Predikátová logika

Jindřich Matuška

Faculty of Informatics, Masaryk University

24. října 2024

Čas na odpovědníky

Obsah

Syntax

Sémantika

Normální formy

Obsah

Syntax výrokové logiky

- Abeceda
  - Výrokové proměnné $\mathcal{P} = \{p, q, r, \dots\}$
  - Logické spojky $\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff, \dots$
  - Pomocné symboly závorek (,)

Syntax predikátové logiky

- Abeceda
  - Symboly pro proměnné $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$
  - Funkční symboly $f, g, h, \ldots$
  - Predikátové symboly $P, Q, R, \ldots$
  - Logické spojky $\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff, \ldots$
  - Pomocné symboly závorek (,) a kvantifikátorů $\forall, \exists$

Syntax predikátové logiky

- Abeceda
  - Symboly pro proměnné $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$
  - Funkční symboly $f, g, h, \ldots$
  - Predikátové symboly $P, Q, R, \ldots$
  - Logické spojky $\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff, \ldots$
  - Pomocné symboly závorek (,) a kvantifikátorů $\forall, \exists$
- Term
  - Něco co můžeme vložit do predikátu
  - Symboly pro proměnné $\mathcal{V}$
  - Pro každý n-ární funkční symbol f a termy $t_1, \ldots, t_n$, $f(t_1, \ldots, t_n)$ je term
- Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$
  - Množina funkčních a predikátových symbolů

- Formule predikátové logiky
  - Pro každý n-ární predikátový symbol a termy $t_1, \ldots, t_n$, $P(t_1, \ldots, t_n)$ je (atomická) formule
  - Jsou-li φ, ψ formule, pak jsou formule i $\neg(\varphi), (\varphi) \vee (\psi), (\varphi) \wedge (\psi), (\varphi) \implies (\psi), (\varphi) \iff (\psi), \ldots$
  - Jsou-li t_1 a t_2 temy, pak $t_1 = t_2$ je formule
  - Je-li φ formule a x proměnná, pak $\exists x(\varphi)$ a $\forall x(\varphi)$ jsou formule
  - Množinu formulí výrokové logiky značíme $\mathcal{F}$

Výskyt proměnné

Výskyt proměnné *x* ve formuli φ je

- *vázaný*, existuje-li podformule φ, ozn. ψ, která obsahuje tento výskyt a začíná $\exists x$ nebo $\forall x$
- *volný* v opačném případě

Formule, která nemá žádný volný výskyt proměnné se nazývá *uzavřená* nebo též *sentence*

Příklad 6.1.1

Ve formuli

$$\varphi \equiv 2 \mid x \Rightarrow \exists y(y \cdot 2 = x \vee \sin(x + y) > 1)$$

kde všechny symboly mají obvyklý (matematický) význam, identifikujte (vč. arity, pokud to dává smysl) všechny

a) proměnné (vč. jejich výskytů),
b) funkční a predikátové symboly.
c) termy,
d) logické spojky,
e) atomické formule,

U funkčních a predikátových symbolů určete i jejich aritu.

Příklad 6.1.2

Uvažujte jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky obsahující funkční a predikátové symboly zadané následující tabulkou:

symbol	typ	arita
f	funkční	3
d	funkční	0
P	predikátový	1
Q	predikátový	2

Rozhodněte, která z následujících slov jsou **termy** a **formule** jazyka $\mathcal{L}$:

a) $Q(d, d)$,

b) z,

c) $f(f(d))$,

d) $f(d, f(d, d, d), d)$,

e) $y = x$,

f) $\forall x(Q(d, d) = x)$,

g) $\forall y(f(f(x, y, z), d, d))$,

h) $\forall x(Q(f(f(d, d, d), y, z), f(z, d, y)) \vee P(f(d, z, x)))$.

Obsah

Sémantika predikátové logiky

- Interpretace I
  - neprázdné univerzum (doména) $\mathcal{D}_I$
  - n-ární relace $I(P) \subseteq \mathcal{D}_I^n$ pro každý n-ární predikátový symbol P
  - Zobrazení $I(f) : \mathcal{D}_I^n \to \mathcal{D}_I$ pro každý n-ární funkční symbol f
- Valuace příslušící I
  - Zobrazení $V : \mathcal{V} \to \mathcal{D}_I$
  - Přiřazuje proměnným prvky univerza
- Hodnota termu t v interpretaci I a valuaci V
  - Prvek $|t|_{I,V} \in \mathcal{D}_I$
  - $|t|_{I,V} = V(x)$ pro pokud je t proměnná
  - $|t|_{I,V} = I(f)(|t_1|_{I,V}, \dots, |t_n|_{I,V})$ pokud $t = f(t_1, \dots, t_n)$

$$\forall x((P(x,y) \vee P(f(x), g(x,y))) \implies Q(x,x,y))$$

Sémantika predikátové logiky 2

Formule φ je pravdivá v interpretaci I a valuaci V, značeno $\models_I^V \varphi$, právě když platí jedna z možností

