     m    23        n           .   0.8        n
       9     f    24        y          vg   1.8        y
      10     m    26        n           .   1.8        n
      11     f    23        y          vg   1.8        y
      12     m    32        y           g   1.8        n
      13     m    29        y          vg   1.8        y
      14     f    25        y           g   1.8        y
      15     f    31        y           g   0.8        n
      16     m    26        y           g   2.8        n
      17     m    37        n           .   3.8        n
      18     m    38        y           g     .        n
      19     f    29        n           .   3.8        n
      20     f    28        y          vg   1.8        n
      21     f    28        y           m   2.8        y
      22     f    28        y          vg   1.8        y
      23     f    38        y           g   2.8        n
      24     f    27        y           m   1.8        y
      25     m    27        n           .   2.8        y
```

Fungsi tablecol() mengembalikan nilai kolom tabel, melewatkan setiap baris dengan nilai NAN ("." dalam file), dan indeks kolom, yang berisi nilai-nilai ini.

```
>{c,i}=tablecol(MT,[5,6]);
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak kolom dari tabel untuk tabel baru.

```
>j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok)
```

```
  Person  Evaluation         Tip
       2           g         1.8
       3           g         1.8
       6           g         2.8
       7          vg         2.8
```

```
   9          vg        1.8
  11          vg        1.8
  12           g        1.8
  13          vg        1.8
  14           g        1.8
  15           g        0.8
  16           g        2.8
  20          vg        1.8
  21           m        2.8
  22          vg        1.8
  23           g        2.8
  24           m        1.8
```

Tentu saja, kita perlu mengekstrak tabel itu sendiri dari daftar Tabel dalam kasus ini.

```
>MT=Table[1];
```

Tentu saja, kita juga dapat menggunakannya untuk menentukan nilai mean kolom atau nilai statistik lainnya.

```
>mean(tablecol(MT,6))
```

```
2.175
```

Fungsi getstatistics() mengembalikan elemen dalam vektor, dan jumlahnya. Kami menerapkannya pada nilai "m" dan "f" di kolom kedua tabel kami.

```
>{xu,count}=getstatistics(tablecol(MT,2)); xu, count,
```

```
[1,  3]
[12,  13]
```

Kami dapat mencetak hasilnya dalam tabel baru.

```
>writetable(count',labr=tok[xu])
```

```
   m        12
   f        13
```

Fungsi selecttable() mengembalikan tabel baru dengan nilai dalam satu kolom yang dipilih dari vektor indeks. Pertama kita mencari indeks dari dua nilai kita di tabel token.

```
>v:=indexof(tok,["g","vg"])
```

```
[5,  6]
```

Sekarang kita dapat memilih baris tabel, yang memiliki salah satu nilai dalam v di baris ke-5.

```
>MT1:=MT[selectrows(MT,5,v)]; i:=sortedrows(MT1,5);
```

Sekarang kita dapat mencetak tabel, dengan nilai yang diekstrak dan diurutkan di kolom ke-5.

```
>writetable(MT1[i],labc=hd,ctok=ctok,tok=tok,wc=7);
```

```
 Person     Sex     Age Titanic Evaluation     Tip Problem
      2       f      23       y          g     1.8       n
      3       f      26       y          g     1.8       y
      6       m      28       y          g     2.8       y
     18       m      38       y          g       .       n
     16       m      26       y          g     2.8       n
     15       f      31       y          g     0.8       n
     12       m      32       y          g     1.8       n
     23       f      38       y          g     2.8       n
     14       f      25       y          g     1.8       y
      9       f      24       y         vg     1.8       y
      7       f      31       y         vg     2.8       n
     20       f      28       y         vg     1.8       n
     22       f      28       y         vg     1.8       y
     13       m      29       y         vg     1.8       y
     11       f      23       y         vg     1.8       y
```

Untuk statistik berikutnya, kami ingin menghubungkan dua kolom tabel. Jadi kami mengekstrak kolom 2 dan 4 dan mengurutkan tabel.

```
>i=sortedrows(MT,[2,4]);  ...
>  writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',ctok=[1,2],tok=tok)
```

```
          m          n
          m          n
          m          n
          m          n
          m          n
          m          n
          m          n
          m          y
          m          y
          m          y
          m          y
          m          y
          f          n
          f          y
          f          y
          f          y
          f          y
          f          y
          f          y
          f          y
          f          y
          f          y
          f          y
```

```
f          y
f          y
```

Dengan getstatistics(), kita juga dapat menghubungkan hitungan dalam dua kolom tabel satu sama lain.

```
>MT24=tablecol(MT,[2,4]); ...
>{xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1],MT24[2]); ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2])
```

```
           n          y
m          7          5
f          1         12
```

Sebuah tabel dapat ditulis ke file.

```
>filename="test.dat"; ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2],file=filename);
```

Kemudian kita bisa membaca tabel dari file.

```
>{MT2,hd,tok2,hdr}=readtable(filename,>clabs,>rlabs); ...
>writetable(MT2,labr=hdr,labc=hd)
```

```
           n          y
m          7          5
f          1         12
```

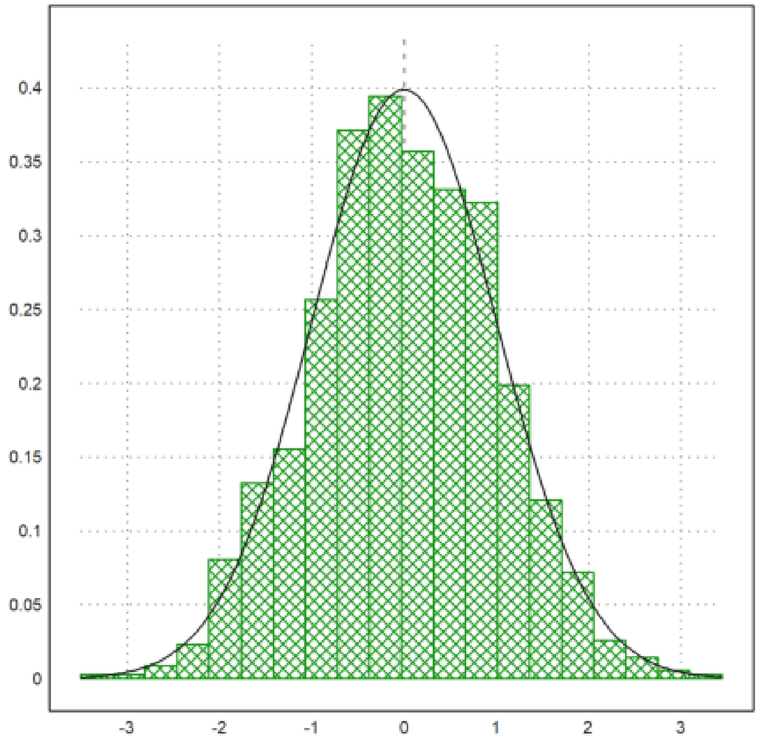
Dan hapus filenya.

```
>fileremove(filename);
```

Distribusi

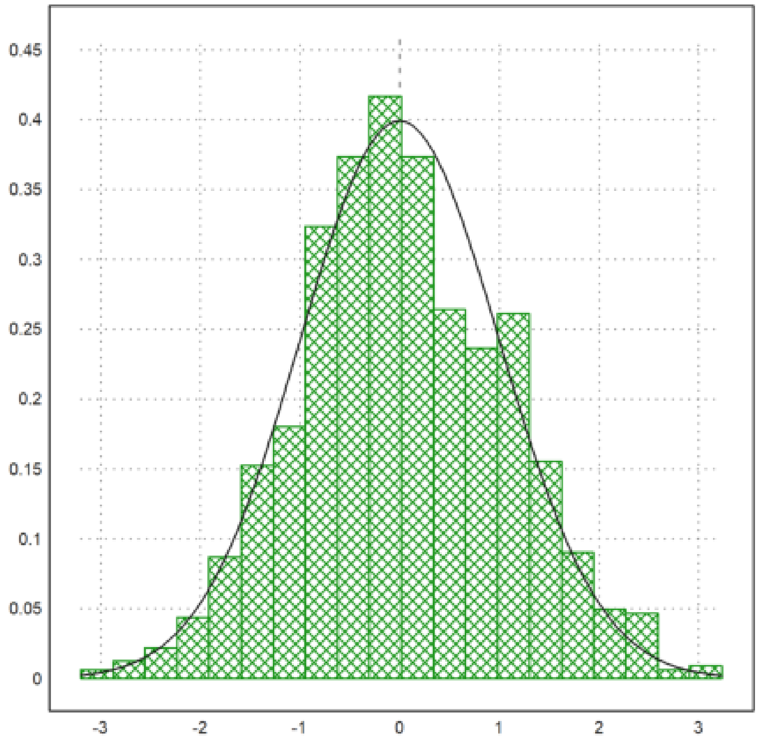
Dengan plot2d, ada metode yang sangat mudah untuk memplot distribusi data eksperimen.

```
>p=normal(1,1000); //1000 sampel acak terdistribusi normal p
>plot2d(p,distribution=20,style="\/"); // plot sampel acak p
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1): // tambahkan plot distribusi normal standar
```



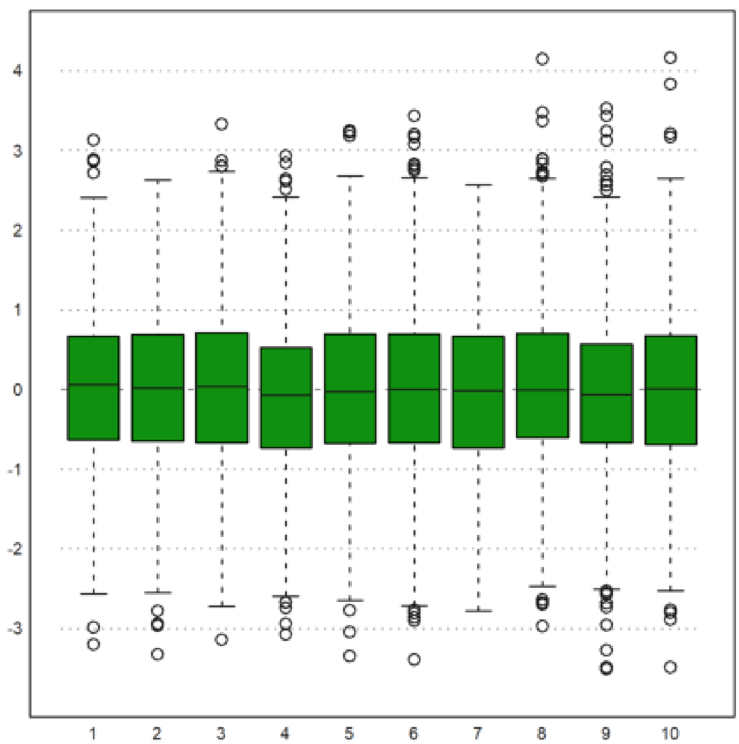
Harap dicatat perbedaan antara plot batang (sampel) dan kurva normal (distribusi nyata). Masukkan kembali tiga perintah untuk melihat hasil pengambilan sampel lainnya.

```
>p=normal(1,1000);
>plot2d(p,distribution=20,style="\/");
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1):
```



Berikut adalah perbandingan 10 simulasi 1000 nilai terdistribusi normal menggunakan apa yang disebut plot kotak. Plot ini menunjukkan median, kuartil 25% dan 75%, nilai minimal dan maksimal, dan outlier.

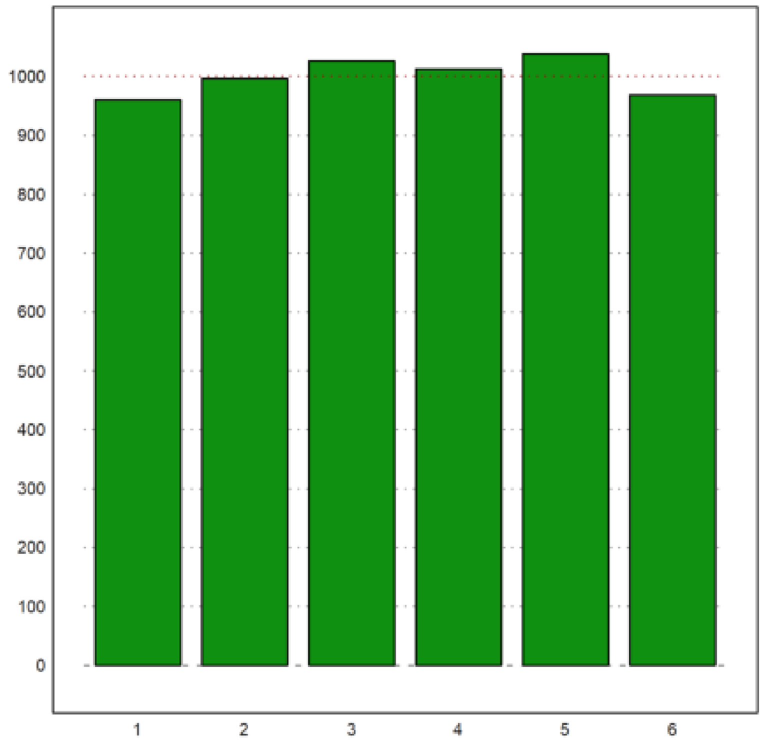
```
>p=normal(10,1000); boxplot(p):
```



Untuk menghasilkan bilangan bulat acak, Euler memiliki inrandom. Mari kita simulasikan lemparan dadu dan plot distribusinya.

Kami menggunakan fungsi getmultiplicities(v,x), yang menghitung seberapa sering elemen v muncul di x. Kemudian kita plot hasilnya menggunakan columnplot().

```
>k=intrandom(1,6000,6);  ...
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,k));  ...
>ygrid(1000,color=red):
```



Sementara intrandom(n,m,k) mengembalikan bilangan bulat terdistribusi seragam dari 1 ke k, dimungkinkan untuk menggunakan distribusi bilangan bulat lainnya dengan randpint().

Dalam contoh berikut, probabilitas untuk 1,2,3 berturut-turut adalah 0,4,0,1,0,5.

```
>randpint(1,1000,[0.4,0.1,0.5]); getmultiplicities(1:3,%)
```

```
[394,  107,  499]
```

Euler dapat menghasilkan nilai acak dari lebih banyak distribusi. Coba lihat referensinya.

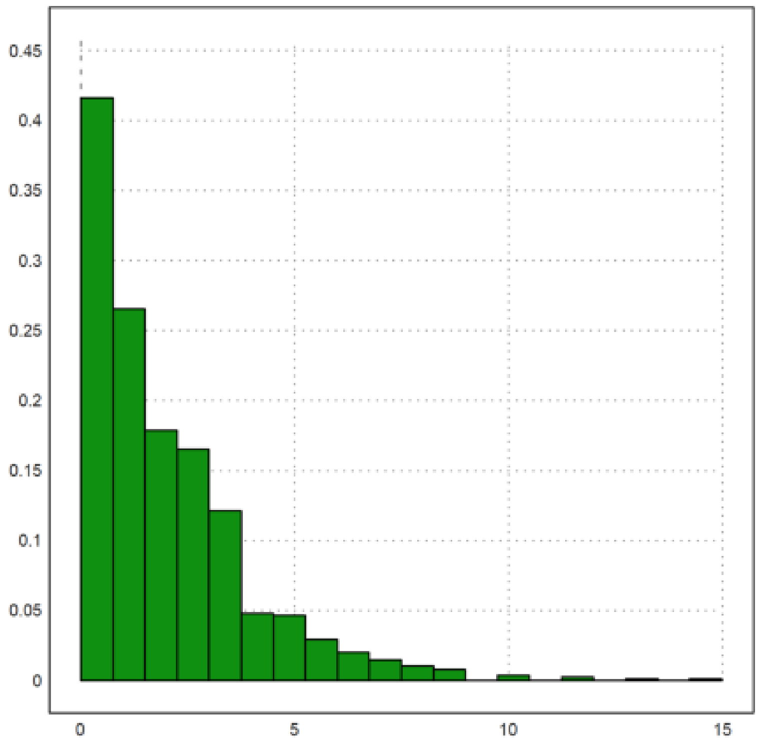
Misalnya, kami mencoba distribusi eksponensial. Sebuah variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi eksponensial, jika PDF-nya diberikan oleh

