Universiteti Publik “Kadri Zeka”, Gjilan

Fakulteti i Shkencave Kompjuterike

Lënda: Teoria e Grafeve

Tema:

Pemët e lidhura (Spanning Trees)

Pemët lidhëse:

Përkufizmi: Le **të jetë** G graf i thjeshtë. **Pemë lidhëse** e grafit G është nëngrafi i G i cili është pemë që i përmban të gjitha nyjet e G.

Teoremë. Çdo graf i lidhur ka pemë lidhëse.

Vërejtje: *Në vend që të konstruktohen pemët lidhëse duke zhvendosur degët, pemët lidhëse mund të ndërtohen duke shtuar degët në mënyrë suksesive. Këtu do të përdorim dy algoritme të bazuara në këtë princip:*

"Depth-First Search" (Kërkimi i parë-në thellësi) DFS *dhe*

"Breadth-First Search" (Kërkimi i parë-në gëjrësi) BFS.

Algoritmi "Depth-First Search"

1. Le të jetë *G* graf i lidhur dhe $v_0$nyje e G.

Procedura në vazhdim për konstruktimin e pemës lidhëse të grafit G, me nyje fillestare v_0, paraqet algoritmin "DepthFirst Search".

Marrim $\omega = v_0$ dhe $n = 0$; to quhet **qendra përkatëse (në fjalë) e** hulumtimit. Le të shënojmë me T_0 pemën që nuk përmban asnjë degë dhe ka vetëm nyjen v_0; T_0 është pema e parë në vargun tonë.

2. Nëse është e mundur, të zgjedhet dega e_n e cila është e lidhur me ω dhe me nyjën e re v_{n+1} (me nyje të re nënkuptojmë nyjen e cila nuk paraqitet në T_n, pra në pemën përkatëse; me fjalë të tjera, nyja e cila ende nuk është vizituar). I shoqërojmë

degën e_n pemës përkatëse T_n për të formuar pemën e ardhshme në vargun e pemëve, T_{n+1}. Marrim $\omega = v_{n+1}$ dhe rrisim n në $n+1$.

3. Përsërisim hapin 2 derisa ω përkatëse nuk mund të lidhet me asnjë nyje të re. Në qoftë se T_n është pemë lidhëse, hulumtimi është kompletuar. Nëse jo, kthehemi mbrapa përgjatë degës së fundit në qendrën e përparshme. Më saktësisht, marrim $\omega = v_{n+1}$ dhe rrisim n në $n+1$. Përsërisim hapin 2 (nëse është e

mundur; ndoshta do të duhet që disa here të bëhet kthimi mbrapa për të vizituar nyjën e re).

Algoritmi “Breadth-First Search”

Le të jetë G graf i lidhur dhe v_0 nyje e G. Procedura në vazhdim për konstruktimin e pemës lidhëse të grafit G, me nyje fillestare v_0 paraqet deporitmin "Breadth-First Search”.

1. Marrim $\omega = v_0$, $n=0$ dhe $m=1$.(Sikurse te algoritmi DFS, ω quhet qendra **përkatëse (në fjalë)** e

hulumtimit). Le të shënojmë me T_0 pemën që nuk përmban asnjë degë dhe ka vetëm nyjen v_0; T_0 është pema e parë në vargun tonë.

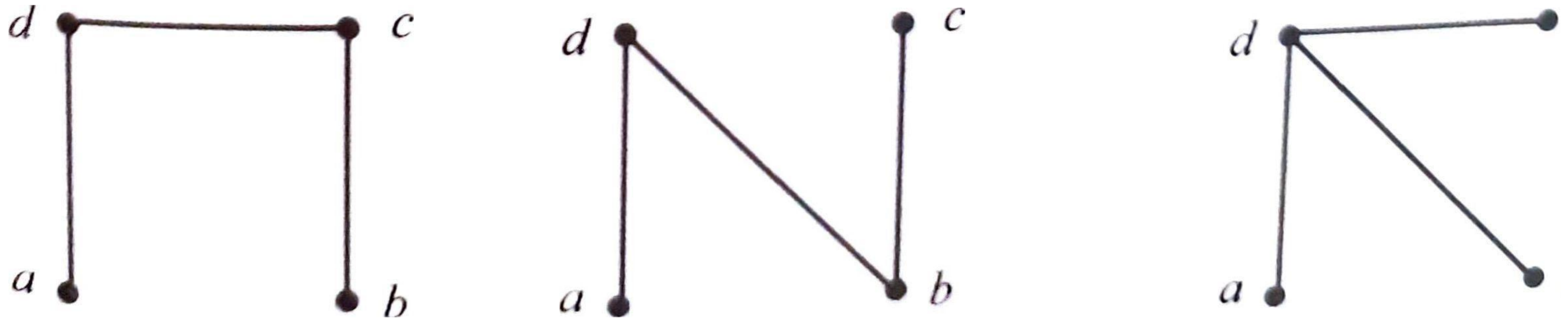
2. Nëse është e mundur, të zgjedhet dega e_n e cila është e lidhur me ω dhe me nyjën e re v_{n+1} (përkujtojmë se nyje e re është nyja e cila nuk paraqitet në pemën përkatëse T_n). I shoqërojmë

degën e_n pemës përkatëse T_n për të formuar pemën e ardhshme T_{n+1}. Rrisim n në $n+1$.

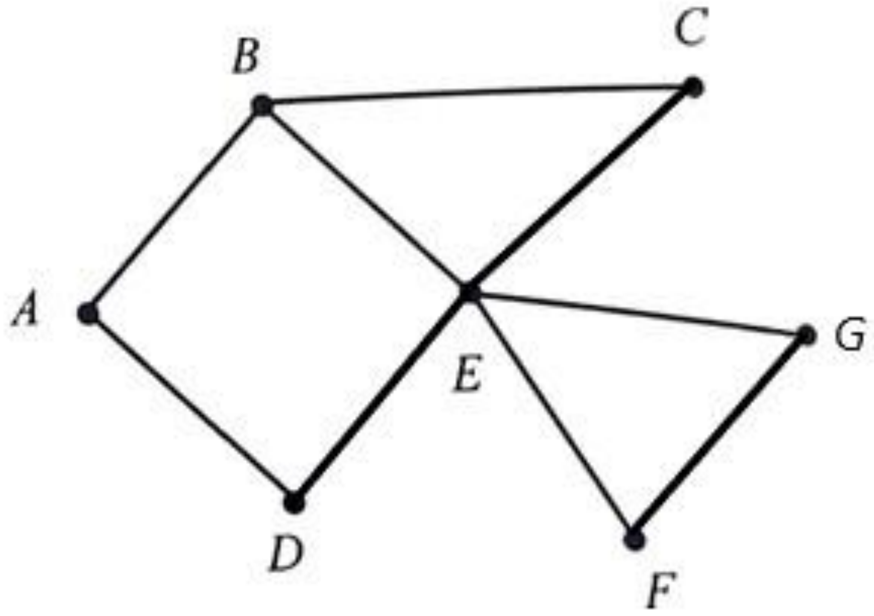
3. Përsërisim hapin 2 derisa nuk ka më asnjë nyje të re të lidhur me ω. Në qoftë se tani të gjitha nyjet janë vizituar do të thotë se T_n është pemë lidhëse dhe ndërpresim hulumtimin. Pëmdryshe marrim me $\omega = v_m$, nyjën e parë nga ato nyje të cilat ende nuk kanë luajtur rolin e qendrës përkatëse të hulumtimit, dhe rrisim m në $m+1$. Përsërisim hapin 2.

Detyrë. Caktoni te gjitha pemët e lidhura në grafin vijues:

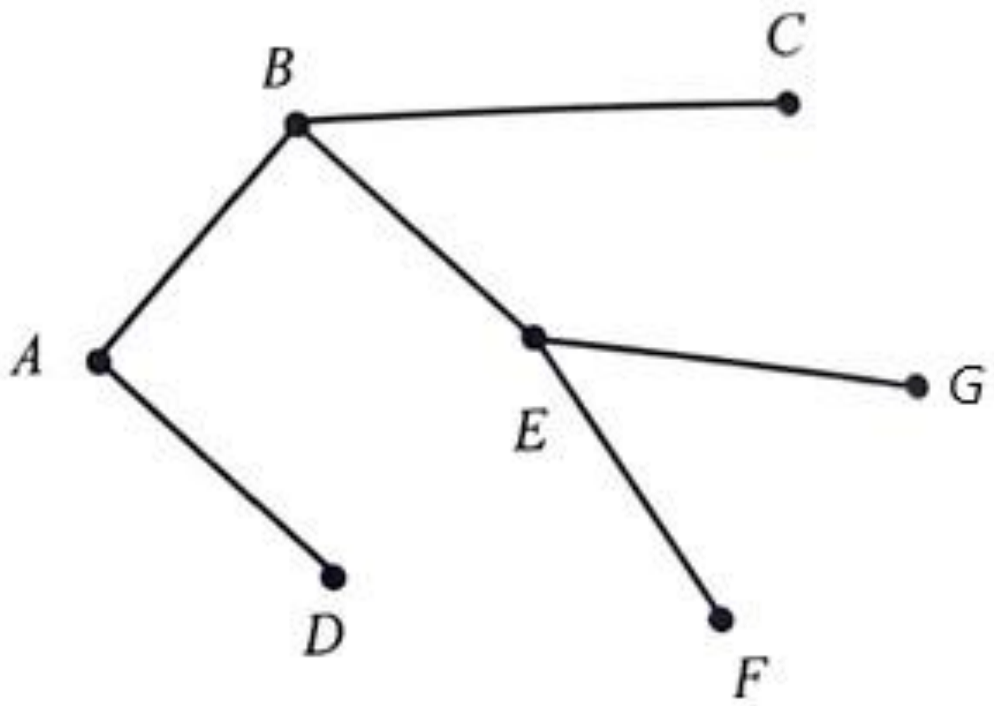
Zgjidhje.



Detyrë. Caktohet pema lidhëse e grafit.



Zgjidhje.



Detyrë. Vizatoni grafin e thjeshtë dhe të lidhur $G = (V, E)$, ku

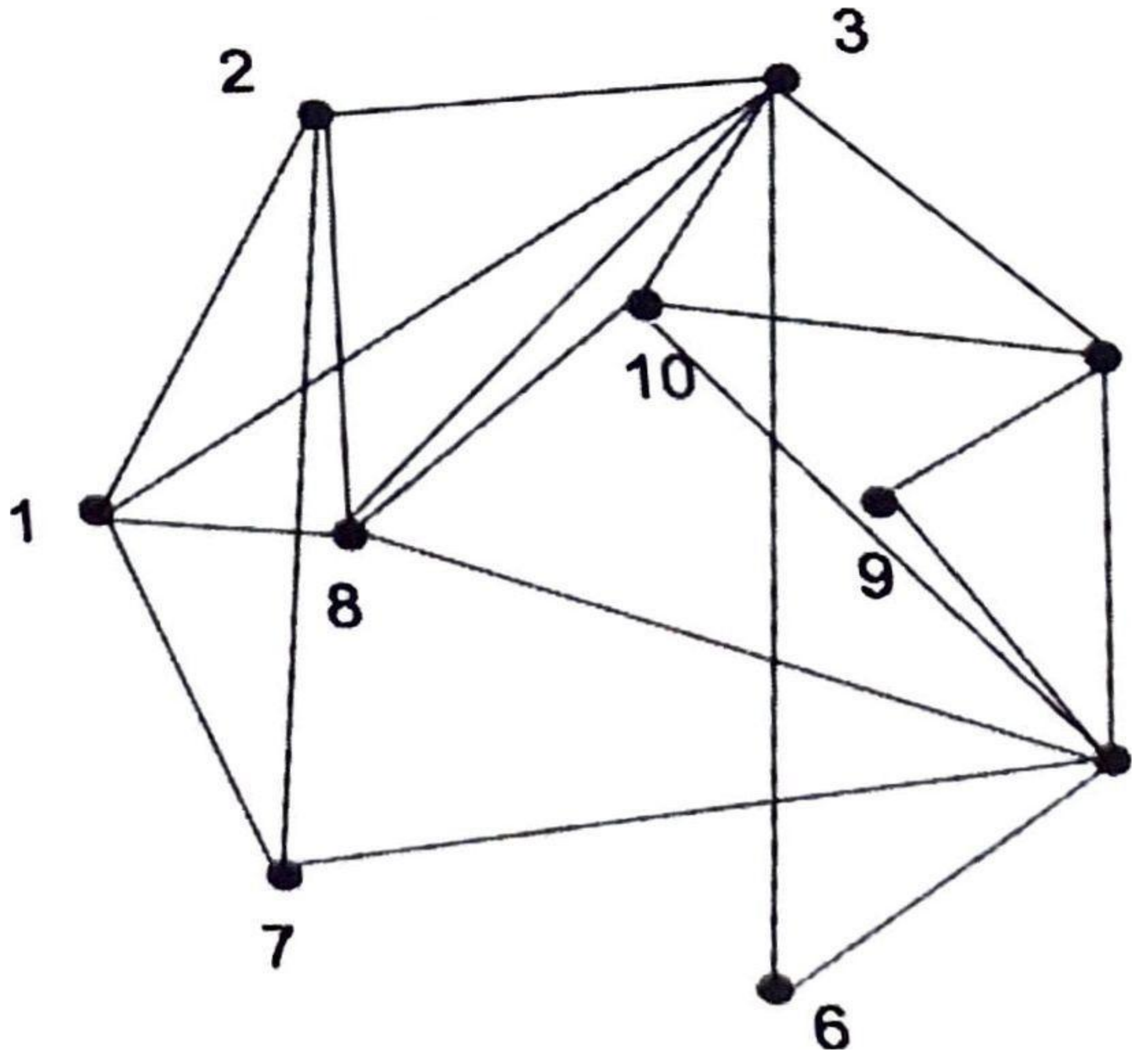
$$V = \{1,2,3, \dots , 10\}$$

kurse

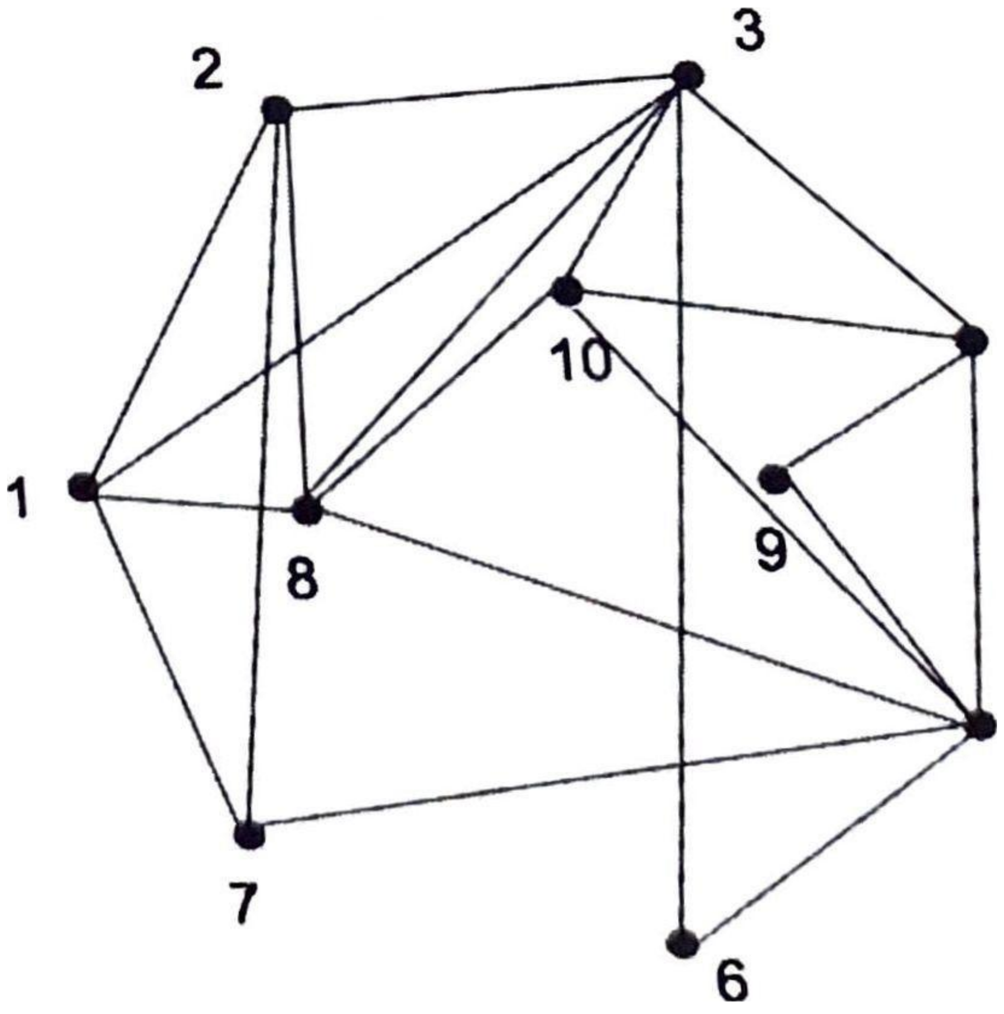
$$E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,7\},\{1,8\},\{2,3\},\{2,7\},\{2,8\},\{3,4\},\{3,6\},\{3,8\},\{3,10\},\{4,5\},\{4,9\},\{4,10\},\{5,6\},\{5,7\},\{5,8\},\{5,9\},\{5,10\},\{8,10\}\}$$

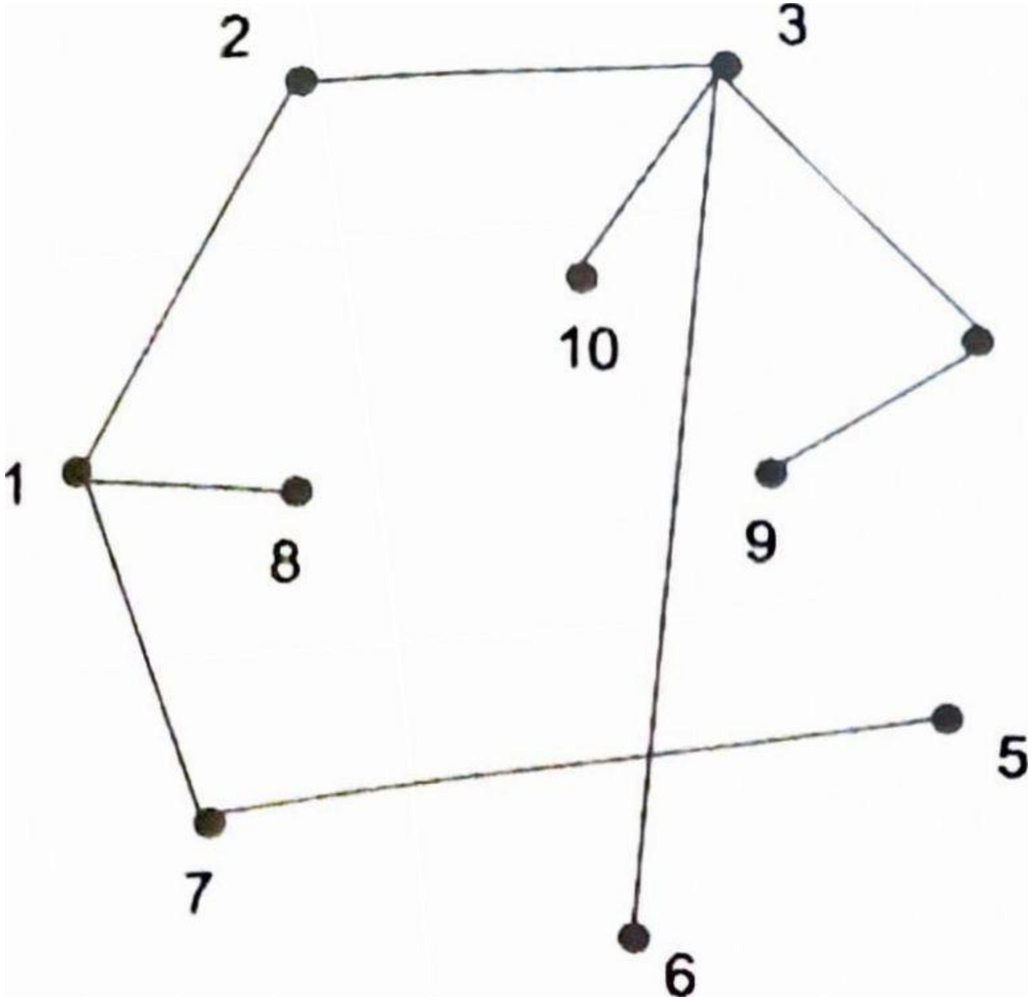
Gjeni një pemë të lidhur.

Zgjidhje.

