Universiteti Publik “Kadri Zeka”, Gjilan

Fakulteti i Shkencave Kompjuterike

Lënda: Teoria e Grafeve

Tema:

Paraqitje të ndryshme të grafeve

Deri tani për konceptin matematikë të grafit është përdorur vetëm një paraqitje vizatimore.

Kjo mënyrë e paraqitjes nuk është gjithmonë e përshtatshme për një numër veprimesh mbi grafet.

Prandaj janë gjetur edhe forma tjera paraqitjeje që për trajtime të problemeve të ndryshme janë më të përshtatshme.

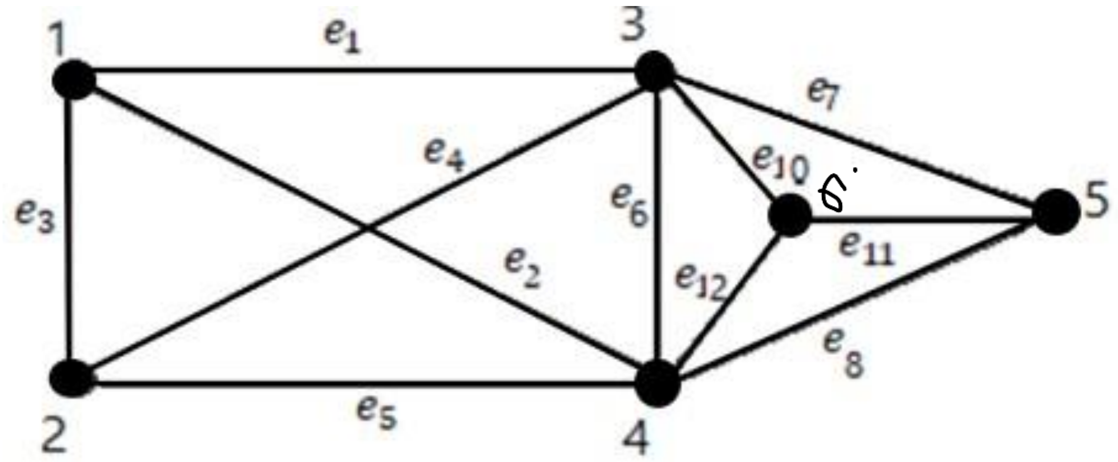
Le të jetë dhënë grafi $G = (V, E)$.

Përkufizim. Numri i nyjeve (simbolikisht e shënojmë $|V|$) të grafit G quhet ***rend*** i grafit.

Përkufizim. Numri i degëve (simbolikisht shënohet $|E|$) të grafit G quhet ***përmas*** e grafit.

Shembull. Gjeni rendin dhe përmasën e grafit $G = (V, E)$**.**

Zgjidhje. $|V| = 6, |E| = 11$



Le të jetë $G = G(V, E)$ një graf i rendit n.

Ndërtojmë një matricë katrore $A_{n\times n}$ me elemente si më poshtë:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ nëse nyjet } \boldsymbol{i} \text{ dhe } \boldsymbol{j} \text{ janë fqinje} \\ 0, \text{ nëse nyjet } \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \text{ nuk janë fqinje} \end{cases}$$

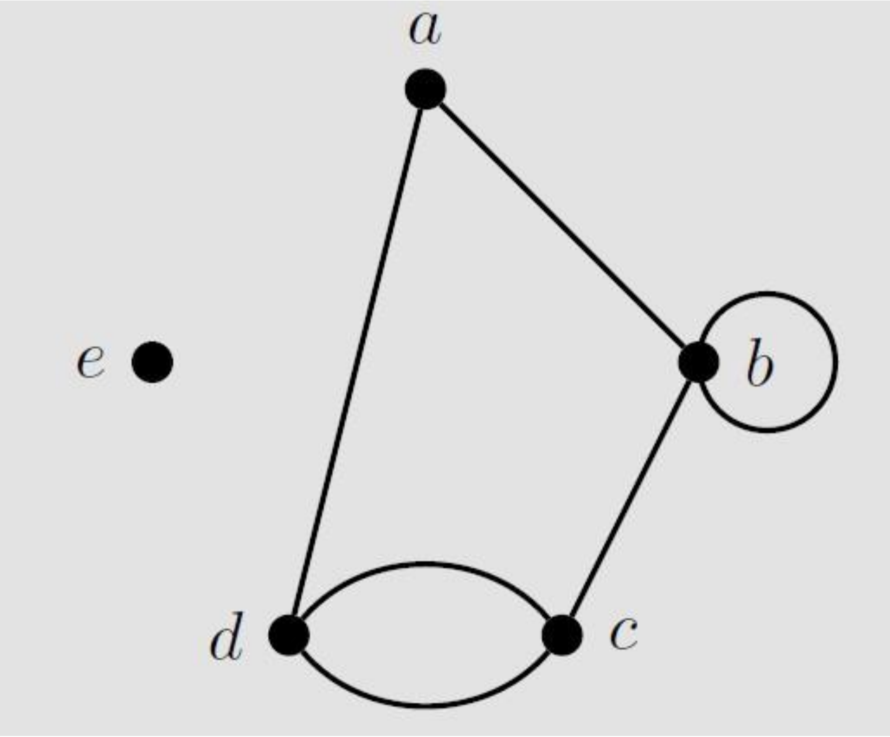
$1 \leq i, j \leq n$

Përkufizim. Matrica A e ndërtuar si më sipër quhet matricë e fqinjësisë e grafit G.

Është e qartë se matrica e fqinjësis A e një grafi të G është simetrike.

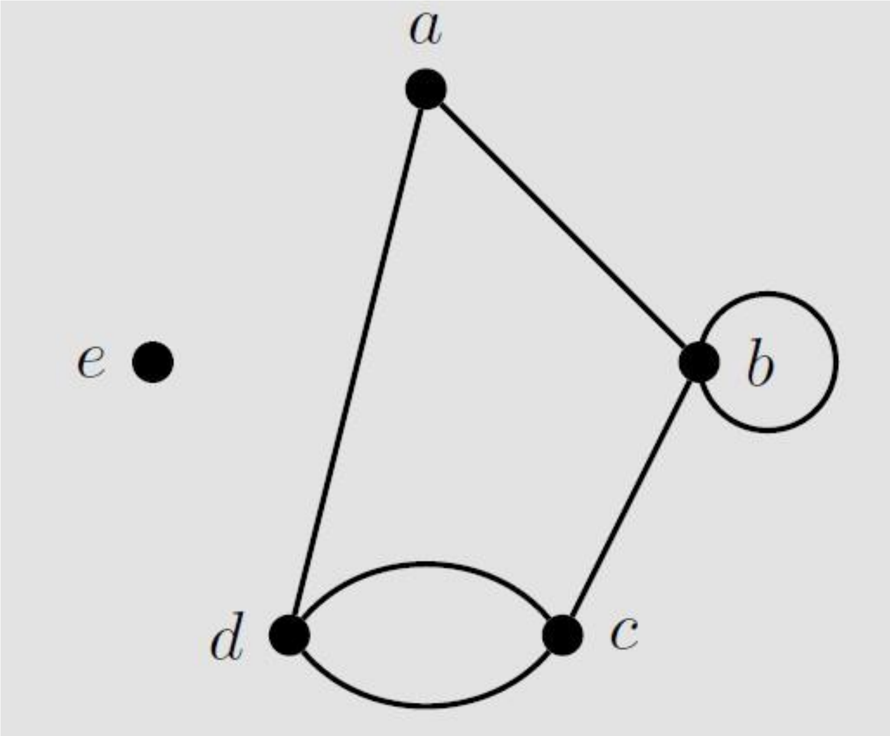
Nëse grafi është i thjeshtë elementet e diagonales kryesore janë zero.

Shembull: Për grafin e dhënë $G = (V, E)$ në figurë shkruane matricën e fqinjësisë:



.

Zgjidhje.

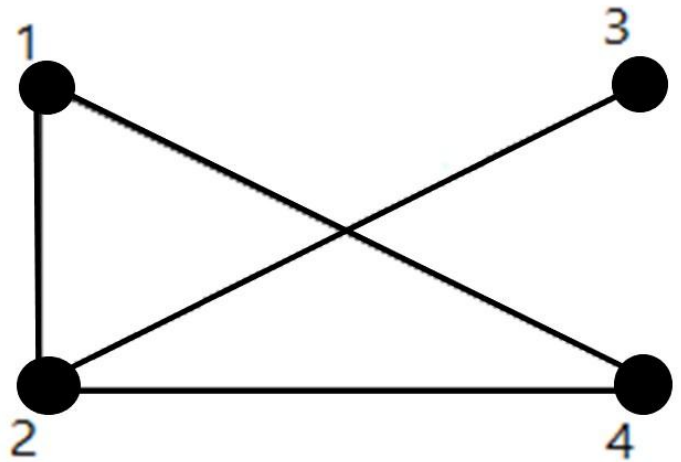


$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Shembull. Është dhënë grafi $G = (V, E)$ ku $V = \{1,2,3,4\}$ dhe $E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,2\}\}$. Të vizatohet grafi G dhe të shkruhet matrica e fqinjësis për grafin e dhënë.

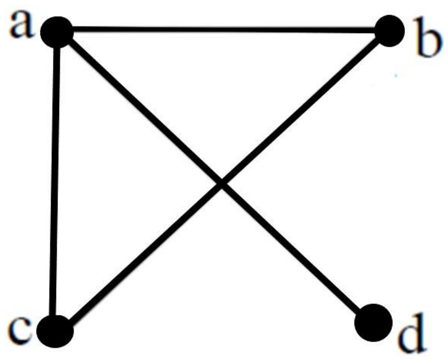
Zgjidhje.

Zgjidhje.

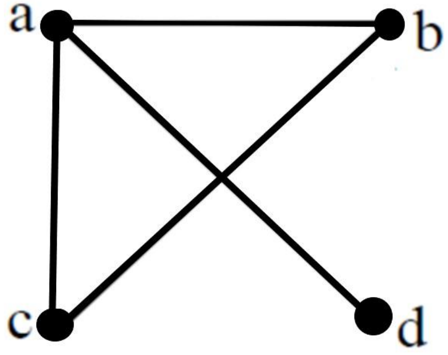


$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Shembull. Është dhënë grafi $G = (V, E)$ si në figurë?


a
b
c
d

- **Zgjidhje**.



$$\begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a0 & 1 & 1 \\ b1 & 0 & 1 \\ & & \\ c1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{matrix}$$

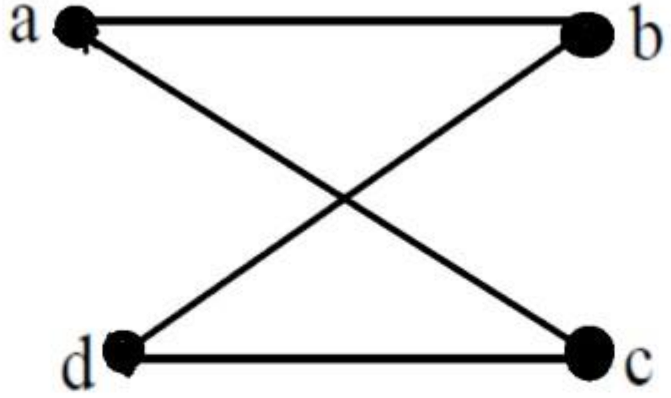
$$d1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Shembull: Të vizatohet grafi që ka matricë fqinjësie në lidhje me radhitjen e nyjeve: a, b, c, d?

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Zgjidhje:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Shembull: Të vizatohet grafi që ka matricën e fqinjësisë e si më poshtë?

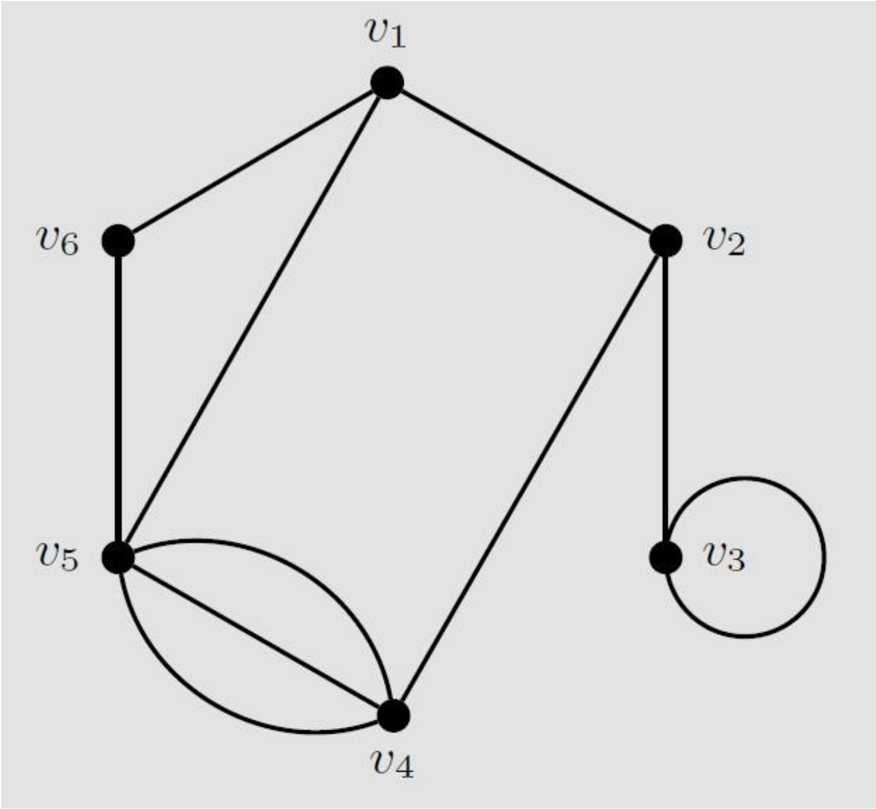
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zgjidhje :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0$$



Vërejtje.

- Matrica e fqinjësis mundë të ndërtohet edhe për multigrafet, pseudografet dhe diagrafet.

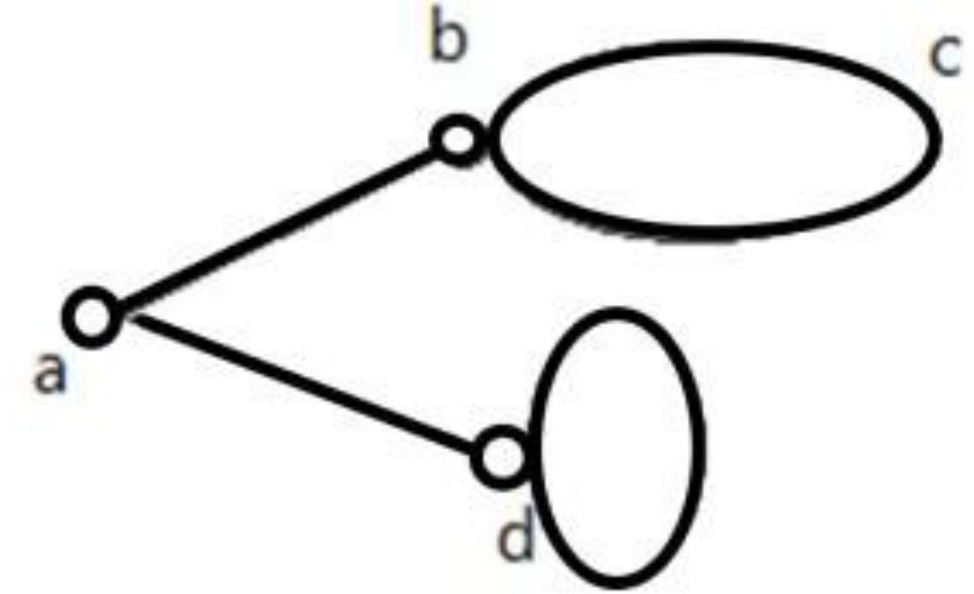
- Për multigrafet elementi a_{ij} i matricës tregon numrin e degëve me skajet i dhe j.

