



Universiteti Publik “Kadri Zeka”, Gjilan

Fakulteti i Shkencave Kompjuterike

Lënda: Teoria e Grafeve

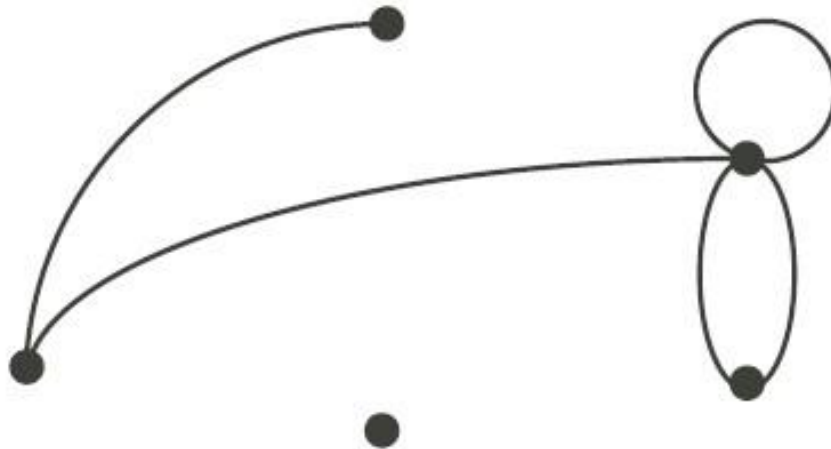
Tema:

Koncepti i Grafit

Perkufizime

Konceptualisht, *grafi* formohet nga *kulmet* (*nyjet*) dhe *brinjët* (*degët*) që lidhin këto kulme.

Shembull: Grafi i paraqitur në figurë është i përbërë me kulme dhe brinjë. Pikat e zeza paraqesin kulmet ndërsa vijat që lidhin këto pika paraqesin brinjët.



Përkufizim. Grafi përbëhet prej bashkësisë së fundme V , e cila quhet bashkësia e kulmeve (nyjeve) dhe koleksionit (familjes) E të nënbashkësive dy elementëshe të bashkësis V .

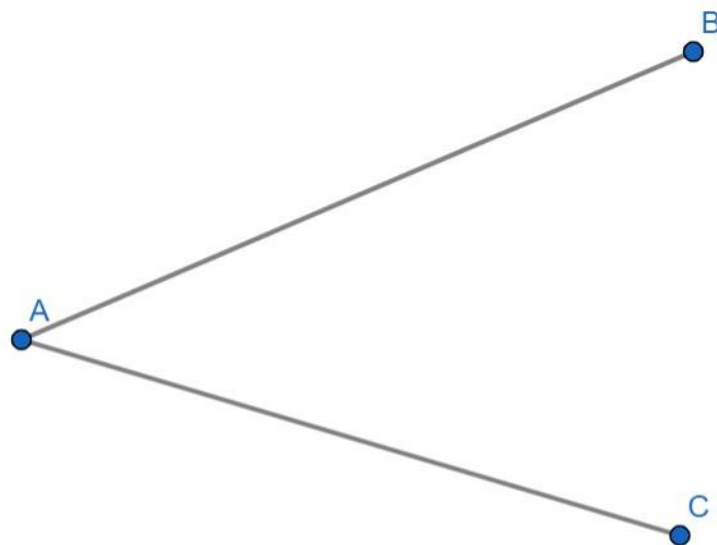
Bashkësia E quhet bashkësia e brinjëve (degëve) të grafit G .

Elementet e bashkësisë E quhen brinjë (degë).

Grafi simbolikisht shënohet me $G = G(V, E)$ ose $G = (V, E)$.

Kulmet (nyjet) a dhe b të bashkësisë V janë të ngjitura ose të lidhura me ndihmën e brinjës (degës) $\{a, b\}$ nëse $\{a, b\} \in E$.

Shembull. Në figurë kemi paraqitur grafin $G(V, E)$,



a, b, c janë kulme (nyje) të grafit G .

Bashkësia e kulmeve shënohet me $V = \{a, b, c\}$.

$\{a, b\}, \{a, c\}$ janë brinjë të grafit G .

Bashkësia E paraqet koleksionin (familjen) e bashkësive dyelementëshe,

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}.$$

Përkufizim. Nëse bashkësia $\{a, b\}$ paraqet brinjë(degë), atëherë a dhe b quhen pika të skajshme të brinjës (degës) $\{a, b\}$.

Për brinjën (degën) $\{a, b\}$ thuhet se është incidente me kulmet (nyjet) a dhe b . Anasjelltas, thuhet se kulmet (nyjet) a dhe b janë incidente me degën $\{a, b\}$.

Dy kulme (nyje) janë fqinje nëse paraqesin pikat e skajshme të brinjës (degës) ose, ekuivalent me këtë,

Nëse dy kulme (nyje) janë incidente me brinjën (degën) e njejtë ato janë fqinje.

Dy degë janë fqinje nëse janë incidence me të njëjtin kulm (nyje).

Shembull. Paraqitni grafen G në forma të ndryshme nëse $V = \{a, b, c\}$ dhe $E = \{\{a, b, b, c\}\}$.

