



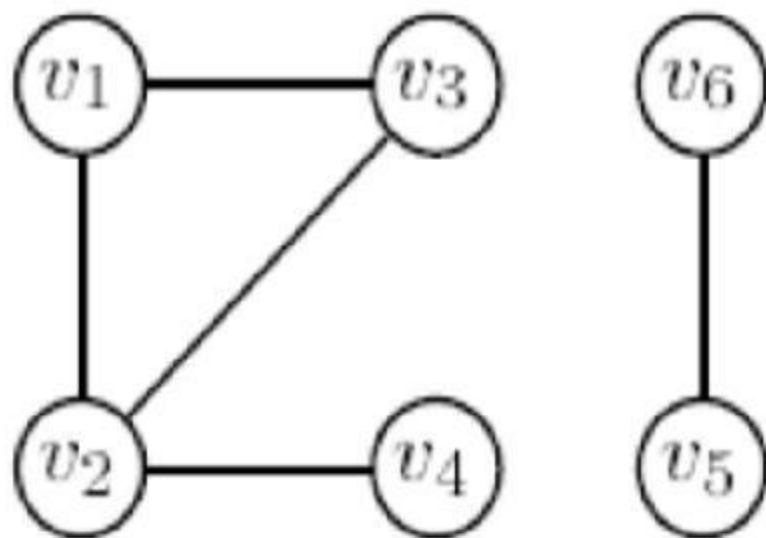
Universiteti Publik “Kadri Zeka”, Gjilan

Fakulteti i Shkencave Kompjuterike

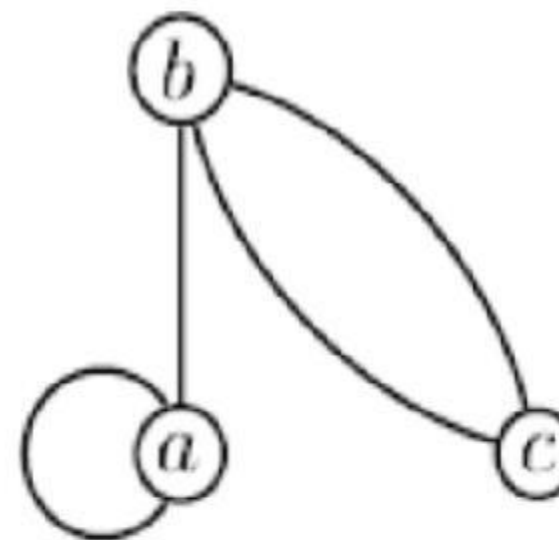
Lënda: Teoria e Grafeve

Tema:

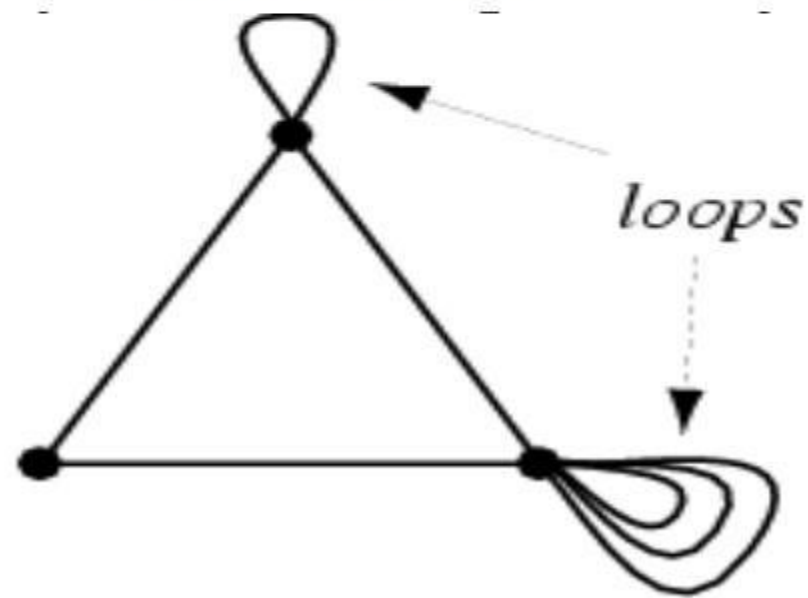
*Grafi i orientuar (i drejtuar) - Diagrafi*



