Universiteti Publik “Kadri Zeka”, Gjilan

Fakulteti i Shkencave Kompjuterike

Lënda: Teoria e Grafeve

Tema:

Pemët (Drunjët) dhe Pyjet

Pemët dhe pyjet:

- **Kuptime bazë,**
- **Pohimet e njëvlershme mbi grafin,** • **Pemët e mbyllura nga poshtë (lart),**
- **Lema mbi pemën normale.**

- **PERKUFIZIM**

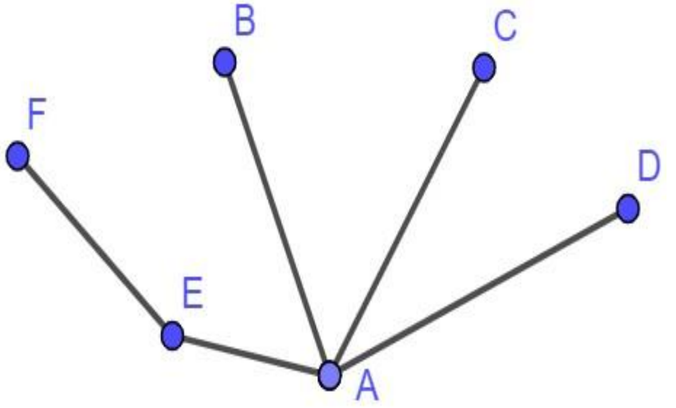
Pemë quhet grafi i paorijentuar i lidhur që nuk ka asnjë cikël.

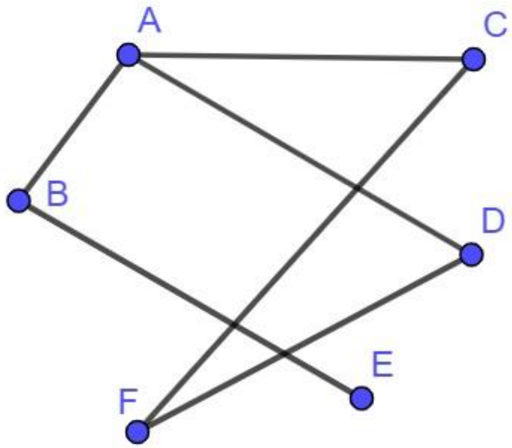
Meqë pema nuk përmban ndonjë cikël, ajo nuk përmban degë të shumëfishta dhe as laqe.

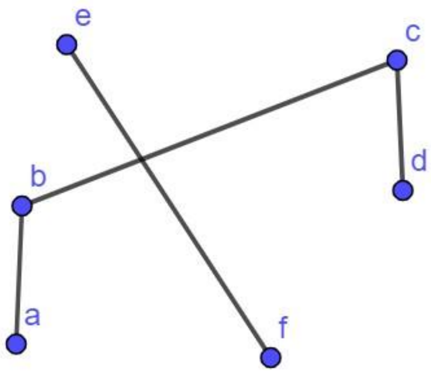
Pema është graf i thjeshtë.

Pemët (Drunjët) dhe Pyjet

Shembull. Tregoni se cili nga grafët e mëposhtëm është pemë dhe cili jo.

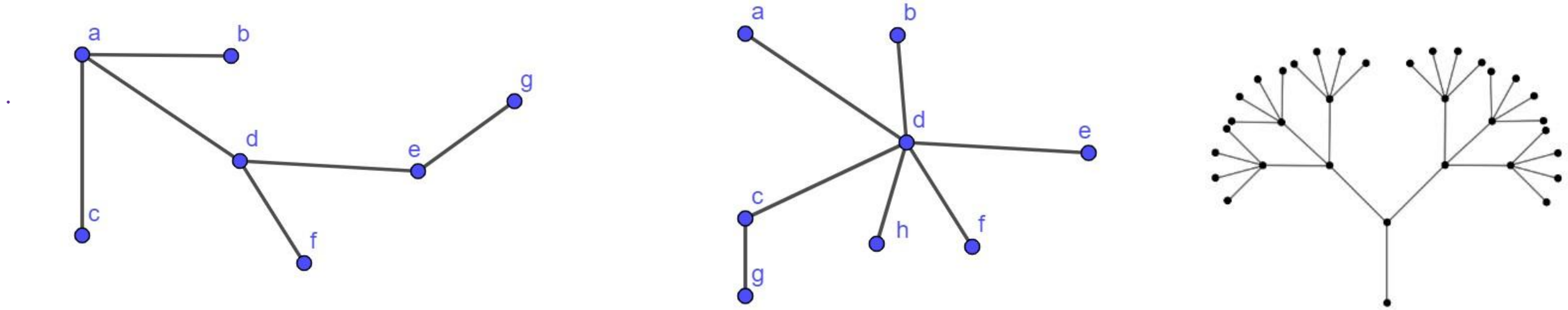




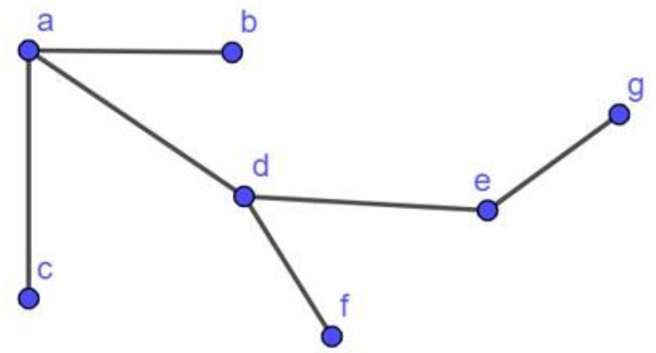


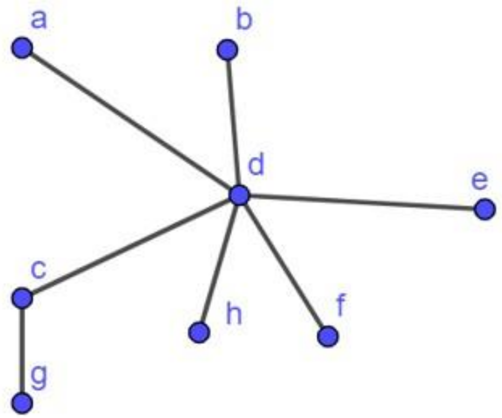
PËRKUFIZIM. Grafi që përbëhet nga komponentet jo të lidhura që nuk përmbajnë asnjë cikël quhet **pyll**.

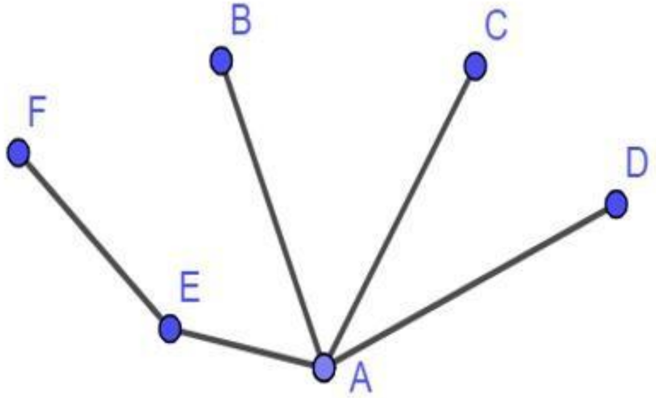
Kështu pylli është graf komponentët e të cilit janë pemë.



Figurën e meposhtme mund ta konsiderojmë si një graf të përbërë nga disa pemë, dhe ky graf është shembull i një pylli.



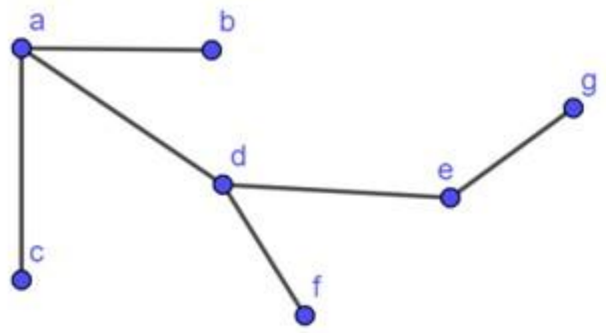


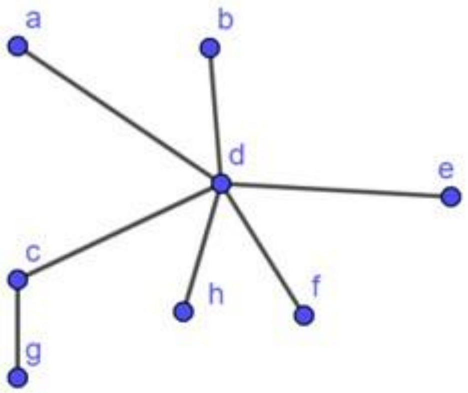


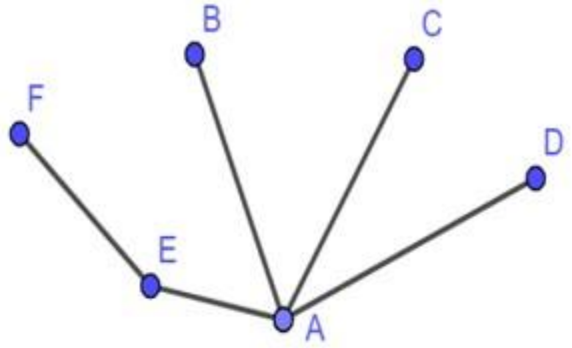
Nyjet e pemës që kanë valencë 1 quhen **gjethe.**

Çdo pemë jo triviale ka një gjethe.

Në qoftë se nga një pemë largohet (bie) një gjethe ajo mbetet përsëri pemë.

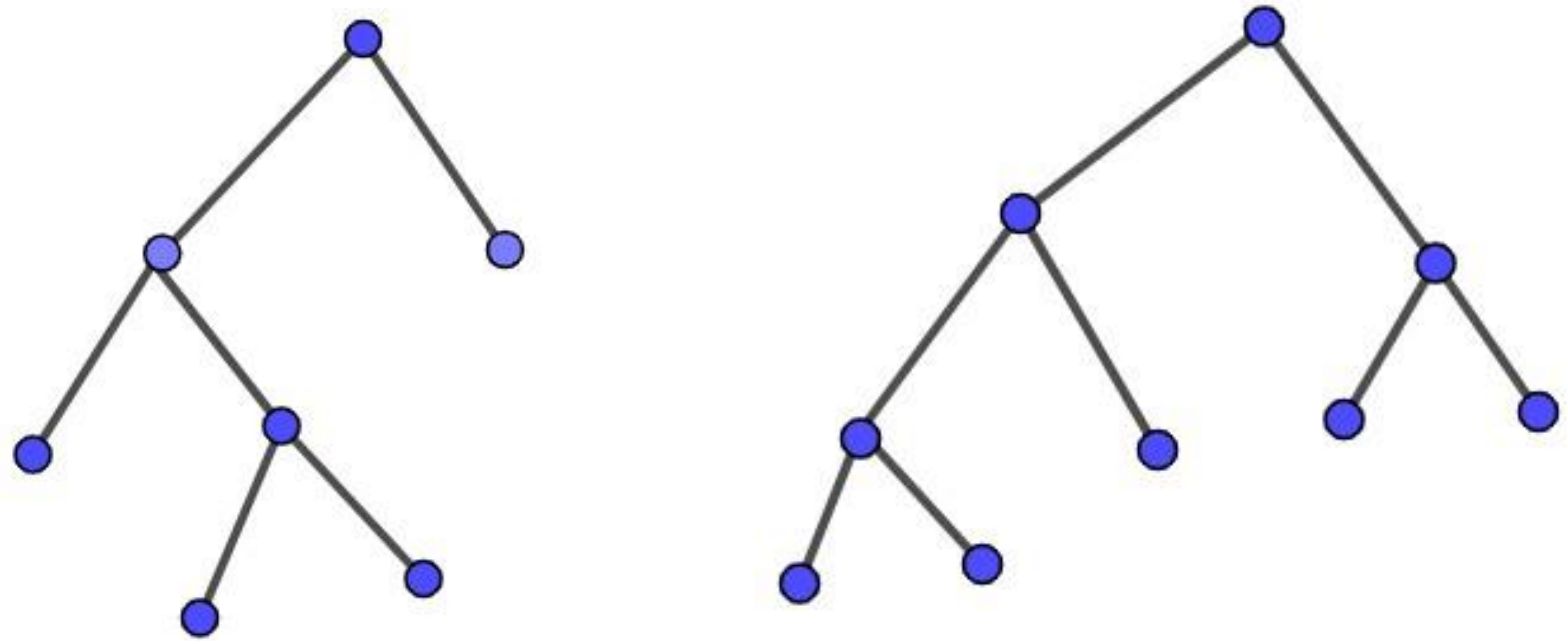




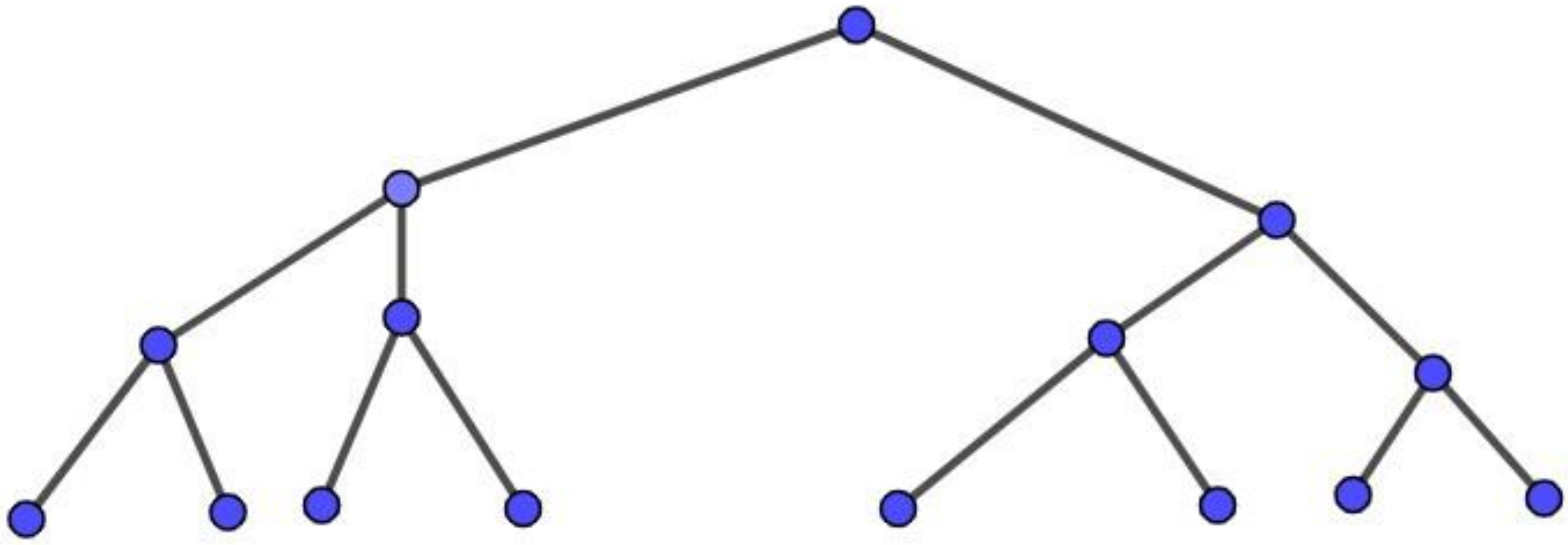


- Më thjeshtë, një graf pemë është një bashkësi segmentësh të bashkuar në skajet e tyre dhe ku nuk ka laqe apo cikle, grafi pemë shënohet me T.
- Ai është i thjeshtë, i paorientuar, i lidhur ose pyll i lidhur.
- Një pemë me n nyje ka $n-1$ degë.
- Pikat e bashkimit njihen si **furka** (pirun) kurse segmentët si degë.
- Skajet e fundit të degëve të fundit njihen si **gjethe.**

- Pema me dy degë në secilën furkë dhe me një ose dy gjethe në secilën degë quhet **pemë binare**.
- Shikoni figurën me pemë të ndryshme.



