

# Dekompozice problému, problémy s omezujícími podmínkami

**Jindřich Matuška**

Faculty of Informatics, Masaryk University

17. října 2024

# Čas na odpovědníky

# Obsah

Dekompozice, AND/OR grafy

Jupyter lab 1

Problémy s omezujícími podmínkami

Jupyter lab 2

# Obsah

Dekompozice, AND/OR grafy

Jupyter lab 1

Problémy s omezujícími podmínkami

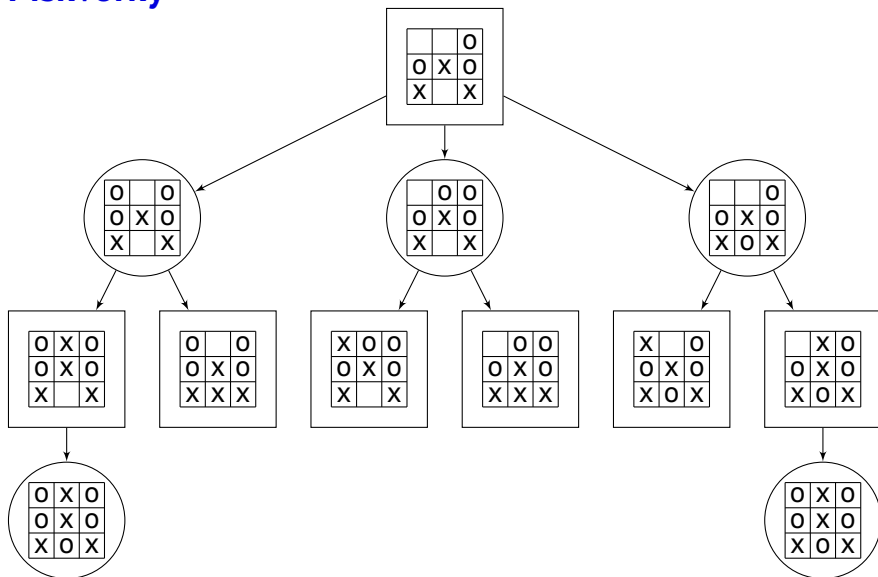
Jupyter lab 2

# AND/OR graf

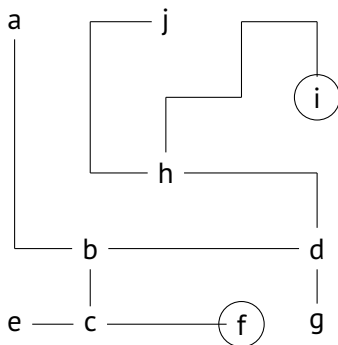
## Syntax

- orientovaný graf
- vnitřní vrcholy typu **AND** nebo **OR**
  - značíme kolečkem (AND) či čtverečkem (OR)
- koncové vrcholy s přiřazenou hodnotou

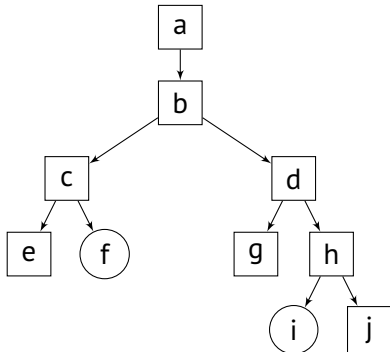
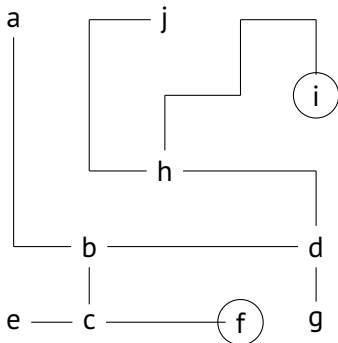
# Piškvorky



# Bludiště (vyhledávací strom)



# Bludiště (vyhledávací strom)





## Strom řešení, Splnitelnost

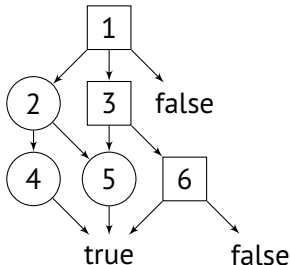
Strom řešení  $T$  problému  $P$  s AND/OR grafem  $G$

