



# Universiteti Publik “Kadri Zeka”, Gjilan

Fakulteti i Shkencave Kompjuterike

Lënda: Teoria e Grafeve

Tema:

*Grafet Euleriane*

**Problem.** A mundesh me e vizatu këtë graf pa ndërprerje të lapsit pa i përsëritur dy herë degët (provo në fletore)?



**Problem.** A mundesh me e vizatu këtë graf pa ndërprerje të lapsit pa i përsëritur dy herë degët (provo në fletore)?





1

3

7

5

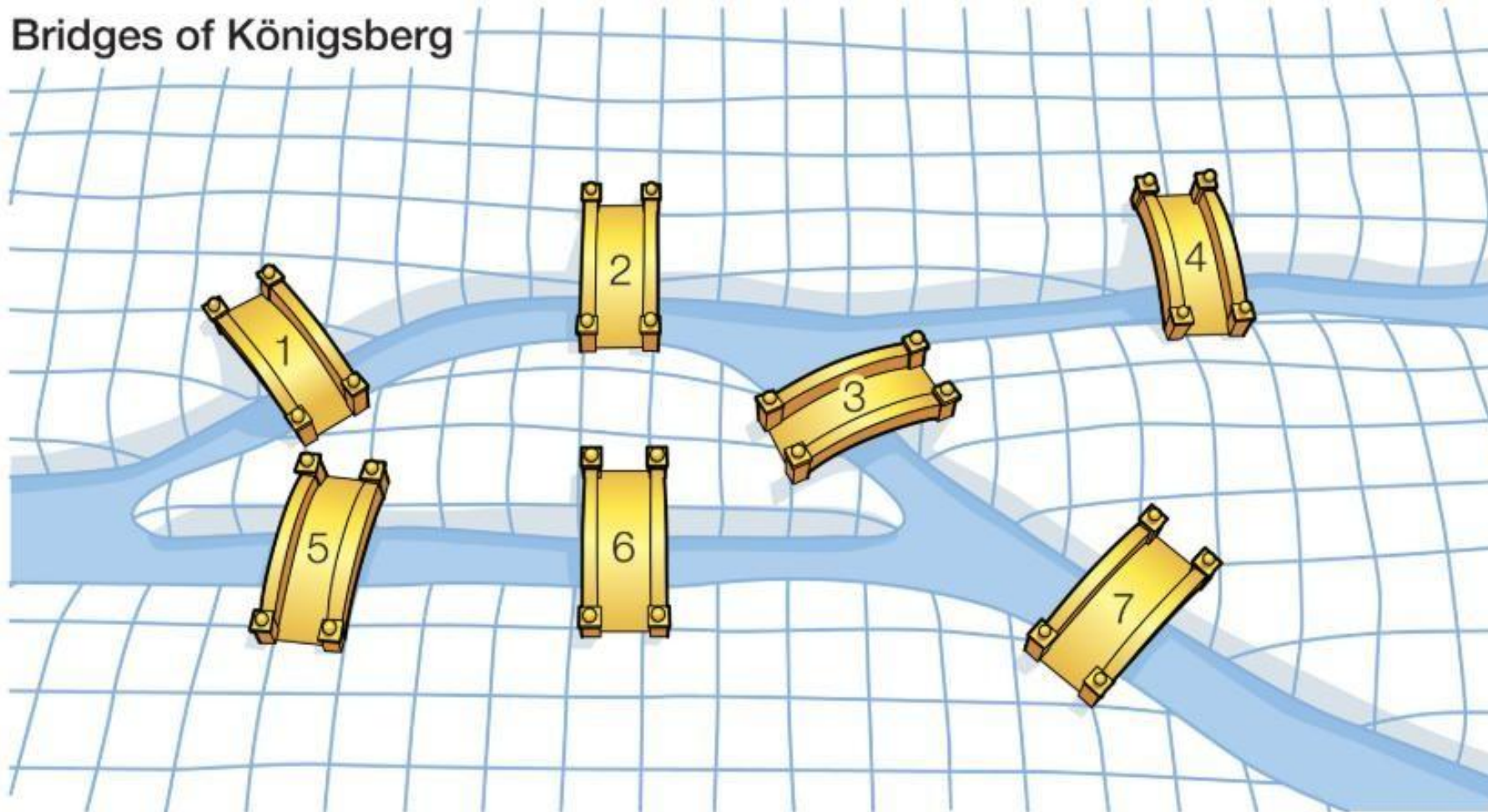
2

4

6



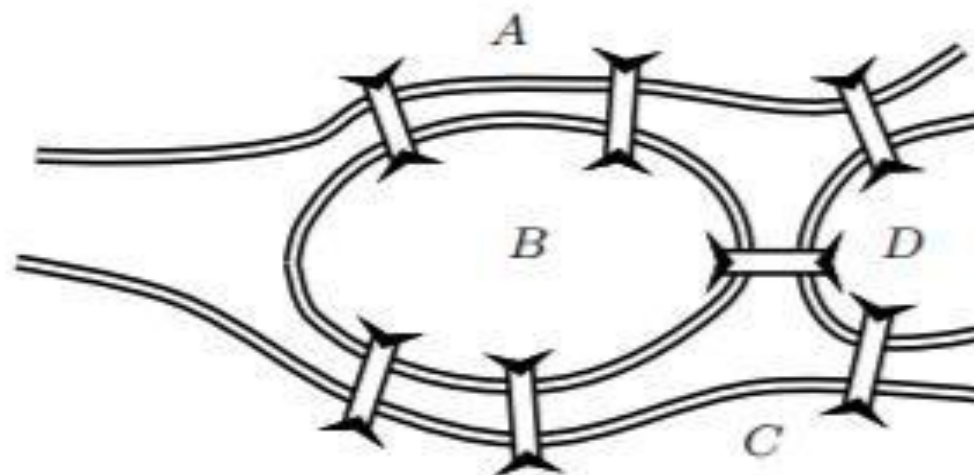
**Problem i urave të Königsbergut.** A mundë të kalosh nëpër secilën urë saktësishtë nga njëherë (provo në fletore)?



## **Problemi i urave të Königsbergut.**

Qyteti Königsberg (tani i quajtur Kaliningrad dhe pjesë e republikës Ruse) ishte i ndarë në katër sektorë A, B, C, D prej degëve të lumit Predel. Në shekullin e 18-të këto sektorë lidheshin me anë të shtatë urave ashtu si tregohet në këtë skemë (figurë).

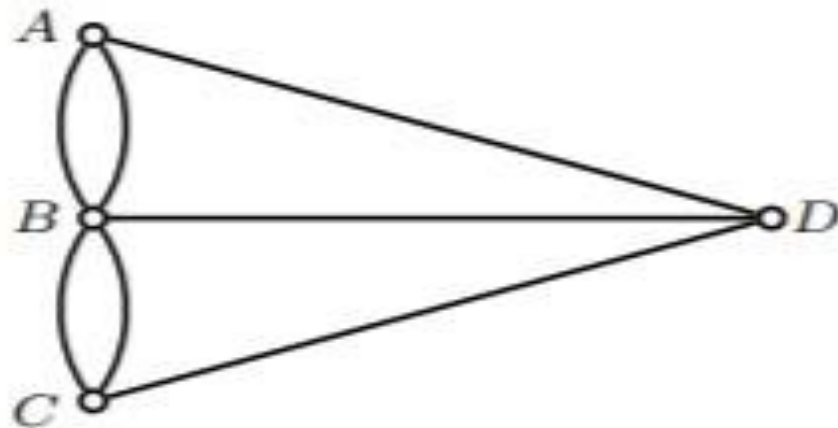
Banorët që bënë shëtitje të gjata në ditët e Diela, pyesnin me çudi nëse ishte e mundur të niseshin nga një pikë e caktuar e qytetit, të kalonin nëpër të gjitha urat por pa kaluar dy herë në të njëjtën urë, dhe të ktheheshin në pikën e nisjes.



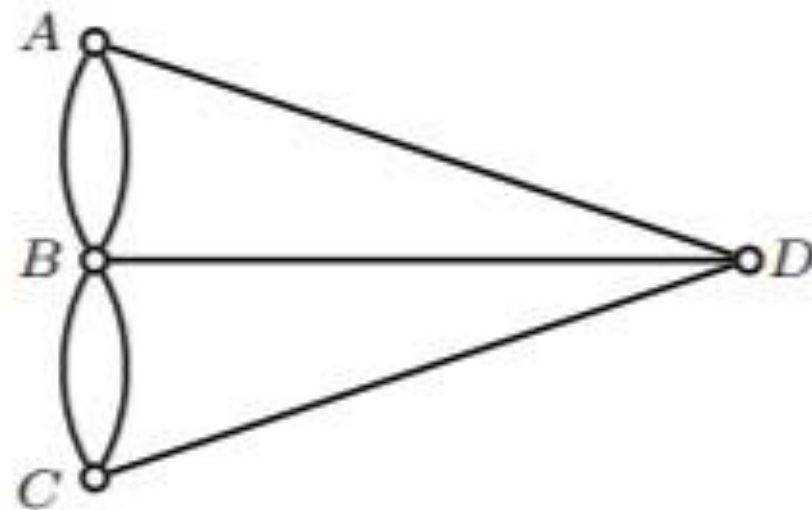
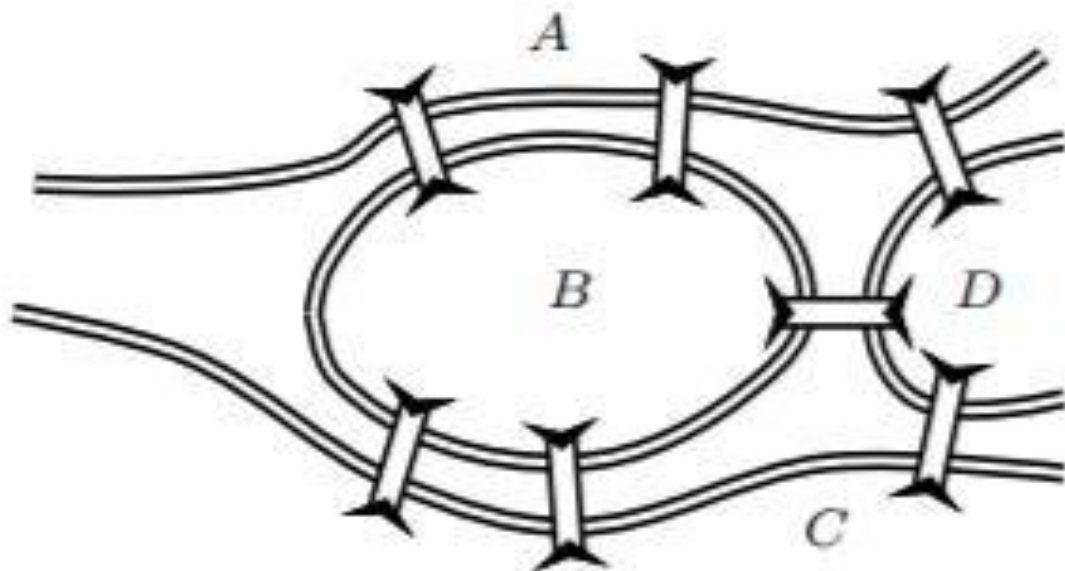
Matematikani Zviceran Leonard Euler e zgjidhi këtë problemë, dhe zgjidhja e tij është botuar në vitin 1736, ku mendohet se është përdorur për herë të parë teoria e grafeve.