1. Gjeni numrin e nyjeve duke i numëruar për pemën e mëposhtme:

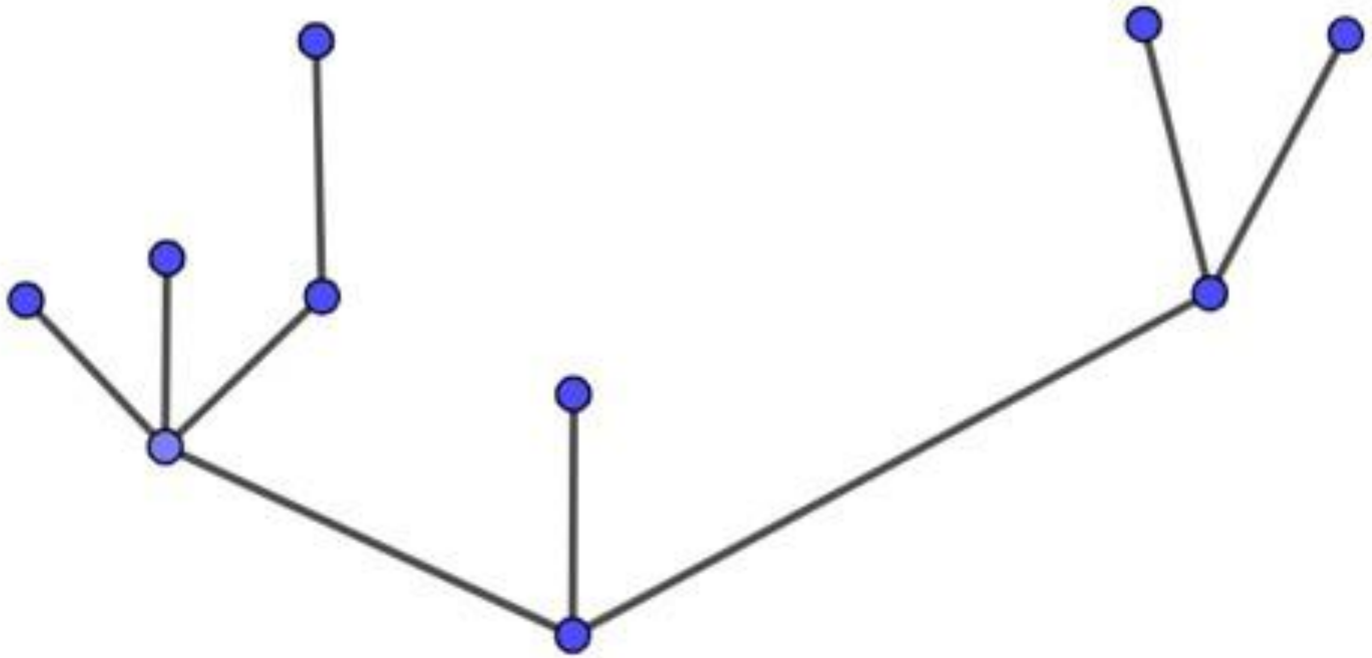


- Pemët gjejnë zbatime të ndryshme në fusha të ndryshme duke përfshirë shkencën kompjuterike, numërimin e hidrokarbureve të ngopura, studimin e qarqeve elektrike etj.
- **TEOREMË.** Një graf i padrejtuar është pemë atëhere dhe vetëm atëhere kur në të ka vetëm një shteg të thjeshtë midis çdo dy nyjeve.

- **Rrjedhim .** Grafi i lidhur me n nyje është pemë atëhere dhe vetëm atëhere kur ai ka $n-1$ degë.
- **PËRKUFIZIME.(të tjera)**. Një nyje e një peme e shqyrtuar (vlerësuar) në mënyrë të posaçme (speciale) quhet **rrënjë** e asaj peme.
- Pema $\boldsymbol{T}$ me rrënjë të fiksuar $\boldsymbol{r}$ quhet **pemë e rrënjosur**.

- **Pema e rrënjosur** është pema në të cilën një nyje është caktuar si rrënjë dhe drejtimi i çdo nyje përcaktohet nga rrënja (ose: duke u nisur nga rrënja).

  Shikoni figurën.



Pemë e thjeshtë

Terminologjia për pemët ka origjinë botanike dhe gjenealogjike.

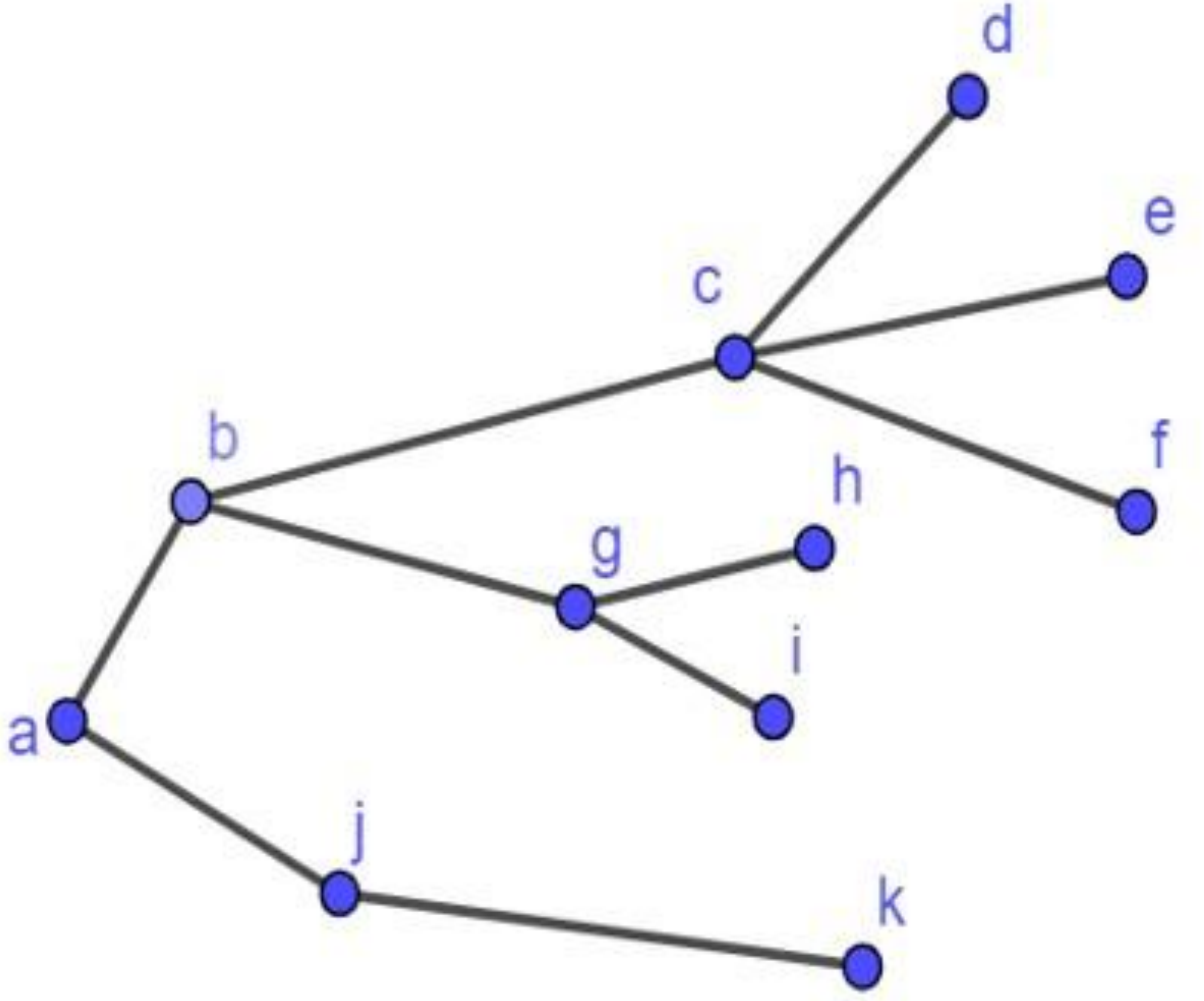
Terminologjia për pemët ka origjinë botanike dhe gjenealogjike.

- Le të supozojmë se T është një pemë e rrënjosur.
- Në qoftë se $\boldsymbol{v}$ është një nyje në T, por jo rrënja, atëherë **prind i** $\boldsymbol{v}$ është nyja e vetme u për të cilën ka një degë të drejtuar nga u në v.
- Kur u është prind i v, atëhere v quhet **fëmijë** i u.
- Nyjet që kanë të njëjtin prind quhen **vëllezër dhe motra**.

- **Para-ardhës** (stërgjyshë) të një nyje të ndryshme nga rrënja janë nyjet në shtegun nga rrënja për tek kjo nyje ku kjo nyje përjashtohet, por përfshihet rrënja (d.m.th., prindi i nyjes, prindi i prindit të nyjes dhe kështu me radhë deri sa të arrihet rrënja).
- **Pasardhës** të një nyje v janë ato nyje të cilat e kanë nyjen v para-ardhës (stërgjysh).
  - Një nyje e pemës quhet **nyje gjethe (nyje e jashtme)** në qoftë se ajo nuk ka fëmijë.

- Nyjet që kanë fëmijë quhen **nyje të brendshme**.
- Në qoftë se a është një nyje e pemës , **nën-pemë** me nyjen a si rrënjë të saj është nëngrafi i pemës që përbëhet nga nyja a , nga pasardhësit e saj dhe të gjitha degët incidente me këto nyje.

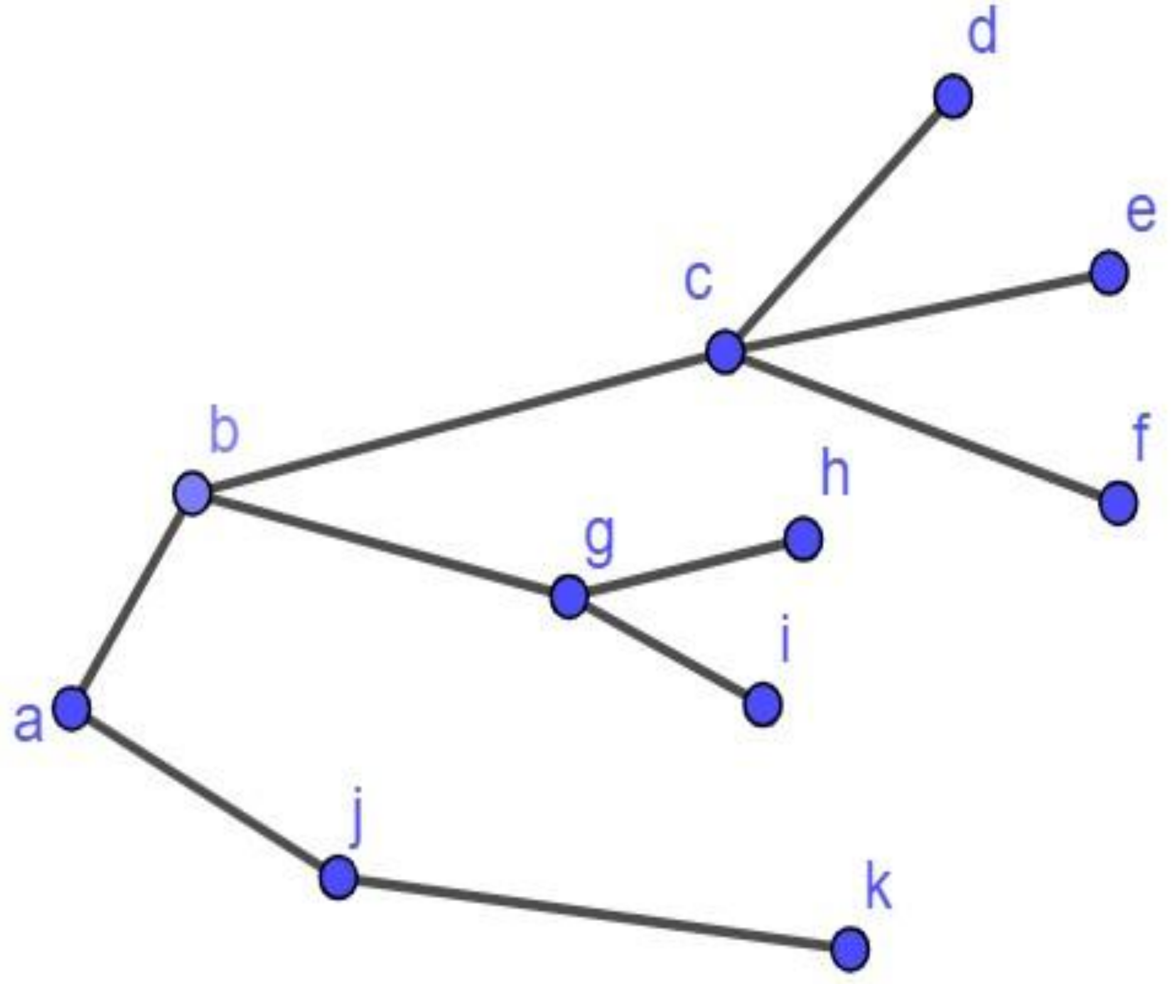
Shembull. Për pemën e rrënjosur (me rrënjë **a**) në figuren e dhënë, të dallohen prindët, , fëmijët, para-ardhësit, pas-ardhësit, gjethet, nën-pemët. Sa paraardhës ka?



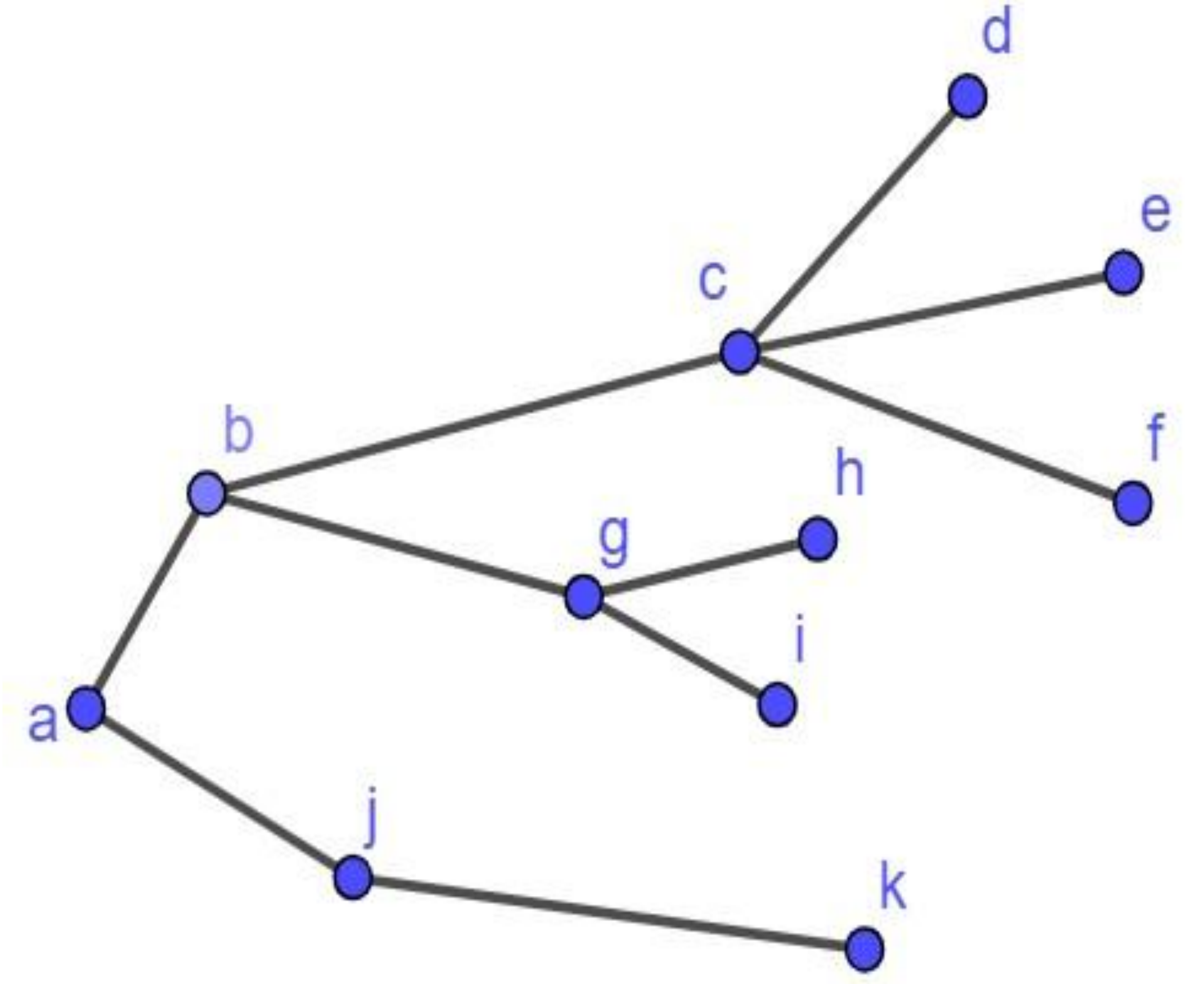
Pemë e rrënjosur

Zgjidhje.

- Nyjet d, e, f janë fëmijë të prindit c.
- Para-ardhës të këtyre fëmijëve janë c, b dhe a.
- Pas-ardhës të nyjes b janë nyjet c, d, e dhe f ; ka edhe të tjera??



- Nyjet d, e, f, h, i, k janë gjethe ose nyje të jashtme.
- Një nën-pemë është ajo me rrënjë b, bashkë me fëmijët e saj c dhe g dhe fëmijët e këtyre dhe degët që i lidhin këto nyje së bashku, etj.



VETITË E PEMËVE

PËRKUFIZIM. Një pemë e rrënjosur quhet **pemë $\boldsymbol{m}$-are** në qoftë se çdo nyje e brendshme nuk ka më shumë se $\boldsymbol{m}$ fëmijë.

Një pemë quhet **pemë $\boldsymbol{m}$-are e plotë** në qoftë se çdo nyje e brendshme ka saktësisht $\boldsymbol{m}$ fëmijë.