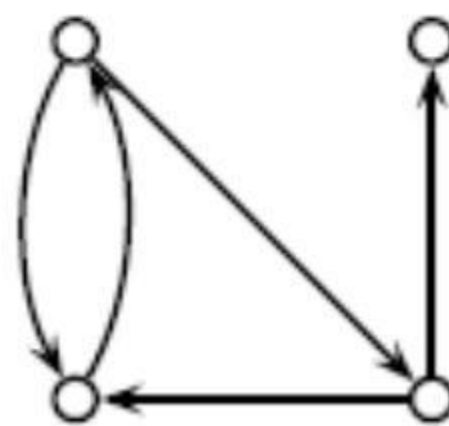
Graf i thjeshtë



Multigraf



Pseudografi



Digraf

**Përkufizim** Graf i orientuar (drejtuar) ose **digraf** quhet grafi në të cilin brinjët (degët ose linjat) janë të orientuara (drejtuara) dhe shënohet  $G = (V, E)$  ku  $E \subseteq V \times V$  dhe, për grafin e orientuar (drejtuar)  $(u, v) \neq (v, u)$ . Në grafin e orientuar (drejtuar) brinjët (degët ose linjat) vizatohen me shigjeta, Fig 1.a. Dhe fig.1.b.



fig.1.a.

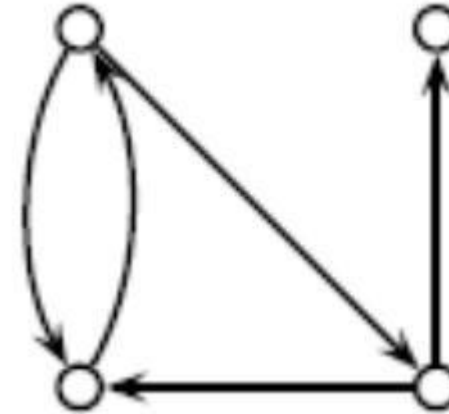
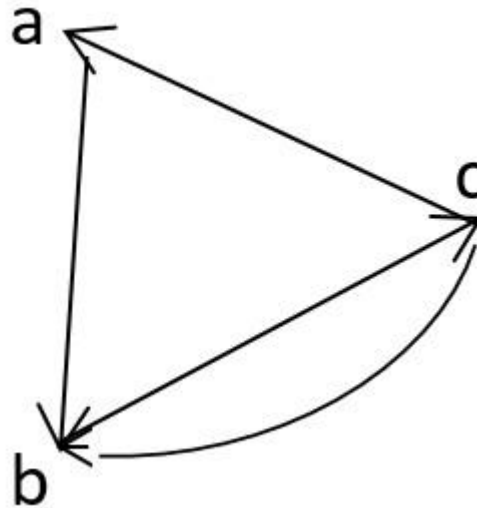


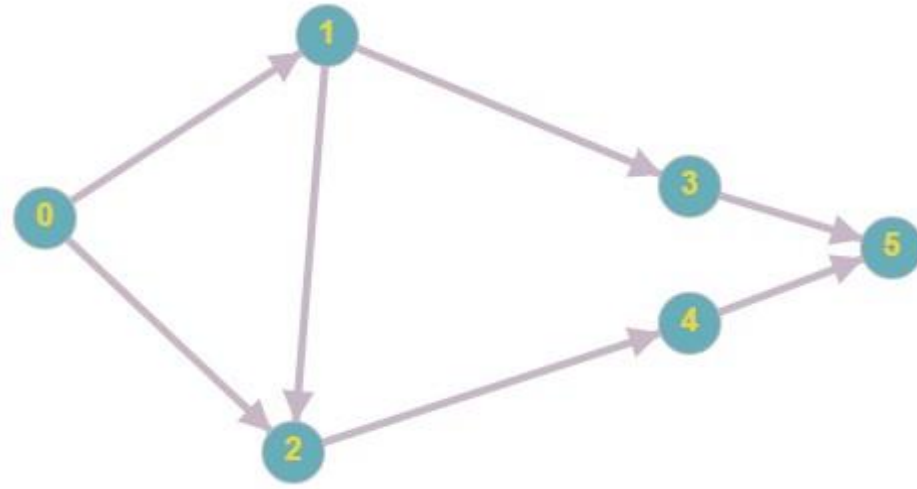
fig.1.b.