- podgraf grafu  $T \subseteq G$ ,  $T$  je strom
- kořen  $T$  je vrchol reprezentující  $P$
- pro uzel  $T$  typu AND jsou všichni jeho následovníci z  $G$  v  $T$
- pro uzel  $T$  typu OR je právě jeden jeho následovník z  $G$  v  $T$

Uzel je splněný tehdy, když pro něj existuje strom řešení se všemi koncovými vrcholy nastavenými na *true*.

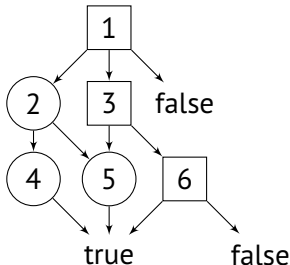
# Strom řešení, Splnitelnost

Je uzel 1 splnitelný? Kolik má stromů řešení, které jej splňují?



## Strom řešení, Splnitelnost

Je uzel 1 splnitelný? Kolik má stromů řešení, které jej splňují?



Je splnitelný, splňují jej indukované grafy na vrcholech

$\{1, 2, 4, 5, true\}, \{1, 3, 5, true\}, \{1, 3, 6, true\}$

## Příklad 3.1.2

Ukažte, že každý AND/OR graf lze převést na ekvivalentní bipartitní AND/OR graf, ve kterém jsou následníky vrcholů typu AND vždy vrcholy typu OR a opačně. Jaké to má praktické důsledky pro implementaci AND/OR grafů?

## Příklad 3.1.2

Ukažte, že každý AND/OR graf lze převést na ekvivalentní bipartitní AND/OR graf, ve kterém jsou následníky vrcholů typu AND vždy vrcholy typu OR a opačně. Jaké to má praktické důsledky pro implementaci AND/OR grafů?

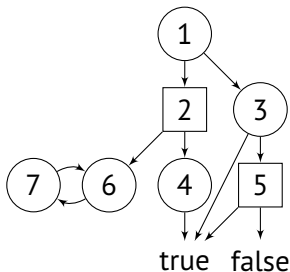
Pokud jsou v grafu nějaké uzly stejného typu spojené hranou, pak je tento graf ekvivalentní s grafem, ve kterém jsou tyto uzly nahrazeny jedním uzlem, který má výstupní hrany do všech uzlů, které jsou sjednocením potomků těchto uzlů.

$$(P \wedge A) \wedge (B \iff P) \iff A \wedge B$$

$$(P \vee A) \vee (B \iff P) \iff A \vee B$$

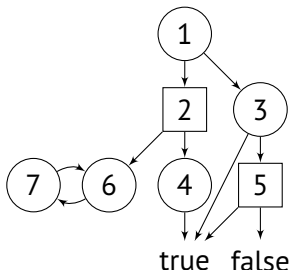
## Příklad 3.1.4

Rozhodněte, zda je počáteční uzel, značené 1, splněn v následujícím AND/OR grafu. Spočtete také, kolik splňujících stromů řešení existuje.



## Příklad 3.1.4

Rozhodněte, zda je počáteční uzel, značené 1, splněn v následujícím AND/OR grafu. Spočtete také, kolik splňujících stromů řešení existuje.



Pouze 1 řešení  $\{1, 2, 3, 4, 5, true\}$

Proč není některé řešení zahrnující uzly 6, 7 splňující?