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

dengan parameter

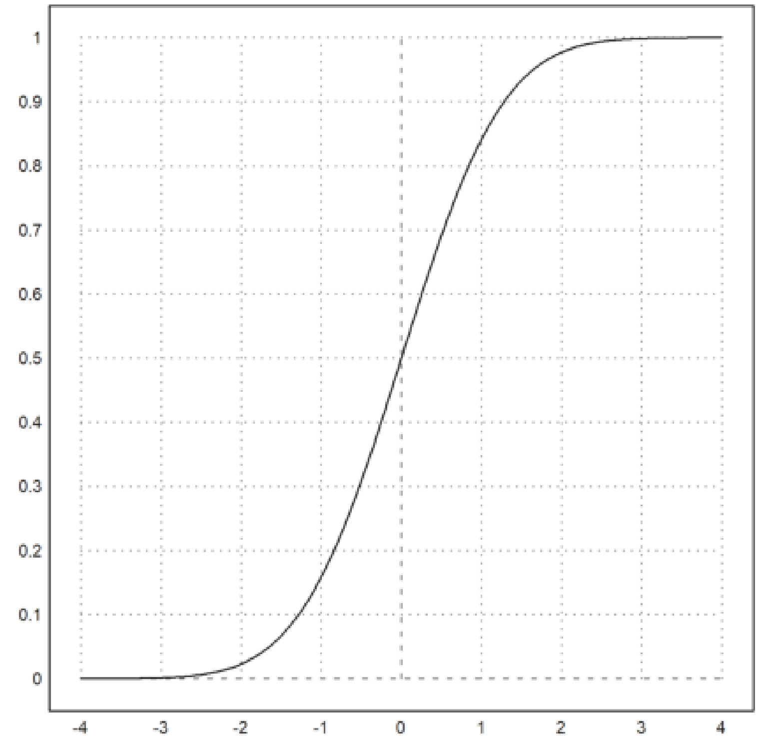
$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \text{ adalah mean, dan dilambangkan dengan } X \sim \text{Exponential}(\lambda).$$

```
>plot2d(randexponential(1,1000,2),>distribution):
```



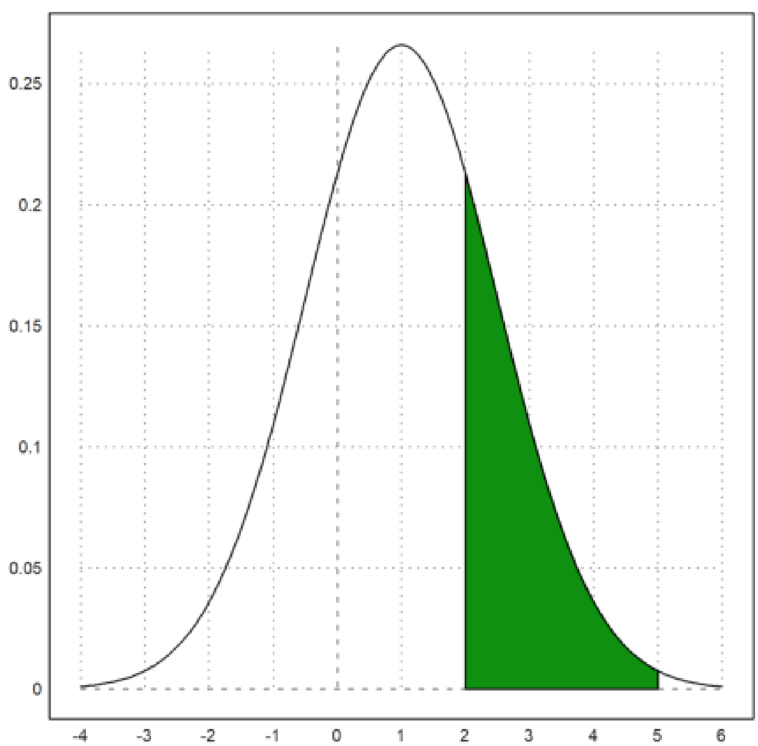
Untuk banyak distribusi, Euler dapat menghitung fungsi distribusi dan balikannya.

```
>plot2d("normaldis",-4,4):
```



Berikut ini adalah salah satu cara untuk memplot kuantil.

```
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",-4,6);  ...
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",a=2,b=5,>add,>filled):
```



$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2}\ dt.$$

Peluang berada di area hijau adalah sebagai berikut.

```
>normaldis(5,1,1.5)-normaldis(2,1,1.5)
```

```
0.248662156979
```

Ini dapat dihitung secara numerik dengan integral berikut.

$$\int_{2}^{5} \frac{1}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{1.5})^2}\ dx.$$

```
>gauss("qnormal(x,1,1.5)",2,5)
```

```
0.248662156979
```

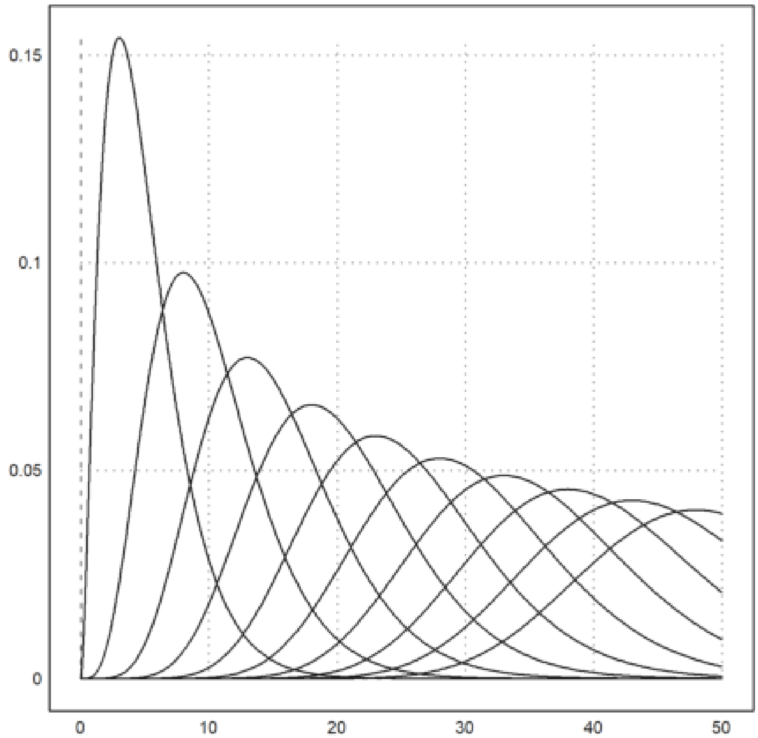
Mari kita bandingkan distribusi binomial dengan distribusi normal mean dan deviasi yang sama. Fungsi invbindis() memecahkan interpolasi linier antara nilai integer.

```
>invbindis(0.95,1000,0.5), invnormaldis(0.95,500,0.5*sqrt(1000))
```

```
525.516721219
526.007419394
```

Fungsi qchidis() adalah densitas dari distribusi chi-kuadrat. Seperti biasa, Euler memetakan vektor ke fungsi ini. Dengan demikian kita mendapatkan plot semua distribusi chi-kuadrat dengan derajat 5 sampai 30 dengan mudah dengan cara berikut.

```
>plot2d("qchidis(x,(5:5:50)')",0,50):
```



Euler memiliki fungsi yang akurat untuk mengevaluasi distribusi. Mari kita periksa chidis() dengan integral.

Penamaan mencoba untuk konsisten. Misalnya.,

- distribusi chi-kuadrat adalah chidis(),
- fungsi balikannya adalah invchidis(),
- kepadatannya adalah qchidis().

Komplemen dari distribusi (ekor atas) adalah chicdis().

```
>chidis(1.5,2), integrate("qchidis(x,2)",0,1.5)
```

```
0.527633447259
0.527633447259
```

Distribusi Diskrit

Untuk menentukan distribusi diskrit Anda sendiri, Anda dapat menggunakan metode berikut.

Pertama kita atur fungsi distribusinya.

```
>wd = 0|((1:6)+[-0.01,0.01,0,0,0,0])/6
```

```
[0,  0.165,  0.335,  0.5,  0.666667,  0.833333,  1]
```

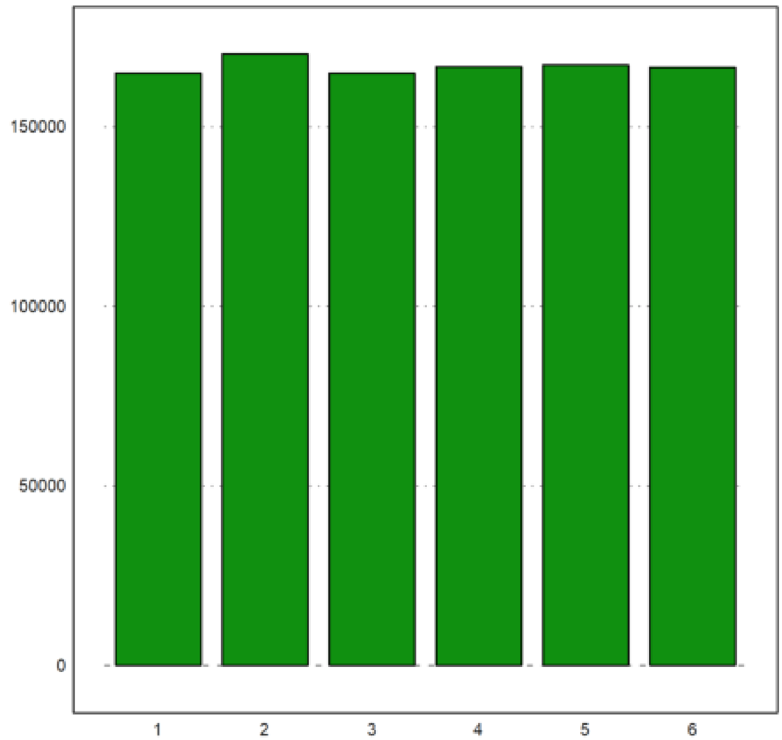
Artinya dengan probabilitas wd[i+1]-wd[i] kita menghasilkan nilai acak i.

Ini adalah distribusi yang hampir seragam. Mari kita mendefinisikan generator nomor acak untuk ini. Fungsi find(v,x) menemukan nilai x dalam vektor v. Fungsi ini juga berfungsi untuk vektor x.

```
>function wrongdice (n,m) := find(wd,random(n,m))
```

Kesalahannya sangat halus sehingga kita hanya melihatnya dengan sangat banyak iterasi.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,wrongdice(1,1000000))):
```



Berikut adalah fungsi sederhana untuk memeriksa distribusi seragam dari nilai 1...K dalam v. Kami menerima hasilnya, jika untuk semua frekuensi

$$\left|f_i - \frac{1}{K}\right| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

```
>function checkrandom (v, delta=1) ...
```

```
K=max(v); n=cols(v);
fr=getfrequencies(v,1:K);
return max(fr/n-1/K)<delta/sqrt(n);
endfunction
```

Memang fungsi menolak distribusi seragam.

```
>checkrandom(wrongdice(1,1000000))
```

0

Dan ia menerima generator acak bawaan.

```
>checkrandom(intrandom(1,1000000,6))
```

```
1
```

Kita dapat menghitung distribusi binomial. Pertama ada binomialsum(), yang mengembalikan probabilitas i atau kurang hit dari n percobaan.

```
>bindis(410,1000,0.4)
```

```
0.751401349654
```

Fungsi Balikan Beta digunakan untuk menghitung interval kepercayaan Clopper-Pearson untuk parameter p. Tingkat default adalah alfa.
Arti interval ini adalah jika p berada di luar interval, hasil pengamatan 410 dalam 1000 jarang terjadi.

```
>clopperpearson(410,1000)
```

```
[0.37932,  0.441212]
```

Perintah berikut adalah cara langsung untuk mendapatkan hasil di atas. Tetapi untuk n besar, penjumlahan langsung tidak akurat dan lambat.

```
>p=0.4; i=0:410; n=1000; sum(bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i))
```

```
0.751401349655
```

Omong-omong, invbinsum() menghitung balikan dari binomialsum().

```
>invbindis(0.75,1000,0.4)
```

```
409.932733047
```

Di Bridge, kami mengasumsikan 5 kartu yang beredar (dari 52) di dua tangan (26 kartu). Mari kita hitung probabilitas distribusi yang lebih buruk dari 3:2 (misalnya 0:5, 1:4, 4:1 atau 5:0).

```
>2*hypergeomsum(1,5,13,26)
```

```
0.321739130435
```

Ada juga simulasi distribusi multinomial.

```
>randmultinomial(10,1000,[0.4,0.1,0.5])
```

```
            394           82          524
            418           92          490
            445           90          465
            403          114          483
            405           95          500
            384          107          509
            414           93          493
            419           90          491
            394          101          505
            382          103          515
```

Memplot Data

Untuk plot data, kami mencoba hasil pemilu Jerman sejak tahun 1990, diukur dalam kursi.

```
>BW := [ ...
>1990,662,319,239,79,8,17; ...
>1994,672,294,252,47,49,30; ...
>1998,669,245,298,43,47,36; ...
>2002,603,248,251,47,55,2; ...
>2005,614,226,222,61,51,54; ...
>2009,622,239,146,93,68,76; ...
>2013,631,311,193,0,63,64];
```

Untuk partai, kami menggunakan serangkaian nama.

```
>P:=["CDU/CSU","SPD","FDP","Gr","Li"];
```

Mari kita mencetak persentase dengan baik.

Pertama kita ekstrak kolom yang diperlukan. Kolom 3 sampai 7 adalah kursi masing-masing partai, dan kolom 2 adalah jumlah kursi. kolom pertama adalah tahun pemilihan.

```
>BT:=BW[,3:7]; BT:=BT/sum(BT); YT:=BW[,1]';
```

Kemudian kami mencetak statistik dalam bentuk tabel. Kami menggunakan nama sebagai tajuk kolom, dan tahun sebagai tajuk untuk baris. Lebar default untuk kolom adalah wc=10, tetapi kami lebih memilih output yang lebih padat. Kolom akan diperluas untuk label kolom, jika perlu.

```
>writetable(BT*100,wc=6,dc=0,>fixed,labc=P,labr=YT)
```

```
       CDU/CSU   SPD   FDP    Gr    Li
  1990      48    36    12     1     3
  1994      44    38     7     7     4
  1998      37    45     6     7     5
```

```
2002        41    42     8     9     0
2005        37    36    10     8     9
2009        38    23    15    11    12
2013        49    31     0    10    10
```

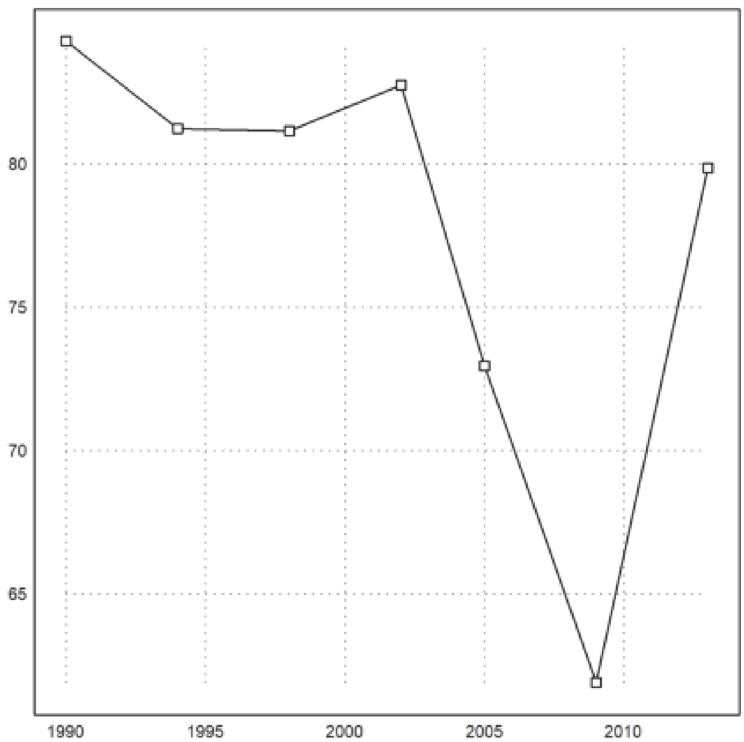
Perkalian matriks berikut mengekstrak jumlah persentase dua partai besar yang menunjukkan bahwa partai-partai kecil telah memperoleh rekaman di parlemen hingga 2009.

```
>BT1:=(BT.[1;1;0;0;0])'*100
```

```
[84.29,  81.25,  81.1659,  82.7529,  72.9642,  61.8971,  79.8732]
```

Ada juga plot statistik sederhana. Kami menggunakannya untuk menampilkan garis dan titik secara bersamaan. Alternatifnya adalah memanggil plot2d dua kali dengan >add.