Euleri e studioi këtë problemë duke përdorur multigraf i cili merret duke përfaqësuar katër zonat me nyje dhe urat me degë. Ky multigraf tregohet në figurë





Problemi i kalimit të çdo ure pa kaluar më shumë se një herë në cilëndo urë mund të rifrazohet me termat e këtij modeli dhe pyetja merr trajtën: A ka ndonjë cikël eulerian në këtë multigraf i cili duhet të përmbajë secilën nga degët?



**Përkufizim.** Një udhë në grafin  $G = (V, E)$  quhet udhë (shteg) Euleriane nëse ajo i përmban të gjitha degë e këtij grafi saktësishtë nga njëherë.

**Përkufizim.** Një udhë (shteg) Euleriane me fillim dhe mbarim në të njejtin kulm quhet cikël (qark) Eulerian.

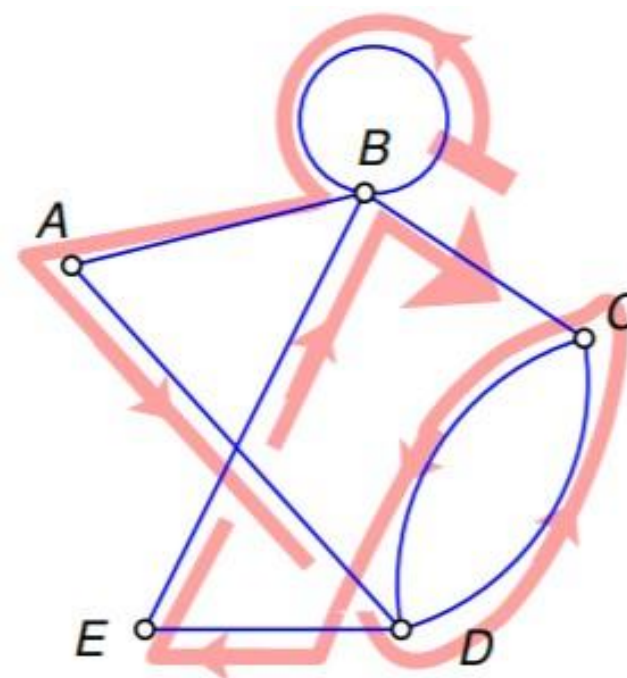
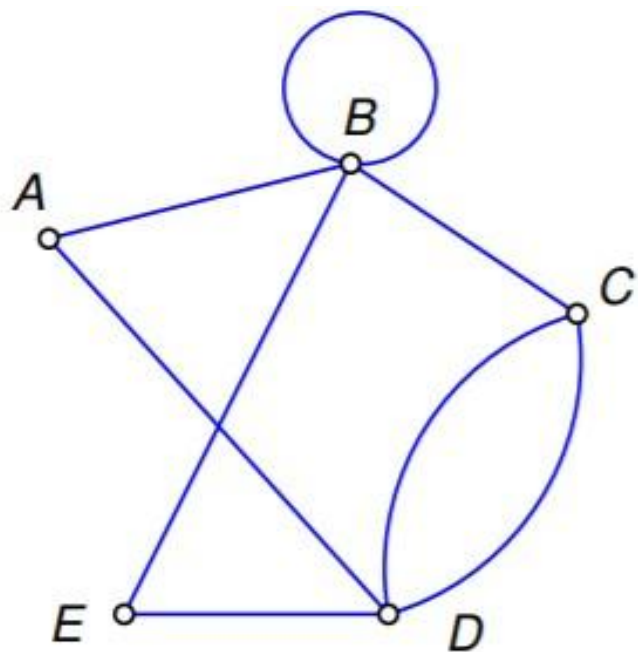
Një graf  $G = (V, E)$  quhet graf Eulerian në qoftë se degë  $E$  mundë të përshkohen sipas një cikli Eulerian në  $G$ .

Për një graf të palidhur do të themi se është Eulerian nëse çdo komponente e tij është Euleriane.

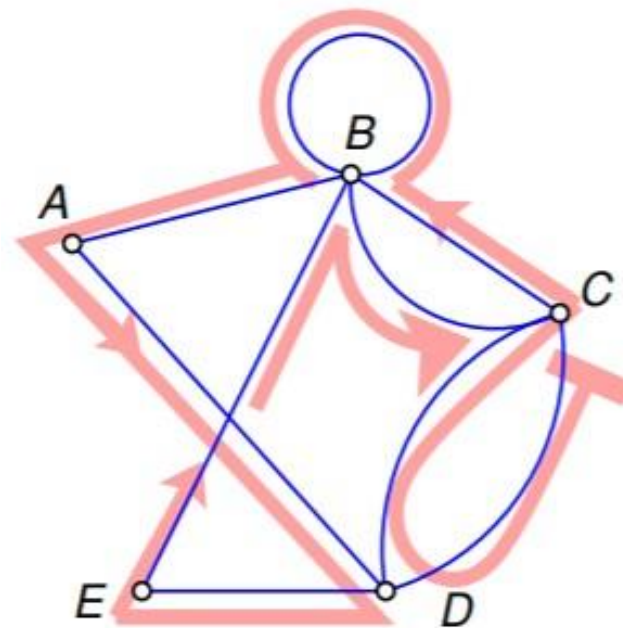
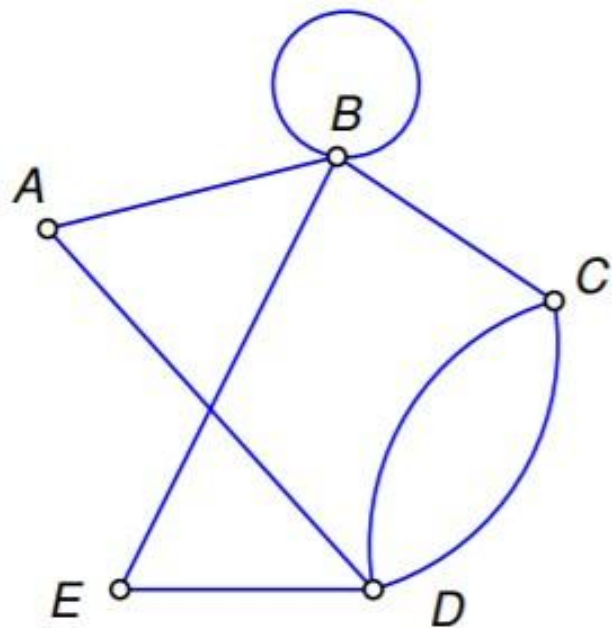
Një udhë e Eulerit fillon dhe mbaron në nyje të ndryshme.

Një cikël i Eulerit fillon dhe mbaron në të njejtin kulm.

**Shembull:** Është dhënë grafi  $G = (V, E)$  si në figurë. Udhë  $BBADCDEBC$  është udhë Euleriane.

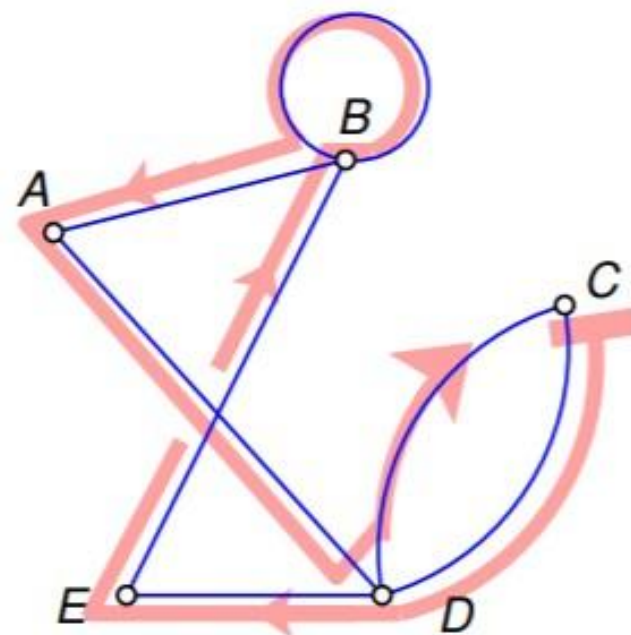
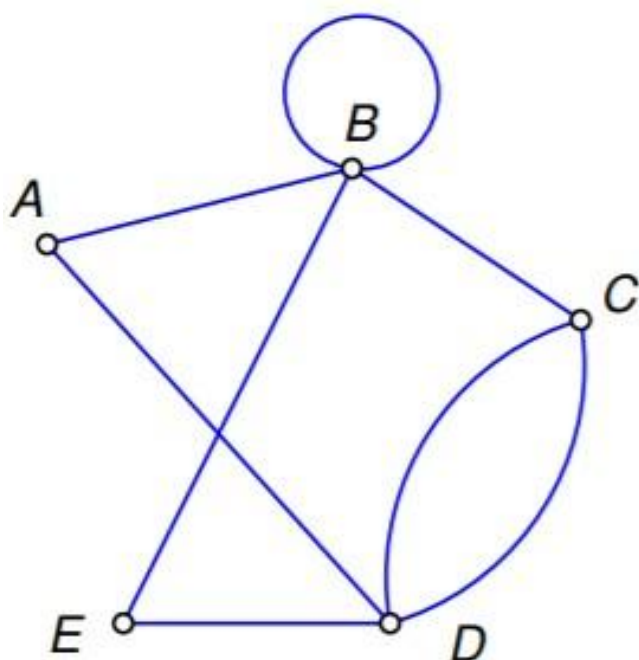