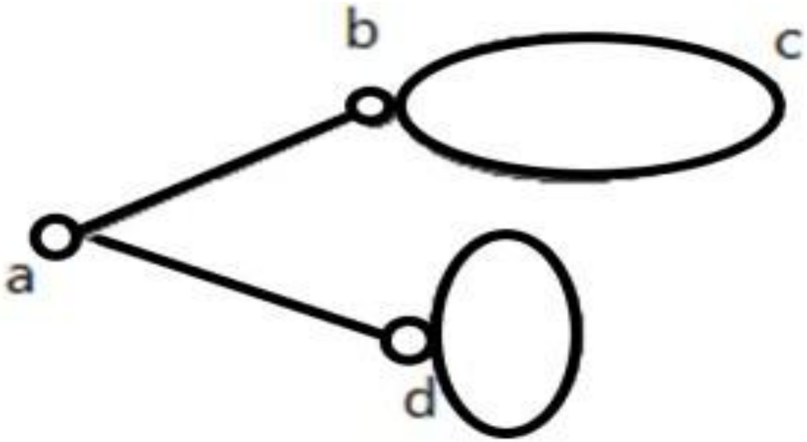
- Për pseudografet në diagonalen kryesore të matricës së fqinjësisë ka edhe elemente të ndryshme nga zero.

- Për diagrafet elementi a_{ij} i matricës tregon numrin e harqeve të diagrafit që fillojnë në kulmin i dhe mbarojnë në kulmin j.

- Në përgjithësi për diagrafet matrica e fqinjësis (ose matrica shoqëruese) nuk është simetrike.

Shembull. Për grafin e dhënë $G = (V, E)$ të shkruhen elementet e bashkësisë V dhe elementet e bashkësisë E pastaj të shkruhet matrica e fqinjësisë.





Zgjidhje.

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Përparësia e paraqitjes matricore të grafeve qëndron kryesisht në mundësin e shfrytëzimit të mjeteve algjebrike për të zbuluar vetitë e

ndryshme të
grafeve.

Teoremë. Nëse qoftë se A është matrica e fqinjësis e një grafi G, atëherë elementet $a_{ij}{}^{p}$ të fuqisë së p-të $(1 \leq p \leq n-1)$ të matricës A tregojnë numrin e degëve të ndryshme me gjatësi p dhe me skaje i dhe j në atë graf.

Zgjidhje. Vërtetësin e teoremës po e bëjmë me induksion matematikë.

Për $p = 1$ kemi $A^1 = A$ dhe është e qartë se elementet $a_{i,j}$ tregojnë njëkohësisht numrin e degëve me nga $\mathbf{1}$ brinjë që kanë skaje në kulmet i dhe j.

Le të pranojmë se elmentet a_{ij}^{p-1} tregojnë numrin e degëve të ndryshme me nga p-1 brinjë dhe me skaje në kulmet i dhe j. Shqyrtojmë tani $A^p = A^{p-1}A$ elementet e së cilës janë:

$$a_{ij}^{p} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{p-1} a_{kj}$$

Çdo shteg me p degë në grafin G përbëhet nga një shteg me $p - 1$ degë që mbaron nga një kulm të caktuar k i vazhduar me brinjën kj. Me këtë këndvështrim bashkësia e të gjitha rrugëve të tilla ndahet ndahet në n nënbashkësi sipas nyjes së parafundit. Nëse të paktën njëri nga faktorët a_{ik}^{p-1}, a_{kj} është zero, atëherë s’ka shteg nga i në j dhe me p brinjë dhe me nyje të parafundit

k. Për ndryshe kur kemi $a^{n}{}_{ik}{}^{p-1}a{\neq}_{ikp-}0_1,aa_{kjkj}$ numrin$\neq$ 0, prodhimie përgjithshëmi tyre jeptë

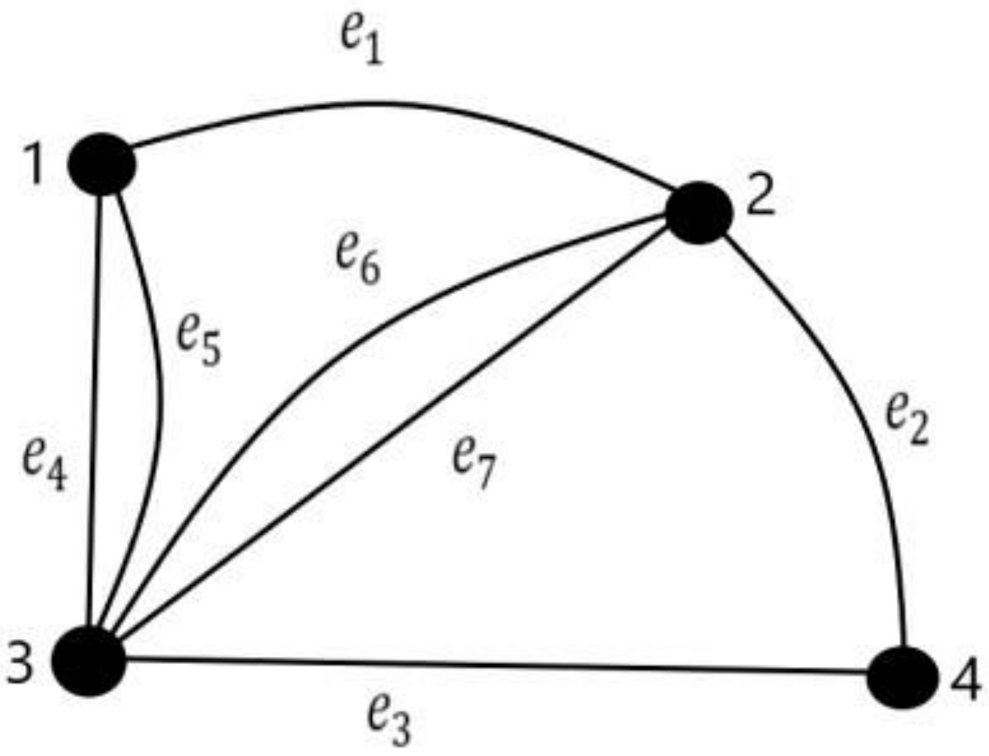
numrin e rrugëve të tilla dhe shuma $\sigma_{k=1}$ tyre.

Një paraqitje matricore alternative e grafeve dhe diagrafeve bëhet me të ashtuquajturat matrica të incidencave. Le të jetë $G = G(V, E)$ një diagraf me n nyje dhe me m degë që i numrojmë a_1, a_2, … , a_m. Matrica $B_{m\times n}$ me elemente

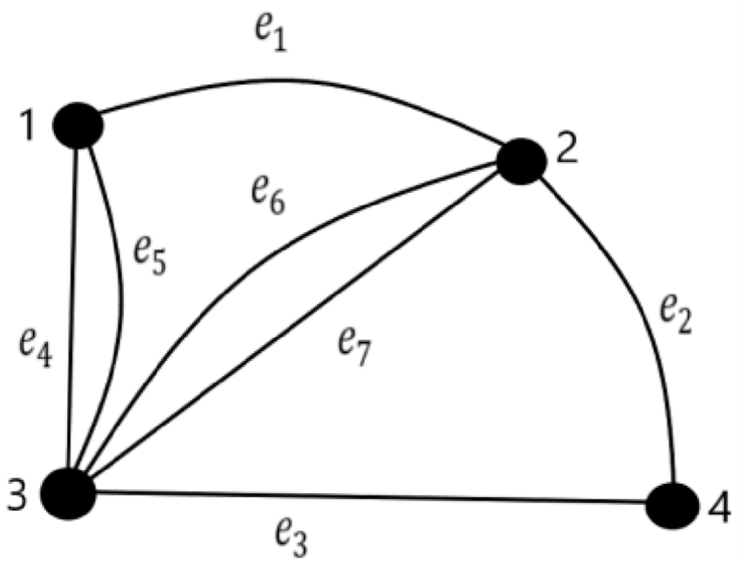
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nëse } \boldsymbol{i} \text{ është fillimi i degës } a_j \\ -1 & \text{nëse } \boldsymbol{i} \text{ është mbarimi i degës } a_j \\ 0 & \text{të tjera} \end{cases}$$

quhet matricë e incidencave e diagrafit G. Matrica e incidenave e një grafi nuk dallon skajet e degëve prandaj i ka elementet e vet nga bashkësia $\{0,1\}$. Siç vërehet çdo shtyllë e matricës së incidencave ka saktësishtë dy elemente të ndryshëm nga zero.

Shembull: Të caktohet matrica e fqinjësisë A dhe matrica e incidencës M për grafin e dhënë:


e_1
1
2
e_6
e_5
e_2
e_4
e_7
3
4
e_3

Zgjidhje



$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vërejtje:

Nëse G paraqet graf me n nyje, matrica e fqinjësis A është matrica e rendit $n \times n$, ashtu që elementi a_{ij} paraqet numrin e brinjëve që bashkojnë nyjet $\boldsymbol{i}$ dhe $\boldsymbol{j}$. Matrica e incidencës (lidhshmërisë) së grafit G me n nyje dhe me m degë është matrica e rendit $n \times m$, ashtu që elementi a_{ij} është 1 nëse nyja $\boldsymbol{i}$ i takon degës $\boldsymbol{j}$.

Shembull: Është dhënë matrica e fqinjësisë A e grafit G.

$$A = \begin{bmatrix} & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 1 \quad 0$$

$$0 \quad 2 \quad 1 \quad 1$$

Të caktohet grafi G dhe matrica e incidencës.

Zgjidhje. Grafi të konstruktohet nga studentët?

$$M =, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$0\,0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1\,0$$

$$0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1$$

Shembull: Është dhënë matrica e incidencës M e grafit G:

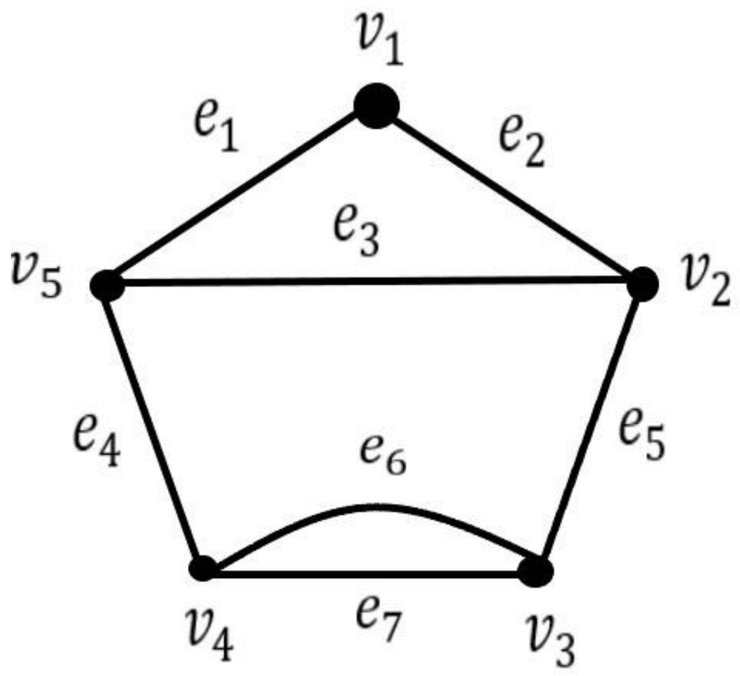
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

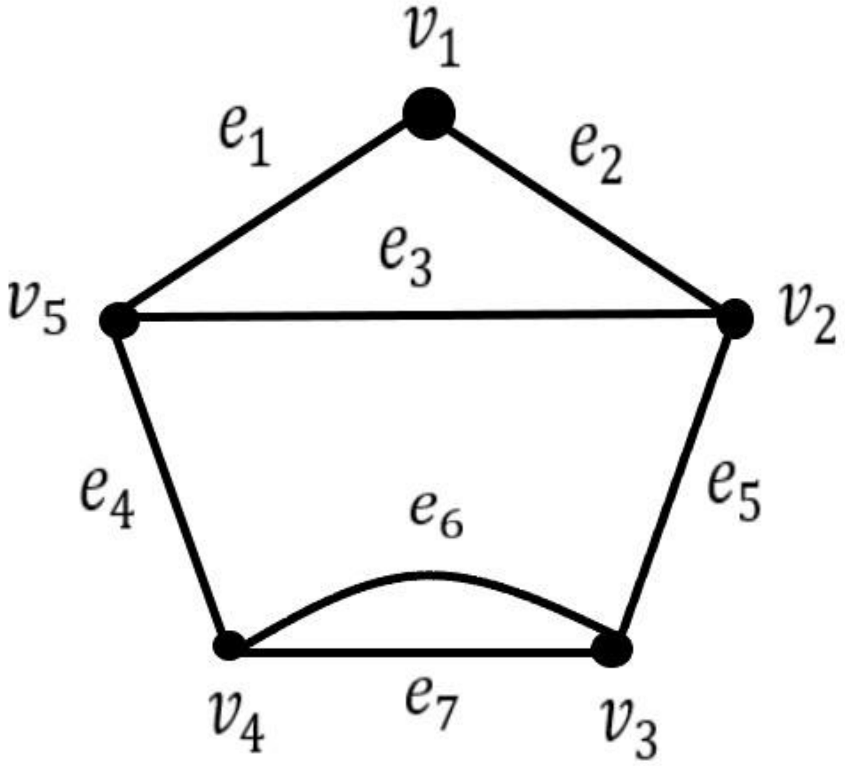
Të caktohet grafi G matrica e fqinjësis A.

Zgjidhje. Grafi të konstruktohet nga studentët?

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Shembull. Të caktohet matrica e fqinjësis A dhe matrica e incidencës M për grafin paraqitur në figurë?