```
>statplot(YT,BT1,"b"):
```

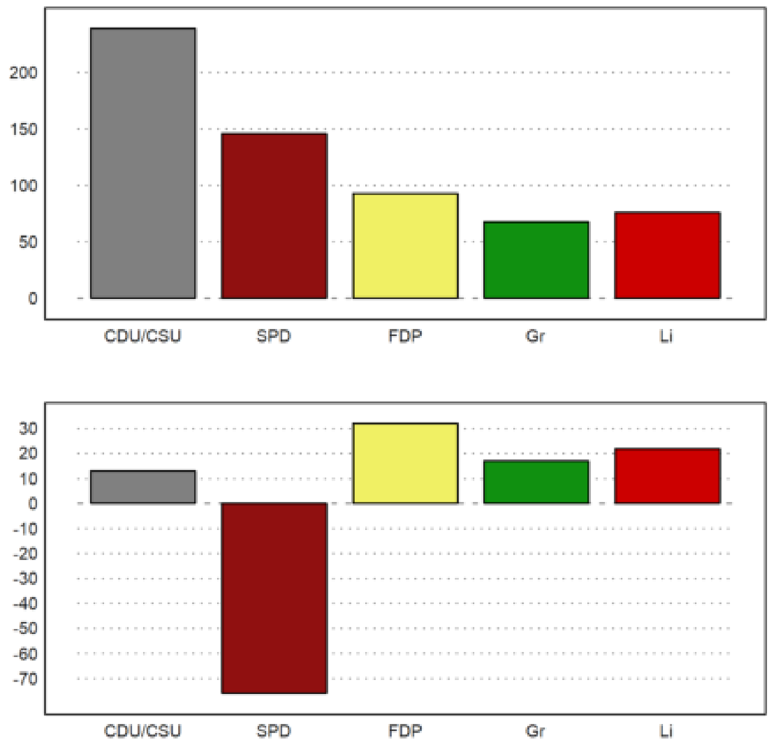


Tentukan beberapa warna untuk setiap partai.

```
>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];
```

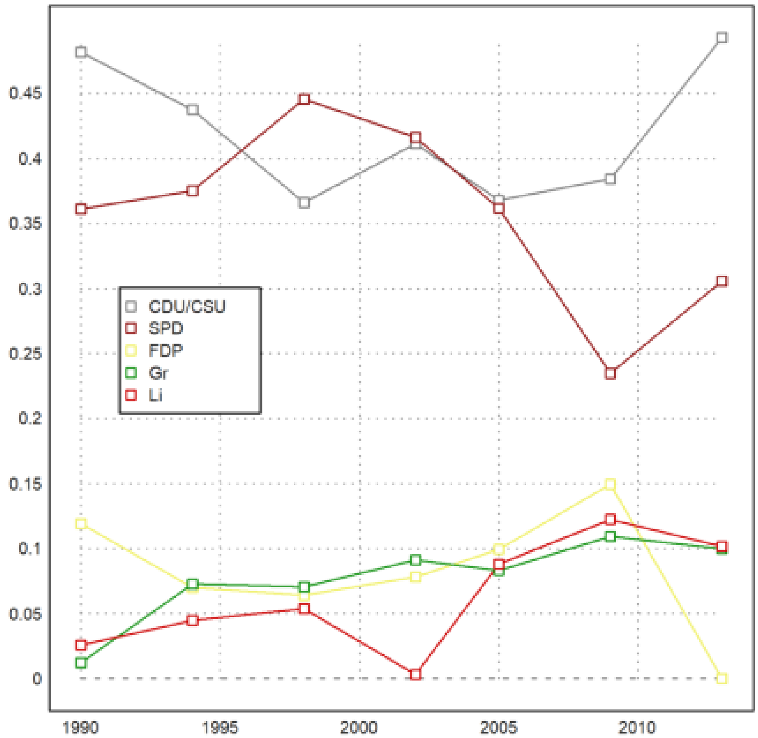
Sekarang kita dapat memplot hasil pemilu 2009 dan perubahannya menjadi satu plot menggunakan gambar. Kita dapat menambahkan vektor kolom ke setiap plot.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); columnsplot(BW[6,3:7],P,color=CP); ...
>figure(2); columnsplot(BW[6,3:7]-BW[5,3:7],P,color=CP);  ...
>figure(0):
```



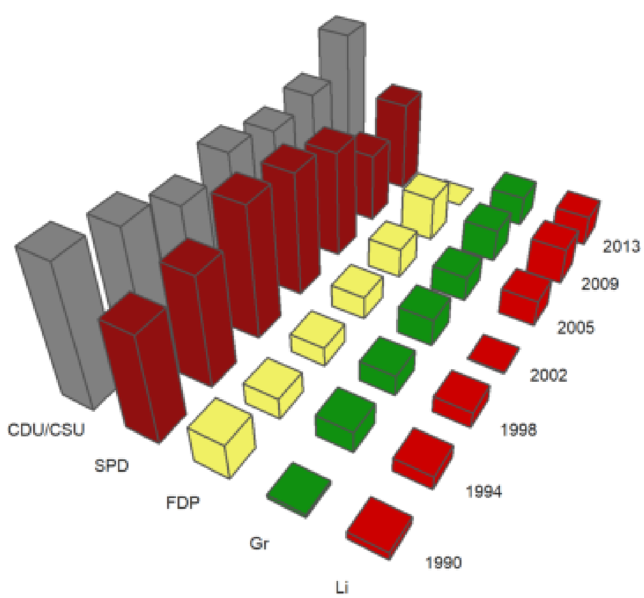
Plot data menggabungkan deretan data statistik dalam satu plot.

```
>J:=BW[,1]'; DP:=BW[,3:7]'; ...
>dataplot(YT,BT',color=CP);  ...
>labelbox(P,colors=CP,styles="[]",>points,w=0.2,x=0.3,y=0.4):
```



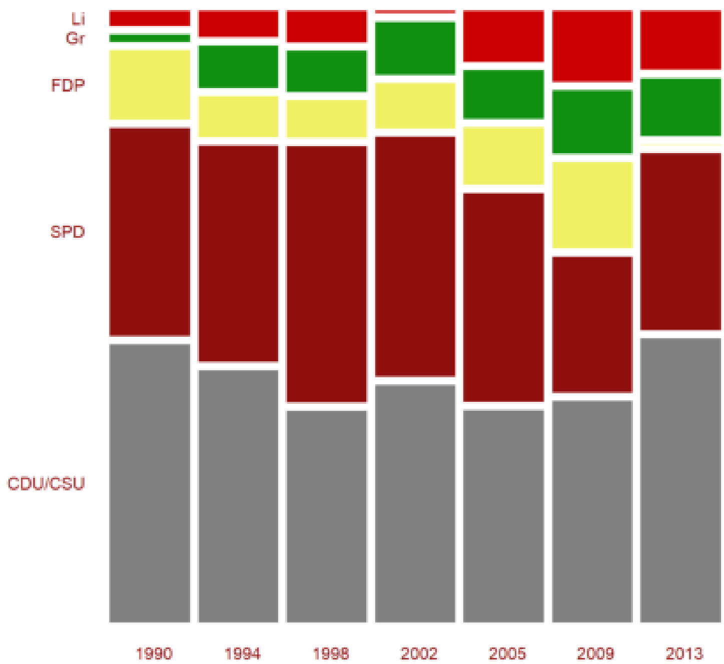
Plot kolom 3D menunjukkan baris data statistik dalam bentuk kolom. Kami menyediakan label untuk baris dan kolom. Angle adalah sudut pandang.

```
>columnsplot3d(BT,scols=P,srows=YT, ...
>  angle=30°,ccols=CP):
```



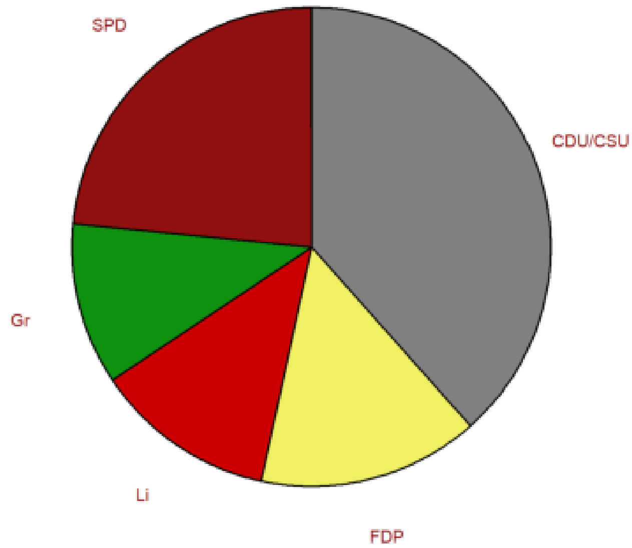
Representasi lain adalah plot mosaik. Perhatikan bahwa kolom plot mewakili kolom matriks di sini. Karena panjangnya label CDU/CSU, kami mengambil jendela yang lebih kecil dari biasanya.

```
>shrinkwindow(>smaller);  ...
>mosaicplot(BT',srows=YT,scols=P,color=CP,style="#"); ...
>shrinkwindow():
```



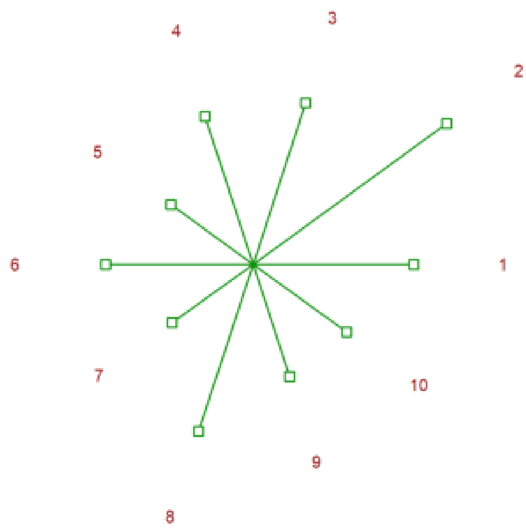
Kita juga bisa membuat diagram lingkaran. Karena hitam dan kuning membentuk koalisi, kami menyusun ulang elemen-elemennya.

```
>i=[1,3,5,4,2]; piechart(BW[6,3:7][i],color=CP[i],lab=P[i]):
```



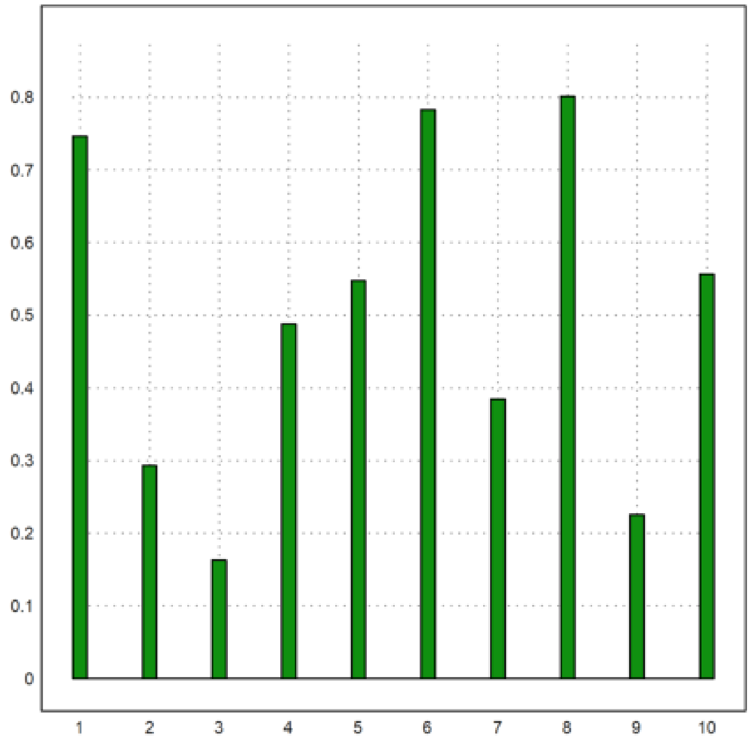
Berikut adalah jenis plot lainnya.

```
>starplot(normal(1,10)+4,lab=1:10,>rays):
```



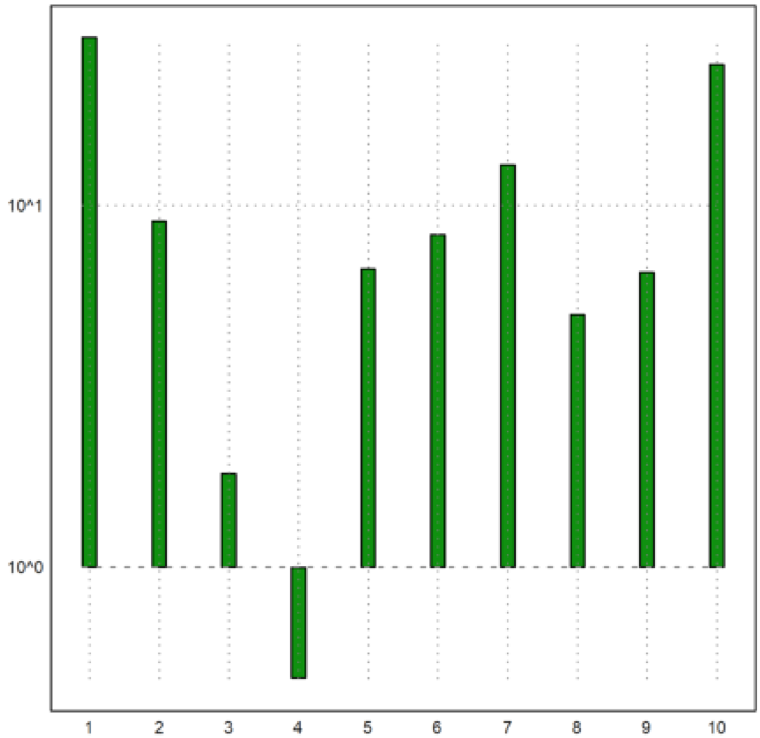
Beberapa plot di plot2d bagus untuk statika. Berikut adalah plot impuls dari data acak, terdistribusi secara merata di [0,1].

```
>plot2d(makeimpulse(1:10,random(1,10)),>bar):
```



Tetapi untuk data yang terdistribusi secara eksponensial, kita mungkin memerlukan plot logaritmik.

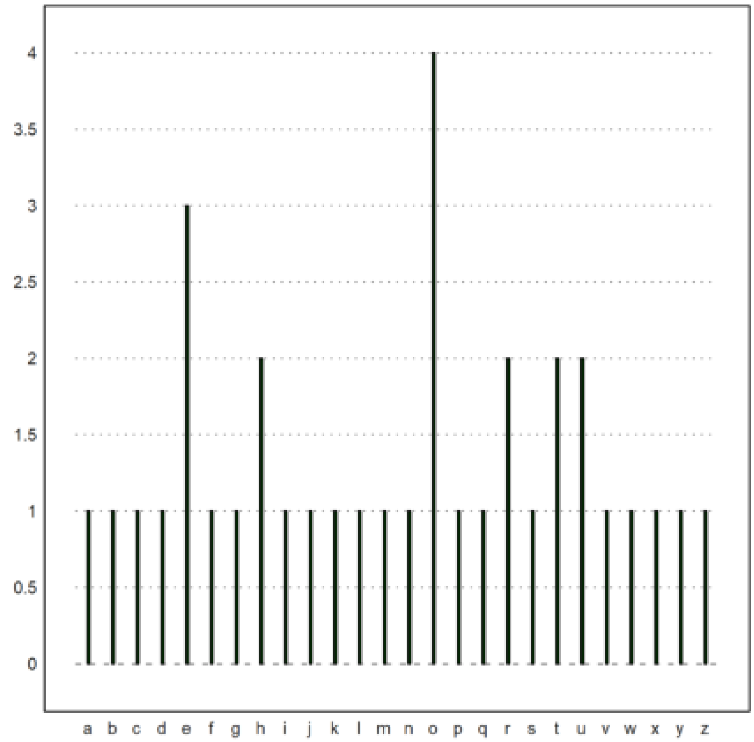
```
>logimpulseplot(1:10,-log(random(1,10))*10):
```



Fungsi columnplot() lebih mudah digunakan, karena hanya membutuhkan vektor nilai. Selain itu, ia dapat mengatur labelnya ke apa pun yang kita inginkan, kita sudah mendemonstrasikannya dalam tutorial ini.

