# Universiteti Publik “Kadri Zeka”, Gjilan

## Fakulteti i Shkencave Kompjuterike

### Lënda: Teoria e Grafeve

Tema:

# *Grafet*

**Nëngrafët**

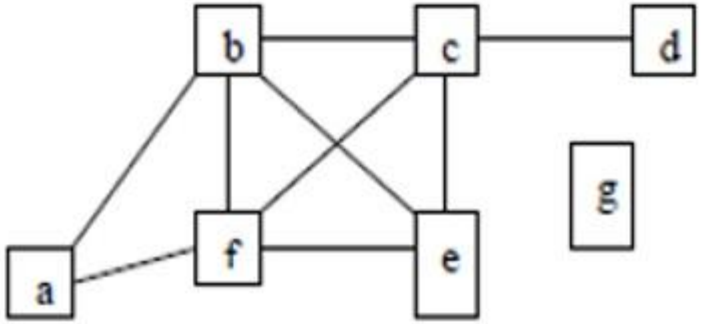
Vetitë lokale të një grafi përcaktojnë një zgjidhje. Në një situatë të tillë ne merremi me pjesë të grafit(me nëngrafin), dhe mund të gjendet një zgjidhje për problemën duke kombinuar informacionin e përcaktuar nga pjesët. P.sh., ashtu sic do ta shohim më vonë, ekzistenca e qarkut të Eulerit është shumë lokale, ajo varet vetëm nga numri i fqinjëve të nyjeve.

**Valenca (Fuqia) e Nyjeve (Kulmeve)**.

Le të jetë $v \in G$ një nyje e grafit $G$.

**Fqinjësi e nyjes** $v$ është bashkësia $N_G(v) = \{u \in G: \{u, v\} \in E_G\}$. **Shembull.**

Të gjenden fqinjësit e çdo kulmi të grafit G:



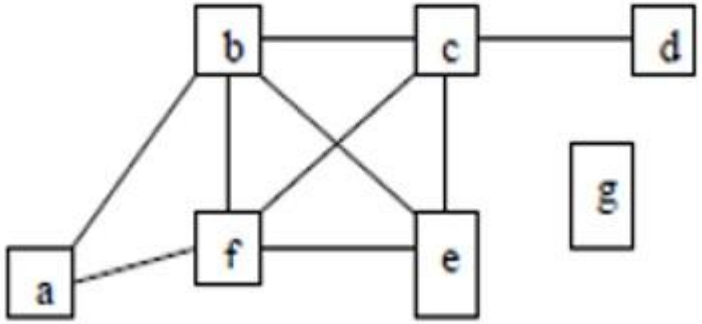

**Zgjidhje.**

$N(a) = \{b, f\}$, $N(b) = \{a, c, f\}$, $N(c) = \{b, e, f\}$, $N(d) = \{c\}$, $N(e) = \{b, c, f\}$, $N(f) = \{a, b, c, e\}$, $N(g) = 0$.

**Valencë (Fuqi) e nyjes $\boldsymbol{v}$** quhet numri i fqinjësive të saj:

$$d_G(v) = |N_G(v)| = |\{u \in G : \{u, v\} \in E_G\}|$$

Në qoftë se, $d_G(v) = 0$, atëhere thuhet se $v$ është **e izoluar** në $G$ dhe në qoftë se $d_G(v) = 1$, atëhere thuhet se $v$ është një gjethe e grafit. **Shembull.** Të gjendet numri i fqinjësive të çdo kulmi:




**Zgjidhje**.

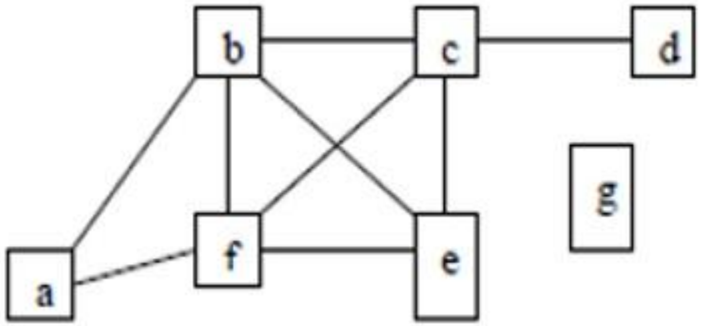
$$d_G(a) = 2, d_G(b) = 4, d_G(c) = 4, d_G(d) = 1,$$

$$d_G(e) = 3, d_G(f) = 4, d_G(g) = 0$$

**Valenca (Fuqia) minimale dhe maksimale** e $G$ përcaktohen nga shprehjet:

$\delta(G) = \min\{d_G(v): v \in G\}$ dhe $\Delta(G) = max\{d_G(v): v \in G\}$

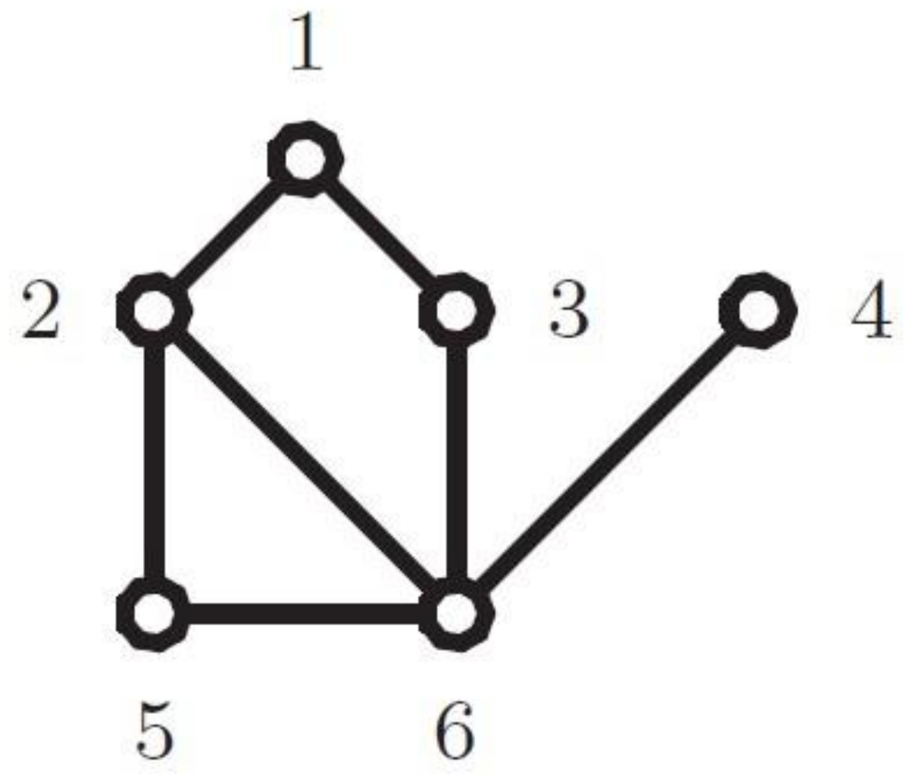
**Shembull**. Të gjendet fuqia (valenca) minimale dhe maksimale e grafit $G$