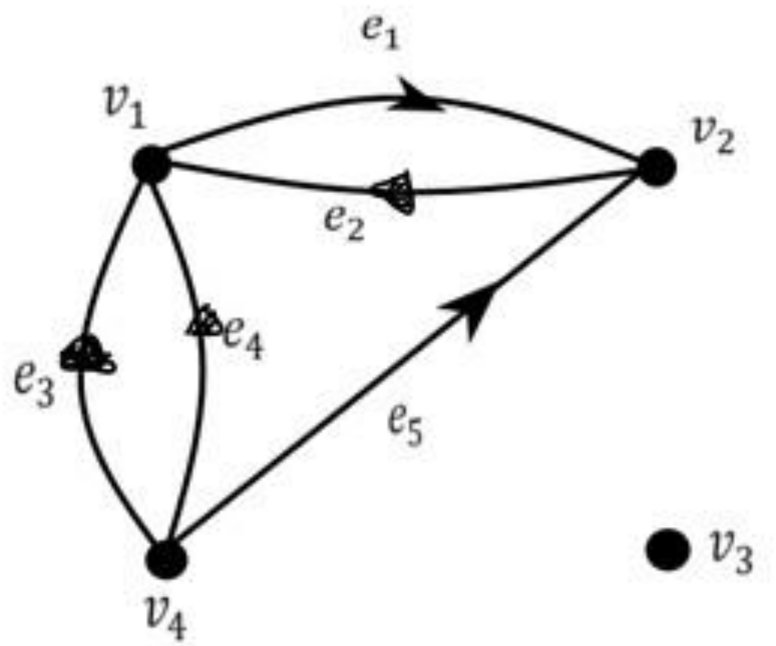


Zgjidhje:

$$
\begin{bmatrix} 0\ 1 & 0 & 0 & 11 \\ & 10\,1 & 1 & 0 \\ =0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\quad
\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\,1 & 0 & 1 & 0 \\ A = 0 & 1 & 0 & 2 & 0, & M \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 10\,0 & 0 \\ 1 & 01\,0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

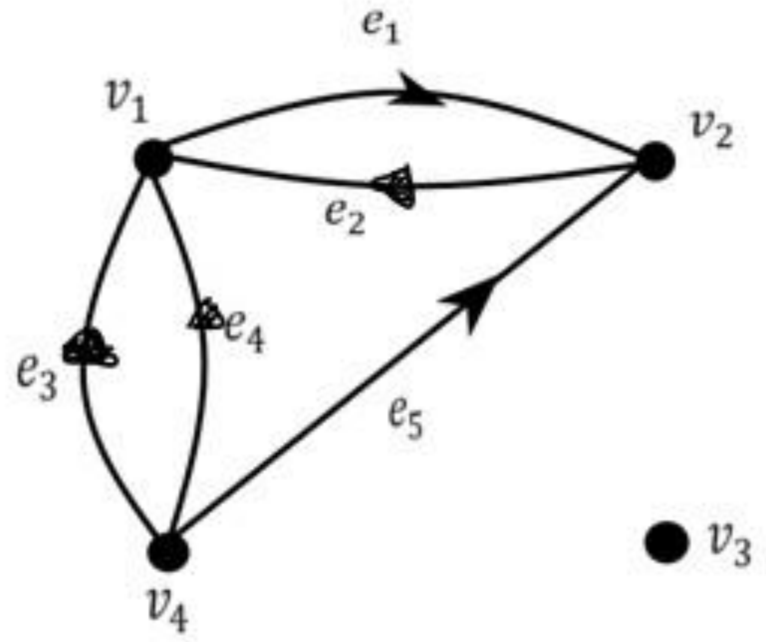
$$0$$

Detyrë. Të caktohet matrica e incidencës M për grafin e orientuar.



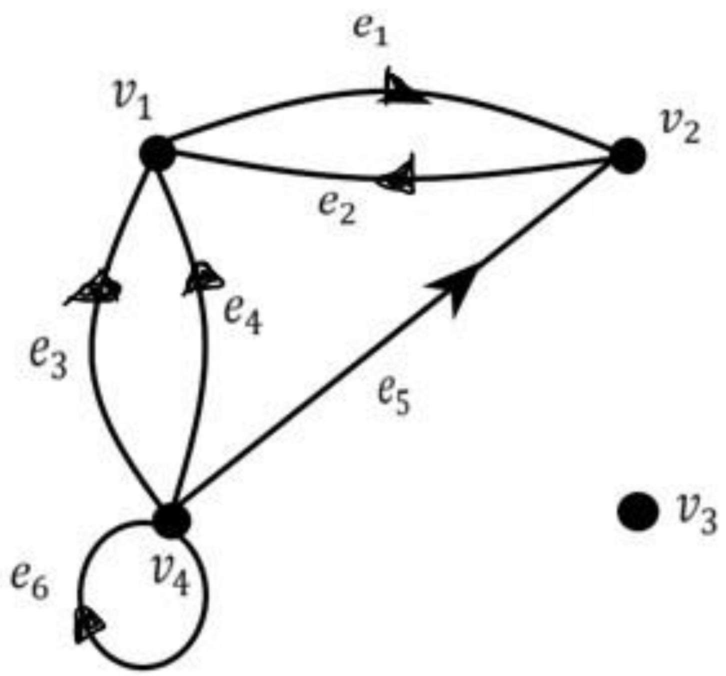
Zgjidhje.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nëse } v_i \text{ është kulm fillestar i degës } e_j \\ -1 & \text{nëse } v_i \text{ është kulmi i mbarimit i degës } e_j \\ 0 & \text{për raste të tjera} \end{cases}$$

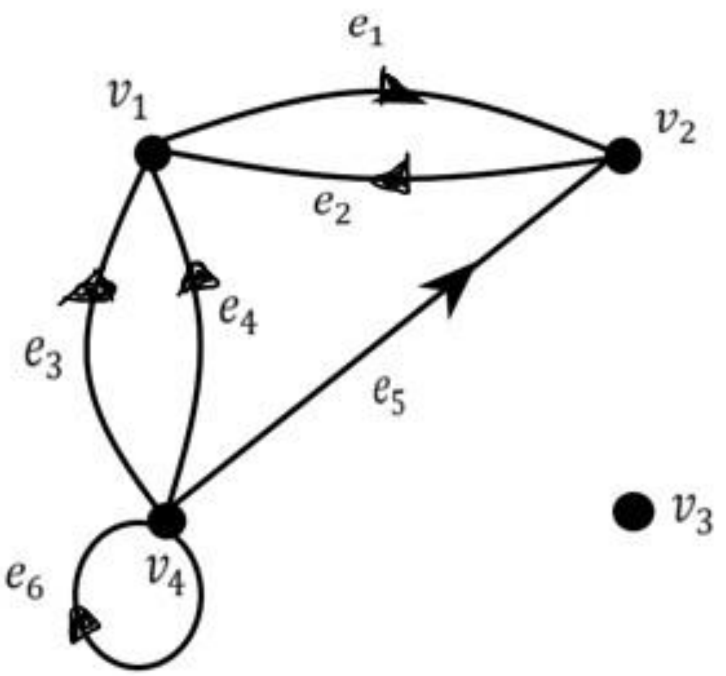


$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ & & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

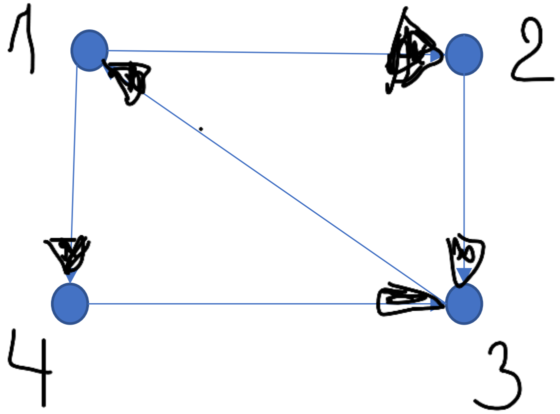
1 1 **Detyrë**. Të caktohet matrica e fqinjësisë A për grafin e orientuar



Zgjidhje.

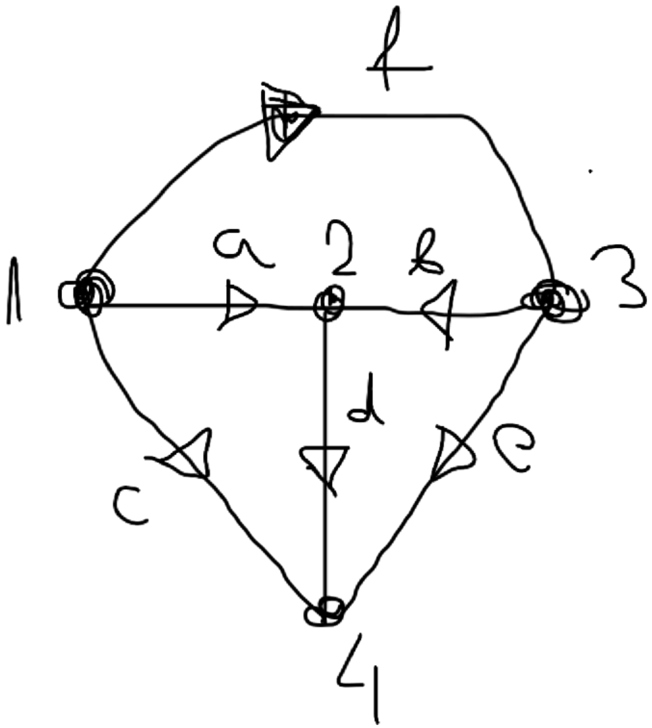


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

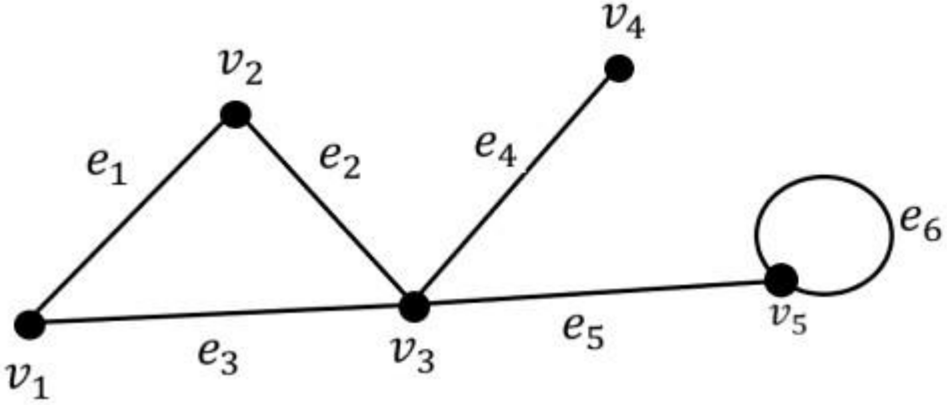
Matrica e fqinjësis



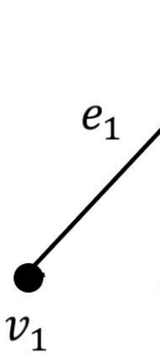
$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrica e fqinjësis

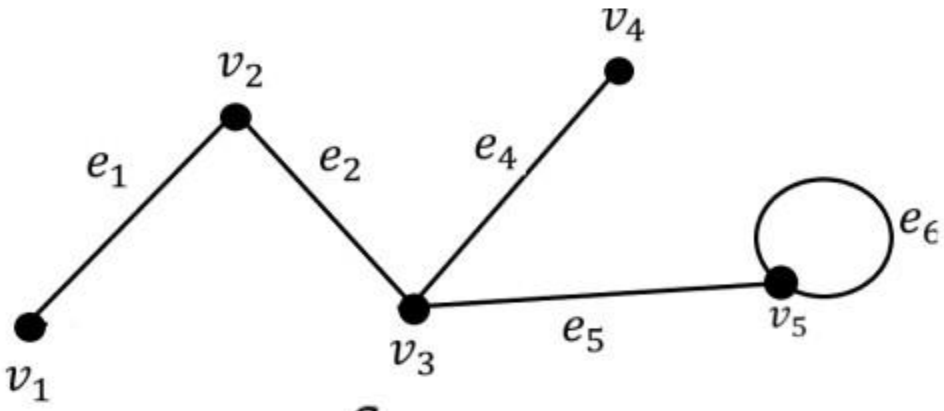
Detyrë: Për grafin e dhënë G , të caktohen tri nëngrafe të tij?



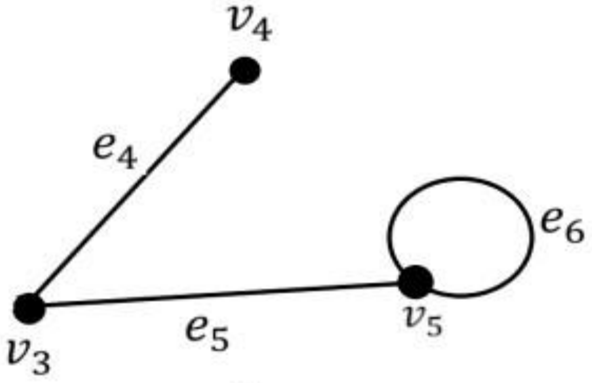
Zgjidhje.



G_1



G_2



G_3

Izomorfizmi grafeve

Shpesh kërkohet të dihet nëse është e mundur të vizatohen dy grafë në të njëjtën mënyrë. Për shembull, në Kimi, grafët përdoren për të modeluar komponimet (përbërjet) kimike. Komponime të ndryshme mund të kenë të njëjtën formulë molekulare por mund të ndryshojnë në strukturë. Të tilla komponime paraqiten me grafë të cilët nuk mund të vizatohen në të njëjtën mënyrë. Grafët që përfaqësojnë komponime kimike të njohura më parë mund të përdoren për të përcaktuar nëse një komponim i ri ka qënë studjuar më parë. Në teorinë e grafeve ka një terminologji të dobishme për grafët me të njëjtën strukturë.

PËRKUFIZIM 7.1 Grafët e thjeshtë $G_1 = (V_1, E_1)$ dhe $G_2 = (V_2, E_2)$ janë **izomorfë** në qoftë se ekziston një funksion një për një (bijeksion) f me fillim në V_1 dhe me mbarim në V_2 me vetinë që a dhe b janë fqinjë në G_1 atëhere dhe vetëm atëhere kur $f(a)$ dhe $f(b)$ janë fqinjë në G_2, për të gjitha $a, b \in V_1$. Funksioni që gëzon këtë veti quhet **izomorfizëm**.

(Izomorfizëm rrjedh nga greqishtja e vjetër: isos = i/e njëjtë dhe morfos = formë).

Pra, kur dy grafë të thjeshtë janë izomorfë, ka një korespondencë një për një midis nyjeve të dy grafëve që e ruan marrëdhënien e fqinjësisë. Izomorfizmi për grafët e thjeshtë është relacion ekuivalence(cili është kuptimi i ekuivalencës???).

$G_1 \cong G_2 \wedge G_2 \cong G_3 \Rightarrow G_1 \cong G_3$.

TEOREMË 7.1 Izomorfizmi i grafëve të thjeshtë është relacion ekuivalence.

Vërtetim: Relacioni i ekuivalencës ëshët refleksiv, simetrik dhe kalimtar.
I. Izomorfizmi është relacion refleksiv (pasqyrues). Kjo do të thotë se cilido qoftë një graf i thjeshtë G_1, ai është izomorf me veten e vet. Në fakt, ekziston funksioni identik me fillim dhe mbarin në V_1, $(f: u \to u)$, i cili është korespondencë një për një , dhe për të cilin kemi që, a dhe b janë fqinjë atëhere dhe vetëm atëher kur $f(a) = a$ dhe $f(b) = b$ janë fqinjë, gjë që është e vërtetë.

II. Izomorfizmi është relacion simetrik, d.m.th., në qoftë se G_1 është izomorf me G_2 atëher edhe G_2 është izomorf me G_1.

Vërtet, le të supuzojmë se grafët e thjeshtë $G_1 = (V_1, E_1)$ dhe $G_2 = (V_2, E_2)$ janë izomorfë, d.m.th., ekziston një funksion një për një (bijeksion) f me fillim në V_1 dhe me mbarim në V_2 me vetinë që a dhe b janë fqinjë në G_1 atëhere dhe vetëm atëhere kur $f(a)$ dhe $f(b)$ janë fqinjë në G_2, për të gjitha $a, b \in V_1$. Meqë f është bijeksion atëhere ekziston funksioni i anasjelltë i tij f^{-1} me fillim në V_2 dhe me mbarim në V_1 i tillë që $f^{-1}[f(a)] = a$ *dhe* $f^{-1}[f(b)] = b$ dhe fqinjësitë në fjalë janë të vërteta. Rrjedh që G_2 është izomorf me G_1.