**Shembull:** Është dhënë grafi  $G = (V, E)$  si në figurë. Udha  $CDCBBADEBC$  është cikël Eulerian.



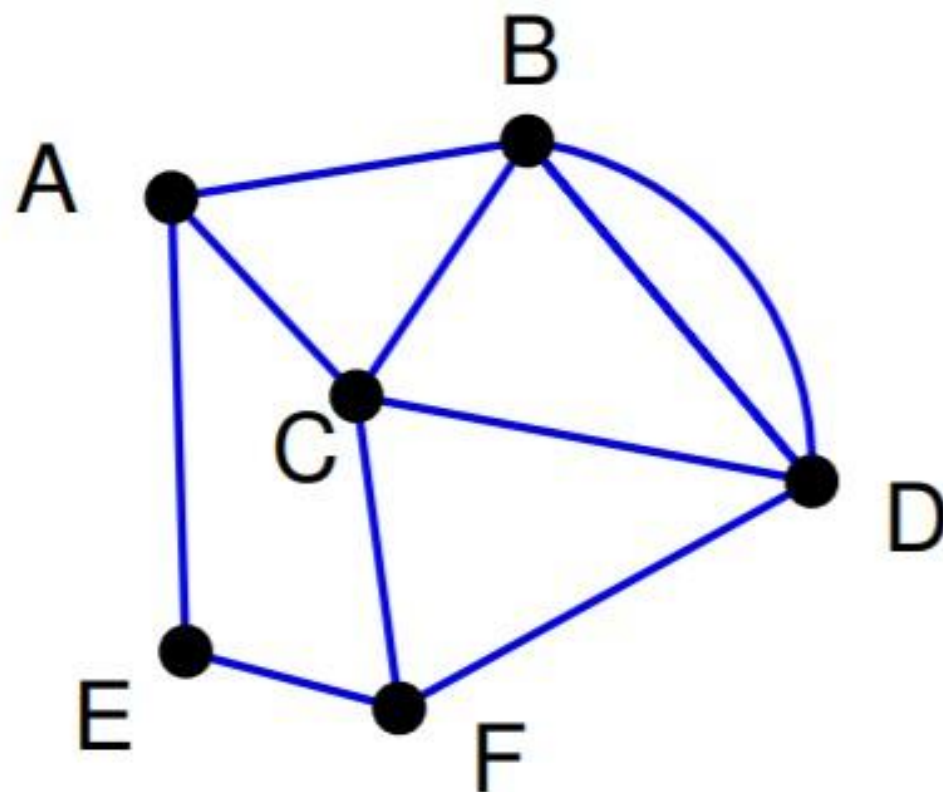
**Shembull:** Është dhënë grafi  $G = (V, E)$  si në figurë. Udhë  $CDEBBADC$  është cikël Eulerian.





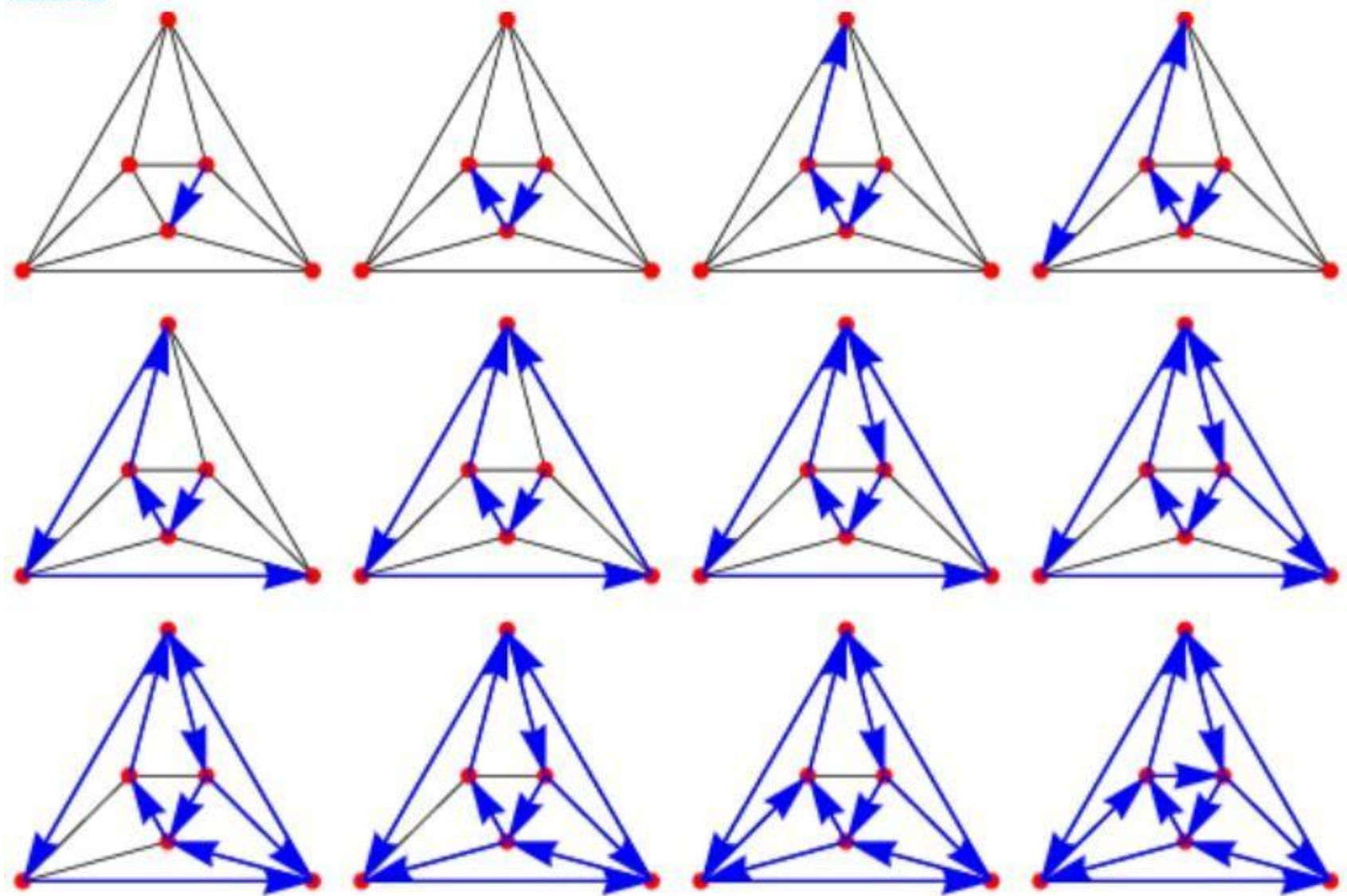
**Detyrë.** Gjeni një udhë Euleriane dhe një cikël Eulerian në grafën e mëposhtëm. **Blendi Kurti AEFCABCDBDF (udhë euleriane)**

**Medina Sherifi ACFEABDBCDFC**



- Grafi i dhënë është eulerian sepse gjitha valencat e nyjeve i ka çift.

18.03.2019



**Teoremë:** Një graf i lidhur  $G = (V, E)$  është Eulerian atëherë dhe vetëm atëherë kur valenca e çdo nyje të tij është çift.

**Vërtetim.**

**Rrjedhim.** Një graf i lidhur  $G$  përmban një udhë Euleriane atëherë dhe vetëm atëherë kur të shumtën dy prej kulmeve të tij kanë valencë tek.

**Vërtetim.**

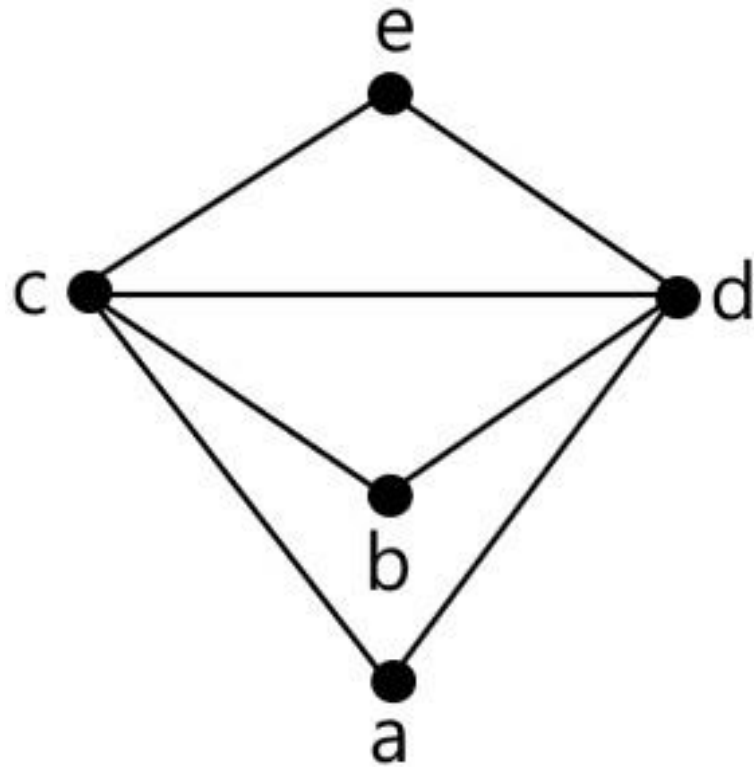


**Teoremë.** Një graf i lidhur  $G = (V, E)$  është Eulerian atëherë dhe vetëm atëherë kur bashkësia e degëve të  $G$  mundë të coptohet me cikle elementare.