**Zgjidhje.**

$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in G\} = \min\{2,4,4,1,3,4,0\} = 0$ dhe $\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in G\} = \max\{2,4,4,1,3,4,0\} = 4$ **Shembull.** Për grafin e dhënë si në figurë, gjeni: a. Fqinjësit e nyjeve

b. Fuqinë (valencën) minimale dhe maksimale




**Shembull.** Në grafin e dhënë në figurë vlenë

Fqinjësit e nyjeve i kemi shënuar me $N_G(v)$ dhe valencën (fuqin) e nyjes me

$(v)\ d_G$

$N(1)\quad \{\quad\}\qquad d(1) = 2,3,= 2$

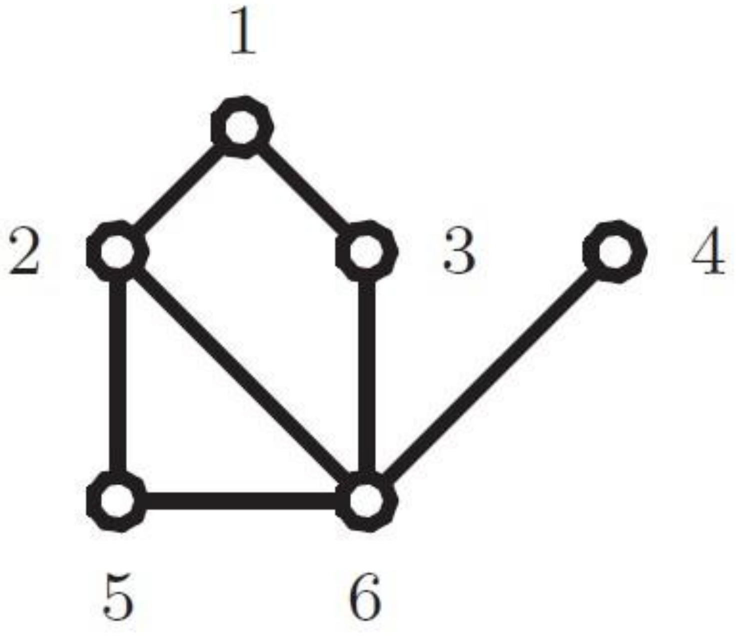
$N(2)\quad \{\quad\}\qquad d(2) = 1,5,6 = 3$

$N(3)\quad \{\quad\}\qquad d(3) = 1,6,= 2$

$N(4)\quad \{\ \}\qquad d(4) = 6,= 1$

$N(5)\quad \{\quad\}\qquad d(5) = 2,6,= 2$

$N(6)\quad \{\quad\}\qquad d(6) = 2,3,= 4$




Valenca minimale dhe maksimale e $G$ përcaktohen nga shprehjet

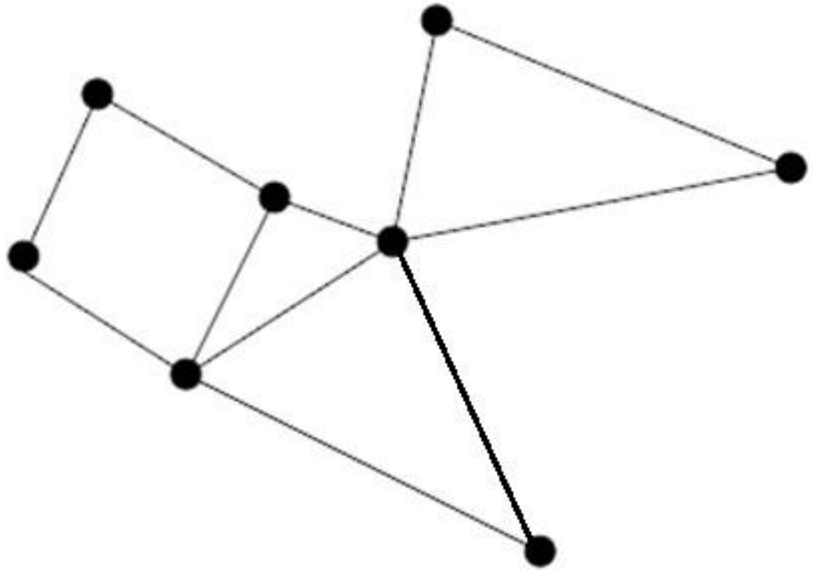
$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in G\} = \min\{1,2,2,2,3,4\} = 1 \text{ dhe}$$

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in G\} = \max\{1,2,2,2,3,4\} = 4$$

**(Lema e dorështrëngimit)**

Kjo lemë tregon se nëse disa persona shtrëngojnë duart me njëri tjetrin, atëhere numri i duarve që shtrëngohen është çift.

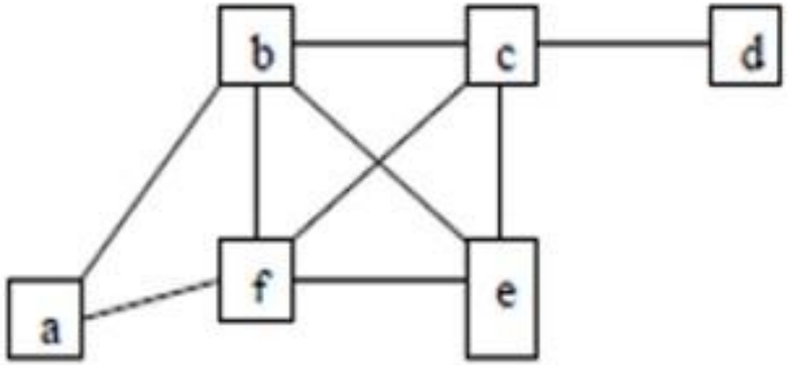
Po ashtu, numri i nyjeve me valencë tek është cift.!!!