III. Izomorfizmi është relacion kalimtar. Le të supozojmë se grafët e thjeshtë $G_1 = (V_1, E_1)$ dhe $G_2 = (V_2, E_2)$ janë izomorfë dhe grafët e thjeshtë $G_2 = (V_2, E_2)$ dhe $G_3 = (V_3, E_3)$ janë izomorfë. Të provojmë se grafët e thjeshtë $G_1 = (V_1, E_1)$ dhe $G_3 = (V_3, E_3)$ janë izomorfë. Meqë grafët e thjeshtë $G_1 = (V_1, E_1)$ dhe $G_2 = (V_2, E_2)$ janë izomorfë, atëhere ekziston funksioni një për një (bijeksion) f me fillim në V_1 dhe me mbarim në V_2 me vetinë që a dhe b janë fqinjë në G_1 atëhere dhe vetëm atëhere kur $f(a)$ dhe $f(b)$ janë fqinjë në G_2, për të gjitha $a, b \in V_1$. Po ashtu, meqë grafët e thjeshtë $G_2 = (V_2, E_2)$ dhe $G_3 =$

(V_3, E_3) janë izomorfë, atëhere ekziston funksioni një për një (bijeksion) g me fillim në V_2 dhe me mbarim në V_3 me vetinë që $f(a)$ dhe $f(b)$ janë fqinjë në V_2 atëhere dhe vetëm atëhere kur $g(f(a))$ dhe $g(f(b))$ janë fqinjë në V_3, për të gjitha $f(a), f(b) \in G_2$.

Shohim se funksioni $h = g \circ f$, i cili është përbërje e f me g, realizon korespondencë një për një të nyjeve të V_1 me nyjet e V_3 , d.m.th., ekziston bijeksioni me fillim në V_1 dhe me mbarim në V_3 të G_3 . Duke ditur se a dhe b janë fqinjë në G_1 atëhere dhe vetëm atëhere kur $f(a)$ dhe $f(b)$ janë fqinjë në G_2 dhe $f(a)$ dhe $f(b)$ janë fqinjë në G_2 atëhere dhe vetëm atëhere kur $g(f(a))$ dhe $g(f(b))$ janë fqinjë në G_3, rrjedh se a dhe b janë fqinjë në G_1 atëhere dhe vetëm atëhere kur $g(f(a)) =$

$h(a)$ dhe $g(f(b)) = h(b)$ janë fqinjë në G_3 . Izomorfizmi e gëzon edhe vetinë kalimtare, përfundimisht ai është relacion ekuivalence.

Problemi i izomorfizmit. A ekziston ndonjë algoritëm efektiv për të kontrolluar nëse dy grafë çfarëdo të dhënë janë izomorfë ose jo?

Programimi kompjuterik i një probleme mbi grafët nuk ka nevojë për paraqitjen planare të tij. Në këtë rast, paraqitja matricore e grafëve është ideale për kompjuterat sepse çdo gjuhë programimi ka strukturën e një rreshti dhe këto programe operojnë shumë mirë me numrat e plotë. Le të formojmë me bashkësinë e nyjeve të grafit G një sistem të renditur $V_G =$

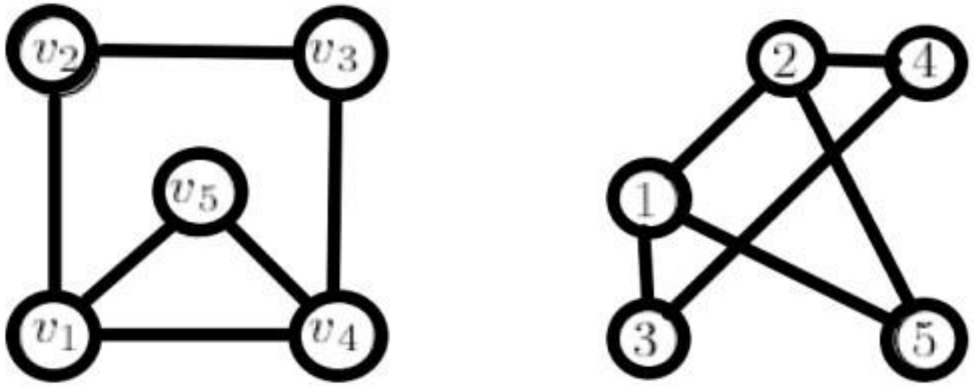
$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matricë e fqinjësisë e grafit G quhet matrica M me $n \times n$ përmasa me elementë në (i, j) të saj: $M_{ij} = 1$ ose $M_{ij} = 0$ në varësi të faktit që, $v_i v_j \in E_G$ ose jo.

Përkufizimi (në gjuhën simbolike). Dy grafe G dhe H quhen izomorfe, simbolikisht shënohet $G \cong H$, nëse eksiston bijeksioni $\alpha: V_G \to V_H$ i tillë që, $uv \in E_G \Leftrightarrow \alpha\, u\, \alpha\, v \in E_G$ për të gjitha $uv \in E_G$.

Pra, grafet G dhe H janë izomorfe nëse nyjet e grafit H janë riemërtime të nyjeve të grafit G.

Dy grafë izomorfë kanë të njëjtat veti teorike dhe ata janë të identifikueshëm.

Shembull: Tregoni se grafet e mëposhtme janë izomorfe, pastaj tregoni se cilit graf i korrespondon matrica e fqinjësis A.



A

$=$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & \end{bmatrix}$

$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0$

$0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1$

$1\ 0\ 0\ 0$

Zgjidhje. Izomorfizmi realizohet me anë të çiftimeve

{ } { } $f: v_1,$ ( ) $v_2 \to 1,3$sepse ( ) $dv_1 = d$

1 { dhe } { } $dv_2 =$ ( ) d 3 ( )

( ) ( )

{ } { } $f: v_2,$ ( ) $v_3 \to 3,4$sepse ( ) $dv_2 = d$

3 { dhe } { } $dv_3 =$ ( ) d 4 ( ) ( ) ( )

( ) ( )

{ } { } $f: v_3,$ ( ) $v_4 \to 4,2$sepse ( ) $dv_3 = d$

( ) ( )

4 { dhe } { } $dv_4 =$ ( ) d 2 $f: v_4,$ ( )

( ) ( )

$v_5 \to 2,5$sepse $dv_4 = d$ 2 dhe $dv_5 = d$ 5

( ) ( )

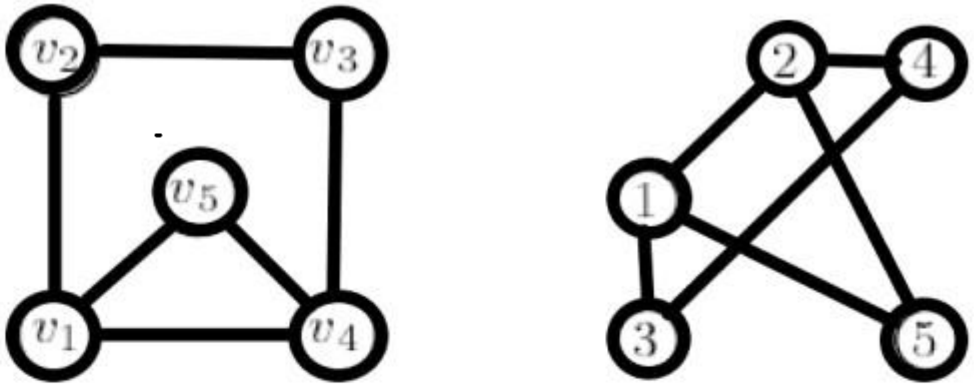
f:v_5, v_1→5,1sepse dv_5= d 5 dhe dv_1= d 1

f:v_1, v_4→1,2sepse dv_1= d 1 dhe dv_4= d 2

$$v_1 \to 1, v_2 \to 3, v_3 \to 4, v_4 \to 2, v_5 \to 5,$$

Pasi grafet e mëposhtme janë izomorfe atyre i takon e njejta matricë e fqinjësisë e cila ndërtohet duke e përdorë pasqyrimin

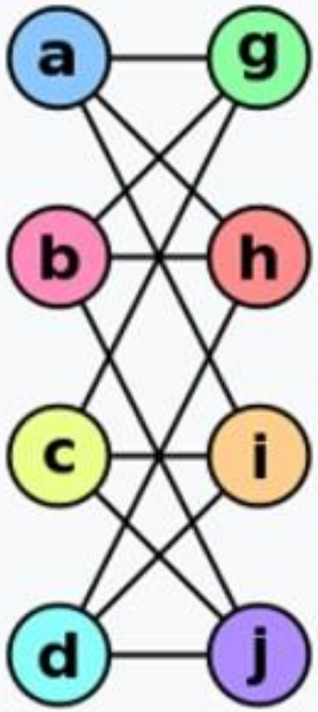
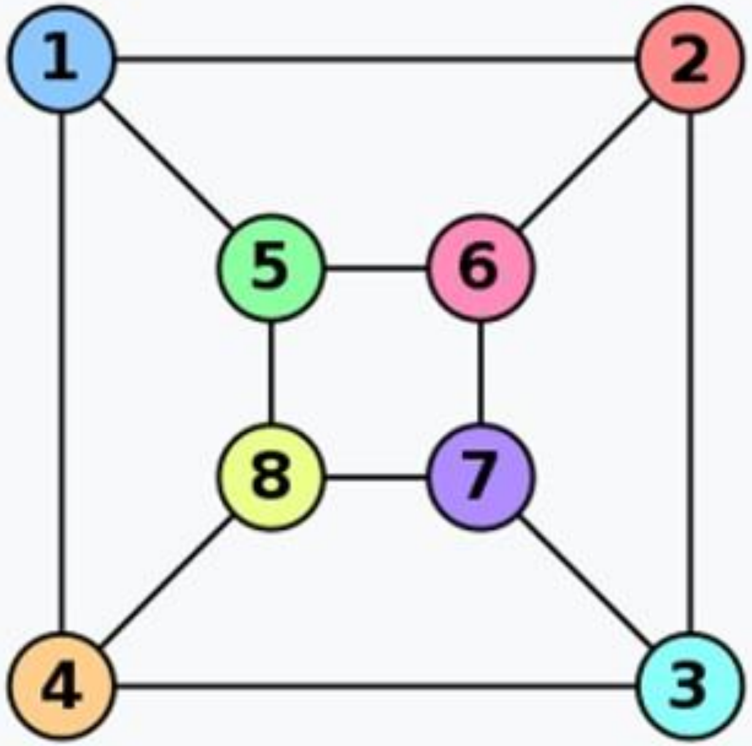
$v_1 \to 1, v_2 \to 3, v_3 \to 4, v_4 \to 2, v_5 \to 5,$



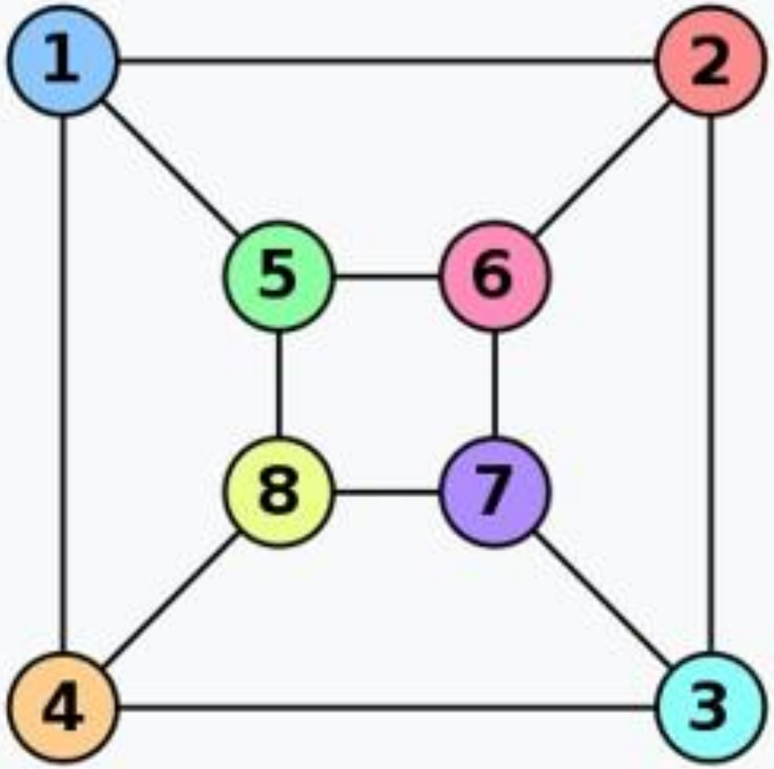
Grafë izomorfë

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1	0	0	1	1	0 1 1 0 0 1 1 0 0
1	0	0	1	0	0

Grafi G	Grafi H.
	

Zgjidhje

Grafi G	Grafi H.	Izomorfizmi ne mes grafeve G dhe H.
		$f(a) = 1$ $f(b) = 6$ $f(c) = 8$ $f(d) = 3$ $f(g) = 5$ $f(h) = 2$ $f(i) = 4$ $f(j) = 7$

Matrica e fqinjësisë është gjithnjë simetrike në lidhje me diagonalen që përmban vetëm zero. Një graf ka matrica fqinjësie të ndryshme: një matricë për secilën renditje të nyjeve të tij. Duke u mbështetur në përkufizimin e dhënë është e vërtetë teorema:

Teoremë. Dy grafë G dhe H janë izomorfë atëhere dhe vetëm atëhere kur ata kanë të njëjtën matricë fqinjësie sipas korespondencës të vendosur midis nyjeve të tyre. Për më tepër, dy grafë izomorfë kanë të njëjtën bashkësi matricash të fqinjësisë.

Vërtetim: Supozojmë se $G \cong H$, dhe shënojmë matricat e fqinjësisë së tyre përkatësisht me M dhe M'. Meqë dy grafët janë izomorfë atëhere në bazë të përkufizimeve për izomorfizmin e tyre dhe për matricën e fqinjësisë kemi:

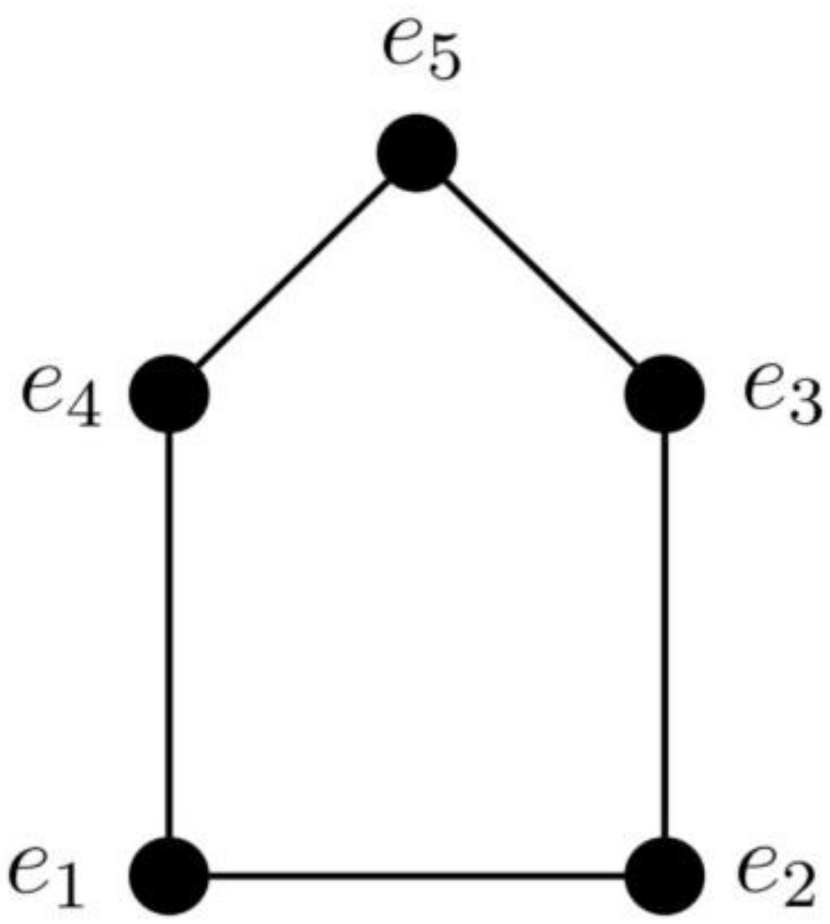
~~***(KN)***~~ Nëse, $\left[\left(\{v_i, v_j\} \in E_G \Leftrightarrow M_{ij} = 1\right) \wedge G \cong H\right] \Rightarrow \left(\{\alpha(v_i), \alpha(v_j)\} \in E_H \Leftrightarrow M'_{ij} = 1\right)$, ku indekset i dhe j janë të cfarëdoshëm.