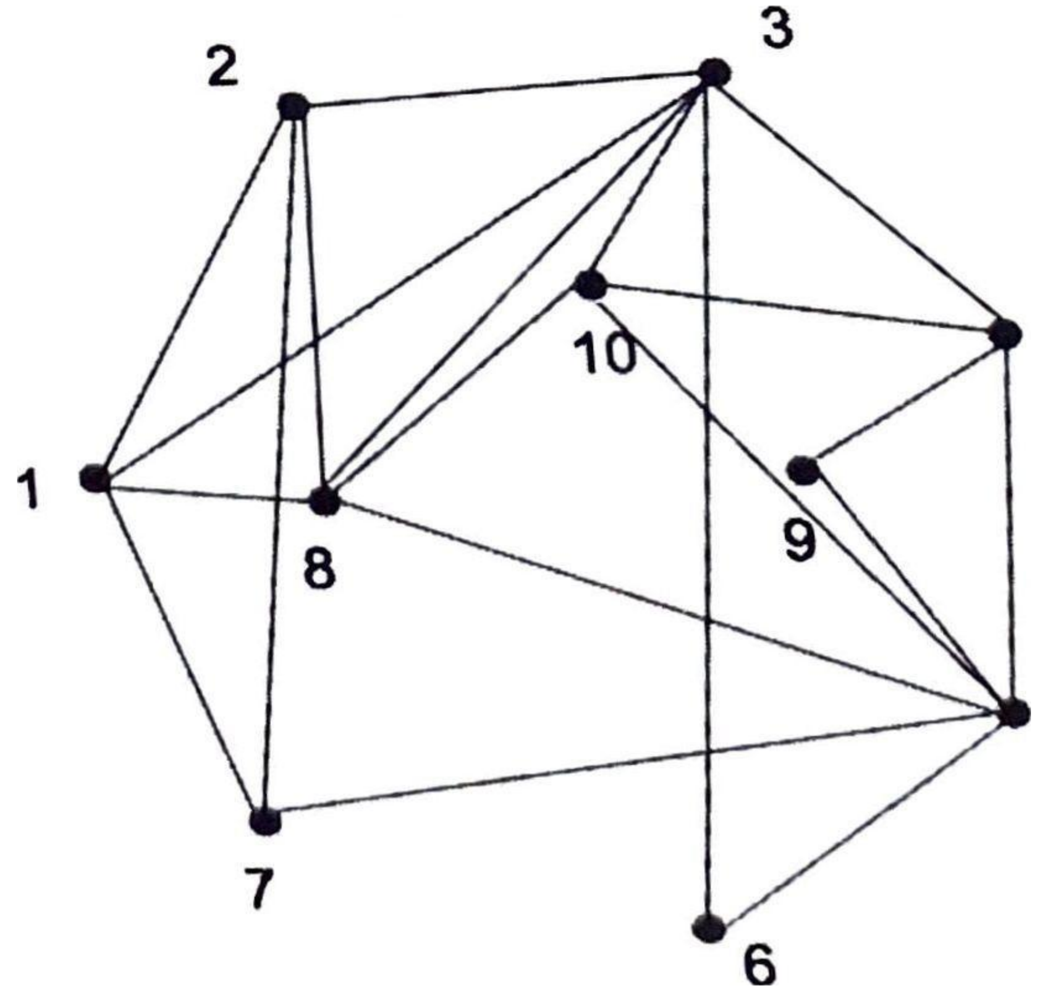


Zgjidhje.

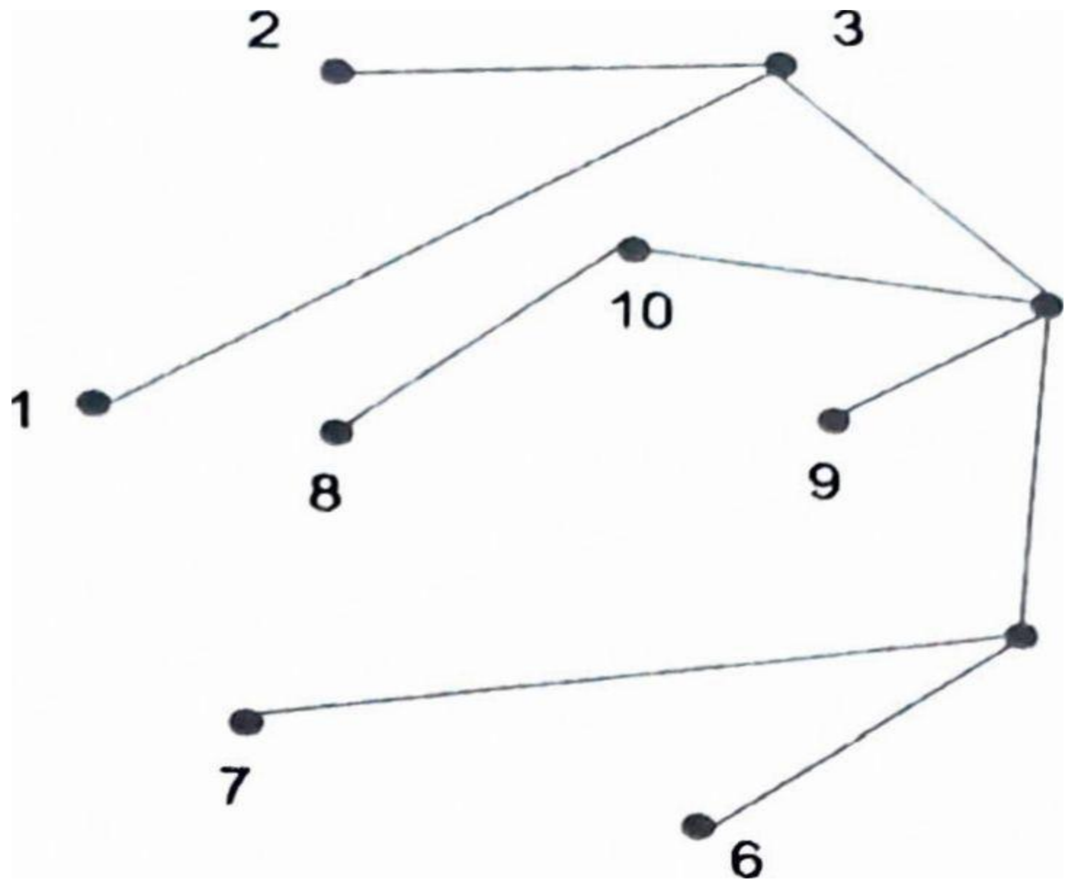




Zgjidhje.



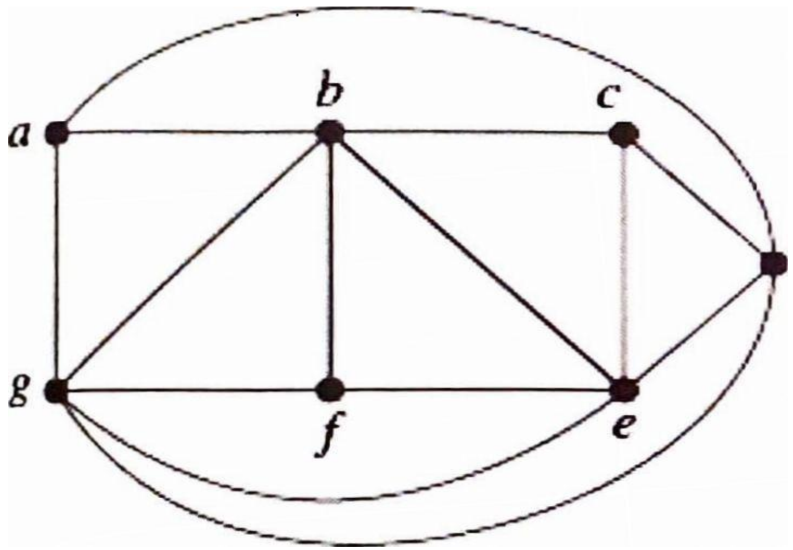
Pemë lidhëse



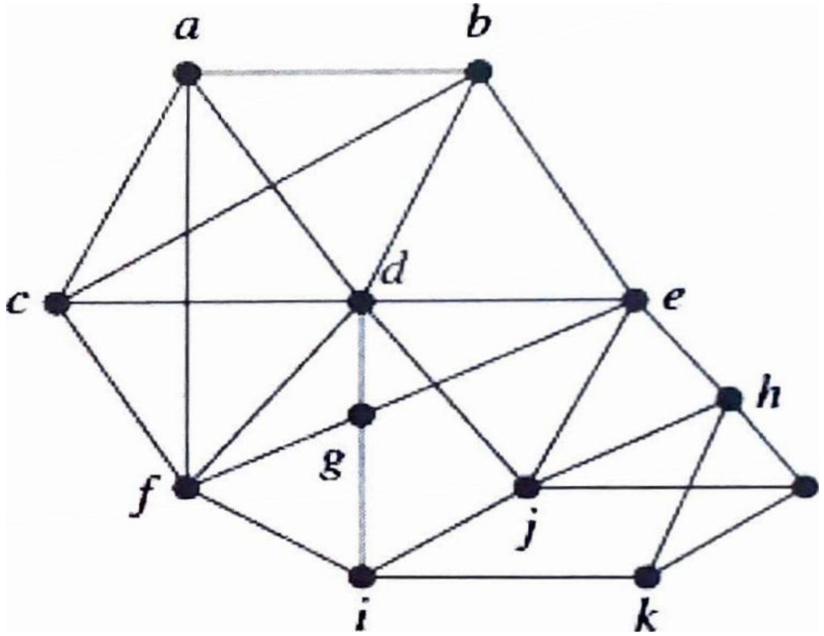
Zgjidhje.

Pemë lidhëse

Detyrë. Për grafet e mëposhtme, gjeni pemën lidhëse duke largur degët nga ciklet e thjeshta.



a.



b.

Zgjidhje.

a. Duhet të largojmë degët një nga një. Mund të largojmë cilën do degë që është pjesë e një qarku të thjeshtë të grafit. Për shembull mund të fillojmë me largimin e degës $\{a, d\}$, pasi që është pjesë e qarkut $a, d, c, b, a.$ Mandej mund të vazhdojmë duke larguar degën $\{a, g\}$. Vazhdojmë në këtë mënyrë dhe largojmë të gjitha këto degë: $\{b, e\}, \{b, f\}, \{b, g\}, \{d, e\}, \{c, e\}, \{d, g\}$ dhe $\{e, g\}$. Në këtë pikë nuk ka më qarqe të thjeshta, ashtu që kemi fituar pemën lidhëse.

b. Veprojmë në mënyrë të ngjajshme si në shembullin paraprak. Këtu ekziston vetëm një mundësi e largimit të bashkësisë së degëve: $\{a, b\}$, $\{a, d\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, g\}, \{d, j\}, \{e, g\}, \{e, j\}, \{f, g\}$, $\{h, j\}, \{h, k\}$ dhe $\{j, i\}$. Vërejmë se grafi ka pas 12 nyje dhe 26 degë, prandaj është dashur të largojmë $26 - (12 - 1) = 15$ degë, siç kemi vepruar.

Detyrë. Gjeni pemën lidhëse për secilin nga grafet e mëposhtme: a. K_5

b. $K_{4,4}$

c. $K_{1,6}$

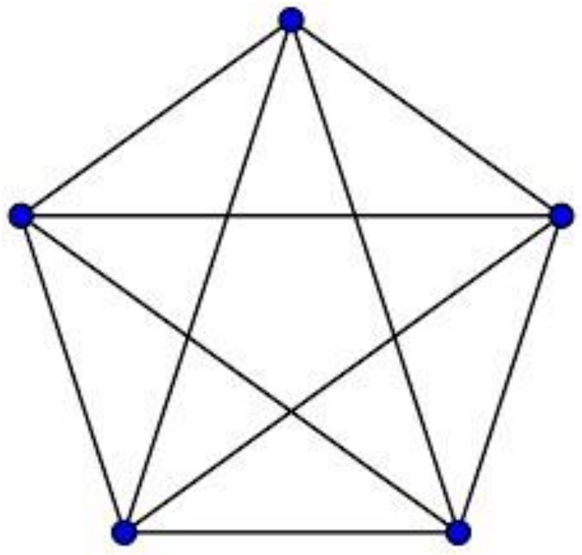
d. Q_3

e. C_5

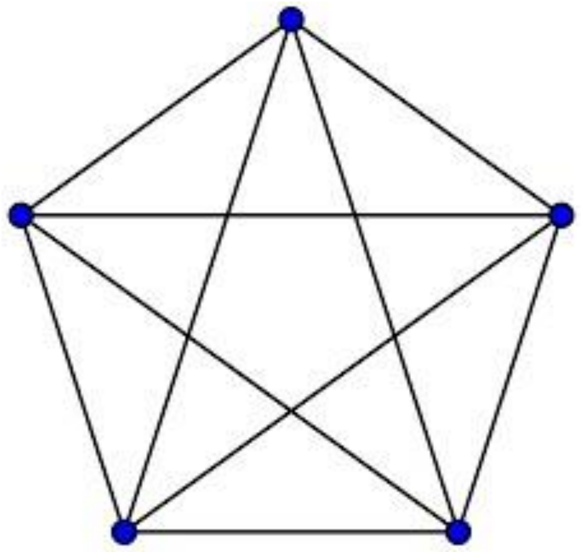
f. W_5

Vërejtje: Në secilin rast përveç rastit c), ku vetë grafi është pemë lidhëse, pema lidhëse është rrugë e thjeshtë. Në të gjitha rastet e tjera ekziston mundësia e gjetjes edhe të pemëve tjera lidhëse.