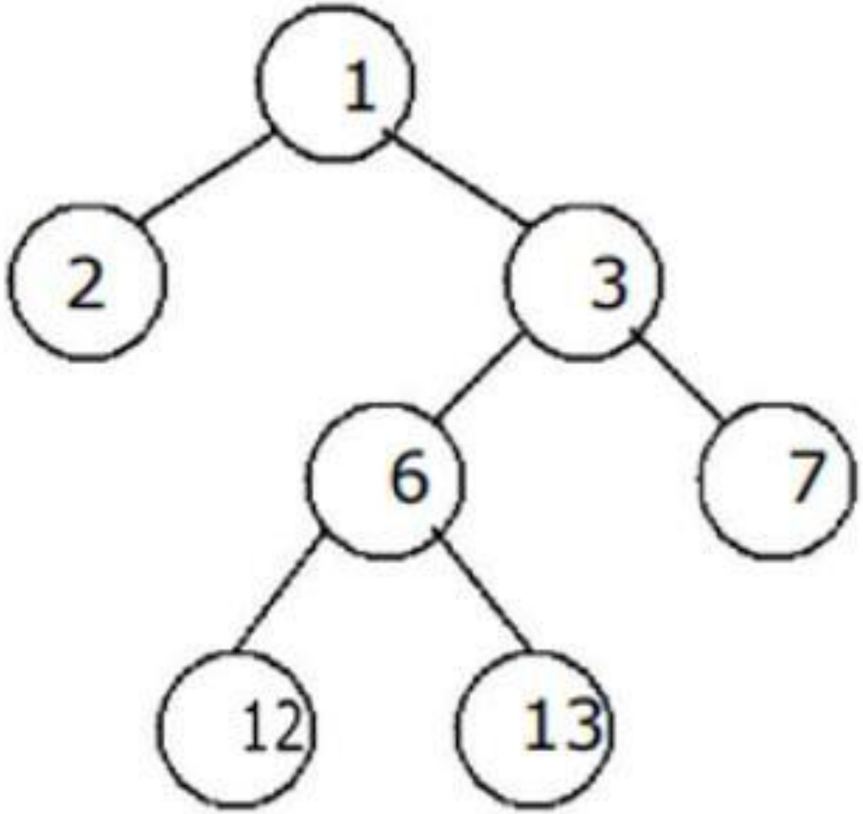
TEOREMË.

Një pemë ***m***-are e plotë me ***i*** nyje të brendshme përmban ***n=mi+1*** nyje.

Vërtetim: Çdo nyje përveç rrënjës, quhet fëmijë e një nyje të brendshme. Meqë secila nga i nyjet e brendshme ka ***m*** fëmijë, atëhere kemi ***mi*** nyje në pemë përveç rrënjës. Kështu që pema ka gjithsej ***n=mi+1*** nyje.//

Supozojmë se ***T*** është një pemë ***m***-are e plotë. Le të jenë ***i*** numri i nyjeve të brendshme dhe ***1*** numri i gjetheve të pemës, kurse ***n*** është numri i nyjeve. Nëse njihet njëri nga këta tre numra dy të tjerët përcaktohen lehtë.

Shembull . Për pemën e dhënë zbatoni teoremën e mësipërme



Zgjidhje.

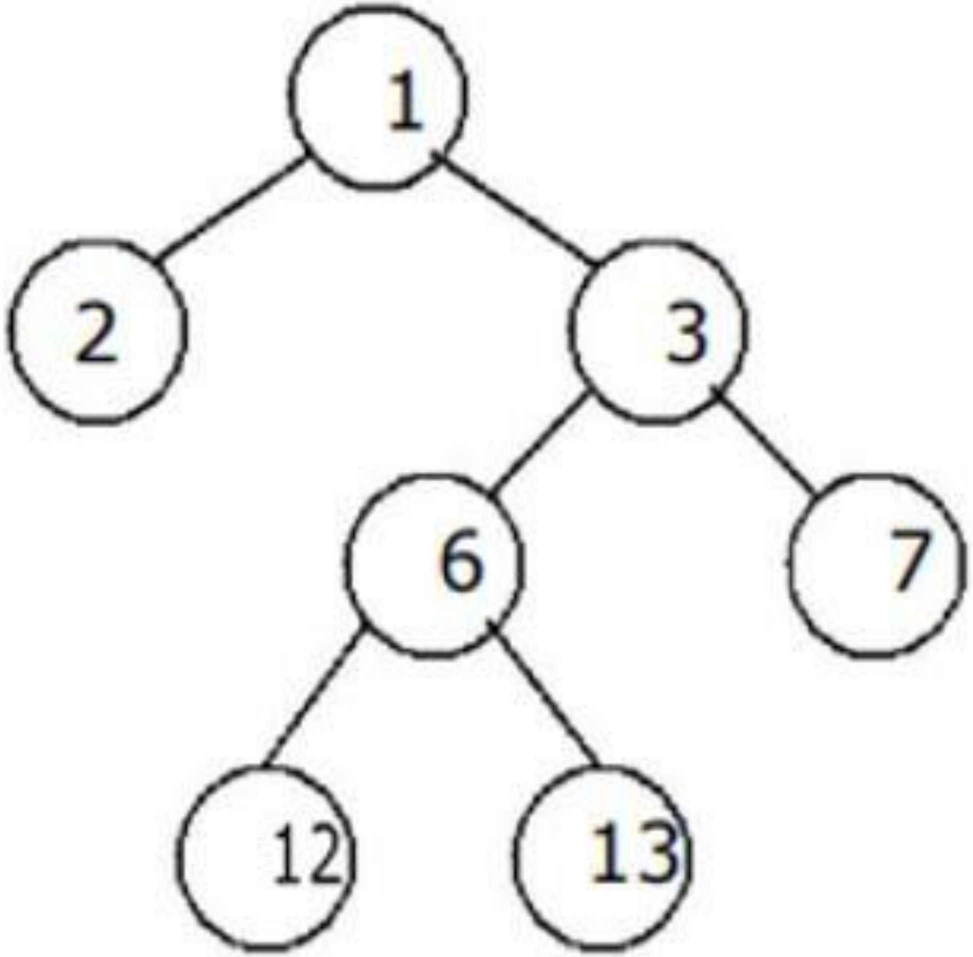
Grafi është binar dmth $m = 2$.

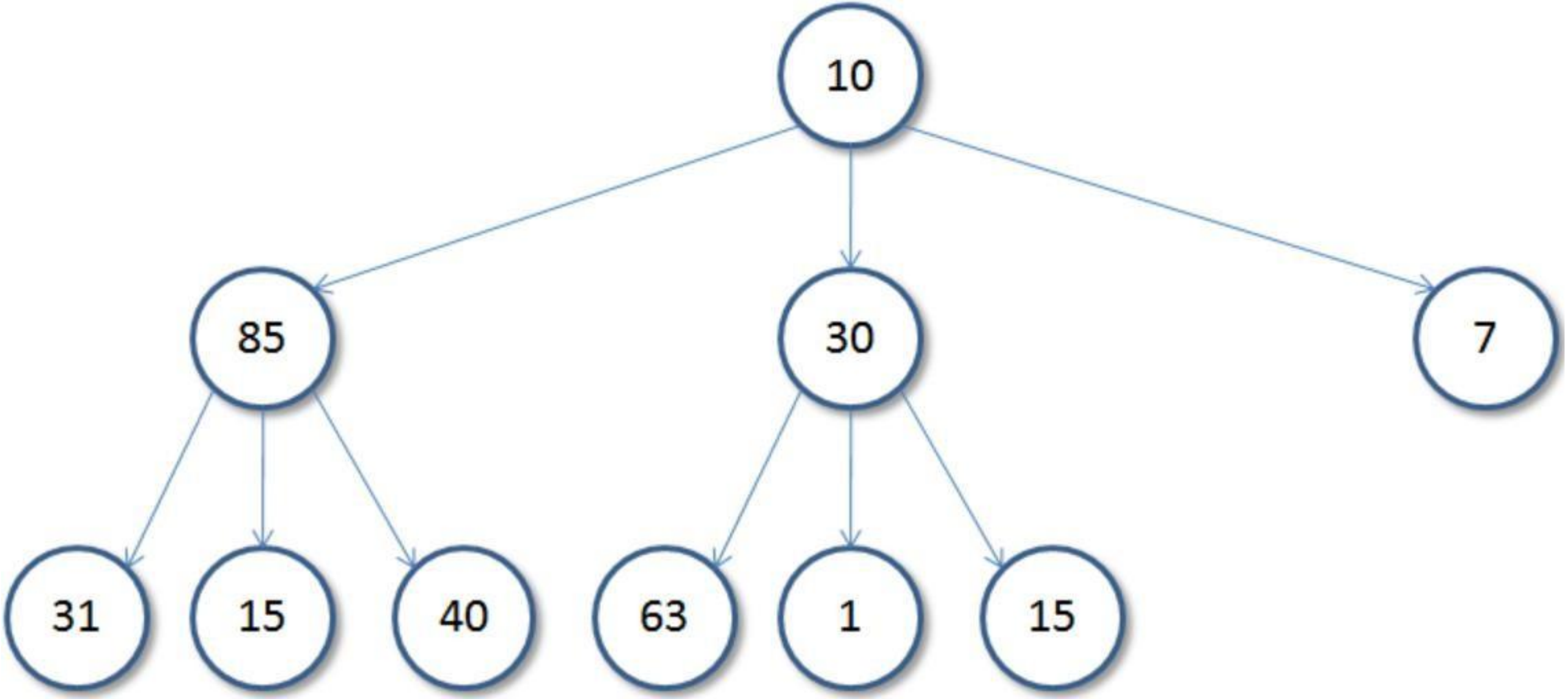
Nyje të brendshme për grafin e dhënë janë nyjet me etiketa 1,3 dhe 6 dmth $i = 3$. Atëherë numri i përgjithshëm i nyjeve të këtij grafi llogaritet me formulën $n = mi + 1$.

Dmth grafi binar i dhënë si në figurë ka gjithësej

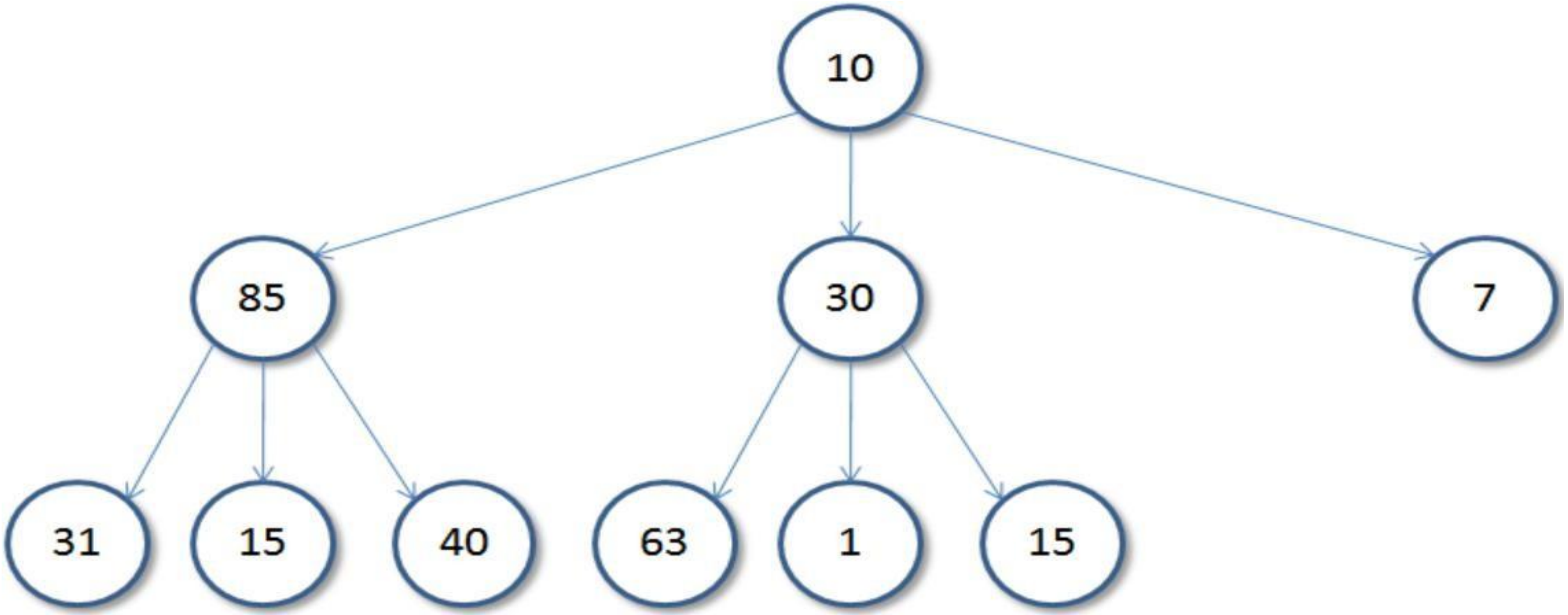
$n = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ nyje.

Shembull. Për pemën e dhënë zbatoni teoremën e mësipërme




10
85
30
7
31
15
40
63
1
15

Zgjidhje. Grafi është binar dmth $m = 3$**.** Nyje të brendshme për grafin e dhënë janë nyjet me etiketa 10,85 dhe 30 dmth $i = 3$. Atëherë numri i përgjithshëm i nyjeve të këtij grafi llogaritet me formulën $n = mi + 1$. Dmth grafi ternar i dhënë si në figurë ka gjithësej $n = 3 \cdot 3 + 1 =$10 nyje.



TEOREMË

Një pemë me ***n*** nyje ka ***n-1*** degë.

Vërtetim: Përdoret arësyetimi induktiv.

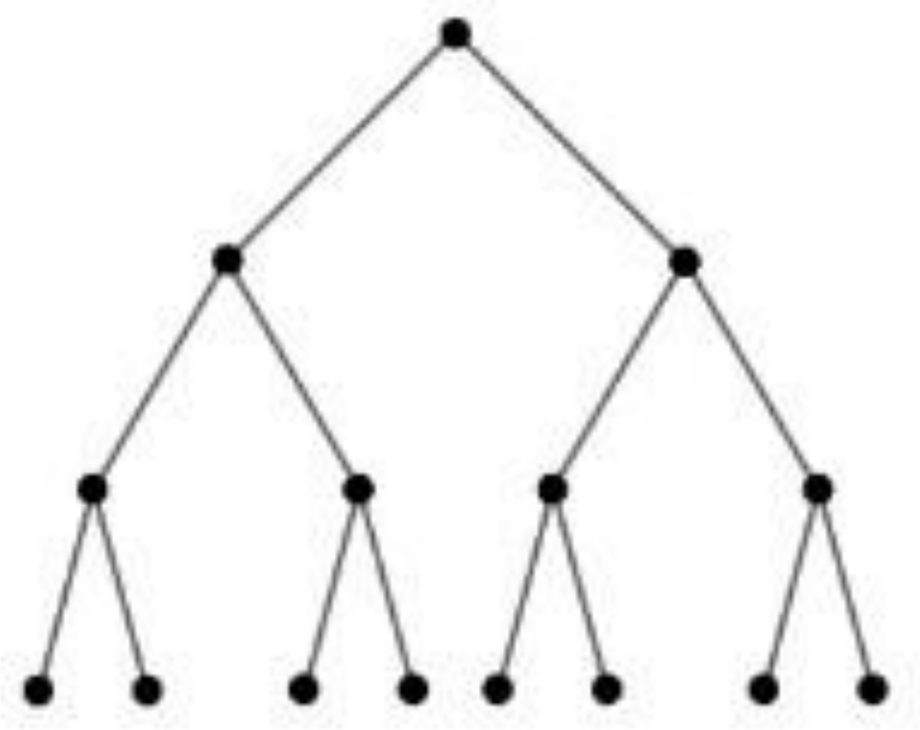
Hapi bazë: n = 1 , pema nuk ka degë dhe pohimi është i vërtetë.

Hapi induktiv: Hipoteza induktive pohon se çdo pemë me ***k*** nyje ka ***k* –*1*** degë, ku ***k*** është numër i plotë pozitiv.

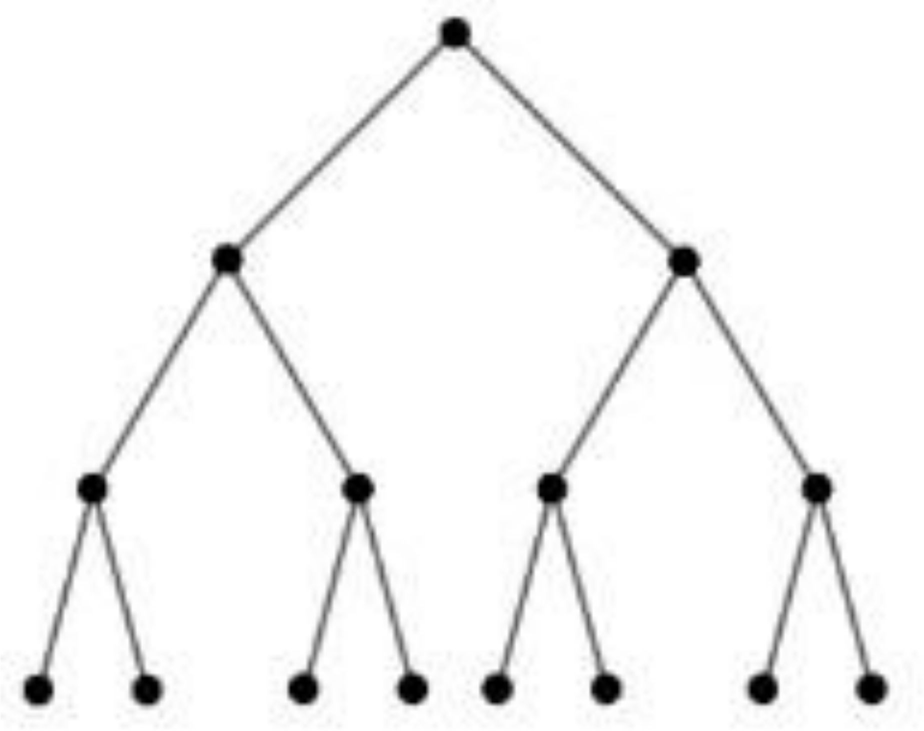
Supozojmë se një pemë ***T*** ka ***k + 1*** nyje dhe le të jetë nyja ***v*** një gjethe e pemës (ajo ekziston sepse bëhet fjalë për pemë të fundme) kurse ***w*** prindi i **v**. Po të largojmë nga ***T*** nyjen ***v*** dhe degën që lidh ***w*** me ***v*** prodhohet një pemë T' me ***k*** nyje, sepse grafi është i lidhur dhe nuk ka asnjë cikël të thjeshtë. Nga supozimi T' ka ***k* – *1*** degë .