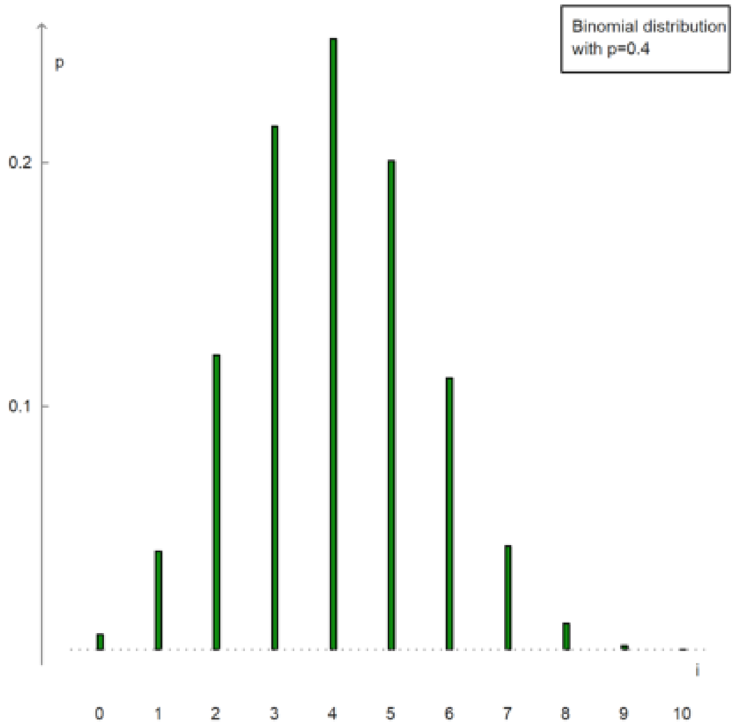
Ini adalah aplikasi lain, di mana kita menghitung karakter dalam sebuah kalimat dan menyusun statistik.

```
>v=strtochar("the quick brown fox jumps over the lazy dog"); ...
>w=ascii("a"):ascii("z"); x=getmultiplicities(w,v); ...
>cw=[]; for k=w; cw=cw|char(k); end; ...
>columnsplot(x,lab=cw,width=0.05):
```



Dimungkinkan juga untuk mengatur sumbu secara manual.

```
>n=10; p=0.4; i=0:n; x=bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i); ...
>columnsplot(x,lab=i,width=0.05,<frame,<grid); ...
>yaxis(0,0:0.1:1,style="->",>left); xaxis(0,style="."); ...
>label("p",0,0.25), label("i",11,0); ...
>textbox(["Binomial distribution","with p=0.4"]):
```



Berikut ini adalah cara untuk memplot frekuensi bilangan dalam sebuah vektor.
Kami membuat vektor bilangan bulat bilangan acak 1 hingga 6.

```
>v:=intrandom(1,10,10)
```

```
[5,  1,  8,  6,  6,  10,  9,  6,  8,  3]
```

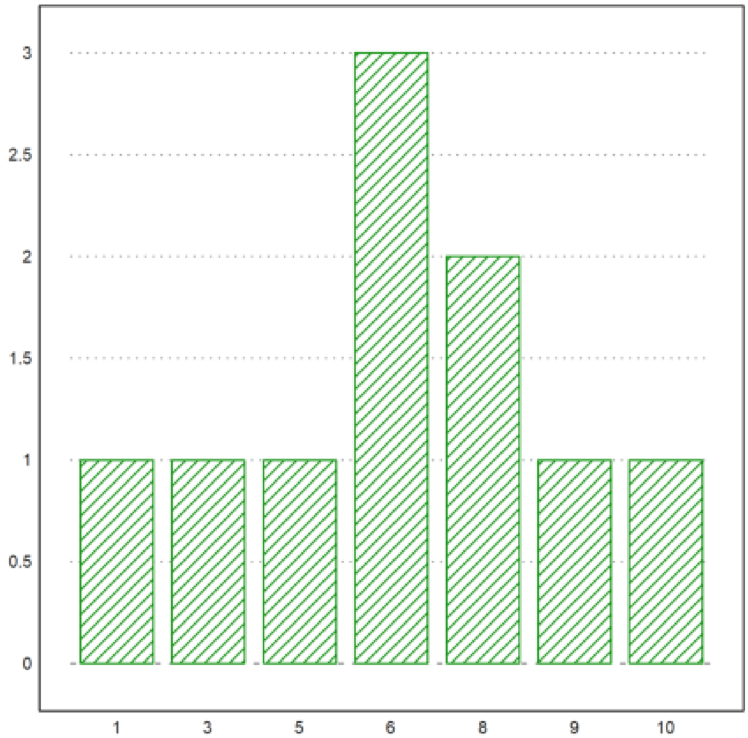
Kemudian ekstrak angka tunggal di v.

```
>vu:=unique(v)
```

```
[1,  3,  5,  6,  8,  9,  10]
```

Dan plot frekuensi dalam plot kolom.

```
>columnsplot(getmultiplicities(vu,v),lab=vu,style="/"):
```



Kami ingin menunjukkan fungsi untuk distribusi nilai empiris.

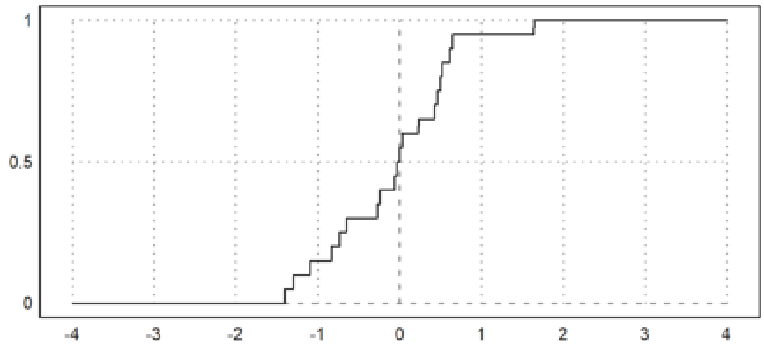
```
>x=normal(1,20);
```

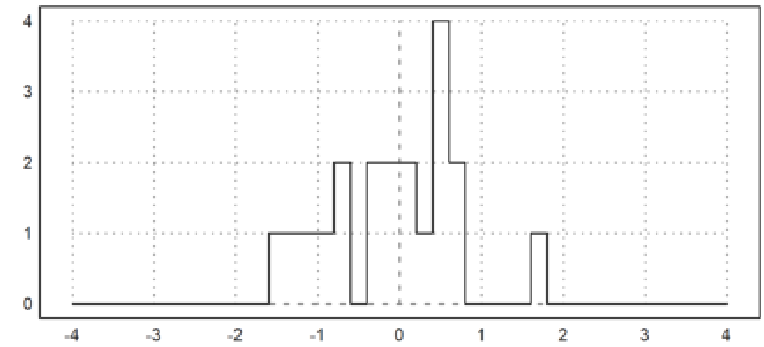
Fungsi empdist(x,vs) membutuhkan array nilai yang diurutkan. Jadi kita harus mengurutkan x sebelum kita dapat menggunakannya.

```
>xs=sort(x);
```

Kemudian kami memplot distribusi empiris dan beberapa batang kepadatan menjadi satu plot. Alih-alih plot batang untuk distribusi, kami menggunakan plot gigi gergaji kali ini.

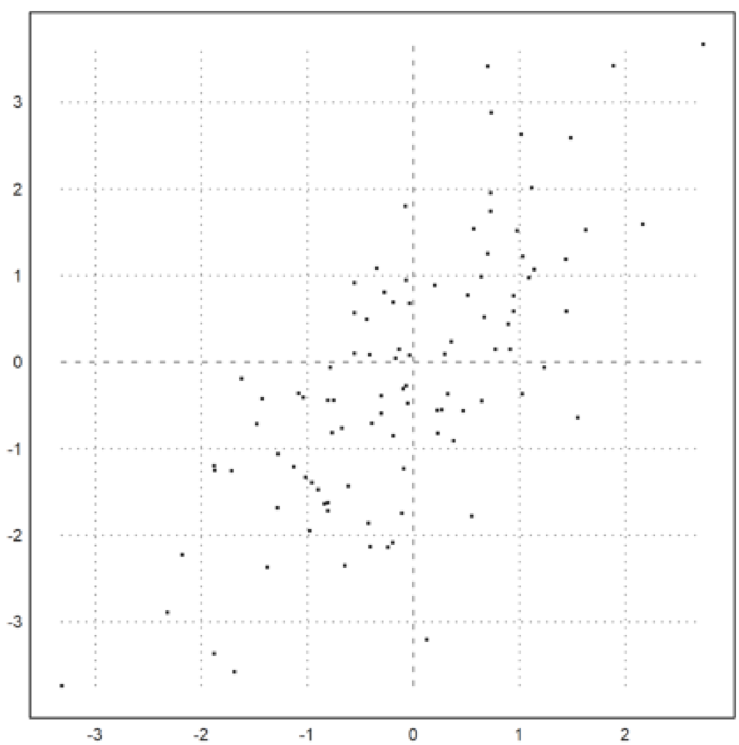
```
>figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d("empdist",-4,4;xs); ...
>figure(2); plot2d(histo(x,v=-4:0.2:4,<bar));  ...
>figure(0):
```





Plot pencar mudah dilakukan di Euler dengan plot titik biasa. Grafik berikut menunjukkan bahwa X dan X+Y jelas berkorelasi positif.

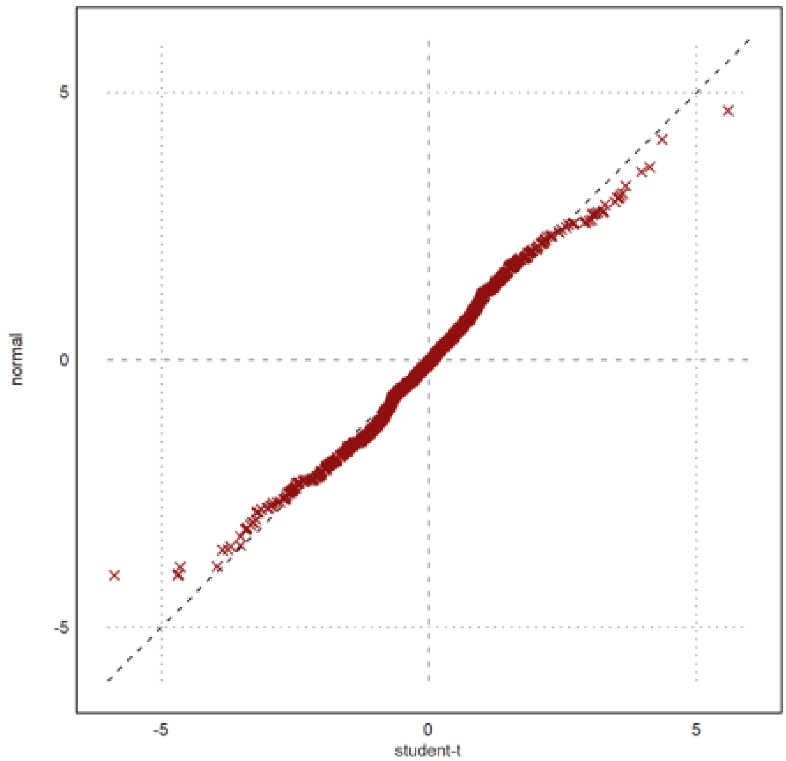
```
>x=normal(1,100); plot2d(x,x+rotright(x),>points,style=".."):
```



Seringkali, kita ingin membandingkan dua sampel dari distribusi yang berbeda. Ini dapat dilakukan dengan plot kuantil-kuantil.

Untuk pengujian, kami mencoba distribusi student-t dan distribusi eksponensial.

```
>x=randt(1,1000,5); y=randnormal(1,1000,mean(x),dev(x)); ...
>plot2d("x",r=6,style="--",yl="normal",xl="student-t",>vertical); ...
>plot2d(sort(x),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



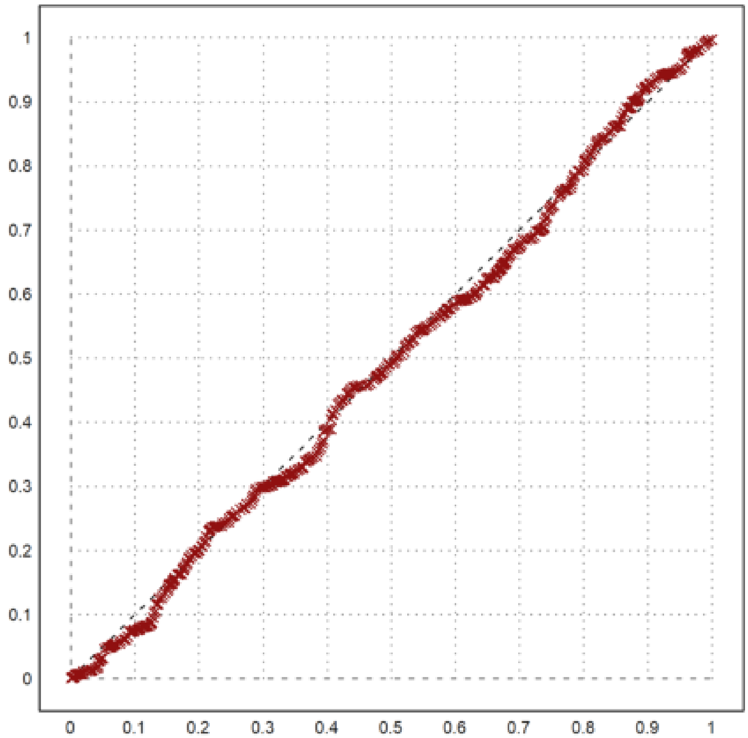
Plot dengan jelas menunjukkan bahwa nilai terdistribusi normal cenderung lebih kecil di ujung ekstrim.

Jika kita memiliki dua distribusi dengan ukuran yang berbeda, kita dapat memperluas yang lebih kecil atau mengecilkan yang lebih besar. Fungsi berikut baik untuk keduanya. Dibutuhkan nilai median dengan persentase antara 0 dan 1.

```
>function medianexpand (x,n) := median(x,p=linspace(0,1,n-1));
```

Mari kita bandingkan dua distribusi yang sama.

```
>x=random(1000); y=random(400); ...
>plot2d("x",0,1,style="--"); ...
>plot2d(sort(medianexpand(x,400)),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



Regresi dan Korelasi

Regresi linier dapat dilakukan dengan fungsi polyfit() atau berbagai fungsi fit.
Sebagai permulaan, kami menemukan garis regresi untuk data univariat dengan polifit(x,y,1).

```
>x=1:10; y=[2,3,1,5,6,3,7,8,9,8]; writetable(x'|y',labc=["x","y"])
```

```
         x          y
         1          2
         2          3
         3          1
         4          5
         5          6
         6          3
         7          7
         8          8
         9          9
        10          8
```

Kami ingin membandingkan non-weighted dan weighted fit. Pertama, koefisien kecocokan linier.

```
>p=polyfit(x,y,1)
```

```
  [0.733333,   0.812121]
```

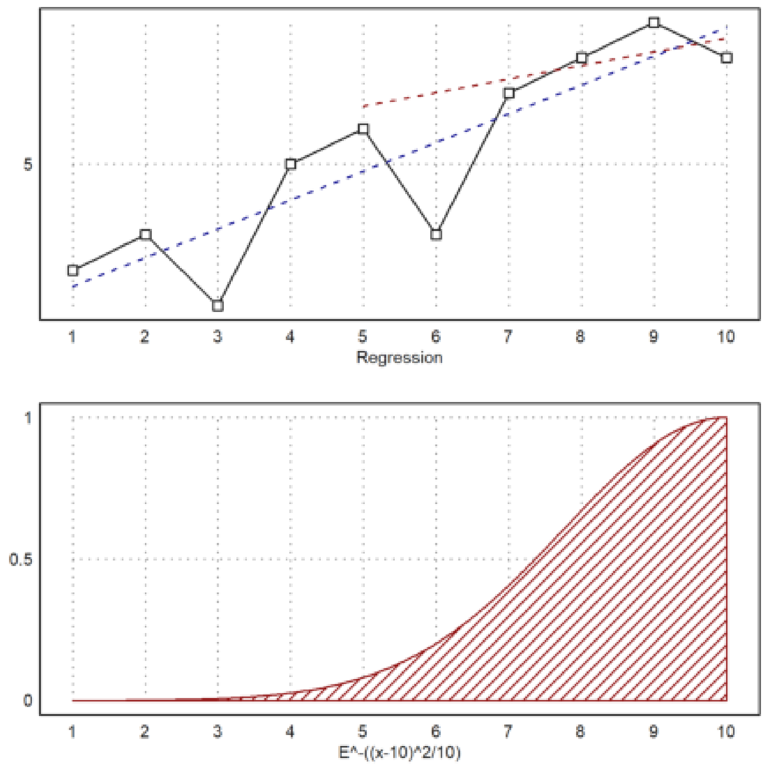
Sekarang koefisien dengan bobot yang menekankan nilai terakhir.

```
>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))
```

```
[4.71566,  0.38319]
```

Kami memasukkan semuanya ke dalam satu plot untuk titik dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="--"); ...
>figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...
>figure(0):
```



Sebagai contoh lain kita membaca survei siswa, usia mereka, usia orang tua mereka dan jumlah saudara kandung dari sebuah file.

Tabel ini berisi "m" dan "f" di kolom kedua. Kami menggunakan variabel tok2 untuk mengatur terjemahan yang tepat daripada membiarkan readtable() mengumpulkan terjemahan.

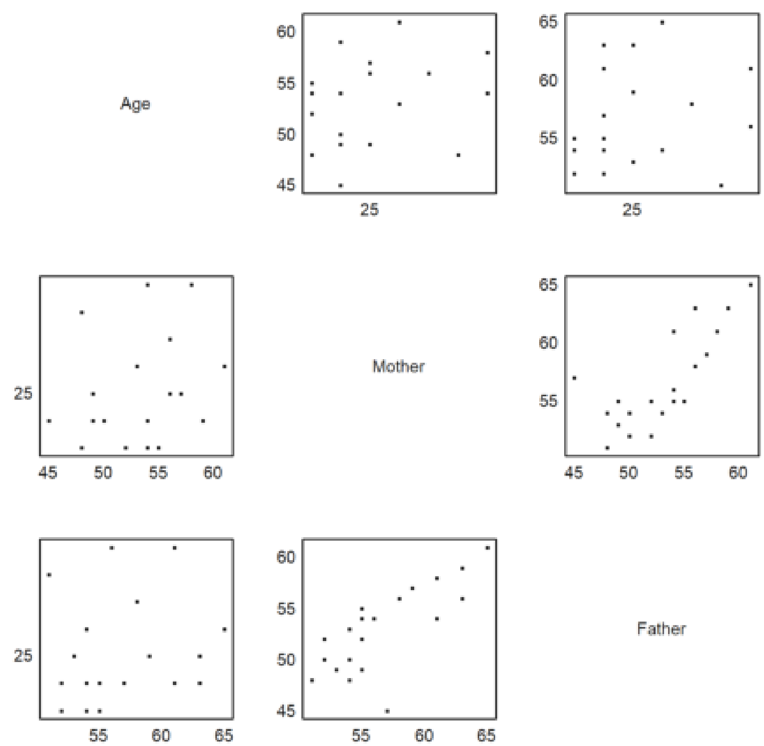
```
>{MS,hd}:=readtable("table1.dat",tok2:=["m","f"]);  ...
>writetable(MS,labc=hd,tok2:=["m","f"]);
```

Person	Sex	Age	Mother	Father	Siblings
1	m	29	58	61	1
2	f	26	53	54	2
3	m	24	49	55	1

4	f	25	56	63	3
5	f	25	49	53	0
6	f	23	55	55	2
7	m	23	48	54	2
8	m	27	56	58	1
9	m	25	57	59	1
10	m	24	50	54	1
11	f	26	61	65	1
12	m	24	50	52	1
13	m	29	54	56	1
14	m	28	48	51	2
15	f	23	52	52	1
16	m	24	45	57	1
17	f	24	59	63	0
18	f	23	52	55	1
19	m	24	54	61	2
20	f	23	54	55	1

Bagaimana usia bergantung satu sama lain? Kesan pertama datang dari scatterplot berpasangan.