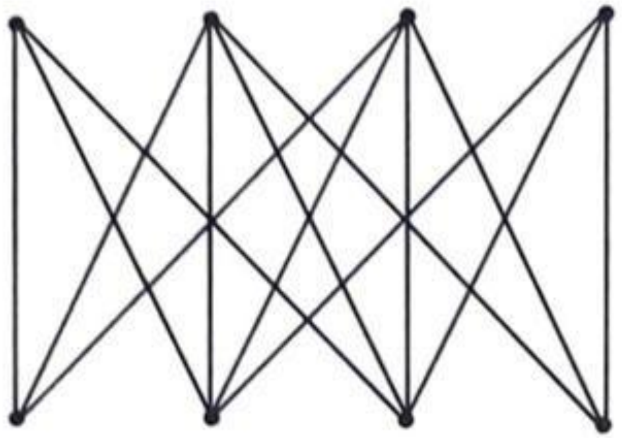
Zgjidhje. a. K_5



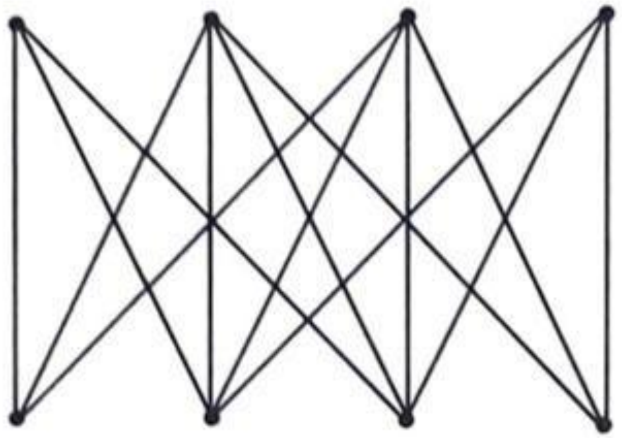
Zgjidhje. a. K_5



b. $K_{4,4}$



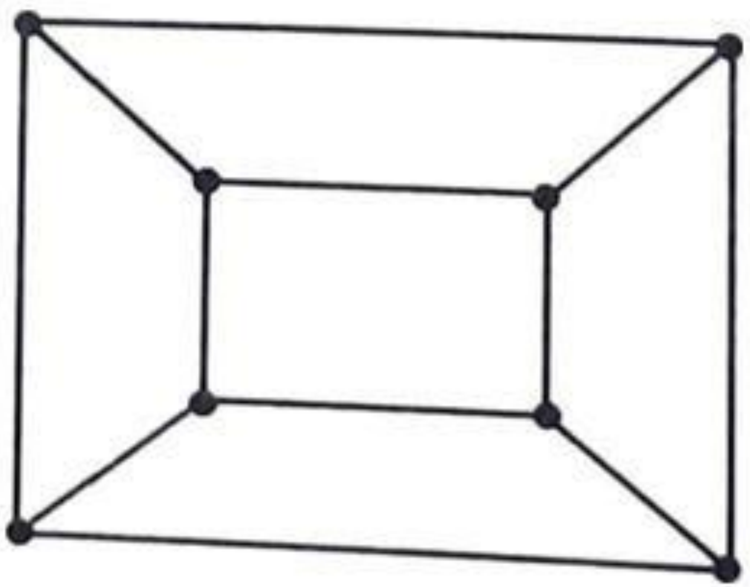
b. $K_{4,4}$



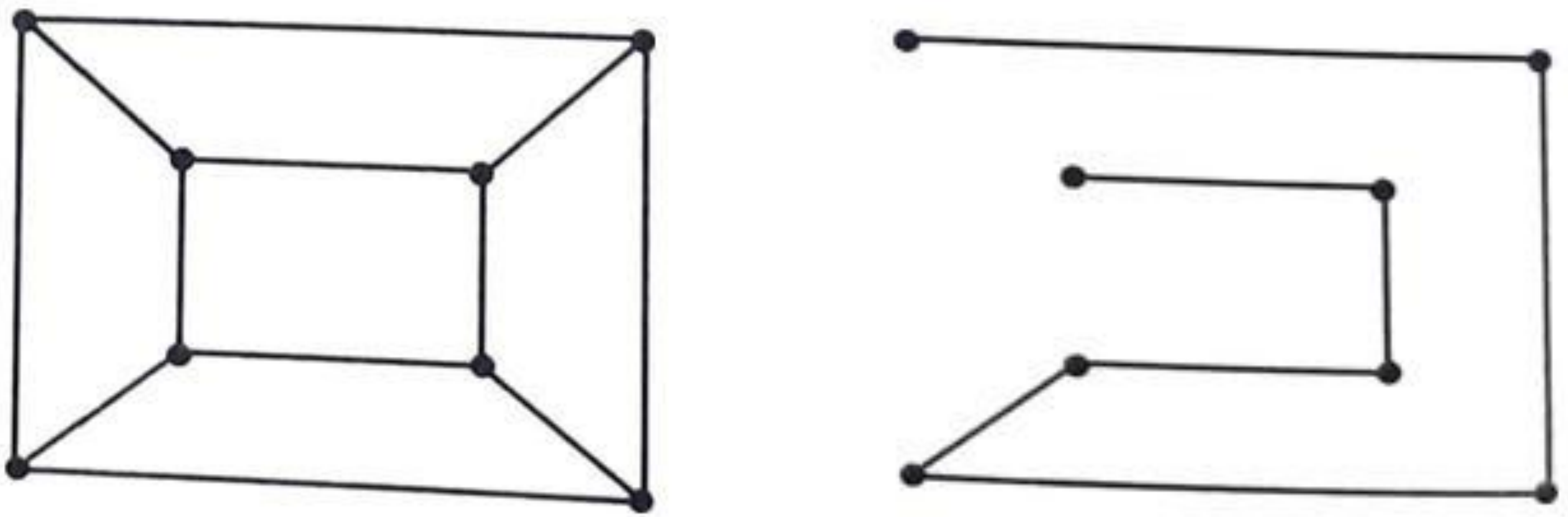
c. $K_{1,6}$

c. $K_{1,6}$

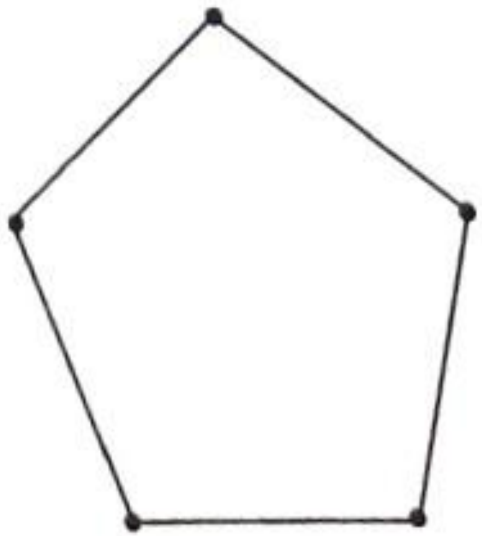
d. Q_3



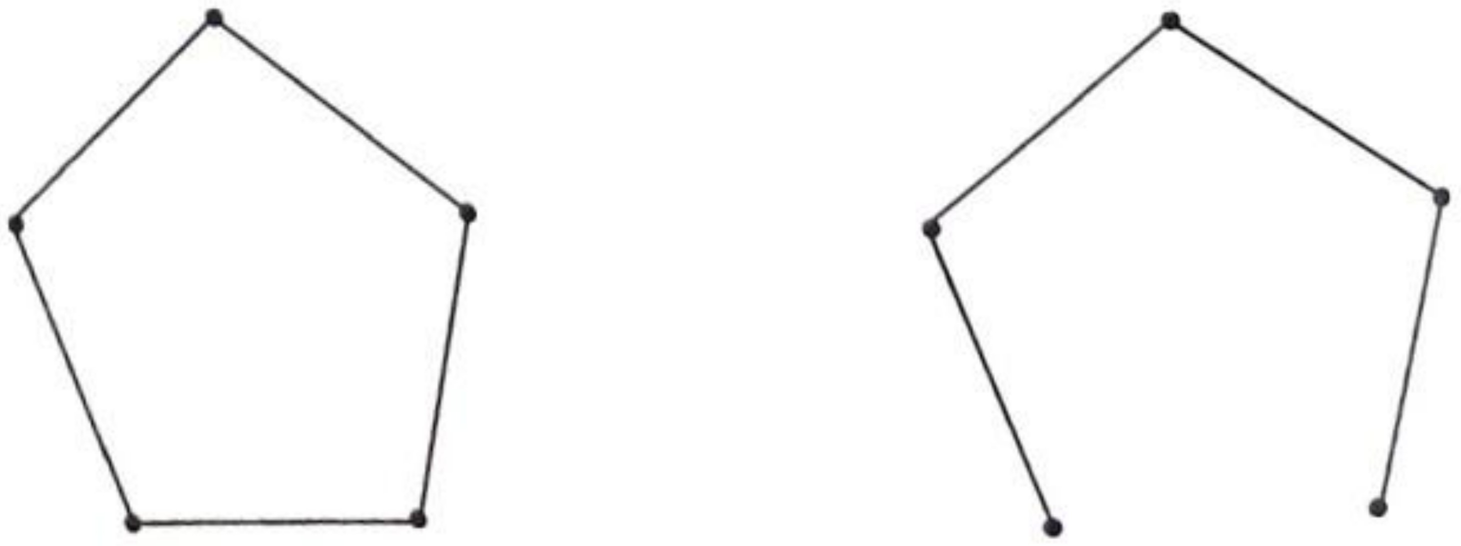
d. Q_3



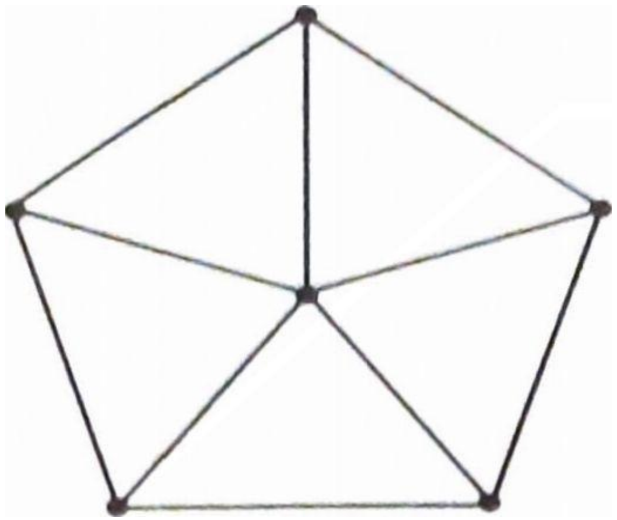
e. C_5



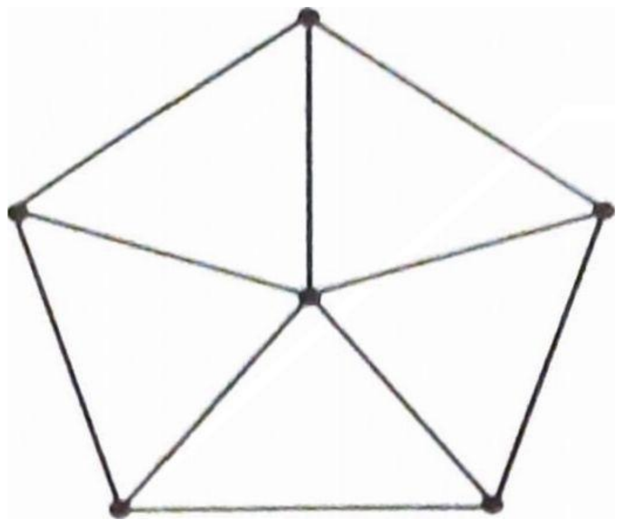
e. C_5

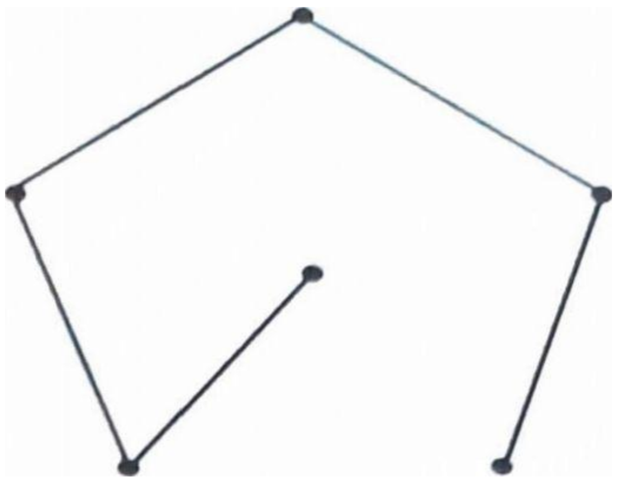


f. W_5



f. W_5





Detyrë. Vërtetoni se grafi i thjeshtë është i lidhur atëherë dhe vetëm atëherë kur përmban një pemë lidhëse.

Zgjidhje. Supozojmë se grafi i thjeshtë G ka një pemë lidhëse T. T përmban secilën nyje të G. Sipas përkufizimit të pemës, ekziston shtegu ndërmjet cilave do dy nyje të T. Meqë T është nëngraf i grafit G, atëherë ekziston rruga ndërmjet çdo çifti të kulmeve në G. Prandaj, G është i lidhur.

Anasjelltas: Supozojmë se G është i lidhur. Nëse G është pemë, atëherë vërtetimi është i qartë. Nëse G nuk është pemë, atëherë përmban një qark të thjeshtë. Le të jetë G me n nyje. Mund të zgjedhim $n - 1$ degë nga G, të tilla që nuk formojnë cikël. Si rrjedhim kemi një nëngraf me n nyjet dhe vetëm $(n - 1)$ degë. Sipas përkufizimit ky nëngraf është një pemë lidhëse.

Detyrë. Sa degë duhet të largohen nga grafi i lidhur me n nyje dhe m -degë që të fitohet një pemë lidhëse?

Zgjidhje.

Grafi ka m -degë dhe n -nyje. Pema lidhëse ka $n—1$ degë.

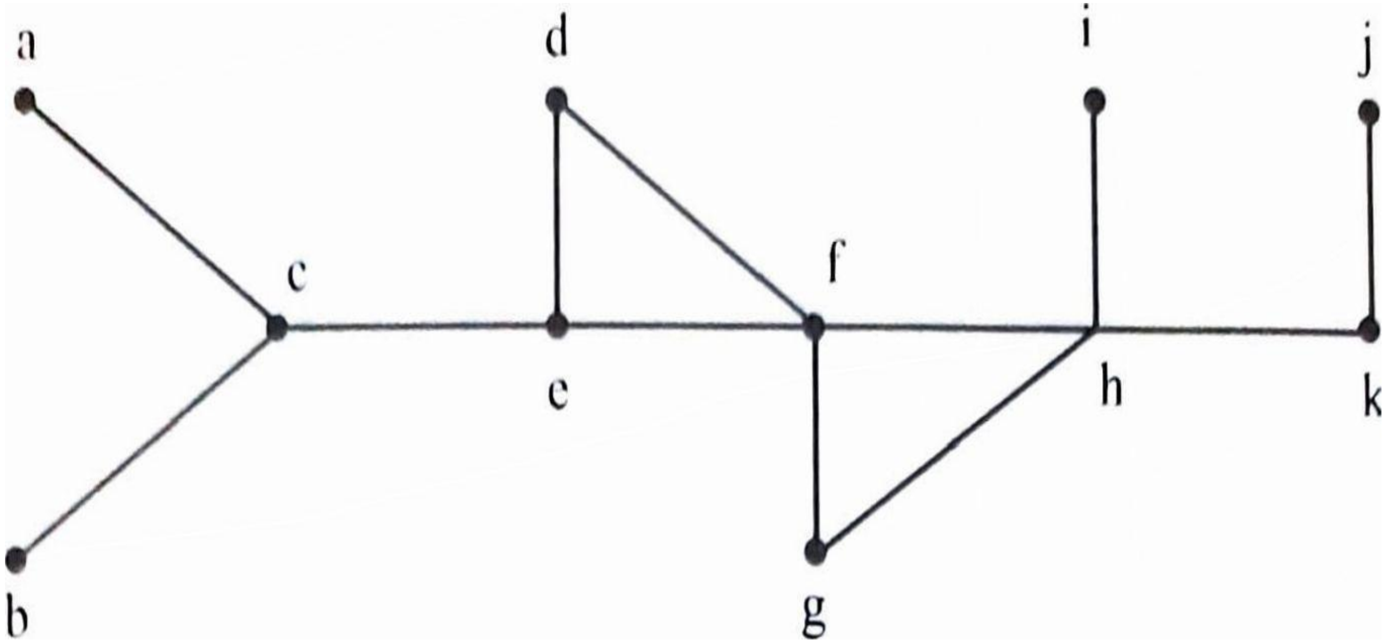
Prandaj duhet të largojmë $m-(n-1)$ degë.

Detyrë. Cilët grafe të thjeshta dhe të lidhura kanë vetëm një pemë lidhëse?

Zgjidhje.

Grafi i thjeshtë dhe i lidhur ka vetëm një pemë lidhëse në qoftë se vetë grafi është pemë. Në raste tjera, në qoftë se grafi i thjeshtë nuk është pemë, atëherë ai ka cikël të thjeshtë me $k > 3$ degë, ashtu që mund të konstruktojmë pemën lidhëse të grafit që përmban $k — 1$ degë të grafit.

Detyrë. Përdorni algoritmin ‘kërkimi i parë në thellësi’ (DFS) për të gjetur pemën lidhëse të grafit të dhënë. Filloni me nyjen a dhe përdorni rradhitjen alfabetike.



Zgjidhje.

Le të jetë d nyja fillestare. Shënojmë d si kulm të vizituar. Nyja d ka dy fëmijë, e dhe f. Vizitojmë tani nyjen e dhe e shënojmë si të vizituar. Zgjedhim degën (d, e) dhe e shtojmë atë në pemën lidhëse T. Kështu kemi $T = \{(d, e)\}$. Tash, nyja e ka dy fëmijë c dhe f. Vizitojmë c, shtojmë (e, c), në pemën T dhe e shënojmë c si të vizituar. Në vazhdim vizitojmë nyjen a dhe më pastaj nyjen b. I shënojmë ato si të vizituara dhe shtojmë degët (c, a) dhe (c, b) në T. Kështu fitojmë:

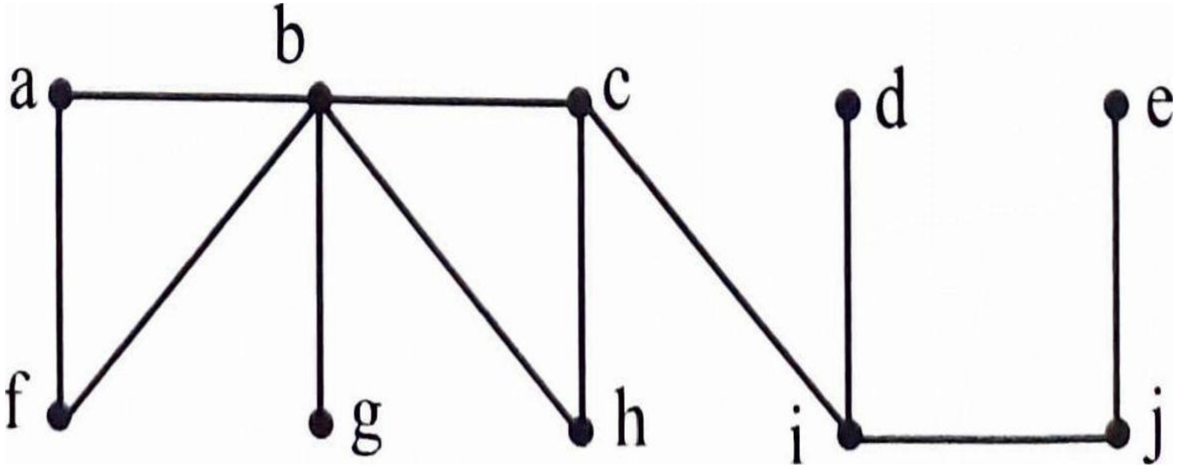
$$T = \{(d, e), (e, c), (c, a), (c, b)\}$$

Këtu c ka një fëmijë më shumë e, i cili është vizituar, kështu kthehemi tek nyja e e cila ka një fëmijë të pa vizituar f. Vizitojmë kulmin f dhe degën (e, f), e shtojmë në T. Nyja f ka tre fëmijë: d, g dhe h. Nyja d është e vizituar.

Vizitojmë g. Duke e vazhduar këtë procedurë, përfundimisht fitojmë pemën lidhëse:

$$T = \{(d, e), (e, c), (c, a), (c, b), (e, f), (f, g), (g, h), (h, i), (h, k), (k, j)\}.$$

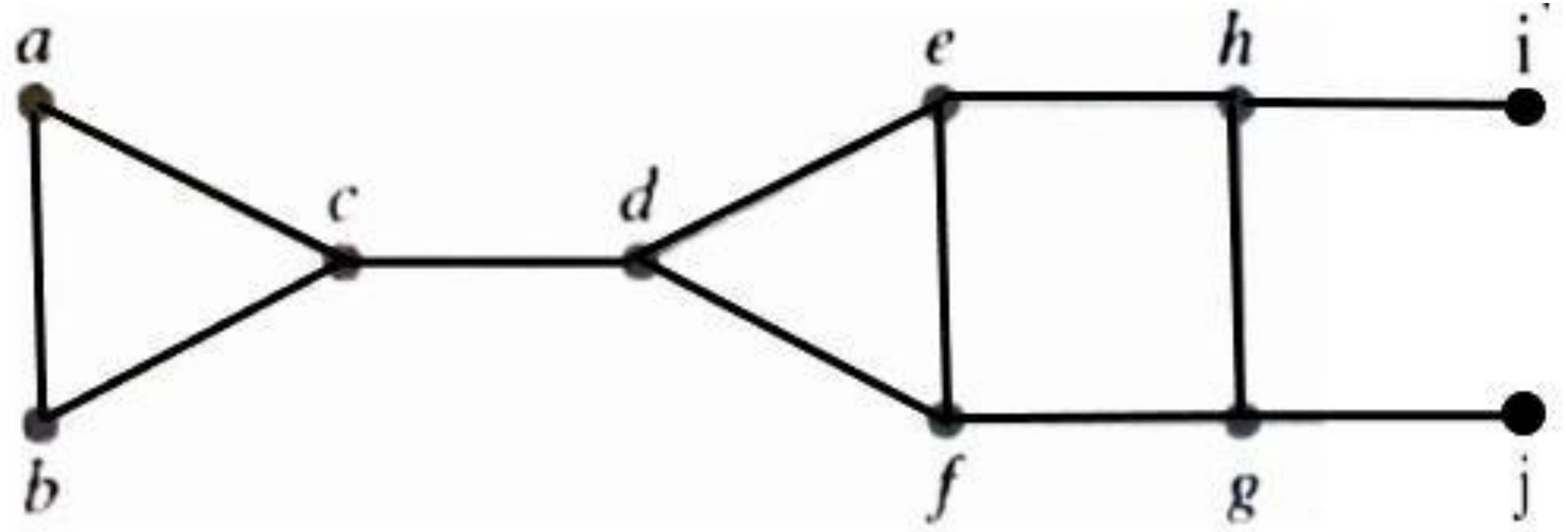
Detyrë. Përdomi algoritmin "Kërkimi i pare në thellësi" (DFS) për të gjetur pemën lidhëse të grafit në vazhdim. Filloni me nyjen a, dhe përdomi rradhitjen alfabetike.



Zgjidhje.

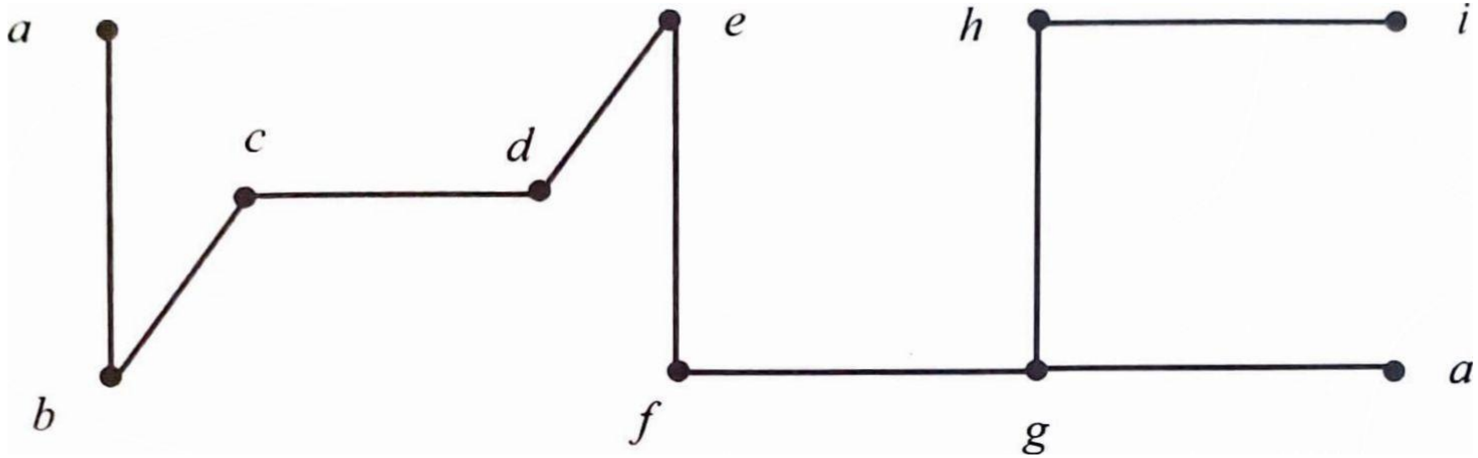
$\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, h\}, \{c, i\}, \{i, d\}, \{i, j\}, \{j, e\}, \{b, f\}$ dhe $\{b, g\}$.

Përdorni algoritmin “Kërkimi i pare në thellësi” (DFS) për të gjetur pemën lidhëse të grafit në vazhdim. Filloni me nyjen a, dhe përdomi rradhitjen alfabetike.

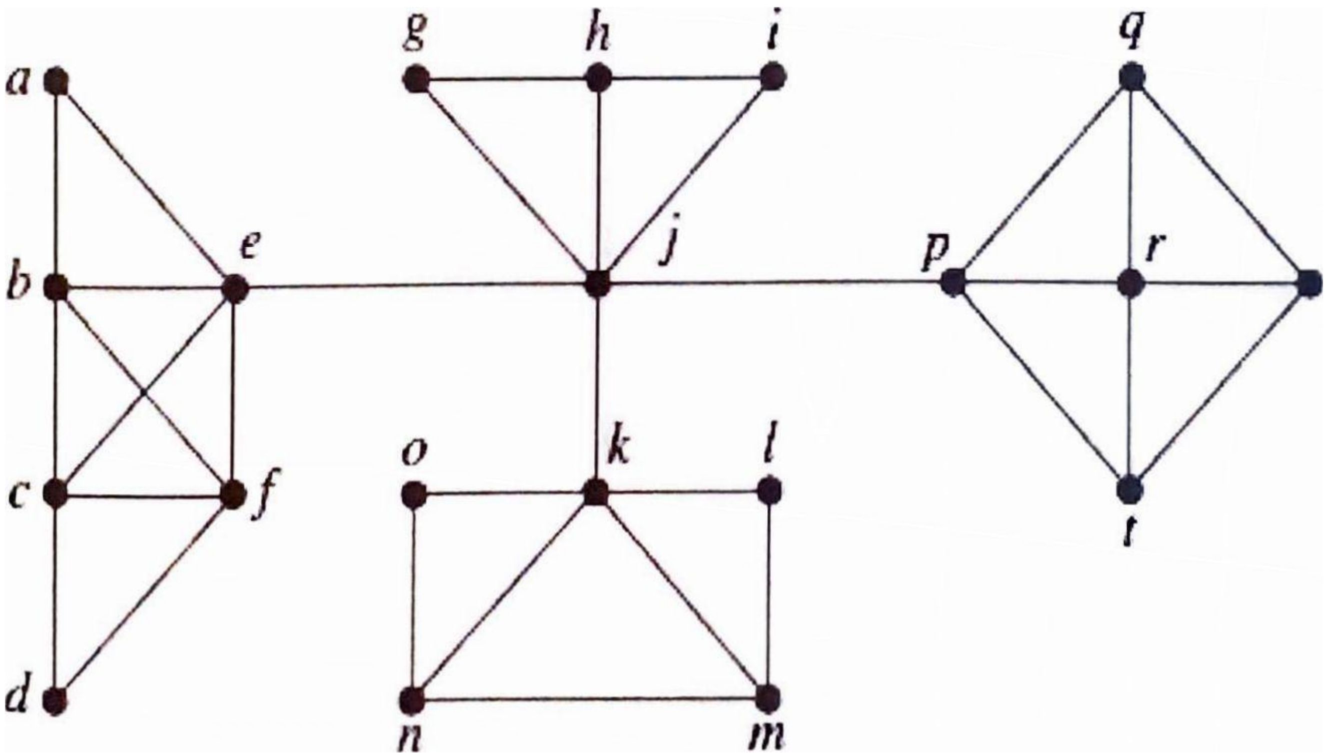


Detyrë.

Zgjidhje. Në qoftë se fillojmë te nyja a dhe përdorim rradhitjen sipas alfabetit, atëherë pema lidhëse sipas kërkimit të parë në thellësi është e vetme.