Në grafin e dhënë shohim se numri i nyjeve ka valencë (fuqi, shkallë) tek dhe ka numër çift të nyjeve.(dmth kemi numri i nyjeve ka valencën 21 që është numër tek, kurse ka gjithësej 8 nyje (kulme) që është numër çift.

- Le të jetë dhënë grafi $G = (V, E)$, me $|E|$ shënojmë numrin e gjithë degëve në graf.

**Shembull.** Të gjendet numri i brinjëve në grafin e dhënë:




**Zgjidhje**.

$$|E| = |\{\{a, b\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, f\}, \{c, e\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}| = 9$$

Shënojmë se, valencat e një grafi nuk e përcaktojnë atë graf. Ekzistojnë grafë $G = (V, E_G)$ dhe $H = (V, E_H)$ me të njëjtën bashkësi nyjesh, që nuk janë izomorfë, por për të cilët $d_G(v) = d_H(v)$ për çdo $v \in V$.

**Lemë.** Le të jetë $G = (V, E)$ një graf i paorientuar (i padrejtuar) me $|E|$ degë ($|E|$ është numri i gjithë degëve në graf). Atëherë,

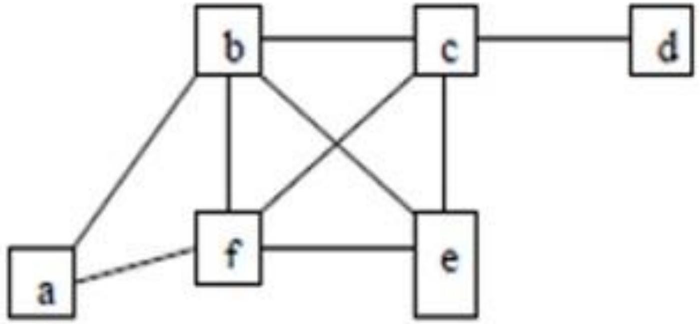
$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

**Vërtetim**: Për çdo $v \in V$ shuma $d_G(v) = |N_G(v)|$ paraqet numrin e degëve një skaj i të cilëve është $v$. Pasi që çdo degë i ka dy skaje, shuma $\sum_{v \in V} d_G(v)$ numron secilën degë në grafin $G$ nga dy herë, që rrjedhë edhe barazimi.

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

Ky rezultat është i vërtetë edhe nëse në graf janë të pranishme degë shumëfishe dhe laqe.

**Shembull.** Ilustroni lemën e mësipërme për grafin e dhënë:




**Zgjidhje**.

$$d_G(a) = 2, d_G(b) = 4, d_G(c) = 4, d_G(d) = 1, d_G(e) = 3, d_G(f) = 4.$$

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 + 4 + 4 + 1 + 3 + 4 = 18 = 2 \cdot 9 = 2|E|$$

**Shembull.** Sa degë ka në një graf me 10 nyje ku secila e ka valencën 6 ?

**Zgjidhje**: Meqë shuma e valencave të nyjeve është $10 \times 6 = 60$, atëherë kemi,

$$2 \cdot |E| = 60 \Rightarrow |E| = 30$$

Nga Lema e mësipërme, kuptohet që shuma e valencave të nyjeve të një grafi të padrejtuar është numër çift.

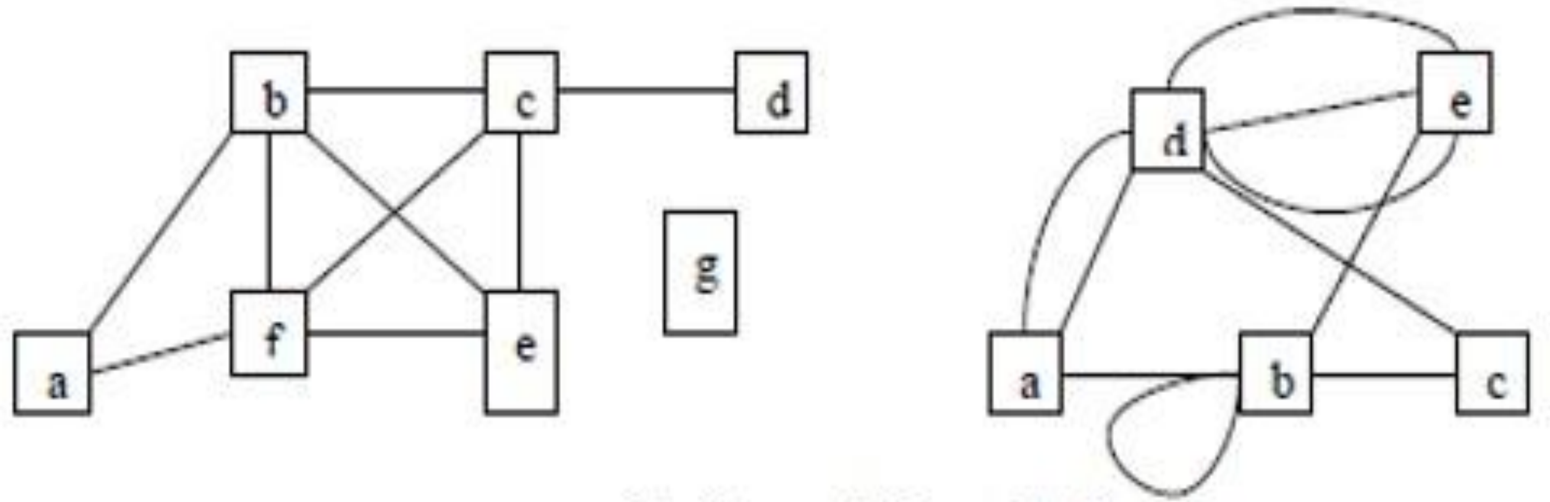
Ky fakt shfrytëzohet në shumë pohime të tjera.

**Zgjidhja**

$( \quad )$

$( \quad )$

**Shembull .** Sa janë valencat e grafeve $G$ dhe $H$ të paraqitur në figurë, gjeni $\sigma_{v\in V}\, d_G(v)$ dhe $\sigma_{v'\in V'}\, d_H(v')$ ?