Nëse $\left[\left(\{v_i, v_j\} \notin E_G \Leftrightarrow M_{ij} = 0\right) \wedge G \cong H\right] \Rightarrow \left(\{\alpha(v_i), \alpha(v_j)\} \notin E_H \Leftrightarrow M'_{ij} = 0\right)$ (Në këtë implikim është e vërtetë që $\{\alpha(v_i), \alpha(v_j)\} \notin E_H$ sepse, po të supozojmë se $\{\alpha(v_i), \alpha(v_j)\} \in E_H$, atëhere do të rridhte që edhe $\{v_i, v_j\} \in E_G$). Në bazë të vërtetësisë së këtyre dy implikimeve, ku indekset i dhe j janë të çfarëdoshëm, rrjedh që, $M \equiv M'$.

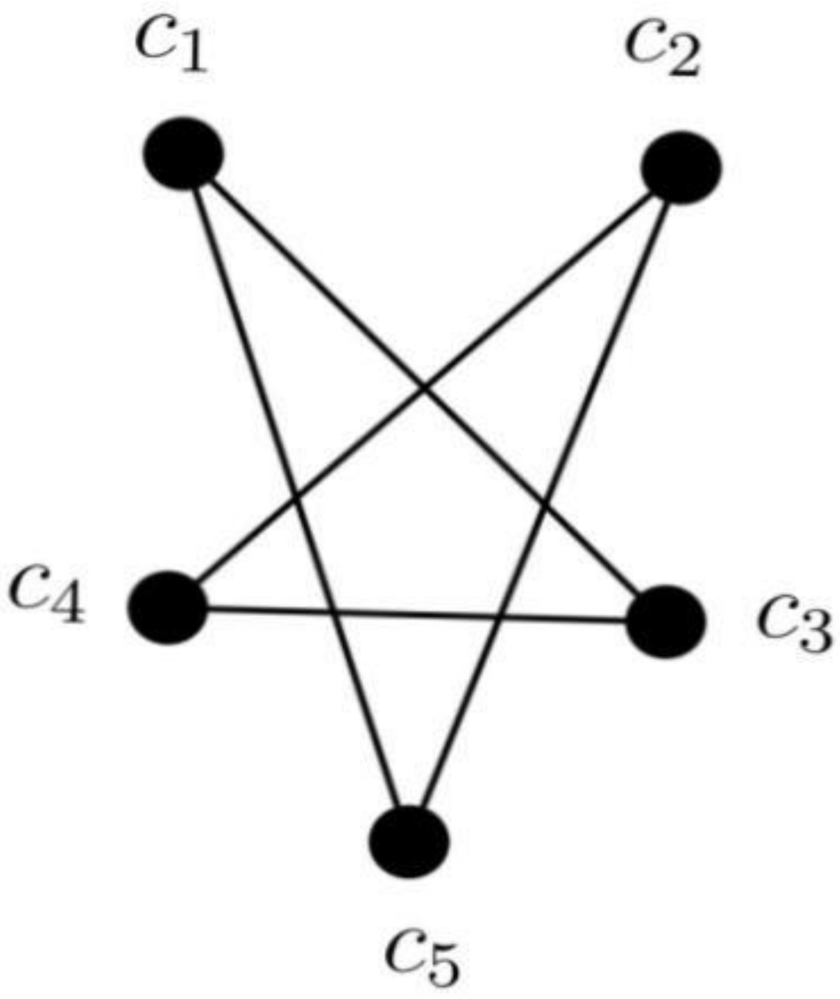
(KM) Le të supozojmë se matricat e fqinjësisë të tyre plotësojnë kushtin: $M \equiv M'$ dhe vërtetojmë se $G \cong H$. Meqë , për një renditje të nyjeve të dy grafëve, na jepet që $M \equiv M'$, atëhere të dy grafët kanë të njëjtin numër nyjesh, prandaj është e mundur të ndërtohet bijeksioni $\alpha: V_G \rightarrow V_H$ ku: nyja e parë në renditjen e dhënë të nyjeve të G çiftohet me nyjen e parë në renditjen e dhënë të nyjeve të H, e dyta me të dytën dhe kështu me radhë. Meqë për të gjitha (i, j) të dy matricave të tilla që $M_{ij} = 1$ dhe $M_{ij}{}' = 1$ kemi që $\{v_i, v_j\} \in E_G$ dhe $\{\alpha(v_i), \alpha(v_j)\} \in E_H$, atëhere në bazë të përkufizimit kemi $G \cong H$.

Vërejtje: Në qoftë se dy grafët janë izomorfë sipas ndonjë bijeksioni tjetër të ndërtuar në bashkësite përkatëse të nyjeve të tyre, përsëri do të kemi që matricat përkatëse të fqinjësisë janë të barabarta, prandaj të dy grafët izomorfë kanë të njëjtën bashkësi matricash të fqinjësisë.

Shembull. Tregoni se grafet G dhe H janë izomorfë.

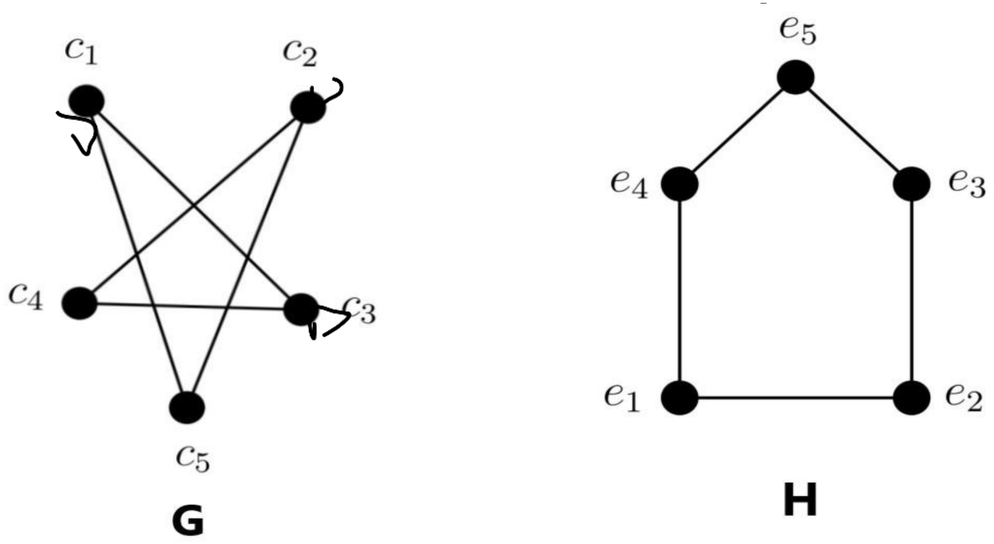


H



G

Shembull. Tregoni se grafet G dhe H janë izomorfë.



Zgjidhje. Së par vërejmë që $| = |V_2| = 5$ dhe $|E_1|$ $|V_1 =|$

E_2 $= 5.$ $(\ {}_1)$

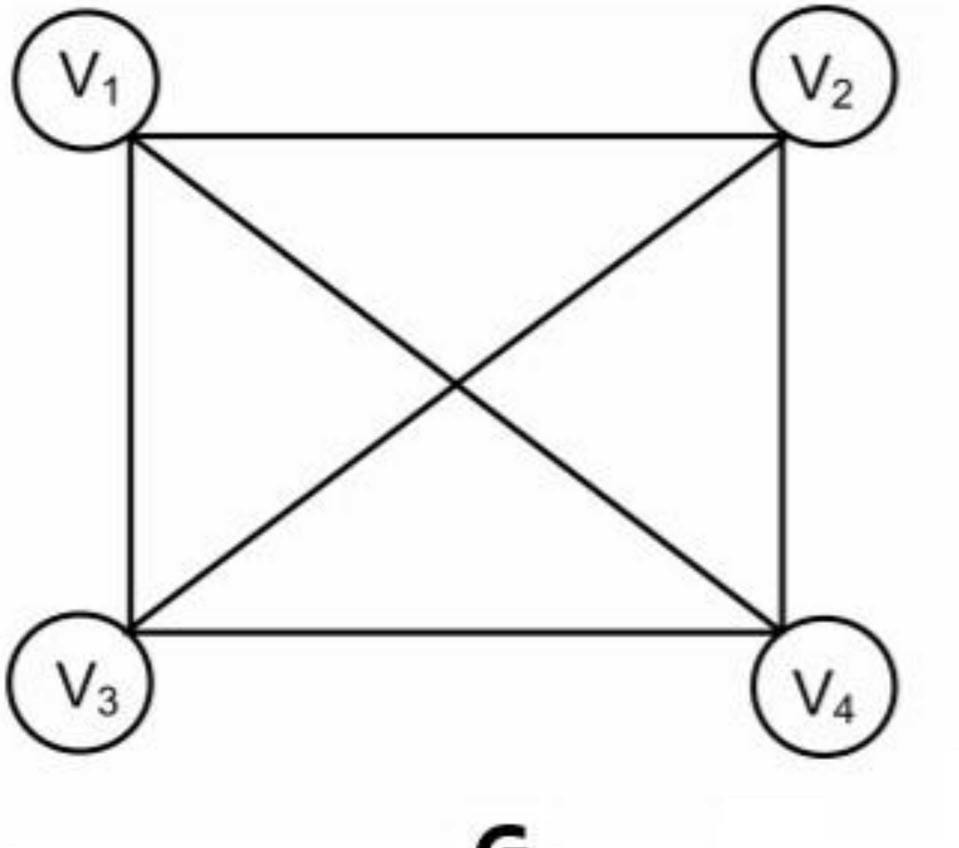
Përkufizojmë funksionin $f: G \to H$ i ${}_5 = c_4$ ose $f: \begin{pmatrix} e_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ dhënë me: $f\ e = c_1$, f

e_2 $= c_3$,

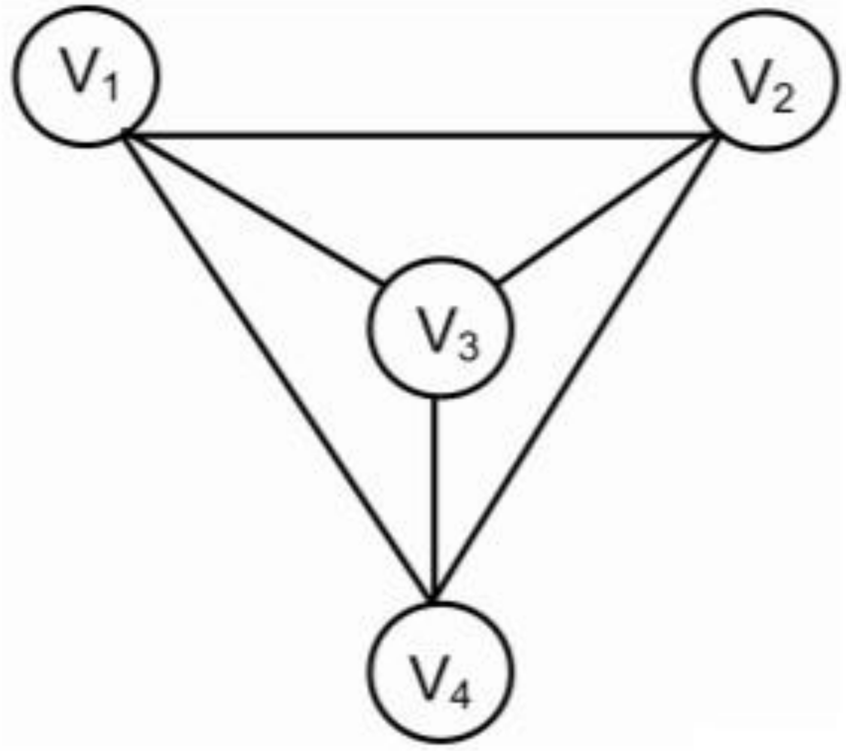
$f(e_3) = c_5$, $f(e_4) = c_2$ dhe $f(e \quad) \qquad ec_{32}\; ec_{53}\; ec_{24}\; ec_{45})$.

Funksioni f është bijeksion. Provohet lehtë se f ruan relacionin e fqinjësisë në mes nyjeve të grafeve. Prandaj G dhe H janë grafe izomorfe.

Shembull. Tregoni se grafet G dhe H janë izomorfë.

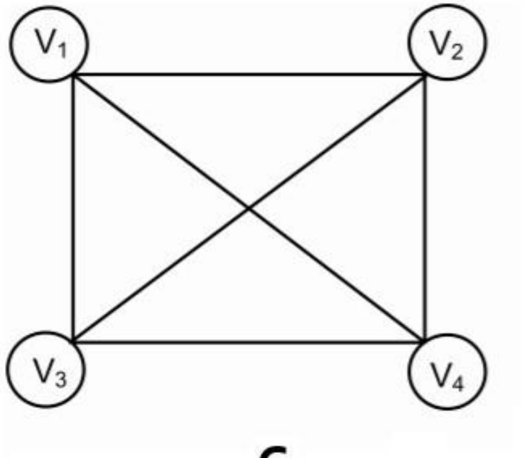


G

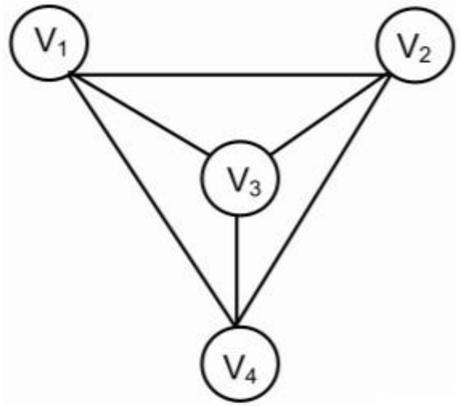


H

Shembull. Tregoni se grafet G dhe H janë izomorfë.