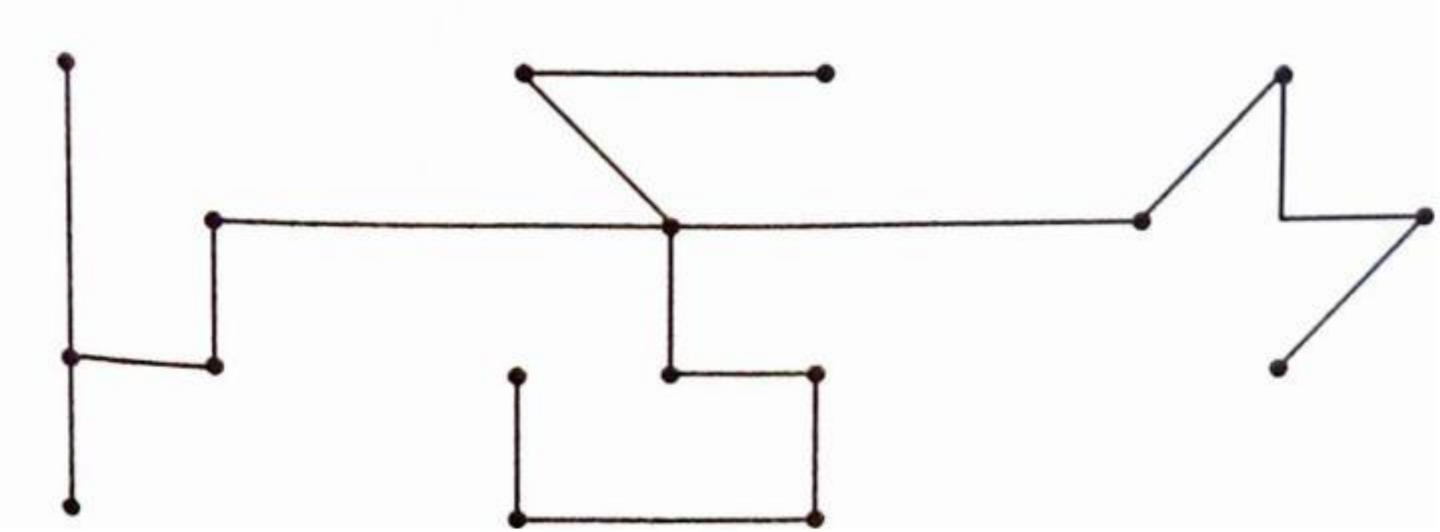


Përdorni algoritmin “Kërkimi i parë-në gjërësi” (BFS) për të gjetur pemën lidhëse të grafit në vazhdim, duke marrë a si nyje fillestare.

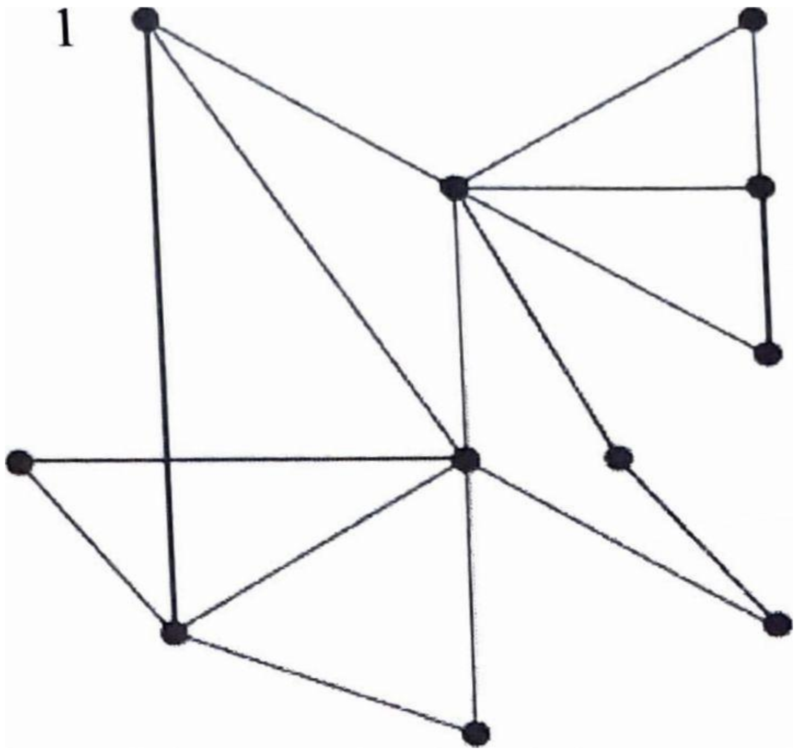


Zgjidhje. Pema lidhëse është si në figurë.

Detyrë.

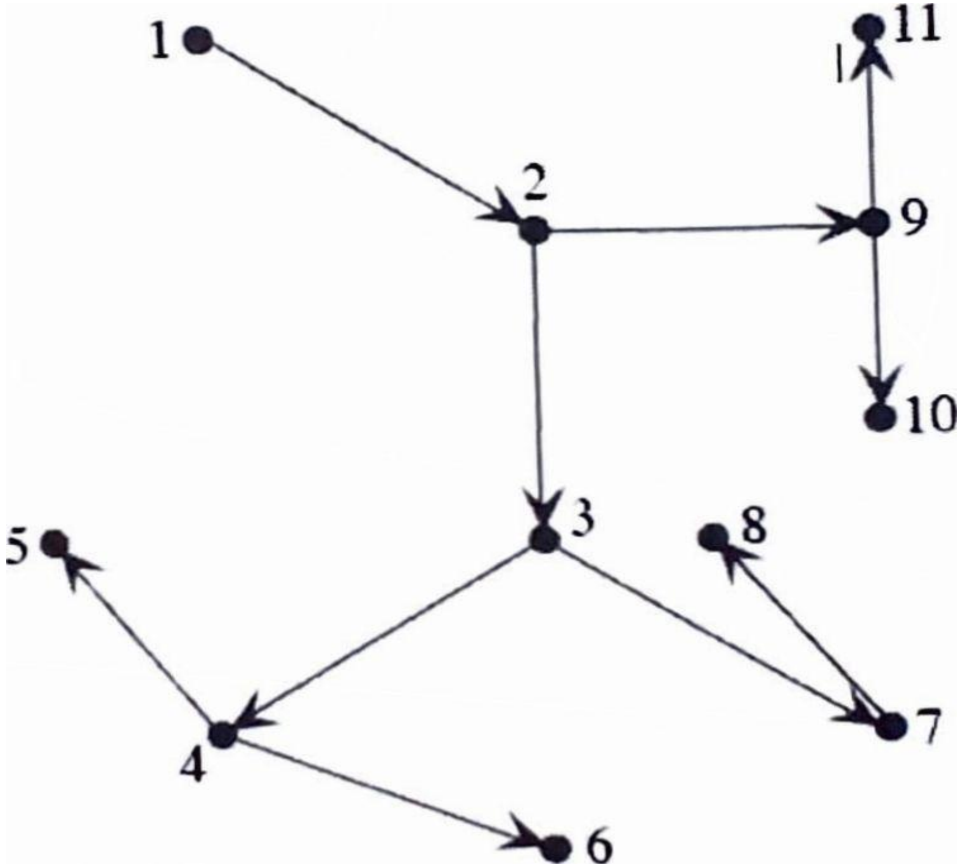


Përdorni algoritmin “Kërkimi i pare në thellësi” (DFS) dhe “Kërkimi i parë-në gjërësi” (BFS) për të gjetur pemën lidhëse të grafit në vazhdim, duke marrë *1* si nyje fillestare.

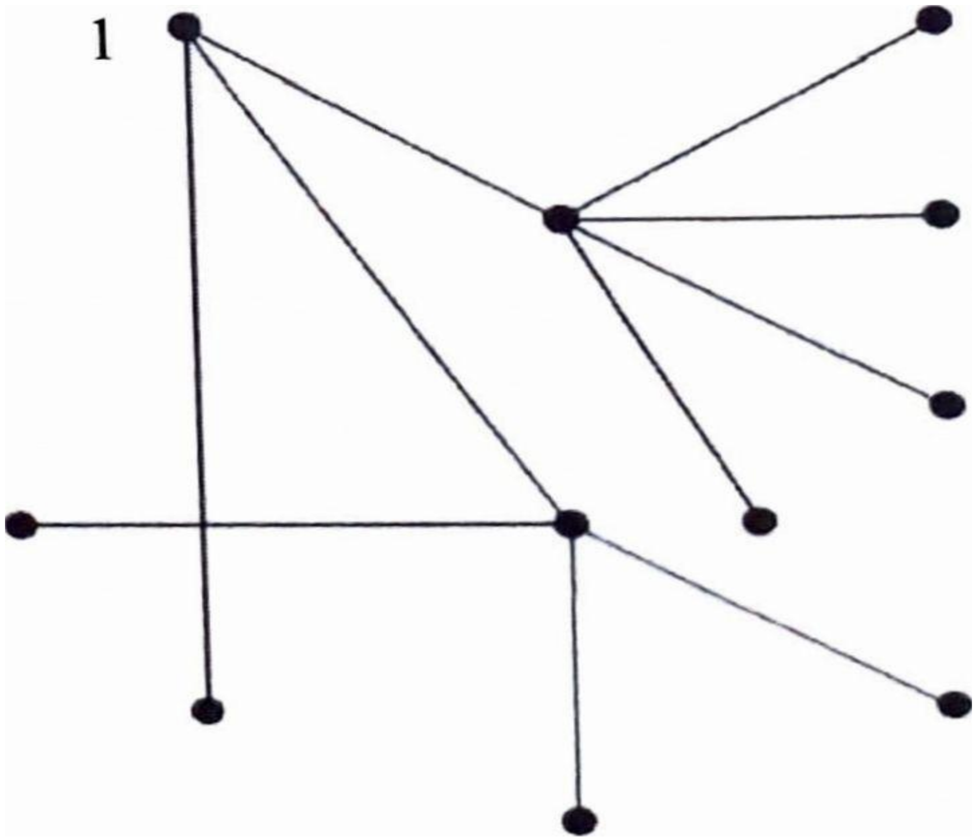


Zgjidhje. Pema lidhëse e fituar me ane të algoritmit DFS.

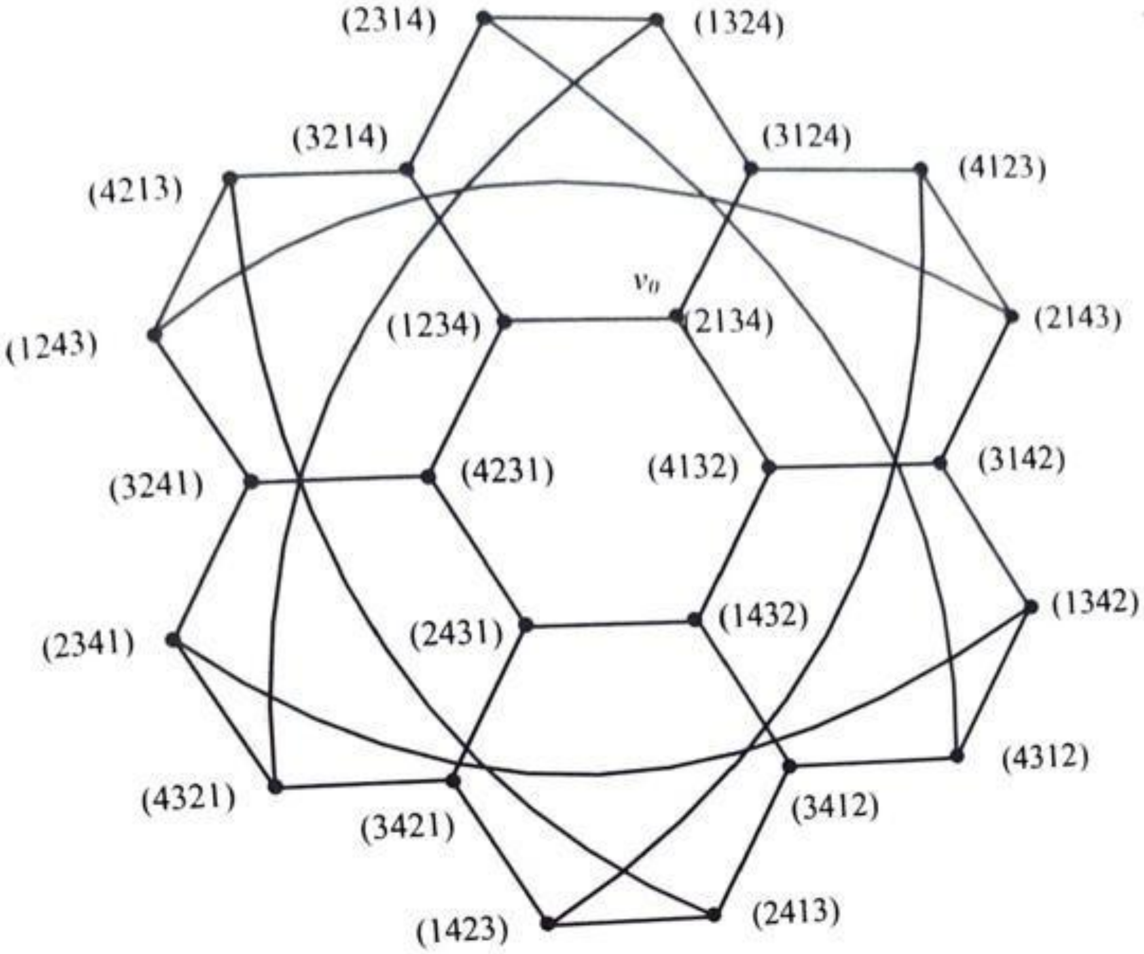
Detyrë.



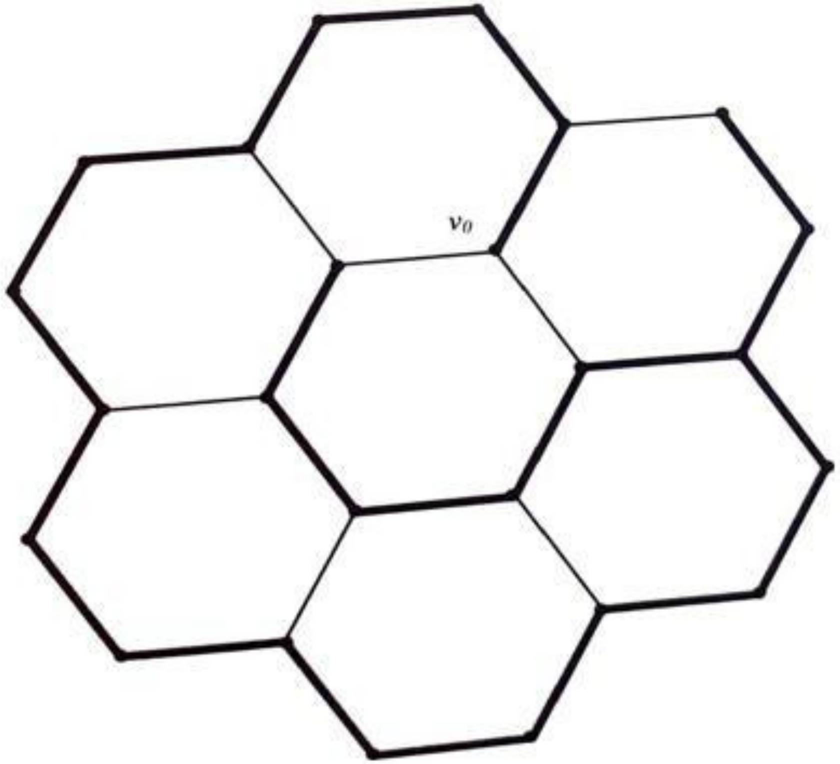
Pema lidhëse e fituar me ane të algoritmit BFS.



Detyrë. Të gjendet një pemë lidhëse për grafin e dhënë në figurën e më poshtme, duke zbatuar algoritmin DFS ose algoritmin BFS me nyje fillestare ne v_0.



Zgjidhje. a. Pema lidhëse me anë të DFS:



b. Pema lidhëse me anë të BFS: (DSH)

Pemët lidhëse minimale.

Përkufizim. Le të jetë G graf me peshë dhe i lidhur. **Pemë lidhëse minimale** për G është pema lidhëse T e cila ka peshën më të vogël të mundshme në kuptimin se në qoftë se T' është cilado pemë lidhëse tjetër atëherë

$$\omega(T) < \omega(T').$$

Vërejtje: *Pema lidhëse quhet **pemë lidhëse maksimale** në qoftë se ka peshën më të madhe të mundshme.*

$$\omega(T) \geq \omega(T').$$

Në vazhdim do të paraqesim dy algoritme për të konstruktuar pemët lidhëse minimale, "Algoritmin Prim-as" dhe "Algoritmin Kruskal". Të dy algoritmet fillojnë duke shtuar në mënyrë të vazhdueshme degët me peshë më të vogël nga ato degë me veti specifike të cilat nuk janë përdorur më herët. Të dy janë algoritme të pangopura. Të përkujtojmë se algoritëm i pangopur është procedura e cila bën zgjedhjen optimale në secilin hap të tij.

Algoritmi Prim-as

Këtë algoritëm e ka zbuluar inxhinieri Amerikan Robert Clay Prim në vitin 1957. Zhvillohet në këto hapa:

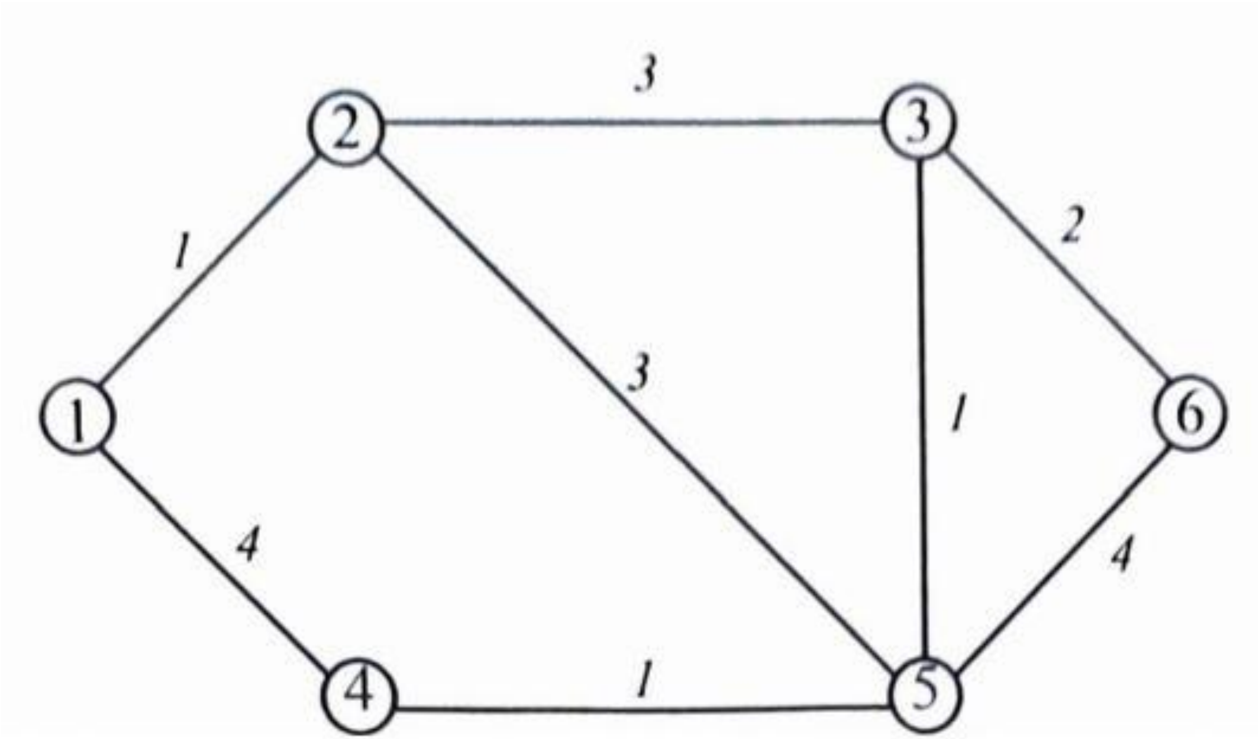
1. Zgjedhet dega me peshën më të vogël.
2. Përfshihet ajo në $T.$
3. Zgjedhet një degë me peshë më të vogël e cila është e lidhur me nyjen e degës në $T.$

Algoritmi Kruskal

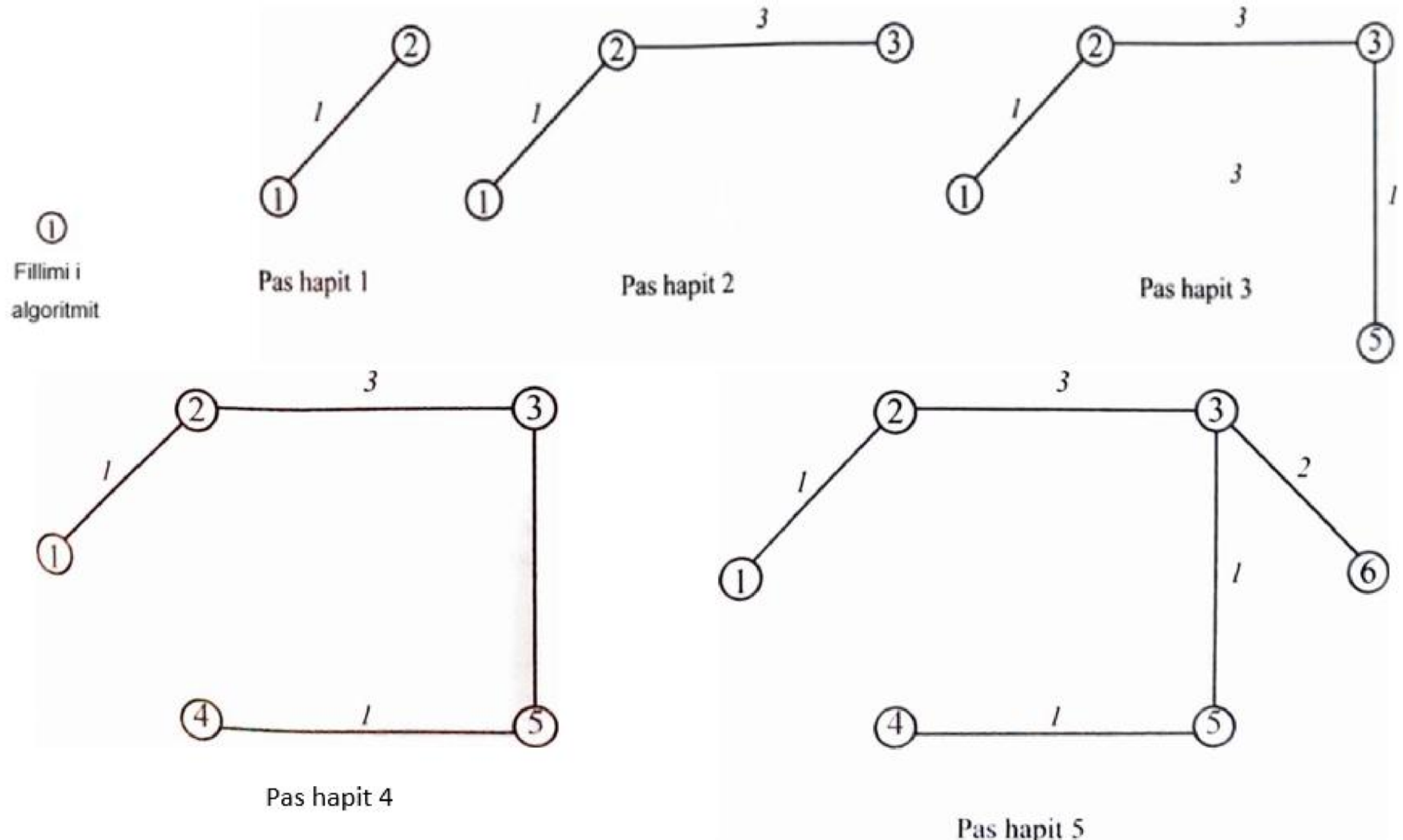
Këtë algoritëm e ka zbuluar matematikani Joseph Bemard Kruskal. Zhvillohet në këto hapa:

1. Radhiten degët në G në formë të vargut jozvoglues sipas peshës së tyre.
2. Zgjedhet dega në G me peshë minimale.
3. Shtohet në T dega me peshë më të vogël në qoftë se ajo nuk formon cikël me degët më parë të përzgjedhura.
4. Përsëritet hapi 3 derisa numri i degëve të përzgjedhura të jetë $n-1$ ku n shënon numrin e nyjave në G.
5. Në qoftë se ajo nuk formon cikël me degët në T, atëherë të përfshihet në T, të kundërtën largohet.
6. Përsëritet hapi 3 dhe 4 derisa T të përmbajë $n-1$ degë.