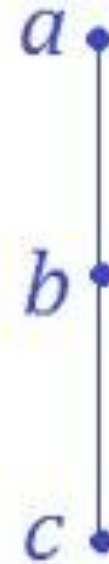
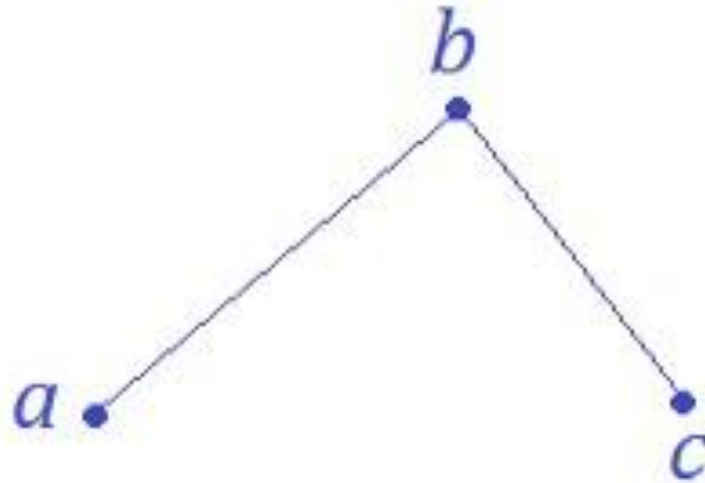
Gjeni:

- pikat e skajshme të çdo brinje në graf,
- kulmet fqinje në graf dhe
- brinjët fqinje në graf.

Pika të skajshme të brinjës $\{a, b\}$ janë pikat a dhe b ndërsa pika të skajshme të brinjës $\{b, c\}$ janë pika b dhe c .

Kulmet a, b dhe b, c janë kulme fqinje, kurse a dhe c nuk janë kulme fqinje.

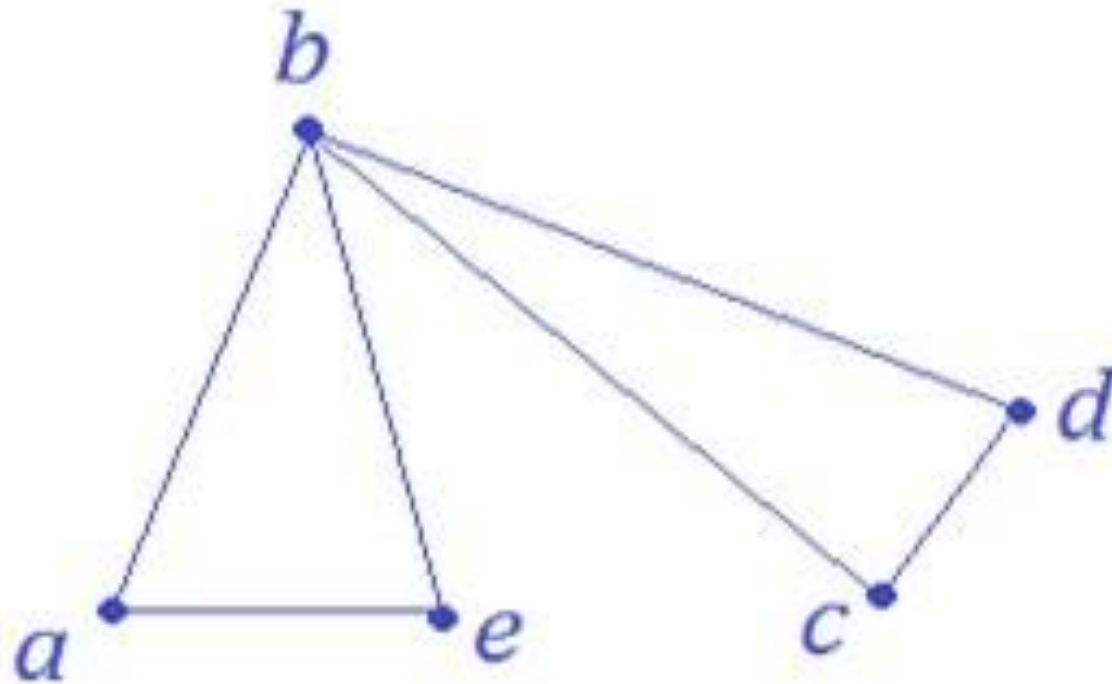
Brinjë fqinje janë $\{a, b\}, \{b, c\}$



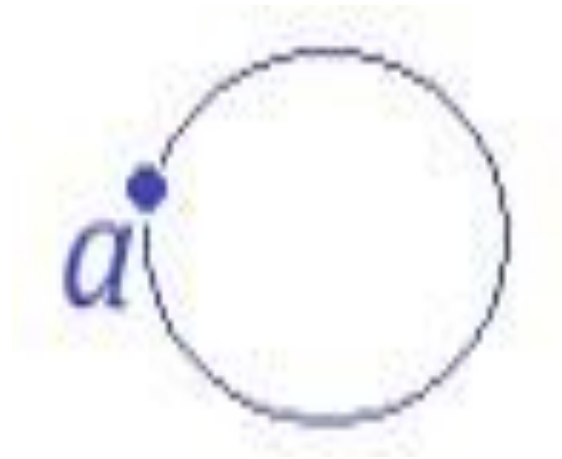
Shembull . Caktoni grafin $G = (V, E)$ për të cilin $V = \{a, b, c, d, e\}$ kurse $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}\}$.