Që këtej rrjedh se $\boldsymbol{T}$ ka $\boldsymbol{k}$ degë meqë ka një më shumë se $\boldsymbol{T}'$ (degën që bashkon $\boldsymbol{v}$ dhe $\boldsymbol{w}$). Pohimi u vërtetua.//

Shembull. Tregoni sa degë i ka grafi i dhënë si në figurë



Zgjidhje. Grafi i dhënë ka n=15 nyje, që sipas teoremës do të ketë 15-1=14 degë.



TEOREMË. Pema ***m***-are e plotë:

I. me ***n*** nyje ka $\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{m}}$ nyje të brendshme dhe $\boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{(m-1)n+1}}{\boldsymbol{m}}$ gjethe.

II. me ***i*** nyje të brendshme ka $\boldsymbol{n = m\,i + 1}$ nyje dhe $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{(m-1)i} + \boldsymbol{1}$ gjethe

III. me $\boldsymbol{l}$ gjethe ka $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{(ml-1)}}{\boldsymbol{m-1}}$ nyje dhe $\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{l-1}}{\boldsymbol{(m-1)}}$ nyje të brendshme.

Vërtetim: Le të shënojmë me ***n*** numrin e nyjeve , ***i*** – numri i nyjeve të brendshme dhe $\boldsymbol{l}$ – numri i gjetheve në pemën **m**-are të plotë.

Vërtetësia e tri pjesëvë të kësajteoreme rrjedh nga barazimi $n = m\,i + 1$ një teoreme, sëbashku me barazimin $n = l + i$, i cili është i vërtetë sepse çdo nyje është ose një gjethe ose një nyje e brendshme (sasia e përgjithshme e nyjeve është sa shuma e numrit të nyjeve të brendshme me numrin e gjetheve). Duke zgjidhur sistemin e dy ekuacioneve:

$$n = l + i\,,$$

ቁ

$$n = m\,i + 1$$ Barazimet

e tjera vërtetohen me lehtësi.

Nivel (kat ose lartësi) i nyjes ***v*** në një pemë të rrënjosur quhet gjatësia e shtegut të vetëm nga rrënja deri te kjo nyje.

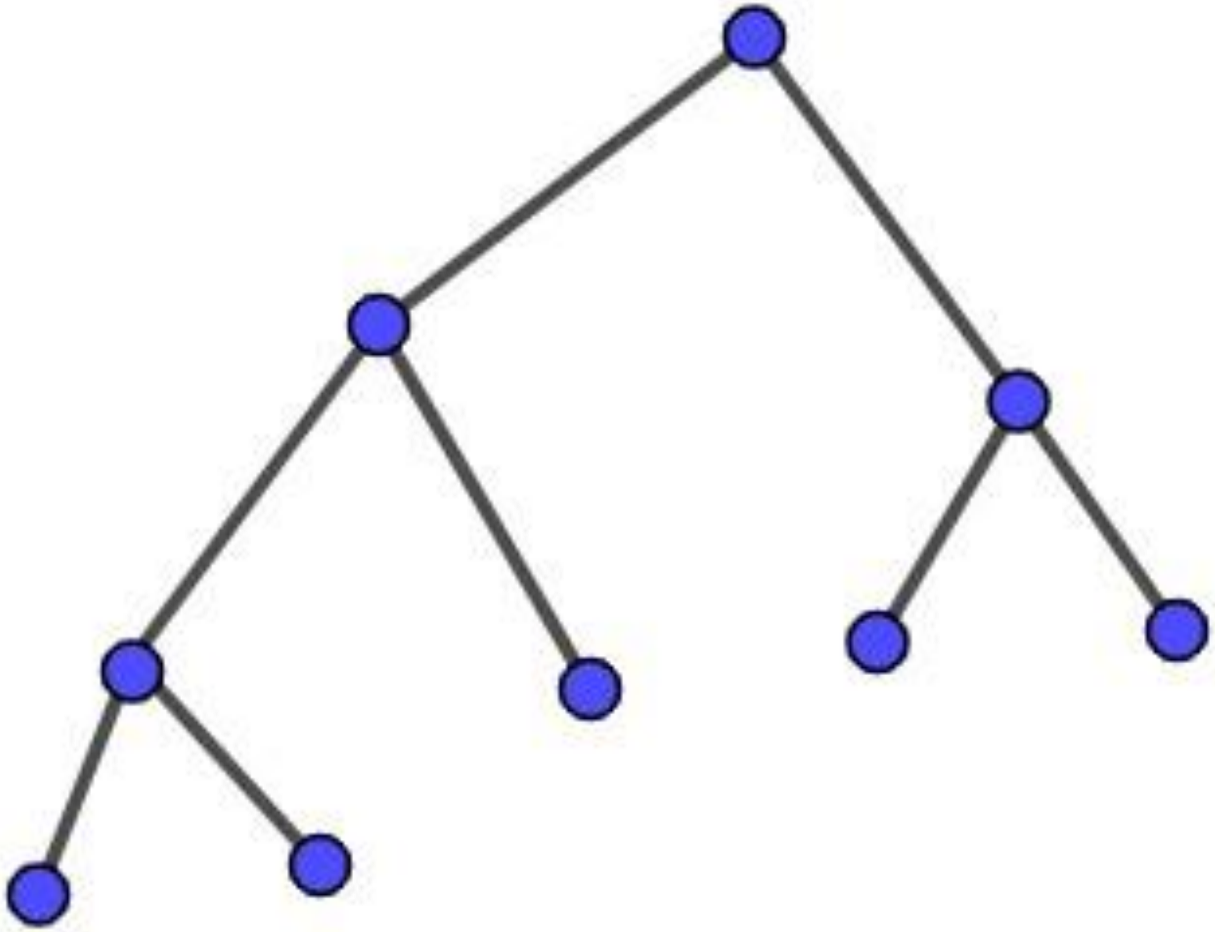
Niveli i rrënjës konsiderohet 0.

Lartësi e pemës së rrënjosur quhet maksimumi i niveleve të nyjeve ose, gjatësia e shtegut më të gjatë nga rrënja për tek nyja.

Një pemë ***m***-are me lartësi ***h*** quhet **e balancuar** në qoftë se të gjitha gjethet ndodhen në nivelet (katet) ***h*** ose ***h – 1***.

Shembull

. Grafi i dhënë si në figurë i ka 9 nyje. Gjeni nyjet e brendshme dhe nyjet e jashtme (gjethet) të këtij grafi.



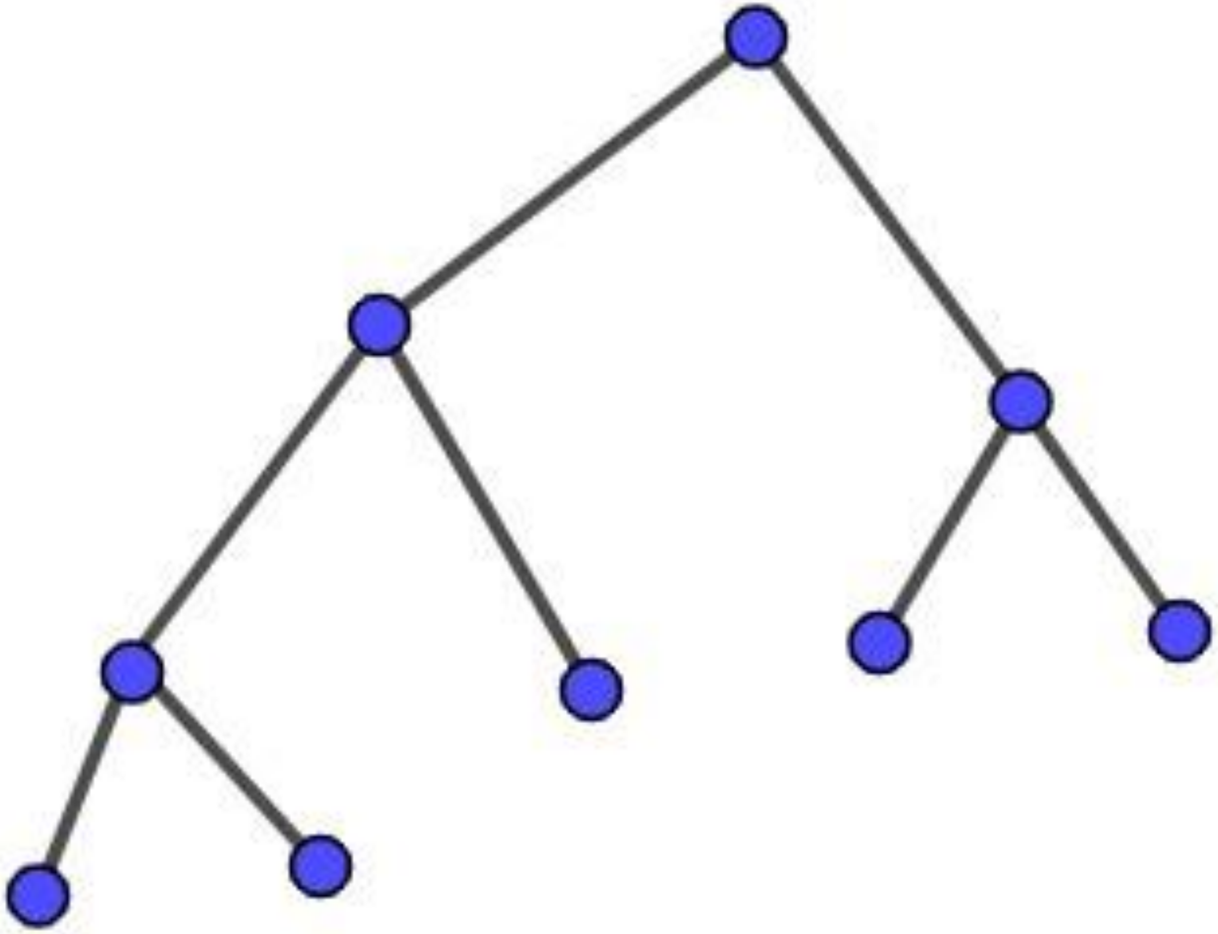
Shembull

Zgjidhje. Grafi i dhënë është i plotë, ka gjithësej $n = 9$ nyje dhe është graf binar që dmth $m = 2$, atëherë kemi

$$\boldsymbol{i = \frac{n-1}{2} = \frac{9-1}{\ } = 4\ m}$$

nyje të brendshme dhe

$$\boldsymbol{m{-}1 \cdot n{+}1}$$



$$\boldsymbol{l} = \frac{(\quad\quad)}{} =$$

$$\frac{(\quad\quad)\quad \boldsymbol{m}}{\mathbf{2-1 \cdot 9+1}}$$

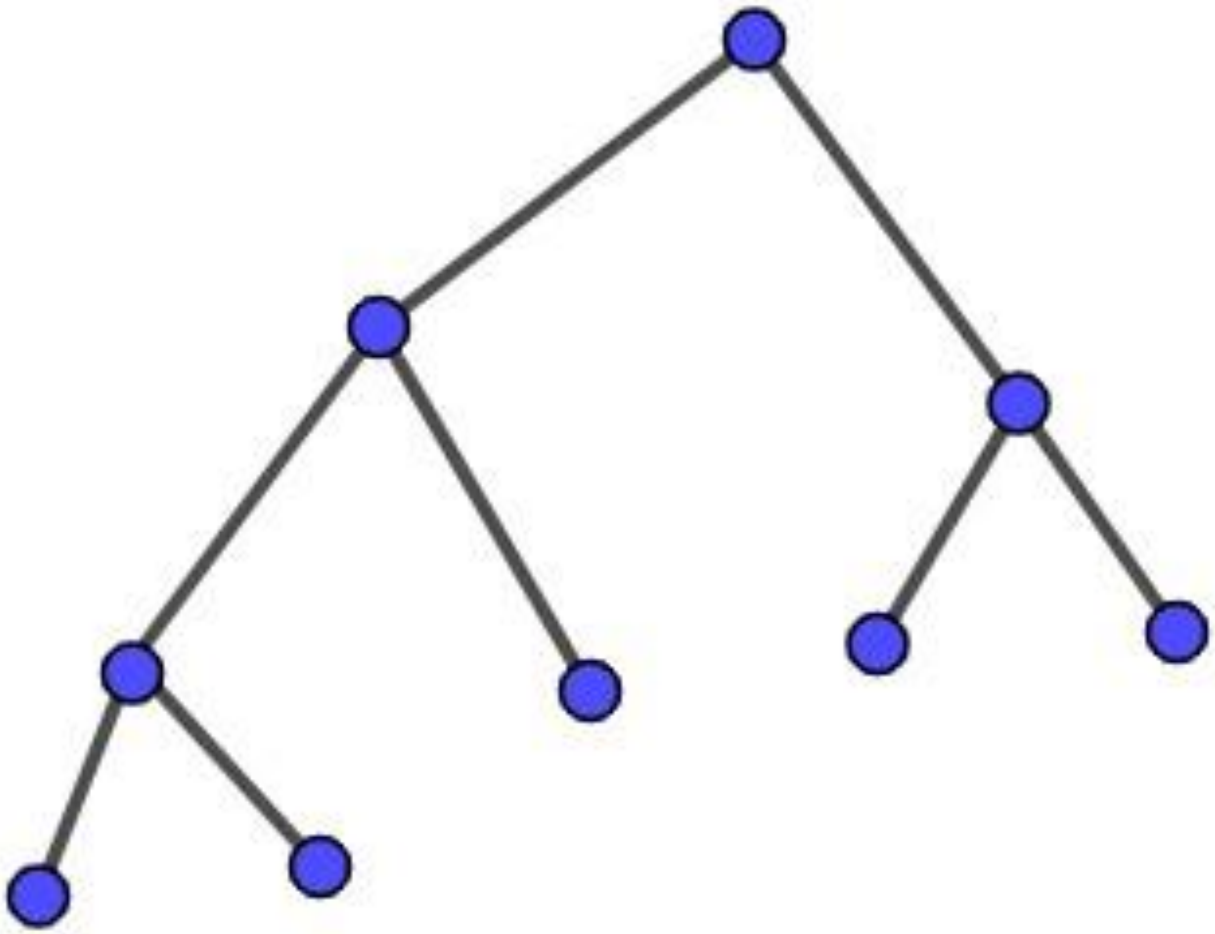
$$= \mathbf{5}$$

$$\mathbf{2}$$

nyje të jashtme (gjethe).

. Grafi i dhënë si në figurë i ka 4 nyje të brendshme. Gjeni të gjitha nyjet e grafit dhe nyjet e jashtme (gjethet).