- $\varphi \equiv P(t_1, \ldots, t_n)$ a $(|t_1|_{I,V}, \ldots, |t_n|_{I,V}) \in I(P)$
- $\varphi \equiv t_1 = t_2$ a $|t_1|_{I,V} = |t_2|_{I,V}$
- …Logické operátory …
- $\varphi \equiv \forall x(\psi)$ a pro všechny prvky univerza $d \in \mathcal{D}$ platí $\models_I^{V'} \psi$, kde V' vznikla z V nahrazením obrazu x prvkem d
- $\varphi \equiv \exists x(\psi)$ a existuje prvek univerza $d \in \mathcal{D}$, pro který platí $\models_I^{V'} \psi$, kde V' vznikla z V nahrazením obrazu x prvkem d

Pojmy

- Formule φ pravdivá v interpretaci I, značíme $\models_I \varphi$, jestliže je pravdivá v interpretaci I pro libovolnou valuaci V.
- Formule φ logicky pravdivá (tautologie), značíme $\models \varphi$, jestliže je pravdivá v každé interpretaci.

Příklad 6.2.1

Ukažte, že existenční kvantifikátor $\exists$ lze v predikátové logice zavést jako syntaktickou zkratku, tj. ekvivalentními úpravami vyjádřete $\exists x \varphi$ bez použití symbolu $\exists$.

Příklad 6.2.2 b)

Nalezněte negace následujících formulí tak, aby se symboly $\neg$ nacházely výhradně bezprostředně před predikátovými symboly.

$$\exists x((P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x))$$

Příklad 6.2.3

Uvažte formuli $\varphi \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y \neg Z(x, y))$. Pro každou z následujících interpretací rozhodněte, zda je v ní formule φ pravdivá.

a) $\mathcal{D}_I = \{0\}$, $I(P) = \varnothing$, $I(Z) = \varnothing$

b) $\mathcal{D}_I = \mathbb{Z}$, $I(P) = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $I(Z) = \mathbb{Z}^2$

c) $\mathcal{D}_I = \mathbb{Z}$, $I(P) = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $I(Z) = \leq$

d) $\mathcal{D}_I = \{0\}$, $I(P) = \{0\}$, $I(Z) = \mathrm{id}$[1]

[1] Relace identity obsahuje dvojice identických prvků, $\mathrm{id} := \{(x, y) \in \mathcal{D}_I^2; x = y\}$.

Příklad 6.2.7

Rozhodněte, v jakých interpretacích jsou pravdivé následující formule:

a) $\forall x \exists y \exists z(((x = y) \vee (x = z)) \wedge (y \neq z))$

b) $\forall x \forall y \forall z((Q(x, y) \wedge Q(y, z)) \Rightarrow Q(x, z))$

c) $\forall x(\neg Q(x, x) \wedge \exists y Q(x, y))$

d) $\forall x(x \neq f(x) \wedge x = f(f(x)))$

Příklad 6.2.8

Uvažujte jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky obsahující binární funkční symbol $+$ a unární predikátový symbol K. Uvažujte interpretaci (realizaci) I jazyka $\mathcal{L}$, kde univerzum tvoří všechna celá čísla $\mathbb{Z}$, $+$ se realizuje jako sčítání a $K(x)$ jako „x je kladné“. Nalezněte

a) fomuli $\alpha(x)$, která je pravdivá v I právě v těch valuacích V, že $V(x) = 0$,

b) fomuli $\beta(x, y)$, která je pravdivá v I právě v těch valuacích V, že $V(x) < V(y)$,

c) fomuli $\gamma(x, y)$, která je pravdivá v I právě v těch valuacích V, že $V(x) = -V(y)$,

d) fomuli $\delta(x)$, která je pravdivá v I právě v těch valuacích V, že $V(x) = 1$.

Při definování formulí se můžete odvolat na formule, které jste již zavedli v předchozích bodech.

Obsah

Prenexová normální forma

Uzavřená formule φ se nachází v *prenexové normální formě (PNF)*, je-li tvaru

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi,$$

kde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \dots, x_n$ jsou proměnné a formule ψ je v konjunktivní normální formě (zejména tedy neobsahuje žádný kvantifikátor).

Uzavřená formule φ se nachází ve *Skolemově normální formě*, nachází-li se v prenexové normální formě a obsahuje pouze obecné kvantifikátory $\forall$.

Algoritmus převodu do PNF (a Skolemovy NF)

I. Eliminujeme zbytečné kvantifikátory.
II. Přejmenujeme proměnné tak, aby u každého kvantifikátoru byla jiná proměnná.
III. Eliminujeme jiné spojky než $\vee$, $\wedge$, $\neg$.
IV. Přesuneme negaci až před samotné predikáty.
V. Kvantifikátory přesuneme ven z jádra formule.
VI. Jádro formule upravíme do KNF pomocí distributivních zákonů.
VII. (Odstraníme existenční kvantifikátory zakódováním do předchozích všeobecně kvantifikovaných proměnných.)

Příklad 6.3.1 a)

Převeďte následující formule do prenexové normální formy a proveďte skolemizaci.

$$(\forall x \exists y Q(x, y) \vee \exists x \forall y P(x, y)) \wedge \neg \exists x \exists y \forall z R(x, y, z)$$