- Kulmet fqinje dhe jofqinje
- Brinjët fqinje dhe jofqinje

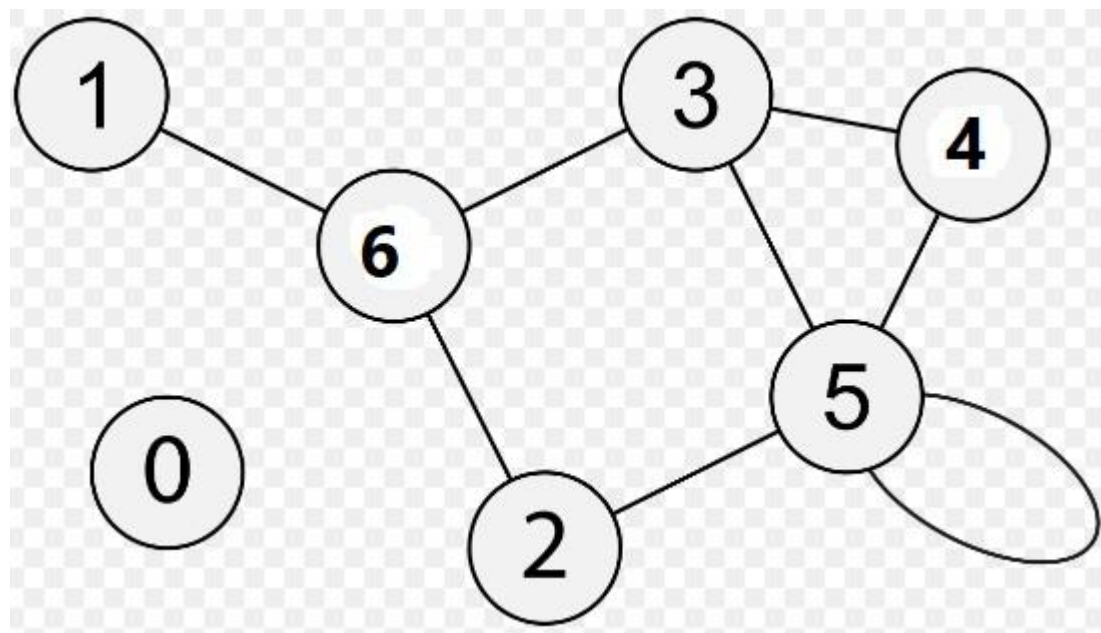
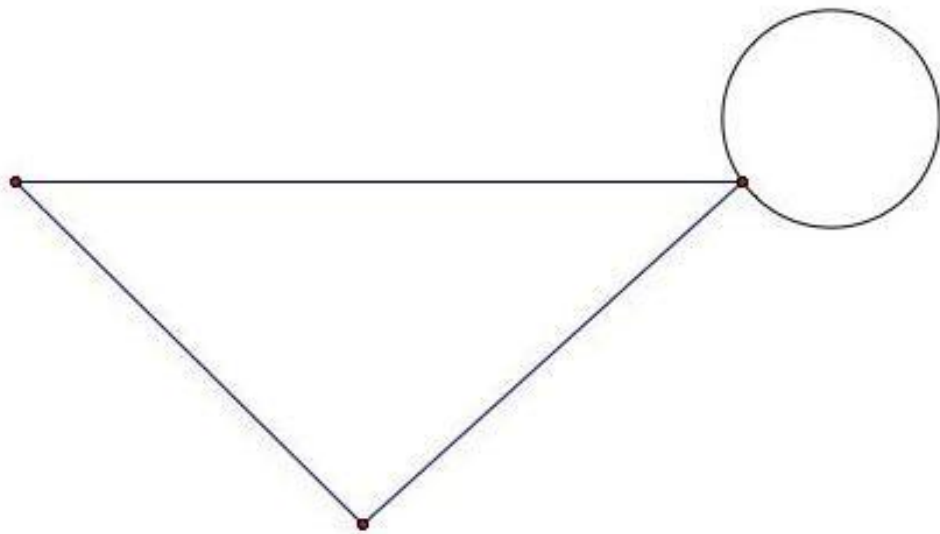
- Kulmet fqinje janë b me a , b me e , b me c , b me d , a me e dhe c me d .
- Kulmet jo fqinje a me c , a me d , e me c dhe e me d .
- Brinjët fqinje $\{a, b\}$ me $\{a, e\}$, $\{b, a\}$ me $\{b, e\}$, ... etj