**Vërtetim:**

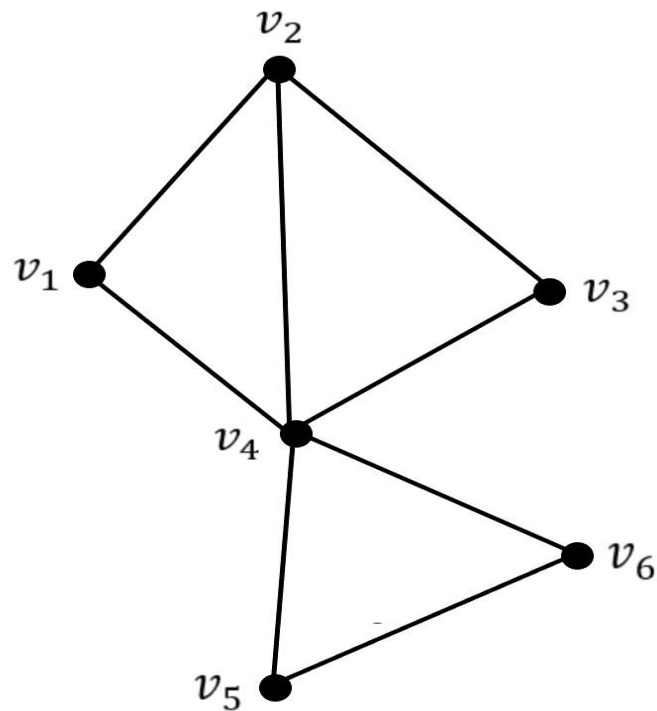
**Shembull.** Grafi  $G$

si në figurë përman cikël të Eulerit pasi që çdo nyje e ka valencën çift.



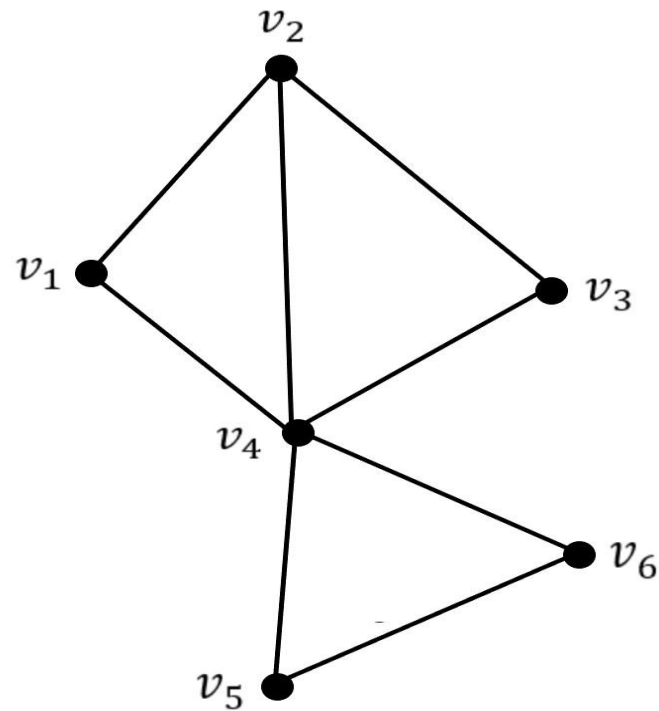
## Shembull. Grafi $G$

si në figurë nuk përman cikël të Eulerit pasi që nyjet  $v_2$  dhe  $v_4$  kanë valenca tek.

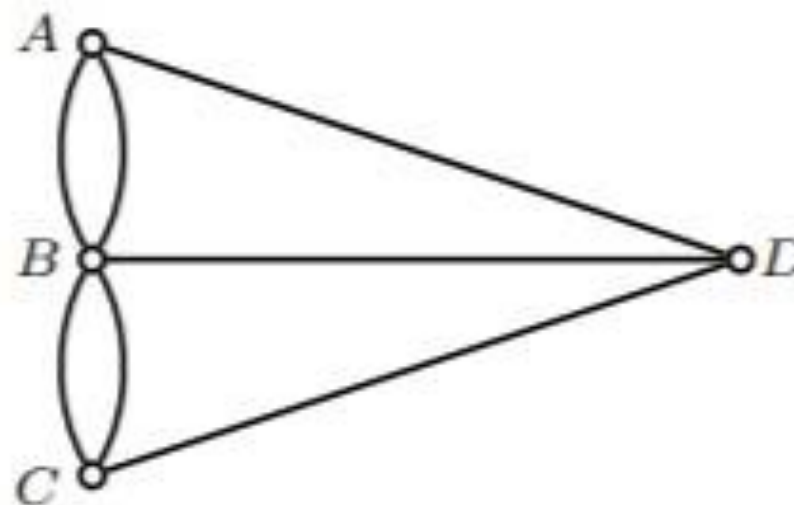
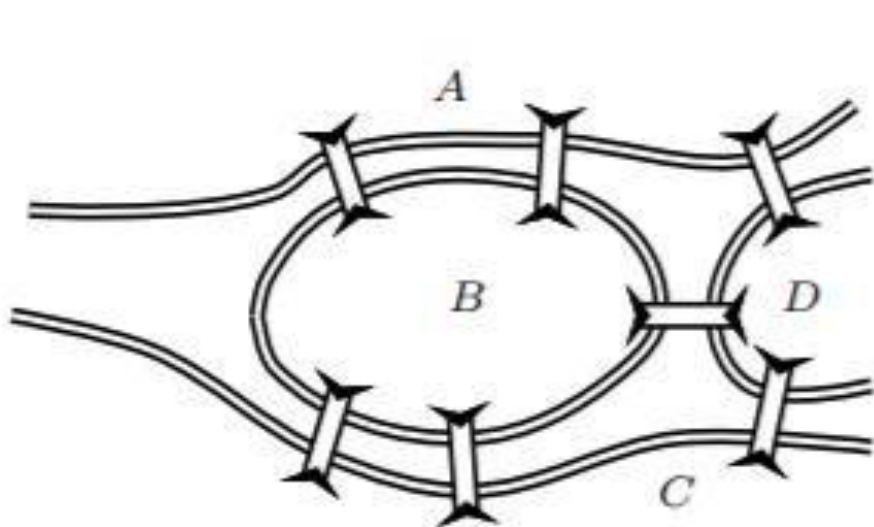


## Shembull. Grafi $G$

si në figurë përman udhë të Eulerit pasi që nyjet  $v_2$  dhe  $v_4$  kanë valenca tek.

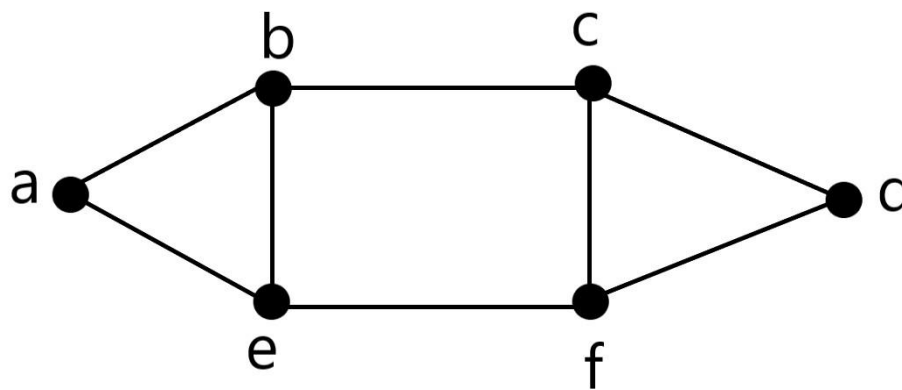


**Shembull.** Grafi  $G$  si në figurë nuk përman cikël të Eulerit pasi që të gjitha nyjet  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dhe  $D$  kanë valenca tek. Prandaj nuk është e mundur që çdo urë të kalohet vetëm njeherë dhe në fundë të kthehemi në pikën e nisjes.





**Shembull.** Grafi  $G$  si në figurë nuk përman udhë të Eulerit pasi që katër nyjet  $b, c, e$  dhe  $f$  kanë valencat numra tek.



**Përkufizim.** Le të jetë  $G = (V, E)$  graf i orientuar. Cikli i orientuar paraqet shteg të orientuar, me gjatësi më të madhe se zero, nga nyja deri te vetë ajo, pa degë që përsëriten.