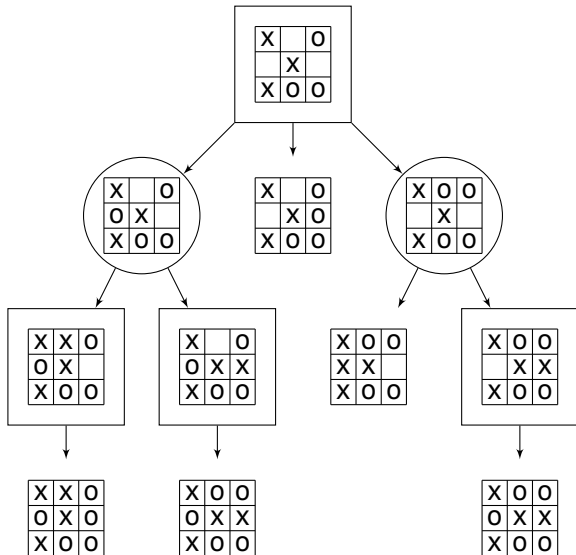
## Příklad 3.1.6

Uvažte rozehranou partii piškvorek zobrazenou na obrázku, v níž je právě na tahu hráč kreslící kolečka. Sestrojte AND/OR graf pro tuto partii. Nalezněte stromy řešení tohoto AND/OR grafu a interpretujte jejich vztah k výsledku partie.

X		O
	X	
X	O	O



# Příklad 3.1.6



# Obsah

Dekompozice, AND/OR grafy

Jupyter lab 1

Problémy s omezujícími podmínkami

Jupyter lab 2

# Jupyter lab 1 - Dragon problem

- Reprezentace problému jako AND/OR graf
- Sémantika AND a OR uzlů
- Výpis plánu řešení

# Obsah

Dekompozice, AND/OR grafy

Jupyter lab 1

**Problémy s omezujícími podmínkami**

Jupyter lab 2

# Problémy s omezujícími podmínkami

- CSP – Constraint satisfaction problem
- Deklarativní programování
- Definujeme očekávané vlastnosti řešení
  
- Obarvení grafu
- Algebrogram
- Problém N dam

## Odvození typů

U následujícího programu poved'te typovou inferenci (tj. odvození typů) funkcí funkcí  $f$  a  $g$ . Neuvažujte přetížení, funkce budou mít vždy jeden typ.

$$x = f(g(\emptyset))$$
$$x = f(x)$$
$$x = g(x)$$

# Problém s omezujícími podmínkami

- soubor proměnných  $X_1, \dots, X_n$  s neprázdnými doménami  $D_1, \dots, D_n$
- soubor omezení  $C_1, \dots, C_m$ ; každé omezení je podmnožinou  $D_1 \times \dots \times D_n$
- někdy navíc účelová funkce  $f : D_1 \times \dots \times D_n \rightarrow \mathbb{R}$
- Řešením je  $n$ -tice  $(x_1, \dots, x_n)$ , která splňuje všechna omezení
  - $(x_1, \dots, x_n) \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, m\}} C_i$
- Pokud je řešení více, můžeme hledat takové, které maximalizuje (či minimalizuje) účelovou funkci

## Graf stavů

- Stromová struktura
- Každý uzel přiřazuje hodnotu jedné proměnné
- List (Koncový uzel) pokud již nelze rozšířit bez porušení pravidel
- Cílová podmínka – přiřazení je úplné



## Příklad 3.2.1

Sestavte graf stavů pro následující CSP. Proměnné přiřazujte v sekvenčním pořadí podle jejich deklarace. Popište řešení.

$A \in 2..4$

$B \in 2..3$

$C \in 0..6$

$A - B \geq C$

$A * (B-1) \neq B + C$

$A \neq B$

## Příklad 3.2.3

Jako kouzelný čtverec označíme čtvercovou matici, kde součet čísel na každém řádku a v každém sloupci je stejný. Jednotlivé buňky mohou nabývat celočíselných hodnot mezi 1 a  $n^2$ , kde  $n$  je dimenze uvažované matice.

Jedním z netriviálních řešení pro  $n = 3$  je kouzelný čtverec níže. Formulujte tento problém jako CSP pro uvedené  $n = 3$ . Kromě omezení nezapomeňte uvést význam zavedených proměnných a jejich domény.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

# Obsah

Dekompozice, AND/OR grafy

Jupyter lab 1

Problémy s omezujícími podmínkami

Jupyter lab 2

## Jupyter lab 2 – Constraint satisfaction problems

- Seznámení s knihovnou `constraint`
- Map coloring problem
- Problém 8 dam