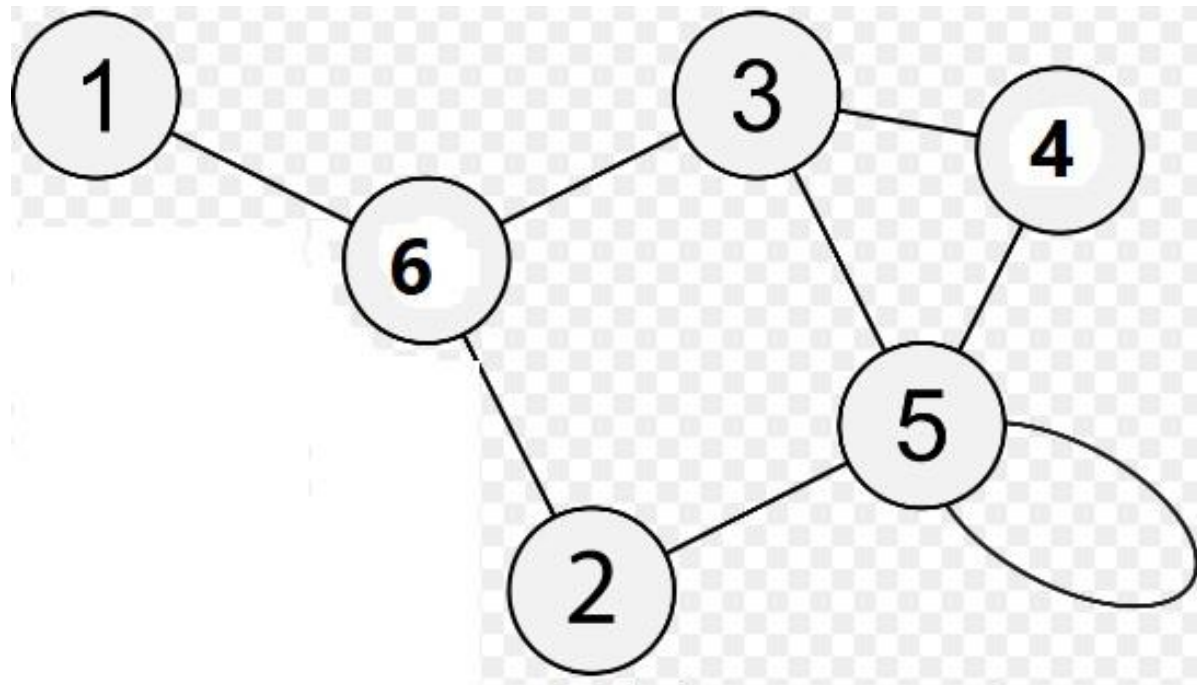
Përkufizim. *Lak* quhet brinja (dega) e cila e lidhë kulmin (nyjen) me vetëveten, dhe shënohet me $\{a, a\}$.



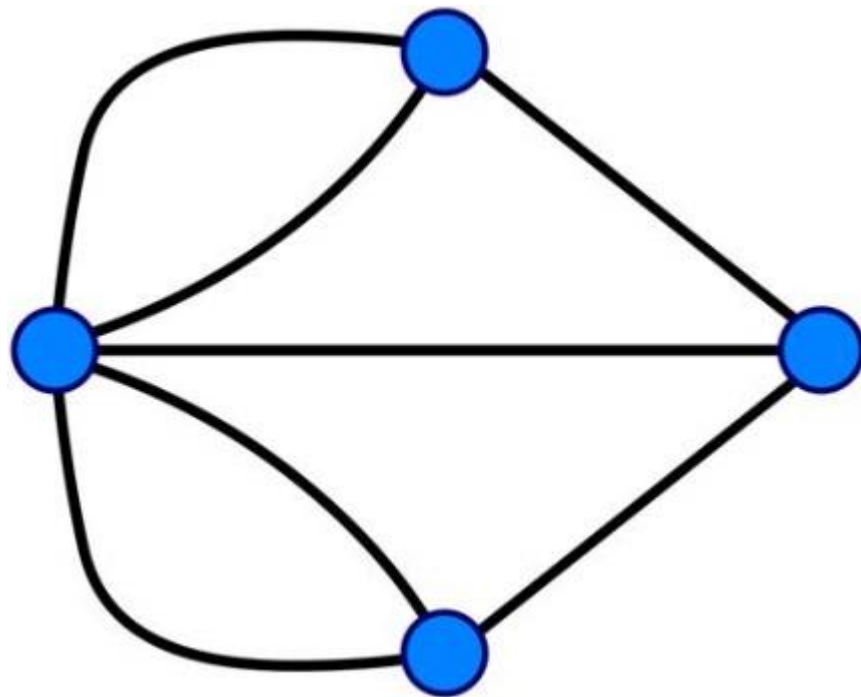
Përkufizim. Nëse në përkufizimin e grafit përfshim edhe laqet, strukturën e fituar do ta quajm graf me laqe.



Grafi i dhënë në figurë është graf me laqe, $G = (V, E)$, ku $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 kurse $E = \{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 5\}\}$.