Detyrë: Për grafin me peshë të dhënë si në figurë, përdorni algoritmin Prim-as e mandej algoritmin Kruskal, për të gjetur pemën lidhëse minimale dhe tregoni sa është pesha e tij.

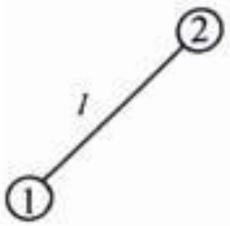

3
1
3
2
1
4
4
1
1
2
3
4
5
6

Zgjidhje. Së pari zbatojmë algoritmin Prim-as për të gjetur pemën lidhëse

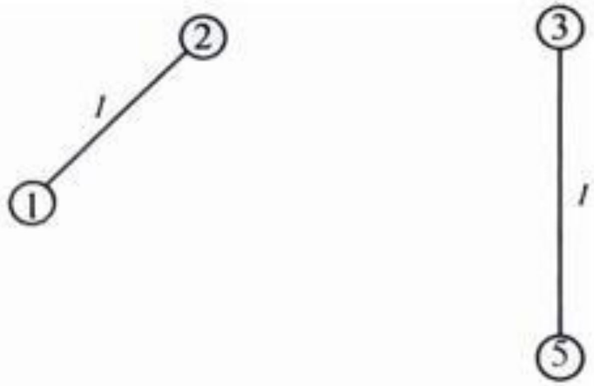


minimale të grafit të dhënë

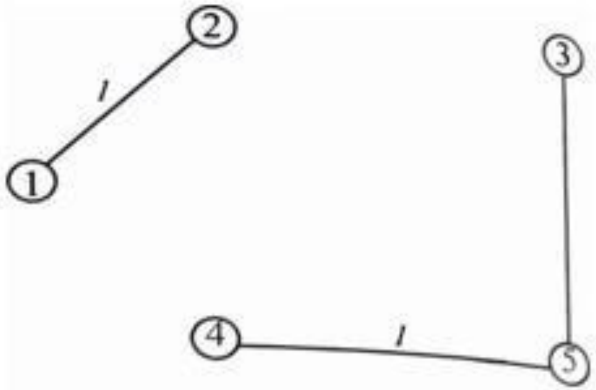
Në vazhdim zbatojmë algoritmin Kruskal për të gjetur pemën lidhëse minimale të grafit të dhënë.



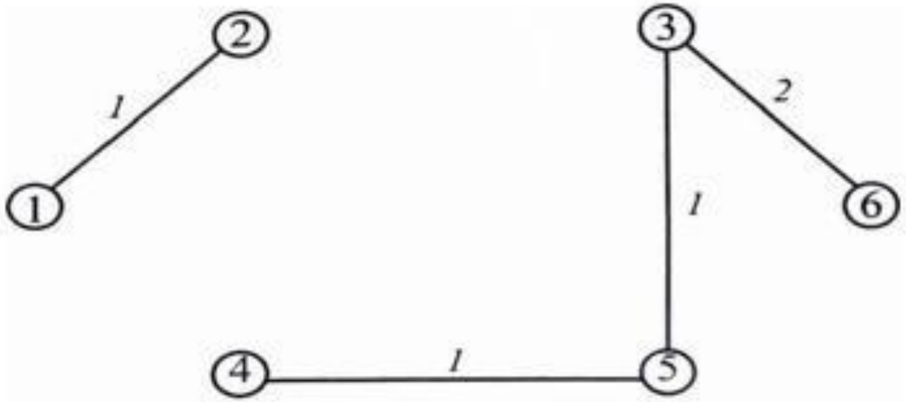
Pas hapit 1



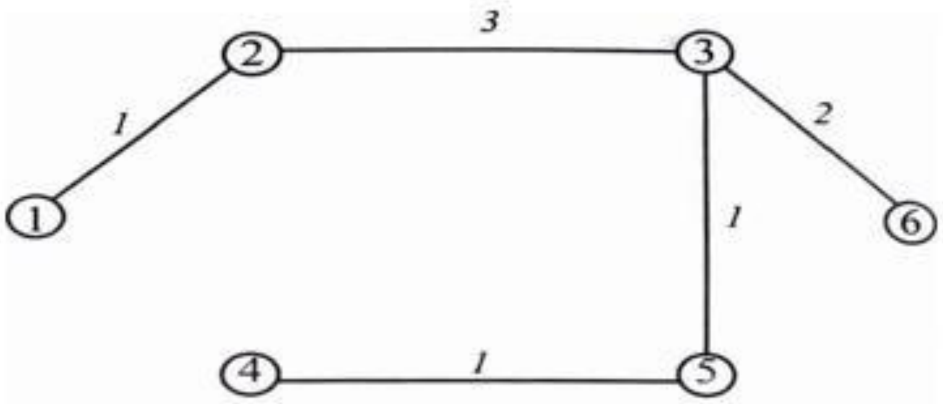
Pas hapit 2



Pas hapit 3

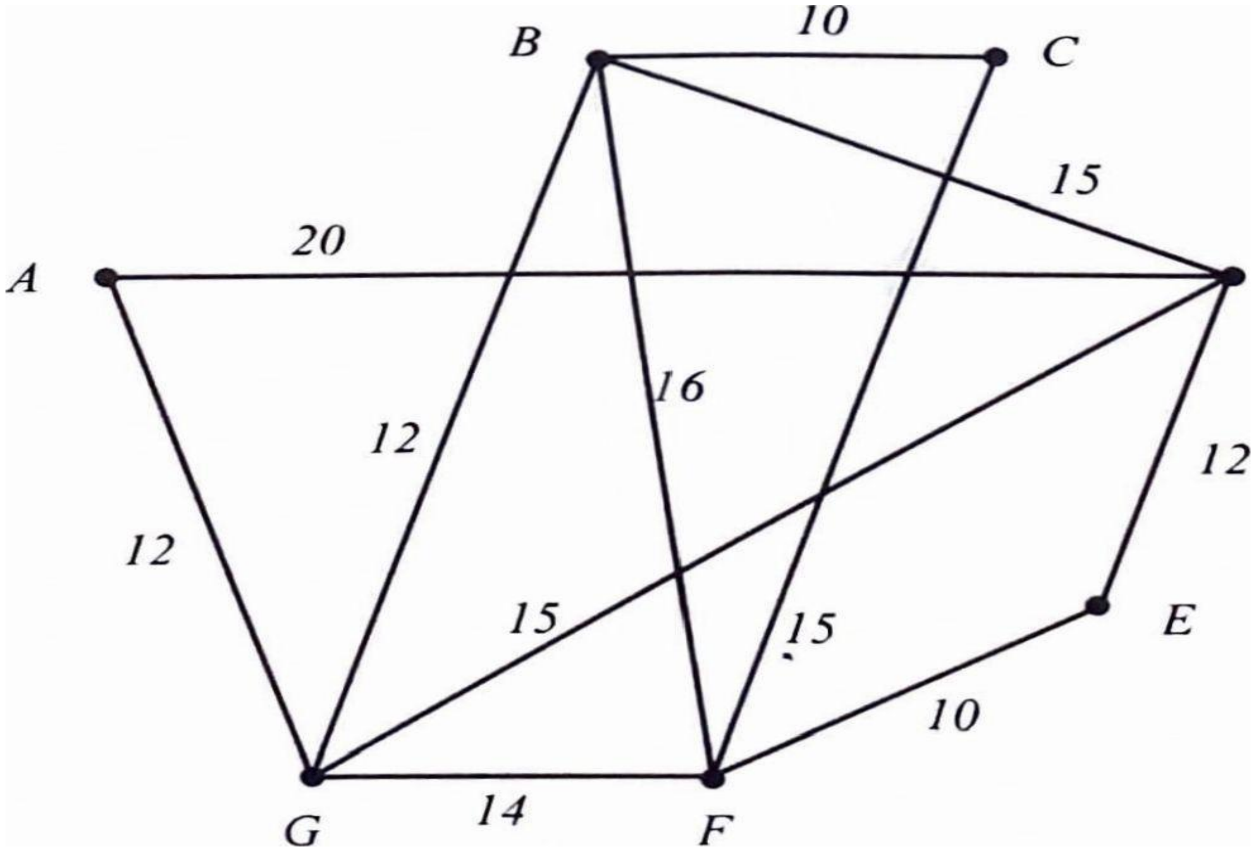


Pas hapit 4



Pas hapit 5

Detyrë: Duke zbatuar algoritmin Kruskal, caktoni pemën lidhëse minimale në grafin e dhënë si në figurë.



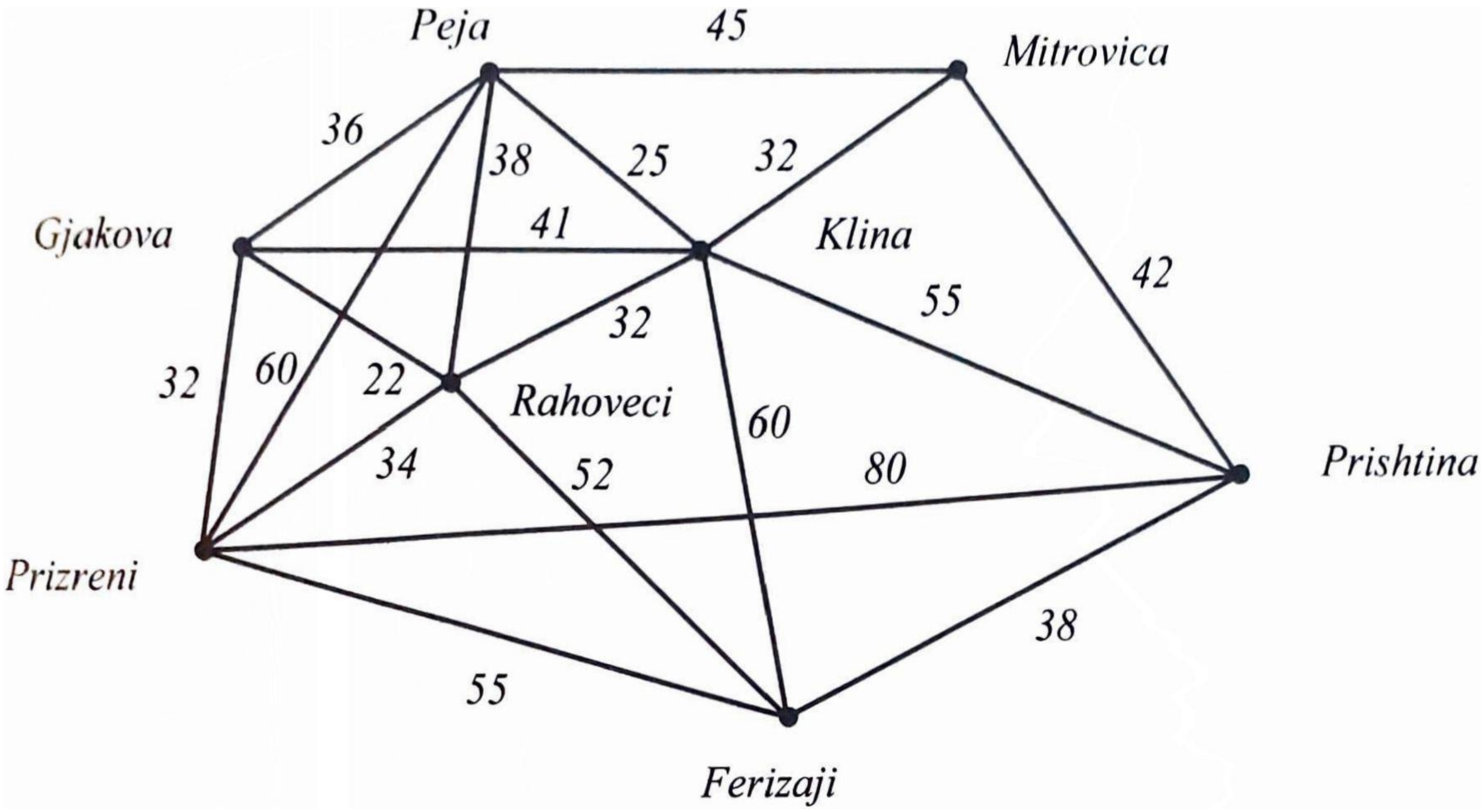
Zgjidhje. Radhisim degët në varg jozvogëlues sipas peshës së tyre.

Pesha	EF	BC	AG	BG	DE	FG	CF	DG	BD	BF	AD
Dega	10	10	12	12	12	14	15	15	15	16	20

Si degë të parë me peshë minimale zgjedhim degën FE. Duke i shtuar kësaj dege degët tjera me peshë minimale, të cilat nuk formojnë qarqe, fitojmë pemën:

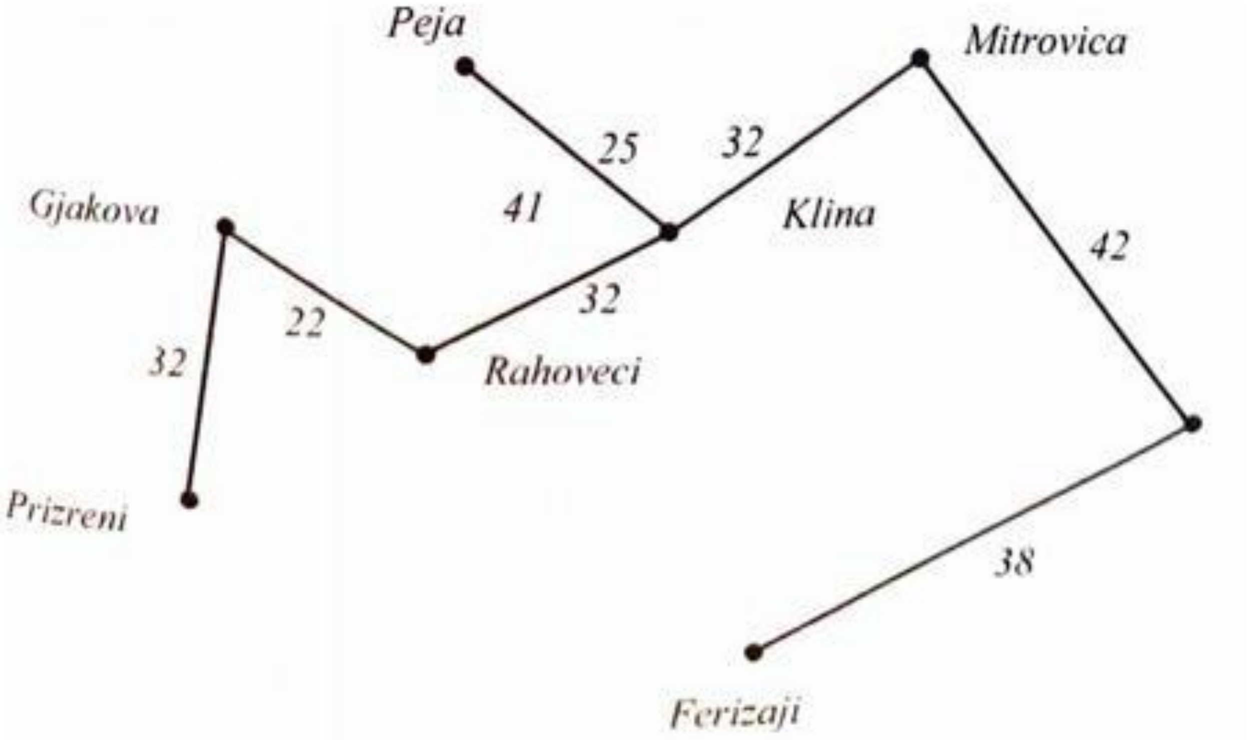
$$\{(F, E), (B, C), (E, D), (B, G), (A, G), (F, G)\}$$

Detyrë: Përdorni algoritmin Prim-as ose Kruskal për të gjetur pemën lidhëse minimale. Tregoni se sa është pesha e tij në qoftë se tregtari niset prej qytetit të Gjakovës



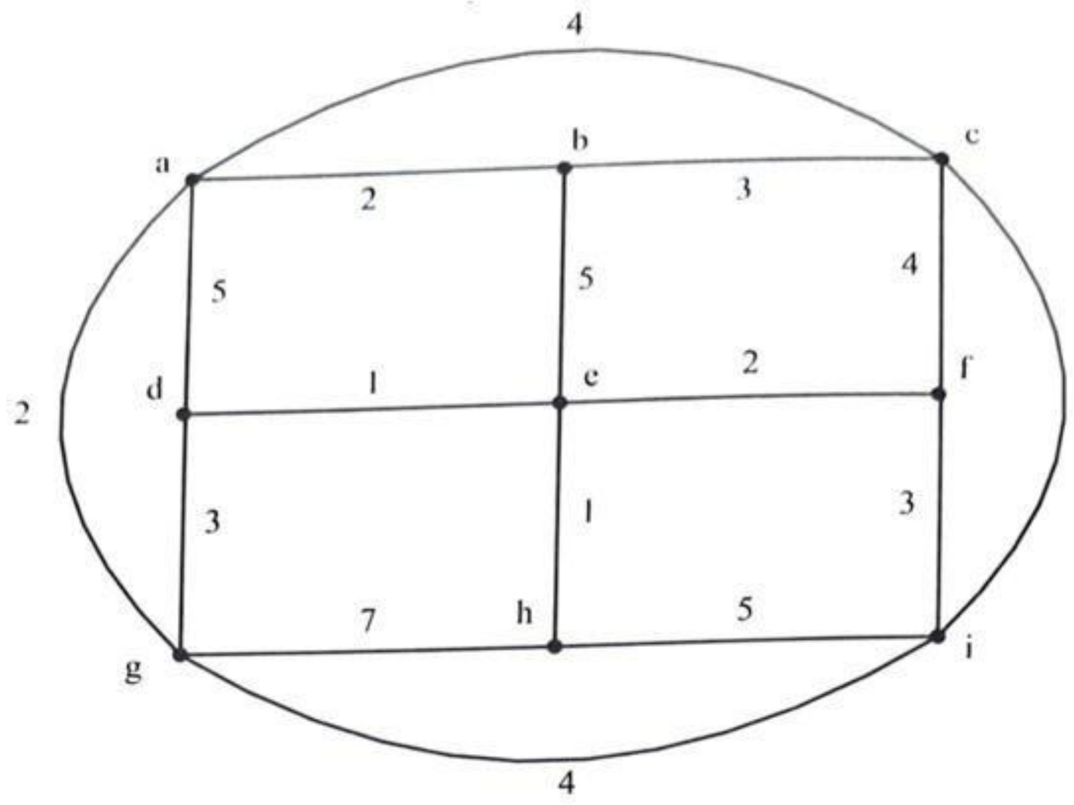
Zgjidhje. Radhisim degët e grafit në tabelë sipas peshës së tyre.