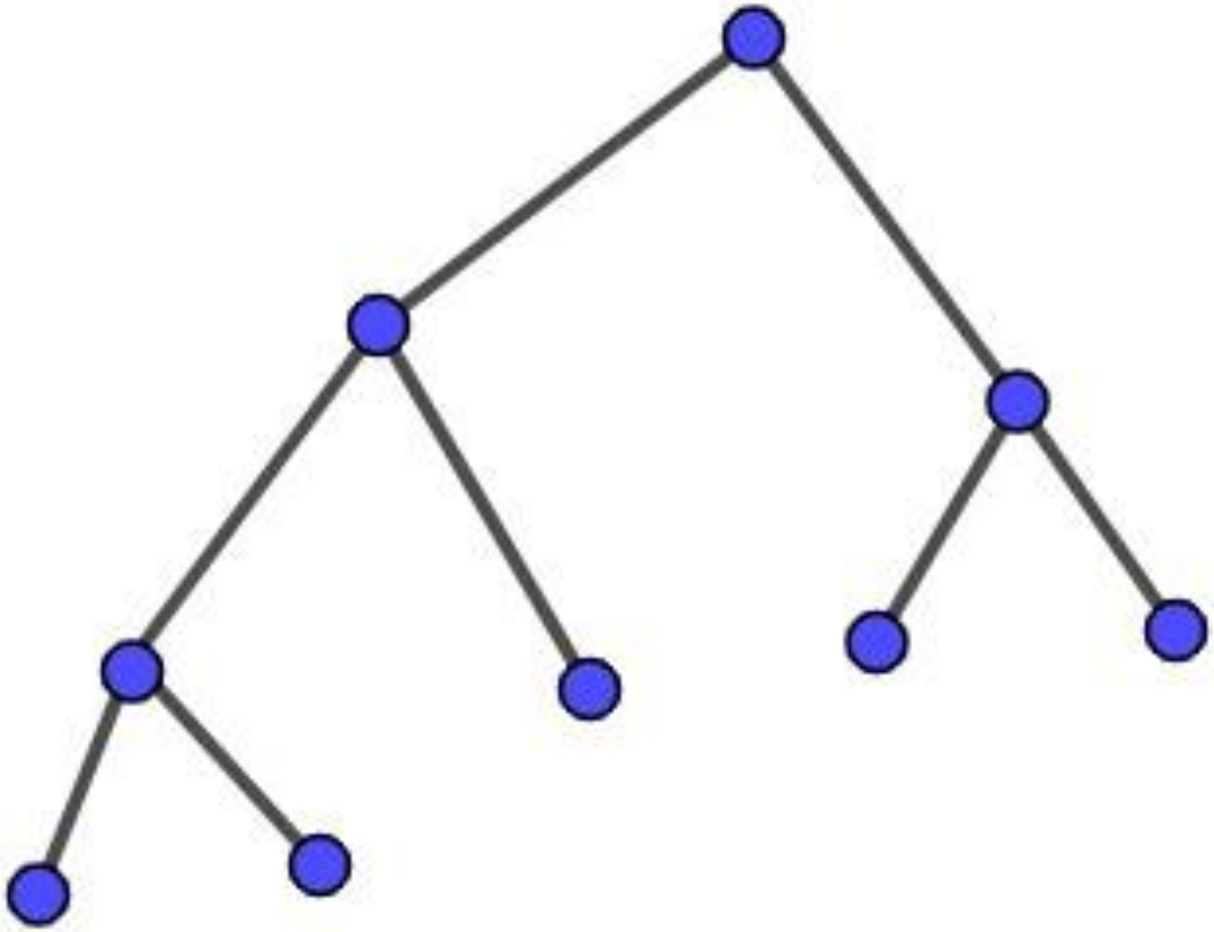
Shembull



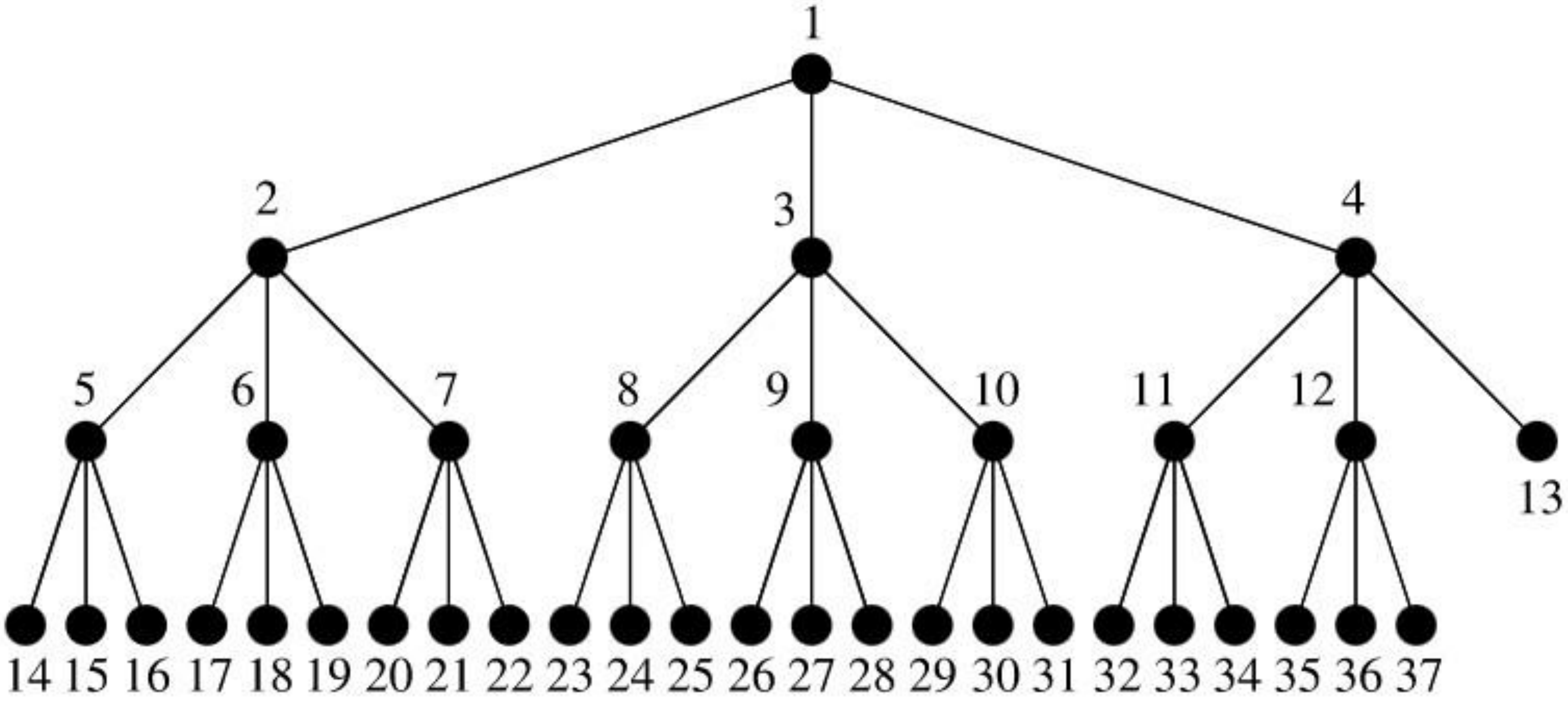
Shembull

. Grafi i dhënë si në figurë i ka 5 nyje të jashtme (gjethe). Gjeni të gjitha nyjet e grafit dhe nyjet e brendshme.

Shembull



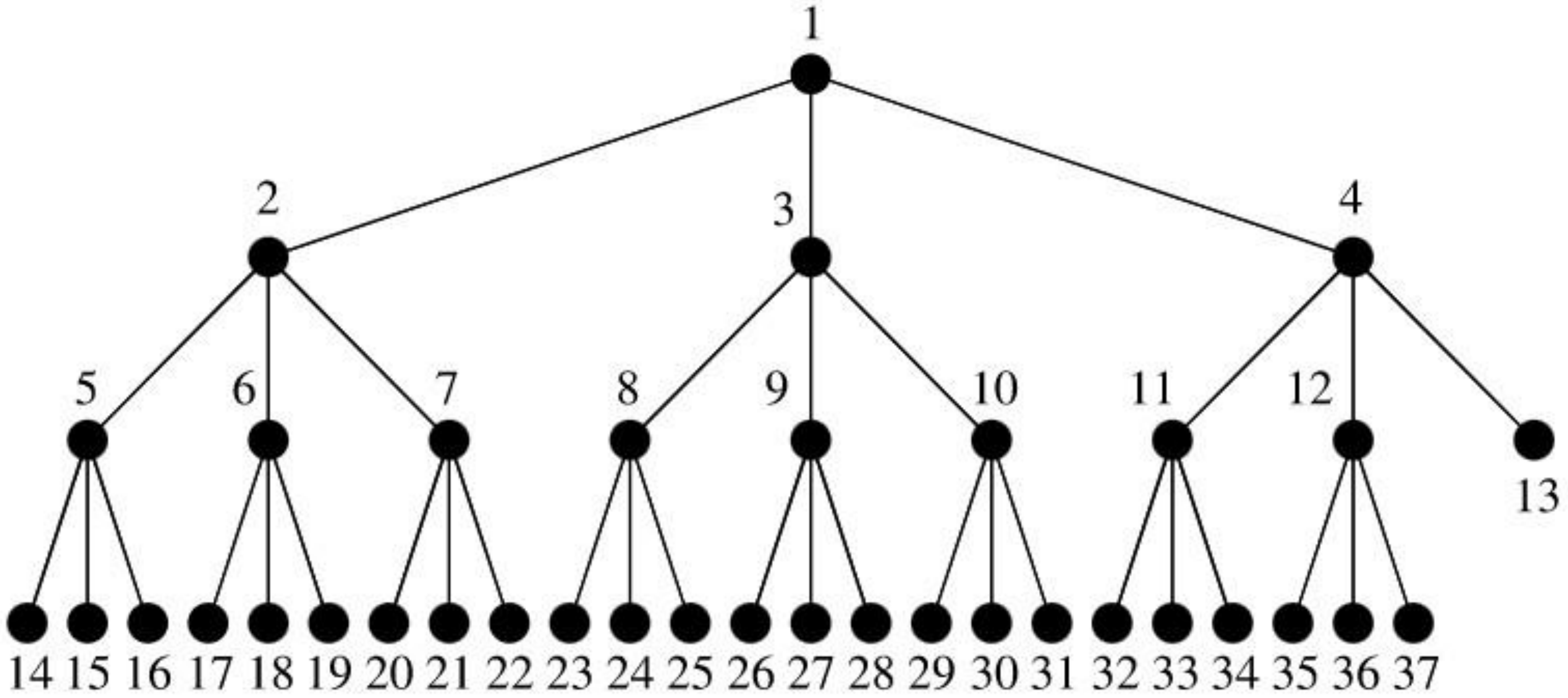
. Grafi i dhënë si në figur i ka 37 nyje. Gjeni nyjet e brendshme dhe nyjet e jashtme (gjethet) të këtij grafi.



Shembull

Zgjidhje. Grafi i dhënë është i plotë, ka gjithësej $n = 37$ nyje dhe është graf ternar që dmth $m = 3$, atëherë kemi $\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{n-1}}{} = \frac{\boldsymbol{37-1}}{} = \mathbf{12}$ nyje të brendshme

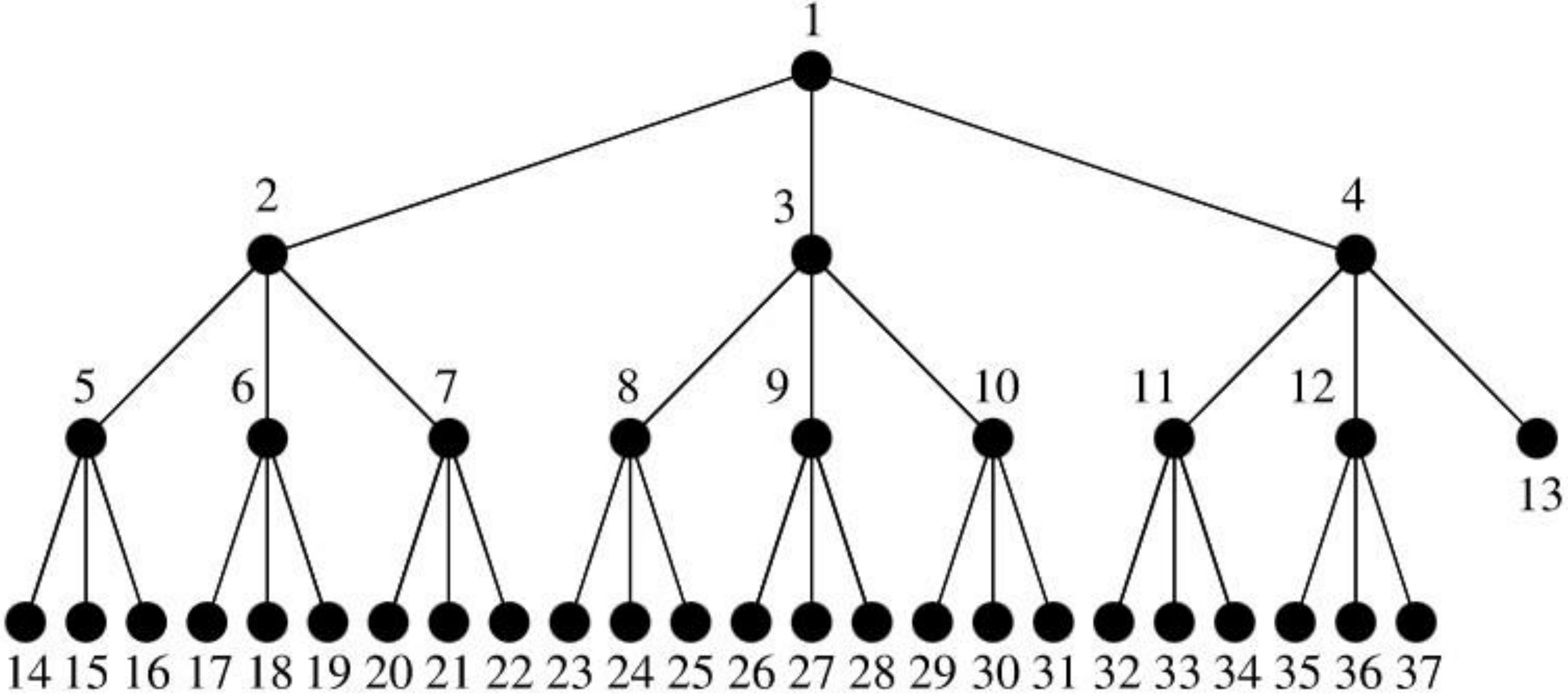
m **3**


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37

Shembull

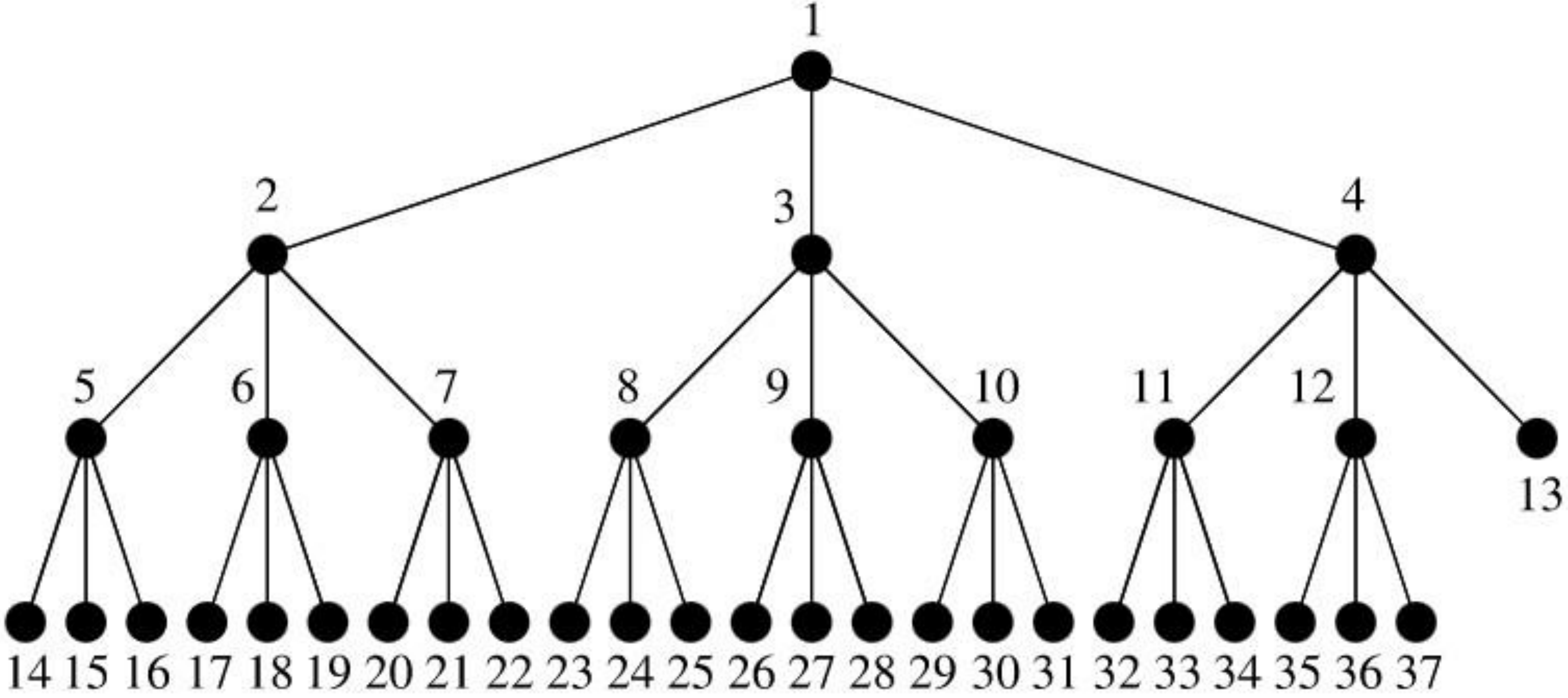
$\frac{(m-1)\cdot n+1}{m}$ $\frac{3-(1\cdot 37)+1}{3}$ dhe $l === 25$ nyje të jashtme (gjethe).

. Grafi i dhënë si në figurë i ka 12 nyje të brendshme. Gjeni të gjitha nyjet e grafit dhe nyjet e jashtme (gjethet).



Shembull

Shembull. Grafi i dhënë si në figurë i ka 25 nyje të jashtme (gjethe). Gjeni të gjitha nyjet e grafit dhe nyjet e brendshme.



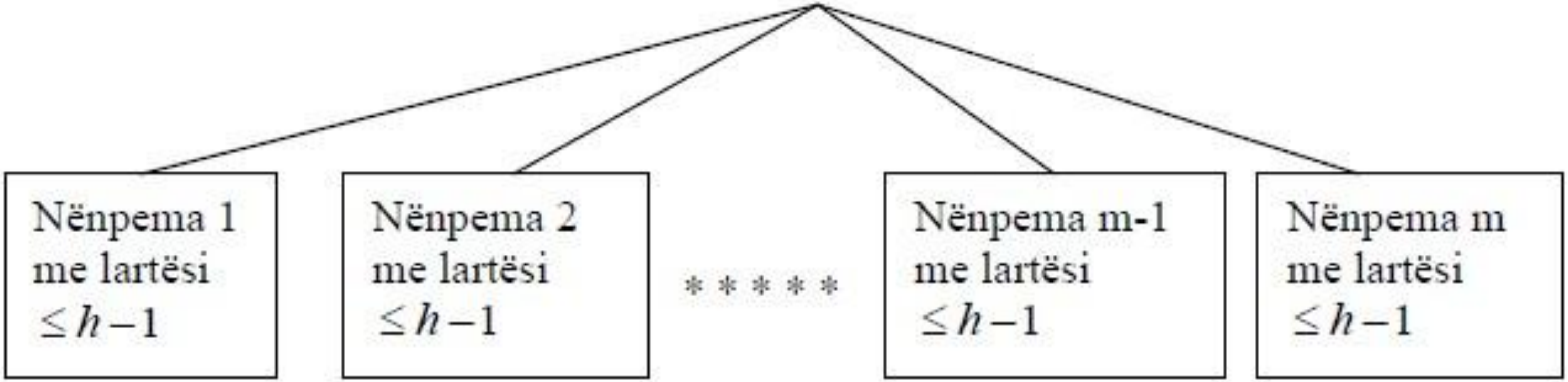
TEOREMË .