Grafet e padrejtuar G dhe H

Në grafin $G$, $\mathrm{d}(a) = 2, \mathrm{d}(b) = \mathrm{d}(c) = \mathrm{d}(f) = 4, \mathrm{d}(d) = 1, \mathrm{d}(e) = 3, \mathrm{d}(g) = 0.$

$$\sum_{v\in V} d_G(v) = 2 + 4 + 4 + 4 + 1 + 3 + 0 = 18 = 2\cdot 9 = 2|E|$$

.

Në grafin $H$, $\mathrm{d}(a) = 3, \mathrm{d}(b) = 5, \mathrm{d}(c) = 2, \mathrm{d}(d) = 6, \mathrm{d}(e) = 4.$

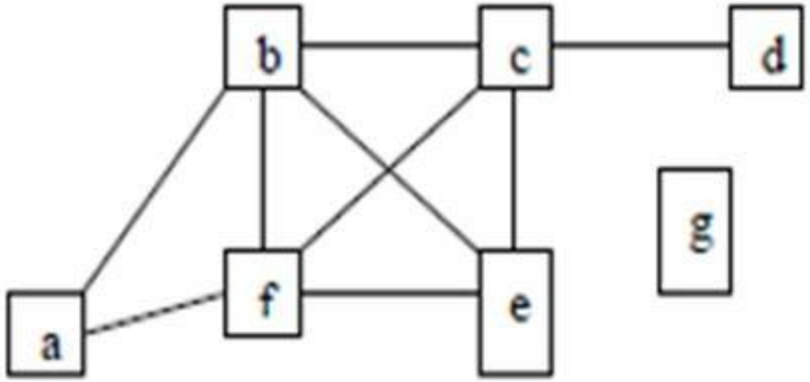
$|\quad|$

$\sum_{v' \in V'} d_H(v') = 3 + 5 + 2 + 6 + 4 = 20 = 2 \cdot 10 = 2|E|$

Rikujtim për konceptet:

- Nyja me valencë zero quhet **e izoluar**, nga nyja e izoluar nuk është fqinje me asnjë nyje, siç është rasti i nyjes $g$.
- Një nyje quhet **e varur** atëhere dhe vetëm atëhere kur valenca e saj është 1. Si pasojë, një nyje e varur është e lidhur vetëm me një nyje tjetër, siç është rasti i nyjes $d$ në grafin $G$.
- Numri i gjithë nyjeve të një grafi G quhet **rend i grafit** dhe shënohet $|G|$. Grafi i rendit 0 ose 1 quhet **graf trivial**.

**Shembull.** Gjeni nyjet e izoluara, nyjet e varura, dhe rendin e grafit $G = (V, E)$ të dhënë si në figurë?



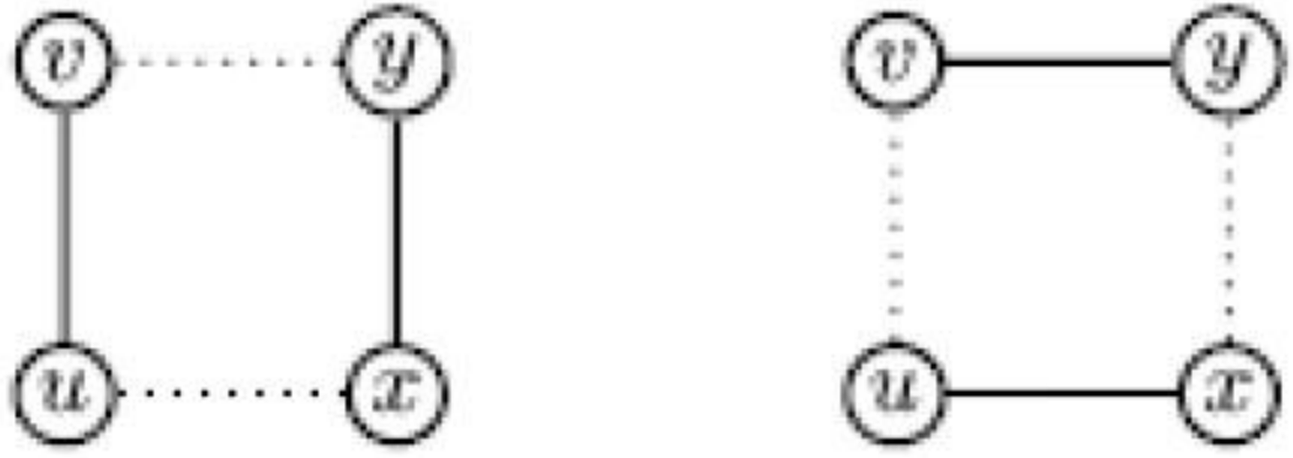

**TEOREMË.** Grafi i paorintuar ka një numër çift nyjesh me valencë numër tek.

**Vërtetim:** Le të jenë $V_1$ dhe $V_2$ përkatësisht bashkësia e nyjeve me valencë numër çift dhe bashkësia e nyjeve me valencë numër tek në grafin e paorientuar $G = (V, E)$ . Atëhere kemi,

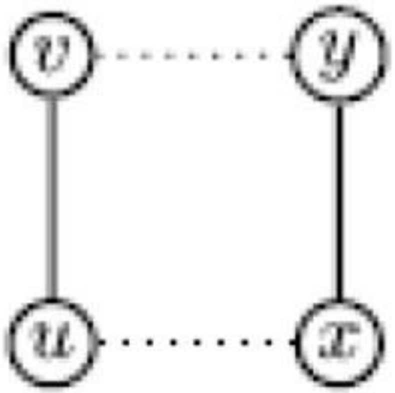
$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V_1} d_G(v) + \sum_{v \in V_2} d_G(v)$$

Meqë $d_G(v)$ është numër çift për $v \in V_1$, atëhere i mbledhshmi i parë në anën e djathtë të këtij barazimi është numër çift. Ana e majtë e barazimit është numër çift, si pasojë edhe i mbledhshmi i dytë në anën e djathtë të barazimit është numër çift?!!!! Përderisa të gjitha termat në këtë shumë (e dyta) janë numra tek, atëhere ka një numër çift termash në këtë shumë dhe, kjo do të thotë se ka një numër çift nyjesh me valencë numër tek.

**Përkufizim.** Le të jetë $G$ një graf. Një **këmbim-dyshe** $(u, v; x, y)$ i $G$, për $\{u, v\}, \{x, y\} \in E_G$ dhe $\{u, x\}, \{v, y\} \notin E_G$, zëvendëson degët $\{u, v\}$ dhe $\{x, y\}$ me $\{u, x\}$ $dhe$ $\{v, y\}$. Shikoni figurën.