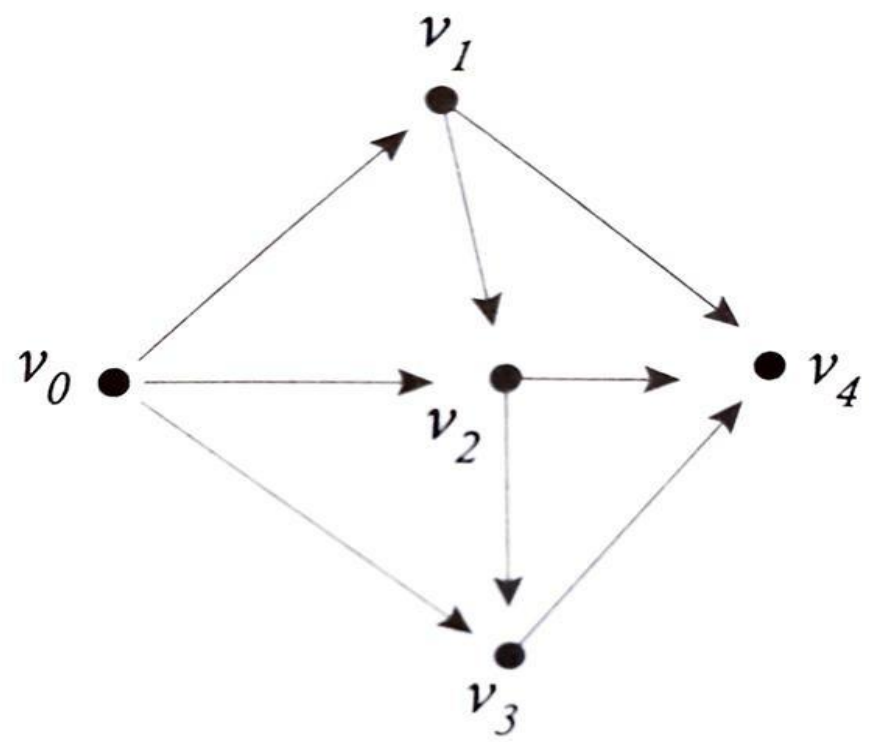
**Përkufizim.** Le të jetë  $G = (V, E)$  graf i orientuar. Cikli i orientuar i cili përfshin gjitha degët dhe gjitha nyjet e grafit  $G$  quhet cikël i Eulerit. Në këtë rast thmi se grafi  $G$  ka cikël të Eulerit.

**Teoremë.** Grafi i orientuar ka cikël të Eulerit atëherë dhe vetëm atëherë nëse është i lidhur dhe nëse valenca hyrëse e secilës nyje është e njëjtë me valencën dalëse të saj.

**Përkufizim.** Grafi i orientuar  $G = (V, E)$  quhet i lidhur nëse grafi bartës i tij është lidhur.

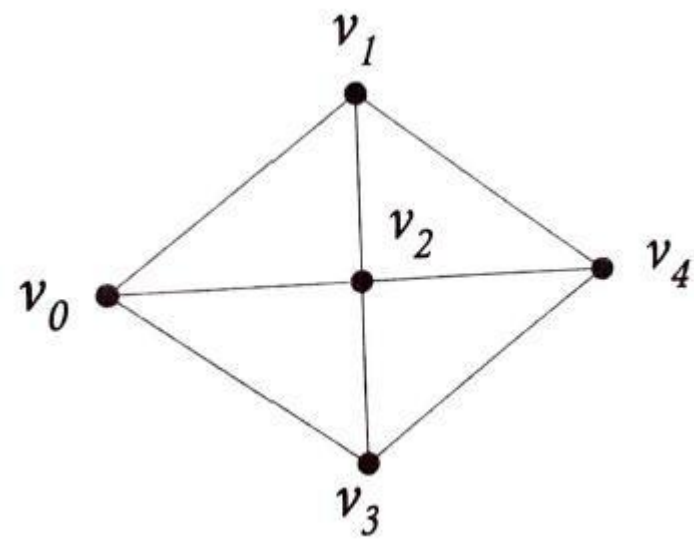
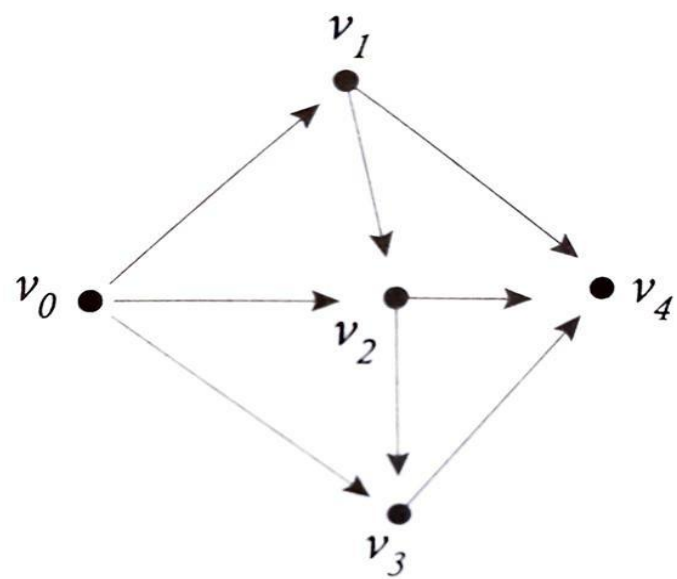
**Përkufizim.** Grafi i orientuar themi se është fort i lidhur nëse për çdo çift të nyjeve  $a, b \in V$  ekziston shtegu i orientuar nga nyja  $a$  deri te nyja  $b$ .

**Shembull.** Le të jetë dhënë grafi i orientuar si në figurë. Tregoni nëse ai është i lidhur dhe i lidhur fort.

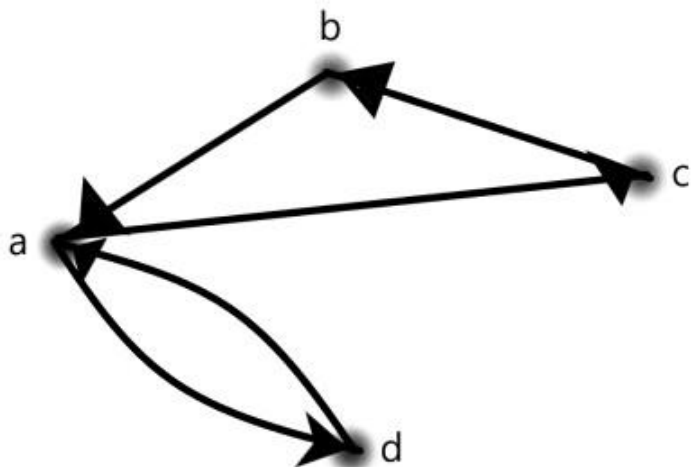


**Zgjidhje.** Për grafin e orientuar të dhënë si në figurë grafi mbajtës i tijë është i lidhur prandaj edhe garfi i orientuar është i lidhur.

Grafi i orientuar nuk është i lirdhur fort sepse nuk ekziston shteg në mes të nyjeve  $v_3$  dhe  $v_1$ .



**Shembull.** Tregoni nëse grafi i orientuar i dhënë si në figurë ka cikël të



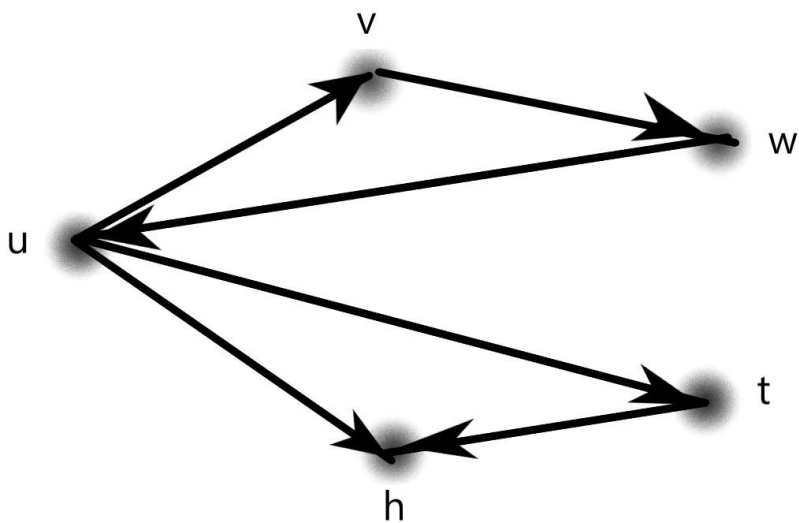
Eulerit?

**Zgjidhje.**

Grafi i orientuar në figurë ka cikël të Eulerit sepse valenca hyrëse, e secilës nyje, është e njëjtë me valencën dalëse të asaj nyje.



**Shembull.** Tregoni nëse grafi i orientuar i dhënë si në figurë ka cikël të



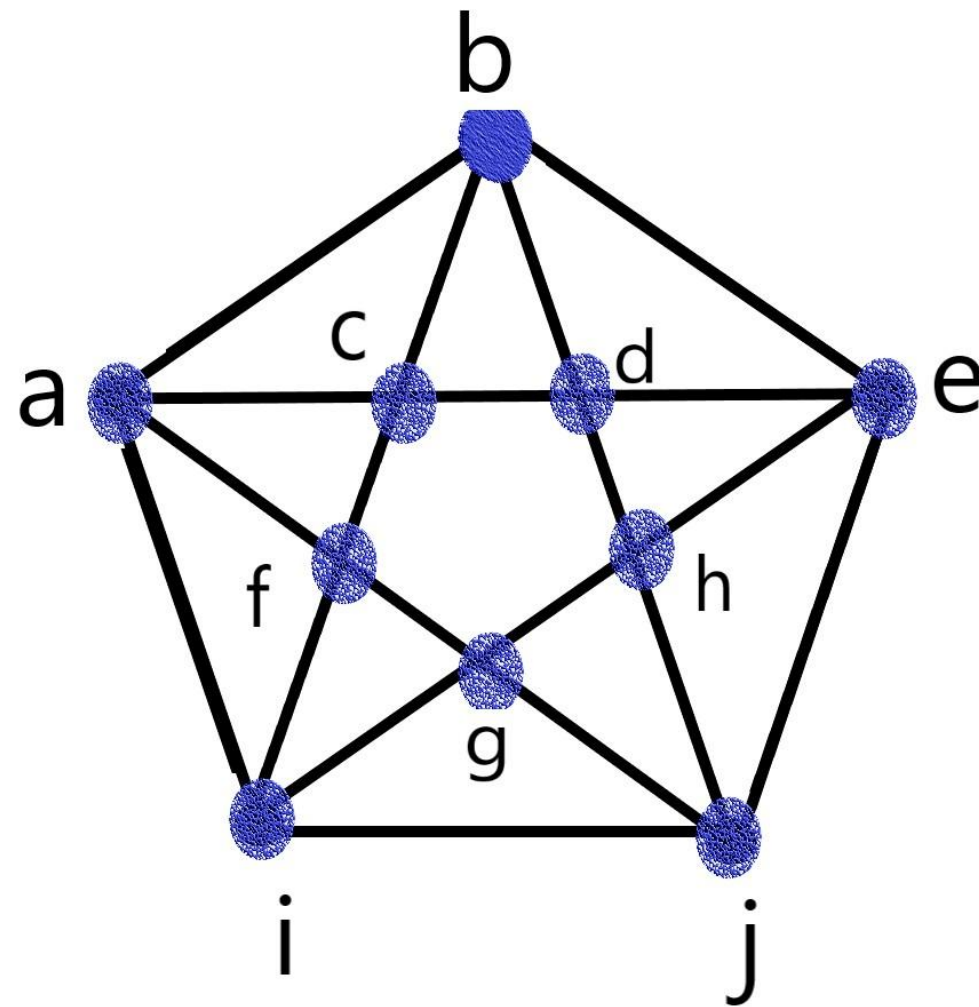
Eulerit?