Në një pemë ***m***-arë me lartësi ***h*** ka të shumtën m^h gjethe.

(vërejtje: dmth grafi m-arë mundë të ketë më së shumti m^h gjethe)

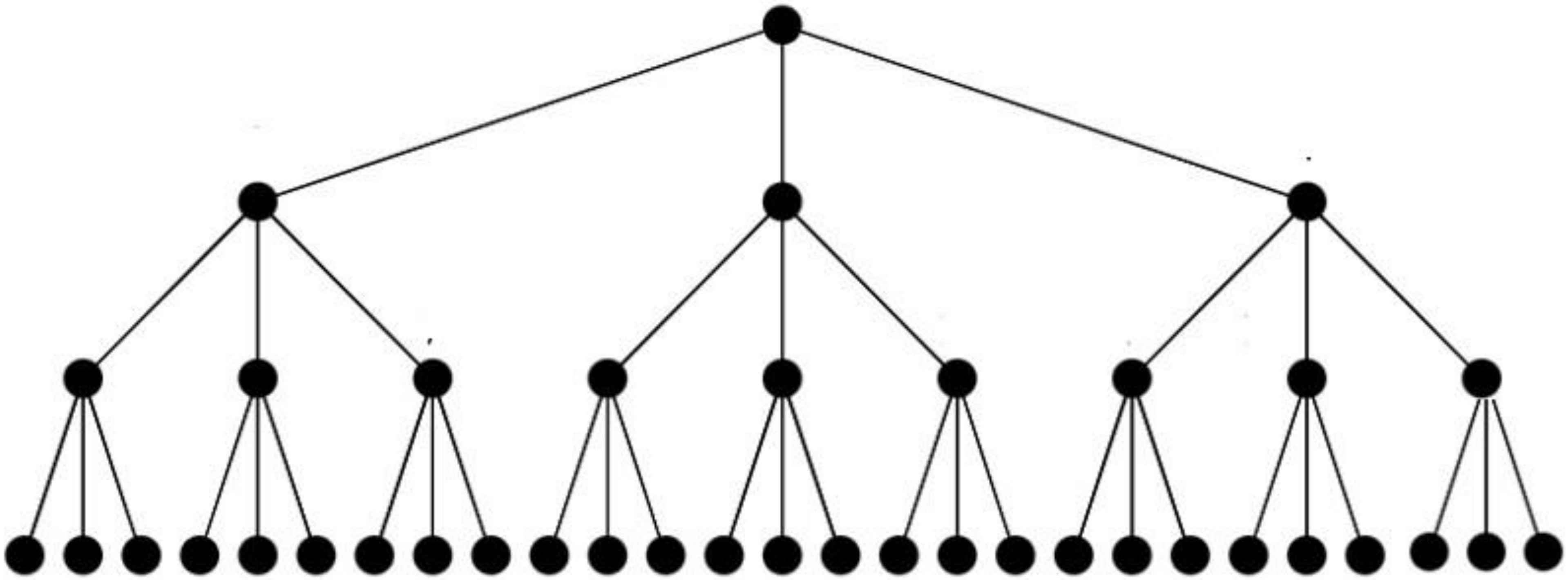
I. Pemët ***m***-are i konsiderojmë me lartësi ***1*** . Këto pemë përbëhen nga një rrënjë dhe jo më shumë se ***m*** fëmijë, secili prej të cilëve është gjethe. Prandaj në pemën me lartësi ***1*** nuk ka më shumë se $m^1 = m$ gjethe. Ky është hapi bazë i arësyetimit.

II. Sypozojmë se ky rezultat është i vërtetë për të gjitha pemët ***m***are me lartësi më të vogël se ***h*** (hipoteza induktive). Le të jetë ***T*** një pemë ***m***-are me lartësi ***h***. Gjethet e ***T*** janë gjethe të nënpemëve të ***T*** të cilat përftohen duke fshirë (larguar) degët nga rrënja deri tek secila nyje e nivelit ***1***, ashtu si tregohet në Figuren e mëposhtme. Secila nga këto nën-pemë e ka lartësinë më të vogël ose të barabartë me ***h – 1***. Kështu që, në bazë të hipotezës induktive, secila nga këto pemë të rrënjosura ka të shumtën m^{h-1} gjethe. Meqë ka të shumtën ***m*** nën-pemë të tilla dhe secila me një maksimum m^{h-1} gjethesh, atëhere në pemën e rrënjosur ka të shumtën $m \cdot m^{h-1} = m^h$gjethe. Teorema u vërtetua.//

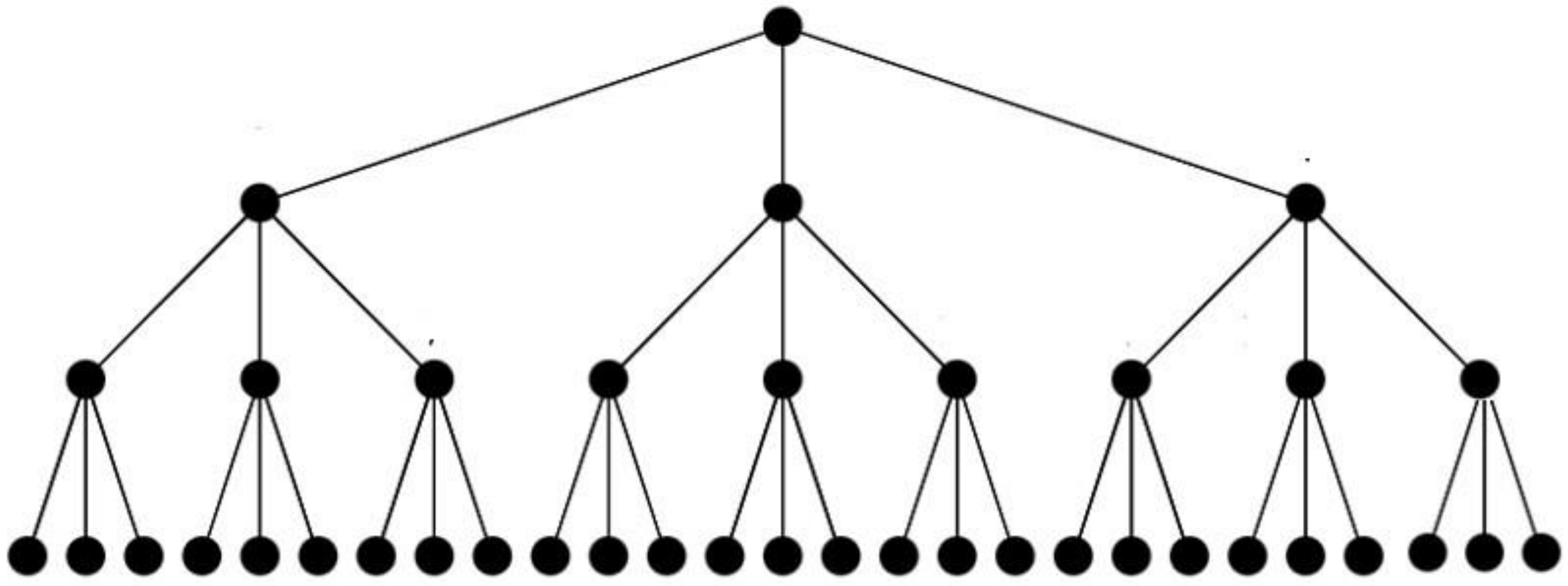


Hapat induktivë për teoremën

Shembull. Grafi i dhënë si në figur i ka 40 nyje. Gjeni gjethet e kësaj peme.



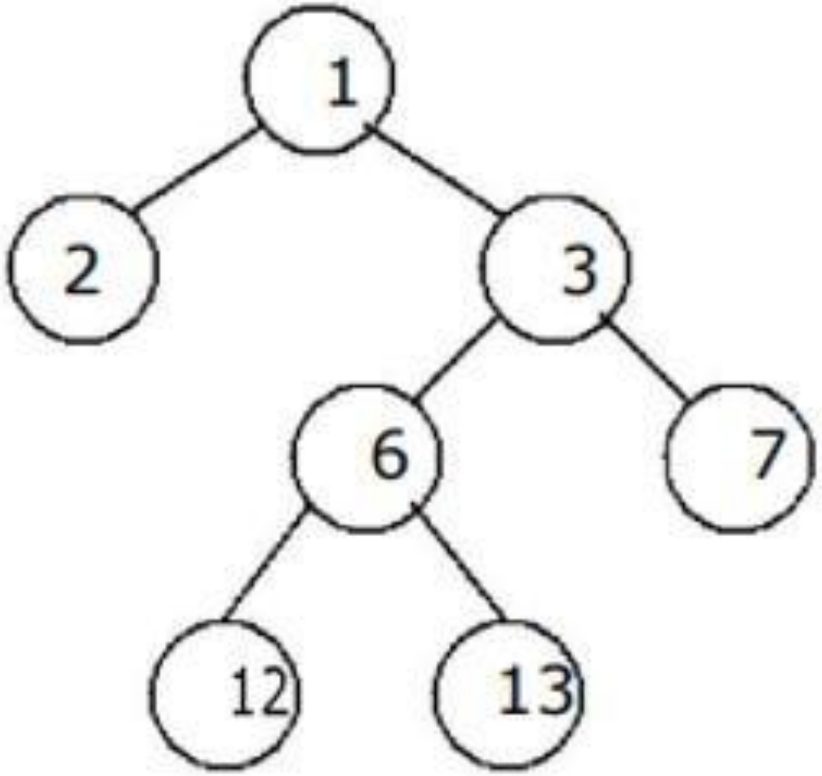
Zgjidhje. Pema është ternare (3-nare) dmth $m = 3$. Gjithashtu grafi ka lartësin $h = 3$. Nga këto të dhëna fitojmë se grafi ka $m^h = 3^3 = 27$ gjethe gjithësej.



Llojet e pemëve binare

1. Pema strikte binare
2. Pema strikte e plotë binare
3. Pema e plotë binare
4. Pema binare e përsosur (perfekte)

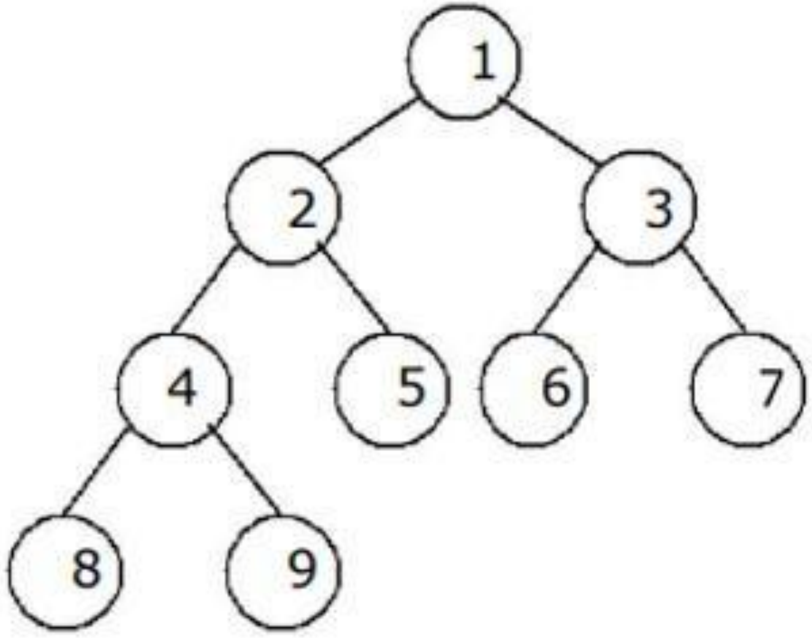
Pema strikte binare



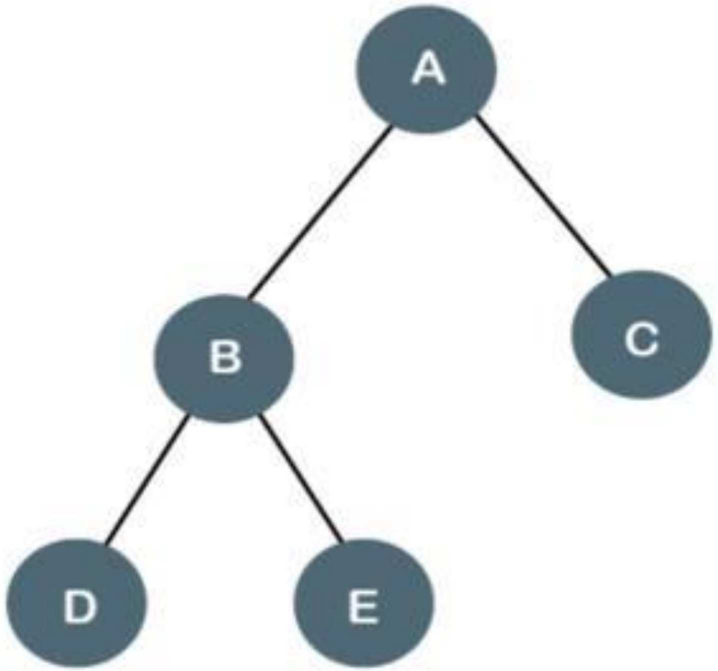
Strict Binary Tree

Pema strikte e plotë binare

Në pemën e mëposhtme, mund të vërejmë se çdo nyje ose përmban zero fëmijë ose dy fëmijë; prandaj, është një pemë binare e plotë.