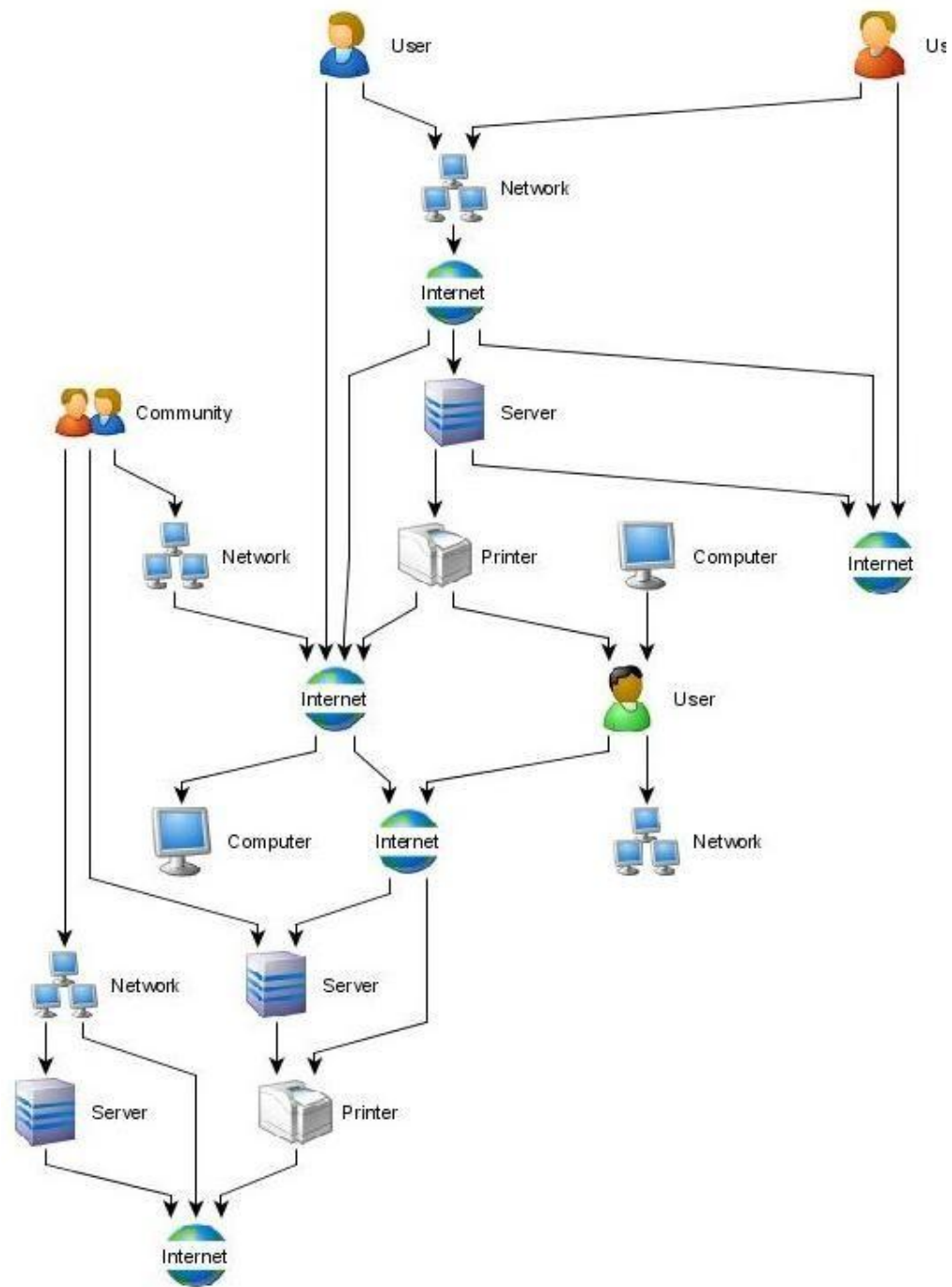
**Shembull.**

Të vizatohet digrafi  $G=(V,E)$  nëse  $V=\{a,b,c\}$  dhe  $E=\{(a,b), (b,c), (c,b), (c,a)\}$   
Zgjidhje.



**Shembull:** Në figurë është paraqitur grafi  $G = (V, E)$ , ku  
 $V = \{0,1,2,3,4,5\}$ ,  $E = \{(0,1), (0,2), (1,2), (1,3), (2,4), (3,5), (4,5)\}$



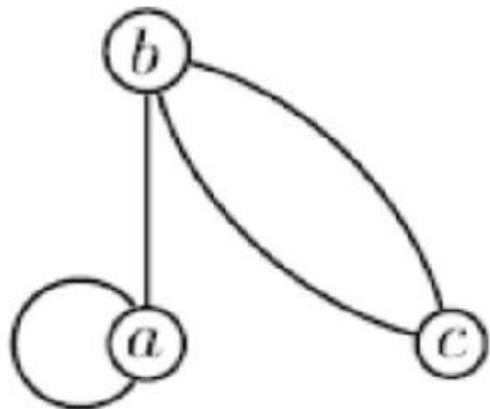


**PËRKUFIZIM.** Multigrafi i paorientuar  $G = (V, E)$  përbëhet nga bashkësia  $V$  e kulmeve (nyjeve), bashkësia  $E$  e brinjëve (degëve, linjave) dhe nga funksioni  $f$  me fillim në  $E$  dhe mbarim në bashkësinë  $\{\{u, v\}: u, v \in V, u \neq v\}$ . Brinjët (degët, linjat)  $e_1$  dhe  $e_2$  janë brinjë (degë, linja) paralele (të shumëfishta) në qoftë se  $f(e_1) \neq f(e_2)$ .

Në një multigraf brinjët (degët, linjat) e shumëfishta shoqërohen me të njëjtin çift nyjesh. Thuhet se  $\{u, v\}$  është një **brinjë (degë, linjë)** e grafit  $G =$

( )

$(V, E)$  në qoftë se ka të paktën një brinjë (degë, linjë) të tillë që  $f(e) = \{u, v\}$