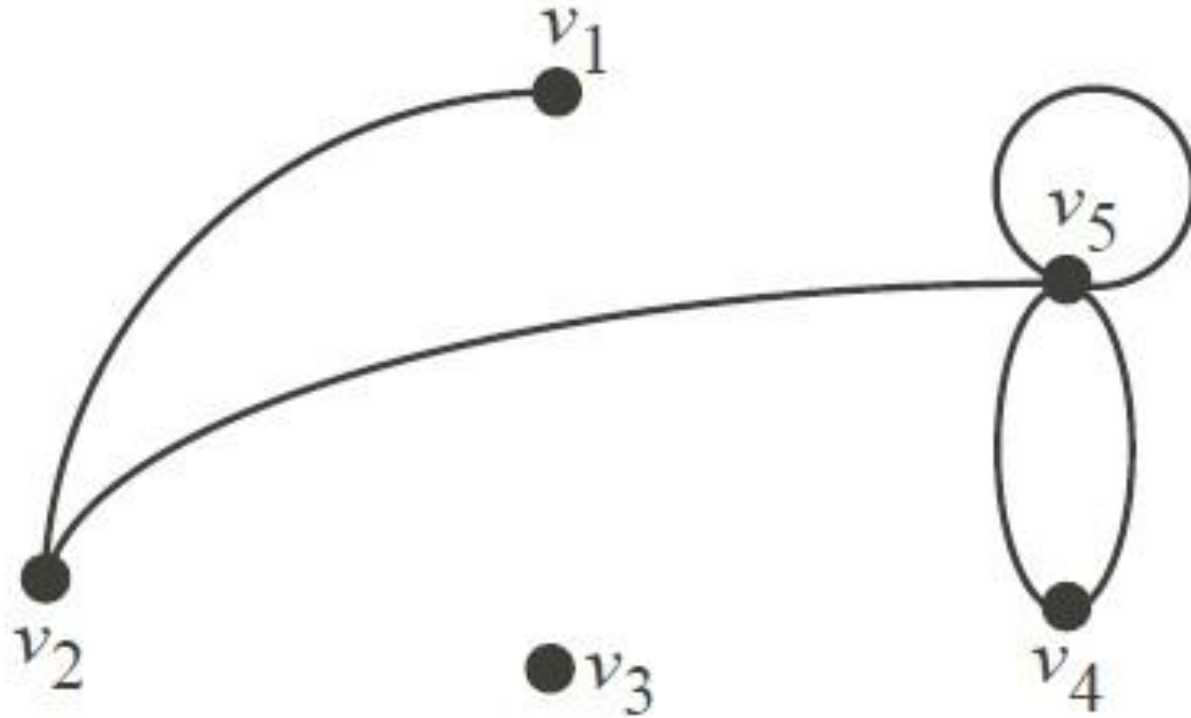


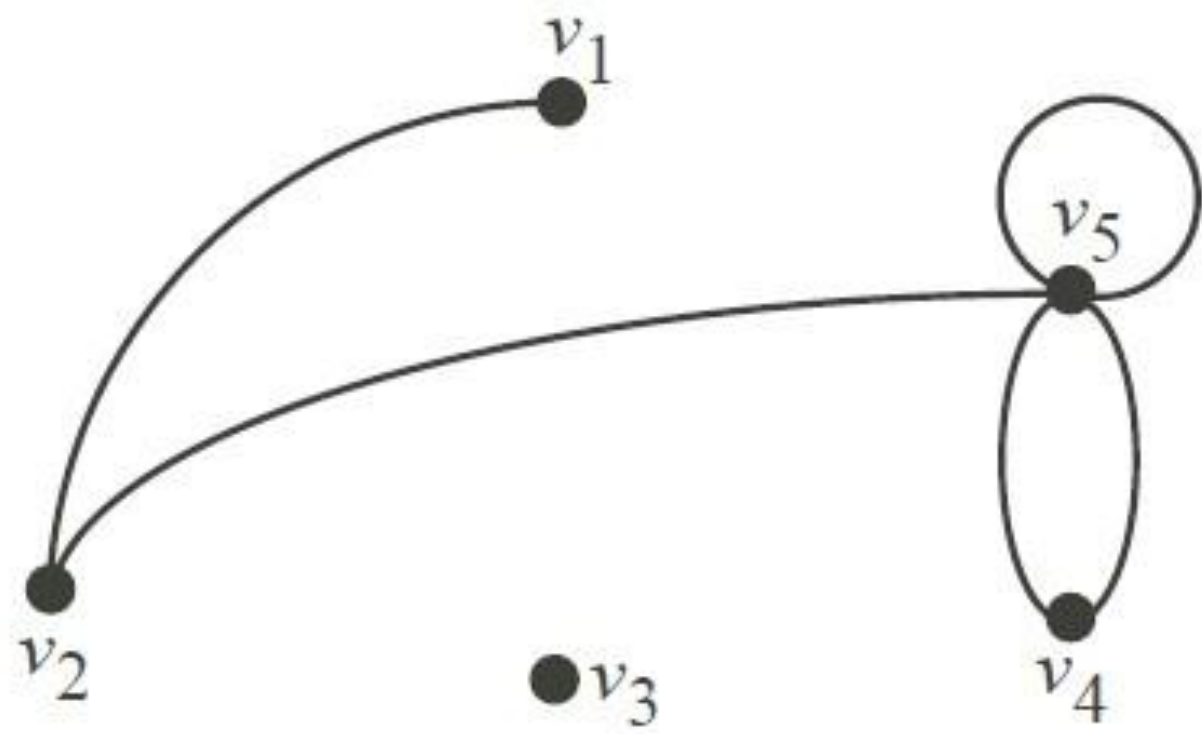
Përkufizim. Nëse në mes dy kulmeve (nyjeve) të grafit G ekziston më shumë se një brinjë (degë), grafin e tillë G do ta quajm multigraf.



