# Výroková logika

**Jindřich Matuška**

Faculty of Informatics, Masaryk University

24. října 2024

# Čas na odpovědníky

# Obsah

# Obsah

# Syntax výrokové logiky

- Abeceda
  - Výrokové proměnné $\mathcal{P} = \{p, q, r, \ldots\}$
  - Logické spojky $\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff, \ldots$
  - Pomocné symboly závorek (, )
- Formule výrokové logiky
  - Každá proměnná $p \in \mathcal{P}$ je formule
  - Jsou-li $p, q$ formule, pak jsou formule i $\neg(p), (p) \vee (q), (p) \wedge (q), (p) \implies (q), (p) \iff (q), \ldots$
  - Množinu formulí výrokové logiky značíme $\mathcal{F}$

# Obsah

# Sémantika výrokové logiky

- Interpretace *I*
  - Zobrazení $I : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$
  - Přiřazuje výrokovým proměnným 1 (pravda) či 0 (nepravda)
- Valuace příslušící *I*
  - Zobrazení $I : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$
  - Rozšíření interpretace na všechny výrokové proměnné podle sémantiky spojek

# Pojmy

- Formule $\varphi$ pravdivá v interpretaci $I$ – $I(\varphi) = 1$
- Formule $\varphi$ logicky pravdivá (tautologie) – $\forall I.\ I(\varphi) = 1$
- Kontradikce – $\forall I.\ I(\varphi) = 0$
- Splnitelná – $\exists I.\ I(\varphi) = 1$
- Sémanticky ekvivalentní formule $\varphi, \psi$ – $\forall I.\ I(\varphi) = I(\psi)$

# Pravdivostní tabulka

| $p$ | $q$ | $p$ | $\wedge$ | $(q$ | $\Longrightarrow$ | $\neg p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

# Příklad 5.2.4.

Mějme formuli výrokové logiky $\varphi \equiv (p \wedge q) \iff (\neg q \wedge r)$. Bez použití pravdivostní tabulky určete:

- zda je $\varphi$ pravdivá v interpretaci $I(p) = 0, I(q) = I(r) = 1$,
- zda je $\varphi$ kontradikcí,
- zda je $\varphi$ tautologií,
- zda je $\varphi$ splnitelná; případně nalezněte nějaký její model.

# Příklad 5.2.5.

Udejte příklad formule $\varphi$ takové, že:

- $\varphi$ obsahuje právě 3 různé výrokové proměnné a je pravdivá právě ve 3 interpretacích,
- $\varphi$ obsahuje právě 3 různé výrokové proměnné, je pravdivá právě ve 3 interpretacích a obsahuje pouze logickou spojku $\implies$,
- $\varphi$ je kontradikce, obsahuje právě 2 různé výrokové proměnné, každou dvakrát

(Uvažujte interpretaci jako zobrazení přiřazující hodnoty právě výrokovým proměnným vyskytujícím se v $\varphi$.)

# Obsah

# Normální formy

- Literál je výroková proměnná nebo její negace
- Klauzule je disjunkce literálů ($\vee$)
- Duální klauzule je konjunkce literálů ($\wedge$)

- Konjunktivní normální forma (KNF) – konjunkce klauzulí
- Disjunktivní normální forma (DNF) – disjunkce duálních klauzulí
- Úplná normální forma (ÚKNF, ÚDNF) – každá klauzule obsahuje každou výrokovou proměnnou právě jednou

# Příklad 5.3.2, 5.3.3

Použitím ekvivalentních úprav nalezněte KNF následující formule.

- $\varphi \equiv (p \implies q) \implies r$

Použitím ekvivalentních úprav nalezněte DNF následující formule.

- $\varphi \equiv (p \iff q) \implies (r \vee s)$

# Obsah

# Splnitelnost množiny formulí

Množina formulí $\mathcal{T}$ je splnitelná, jestliže existuje interpretace *I*, v níž jsou pravdivé všechny formule $\varphi \in \mathcal{T}$. O množině $\mathcal{T}$ řekneme, že je pravdivá v interpretaci *I* a tuto interpretaci nazveme modelem množiny $\mathcal{T}$.

Formule $\varphi$ logicky vyplývá z množiny formulí $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T} \models \varphi$), právě když je $\varphi$ pravdivá v každém modelu množiny $\mathcal{T}$.

# Příklad 5.4.1, 5.4.2

Určete splnitelnost následujících množin formulí. Je-li množina splnitelná, nalezněte nějaký její model. Vyhněte se použití pravdivostních tabulek.

- $\mathcal{T} = \{(p \implies q) \wedge r, q \wedge r, r \implies s, p \wedge \neg s\}$

Je množina formulí $\mathcal{T} = \emptyset$ splnitelná? Dokažte.

# Příklad 5.4.7

Uvažujte množinu formulí výrokové logiky $\mathcal{T}$ a formule $\varphi, \psi$.
Rozhodněte o platnosti následujících tvzení:

- Pokud $\mathcal{T} \models \varphi$ a $\mathcal{T} \models \psi$, pak $\mathcal{T} \models \varphi \vee \psi$
- Pokud $\mathcal{T} \models \varphi$ a $\mathcal{T} \models \psi$, pak $\mathcal{T} \models \varphi \wedge \psi$
- Pokud $\mathcal{T} \models \varphi \vee \psi$, pak $\mathcal{T} \models \varphi$ nebo $\mathcal{T} \models \psi$
- Pokud $\mathcal{T} \models \varphi \wedge \psi$, pak $\mathcal{T} \models \varphi$ a $\mathcal{T} \models \psi$
- Pokud $\mathcal{T} \models \varphi$, pak $\mathcal{T} \models \varphi \vee \psi$
- Pokud $\mathcal{T} \models \varphi$, pak $\mathcal{T} \models \varphi \wedge \psi$
- Pokud $\mathcal{T} \models \varphi$, pak $\mathcal{T} \cup \{\psi\} \models \varphi$
- Pokud $\mathcal{T} \cup \{\psi\} \models \varphi$, pak $\mathcal{T} \models \varphi$

# Příklad 5.4.8

Ukažte, že logické vyplývání $\mathcal{T} \models \varphi$ platí, právě když množina $\mathcal{T} \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná.

# Obsah

# Sémantika logické spojky

Sémantika $n$-ární logické spojky $\square$ je funkce $f_\square : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

Valuace formule $\psi \equiv \square(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ v interpretaci $I$ je dána:

$$I(\psi) = f_\square(I(\varphi_1), \ldots, I(\varphi_n))$$

Sémantika logické spojky lze definovat např. pomocí tabulky nebo již definovaných spojek

# Úplný systém logických spojek

Množina logických spojek tvoří úplný systém logických spojek, pokud lze formulemi obsahujícími pouze spojky z dané množiny vyjádřit libovolnou logickou funkci.

Například množina $\{\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff\}$ je úplný systém logických spojek.

# Příklad 5.5.1

Kolik existuje různých vzájemně neekvivalentních $n$-árních spojek?

# Příklad 5.5.5 a)

Ukažte, že $\{NOR\}$ je úplný systém logických spojek. Vyjděte z předpoklad, že $\{\implies, \neg\}$ je úplný systém logických spojek.
(Tj. vyjádřete formule $\varphi \implies \psi$ a $\neg\varphi$ pomocí formulí obsahujících pouze spojku *NOR*).

$$\varphi NOR \psi \equiv \neg(\varphi \vee \psi)$$