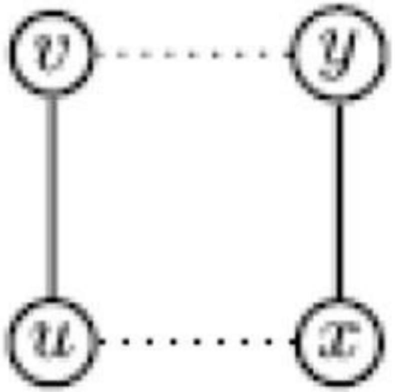



**Shembull.** Le të jetë $G$ një graf si në figurë. Bëni një këmbim dyshe të grafit të dhënë:



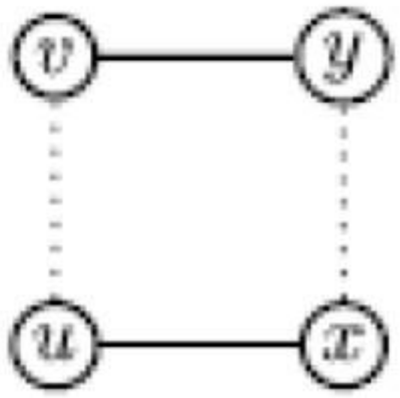

**Zgjidhje.** Grafi i dhënë G është i trajtës $G = (V, E)$, ku $V = \{u, v, x, y\}$ dhe $E$

$\} \ \{$



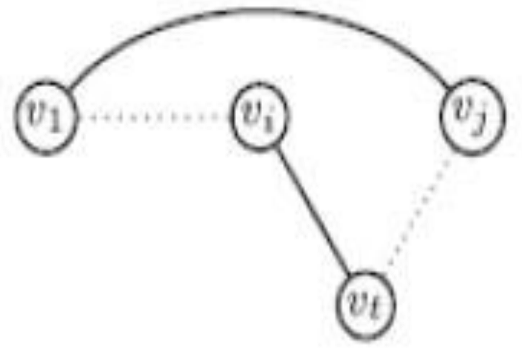

$= \{\{u, v, x, y\}\}$.

Bëjmë një këmbimin dyshe, atëherë kemi që $\{u, x\} \notin G, \{v, y\} \notin G$.




**Lemë .** Le të jetë $G$ një graf i rendit $n$ dhe me varg valencash $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ ku $d_G(v_i) = d_i$. Ekziston një graf $G'$ i cili merret nga $G$ me anë të një vargu këmbimesh-dyshe dhe i tillë që $N_{G'}(v_1) = \{v_2, \ldots, v_{d_1+1}\}$.

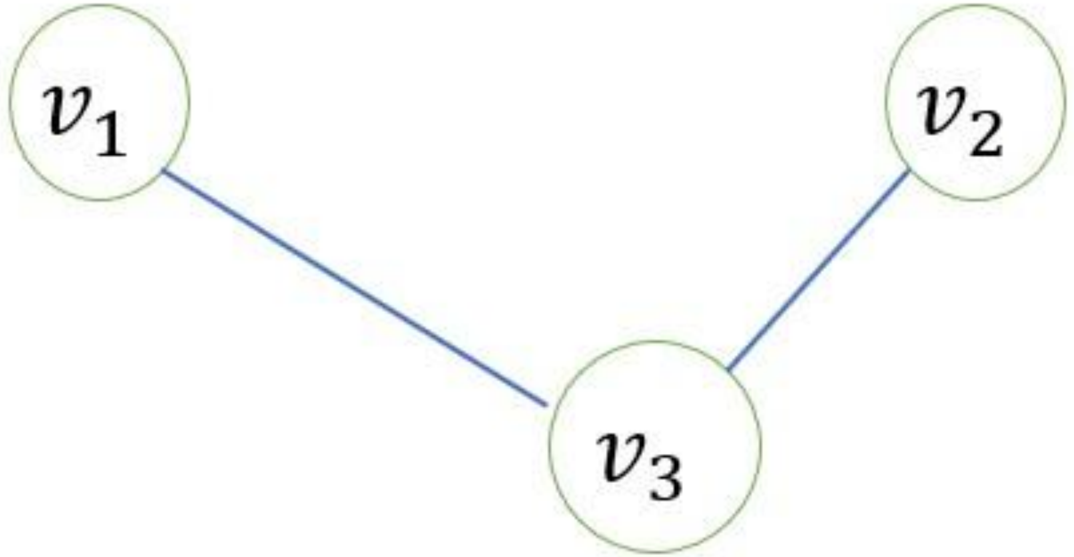
**Vërtetim:** Shënojmë $d = \Delta(G) = d_1$. Supozojme se ekziston një nyje $v_i$ ku $2 \leq i \leq d+1$ e tillë që $\{v_1, v_i\} \notin E_G$. Meqë $d_G(v_1) = d$, eksiston $v_j$ ku $j \geq d + 2$ e tillë që $\{v_1, v_j\} \in E_G$. Me që $j > i$ kemi $d_i \geq d_j$. Përderisa $\{v_1, v_j\} \in E_G$, por $\{v_j, v_t\} \in E_G$ atëhere ekziston një $v_t$ $(2 \leq t \leq n)$ e tillë që $\{v_1, v_t\} \notin E$. Zbatojmë një këmbim-dyshe lidhur me nyjet $v_1, v_j, v_i, v_t$.