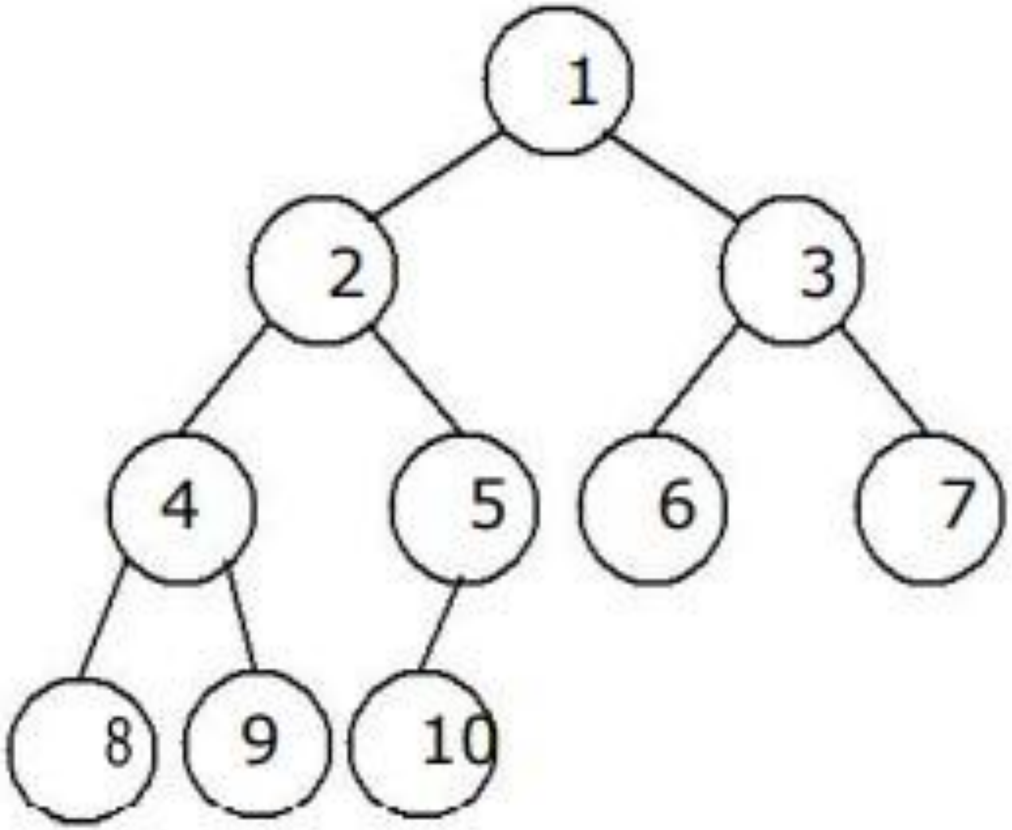


Strictly Complete binary tree



Strictly Complete binary tree

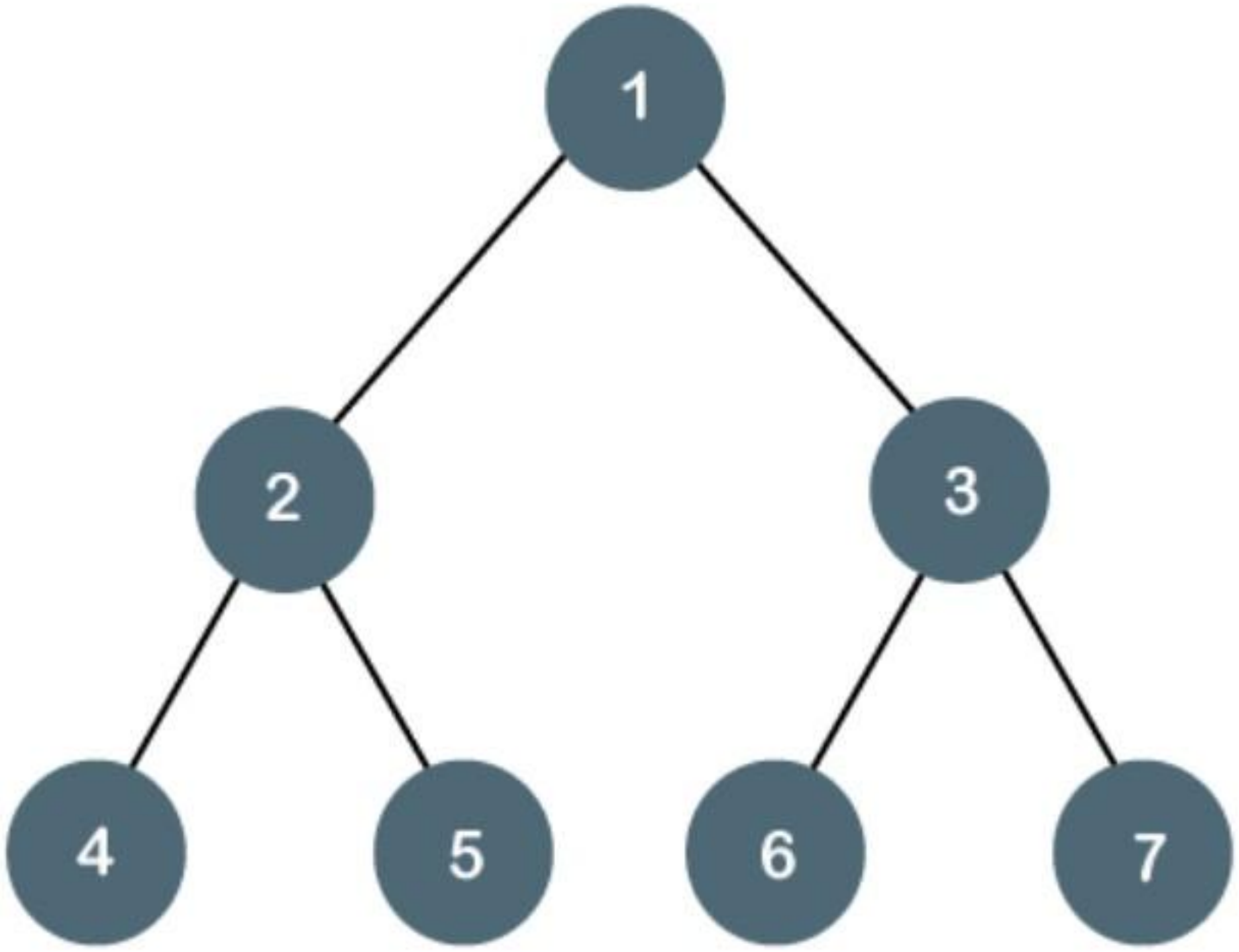
Pema e plotë binare



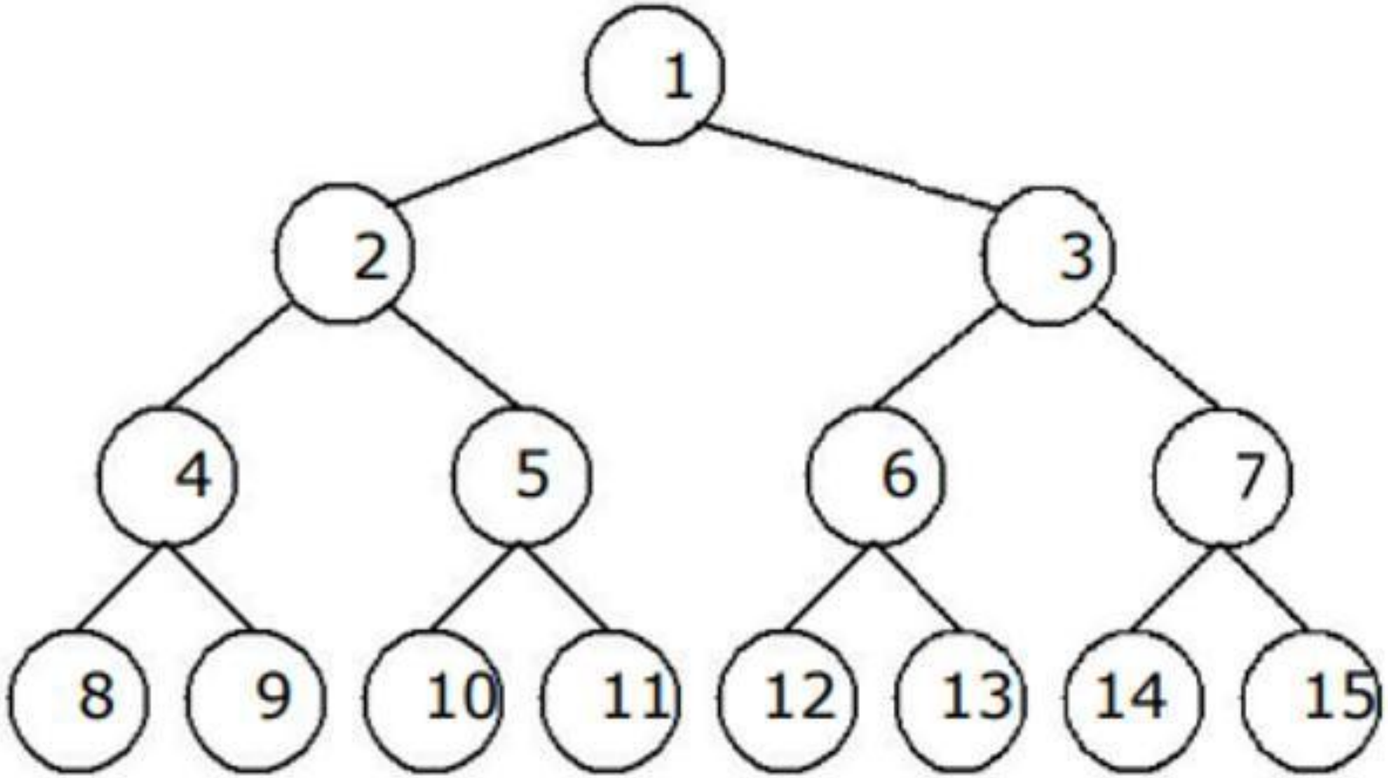
Complete binary tree

Pema binare e përsosur (perfekte)

Një pemë është një pemë binare e përsosur nëse të gjitha nyjet e brendshme kanë 2 fëmijë dhe të gjitha nyjet e gjetheve janë në të njëjtin nivel.

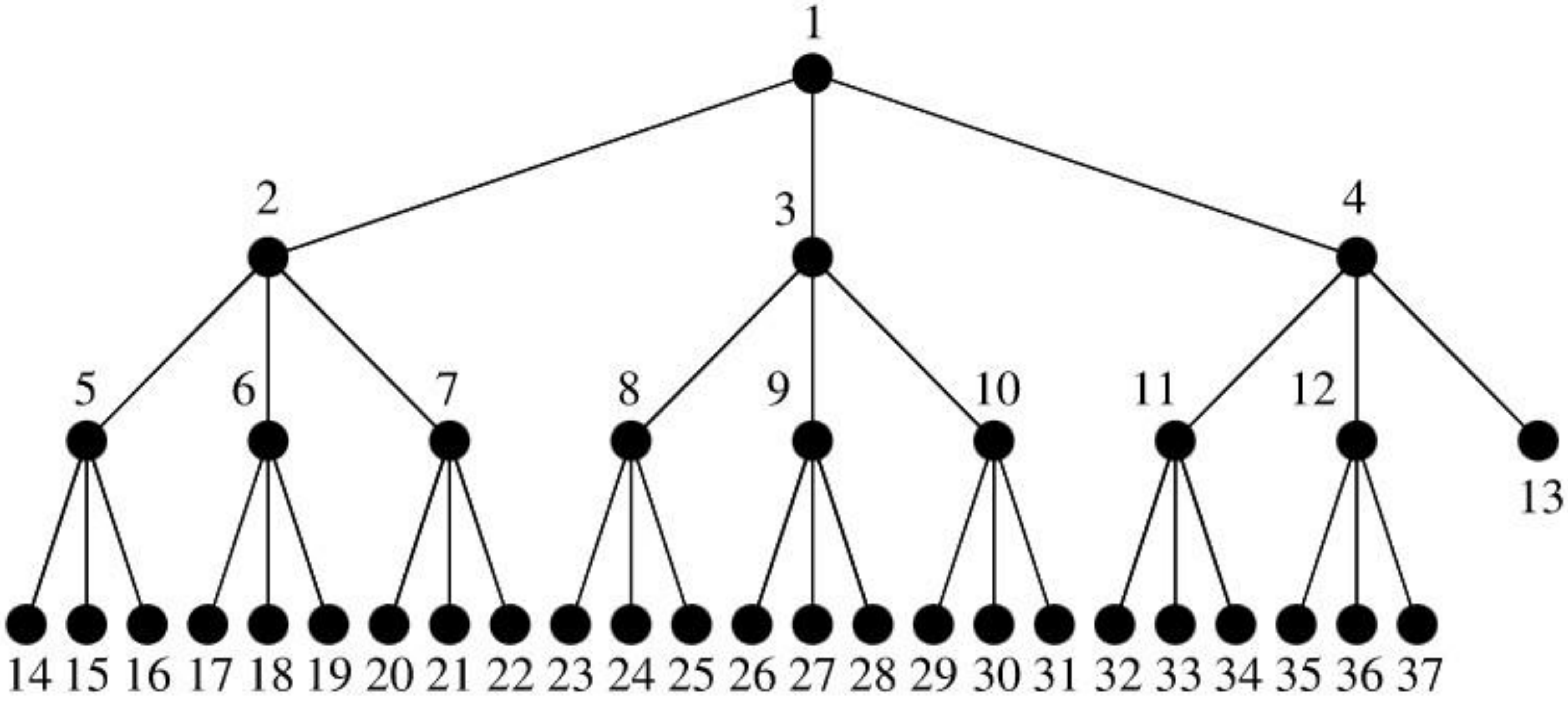


Pema binare e përsosur (perfekte)

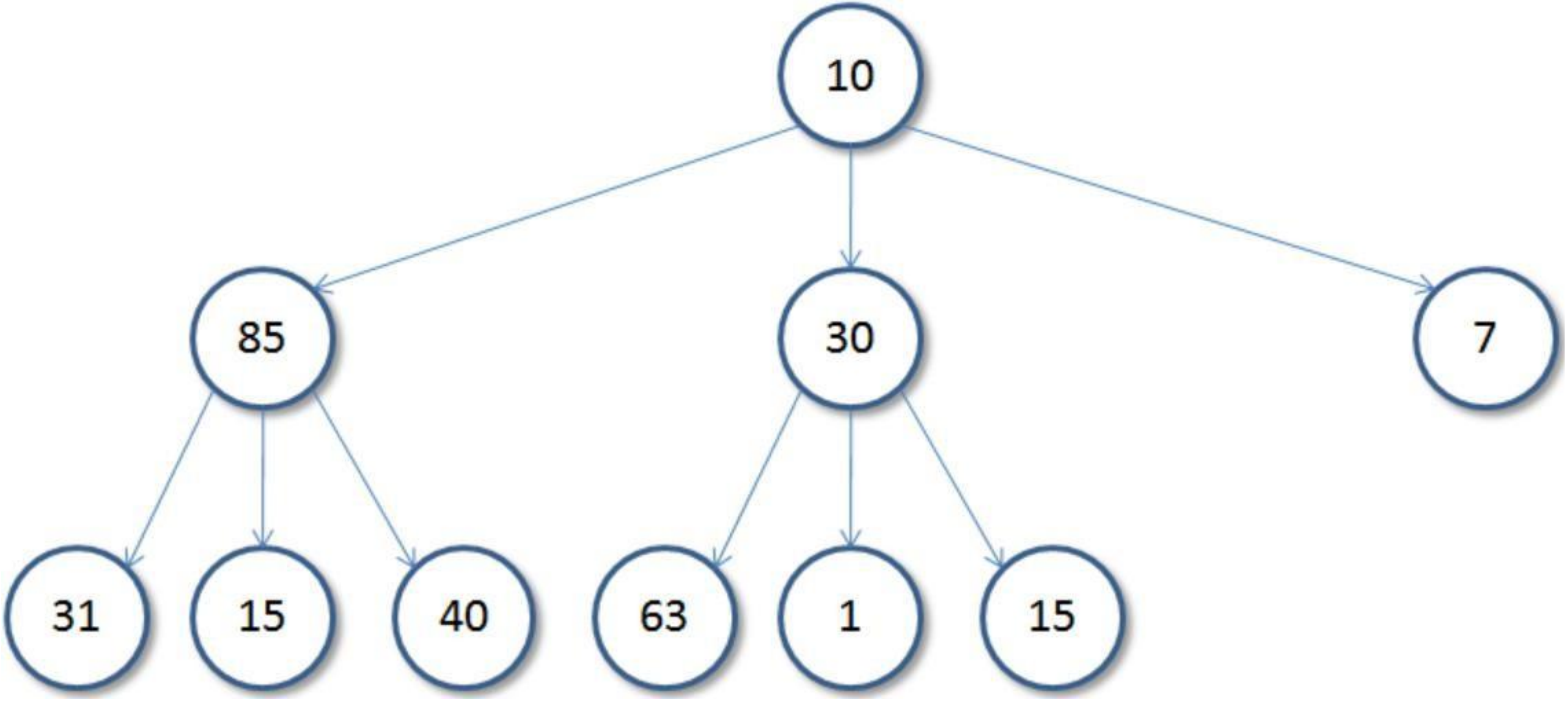


Full binary tree

Shembull: Pema në figurë është pemë e plotë ternare e madhesisë 37 dhe lartësi 3.

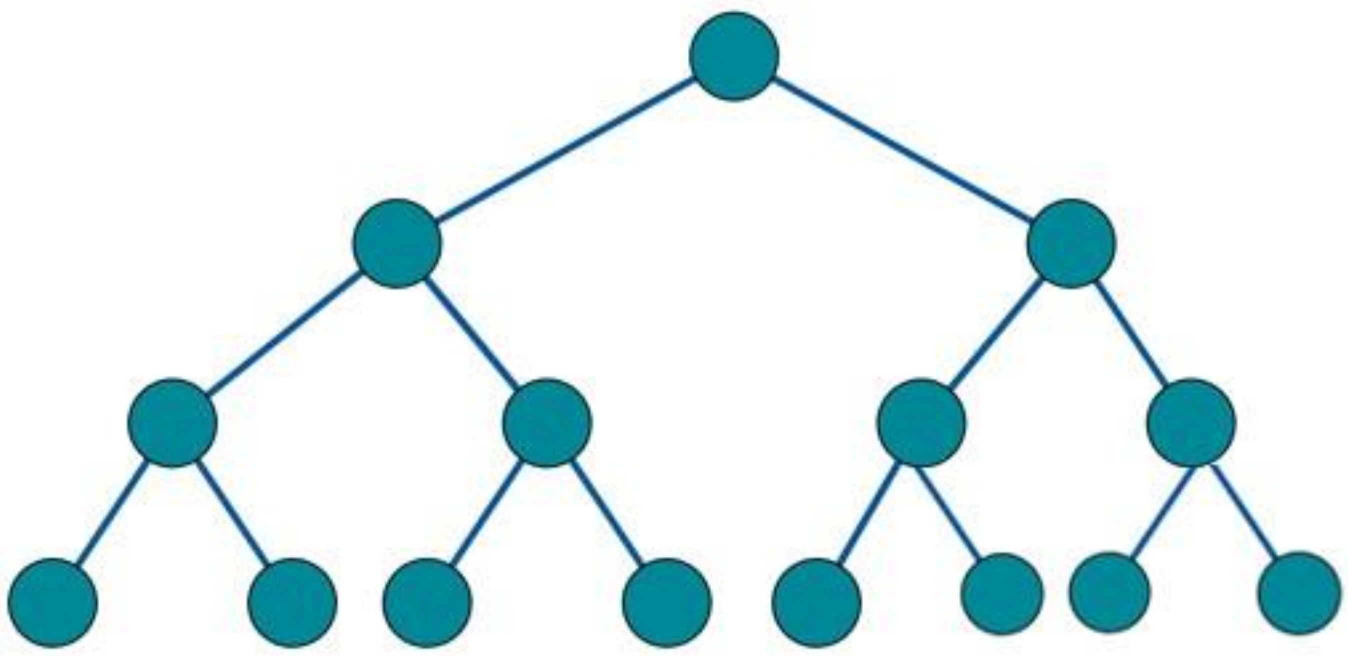


Shembull: Pema në figurë është pemë ternare e e madhesisë 10 dhe lartësi 2.



Detyrë. Gjeni numrin e nyjeve në pemën e përsosur binare nëse ajo e ka lartësin h.

Zgjidhje. Në rastin tonë kemi një pemë binare e cila e ka lartësin h. Po marrim rastin e veçant $h = 3$, atëherë kjo pemë ka $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$ nyje.