```
>scatterplots(tablecol(MS,3:5),hd[3:5]):
```



Jelas bahwa usia ayah dan ibu bergantung satu sama lain. Mari kita tentukan dan plot garis regresinya.

```
>cs:=MS[,4:5]'; ps:=polyfit(cs[1],cs[2],1)
```

```
[17.3789,  0.740964]
```

Ini jelas model yang salah. Garis regresinya adalah s=17+0,74t, di mana t adalah usia ibu dan s usia ayah. Perbedaan usia mungkin sedikit bergantung pada usia, tetapi tidak terlalu banyak.

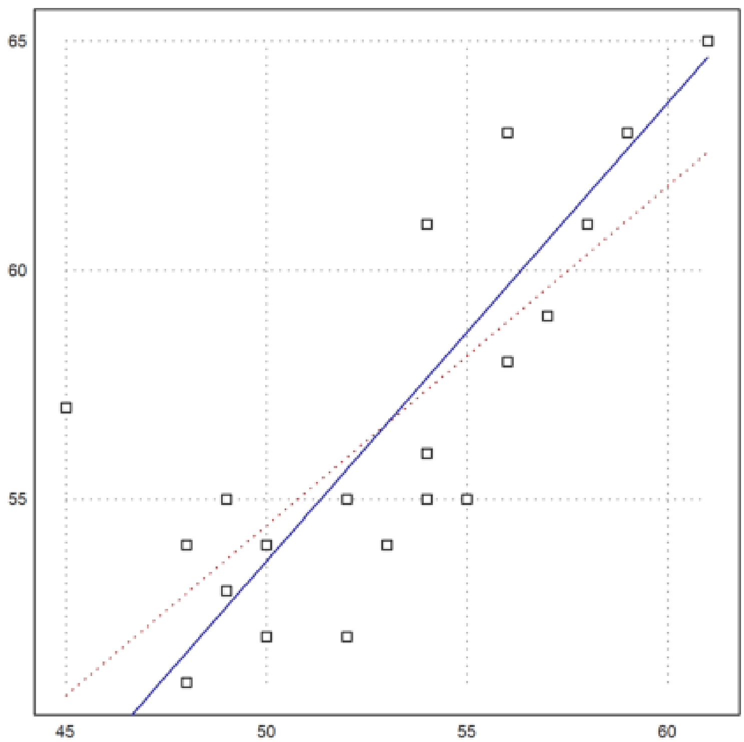
Sebaliknya, kami menduga fungsi seperti s=a+t. Maka a adalah mean dari s-t. Ini adalah perbedaan usia rata-rata antara ayah dan ibu.

```
>da:=mean(cs[2]-cs[1])
```

```
3.65
```

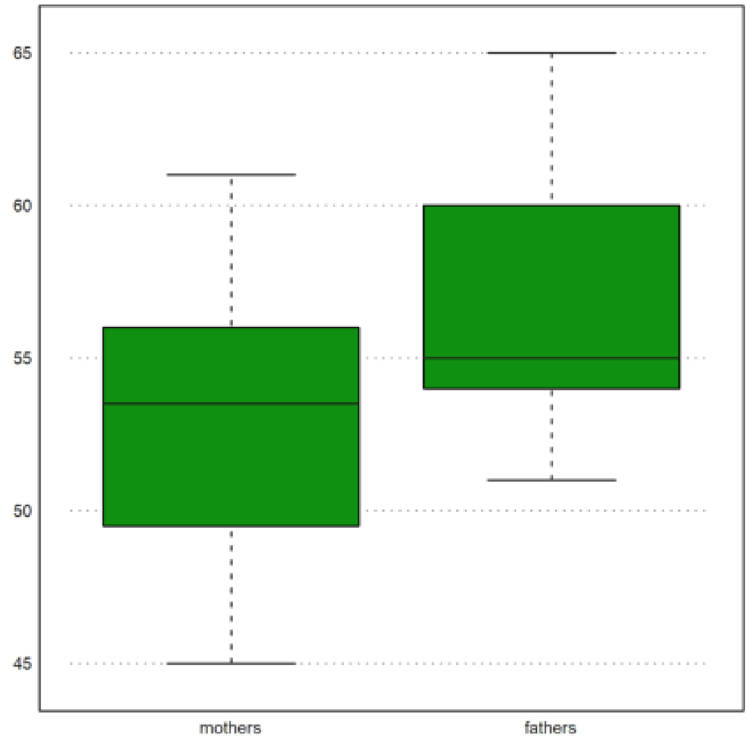
Mari kita plot ini menjadi satu plot pencar.

```
>plot2d(cs[1],cs[2],>points);  ...
>plot2d("evalpoly(x,ps)",color=red,style=".",>add);  ...
>plot2d("x+da",color=blue,>add):
```



Berikut adalah plot kotak dari dua usia. Ini hanya menunjukkan, bahwa usianya berbeda.

```
>boxplot(cs,["mothers","fathers"]):
```



Sangat menarik bahwa perbedaan median tidak sebesar perbedaan mean.

```
>median(cs[2])-median(cs[1])
```

```
1.5
```

Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.

```
>correl(cs[1],cs[2])
```

```
0.7588307236
```

Korelasi peringkat adalah ukuran untuk urutan yang sama di kedua vektor. Ini juga cukup positif.

```
>rankcorrel(cs[1],cs[2])
```

```
0.758925292358
```

Membuat Fungsi baru

Tentu saja, bahasa EMT dapat digunakan untuk memprogram fungsi-fungsi baru. Misalnya, kita mendefinisikan fungsi skewness.

$$\mathrm{sk}(x) = \frac{\sqrt{n}\sum_i (x_i - m)^3}{\left(\sum_i (x_i - m)^2\right)^{3/2}}$$

dimana m adalah mean dari x.

```
>function skew (x:vector) ...
```

```
  m=mean(x);
  return sqrt(cols(x))*sum((x-m)^3)/(sum((x-m)^2))^(3/2);
  endfunction
```

Seperti yang Anda lihat, kita dapat dengan mudah menggunakan bahasa matriks untuk mendapatkan implementasi yang sangat singkat dan efisien. Mari kita coba fungsi ini.

```
>data=normal(20); skew(normal(10))
```

```
  0.521806329961
```

Berikut adalah fungsi lain, yang disebut koefisien skewness Pearson.

```
>function skew1 (x) := 3*(mean(x)-median(x))/dev(x)
>skew1(data)
```

```
  0.573102925949
```

Simulasi Monte Carlo

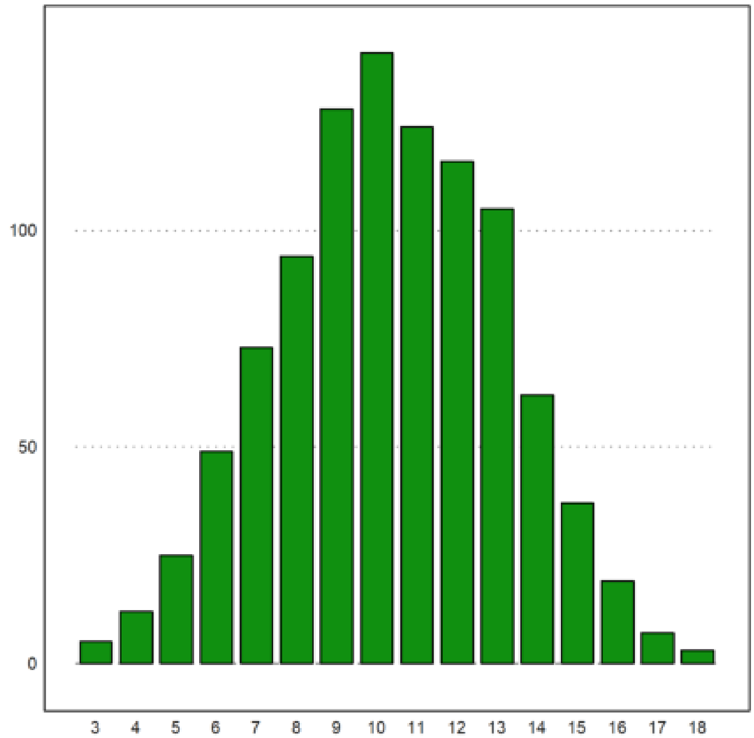
Euler dapat digunakan untuk mensimulasikan kejadian acak. Kita telah melihat contoh sederhana di atas. Ini adalah satu lagi, yang mensimulasikan 1000 kali 3 lemparan dadu, dan meminta distribusi jumlah.

```
>ds:=sum(intrandom(1000,3,6))';  fs=getmultiplicities(3:18,ds)
```

```
  [5,   12,   25,   49,   73,   94,   128,   141,   124,   116,   105,   62,   37,
  19,   7,   3]
```

Kita dapat memplot ini sekarang.

```
>columnsplot(fs,lab=3:18):
```



Untuk menentukan distribusi yang diharapkan tidak begitu mudah. Kami menggunakan rekursi lanjutan untuk ini.

Fungsi berikut menghitung banyaknya cara bilangan k dapat direpresentasikan sebagai jumlah n bilangan dalam rentang 1 sampai m. Ia bekerja secara rekursif dengan cara yang jelas.

```
>function map countways (k; n, m) ...
```

```
    if n==1 then return k>=1 && k<=m
    else
      sum=0;
      loop 1 to m; sum=sum+countways(k-#,n-1,m); end;
      return sum;
    end;
  endfunction
```

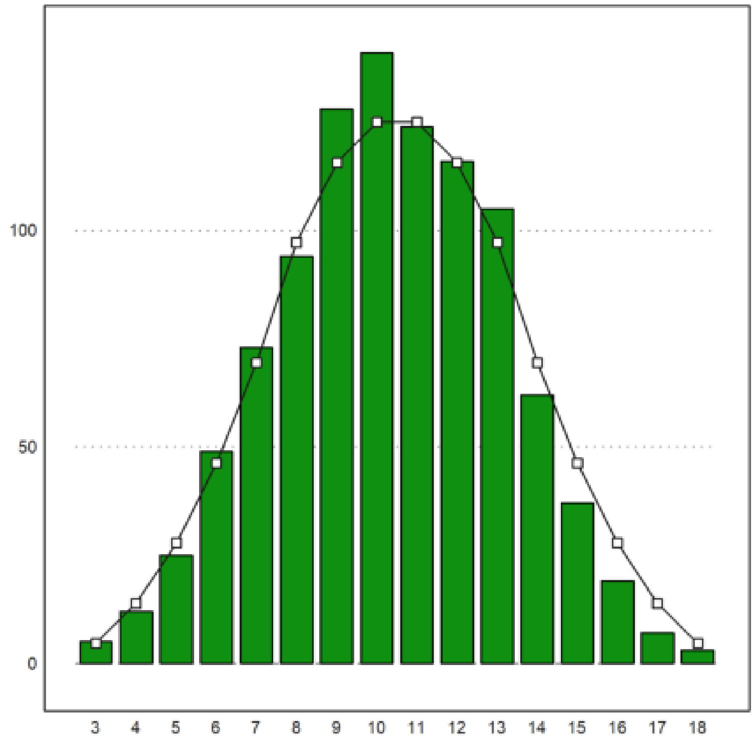
Berikut adalah hasil untuk tiga lemparan dadu.

```
>cw=countways(3:18,3,6)
```

```
  [1,   3,   6,   10,   15,   21,   25,   27,   27,   25,   21,   15,   10,   6,   3,
  1]
```

Kami menambahkan nilai yang diharapkan ke plot.

```
>plot2d(cw/6^3*1000,>add); plot2d(cw/6^3*1000,>points,>add):
```



Untuk simulasi lain, simpangan nilai rata-rata dari n 0-1-variabel acak terdistribusi normal adalah 1/sqrt(n).

```
>longformat; 1/sqrt(10)
```

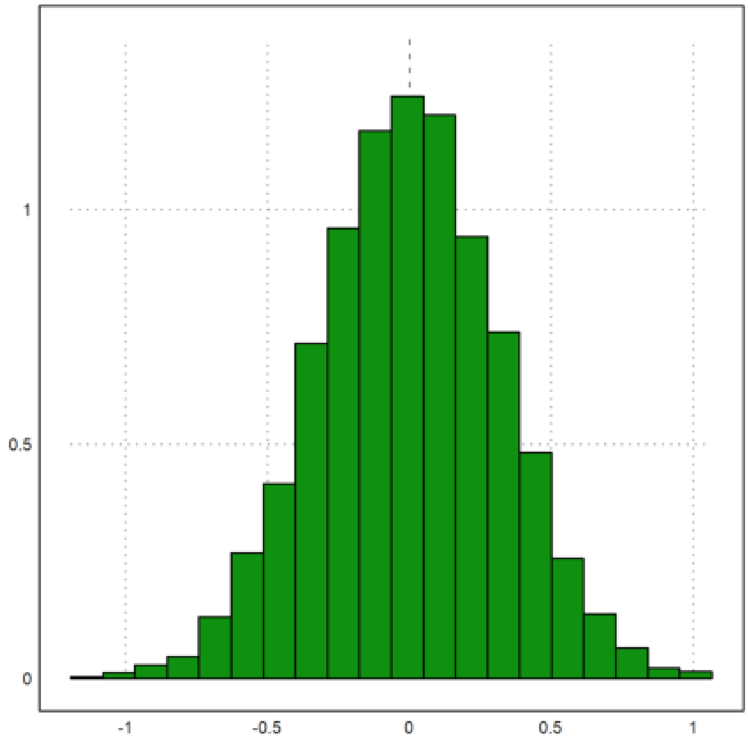
```
0.316227766017
```

Mari kita periksa ini dengan simulasi. Kami memproduksi 10.000 kali 10 vektor acak.