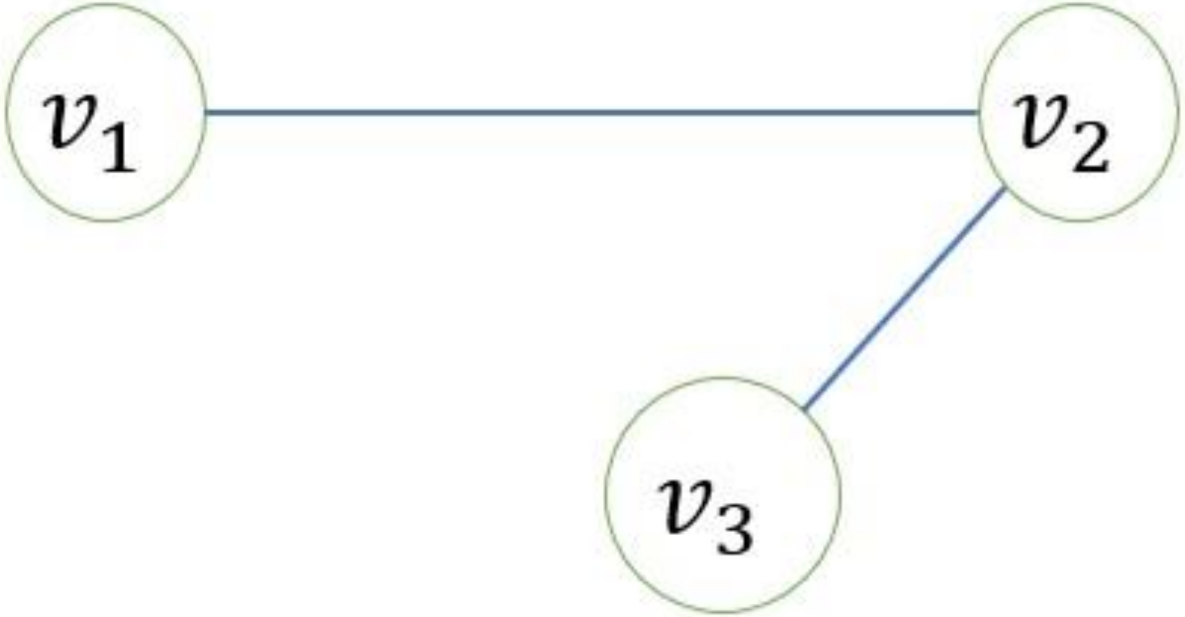

kurse $\{v_1, v_j\}$ $H$

Ky veprim na jep një graft ë ri $H$, ku $\{v_1, v_i\} \in E_G \notin E$, dhe fqinjët e tjerë të $v_1$ mbetentë jenëpo fqinjë të tij. Duke e përsëritur këtë proces për të gjitha indekset $i$ ku $\{v_1, v_i\} \notin E_G$ dhe $2 \leq i \leq d + 1$ na fitohet grafi i kërkuar $G'$.

**Shembull.** Duke e bere një këmbim dyshe për grafin e dhënë $G$ të gjendet $N_{G'}(v_1)$.



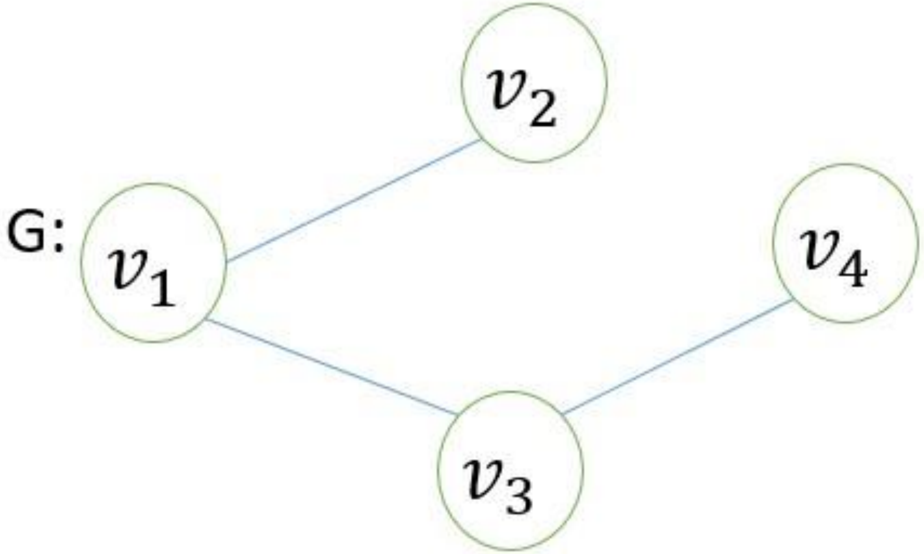

**Shembull.** $N_{G'}(v_1) = \{v_2\}$.

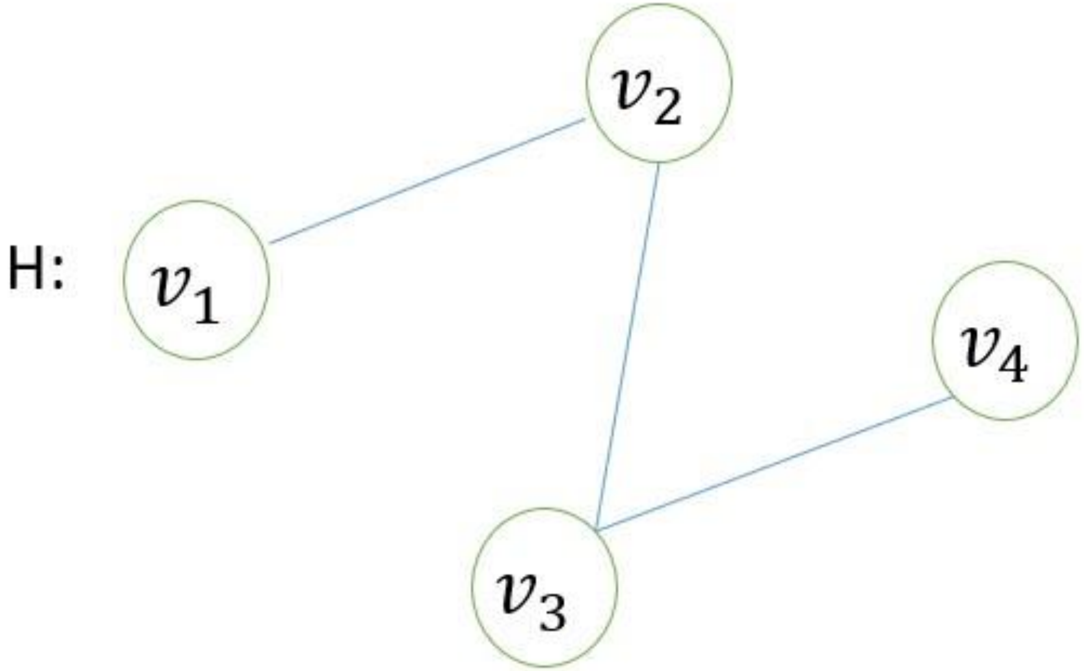



**Teoremë**: (Berge(Berzhe)-1973). Dy grafe $G$ dhe $H$ me të njëjtën bashkësi nyjesh $V$ vërtetojnë barazimin $d_G(v) = d_H(v)$ për të gjitha nyjet $v \in V$ atëhere dhe vetëm atëhere kur $H$ mund të merret prej $G$ me anë të një vargu këmbimesh-dyshe.