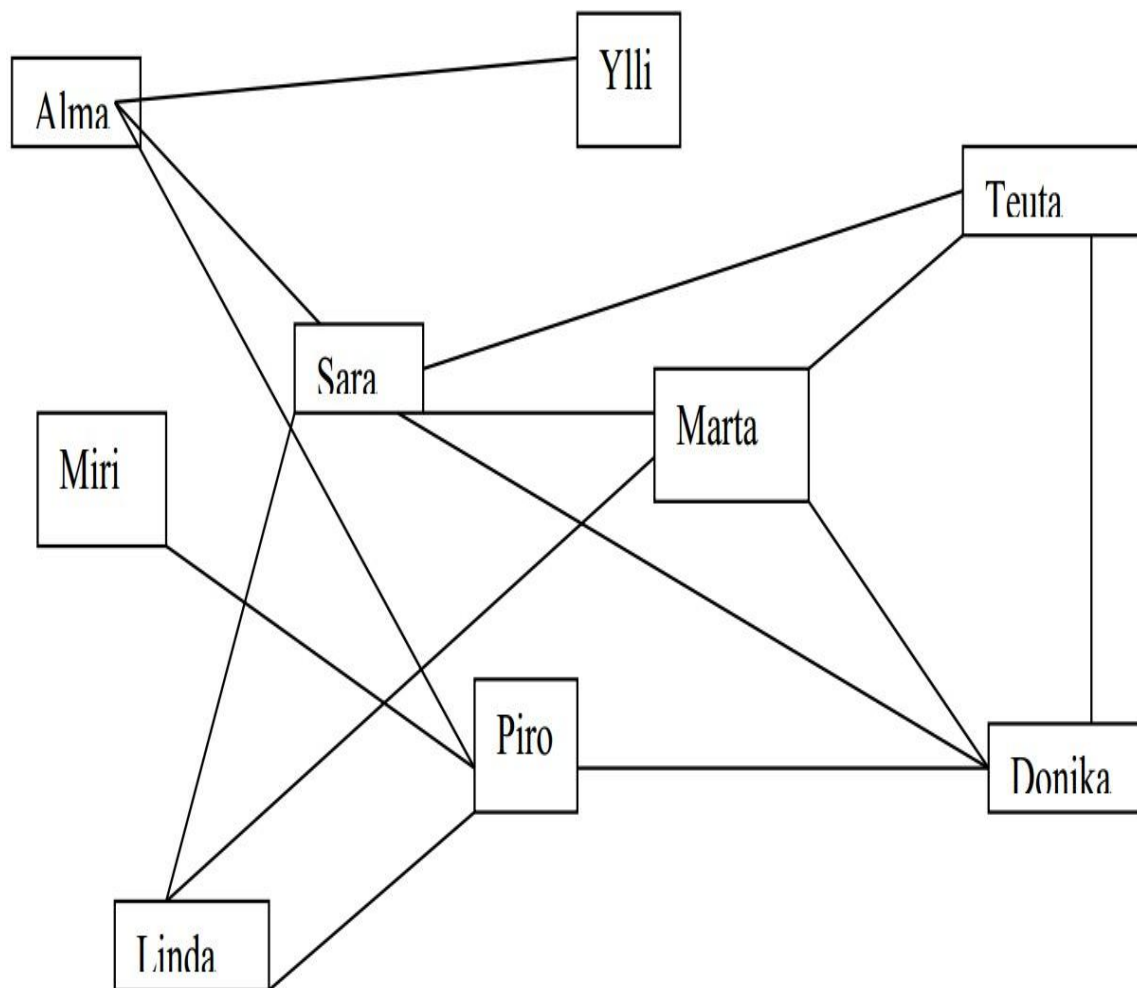
Përkufizim. Nëse në grafin $G(V, E)$ ekzistojnë laqe dhe në mes dy kulmeve (nyjeve) mundë të tërhiqet më shumë se një brinjë (degë), grafin e tillë do ta quajm pseudograf.

Shembull. Është dhënë grafi $G(V, E)$ ku $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dhe E .