```
>M=normal(10000,10); dev(mean(M)')
```

```
0.318861419326
```

```
>plot2d(mean(M)',>distribution):
```



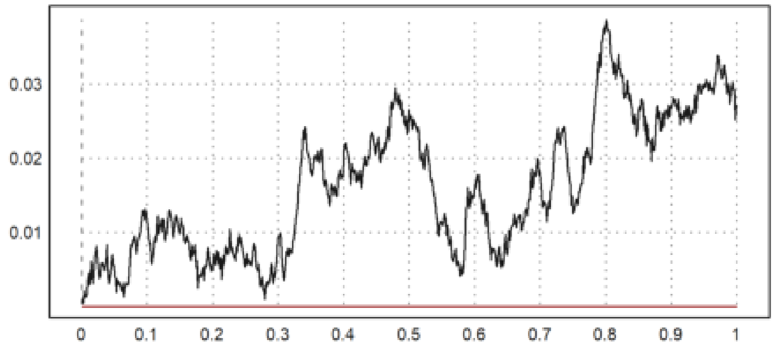
Median 10 0-1-bilangan acak terdistribusi normal memiliki deviasi yang lebih besar.

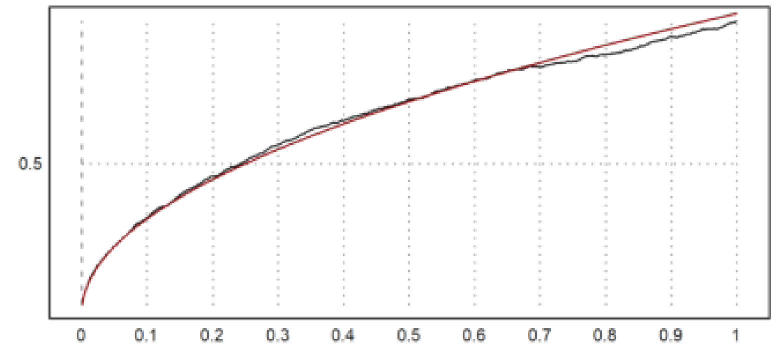
```
>dev(median(M)')
```

```
0.376651504162
```

Karena kita dapat dengan mudah menghasilkan jalan acak, kita dapat mensimulasikan proses Wiener. Kami mengambil 1000 langkah dari 1000 proses. Kami kemudian memplot deviasi standar dan rata-rata dari langkah ke-n dari proses ini bersama dengan nilai yang diharapkan dalam warna merah.

```
>n=1000; m=1000; M=cumsum(normal(n,m)/sqrt(m)); ...
>t=(1:n)/n; figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d(t,mean(M')'); plot2d(t,0,color=red,>add); ...
>figure(2); plot2d(t,dev(M')'); plot2d(t,sqrt(t),color=red,>add); ...
>figure(0):
```





Tes

Tes adalah alat penting dalam statistik. Di Euler, banyak tes diimplementasikan. Semua tes ini mengembalikan kesalahan yang kami terima jika kami menolak hipotesis nol.

Sebagai contoh, kami menguji lemparan dadu untuk distribusi seragam. Pada 600 lemparan, kami mendapatkan nilai berikut, yang kami masukkan ke dalam uji chi-kuadrat.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(100,6)')
```

```
0.498830517952
```

Tes chi-kuadrat juga memiliki mode, yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menguji statistik. Hasilnya harus hampir sama. Parameter >p menginterpretasikan vektor-y sebagai vektor probabilitas.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(1/6,6)',>p,>montecarlo)
```

```
0.517
```

Kesalahan ini terlalu besar. Jadi kita tidak bisa menolak distribusi seragam. Ini tidak membuktikan bahwa dadu kami adil. Tapi kita tidak bisa menolak hipotesis kita.

Selanjutnya kita menghasilkan 1000 lemparan dadu menggunakan generator angka acak, dan melakukan tes yang sama.

```
>n=1000; t=random([1,n*6]); chitest(count(t*6,6),dup(n,6)')
```

```
0.498830517952
```

Mari kita uji nilai rata-rata 100 dengan uji-t.

```
>s=200+normal([1,100])*10; ...
>ttest(mean(s),dev(s),100,200)
```

```
0.12869241421
```

Fungsi ttest() membutuhkan nilai rata-rata, simpangan, jumlah data, dan nilai rata-rata yang akan diuji.

Sekarang mari kita periksa dua pengukuran untuk mean yang sama. Kami menolak hipotesis bahwa mereka memiliki rata-rata yang sama, jika hasilnya <0,05.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10))
```

```
0.460760579563
```

Jika kita menambahkan bias ke satu distribusi, kita mendapatkan lebih banyak penolakan. Ulangi simulasi ini beberapa kali untuk melihat efeknya.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10)+2)
```

```
2.85591414018e-06
```

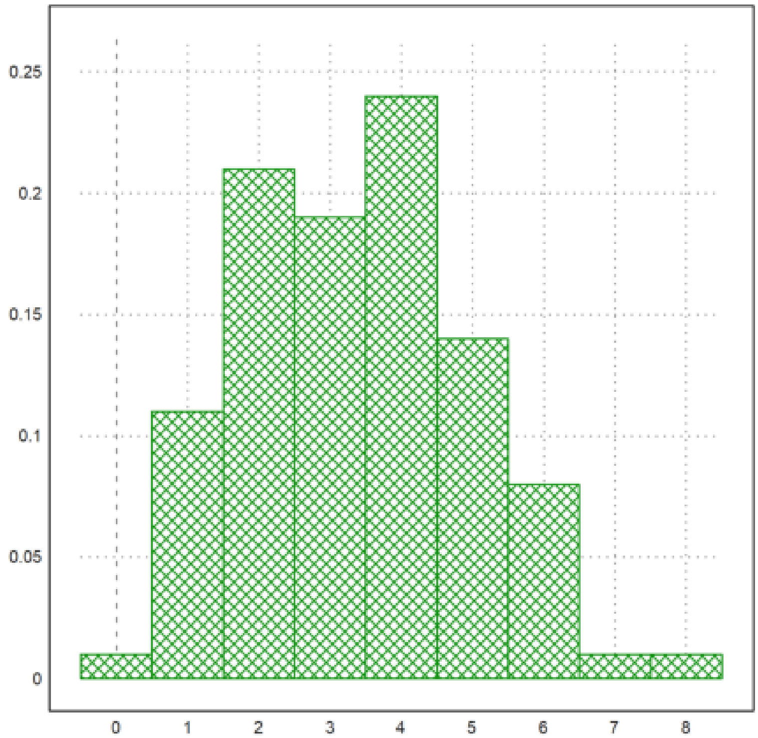
Pada contoh berikutnya, kita menghasilkan 20 lemparan dadu acak sebanyak 100 kali dan menghitung yang ada di dalamnya. Harus ada 20/6=3,3 yang rata-rata.

```
>R=random(100,20); R=sum(R*6<=1)'; mean(R)
```

```
3.39
```

Kami sekarang membandingkan jumlah satu dengan distribusi binomial. Pertama kita plot distribusinya.

```
>plot2d(R,distribution=max(R)+1,even=1,style="\/"):
```




```
>t=count(R,21);
```

Kemudian kami menghitung nilai yang diharapkan.

```
>n=0:20; b=bin(20,n)*(1/6)^n*(5/6)^(20-n)*100;
```

Kita harus mengumpulkan beberapa angka untuk mendapatkan kategori yang cukup besar.

```
>t1=sum(t[1:2])|t[3:7]|sum(t[8:21]); ...
>b1=sum(b[1:2])|b[3:7]|sum(b[8:21]);
```

Uji chi-kuadrat menolak hipotesis bahwa distribusi kami adalah distribusi binomial, jika hasilnya <0,05.

```
>chitest(t1,b1)
```

```
0.262911182138
```

Contoh berikut berisi hasil dua kelompok orang (laki-laki dan perempuan, katakanlah) memberikan suara untuk satu dari enam partai.

```
>A=[23,37,43,52,64,74;27,39,41,49,63,76];  ...
>  writetable(A,wc=6,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
          1      2      3      4      5      6
   m     23     37     43     52     64     74
   f     27     39     41     49     63     76
```

Kami ingin menguji independensi suara dari jenis kelamin. Tes tabel chi^2 melakukan ini. Akibatnya terlalu besar untuk menolak kemerdekaan. Jadi kita tidak bisa mengatakan, jika voting tergantung pada jenis kelamin dari data ini.

```
>tabletest(A)
```

```
0.990701632326
```

Berikut ini adalah tabel yang diharapkan, jika kita mengasumsikan frekuensi pemungutan suara yang diamati.

```
>writetable(expectedtable(A),wc=6,dc=1,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
          1      2      3      4      5      6
   m   24.9   37.9   41.9   50.3   63.3   74.7
   f   25.1   38.1   42.1   50.7   63.7   75.3
```

Kita dapat menghitung koefisien kontingensi yang dikoreksi. Karena sangat dekat dengan 0, kami menyimpulkan bahwa pemungutan suara tidak tergantung pada jenis kelamin.

```
>contingency(A)
```

```
0.0427225484717
```

Beberapa Tes Lagi

Selanjutnya kami menggunakan analisis varians (Uji-F) untuk menguji tiga sampel data yang terdistribusi normal untuk nilai rata-rata yang sama. Metode tersebut disebut ANOVA (analysis of varians). Di Euler, fungsi varanalysis() digunakan.

```
>x1=[109,111,98,119,91,118,109,99,115,109,94]; mean(x1),
```

```
106.545454545
```

```
>x2=[120,124,115,139,114,110,113,120,117]; mean(x2),
```

```
119.111111111
```

```
>x3=[120,112,115,110,105,134,105,130,121,111]; mean(x3)
```

```
116.3
```

```
>varanalysis(x1,x2,x3)
```

```
0.0138048221371
```

Ini berarti, kami menolak hipotesis nilai rata-rata yang sama. Kami melakukan ini dengan probabilitas kesalahan 1,3%.

Ada juga uji median, yang menolak sampel data dengan distribusi rata-rata berbeda menguji median sampel bersatu.

```
>a=[56,66,68,49,61,53,45,58,54];
>b=[72,81,51,73,69,78,59,67,65,71,68,71];
>mediantest(a,b)
```

```
0.0241724220052
```

Tes lain tentang kesetaraan adalah tes peringkat. Ini jauh lebih tajam daripada tes median.

```
>ranktest(a,b)
```

```
0.00199969612469
```

Dalam contoh berikut, kedua distribusi memiliki mean yang sama.

```
>ranktest(random(1,100),random(1,50)*3-1)
```

```
0.119780211001
```

Sekarang mari kita coba mensimulasikan dua perlakuan a dan b yang diterapkan pada orang yang berbeda.

```
>a=[8.0,7.4,5.9,9.4,8.6,8.2,7.6,8.1,6.2,8.9];
>b=[6.8,7.1,6.8,8.3,7.9,7.2,7.4,6.8,6.8,8.1];
```

Tes signum memutuskan, jika a lebih baik dari b.

```
>signtest(a,b)
```

```
0.0546875
```

Ini terlalu banyak kesalahan. Kita tidak dapat menolak bahwa a sama baiknya dengan b.

Tes Wilcoxon lebih tajam dari tes ini, tetapi bergantung pada nilai kuantitatif perbedaan.

```
>wilcoxon(a,b)
```

```
0.0296680599405
```

Mari kita coba dua tes lagi menggunakan seri yang dihasilkan.

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20)-1)
```

```
0.0309763942686
```

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20))
```

```
0.588619799108
```

Bilangan Acak

Berikut ini adalah pengujian untuk pembangkit bilangan acak. Euler menggunakan generator yang sangat bagus, jadi kita tidak perlu mengharapkan masalah.

Pertama kita menghasilkan sepuluh juta angka acak di [0,1].

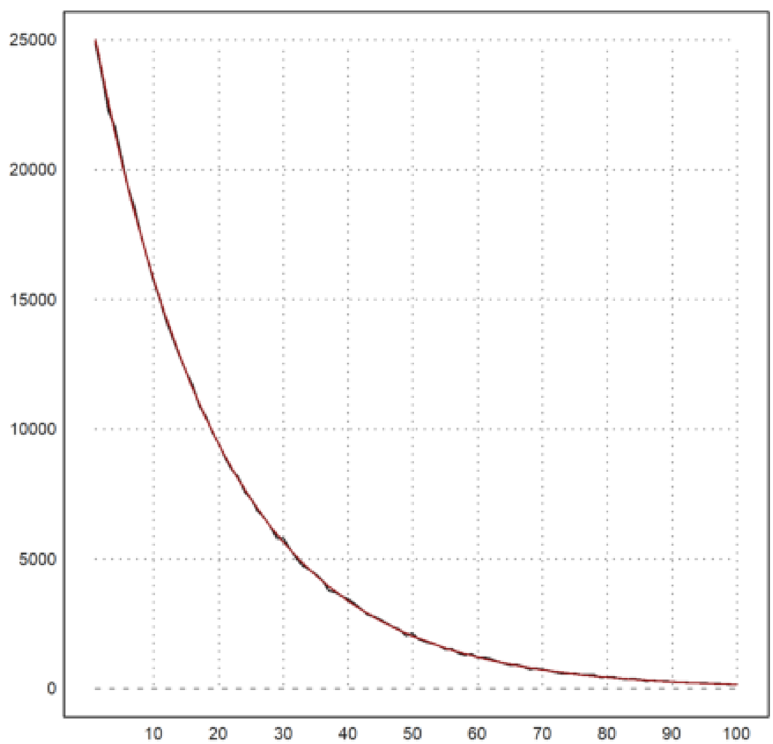
```
>n:=10000000; r:=random(1,n);
```

Selanjutnya kita hitung jarak antara dua bilangan kurang dari 0,05.

```
>a:=0.05; d:=differences(nonzeros(r<a));
```

Akhirnya, kami memplot berapa kali, setiap jarak terjadi, dan membandingkan dengan nilai yang diharapkan.

```
>m=getmultiplicities(1:100,d); plot2d(m); ...
>  plot2d("n*(1-a)^(x-1)*a^2",color=red,>add):
```



Hapus datanya.

```
>remvalue n;
```

Pengantar untuk Pengguna Proyek R

Jelas, EMT tidak bersaing dengan R sebagai paket statistik. Namun, ada banyak prosedur dan fungsi statistik yang tersedia di EMT juga. Jadi EMT dapat memenuhi kebutuhan dasar. Bagaimanapun, EMT hadir dengan paket numerik dan sistem aljabar komputer.

Notebook ini cocok untuk Anda yang terbiasa dengan R, tetapi perlu mengetahui perbedaan sintaks EMT dan R. Kami mencoba memberikan gambaran tentang hal-hal yang jelas dan kurang jelas yang perlu Anda ketahui.

Selain itu, kami mencari cara untuk bertukar data antara kedua sistem.

Perhatikan bahwa ini adalah pekerjaan yang sedang berlangsung.

Sintaks Dasar

Hal pertama yang Anda pelajari di R adalah membuat vektor. Di EMT, perbedaan utama adalah bahwa : operator dapat mengambil ukuran langkah. Selain itu, ia memiliki daya ikat yang rendah.

```
>n=10; 0:n/20:n-1
```

```
[0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5,
7, 7.5, 8, 8.5, 9]
```

Fungsi c() tidak ada. Dimungkinkan untuk menggunakan vektor untuk menggabungkan sesuatu.

Contoh berikut, seperti banyak contoh lainnya, dari "Interoduction to R" yang disertakan dengan proyek R. Jika Anda membaca PDF ini, Anda akan menemukan bahwa saya mengikuti jalannya dalam tutorial ini.

```
>x=[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]; [x,0,x]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7, 0, 10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Operator titik dua dengan ukuran langkah EMT diganti dengan fungsi seq() di R. Kita bisa menulis fungsi ini di EMT.

```
>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...
>seq(0,-0.1,-1)
```

```
[0, -0.1, -0.2, -0.3, -0.4, -0.5, -0.6, -0.7, -0.8, -0.9, -1]
```

Fungsi rep() dari R tidak ada di EMT. Untuk input vektor, dapat ditulis sebagai berikut.

```
>function rep(x:vector,n:index) := flatten(dup(x,n)); ...
>rep(x,2)
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7, 10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Perhatikan bahwa "=" atau ":=" digunakan untuk tugas. Operator "->" digunakan untuk unit di EMT.

```
>125km -> " miles"
```

```
77.6713990297 miles
```

Operator "<-" untuk penugasan tetap menyesatkan, dan bukan ide yang baik untuk R. Berikut ini akan membandingkan a dan -4 di EMT.

```
>a=2; a<-4
```

```
0
```

Di R, "a<-4<3" berfungsi, tetapi "a<-4<-3" tidak. Saya juga memiliki ambiguitas serupa di EMT, tetapi mencoba menghilangkannya perlahan-lahan.

EMT dan R memiliki vektor bertipe boolean. Namun di EMT, angka 0 dan 1 digunakan untuk mewakili salah dan benar. Di R, nilai true dan false dapat digunakan dalam aritmatika biasa seperti di EMT.

```
>x<5, %*x
```

```
[0,   0,   1,   0,   0]
[0,   0,   3.1,   0,   0]
```

EMT melempar kesalahan atau menghasilkan NAN tergantung pada tanda "errors".

```
>errors off; 0/0, isNAN(sqrt(-1)), errors on;
```

```
NAN
1
```

String di R dan EMT sama. Keduanya berada di lokal saat ini, bukan di Unicode.

Di R ada paket untuk Unicode. Di EMT, sebuah string dapat berupa string Unicode. String unicode dapat diterjemahkan ke pengkodean lokal dan sebaliknya. Selain itu, u"..." dapat berisi entitas HTML.

```
>u"&#169; Ren&eacut; Grothmann"
```

```
© René Grothmann
```

Berikut ini mungkin atau mungkin tidak ditampilkan dengan benar di sistem Anda sebagai A dengan titik dan garis di atasnya. Itu tergantung pada font yang Anda gunakan.