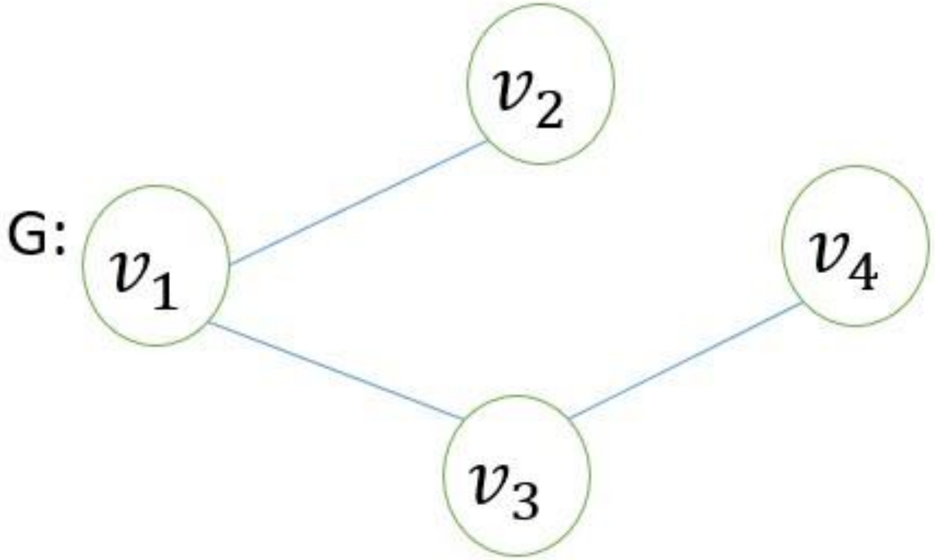
**Vërtetim**. Nëqoftë se $H$ merret nga $G$ me anë të një këmbimi-dyshe, atëhere është e qartë që $H$ ka të njëjtat valenca si $G$ . Nga ana tjetër përdorim induksionin matematik për rendin $v_G$ Le ta zemë se $G$ dhe $H$ kanë të njëjtat valenca dhe shënojmë $d = \Delta\, G$ . Në bazë të lemës së mësipërme ka vargje këmbimesh-dyshe që transformojnë $G$ në $G'$ dhe në të tillë që $N_{G'}$ $v_1 = \left\{v_2, \ldots, v_{d1+1}\right\} = N_{H'}\, v_1$ . Tani grafët $G' - v_1$ dhe $H' - v_1$ kanë të njëtat valenca. Nga hipoteza induktive $G'$, si pasojë edhe $G$ , mund të transformohen në $H'$ me anë të një vargu këmbimesh-dyshe. Së fundi është e qartë se $H'$ mund të transformohet në $H$ me anë të një "vargu invers" këmbimesh-dyshe, dhe kështu është provuar pohimi.

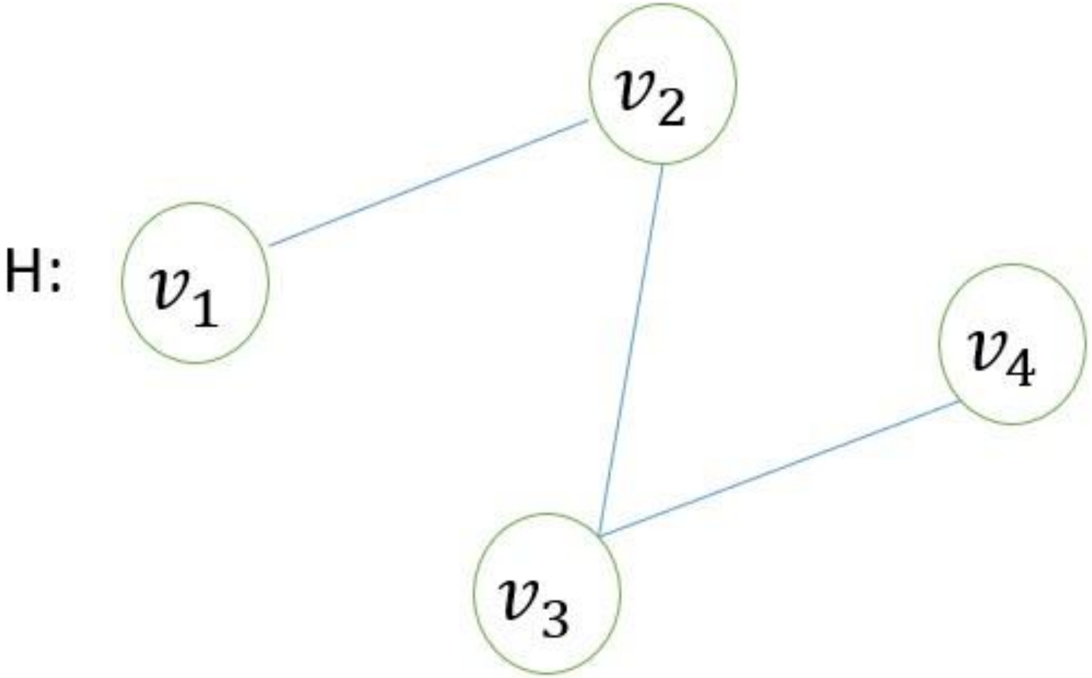
**Shembull.** Le te jene dhene grafi $G$ dhe $H$ qe me të njëjtën bashkësi nyjesh $V$ ashtu që $d_G(v) = d_H(v)$ për të gjitha nyjet $v \in V$ atëhere grafi $H$ mund të merret nga grafi $G$ prej me anë të një vargu këmbimeshdyshe.




**Shembull. L**e të jetë bërë një vargë këmbimesh dyshe i grafi $G$ ashtu që nga ky varg i këmbimeve është fituar grafi H atëherë grafi $G$ dhe $H$ janë me të njëjtën bashkësi nyjesh $V$ dhe vlenë $d_G(v) = d_H(v)$ për të gjitha nyjet $v \in V$.




**Përkufizim .** Le të jetë $d_1, d_2, \dots, d_n$ një varg zbritës numrash të plotë jo-negativë, d.m.th., $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ . Një varg i tillë quhet **grafikor** në qoftë se ekziston një graf $G = (V, E)$ me bashkësi nyjesh $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , i tillë që, $d_i = d_G(v_i)$ për të gjitha indekset $i$.