**Zgjidhje.** Grafi i dhënë nuk ka cikël të Eulerit, sepse valenca e nyjes  $u$  nuk është e njëjtë me valencën e saj dalëse.

**Detyrë.** A ka cikël të Eulerit grafi i dhënë?

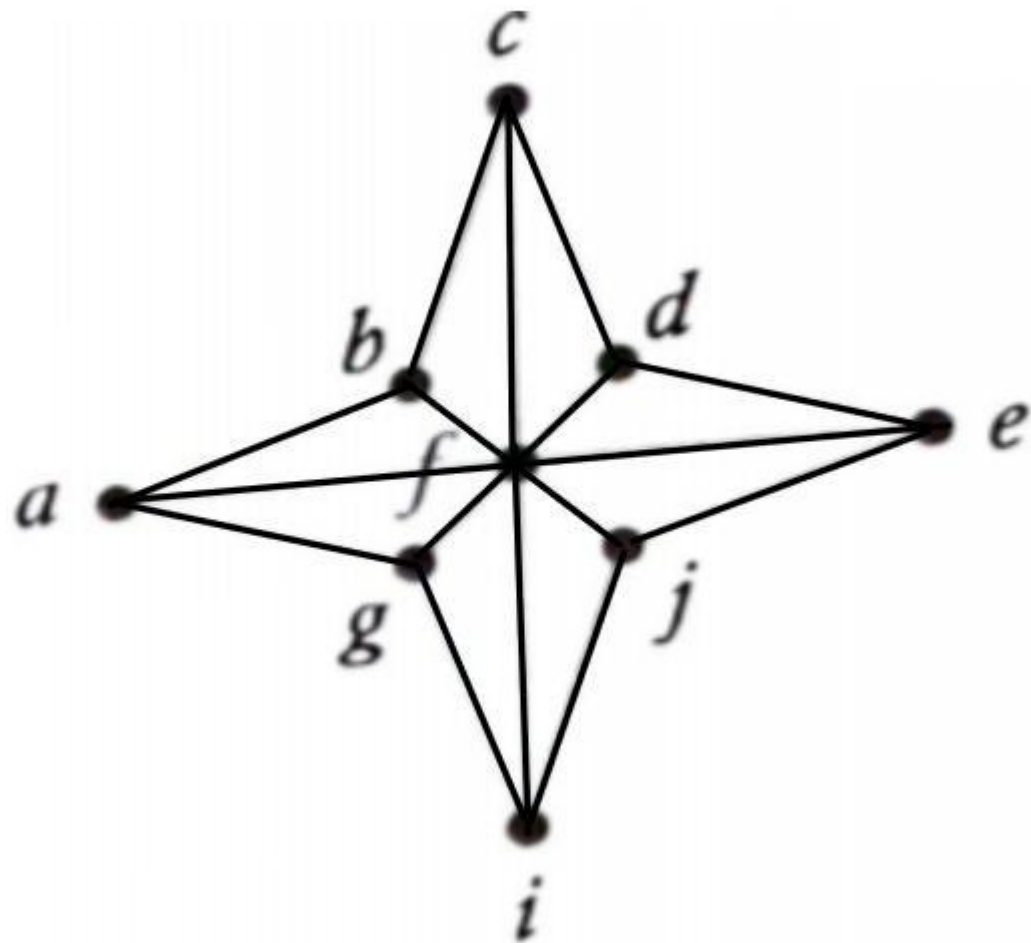
1. Vlera Bllaca: bacbdcfaifgijghjehdeb

**Detyrë.** A ka cikël të Eulerit grafi i dhënë?



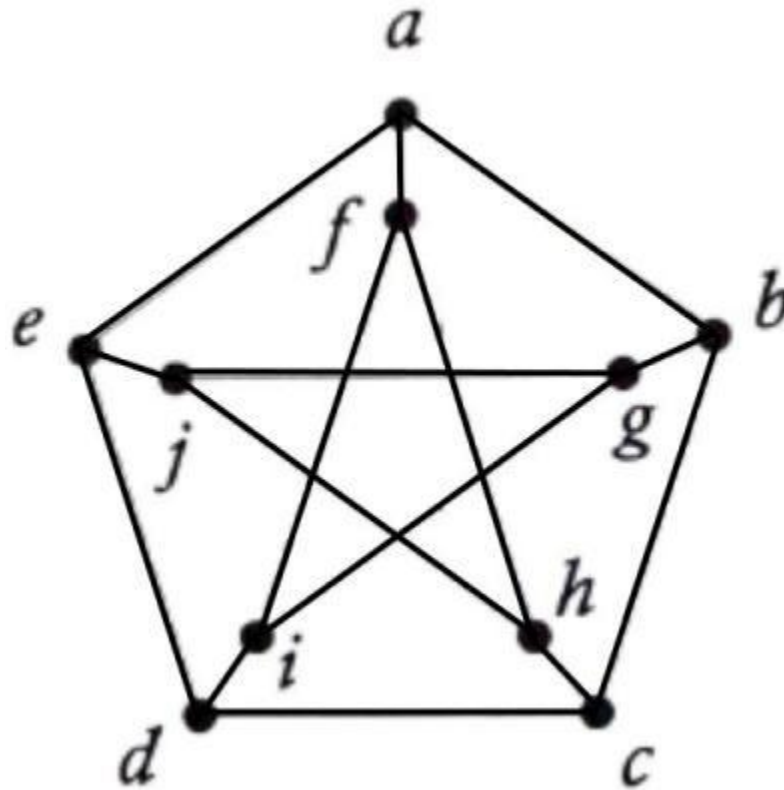
**Detyrë.** A ka cikël të Eulerit grafi i dhënë?

1. Shkurte Dushica: jo nuk ka cikël te eulerit .



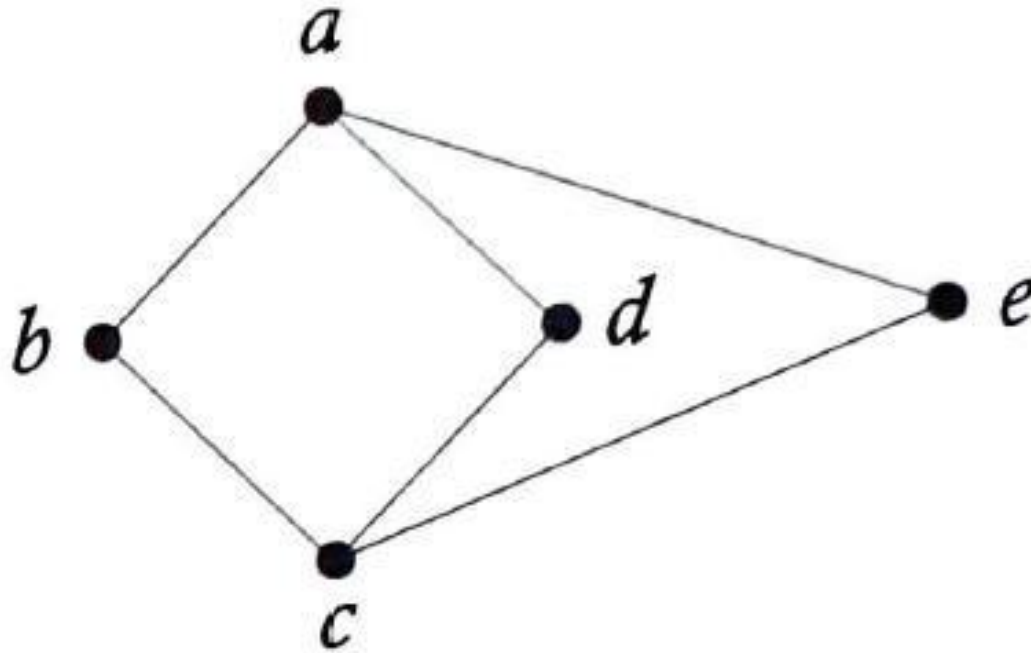
**Detyrë.** A ka cikël të Eulerit grafi i dhënë?

1. Vlera Bllaca:



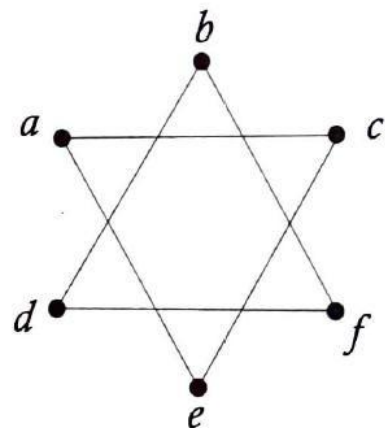
**Detyrë.** A ka cikël të Eulerit grafi i dhënë?