Multigraf

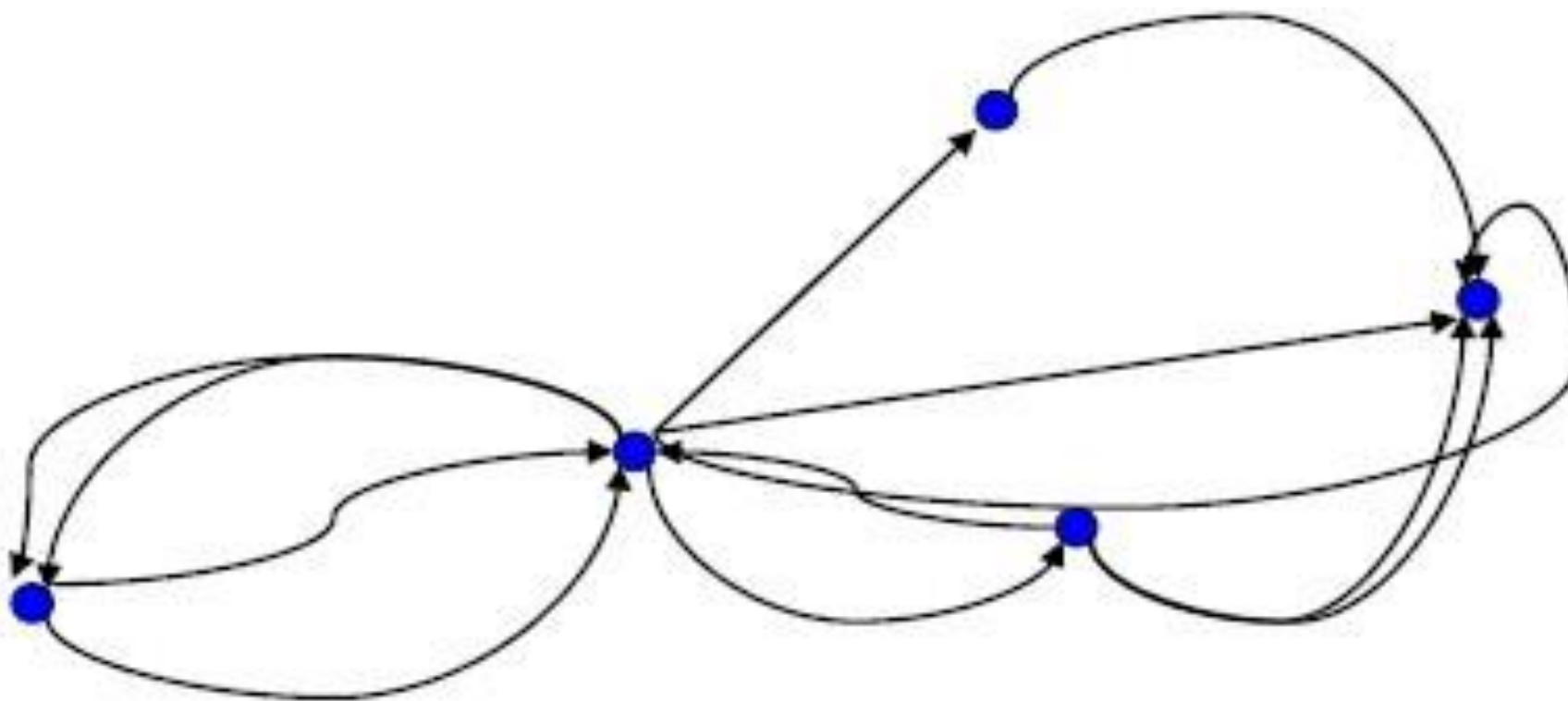
}

**Multigrafi i orientuar**  $G = (V, E)$  përbëhet, nga: bashkësia e kulmeve (nyjeve)  $V$ , bashkësia e brinjëve (degëve, linjave)  $E$  dhe nga funksioni  $f$  me fillim në  $E$  dhe mbarim në bashkësinë  $\checkmark(u, v): u, v \in V, u \neq v \checkmark$ .

Brinjët (Linjat)  $e_1$  dhe  $e_2$  janë brinjë (degë, linja) paralele (të shumëfishta) në qoftë se  $f(e_1) \neq f(e_2)$



- Multigrafët e orientuar, të cilët mund të kenë linja të shumëfishta të orientuara nga një kulm (nyje) tek një e dytë (ndoshta tek e njëjta nyje), mund të përdoren për të modeluar rrjetet me brinjë (degë, linja) të orientuara.
- Linjat e orientuara shumëfishe shoqërohen me të njëjtin çift nyjesh. Do të thuhet se  $(u, v)$  është një degë e grafit  $G = (V, E)$  po qe se ka të paktën një degë e për të cilën  $f(e) = (u, v)$ .
- Nuk do të ketë dallim ndërmjet linjës  $e$  dhe çiftit të radhitur  $(u, v)$  i cili shoqërohet me atë po qe se identiteti i degëve shumëfishe individuale nuk ka rëndësi.
- Rrjet kompjuterik me brinjë (degë, linja) paralele (të shumëfishta) me një drejtim:



Terminologjia për tipet e ndryshme të grafeve është e përmbledhur në **Tabelën 1**. Kuptimi graf përdoret për të përshkruar grafet me degë të drejtuara apo të padrejtuara, me ose pa laqe dhe me degë të shumëfishta.