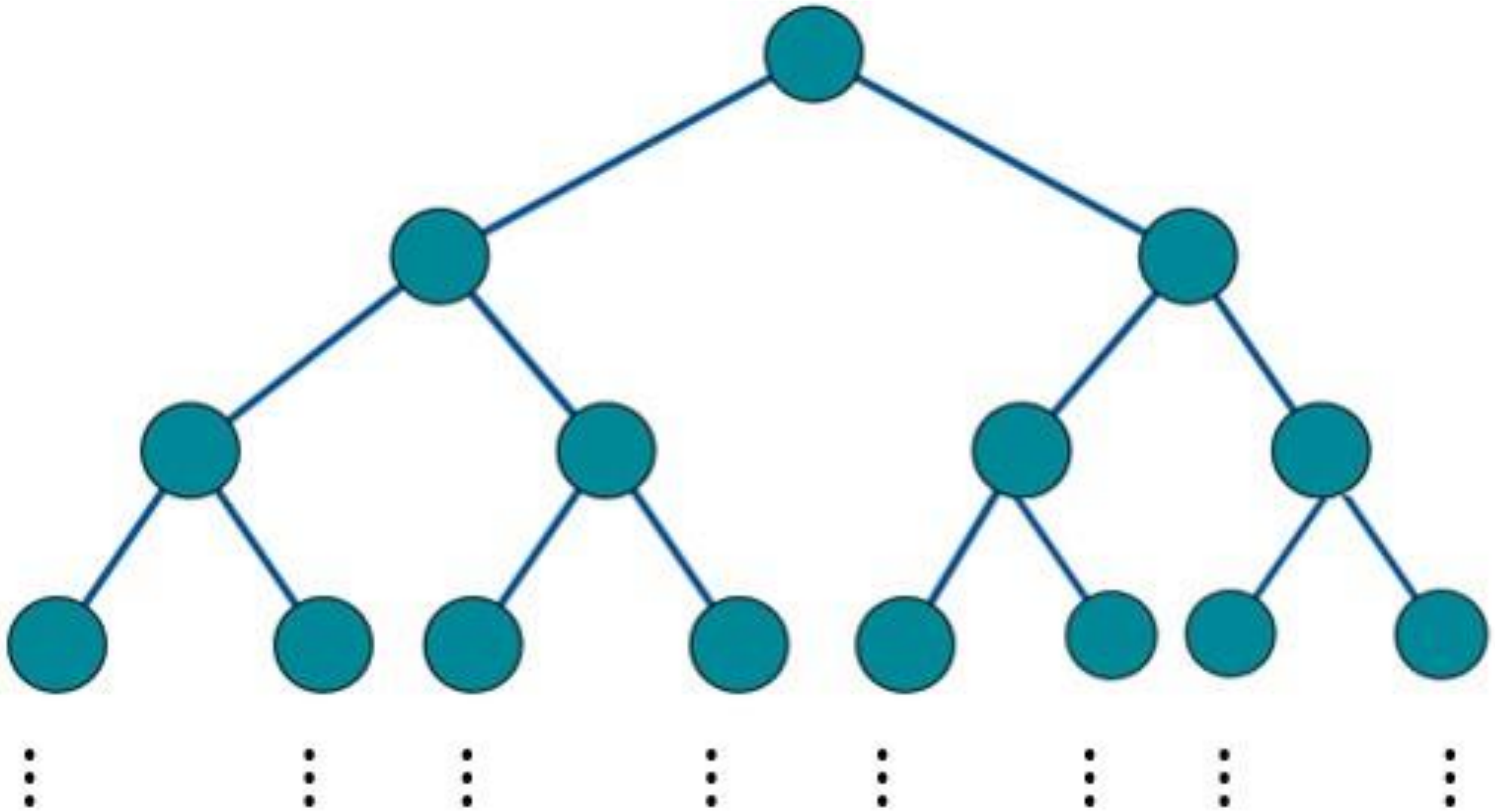


Vazhdim i detyrës.

Në rastë të përgjithshëm kur kemi lartësin e grafit të dhënë h do të kemi

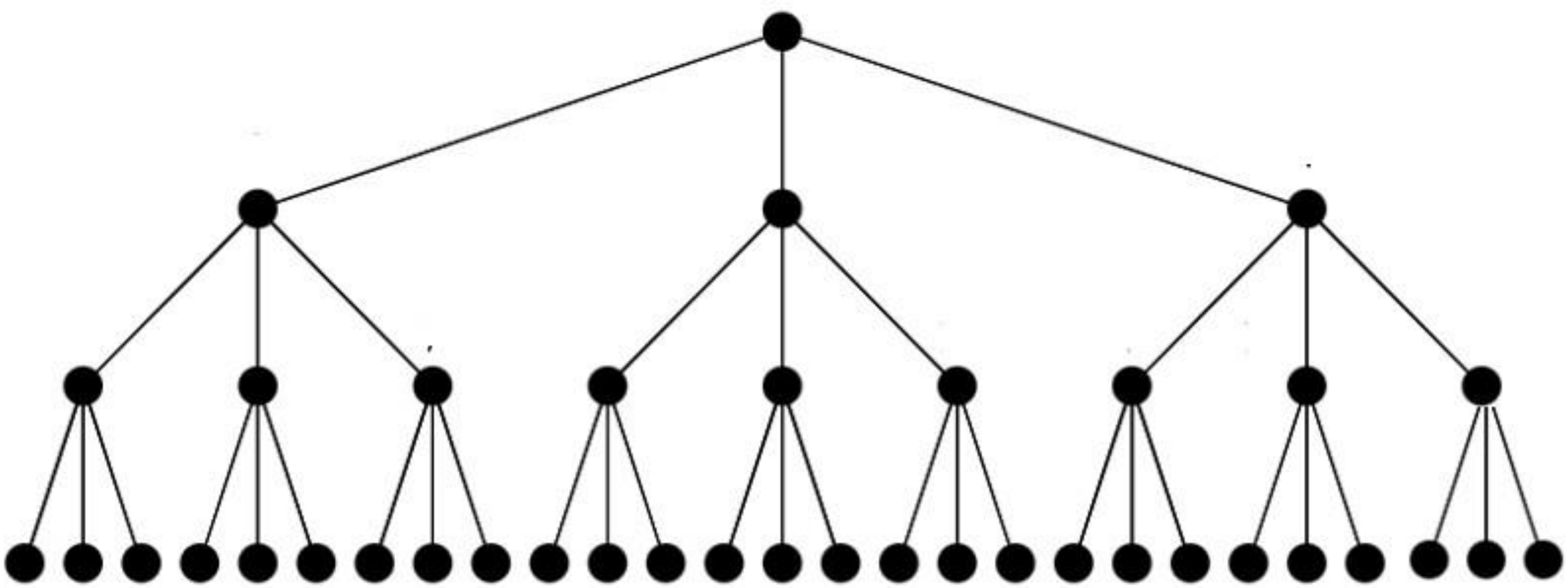
$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^h = 2^{h+1} - 1$$

Dmth do të kemi $2^{h+1} - 1$ nyje të grafit.



Detyrë. Gjeni numrin e nyjeve në pemën e përsosur ternare nëse ajo e ka lartësin h.

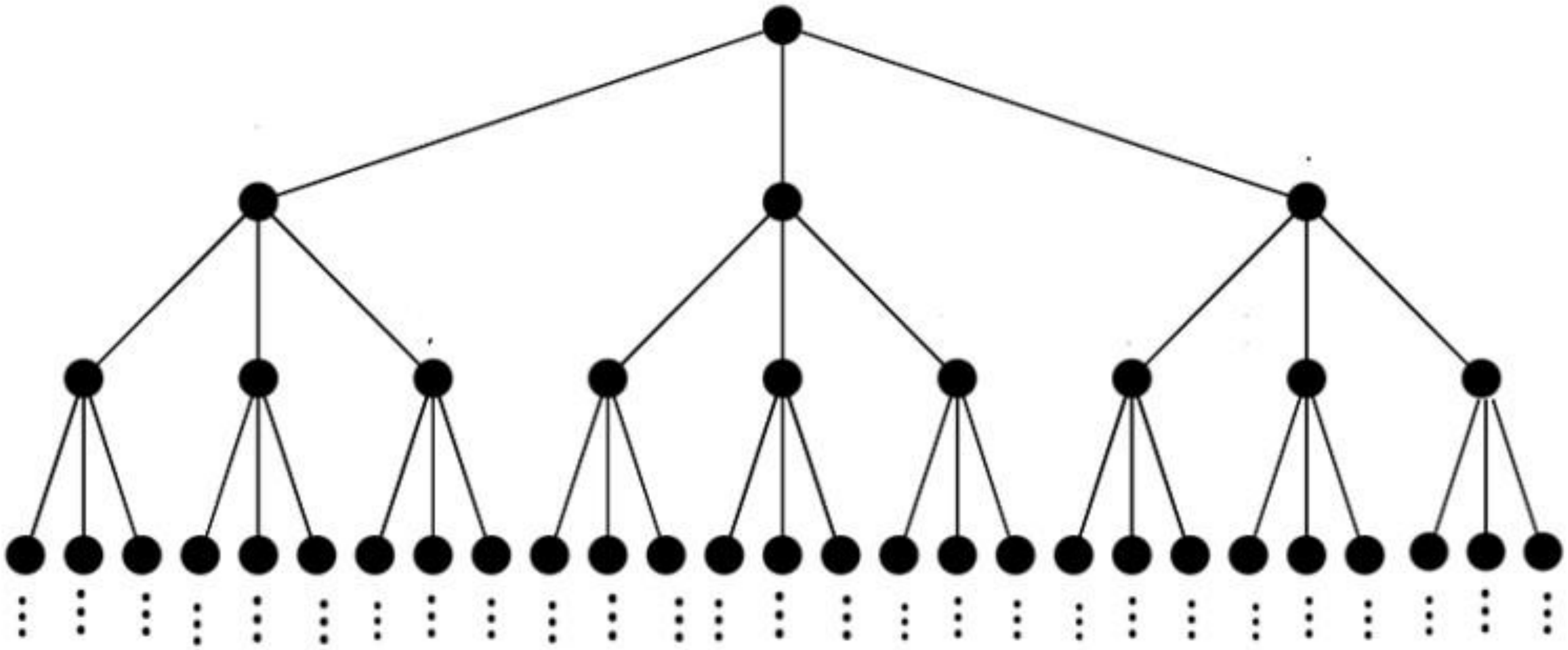
Zgjidhje. Në rastin tonë kemi një pemë ternare e cila e ka lartësin h. Po marrim rastin e veçant $h = 3$, atëherë kjo pemë ka $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 40$ nyje.



Vazhdim i detyrës. Në rastë të përgjithshëm kur kemi lartësin e grafit të dhënë h do të kemi

$$3^0 + 3^1 + \cdots + 3^h = \frac{3^{h+1} - 1}{2}.$$

Dmth do të kemi $\frac{3^{h+1}-1}{2}$ nyje të grafit.



- Nga dy shembujt e fundit mundë ta riformulojmë këtë veti për pemët binare dhe ternare.

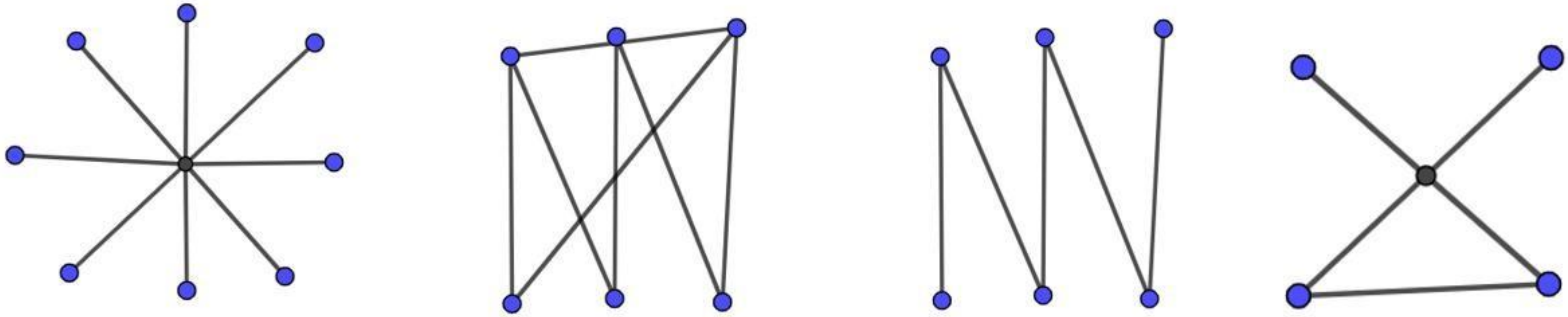
- Nëse lartësia e pemës binare të plotë është h atëherë numri i nyjeve në atë pemë do të jetë së paku $2h+1$ kurse më së shumti $2^{h+1}-1$.

- Nëse lartësia e pemës ternare të plotë është h atëherë numri $3h+1-1$ i nyjeve në atë pemë më së shumti do të jetë ______.

  2

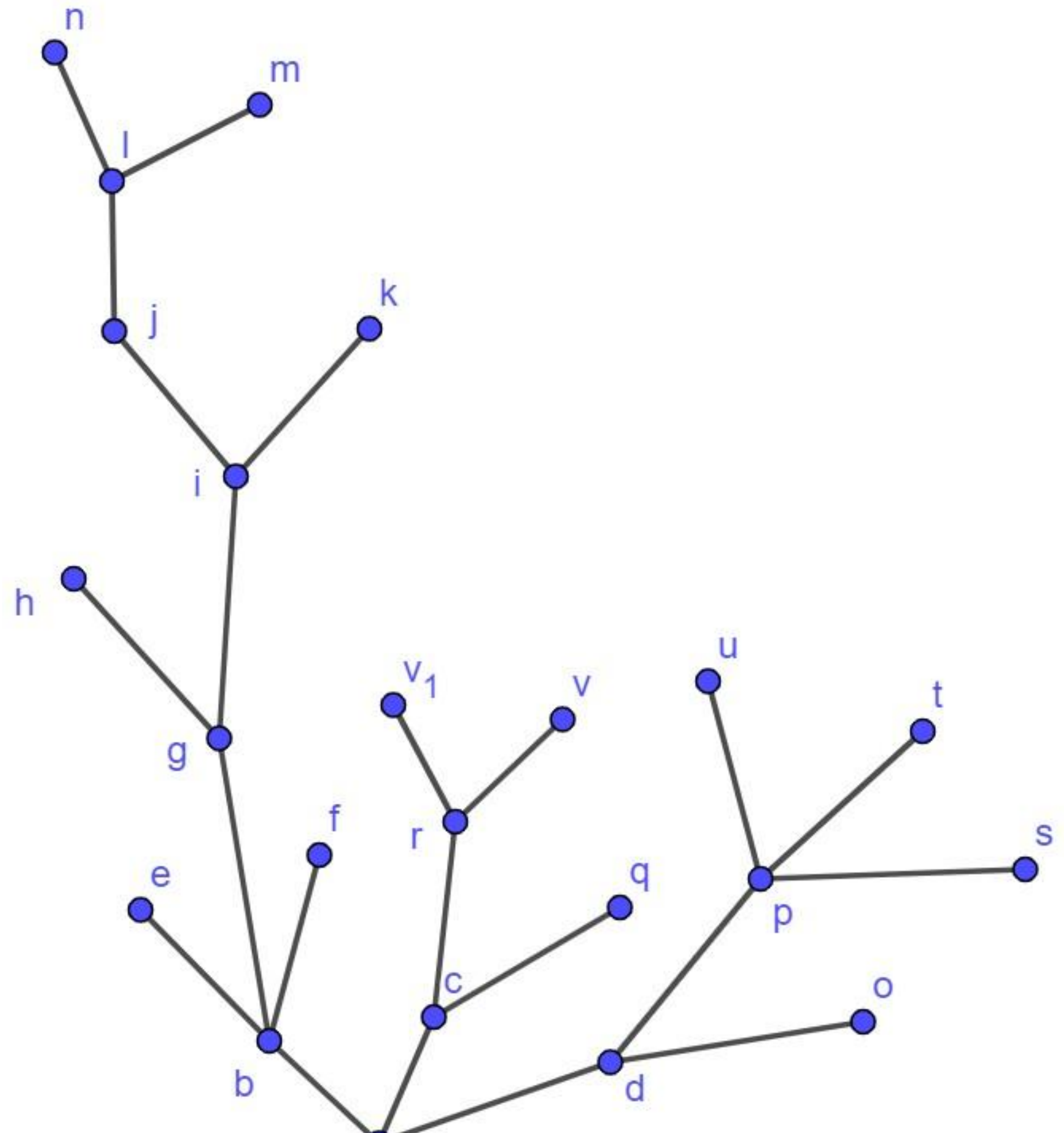
Ushtrime

1. Cili nga grafet e dhëna është pemë:



a. b. c. d.

2. Për pemën e rrënjosur T tregoni se



a. Rrënjë të brendshme.
b. Gjethe.
c. Fëmijë të rrënjës i.
d. Prindër i rrënjës i.
e. Paraardhës të rrënjës j dhe k.
f. Pasardhës të rrënjës *c* dhe *p*.
g. Gjeni tri nënpemë të pemës T.

3. Sa degë ka një pemë me 11752 nyje?
4. Sa nyje ka një pemë e plotë 5-are me 100 nyje të brendshme?
5. Sa nyje ka një pemë e plotë 6-are me 1000 nyje të brendshme?
6. Sa nyje gjethe ka një pemë e plotë 3-are me 100 nyje?

7. 1000 persona marrin pjesë në një kampionat shahu ku lojtari që humbë eliminohet (supozohet se nuk ka lojë remi). Të përdoret një model me pemë të rrënjosur për të përcaktuar se sa loja zhvilohen për të përcaktuar kampionin (lojtari që fiton deri në fundë të lojave).
8. Provoni të vizatoni një pemë m-are të plotë me 76 gjethe dhe lartësi 3 nëse ajo eksiston.
9. Të ndërtohet një pemë binare e plotë me lartësi 4 .
10. Të ndërtohet një pemë ternare e plotë me lartësi 3 .
11. Sa degë ka një pyllë me t pemë dh eme numër të përgjithshëm të nyjeve n .