1. Donat Dalipi

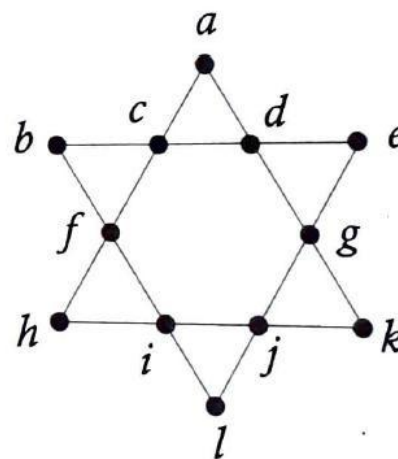


**Detyrë.** Cili nga grafet e mëposhtme ka cikël të Eulerit?

Medina She  
Vlera Bllaca

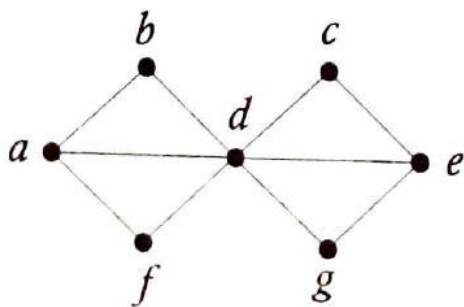


(a)

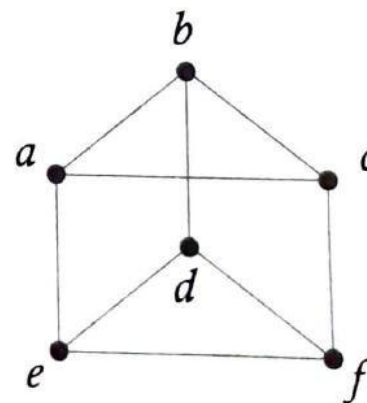


(b)

Blend  
Kurti:



(c)



(d)

a.komponentja e parë ace, komponentja e dytë bdf .



Shkurte Dushica: b. Dcfijgdacbfhiljkged

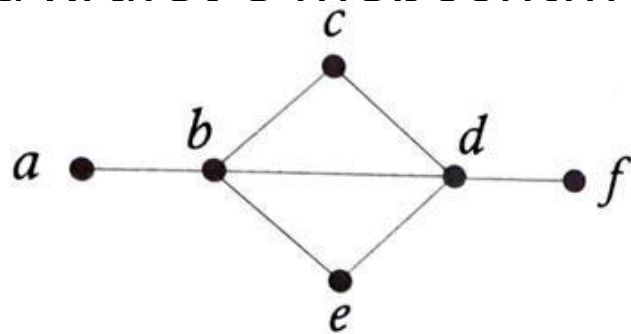
Vlera

Bllaca

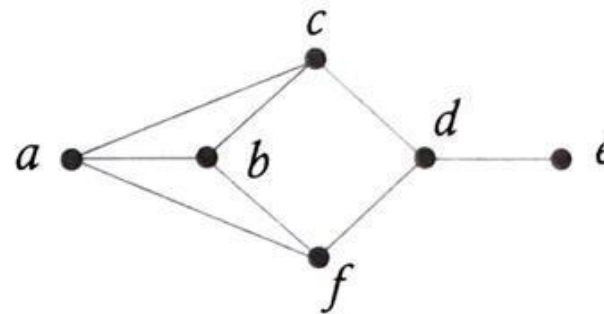
**Detyrë.** Cili nga grafet e mëposhtme ka shteg të Eulerit?

Shkurte

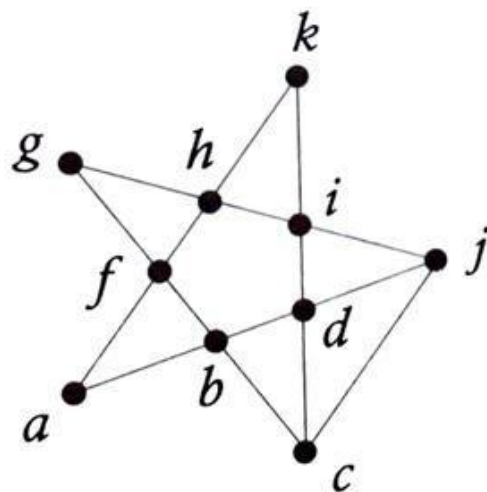
Medina



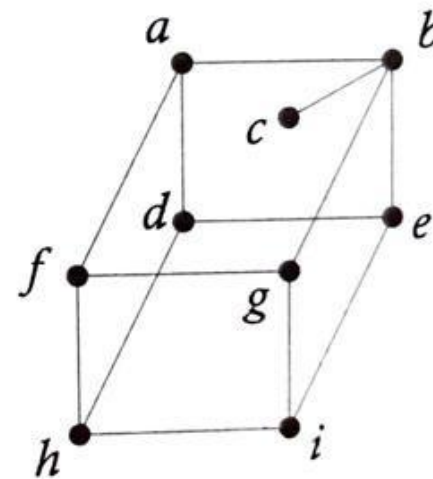
(a)



(b)



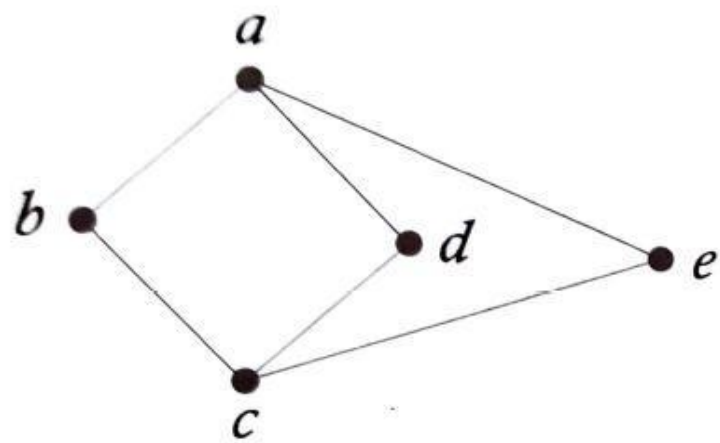
(c)



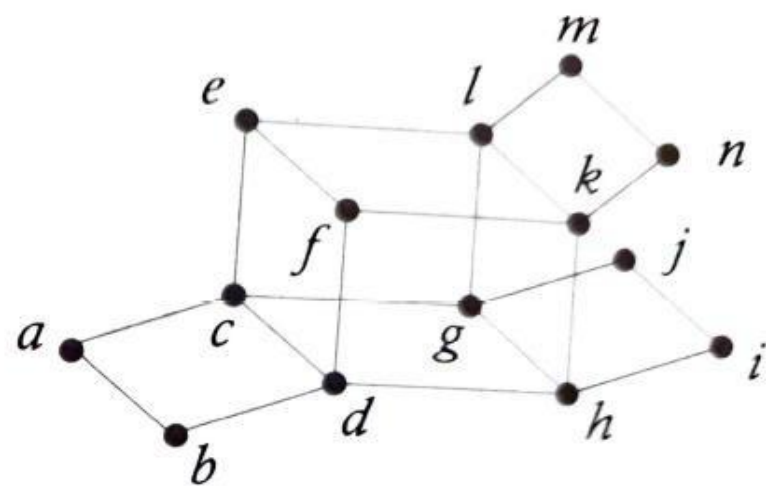
(d)

**Shembull.** Cili nga grafet e dhëna ka shteg të Eulerit?

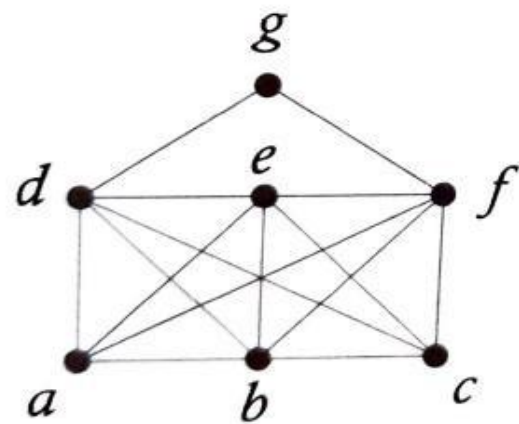
(a)



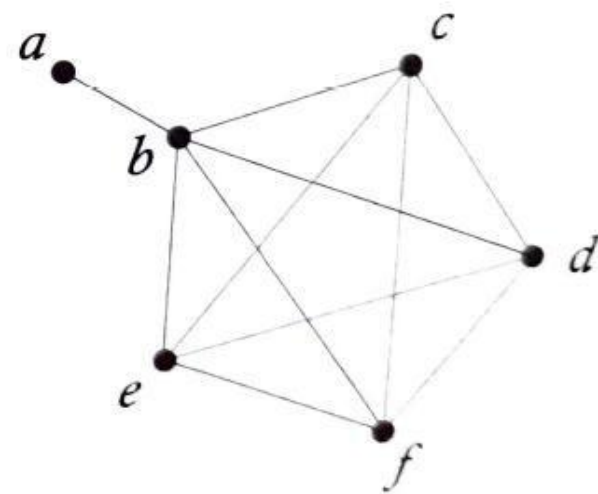
(b)



(c)



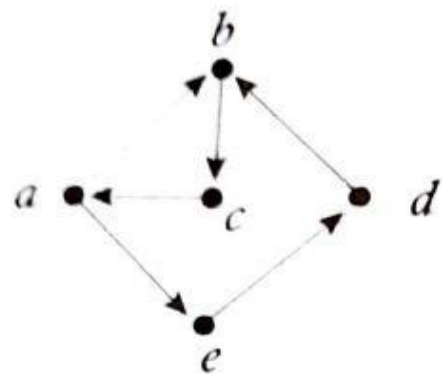
(d)



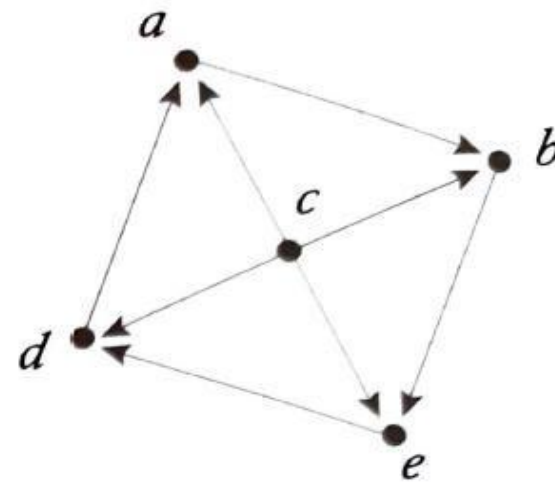
## Shembull

. Cili nga grafet e orientuara është i lidhur fort?