```
>chartoutf([480])
```

Penggabungan string dilakukan dengan "+" atau "|". Ini dapat mencakup angka, yang akan dicetak dalam format saat ini.

```
>"pi = "+pi
```

```
pi = 3.14159265359
```

Pengindeksan

Sebagian data besar, ini akan berfungsi seperti pada R.

Tetapi EMT akan menginterpretasikan indeks negatif dari belakang vektor, sedangkan R menginterpretasikan x[n] sebagai x tanpa elemen ke-n.

```
>x, x[1:3], x[-2]
```

```
[10.4,   5.6,   3.1,   6.4,   21.7]
[10.4,   5.6,   3.1]
6.4
```

Perilaku R dapat dicapai dalam EMT dengan drop().

```
>drop(x,2)
```

```
[10.4,   3.1,   6.4,   21.7]
```

Vektor logis tidak diperlakukan secara berbeda sebagai indeks di EMT, berbeda dengan R. Anda perlu mengekstrak elemen bukan nol terlebih dahulu di EMT.

```
>x, x>5, x[nonzeros(x>5)]
```

```
[10.4,   5.6,   3.1,   6.4,   21.7]
[1,   1,   0,   1,   1]
[10.4,   5.6,   6.4,   21.7]
```

Sama seperti di R, vektor indeks dapat berisi pengulangan.

```
>x[[1,2,2,1]]
```

```
[10.4,   5.6,   5.6,   10.4]
```

Tetapi nama untuk indeks tidak dimungkinkan di EMT. Untuk paket statistik, ini mungkin sering diperlukan untuk memudahkan akses ke elemen vektor.

Untuk meniru perilaku ini, kita dapat mendefinisikan fungsi sebagai berikut.

```
>function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ...
>s=["first","second","third","fourth"]; sel(x,["first","third"],s)
```

```
Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                     ^
[10.4,   3.1]
```

EMT memiliki lebih banyak tipe data tetap daripada R. Jelas, di R ada vektor yang tumbuh. Anda dapat mengatur vektor numerik kosong v dan menetapkan nilai ke elemen v[17]. Ini tidak mungkin di EMT.

Berikut ini agak tidak efisien.

```
>v=[]; for i=1 to 10000; v=v|i; end;
```

EMT sekarang akan membuat vektor dengan v dan i ditambahkan pada tumpukan dan menyalin vektor itu kembali ke variabel global v.

Semakin efisien pra-mendefinisikan vektor.

```
>v=zeros(10000); for i=1 to 10000; v[i]=i; end;
```

Untuk mengubah jenis data di EMT, Anda dapat menggunakan fungsi seperti complex().

```
>complex(1:4)
```

```
[ 1+0i ,  2+0i ,  3+0i ,  4+0i  ]
```

Konversi ke string hanya dimungkinkan untuk tipe data dasar. Format saat ini digunakan untuk rangkaian string sederhana. Tetapi ada fungsi seperti print() atau frac().

Untuk vektor, Anda dapat dengan mudah menulis fungsi Anda sendiri.

```
>function tostr (v) ...
```

```
s="[";
loop 1 to length(v);
   s=s+print(v[#],2,0);
   if #<length(v) then s=s+","; endif;
end;
return s+"]";
endfunction
```

```
>tostr(linspace(0,1,10))
```

```
[0.00,0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00]
```

Untuk komunikasi dengan Maxima, terdapat fungsi convertmxm(), yang juga dapat digunakan untuk memformat vektor untuk output.

```
>convertmxm(1:10)
```

```
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
```

Untuk Latex perintah tex dapat digunakan untuk mendapatkan perintah Latex.

```
>tex(&[1,2,3])
```

```
\left[ 1 , 2 , 3 \right]
```

Faktor dan Tabel

Dalam pengantar R ada contoh dengan apa yang disebut faktor.

Berikut ini adalah daftar wilayah dari 30 negara bagian.

```
>austates = ["tas", "sa", "qld", "nsw", "nsw", "nt", "wa", "wa", ...
>"qld", "vic", "nsw", "vic", "qld", "qld", "sa", "tas", ...
>"sa", "nt", "wa", "vic", "qld", "nsw", "nsw", "wa", ...
>"sa", "act", "nsw", "vic", "vic", "act"];
```

Asumsikan, kita memiliki pendapatan yang sesuai di setiap negara bagian.

```
>incomes = [60, 49, 40, 61, 64, 60, 59, 54, 62, 69, 70, 42, 56, ...
>61, 61, 61, 58, 51, 48, 65, 49, 49, 41, 48, 52, 46, ...
>59, 46, 58, 43];
```

Sekarang, kami ingin menghitung rata-rata pendapatan di wilayah tersebut. Menjadi program statistik, R memiliki factor() dan tappy() untuk ini.

EMT dapat melakukannya dengan menemukan indeks wilayah dalam daftar wilayah yang tunggal.

```
>auterr=sort(unique(austates)); f=indexofsorted(auterr,austates)
```

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Pada titik itu, kita dapat menulis fungsi loop kita sendiri untuk melakukan sesuatu hanya untuk satu faktor.

Atau kita bisa meniru fungsi tapply() dengan cara berikut.

```
>function map tappl (i; f$:call, cat, x) ...
```

```
u=sort(unique(cat));
f=indexof(u,cat);
return f$(x[nonzeros(f==indexof(u,i))]);
endfunction
```

Ini agak tidak efisien, karena menghitung wilayah unik untuk setiap i, tetapi berhasil.

```
>tappl(auterr,"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333,  55.5,  53.6,  55,  60.5,  56,  52.25]
```

Perhatikan bahwa ini berfungsi untuk setiap vektor wilayah.

```
>tappl(["act","nsw"],"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333]
```

Sekarang, paket statistik EMT mendefinisikan tabel seperti di R. Fungsi readtable() dan writetable() dapat digunakan untuk input dan output.

Jadi kita bisa mencetak rata-rata pendapatan negara di wilayah dengan cara yang bersahabat.

```
>writetable(tappl(auterr,"mean",austates,incomes),labc=auterr,wc=7)
```

```
    act     nsw      nt     qld      sa     tas     vic      wa
   44.5   57.33    55.5    53.6      55    60.5      56   52.25
```

Kita juga dapat mencoba meniru perilaku R sepenuhnya.

Faktor-faktor tersebut harus dengan jelas disimpan dalam kumpulan dengan jenis dan kategori (negara bagian dan teritori dalam contoh kami). Untuk EMT, kami menambahkan indeks yang telah dihitung sebelumnya.

```
>function makef (t) ...
```

```
## Factor data
## Returns a collection with data t, unique data, indices.
## See: tapply
u=sort(unique(t));
return {{t,u,indexofsorted(u,t)}};
endfunction
```

```
>statef=makef(austates);
```

Sekarang elemen ketiga dari koleksi akan berisi indeks.

```
>statef[3]
```

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Sekarang kita bisa meniru tapply() dengan cara berikut. Ini akan mengembalikan tabel sebagai kumpulan data tabel dan judul kolom.

```
>function tapply (t:vector,tf,f$:call) ...
```

```
## Makes a table of data and factors
## tf : output of makef()
## See: makef
uf=tf[2]; f=tf[3]; x=zeros(length(uf));
for i=1 to length(uf);
   ind=nonzeros(f==i);
   if length(ind)==0 then x[i]=NAN;
```

```
    else x[i]=f$(t[ind]);
    endif;
  end;
  return {{x,uf}};
  endfunction
```

Kami tidak menambahkan banyak jenis pengecekan di sini. Satu-satunya tindakan pencegahan menyangkut kategori (faktor) tanpa data. Tetapi orang harus memeriksa panjang t yang benar dan kebenaran koleksi tf.

Tabel ini dapat dicetak sebagai tabel dengan writetable().

```
>writetable(tapply(incomes,statef,"mean"),wc=7)
```

```
    act    nsw     nt    qld     sa    tas    vic     wa
   44.5  57.33   55.5   53.6     55   60.5     56  52.25
```

Array

EMT hanya memiliki dua dimensi untuk array. Tipe datanya disebut matriks. Akan mudah untuk menulis fungsi untuk dimensi yang lebih tinggi atau pustaka C untuk ini.

R memiliki lebih dari dua dimensi. Dalam R array adalah vektor dengan bidang dimensi.

Dalam EMT, vektor adalah matriks dengan satu baris. Itu dapat dibuat menjadi matriks dengan redim().

```
>shortformat; X=redim(1:20,4,5)
```

```
          1          2          3          4          5
          6          7          8          9         10
         11         12         13         14         15
         16         17         18         19         20
```

Ekstraksi baris dan kolom, atau sub-matriks, sangat mirip dengan R.

```
>X[,2:3]
```

```
          2          3
          7          8
         12         13
         17         18
```

Namun, dalam R dimungkinkan untuk menetapkan daftar indeks spesifik dari vektor ke suatu nilai. Hal yang sama dimungkinkan di EMT hanya dengan loop.

```
>function setmatrixvalue (M, i, j, v) ...
```

```
  loop 1 to max(length(i),length(j),length(v))
    M[i{#},j{#}] = v{#};
  end;
  endfunction
```

Kami mendemonstrasikan ini untuk menunjukkan bahwa matriks dilewatkan dengan referensi di EMT. Jika Anda tidak ingin mengubah matriks asli M, Anda perlu menyalinnya ke dalam fungsi.

```
>setmatrixvalue(X,1:3,3:-1:1,0); X,
```

```
          1           2           0           4           5
          6           0           8           9          10
          0          12          13          14          15
         16          17          18          19          20
```

Perkalian luar dalam EMT hanya dapat dilakukan antar vektor. Ini otomatis karena bahasa matriks. Satu vektor harus menjadi vektor kolom dan yang lainnya vektor baris.

```
>(1:5)*(1:5)'
```

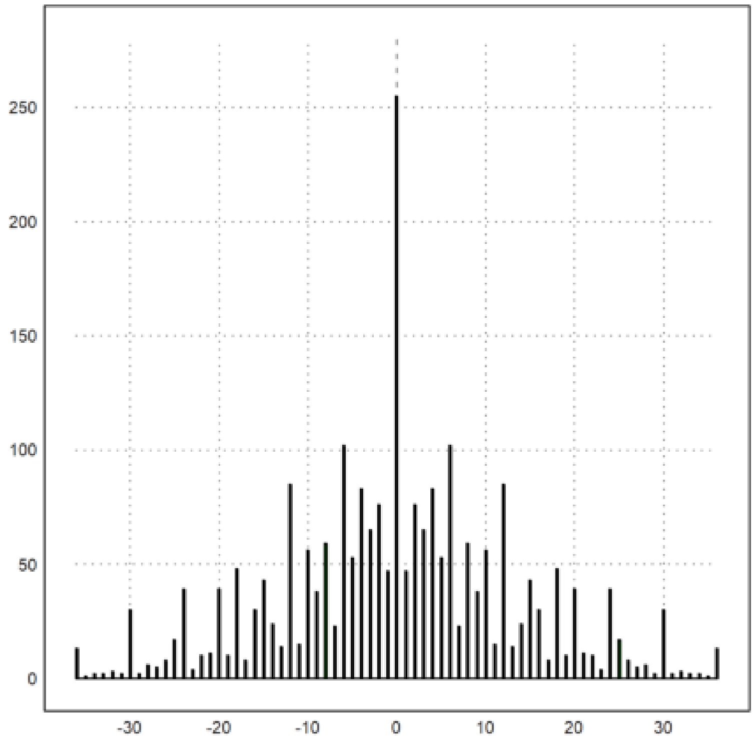
```
          1           2           3           4           5
          2           4           6           8          10
          3           6           9          12          15
          4           8          12          16          20
          5          10          15          20          25
```

Dalam pengantar PDF untuk R ada sebuah contoh, yang menghitung distribusi ab-cd untuk a,b,c,d yang dipilih dari 0 hingga n secara acak. Solusi dalam R adalah membentuk matriks 4 dimensi dan menjalankan table() di atasnya.

Tentu saja, ini dapat dicapai dengan loop. Tapi loop tidak efektif di EMT atau R. Di EMT, kita bisa menulis loop di C dan itu akan menjadi solusi tercepat.

Tapi kita ingin meniru perilaku R. Untuk ini, kita perlu meratakan perkalian ab dan membuat matriks ab-cd.

```
>a=0:6; b=a'; p=flatten(a*b); q=flatten(p-p'); ...
>u=sort(unique(q)); f=getmultiplicities(u,q); ...
>statplot(u,f,"h"):
```



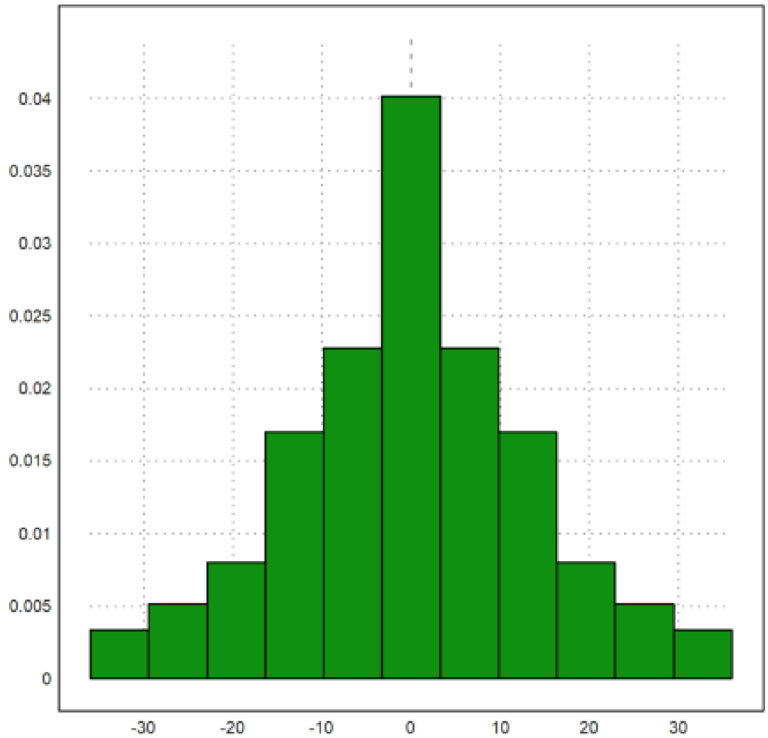
Selain multiplisitas yang tepat, EMT dapat menghitung frekuensi dalam vektor.

```
>getfrequencies(q,-50:10:50)
```

```
 [0,  23,  132,  316,  602,  801,  333,  141,  53,  0]
```

Cara paling mudah untuk memplot ini sebagai distribusi adalah sebagai berikut.

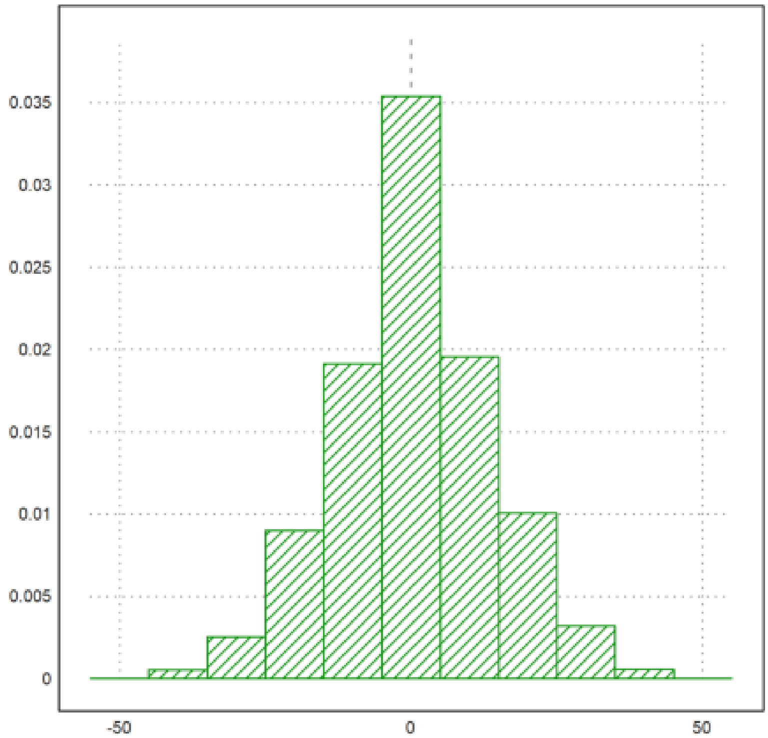
```
>plot2d(q,distribution=11):
```



Tetapi juga memungkinkan untuk menghitung sebelumnya hitungan dalam interval yang dipilih sebelumnya. Tentu saja, berikut ini menggunakan getfrequencies() secara internal.

Karena fungsi histo() mengembalikan frekuensi, kita perlu menskalakannya sehingga integral di bawah grafik batang adalah 1.