G



H

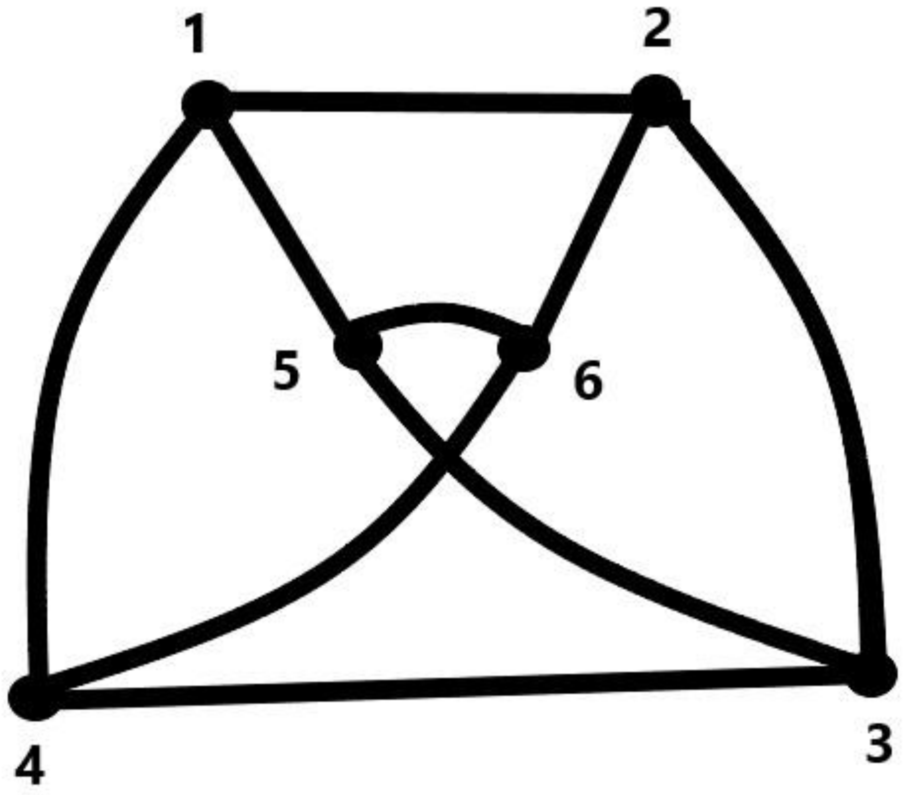
Zgjidhje.

Pasqyrimi $f: G \to H$ i dhënë me:

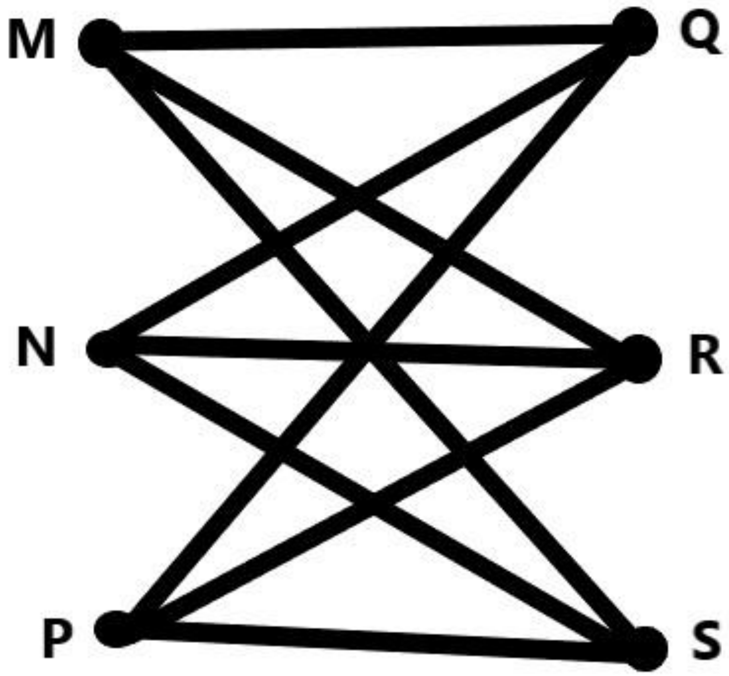
$$f: \left(vv11\ vv22\ vv33\ vv44 \right)$$

është izomorfizmi i kërkuar.

Shembull. Tregoni se grafet G dhe H janë izomorfë.

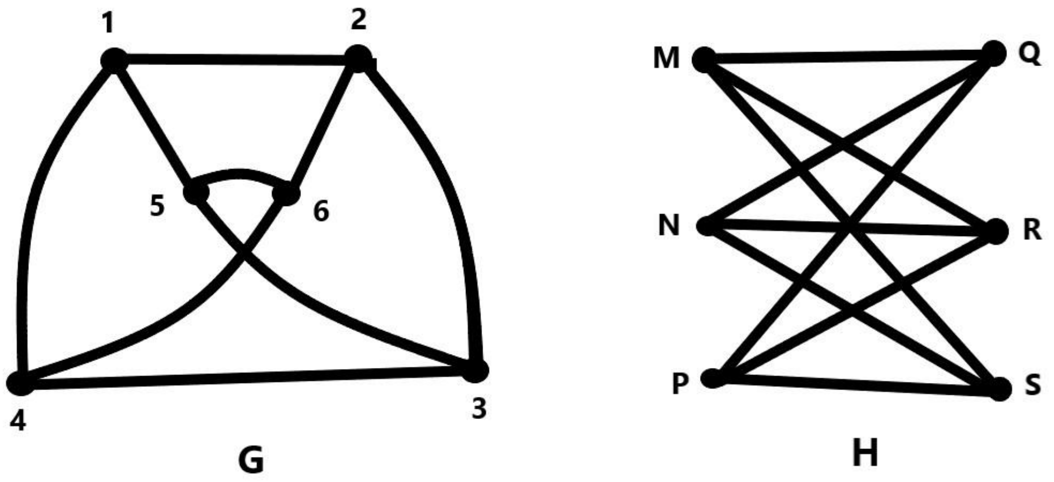


G



H

Shembull. Tregoni se grafet G dhe H janë izomorfë.



Zgjidhje.

Pasqyrimi $f: G \to H$ i dhënë me:

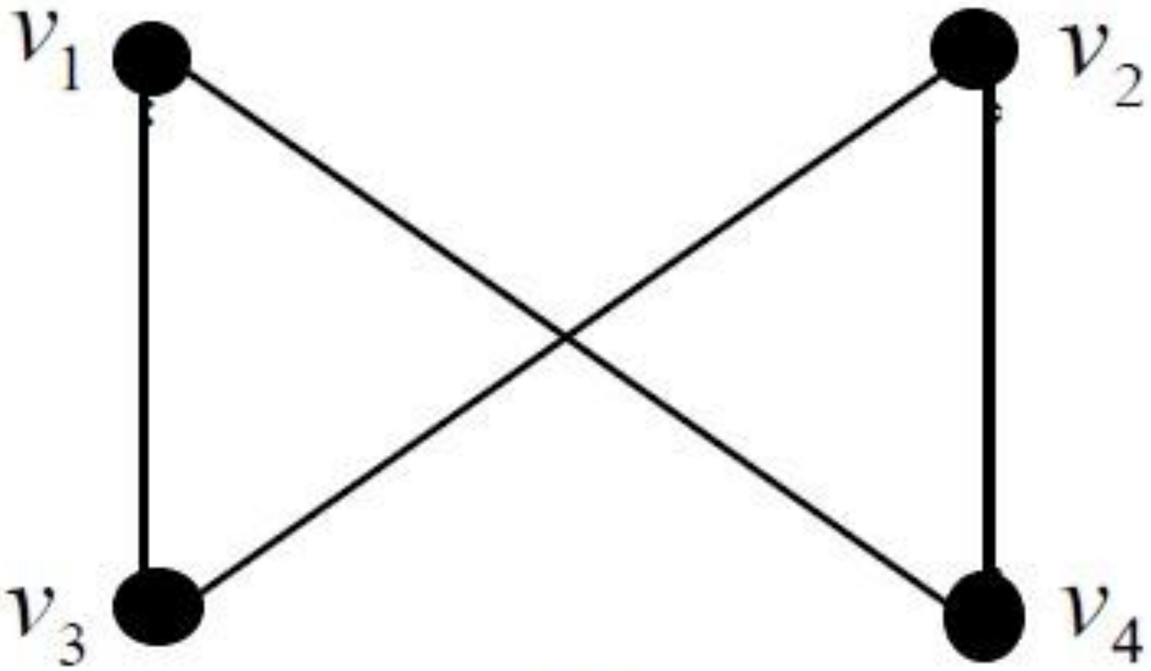
Shembull. Tregoni se grafet G

$$\begin{pmatrix} & 12 & 3 & 4 & 5 & 6\, M \\ & & Q & N & R & P & S \end{pmatrix}$$

f:

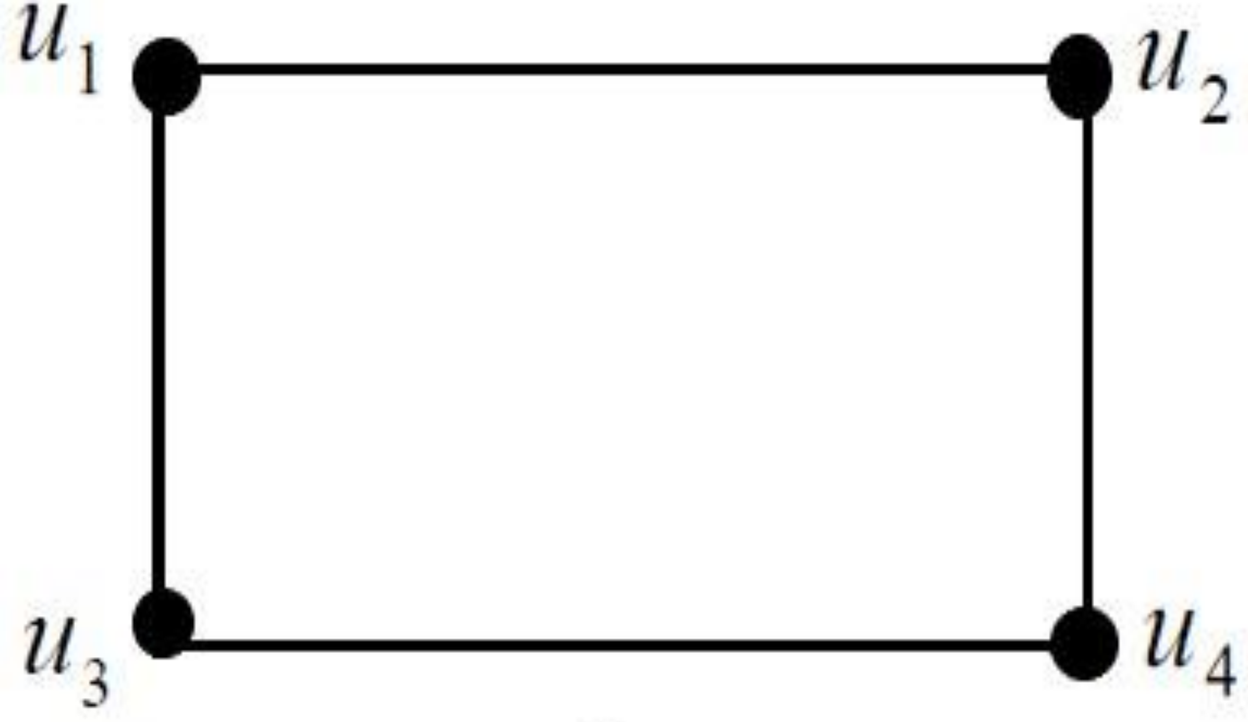
është izomorfizmi i kërkuar.

Shembull. Tregoni se grafet $G = (V, E)$ dhe $H = (V', E')$ janë izomorfë.



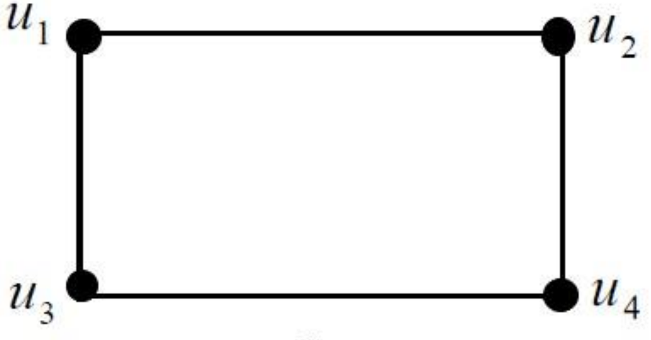
H

Shembull. Tregoni se grafet G

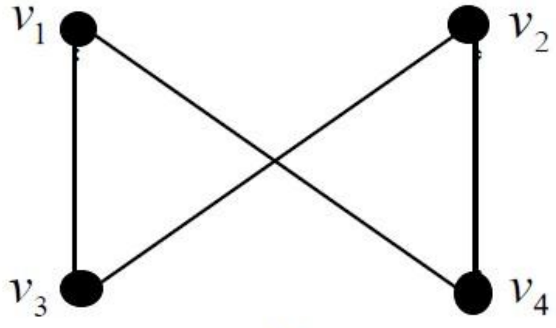


G

Shembull. Tregoni se grafet $G = (V, E)$ dhe $H = (\; ' \; V \, , E')$ janë izomorfë.



G



H

$\begin{pmatrix} u_1 & u \\ v_1 & v \end{pmatrix}$

Zgjidhje. Pasqyrimi $f \colon G \to H$ i dhënë me: $f \colon \; 4^2 \, u_{v_3 3} \, u_{v_2 4} \big)$ është është

bijeksion në mes V dhe V'. Shqyrtojmë nëse fqinjësit ruhen. Nyjet fqinje

$(\quad) \qquad) \qquad (\quad)$

$($

Shembull. Tregoni se grafet G

në G janë: u_1 dhe u_2, u_1 dhe u_3, u_2 dhe u_4, u_3 dhe u_4. Shikojmë që secili

prej çifteve: $f\ u_1 = v_1$ dhe $f(u_2 = v_4$, $f\ u_1 =$

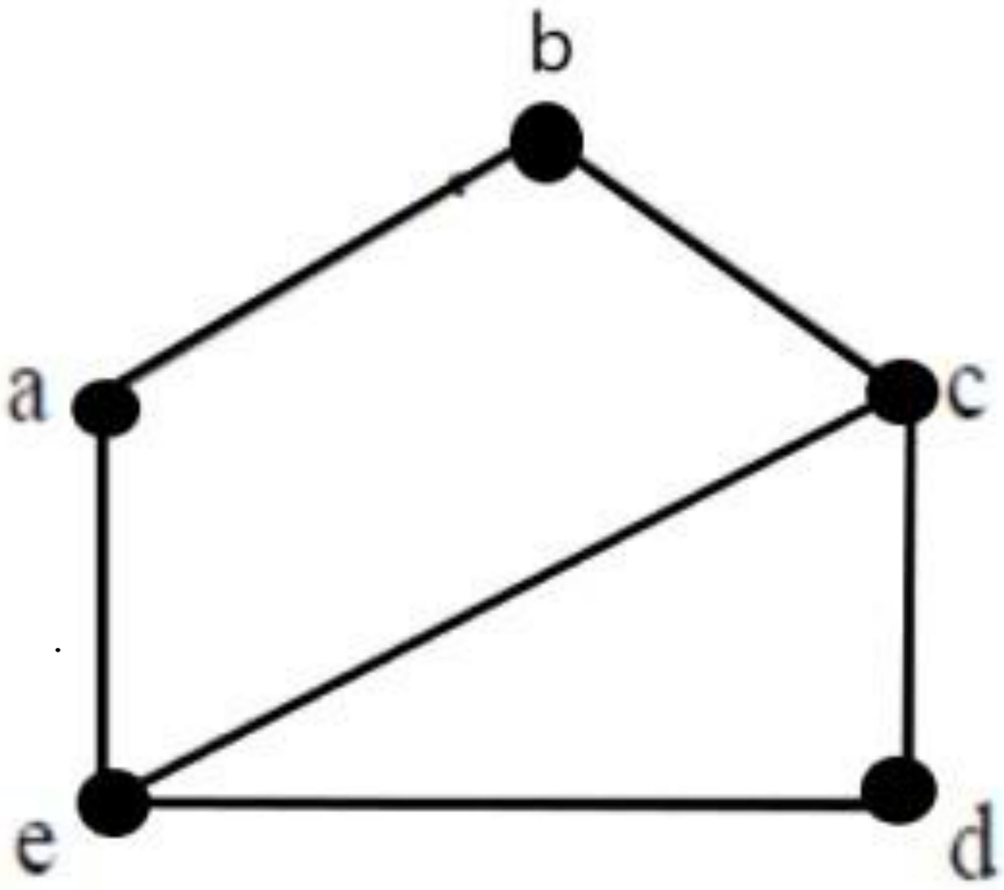
v_1 dhe $f(u_3) = v_3$, $f(u_2) = v_4$ dhe $f(u_4 = v_2$, $)f\ u_3) = v_3$ dhe $f(u_4) = v_2$

janë fqinje në H. Pra, grafet $G = V, E)$ dhe $H = (V', E')$ janë izomorfe.