Dega	Gj Ra	Pe Kl	Kl Mi	Kl Ra	Gj Pz	Pz Ra	Pe Gj	Pr Fe	Kl Gj	Pr Mi	Mi Pe	Ra Fe	Pe Pz	Kl Pr	Pz Pe	Kl Fe	Pz Pr
Pesha	22	25	32	32	32	34	36	38	41	42	45	52	55	55	60	60	80



$$\omega(T) = 22 + 25 + 32 + 32 + 32 + 42 + 38 = 223$$

Detyrë: Për grafin me peshë të dhënë si në figurë, duke përdorur



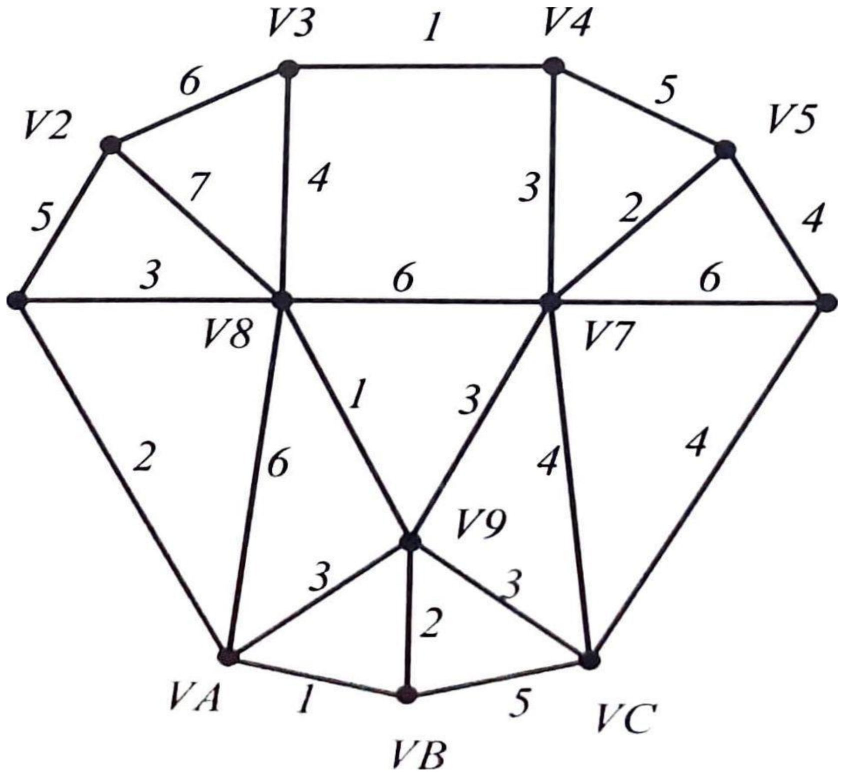
Sipas algoritmit Primas nisemi nga dega $\{d, e\}$ me peshë 1, $\{e, h\}$ me algoritmin Prim-as gjeni pemën lidhëse minimale dhe tregoni sa është pesha e tij.

Zgjidhje.

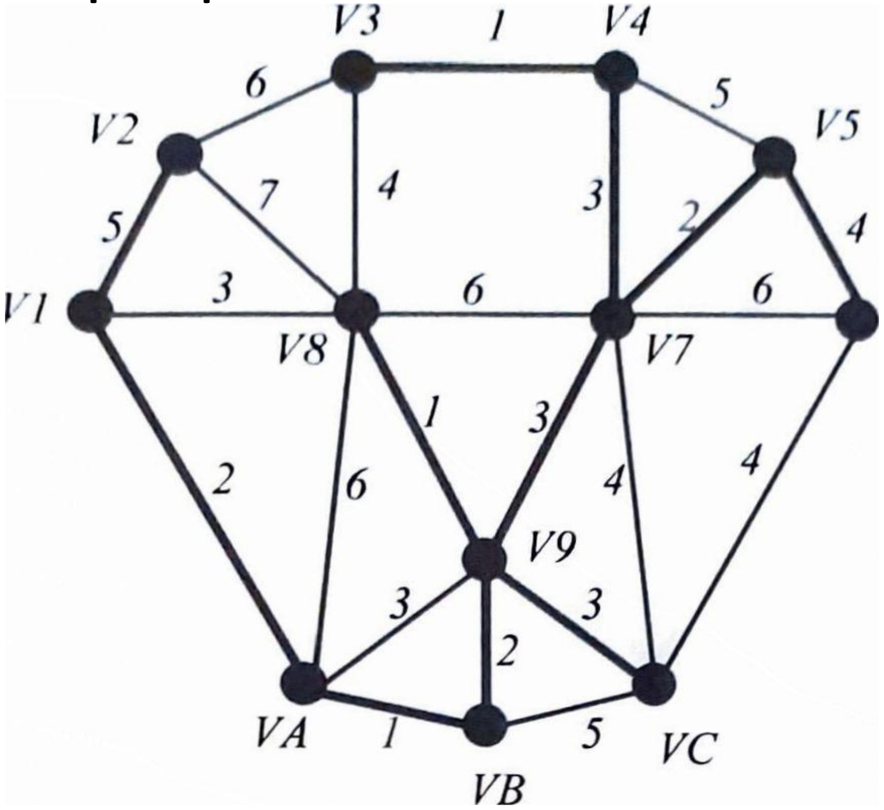
peshë 1, $\{e, f\}$ me peshë 2, $\{d, g\}$ me peshë 3, $\{g, a\}$ me peshë 2, $\{a, b\}$ me peshë 2, $\{b, c\}$ me peshë 3 dhe $\{c, i\}$ me peshë 3. Pesha totale e pemës lidhëse minimale është 17.

Detyrë:

Përdorni algoritmin Prim-as ose Kruskal për të gjetur pemën lidhëse minimale, dhe tregoni sa është pesha e tij.



Zgjidhje. Duke u bazuar në algoritmin Prim-as zgjedhim degën fillestare me peshë minimale dhe në mënyrë suksesive shtojmë degët me peshë më të vogël të cilat janë të lidhura në nyjat e pemës dhe nuk formojnë cikël. Grafi në figurë paraqet pemën lidhëse minimale të fituar me anë të

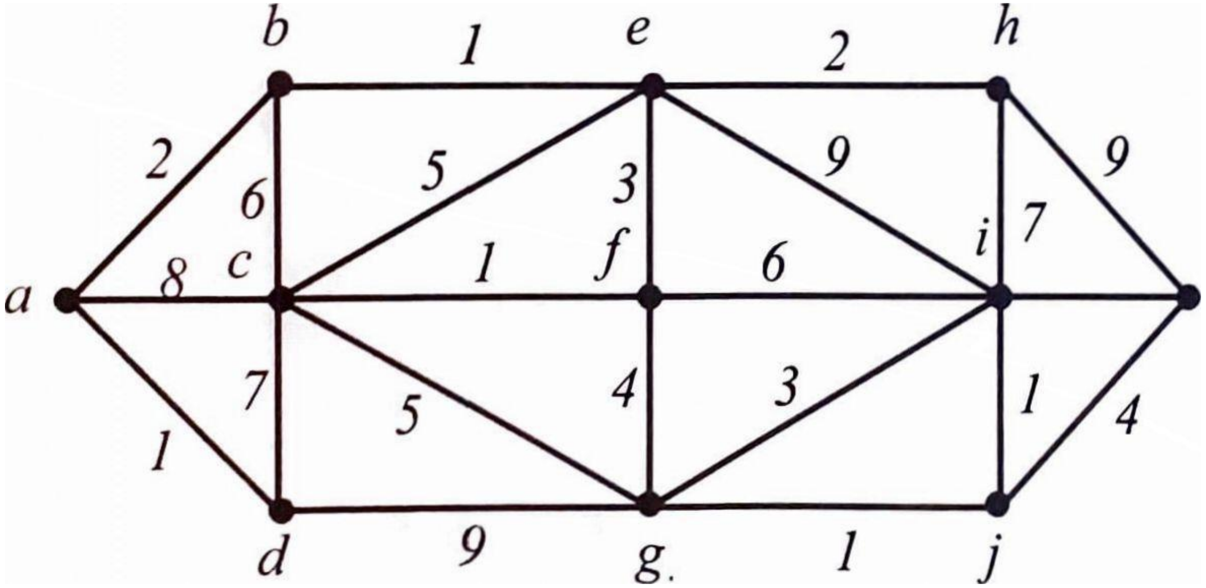


algoritmit Prim-as.

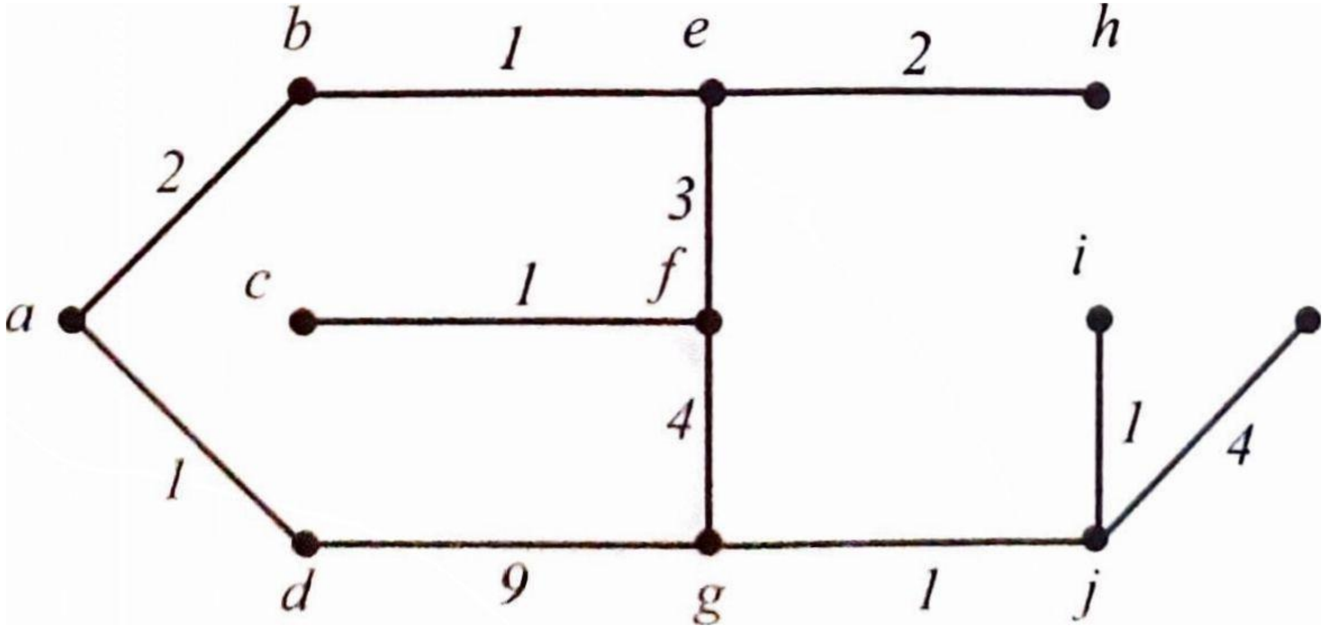
$$\omega(T) = 27.$$

Detyrë:

Zbatoni një algoritëm të përshtatshëm për të gjetur pemën lidhëse minimale për grafin e dhënë në figurë. A është unike kjo pemë lidhëse minimale?



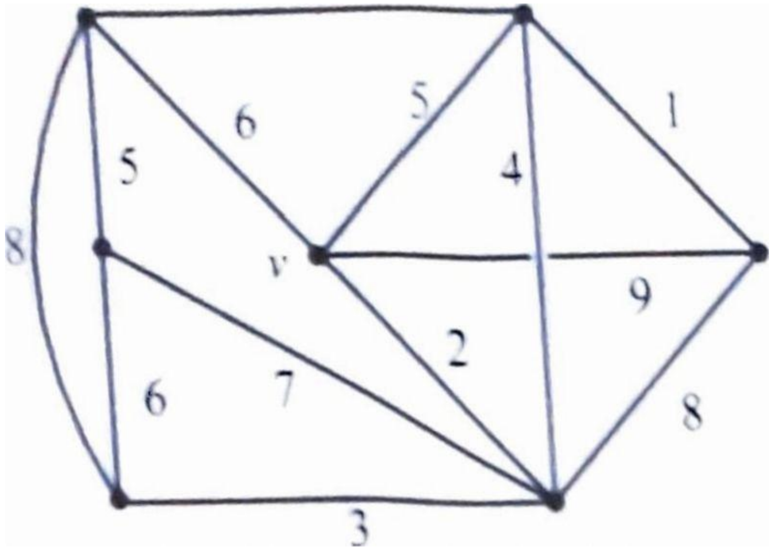
Zgjidhje. Studenti të përzgjedh algoritmin e përshtatshëm dhe të formoj tabelën.

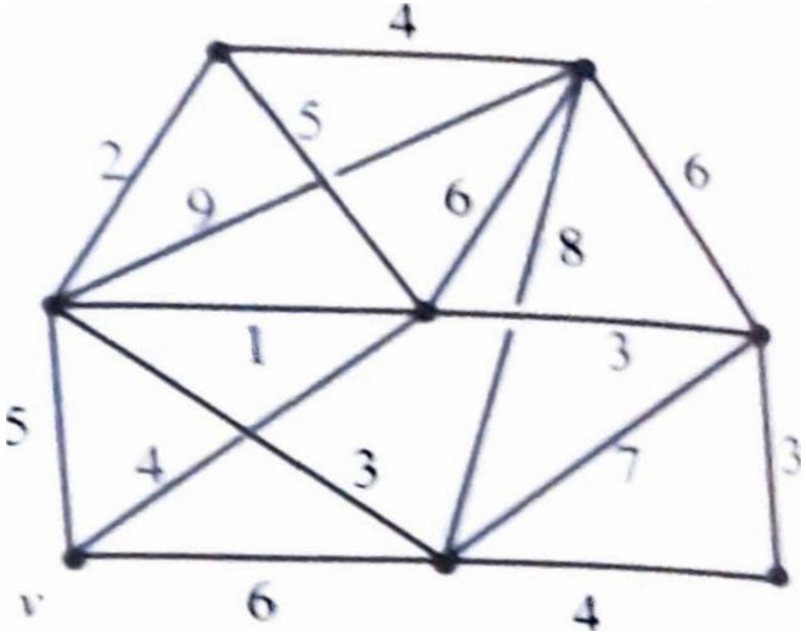


Pema lidhëse minimale me peshë $\omega(T) = 20$.

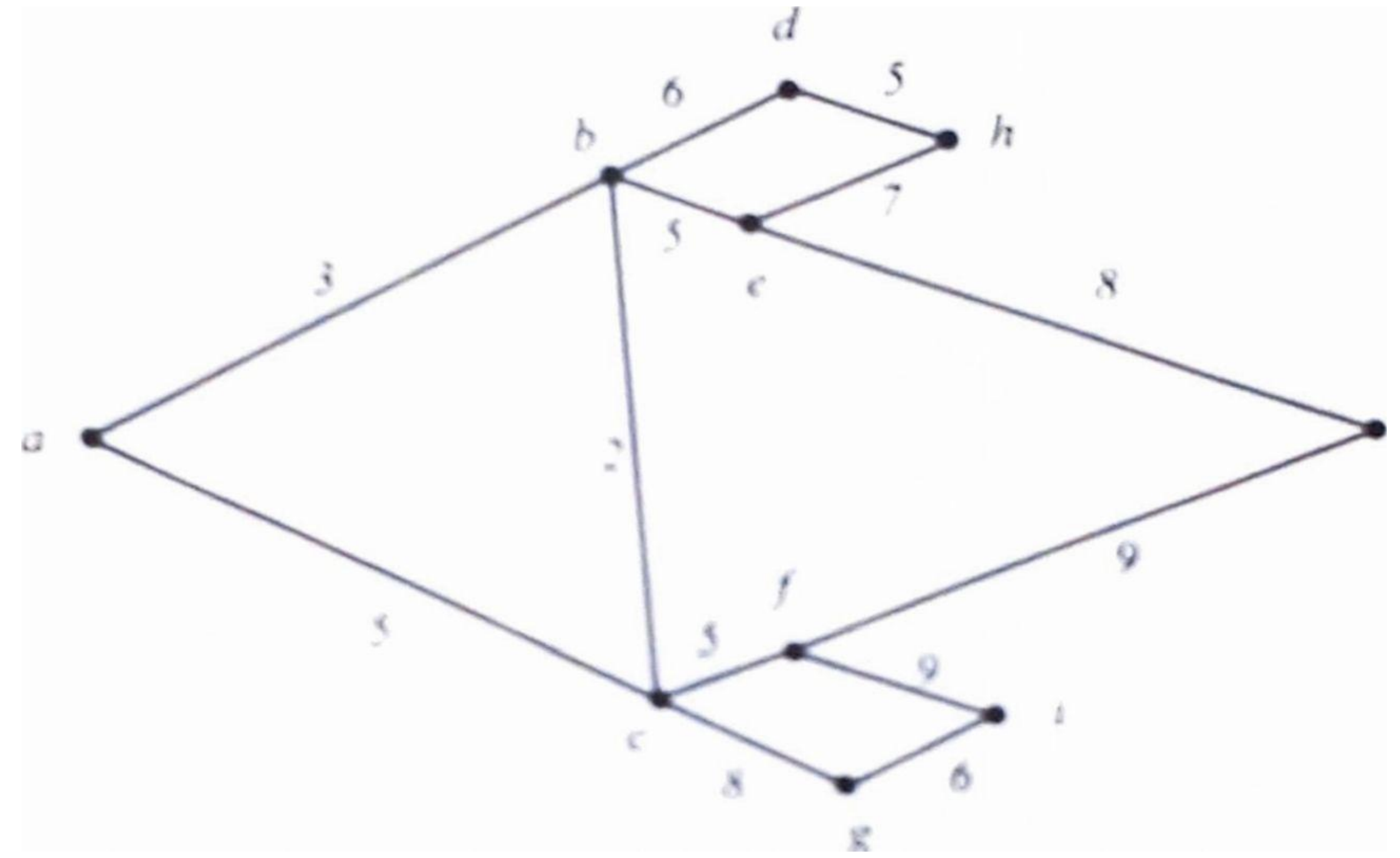
(D.Sh.) Le të jenë dhënë grafe me peshë, G dhe H. Të gjendet pema lidhëse minimale duke filluar nga nyja v.

Detyrë:

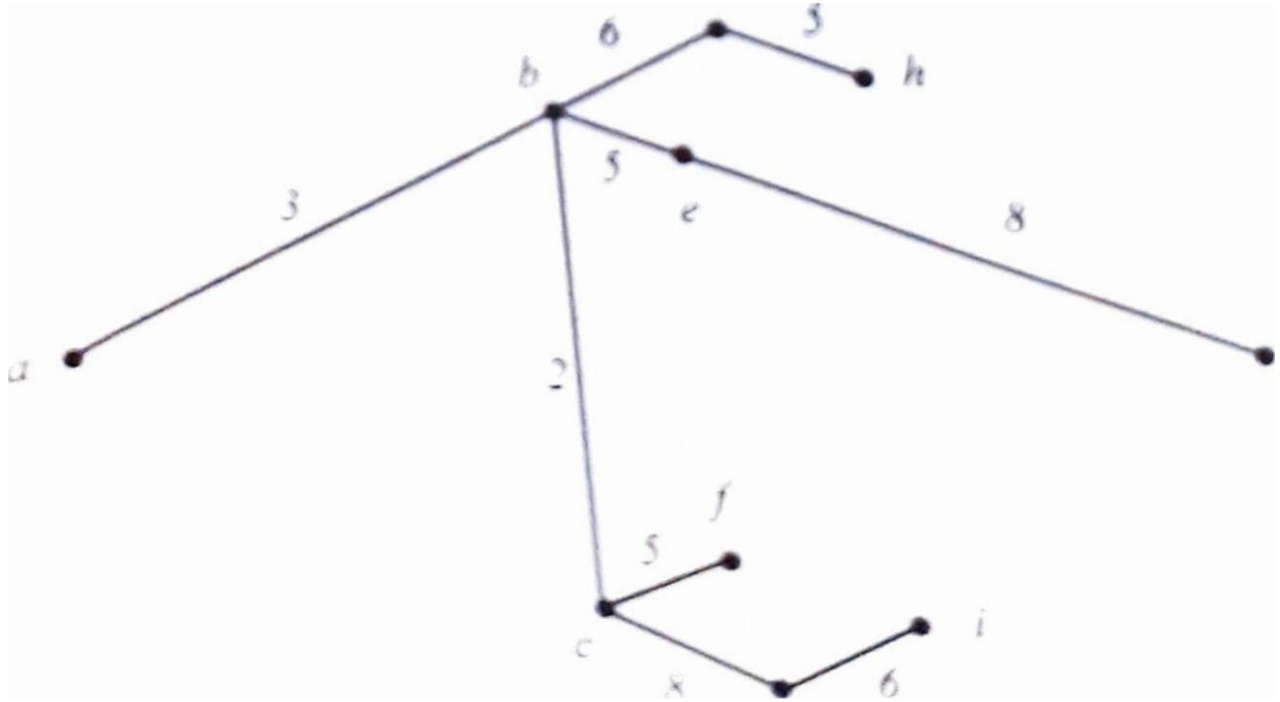




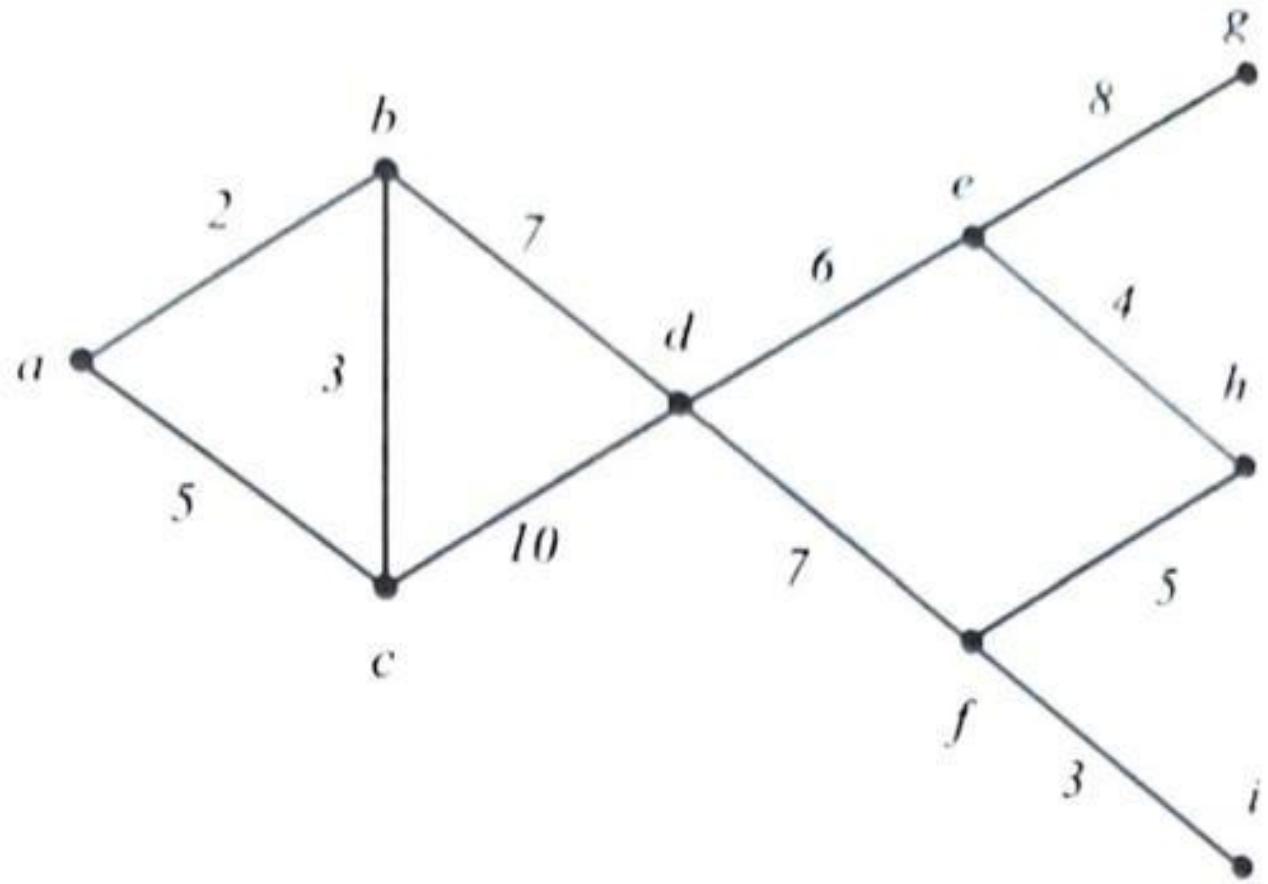
Detyrë: Për grafin me peshë të dhënë si në figurë, përdorni algoritmin Prim-as për të pemën lidhëse minimale, dhe tregoni sa është pesha e tij.


d
6
5
b
h
7
5
3
8
a
2
9
f
5
9
c
8
6
g

Zgjidhje. Mbasi të tormohet tabela fitojmë pemën Itdhëse minimale me peshë $\omega(T) = 48$.