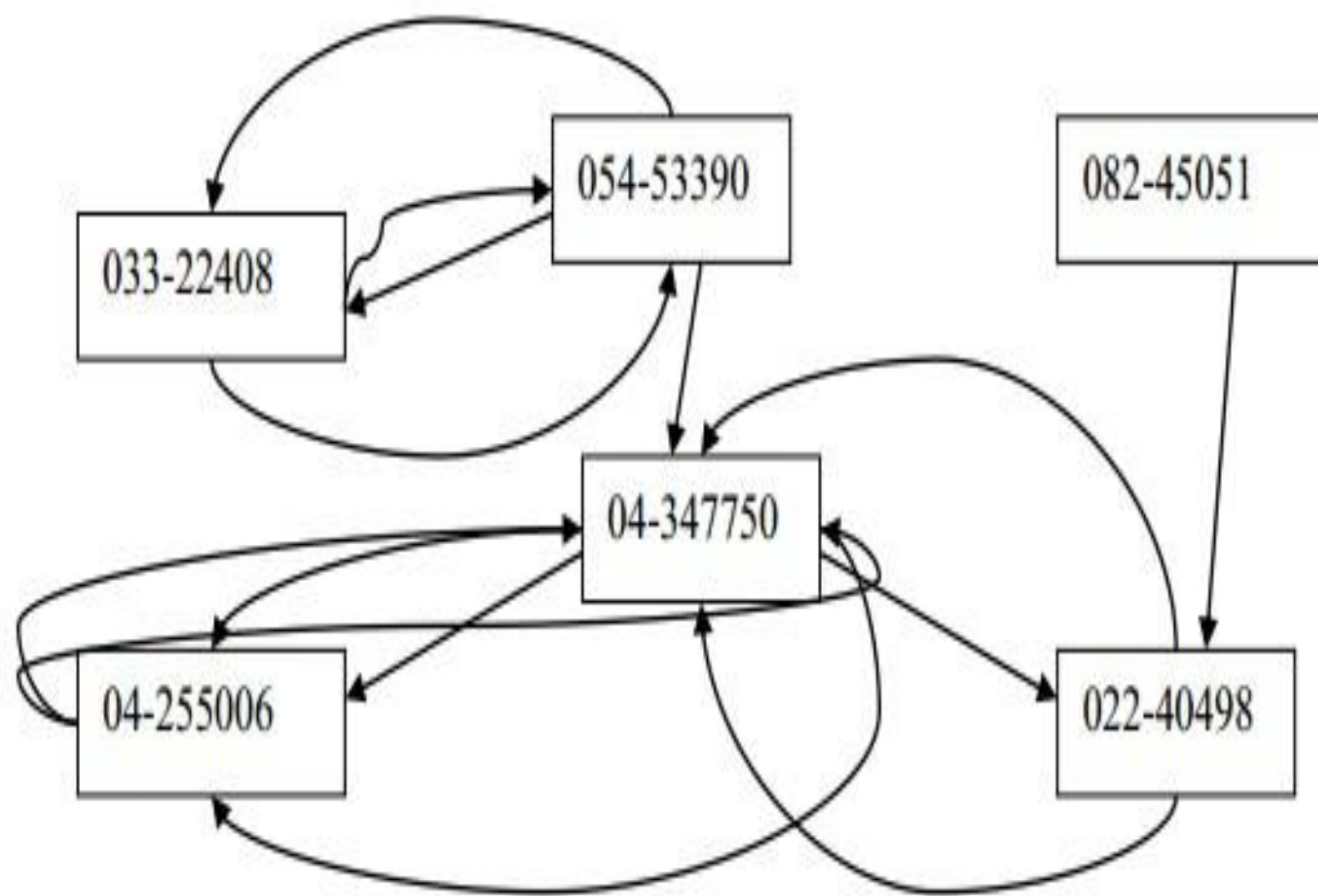


Shembull. Grafët e të njohurit. Grafët mund të përdoren për të paraqitur marrëdhëniet e ndryshme midis njerzve, si ai i rastit nëse dy njerëz e njohin njëri-tjetrin apo jo. Secili person në një grup të veçantë njerëzish paraqitet me një nyje, kurse një linjë e padrejtuar përdoret për të lidhur dy persona të cilët e njohin njëri-tjetrin. Shembulli i një grafi të njohuri për një grup të vogël jepet në figurë.



Shembull. Grafët e Thirrjeve. Këto grafe përdoren për të modeluar thirrjet telefonike te bëra në një rrjet, siç është ai i rrjetit telefonik për distanca të largëta. Për të modeluar thirrjet mund të përdoret multigraf i drejtuar në të cilin secili numër telefoni përfaqësohet nga një nyje dhe secila thirrje telefonike përfaqësohet nga një linjë e drejtuar. Linja që përfaqëson një thirrje buron nga një numër telefonik nga i cili bëhet thirrja dhe përfundon tek numri telefonik për tek i cili është bërë thirrja. Një graf i vogël thirrjesh telefonike tregohet në figure me 6 numra telefonash. Grafi tregon se janë bërë tri thirrje nga telefoni 04-347750 për tek telefoni 04-255006 dhe

dy thirrje anasjelltas. Është bërë një thirrje nga telefoni 082-45051 për tek 022-40498, por në këtë telefon nuk është bërë ndonjë thirrje.



Përkufizim. Fuqia (valenca) e kulmit (nyjes), shënohet me $\deg v$, ajo paraqet numrin e brinjëve (degëve) të cilat janë incidente me atë kulm (nyje). Kulmi me fuqi zero quhet i izoluar.

Shembull. Le të jetë dhënë grafi si në figurën. a. A janë fqinje kulmet a dhe c ?

b. A janë fqinje brinjët e_1 , e_2 dhe e_3 ?

c. A janë fqinje kulmet a dhe f ?

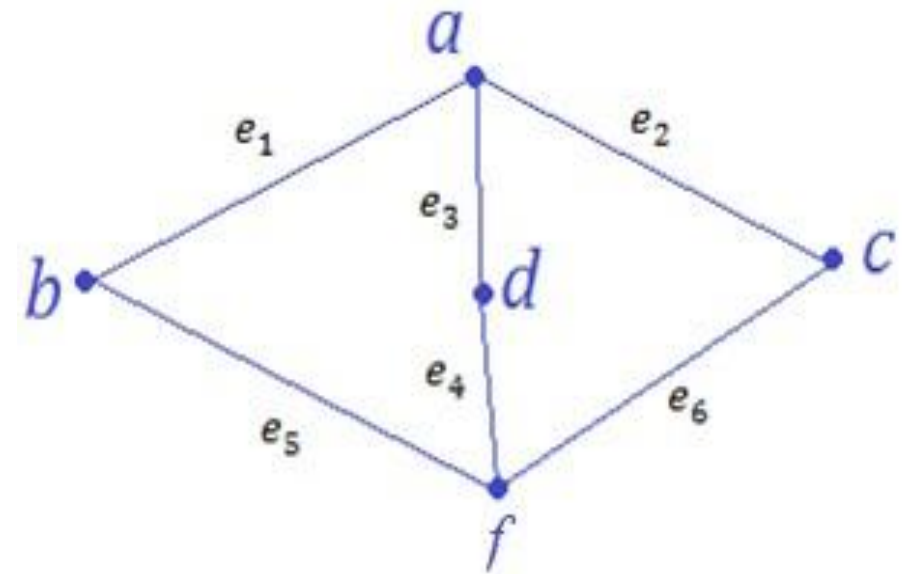
d. A janë fqinje brinjët e_2 dhe e_5 ?

e. Sa është fuqia e kulmeve b , c dhe d ?

f. Sa është fuqia e kulmeve a dhe f ?