(c)



(d)



Shembull

Shkurte

Me

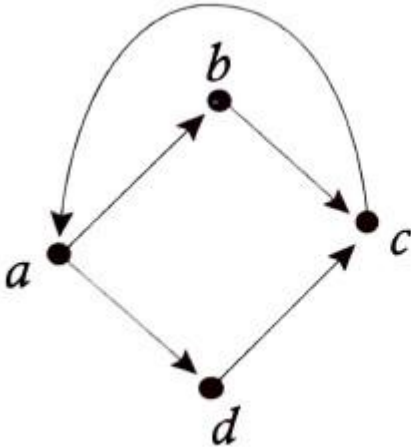
Vlel

Dushica:

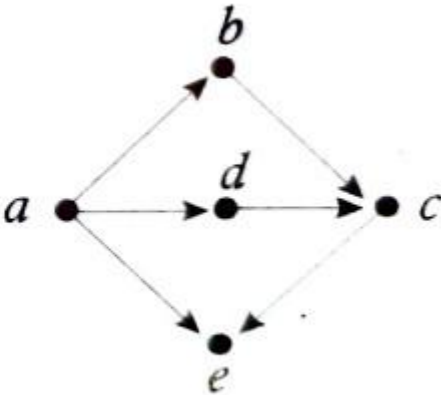
b.

Dcfijgdacbfhiljkged

(a)



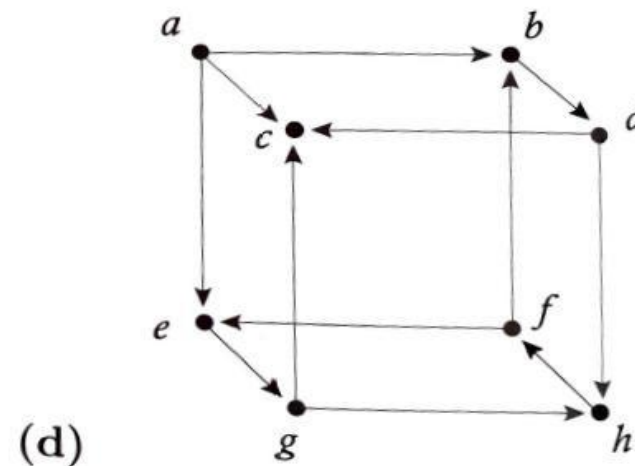
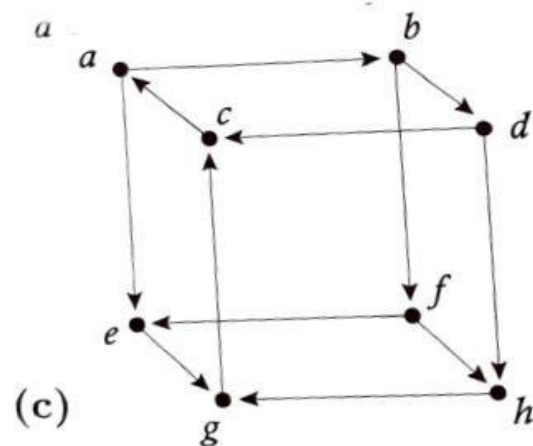
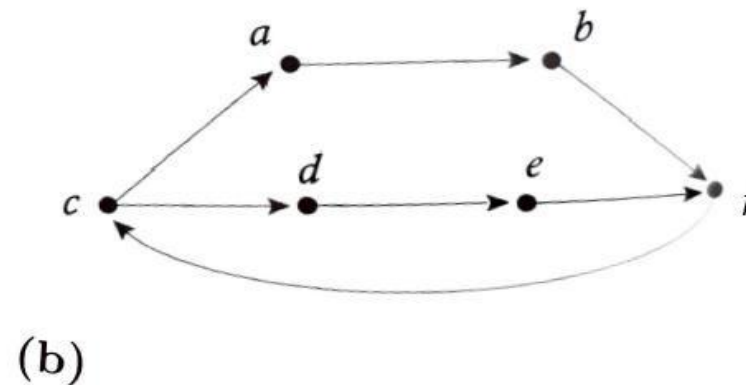
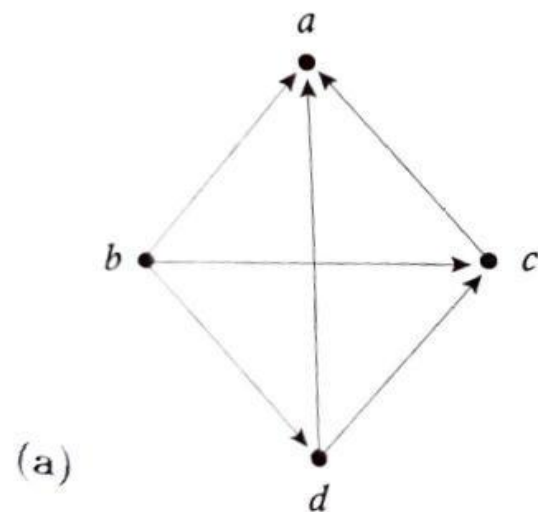
(b)



# Shembull

Medina Sh. Orfinga

Shkurte Dushica: I





**Shembull**

Vlera Bllaca

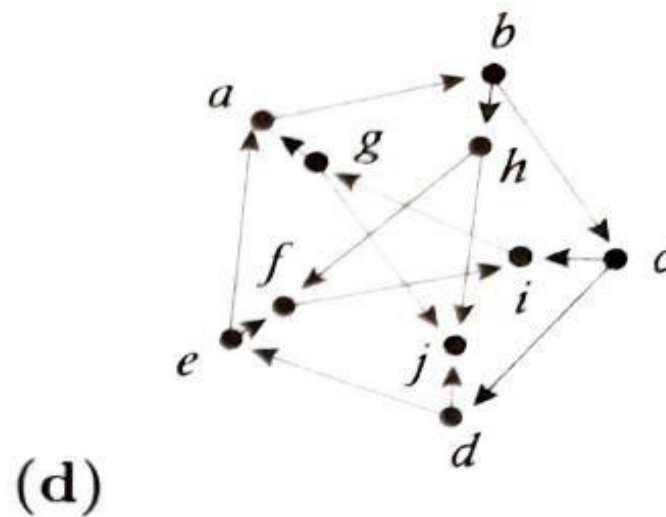
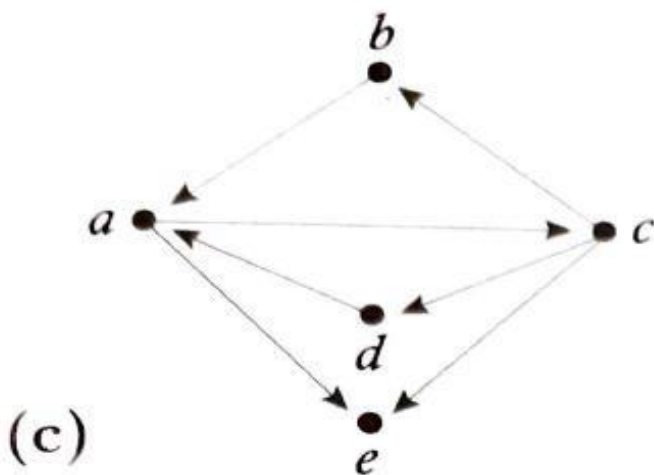
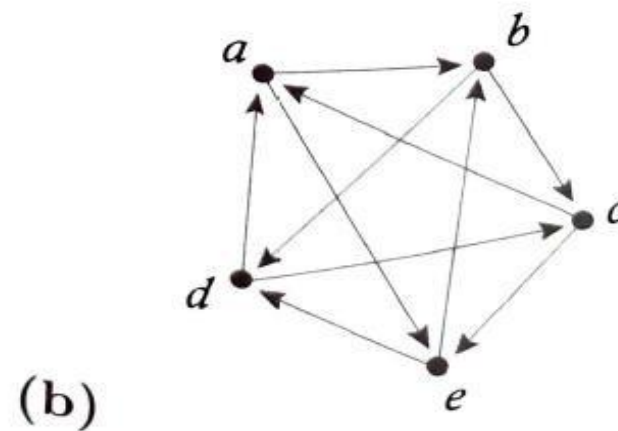
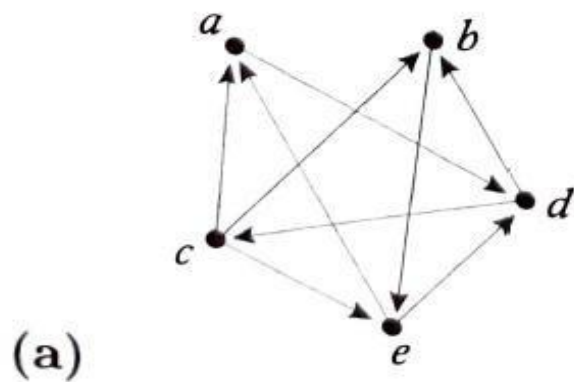
**Shembull**

Vlera

Bllaca

# Shembull

Shkurte  
Medina



## Shembull

. Cili nga grafet e dhëna ka cikël të Eulerit?

# Shembull