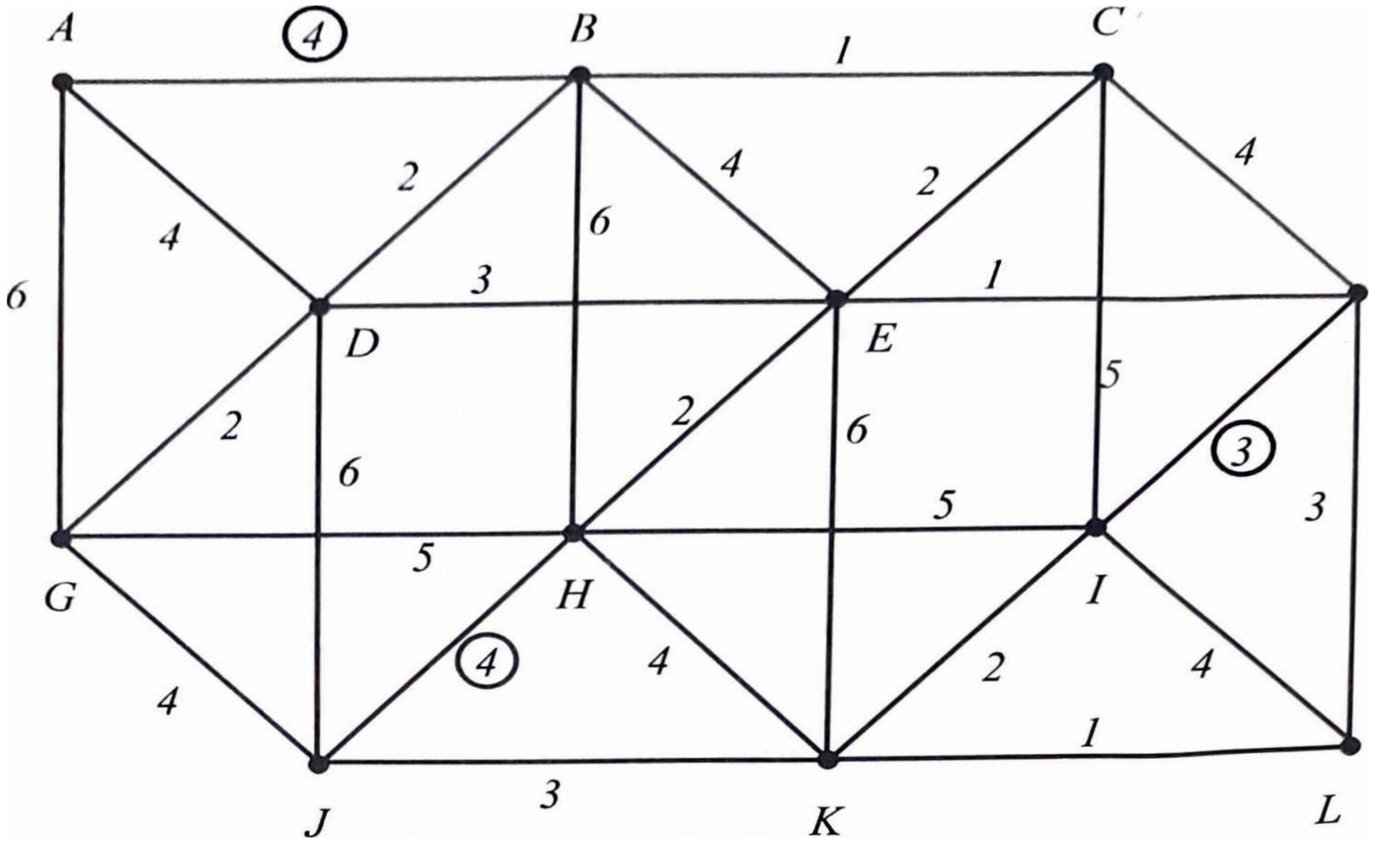


Detyrë: (D.Sh) Për grafin me peshë të dhënë si në figurë, përdorni algoritmin Prim-as për të pemën lidhëse minimale, dhe tregoni sa është pesha e tij.



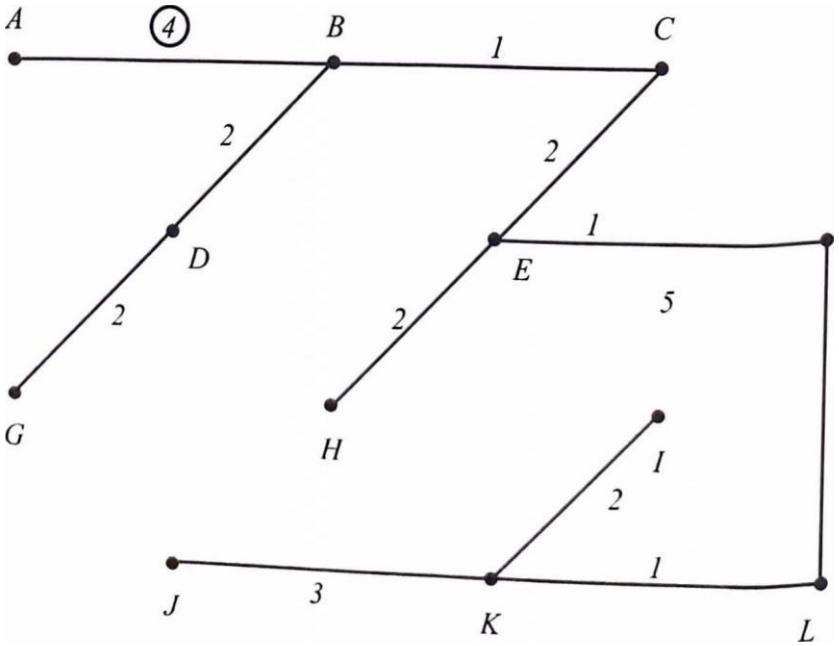
Duke zbatuar algoritmin Kruskal të gjendet pema lidhëse minimale në figurën e mëposhtme. Vizatoni pemën e fituar dhe radhitni degët në tabelë sipas peshës.

Detyrë:

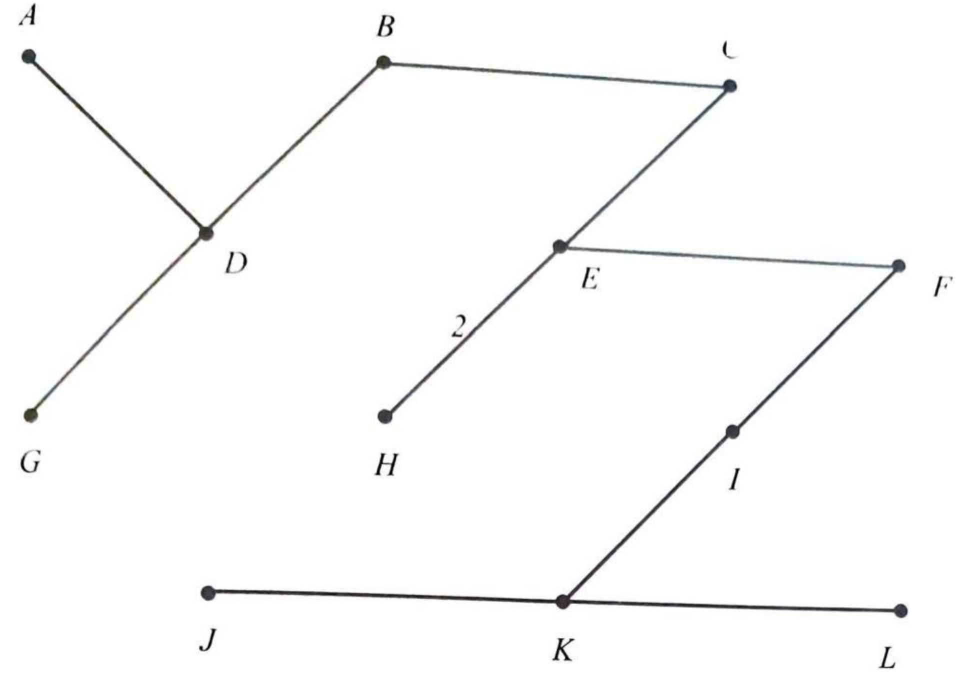


Zgjidhje. Radhisim degët e grafit në tabelë sipas peshës së tyre.

Dega	KL	BC	EF	EC	IK	EH	BD	DG	JK	IF ose FL_	AB°se
Pesha	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	4



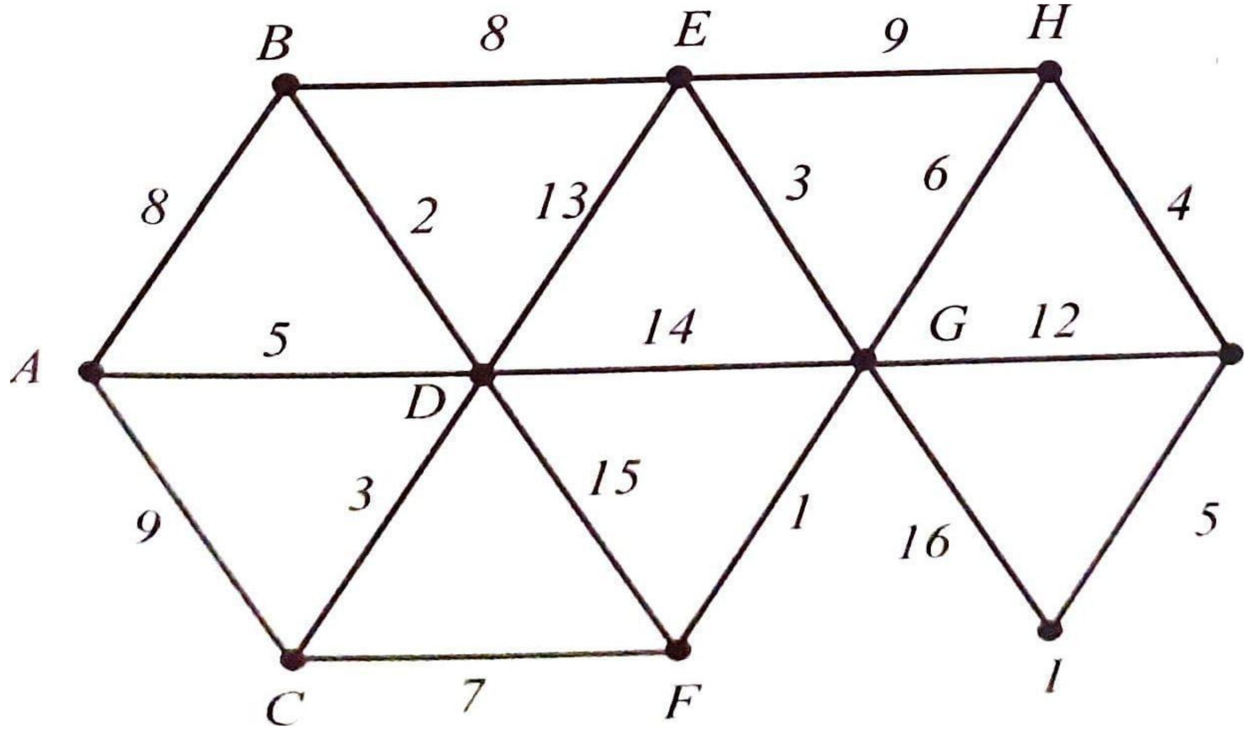
ose



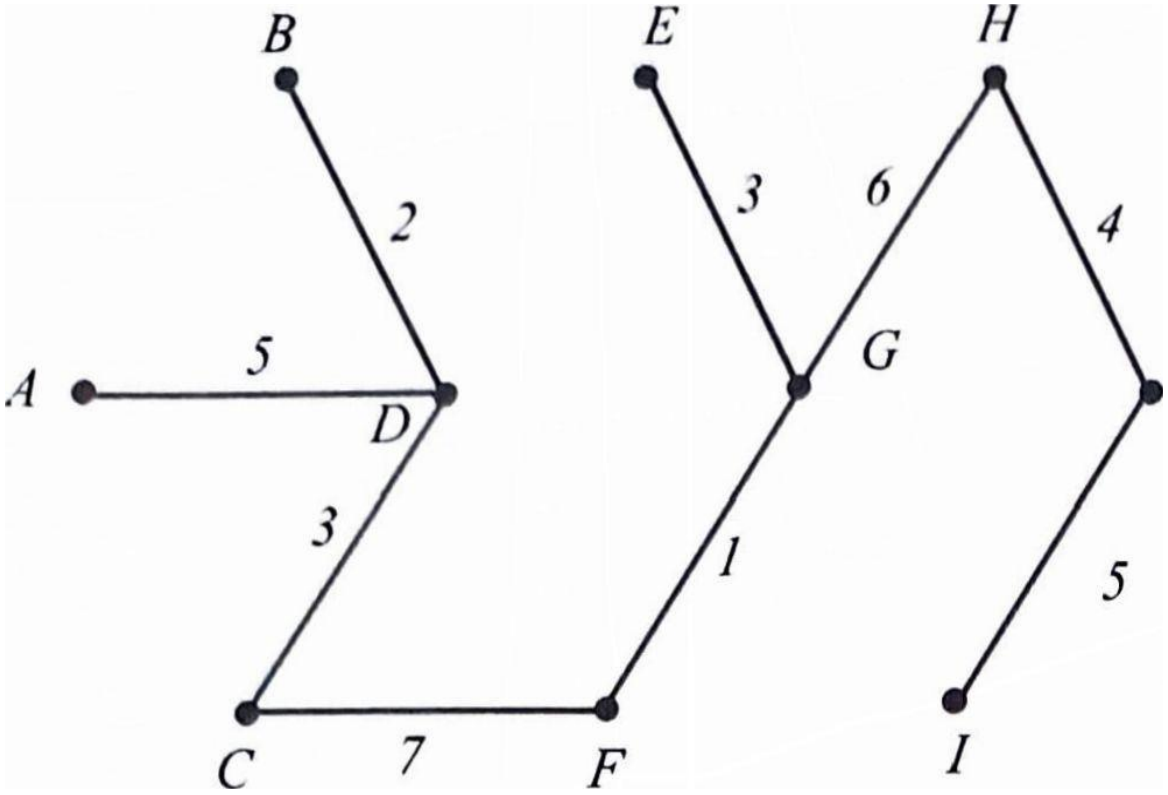
$$\omega(T) = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 23.$$

Detyrë:

Në grafin në figurë janë paraqitur gjatësitë e rrugëve të cilat lidhin dhjetë qytete. Duke përdorur algoritmin Kruskal, të gjendet pema lidhëse minimale duke filluar nga *A.* Vizatoni pemën lidhëse minimale dhe caktoni peshën e saj.



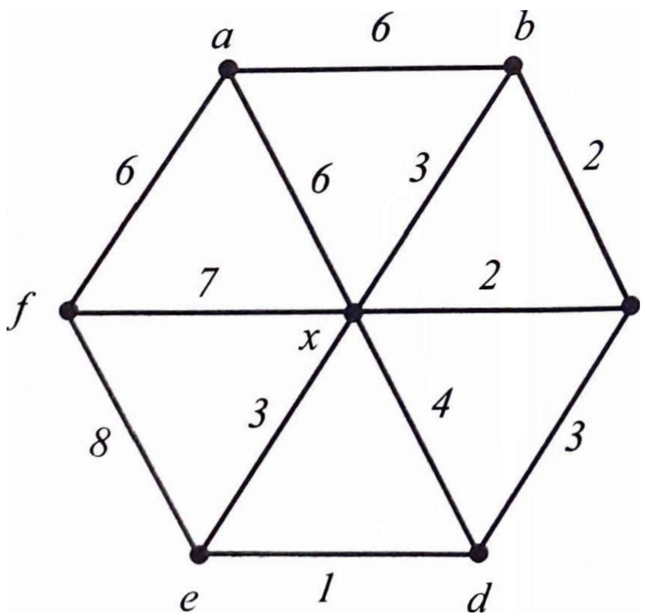
Zgjidhje. Pasi të formohet tabela fitojmë pemën minimale me peshë $\omega(T) = 37$.

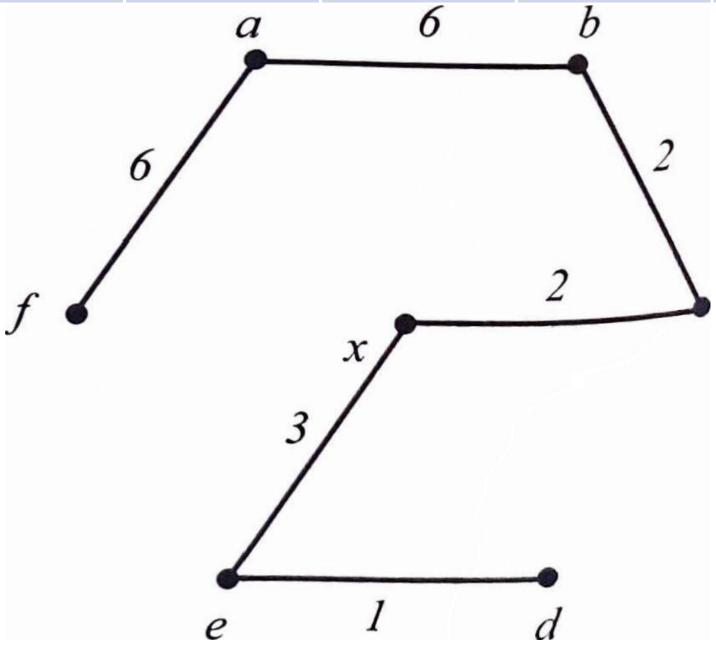


Detyrë:

Le të jetë G grafi me peshë, bashkësia e nyjeve e të cilit është $\{x, a, b, c, d, e, f\}$. Degët dhe pesha e tyre janë dhënë me anë të tabelës. Vizatoni grafin dhe gjeni pemën lidhëse minimale për G.

xa	xb	xc	xd	xe	xf	ab	bc	cd	de	ef	fa
6	3	2	4	3	7	6	2	3	1	8	6

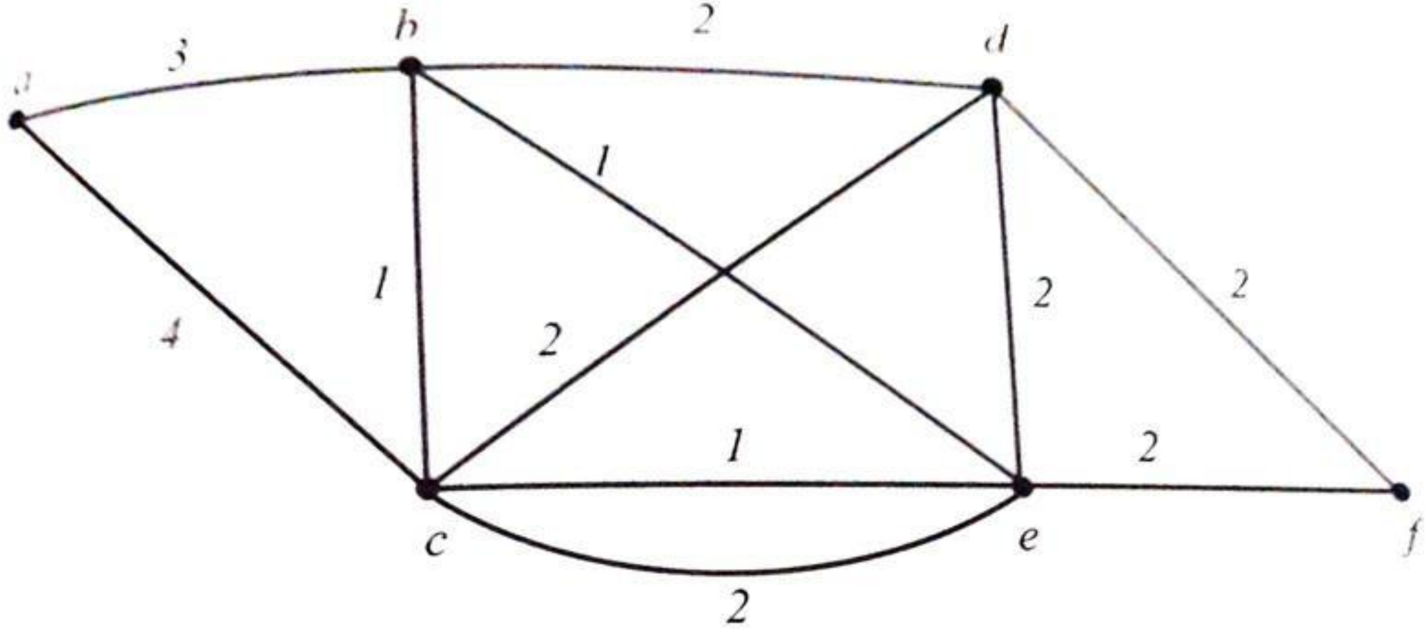




Zgjidhje.

$$\omega(T) = 20.$$

Detyrë: Duke zbatuar algoritmin Kruskal, të cakohet pema lidhëse minimale e grafit me peshë.