```
>{x,y}=histo(q,v=-55:10:55); y=y/sum(y)/differences(x); ...
>plot2d(x,y,>bar,style="/"):
```



Daftar

EMT memiliki dua macam daftar. Salah satunya adalah daftar global yang dapat diubah, dan yang lainnya adalah jenis daftar yang tidak dapat diubah. Kami tidak peduli dengan daftar global di sini.

Jenis daftar yang tidak dapat diubah disebut koleksi di EMT. Itu berperilaku seperti struktur di C, tetapi elemennya hanya diberi nomor dan tidak diberi nama.

```
>L={{"Fred","Flintstone",40,[1990,1992]}}
```

```
Fred
Flintstone
40
[1990,  1992]
```

Saat ini elemen tidak memiliki nama, meskipun nama dapat ditetapkan untuk tujuan khusus. Mereka diakses dengan angka.

```
>(L[4])[2]
```

```
1992
```

File Input dan Output (Membaca dan Menulis Data)

Anda akan sering ingin mengimpor matriks data dari sumber lain ke EMT. Tutorial ini memberi tahu Anda tentang banyak cara untuk mencapai ini. Fungsi sederhana adalah writematrix() dan readmatrix().

Mari kita tunjukkan cara membaca dan menulis vektor real ke file.

```
>a=random(1,100); mean(a), dev(a),
```

```
0.491625063642
0.290423329385
```

Untuk menulis data ke file, kita menggunakan fungsi writematrix().

Karena pengenalan ini kemungkinan besar berada di direktori, di mana pengguna tidak memiliki akses tulis, kami menulis data ke direktori home pengguna. Untuk notebook sendiri, ini tidak perlu, karena file data akan ditulis ke dalam direktori yang sama.

```
>filename="test.dat";
```

Sekarang kita menulis vektor kolom a' ke file. Ini menghasilkan satu nomor di setiap baris file.

```
>writematrix(a',filename);
```

Untuk membaca data, kita gunakan readmatrix().

```
>a=readmatrix(filename)';
```

Dan menghapus filenya.

```
>fileremove(filename);
>mean(a), dev(a),
```

```
0.491625063642
0.290423329385
```

Fungsi writematrix() atau writetable() dapat dikonfigurasi untuk bahasa lain.

Misalnya, jika Anda memiliki sistem Indonesia (titik desimal dengan koma), Excel Anda memerlukan nilai dengan koma desimal yang dipisahkan oleh titik koma dalam file csv (defaultnya adalah nilai yang dipisahkan koma). File "test.csv" berikut akan muncul di folder cuurent Anda.

```
>filename="test.csv"; ...
>writematrix(random(5,3),file=filename,separator=",");
```

Anda sekarang dapat membuka file ini dengan Excel Indonesia secara langsung.

```
>fileremove(filename);
```

Terkadang kita memiliki string dengan token seperti berikut ini.

```
>s1:="f m m f m m m f f f m m f";  ...
>s2:="f f f m m f f";
```

Untuk tokenize ini, kami mendefinisikan vektor token.

```
>tok:=["f","m"]
```

```
f
m
```

Kemudian kita dapat menghitung berapa kali setiap token muncul dalam string, dan memasukkan hasilnya ke dalam tabel.

```
>M:=getmultiplicities(tok,strtokens(s1))_ ...
>  getmultiplicities(tok,strtokens(s2));
```

Tulis tabel dengan header token.

```
>writetable(M,labc=tok,labr=1:2,wc=8)
```

```
                f       m
       1        6       7
       2        5       2
```

Untuk statika, EMT dapat membaca dan menulis tabel.

```
>file="test.dat"; open(file,"w"); ...
>writeln("A,B,C"); writematrix(random(3,3)); ...
>close();
```

Filenya akan terlihat seperti ini.

```
>printfile(file)
```

```
A,B,C
0.2325146620924334,0.5175800868283525,0.8399218481003107
0.336655122980329,0.6942166504489329,0.7277428530427359
0.06026396393889418,0.8443897421346642,0.7763524944847273
```

Fungsi readtable() dalam bentuknya yang paling sederhana dapat membaca ini dan mengembalikan kumpulan nilai dan baris judul.

```
>L=readtable(file,>list);
```

Koleksi ini dapat dicetak dengan writetable() ke notebook, atau ke file.

```
>writetable(L,wc=10,dc=5)
```

```
         A         B         C
   0.23251   0.51758   0.83992
   0.33666   0.69422   0.72774
   0.06026   0.84439   0.77635
```

Nilai matriks adalah elemen pertama dari L. Perhatikan bahwa mean() dalam EMT menghitung nilai mean dari baris matriks.

```
>mean(L[1])
```

```
   0.53001
    0.5862
   0.56034
```

File CSV

Pertama, mari kita menulis matriks ke dalam file. Untuk output, kami membuat file di direktori kerja saat ini.

```
>file="test.csv";  ...
>M=random(3,3); writematrix(M,file);
```

Berikut adalah isi dari file ini.

```
>printfile(file)
```

```
  0.3197946130216783,0.5787845944039014,0.2737923526542028
  0.3671130231603081,0.5275695458256693,0.6525304249790899
  0.7917330834536404,0.8603155045429328,0.527472095021572
```

CSV ini dapat dibuka pada sistem bahasa Inggris ke Excel dengan klik dua kali. Jika Anda mendapatkan file seperti itu di sistem Jerman, Anda perlu mengimpor data ke Excel dengan memperhatikan titik desimal.

Tetapi titik desimal juga merupakan format default untuk EMT. Anda dapat membaca matriks dari file dengan readmatrix().

```
>readmatrix(file)
```

```
   0.31979   0.57878   0.27379
   0.36711   0.52757   0.65253
   0.79173   0.86032   0.52747
```

Dimungkinkan untuk menulis beberapa matriks ke satu file. Perintah open() dapat membuka file untuk ditulis dengan parameter "w". Standarnya adalah "r" untuk membaca.

```
>open(file,"w"); writematrix(M); writematrix(M'); close();
```

Matriks dipisahkan oleh garis kosong. Untuk membaca matriks, buka file dan panggil readmatrix() beberapa kali.

```
>open(file); A=readmatrix(); B=readmatrix(); A==B, close();
```

```
          1           0           0
          0           1           0
          0           0           1
```

Di Excel atau spreadsheet serupa, Anda dapat mengekspor matriks sebagai CSV (nilai yang dipisahkan koma). Di Excel 2007, gunakan "save as" dan "other formats", lalu pilih "CSV". Pastikan, tabel saat ini hanya berisi data yang ingin Anda ekspor.

Berikut adalah contoh.

```
>printfile("excel-data.csv")
```

```
0;1000;1000
1;1051,271096;1072,508181
2;1105,170918;1150,273799
3;1161,834243;1233,67806
4;1221,402758;1323,129812
5;1284,025417;1419,067549
6;1349,858808;1521,961556
7;1419,067549;1632,31622
8;1491,824698;1750,6725
9;1568,312185;1877,610579
10;1648,721271;2013,752707
```

Seperti yang Anda lihat, sistem Jerman saya menggunakan titik koma sebagai pemisah dan koma desimal. Anda dapat mengubah ini di pengaturan sistem atau di Excel, tetapi tidak perlu membaca matriks ke dalam EMT.

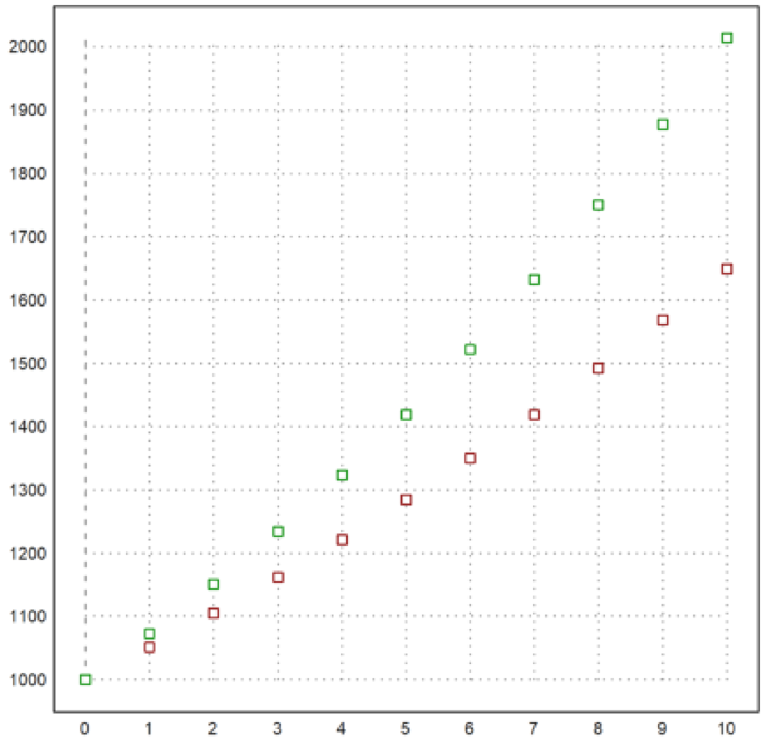
Cara termudah untuk membaca ini ke dalam Euler adalah readmatrix(). Semua koma diganti dengan titik dengan parameter >comma. Untuk CSV bahasa Inggris, cukup abaikan parameter ini.

```
>M=readmatrix("excel-data.csv",>comma)
```

```
          0        1000        1000
          1      1051.3      1072.5
          2      1105.2      1150.3
          3      1161.8      1233.7
          4      1221.4      1323.1
          5        1284      1419.1
          6      1349.9        1522
          7      1419.1      1632.3
          8      1491.8      1750.7
          9      1568.3      1877.6
         10      1648.7      2013.8
```

Mari kita plot ini.

```
>plot2d(M'[1],M'[2:3],>points,color=[red,green]'):
```



Ada cara yang lebih mendasar untuk membaca data dari file. Anda dapat membuka file dan membaca angka baris demi baris. Fungsi getvectorline() akan membaca angka dari baris data. Secara default, ia mengharapkan titik desimal. Tapi itu juga bisa menggunakan koma desimal, jika Anda memanggil setdecimaldot(",") sebelum Anda menggunakan fungsi ini.

Fungsi berikut adalah contoh untuk ini. Ini akan berhenti di akhir file atau baris kosong.

```
>function myload (file) ...
```

```
  open(file);
  M=[];
  repeat
     until eof();
     v=getvectorline(3);
     if length(v)>0 then M=M_v; else break; endif;
  end;
  return M;
  close(file);
  endfunction
```

```
>myload(file)
```

```
    0.31979    0.57878    0.27379
    0.36711    0.52757    0.65253
    0.79173    0.86032    0.52747
```

Dimungkinkan juga untuk membaca semua angka dalam file itu dengan getvector().

```
>open(file); v=getvector(10000); close(); redim(v[1:9],3,3)
```

```
    0.31979   0.57878   0.27379
    0.36711   0.52757   0.65253
    0.79173   0.86032   0.52747
```

Jadi sangat mudah untuk menyimpan vektor nilai, satu nilai di setiap baris dan membaca kembali vektor ini.

```
>v=random(1000); mean(v)
```

```
  0.49624
```

```
>writematrix(v',file); mean(readmatrix(file)')
```

```
  0.49624
```

Menggunakan Tabel

Tabel dapat digunakan untuk membaca atau menulis data numerik. Sebagai contoh, kami menulis tabel dengan header baris dan kolom ke file.

```
>file="test.tab"; M=random(3,3);  ...
>open(file,"w");  ...
>writetable(M,separator=",",labc=["one","two","three"]);  ...
>close(); ...
>printfile(file)
```

```
  one,two,three
        0.59,       0.87,       0.14
        0.21,       0.22,       0.31
        0.79,       0.75,       0.79
```

Ini dapat diimpor ke Excel.

Untuk membaca file dalam EMT, kami menggunakan readtable().

```
>{M,headings}=readtable(file,>clabs); ...
>writetable(M,labc=headings)
```

```
         one        two      three
        0.59       0.87       0.14
        0.21       0.22       0.31
        0.79       0.75       0.79
```

Menganalisis Garis

Anda bahkan dapat mengevaluasi setiap baris dengan tangan. Misalkan, kita memiliki garis dengan format berikut.

```
>line="2020-11-03,Tue,1’114.05"
```

```
2020-11-03,Tue,1’114.05
```

Pertama kita dapat menandai garis.

```
>vt=strtokens(line)
```

```
2020-11-03
Tue
1’114.05
```

Kemudian kita dapat mengevaluasi setiap elemen garis menggunakan evaluasi yang sesuai.

```
>day(vt[1]),  ...
>indexof(["mon","tue","wed","thu","fri","sat","sun"],tolower(vt[2])),  ...
>strrepl(vt[3],"’","")()
```

```
7.3816e+05
2
1114
```

Menggunakan ekspresi reguler, dimungkinkan untuk mengekstrak hampir semua informasi dari baris data. Asumsikan kita memiliki baris berikut dokumen HTML.

```
>line="<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>"
```

```
<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>
```

Untuk mengekstrak ini, kami menggunakan ekspresi reguler, yang mencari

```
- kurung tutup >,
- string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung dengan
```

sub-pertandingan "(...)",

```
- braket pembuka dan penutup menggunakan solusi terpendek,
- lagi string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung,
- dan kurung buka <.
```

Ekspresi reguler agak sulit dipelajari tetapi sangat kuat.

```
>{pos,s,vt}=strxfind(line,">([^<>]+)<.+?>([^<>]+)<");
```

Hasilnya adalah posisi kecocokan, string yang cocok, dan vektor string untuk sub-pertandingan.

```
>for k=1:length(vt); vt[k](), end;
```

```
1145.5
5.6
```

Berikut adalah fungsi, yang membaca semua item numerik antara <td> dan </td>.

```
>function readtd (line) ...
```

```
v=[]; cp=0;
repeat
   {pos,s,vt}=strxfind(line,"<td.*?>(.+?)</td>",cp);
   until pos==0;
   if length(vt)>0 then v=v|vt[1]; endif;
   cp=pos+strlen(s);
end;
return v;
endfunction
```

```
>readtd(line+"<td>non-numerical</td>")
```

```
1145.45
5.6
-4.5
non-numerical
```

Membaca dari Web

Situs web atau file dengan URL dapat dibuka di EMT dan dapat dibaca baris demi baris.

Dalam contoh, kami membaca versi saat ini dari situs EMT. Kami menggunakan ekspresi reguler untuk memindai "Version ..." dalam sebuah judul.

```
>function readversion () ...
```

```
urlopen("http://www.euler-math-toolbox.de/Programs/Changes.html");
repeat
  until urleof();
  s=urlgetline();
  k=strfind(s,"Version ",1);
  if k>0 then substring(s,k,strfind(s,"<",k)-1), break; endif;
end;
urlclose();
endfunction
```

```
>readversion
```

```
Version 2022-05-18
```

Input dan Output Variabel

Anda dapat menulis variabel dalam bentuk definisi Euler ke file atau ke baris perintah.

```
>writevar(pi,"mypi");
```

```
mypi = 3.141592653589793;
```

Untuk pengujian, kami membuat file Euler di direktori kerja EMT.

```
>file="test.e"; ...
>writevar(random(2,2),"M",file); ...
>printfile(file,3)
```

```
M = [ ..
0.01913630293057568, 0.6209753033625431;
0.1491428602846074, 0.3307128786624384];
```

Kita sekarang dapat memuat file. Ini akan mendefinisikan matriks M.

```
>load(file); show M,
```

```
M =
    0.0191363      0.620975
     0.149143      0.330713
```

Omong-omong, jika writevar() digunakan pada variabel, itu akan mencetak definisi variabel dengan nama variabel ini.

```
>writevar(M); writevar(inch$)
```

```
M = [ ..
0.01913630293057568, 0.6209753033625431;
0.1491428602846074, 0.3307128786624384];
inch$ = 0.0254;
```

Kita juga bisa membuka file baru atau menambahkan file yang sudah ada. Dalam contoh kami menambahkan file yang dihasilkan sebelumnya.

```
>open(file,"a"); ...
>writevar(random(2,2),"M1"); ...
>writevar(random(3,1),"M2"); ...
>close();
>load(file); show M1; show M2;
```

```
M1 =
     0.802005      0.840686
     0.735639     0.0567092
M2 =
     0.361844
     0.572185
     0.439148
```

Untuk menghapus file apa pun, gunakan fileremove().

```
>fileremove(file);
```

Vektor baris dalam file tidak memerlukan koma, jika setiap angka berada di baris baru. Mari kita buat file seperti itu, menulis setiap baris satu per satu dengan writeln().

```
>open(file,"w"); writeln("M = ["); ...
>for i=1 to 5; writeln(""+random()); end; ...
>writeln("];"); close(); ...
>printfile(file)
```

```
M = [
0.709650071021
0.502826457257
0.530599609064
0.211330653617
0.419244521594
];
```

```
>load(file); M
```

```
[0.70965,  0.502826,  0.5306,  0.211331,  0.419245]
```