g. Gjeni $\deg a + \deg b + \deg c + \deg d + \deg f$

Nga pika g. e shembullit të më sipërm shohim se



$$\deg a + \deg b + \deg c + \deg d + \deg e \\ = 3 + 2 + 2 + 2 + 3 = 12$$

Nga pika g. e shembullit të më sipërm
shohim se

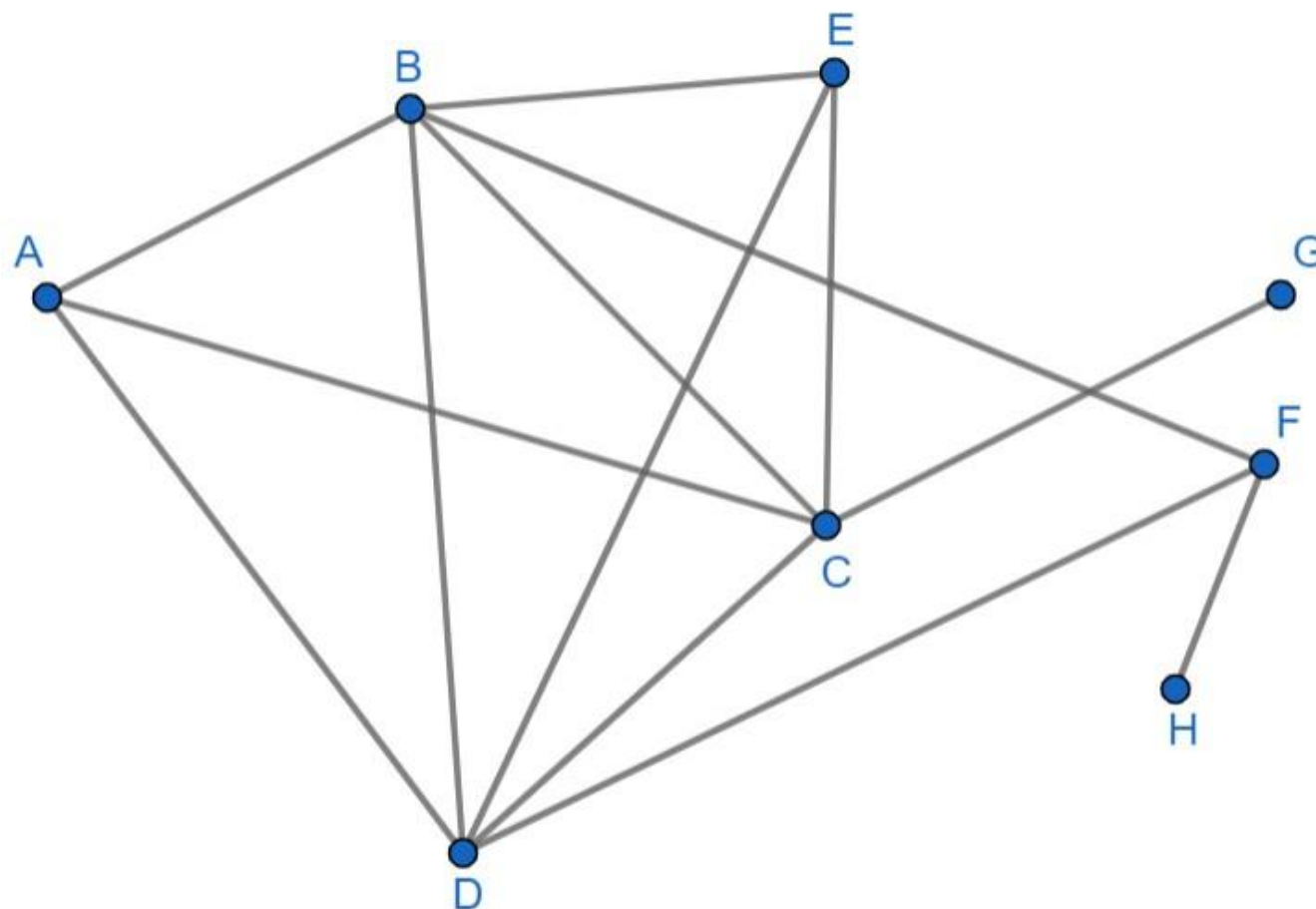
$$\deg a + \deg b + \deg c + \deg d + \deg e \\ = 3 + 2 + 2 + 2 + 3 = 12$$

Vlenë teorema vijuese.

Teoremë. Shuma e fuqive (valencave) të të gjitha kulmeve në graf është gjithmonë numër çift.

Vërtetim. Pasi që çdo brinjë (degë) në graf përmban dy pika të skajshme, fuqia e cilit do kulm të dhënë gjithmonë rritet për 1. Prandaj çdo brinjë (degë), e rritë për 2 shumën e fuqis së kulmeve (nyjeve) dhe shuma e fuqis së kulmeve duhet të jetë e barabartë me dyfishin e numrit të brinjëve (degëve). Që dmth se, shuma e fuqis së gjitha kulmeve është numër çift.

Teoremë. Numri i nyjeve me fuqi (valencë) tek është çift. **Pa vërtetim.**



Përkufizim. Grafi $G'(V', E')$ është nëngraf i grafit $G(V, E)$, simbolikisht e shënojm $G'(V', E') \leq G(V, E)$, nëse $V' \subseteq V$ dhe $E' \subseteq E$. Prandaj, çdo kulm (nyje)

në grafën G' është kulm (nyje) edhe në grafën G dhe çdo brinjë (degë) në grafën G' është brinjë (degë) edhe në grafën G .

Shembull. Grafet e dhëna në figurën 1.7, figurën 1.8 dhe figurën 1.9 janë nëngraftë të grafit të dhënë në figurën 1.10.