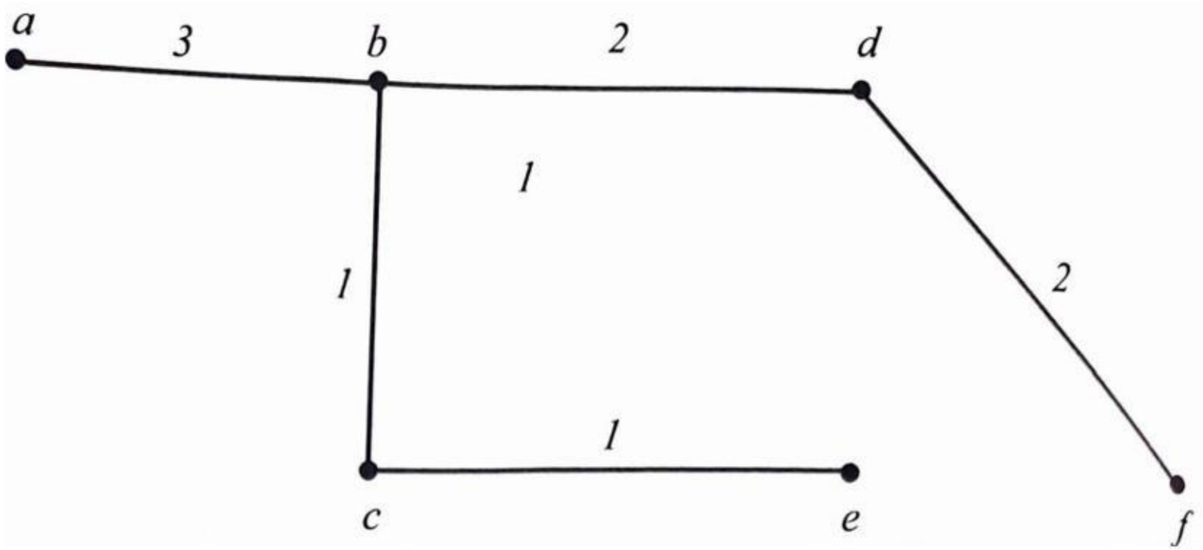
Zgjidhje.

Pesha	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	4
Dega	{b,c}	{b,e}	{c, e}	{b,d}	{c,d}	{d,e}	{d,f}	{e,f}	{c,f}	{a,b}	{a,c}

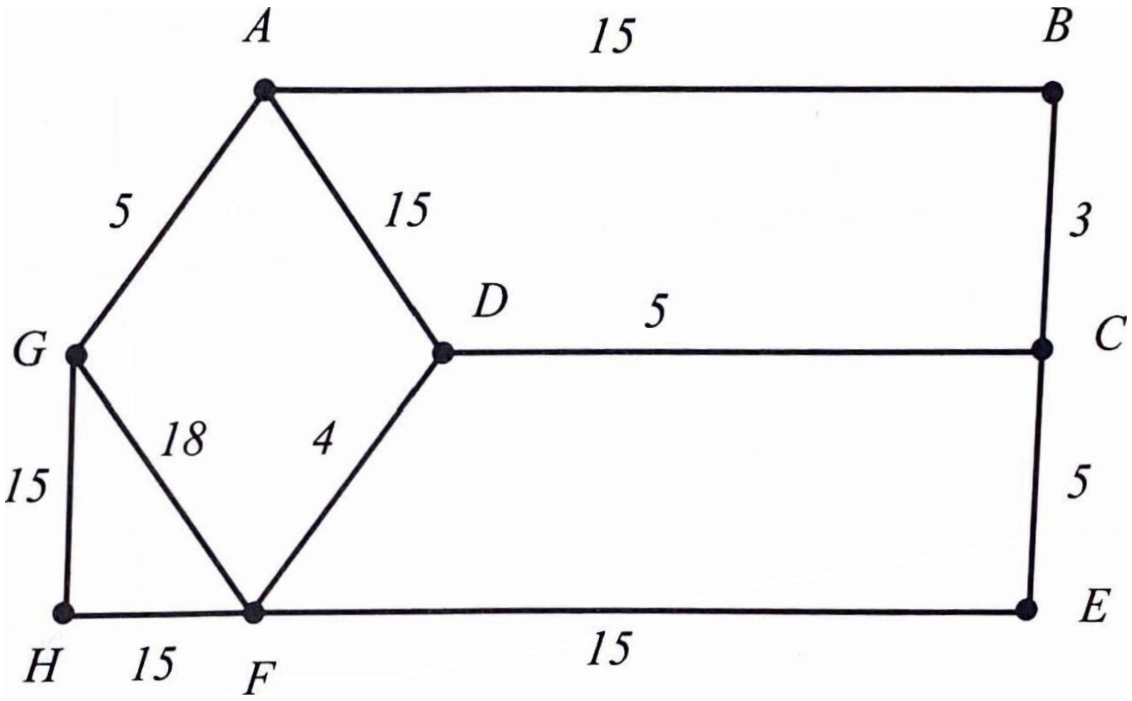
1. Zgjedhim degën $\{b, c\}$ me peshë minimale;
2. Dega tjetër me peshë minimale, që nuk formon cikël me degën $\{b, c\}$ është $\{c, e\}$;
3. Dega $\{b, e\}$ përjashtohet, sepse formon cikël me dy degët e para;
4. Dega $\{b, d\}$ përfshihet në pemë, sepse nuk formon cikël me degët e zgjedhura më parë;
5. Dega $\{c, d\}$ përjashtohet;
6. Dega $\{d, e\}$ përjashtohet;

7. Dega $\{d,\ f\}$ përfshihet në pemë, sepse nuk formon qark me degët e zgjedhura më parë;
8. Dega $\{e, f\}$ përjashtohet;
9. Dega $\{c, f\}$ përjashtohet;
10. Dega $\{a,\ b\}$ përfshihet në pemë, sepse nuk formon cikël me deget e zgjedhura më parë;
11. Dega $\{a, c\}$ përjashtohet.

Pra, kemi fituar pemët me degët: $\{b, c\}, \{c, e\}, \{b, d\}, \{d, f\}$ *dhe* $\{a, b\}$ Pesha e kësaj peme është 9.



Detyrë: Duke zbatuar algoritmin Kruskal të gjendet pema lidhëse minimale në figurën e mëposhtme. Vizatoni pemën e fituar dhe radhitni degët në tabelë sipas peshës.



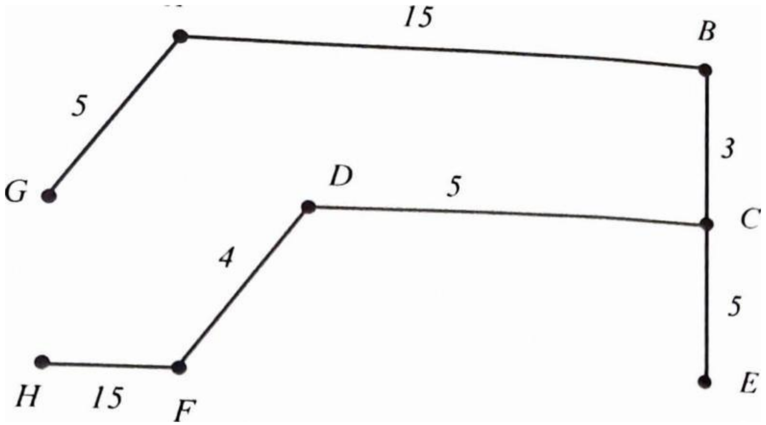
Zgjidhje. Radhisim degët e grafit në tabelë sipas peshës së tyre.

Pesha	3	4	5	5	5	15	15	15	15	15	18
Dega	(B,C)	(D,F)	(A,G)	(C,D)	(C,E)	(A,B)	(A,D)	(F,H)	(G,H)	(E,F)	(F,G)

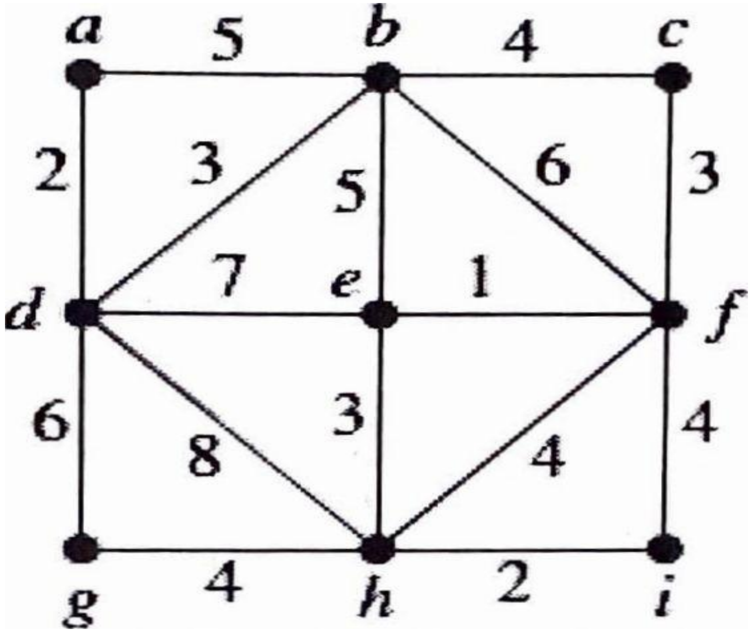
Zgjedhim degët *(B, C), (D, F), (A, G), (C, D), (C, E).*

Në vazhdim kemi mundësinë të zgjedhim vetëm njërën nga *(A, B)* dhe *(A,D)* sepse përzgjedhja e të dyjave formon cikël. Supozojmë se zgjedhim *(A,B).*

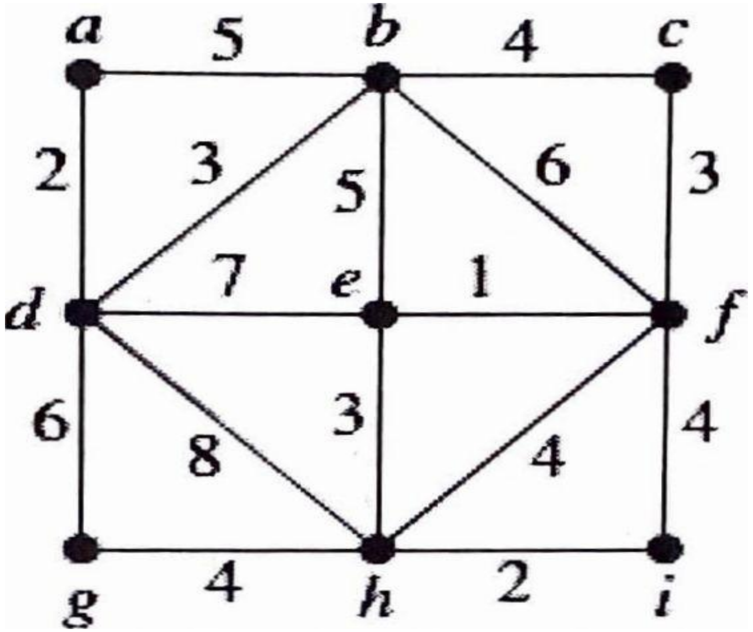
Ngjajshëm mund të zgjedhim vetëm njërën nga *(G,H)* dhe *(F,H).* Supozojmë se zgjedhim *(F,H).* Kështu fitojmë pemën lidhëse minimale me peshë $\omega(T) = 52$.



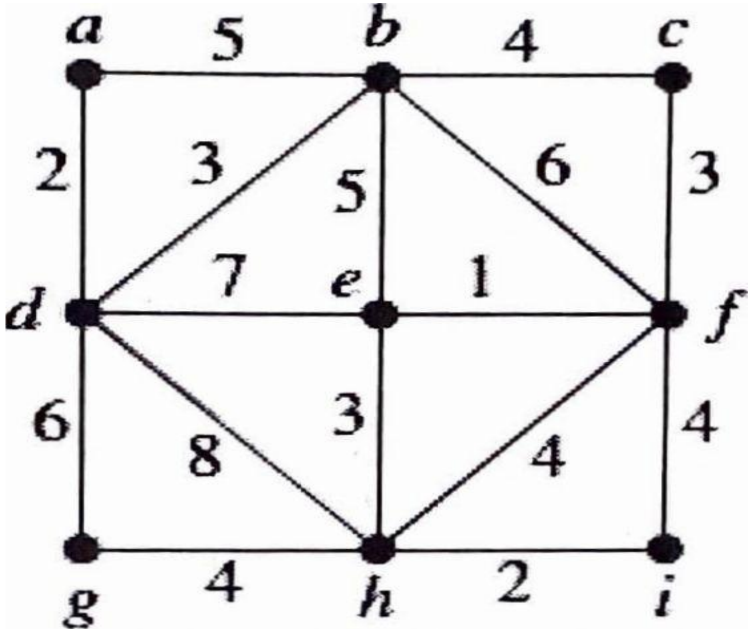
Detyrë. Për grafin e mëposhtëm, përdomi algoritmin Prim-as për të gjetur pemën lidhëse minimale dhe tregoni sa është pesha e tij.



Zgjidhje. Fillojmë me degën $\{e, f\}$ me peshë minimale. Dega me peshë më të vogël e lidhur me pemën e konstruktuar deri më tani është $\{c, f\}$ dhe $\{e, h\}$, secila me peshë 3, ashtu që ia bashkangjisim njërën nga këto degë pemës. Zgjedhim, për shembull degën $\{c, f\}$. Në vazhdim shtojmë degën $\{e, h\}$, mandej degën $\{h, i\}$, e cila ka peshën më të vogël dhe e përshtatshme për shtim në vazhdim. Vazhdojmë të shtojmë degët në këtë radhitje: $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{a, d\}$ dhe $\{g, h\}$. Pesha totale e pemës lidhëse minimale është 22.

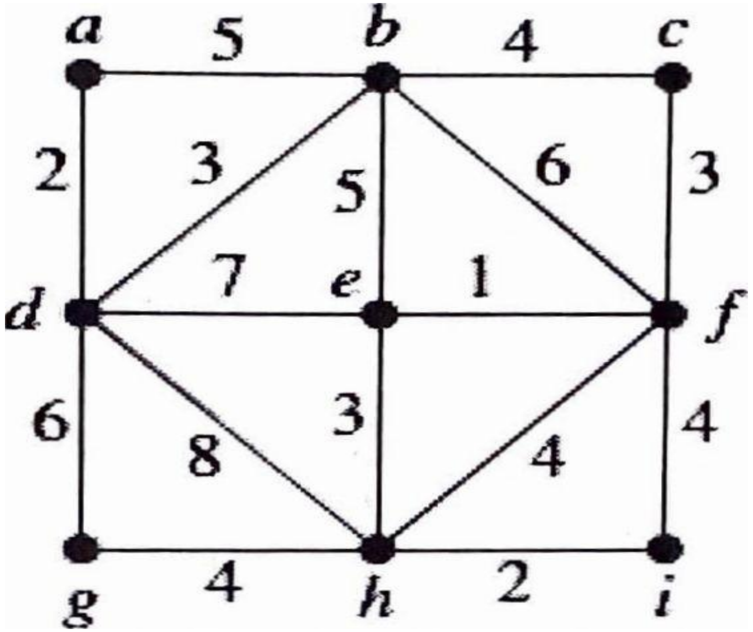


Detyrë. Për grafin e dhënë, përdorni algoritmin Kruskal për të gjetur pemën lidhëse minimale dhe tregoni sa është pesha e tij.

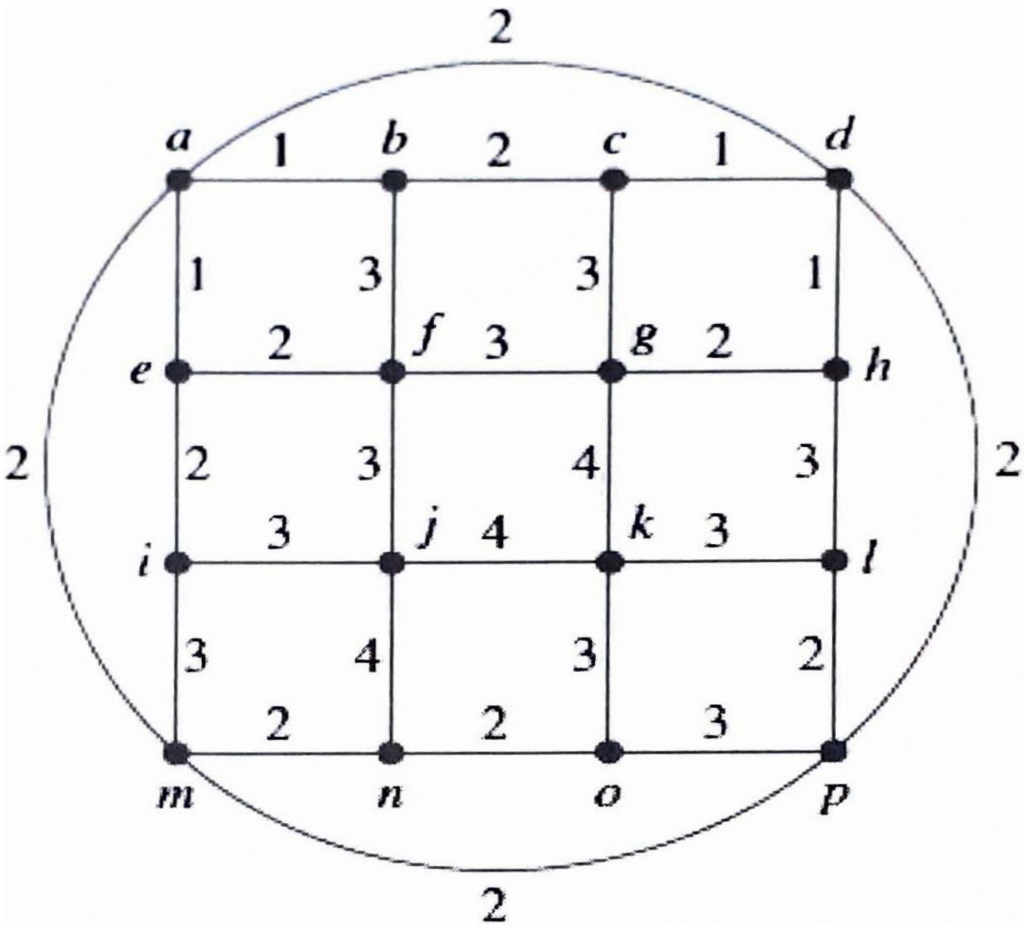


Zgjidhje.

Degët janë shtuar në radhitjen si vijon: $\{e, f\}$, $\{a, d\}$, $\{h, i\}$, $\{b, d\}$, $\{c, f\}$, $\{e, h\}$, $\{b, c\}$, dhe $\{g, h\}$ (me algoritmin Kruskal, në çdo hap shtojmë degën me peshën më të vogël por që nuk do të përfundojë një cikël të thjeshtë). Pesha totale e pemës lidhëse minimale është 22.



Detyrë. Për grafin e dhënë gjeni pemën lidhëse maksimale.



Zgjidhje. Ekzistojnë disa mundësi të pemës lidhëse maksimale. Njëra nga këto përmban degët: $\{a, d\}$, $\{b, f\}$, $\{c, g\}$, $\{d, p\}$, $\{e, f\}$, $\{f, j\}$, $\{g, k\}$, $\{h, l\}$,

$\{i, j\}, \{i, m\}, \{j, k\}, \{j, n\}, \{k, l\}, \{k, o\}$ dhe $\{o, p\}$, e fituar duke zgjedhur në çdo hap degën me peshë më të madhe, e cila nuk formon cikël.