Termat graf i padrejtuar ose pseudograf përdoren për një graf të padrejtuar i cili mund të ketë degë të shumëfishta dhe laqe. Kur bëhet fjalë për grafët

që kanë çifte të radhitur të lidhur (shoqëruar) me degët përkatëse të tyre gjithnjë do të përdoret mbiemri **i drejtuar**.

**TABELA 1** Terminologjia e Grafeve

.....Tipi	.....Linja	Lejohen Linja Shumëfishe ?	Lejohen Laqe ?
Graf i thjeshtë	E padrejtuar	Jo	Jo
Multigraf	E padrejtuar	Po	Jo
Pseudograf	E padrejtuar	Po	Po
Graf i drejtuar	E drejtuar	Jo	Po
Multigraf i drejtuar	E drejtuar	Po	Po

## Përkufizim:

- Nëse çifti  $(a, b)$  paraqet brinjën e grafit të orientuar, ashtu që  $a$  është kulmi i fillimit dhe  $b$  është kulmi i mbarimit i çiftit  $(a, b)$  atëherë kulmet  $a$  dhe  $b$  janë incidente me brinjën  $(a, b)$ .
- Kulmi  $a$  është fqinjë për kulmin  $b$ , kurse kulmi  $b$  është fqinjë për kulmin  $a$ .

## Përkufizim:

- Te grafi i orientuar, fuqia dalëse e kulmit  $v$  shënohet me  $outd(v)$  ose  $d^-(v)$  dhe paraqet numrin e brinjëve të cilat kulmi  $v$  është kulm i fillimit.
- Fuqia hyrëse e kulmit  $v$  shënohet me  $ind(v)$  ose  $d^+(v)$  dhe paraqet numrin e brinjëve për të cilat kulmi  $v$  është kulm i mbarimit.

## Shembull

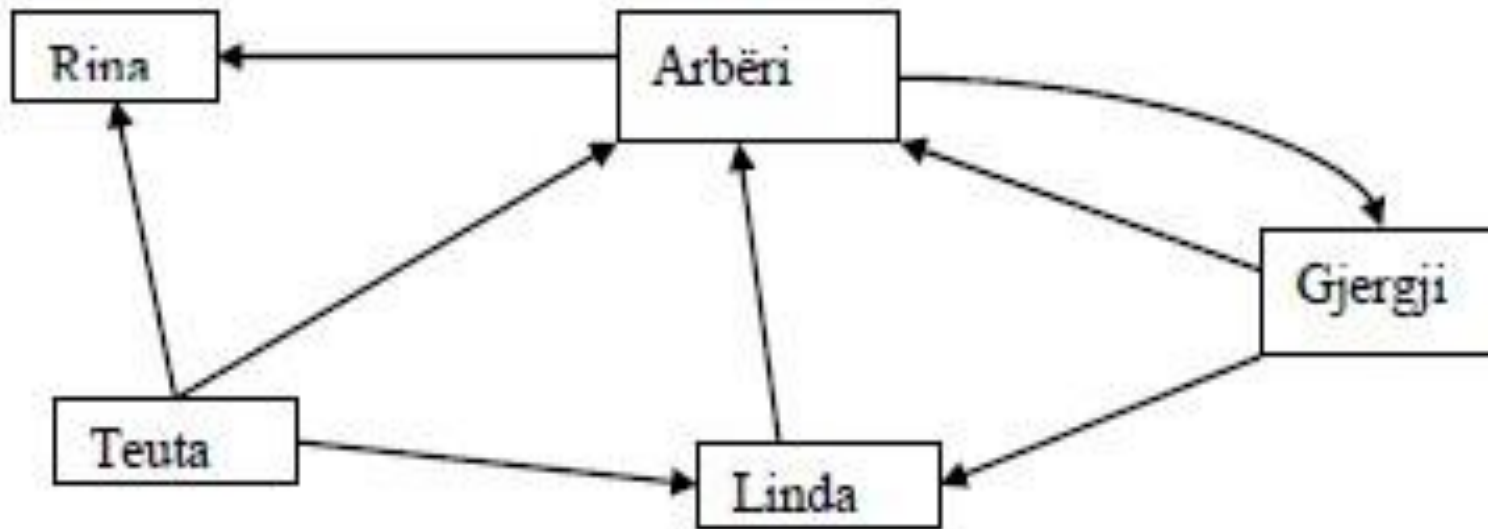
Në grafin e dhënë  $G = (V, E)$ , ku  $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,