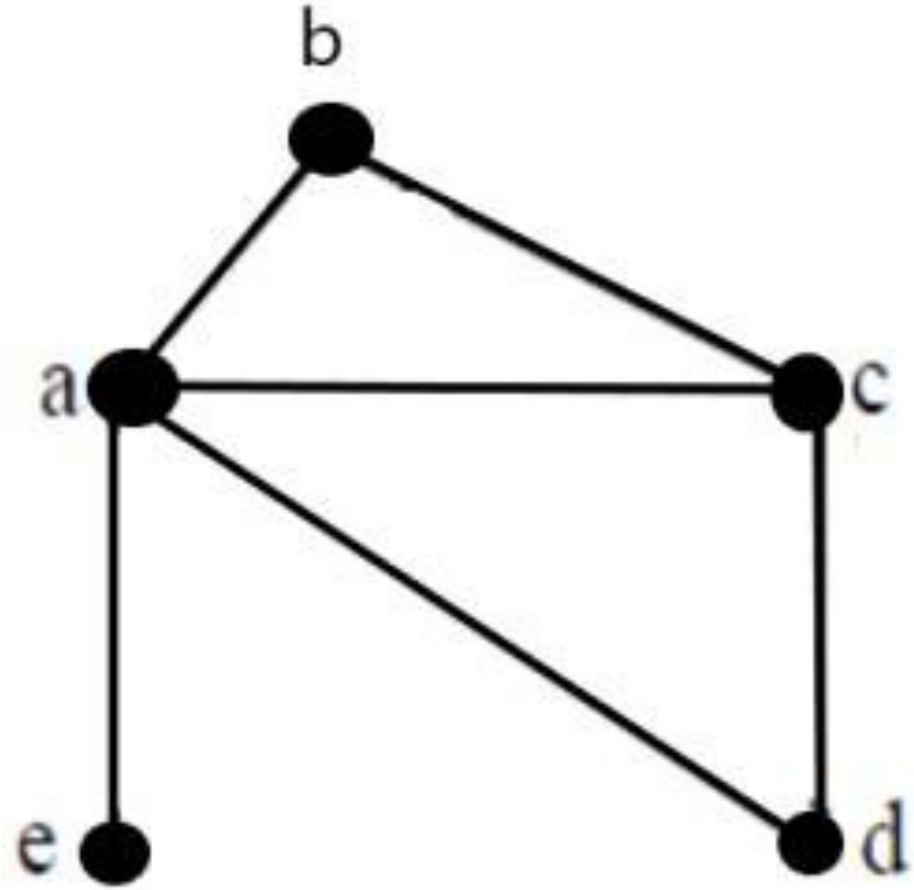
Ka $n!$ korespondenca një për një të mundëshme midis bashkësive të nyjeve të dy grafëve me n nyje (Të tregohet pse?). Testimi i secilës korespondencë për të parë nëse e ruan fqinjësinë apo jo-fqinjësinë është jo praktike për vlera të n mjaft të mëdha. Megjithatë shpesh mund të tregohet se dy grafë të thjeshtë nuk janë izomorfë duke treguar se ata nuk e kanë vetinë që duhet të kenë së bashku dy grafë të thjeshtë izomorfë. Një veti e tillë quhet **invariant** në lidhje me izomorfizmin e grafëve të thjeshtë. Kështu, grafët e thjeshtë izomorfë duhet të kenë të njëjtin numër nyjesh, përderisa ka korespondencë ***një për një*** midis bashkësive të nyjeve të grafëve. Grafët e thjeshte izomorfë duhet të kenë të njëjtin numër degësh, sepse korespondenca ***një për një*** midis nyjeve vendos korespondencë ***një për një*** edhe midis degëve.

Pohim mbi valencat. Valencat e nyjeve në grafët e thjeshtë izomorfë janë të njëjta. D.m.th., një nyje v me valencë d në grafin G është në korespondencë me nyjen $f(v)$ me valencë d në H, përderisa një nyje w në G është fqinjë me v atëhere dhe vetëm atëhere kur $f(v)$ dhe $f(w)$ janë fqinjë në H. Vërtet: Nyja v ka valencë d do të thotë se nga ajo dalin d degë, pra është fqinjë me d nyje të tjera në G. Meqë kemi izomorfizëm të G me H, secila nga këto d nyje, me anë të korespondencës ***një për një*** f, e ka shëmbëllimin e vet në H dhe ato janë fqinjë me $f(v)$ (izomorfizmi ruan fqinjësinë), dhe po ashtu ato janë të ndryshme nga njëra tjetra dhe sasia e shëmbëllimeve është gjithashtu d. Nyje tjetër në H që të jetë fqinje me $f(v)$ nuk ka, sepse po të kishte një tjetër do të rridhte nga korespondenca ***një për një*** që fytyra e saj në G do ishte fqinje me v dhe e ndryshme nga fqinjët e saj, të cilat janë gjithsej d ??!! Mbetet që, nyja $f(v)$ ka gjithashtu d fqinjë në H, d.m.th., nga ajo dalin d degë dhe prandaj e ka valencën d.

Shembull.Të tregohet se grafët e paraqitur G dhe H nuk janë izomorfë.

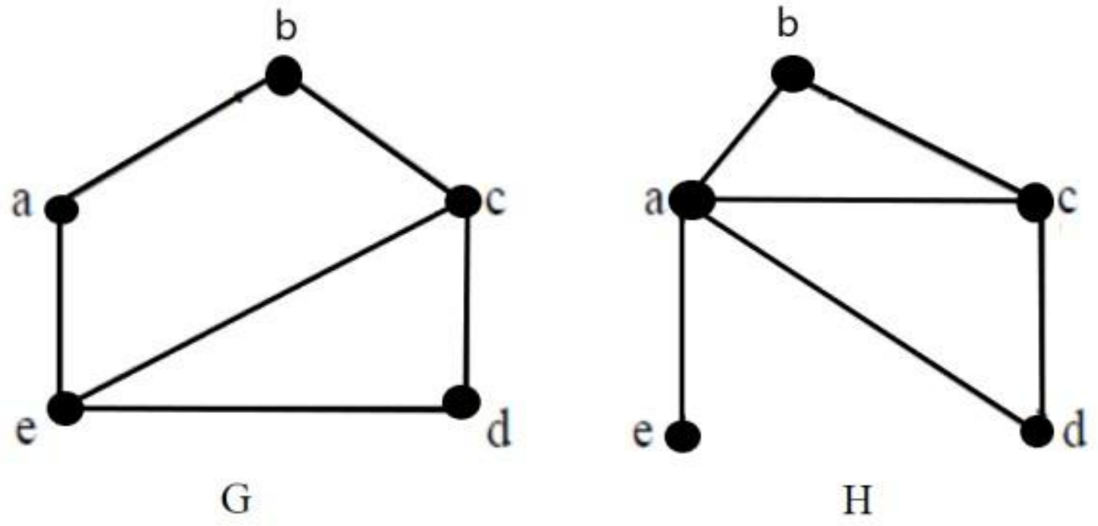


G



H

Shembull. Të tregohet se grafët e paraqitur G dhe H nuk janë izomorfë.



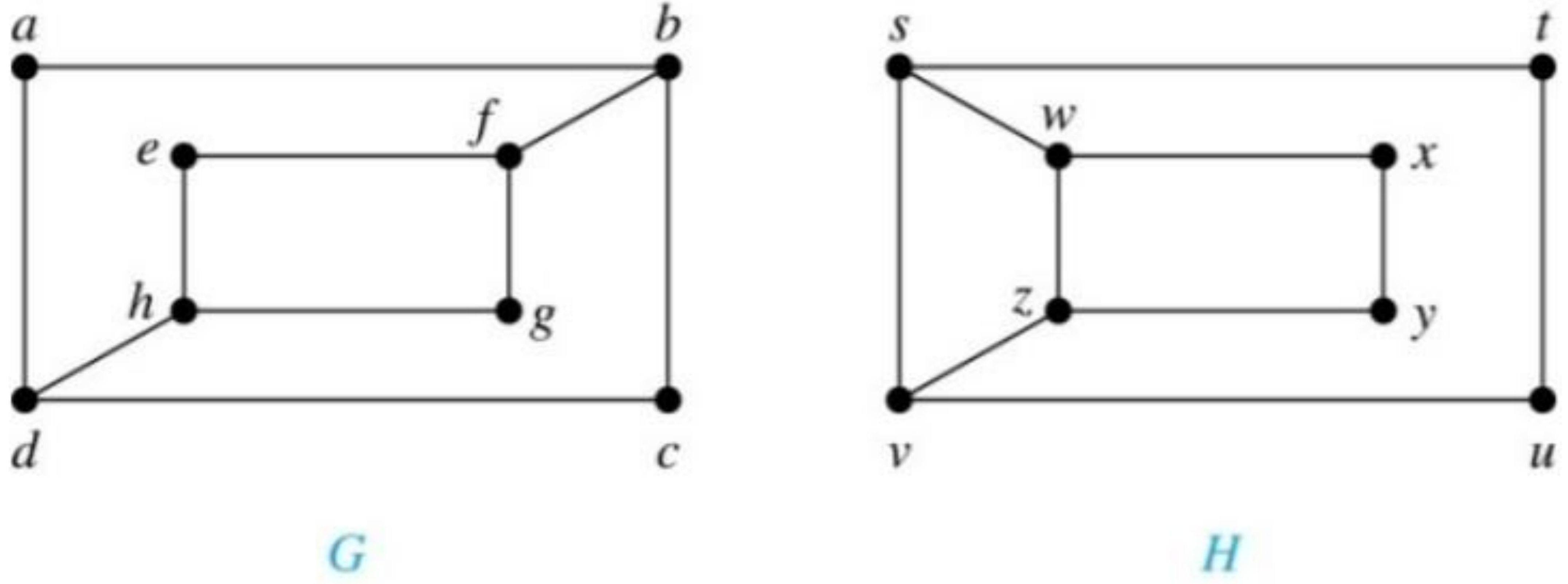
Zgjidhje. Të dy grafët janë me 5 nyje dhe 6 degë. Por, grafi H ka një nyje me valencë 1 (pikërisht nyja e), kurse G nuk ka ndonjë nyje me valencë 1, prandaj ata nuk janë izomorfë.

Në rastin e izomorfizmit, numri i nyjeve, numri i degëve dhe valencat e nyjeve janë invariantë.

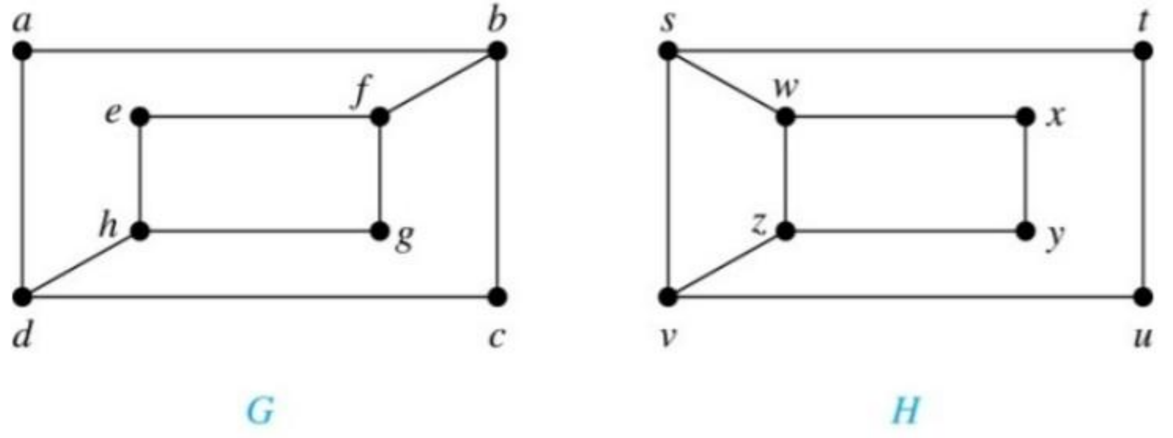
Në qoftë se në dy grafë të thjeshtë, ndonjëra prej këtyre dy madhësive ndryshon, atëhere grafët nuk mund të jenë izomorfë.

Megjithatë, kur këta invariantë janë të njëjtë, kjo nuk do të thotë se dy grafët janë izomorfë.

Shembull. Të përcaktohet nëse grafët G dhe H janë izomorfë.



Shembull. Të përcaktohet nëse grafët G dhe H janë izomorfë.



Zgjidhje. Të dy grafët kanë nga 8 nyje dhe 10 degë. Gjithashtu, ata kanë nga 4 nyje me valencë 2 dhe nga 4 nyje me valencë 3. Pra, invariantët janë të njëjtë dhe mund të kujtohet se grafët janë izomorfë. Vërejmë se, meqë $d(a) = 2$ në G, atëhere a duhet të jetë në korespondencë (sipas ndonjë funksioni një për një) me një nga nyjet t, u, x, ose y në H, sepse këto nyje janë me valencë 2. Por, secila nga këto katër nyje të H është fqinjë me një nyje tjetër të H dhe që e ka valencën 2 (p.sh., t me u, y me x etj.), kurse nyja a në G është fqinjë vetëm me nyje me valencë 3 në G. Përfundimisht, grafët G dhe H nuk janë izomorfë.