$$E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}.$$

Ndërtoni grafin e orientuar (diagrafin) dhe gjeni:

$$\text{ind } v_0, \quad \text{ind } v_1, \quad \text{ind } v_2, \quad \text{ind}(v_4) \quad \text{dhe} \\ \text{outd}(v_0), \text{outd } v_1, \text{outd } v_2, \text{outd}(v_3), \text{outd}(v_4).$$

**Shembull .** Grafët e ndikimit (influencës). Në studimet e sjelljes në grup është vërtetuar se persona të caktuar mund të ndikojnë mendimin e të tjerëve. Për të modeluar këtë sjellje përdoret graf i drejtuar i quajtur graf ndikimi. Secili person i grupit paraqitet me një , dhe ka një brinjë (degë, linjë) me drejtim nga personi  $a$  për tek personi  $b$  në qoftë se personi  $a$  ka ndikim mbi  $b$ . Shembull i një grafi ndikimi është ai në figurë.



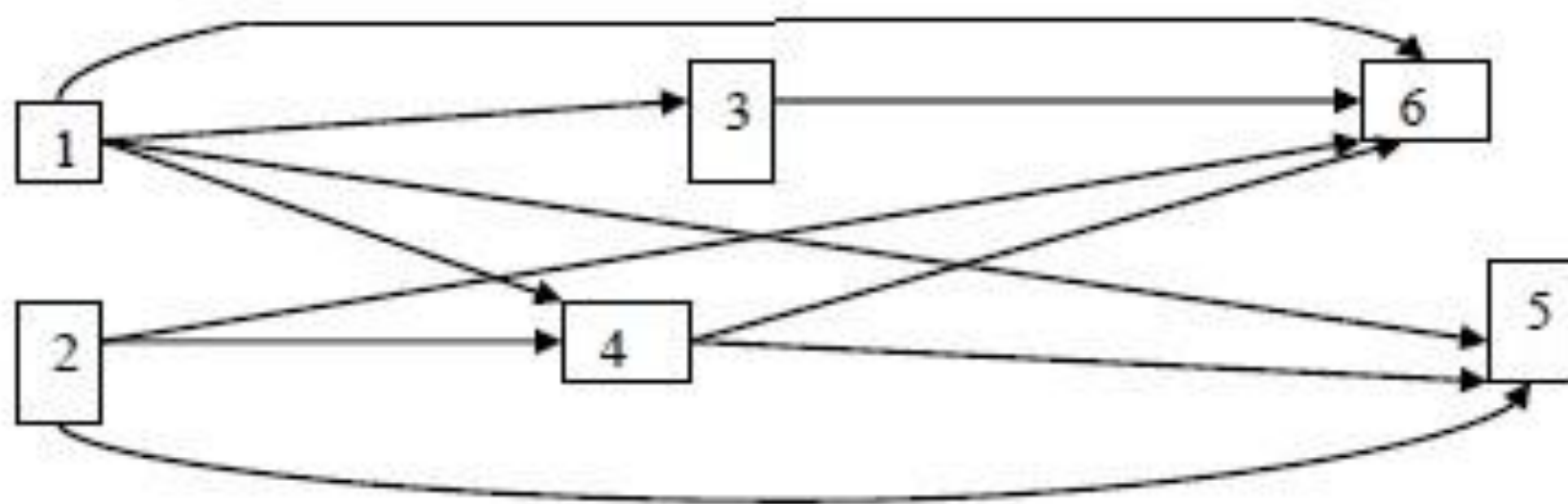
## Shembull.

Grafi Web. Rrjeti i gjërë botëror(WWW) mund të modelohet si një graf i orientuar (drejtuar) në të cilin çdo faqe interneti përfaqësohet nga një nyje, kurse një brinjë buron nga faqja  $a$  dhe përfundon në faqen  $b$  të internetit nëse ka lidhje midis këtyre dy faqeve. Meqë faqe të reja krijohen, kurse të tjera ndyshojnë vendin apo prishen grafi ndryshon në mënyrë të vazhdueshme dhe pothuajse në çdo sekondë.

**Shembull.** Grafi i Precedencës dhe i Procesimit Konkurent. Programet kompjuterike mund të ekzekutohen (zbatohen) më shpejt duke zbatuar komanda të caktuara sipas radhës. Është e rëndësishme që të mos zbatohet një komandë e cila kërkon rezultatet e komandave ende të pazbatuara. Kjo varësi e komandave nga komanda të mëparshme mund të paraqitet me anë të një grafi të drejtuar, ku çdo komandë përfaqësohet nga nyje, kurse një linjë del nga një nyje dhe përfundon tek një tjetër(e dytë) nëse komanda e përfaqësuar nga nyja e dytë nuk mund të ekzekutohet para ekzekutimit të komandës të përfaqësuar nga nyja e parë. Me fjalë të tjera, ka precedencë(ndodhje më parë) në zbatimin e komandave. Ky shembull pasqyrohet në figurë në sllajdin në vijim.

Nga ky graf kuptohet që, komanda 5 nuk mund të zbatohet para se të zbatohen komandat 1, 2 dhe 4, etj.





Grafi Precedent

## USHTRIME

1. Çfarë lloj grafi mund të përdoret për të modeluar një sistem rrugor midis qytete kryesore në të cilin:
  - a) ka një linjë midis nyjeve që përfaqësojnë qytetet nëse ka një autostradë që lidh gjithë qytetet.
  - b) Ka një linjë midis nyjeve që përfaqësojnë qytetet për çdo autostradë që lidh qytetet.
  - c) Ka një linjë midis nyjeve që përfaqësojnë qytetet për çdo autostradë me dy tyre dhe ka një lak në nyje nëse ka një unazë rrugore që qarkon qytetin.
2. Të ndërtohen: një graf i thjeshtë, një multigraf që të mos jetë graf i thjeshtë, një pseudograf që të mos jetë multigraf, një graf i drejtuar, një multigraf i drejtuar.

3. Grafi i prerjes i një bashkësie bashkësish  $A_1, A_2, \dots, A_n$  është grafi i përbërë nga nyjet që përfaqësojnë secilën nga këto bashkësi dhe nga linjat që bashkojnë dy nyje në qoftë se bashkësitë përkatëse e kanë prerjen jo boshe. Të ndërtohen grafet për bashkësitë e mëposhtëme:

a)  $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}, A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$

b)

$$A_1 = \{x | x < 0\}, A_2 = \{x | -1 < x < 0\}, A_3 = \{x | 0 < x < 1\}, A_4 = \{x | -1 < x < 1\}, A_5 = \{x | x > -1\}, A_6 = R$$



4. Të ndërtohet një graf njohje për persona të zgjedhur nga vetë studenti ku 6 persona njohin njëri-tjetrin kurse 4 persona nuk njihen.

5. Të ndërtohet një graf ndikimi për një grup personash për të cilin keni dijeni për ndikimin mbi njëri-tjetrin.

6. a) Të spjegohet se si mund të përdoren grafët për të modeluar mesazhet e posteve elektronike në një rrjet; b) Të vizatohet një graf që modelon postën elektronike dërguar në një rrjet në një javë të caktuar.

7. Të përshkruhet dhe të vizatohet një graf që modelon martesat midis njerzve. Çfarë vetie të veçantë ka ky graf?