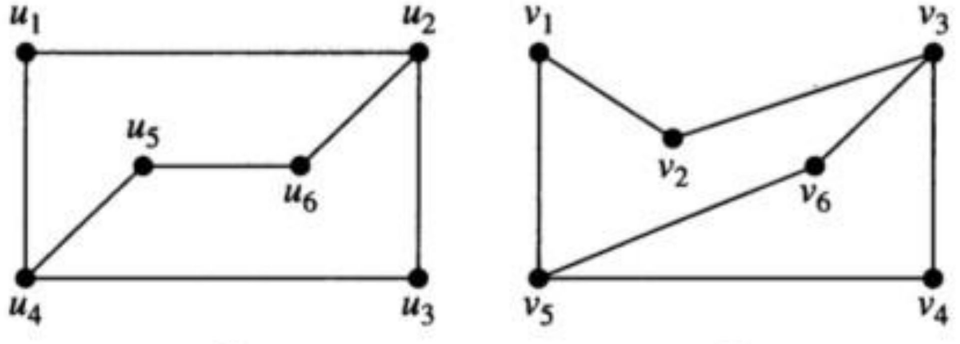
Për të treguar se një funksion f me fillim bashkësinë e nyjeve të grafit G dhe mbarim bashkësinë e nyjeve të një grafi H është izomorfizëm, duhet të tregohet se f ruan linjat. Një mënyrë e dobishme për ta bërë këtë është përdorimi i matricave të fqinjësisë.

Në veçanti, për të treguar se f është një izomorfizëm mund të tregohet se matrica e fqinjësisë në G është e njëjtë me matricën e fqinjësisë në H, kur rreshtat dhe shtyllat janë etiketuar në mënyrë të tillë që të korespondojnë me imazhet (shëmbëllimet) e nyjeve të

G sipas f të cilat janë etiketat e këtyre rreshtave dhe shtyllave në matricën e fqinjësisë të G.

Kjo gjë tregohet me anë të shembullit që vijon.

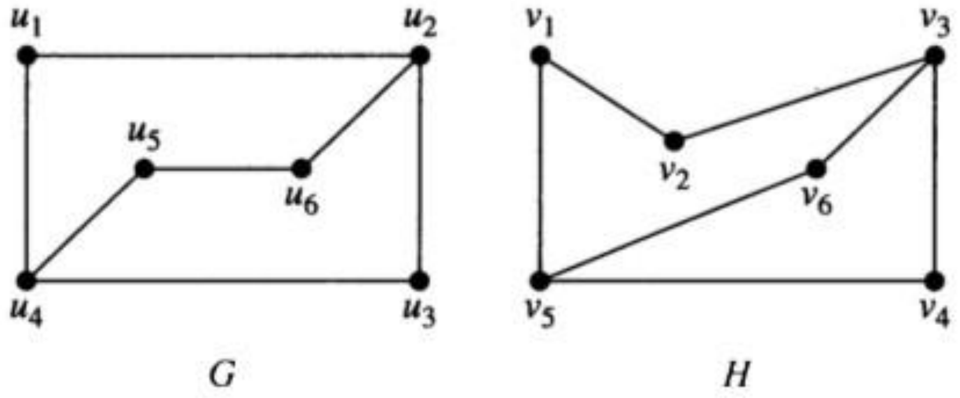
Shembull. Të përcaktohet nëse grafët G dhe H janë izomorfë.



G H

Zgjidhje. Të dy grafët kanë nga 6 nyje dhe 7 degë. Të dy kanë nga 4 nyje me valencë 2 dhe nga dy nyje me valencë 3. Duket lehtësisht që nëngrafët e G dhe H të përbërë nga të gjitha nyjet me valencë 2 dhe nga linjat që bashkojnë ato nyje janë izomorfë (studenti ta provojë këtë fakt). Meqë G dhe H janë të pajtueshëm përsa u përket invariantëve, është e arësyeshme të bëhen përpjekje për të gjetur një izomorfizëm f. Do të përcaktohet një funksion f dhe pastaj të studiohet nëse ai është izomorfizëm.

Meqë dhe $d(u) = 2$ dhe ka fqinjë vetëm nyje me valencë 3 , shëmbëllimi i u_1 duhet të jetë $v_4$ose v_6, të vetmet nyje më valencë 2 dhe që kanë fqinjë nyje me valencë 3 në H. Caktojmë sipas dëshirës që $f(u_1) = v_6$ (Nëse kjo zgjedhje nuk shpie në izomorfizëm do të provohet rasti tjetër $f(u_1) = v_4$).Meqë u_2 është fqinjë me u_1 , shëmbëllimet e mundshme të u_2 janë v_3 dhe v_5. Caktojmë sipas dëshirës $f(u_2) = v_3$. Duke vazhduar në këtë mënyrë dhe duke patur si udhëzues fqinjësinë e nyjeve dhe valencat e tyre, caktojmë më tutje: $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$ dhe $f(u_6) = v_2$. Kemi korespondencë një për një midis nyjeve të G dhe nyjeve të H. Duhet parë nëse f i ruan degët.



Duhet parë nëse f i ruan degët. Për këtë ndërtojmë matricën e fqinjësisë në G.

0 1

1 0 0 1 0 0 1 | , $A_H =$ | 1 0 0 1 0 0 1 | 0 1

1 1 0 1 0 0 | 1 1 0 1 0 0 | 0 0

0 1 0 1 0 | 0 1 0 1 0 | 0 1

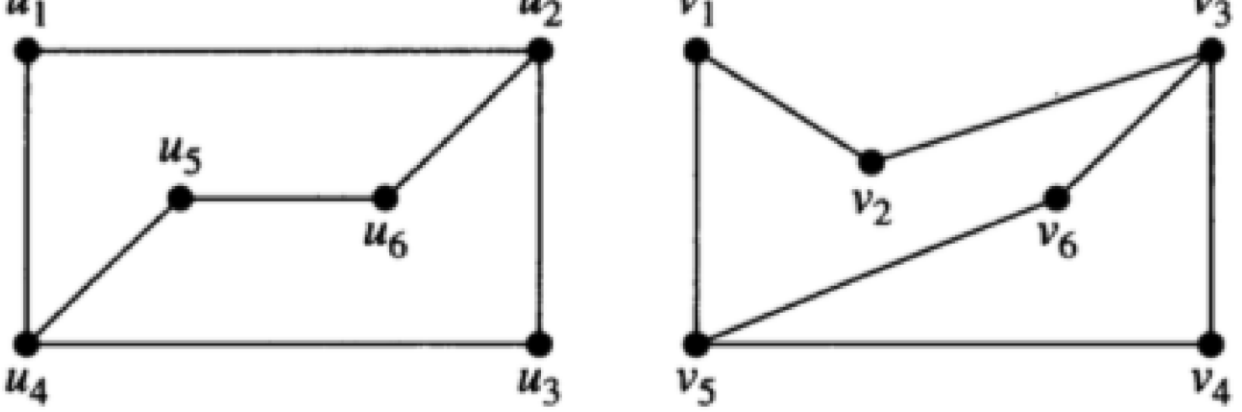
0 0 0 1 0 1 | 0 0 0 1 0 1 | 0 1

0 0

$A_G =$

0 1 0 0 1 0   0 1 0 0 1 0

Matrica e fqinjësisë në H ndërtohet e tillë që rreshtat dhe kolonat të kenë etiketa sipas shëmbëllimeve të nyjeve korresponduese në G. Meqë, rrjedh se funksioni f i ruan degët, kështu që f është izomorfizëm dhe dy grafët G dhe H janë izomorfë. Nëse do dilte që f nuk është izomorfizëm, ne nuk mund të vendosnim që G dhe H nuk janë izomorfë, sepse ndoshta një korespondencë tjetër midis nyjeve të G dhe H mund të jetë izomorfizëm.

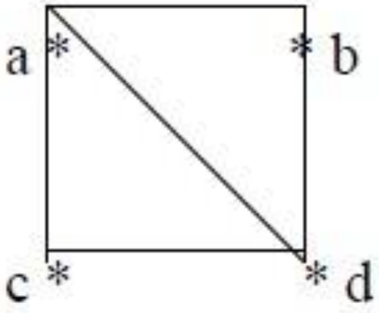


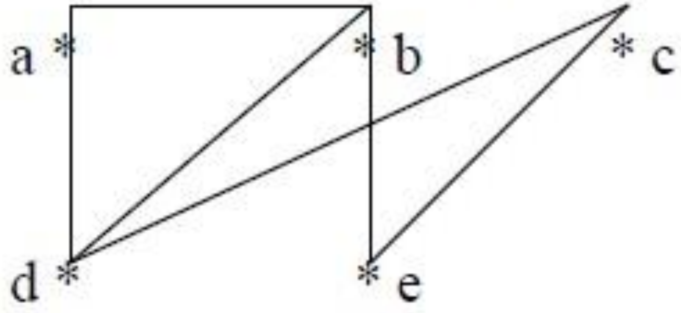
G $\qquad\qquad$ H

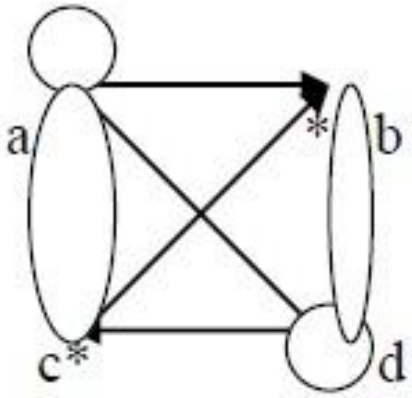
$$A_G = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_5 \\ u_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

USHTRIME

1. Grafët e dhënë të përshkruhen me listë fqinjësie





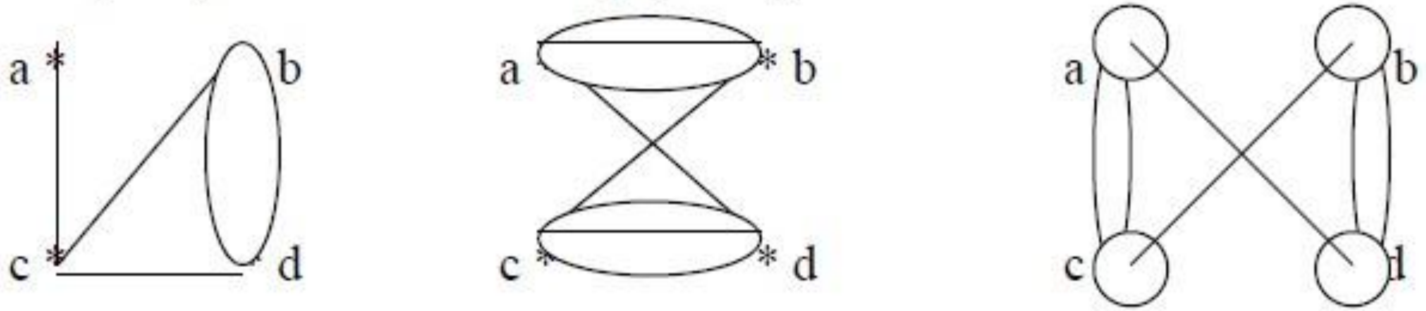


2. Grafët e ushtrimit 1 të paraqiten me matricë fqinjësie.

3. Për matricat e dhëna të fqinjësisë të vizatohen grafët përkatës:

.. a) $\begin{bmatrix} 0....1....0 \\ 1....0....1 \\ 0....1....0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0....0....1....1 \\ 0....0....1....0 \\ 1....1....0....1 \\ 1....1....1....0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1....1....1....0 \\ 0....0....1....0 \\ 1....0....1....0 \\ 1....1....1....0 \end{bmatrix}$

4. Të paraqiten me matricë të fqinjësisë grafët:



5. Për matricat e dhëna të fqinjësisë të vizatohen grafët e padrejtuar:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

6. Të paraqiten me matricë incidente grafët e ushtrimit 1

7. Të paraqiten me matricë incidente grafët e ushtrimit 4

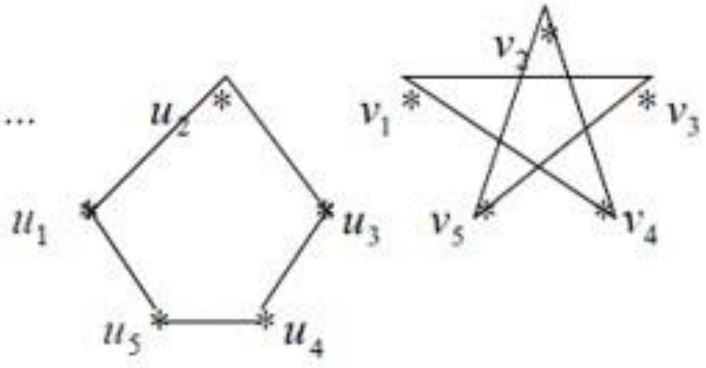
8. Sa është shuma e elementëve të një rreshti në matricën incidente të një grafi të padrejtuar?

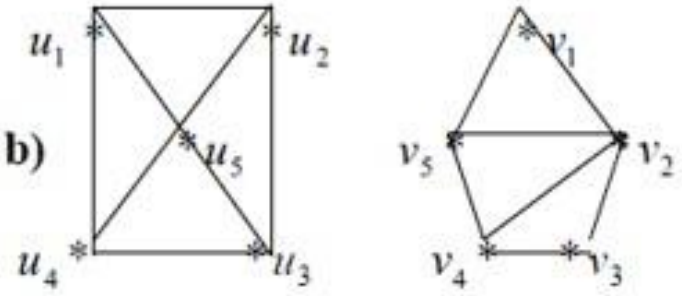
9. Sa është shuma e elementëve të një shtylle të matricës incidente për grafin e padrejtuar?

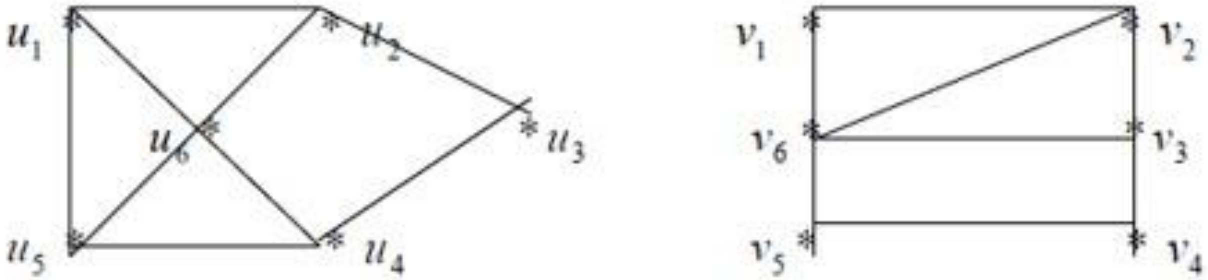
10. Të gjehet një matricë fqinjësie për secilin nga grafët: $K_n, C_n, W_n, K_{m,n}, Q_n$. Po matricat incidente të tyre?

11. Të shqyrtohen nëse grafët G dhe H janë izomorfë:

....

a) 

b) 

c) 

12. Sa grafë të thjeshtë jo izomorfë dhe me n nyje ka n.q.s. a) n=2, b) n=3, c) n=4?

13. Sa grafe të thjeshtë jo izomorfë me 6 nyje dhe 4 linja ka ?

14. A janë izomorfë grafët e thjeshtë nëse matricat përkatëse të fqinjësisë janë:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 0....0....1 \\ 0....0....1 \\ 1....1....0 \end{bmatrix} \text{ dhe } \begin{bmatrix} 0....1....1 \\ 1....0....0 \\ 1....0....0 \end{bmatrix} \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 0....1....0....1 \\ 1....0....0....1 \\ 0....0....0....1 \\ 1....1....1....0 \end{bmatrix} ..dhe.. \begin{bmatrix} 0....1....1....1 \\ 1....0....0....1 \\ 1....0....0....1 \\ 1....1....1....0 \end{bmatrix}$$