Pohimi vijues përcakton nëse një varg numrash të plotë është grafikor ose jo.

**Teorema . (Havel-1955, Hakimi- 1962).** Një varg

$$d_1, d_2, \dots, d_n \quad (d_1 \geq 1, \qquad n \geq 2) \qquad \dots \quad (1)$$

është grafikor atëhere dhe vetëm atëhere kur është grafikor vargu $d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d1+1} - 1, d_{d1+3} - 1, \dots, d_n$ (dhe të vendosur në renditjen jo-rritëse).

**Vërtetim**: ***I.*** Le të jetë vargu i dytë grafikor. Shqyrtojmë grafin $G$ të rendit $n$ – 1 me nyje dhe valenca

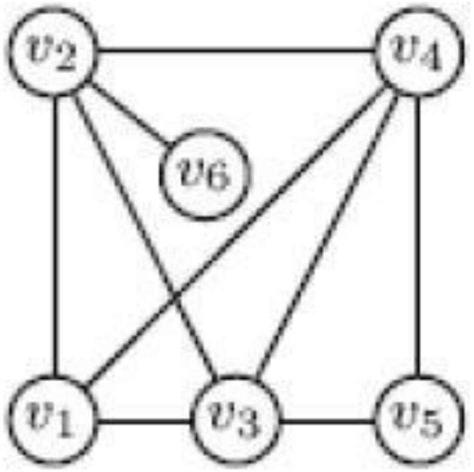
$$d_G(v_2) = d_2 - 1, \dots, d_G(v_{d1+1}) = d_{d1+1} - 1,$$
$$d_G(v_{d1+2}) = d_{d1+2}, \dots, d_G(v_n) = d_n$$

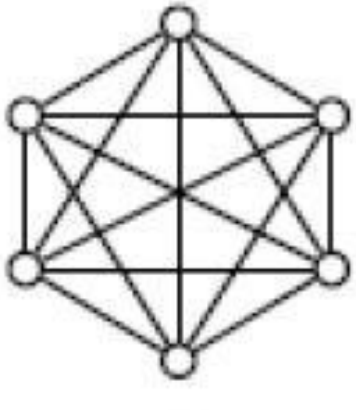
si në (1). Shtojmë një nyje të re $v_1$ dhe linjat $v_1v_i$ për të gjitha $i \in [2, d_{d1+1}]$. Atëherë grafin e ri $H$, $d_H(v_1) = d_1$, dhe $d_H(v_i) = d_i$ për të gjitha $i$ , pra $G$ është grafikor.

***II.*** Le të jetë $G$ grafikor, d.m.th., $d_G(v_i) = d_i$. Nga lema e mësipërme dhe teorema Berge mund të supozojmë që, $N_G(v_1) = \{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$. Por tani vargun e valencave të $G - v_1$ e kemi në $(1)$, dhe kështu është vërtetuar edhe pohimi i anasjelltë.

**Shembull**. Të studiohet nëse është grafikor vargu $s = 4,4,4,3,2,1$.

Nga teorema Havel: ($s$-grafikor)⇔( vargu 3,3,2,1,0 është grafikor) ⇔ ( vargu 2,1,0,0 është grafikor) ⇔ ( vargu 0,0,0 është grafikor). Por vargu i fundit i korespondon vargut diskret $K_3$ i cili është grafikor, dhe si pasojë edhe vargu i parë është grafikor. Me të vërtetë grafi në figurë ka valencat e vargut të dhënë $s$.



$K_6$

**Grafe specifikë**. Përkufizim. Grafi $G = (V, E)$ quhet **trivial** në qoftë se ka vetëm një nyje: $v_G = 1$ përndryshe ai quhet **jo-trivial**. Grafi $G = K_v$ quhet graf **komplet** në qoftë se cdo dy nyje të tij janë fqinje: $E = E(V)$. Të gjithë grafët kompletë të rendit $n$ janë izomorfë me njëri tjetrin dhe ata shënohen me $K_n$.

**Përkufizim. Komplement** i grafit $G$ quhet grafi $\overline{G}$ në $V_G$, ku

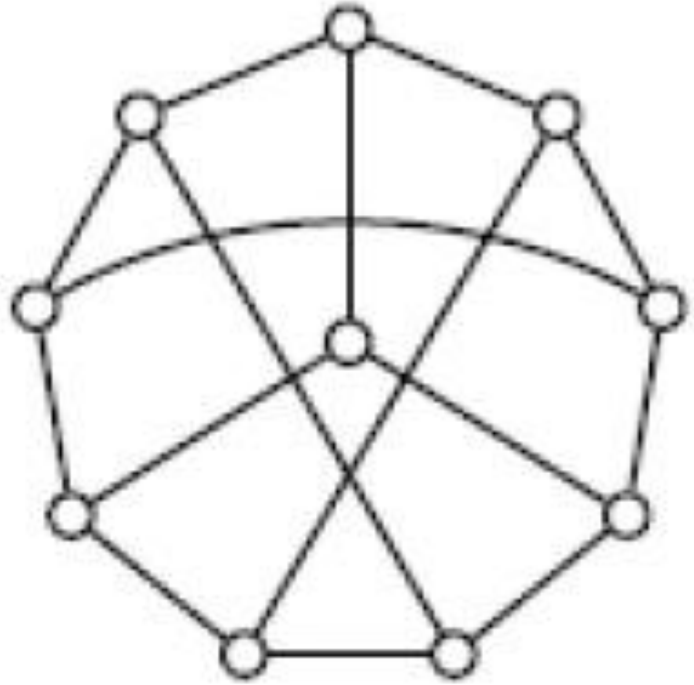
$E_{\overline{G}} = \{e \in E(V) : e \notin E_G\}$.

Komplementët $G = \overline{K_v}$ të grafëve kompletë quhen **grafë diskretë**. Në grafin diskret kemi $E_G = \emptyset$. Po ashtu, të gjithë grafët diskretë të rendit $n$ janë izomorfë me njëri tjetrin. Një graf $G$ thuhet se është i rregullt në qoftë se të gjitha nyjet e tij kanë të njëjtën valencë. Në qoftë se kjo valencë është $r$ grafi $G$ quhet i r-rregullt ose ***regular i rendit r***. Atëhere, grafi diskret është i 0-rregullt, grafi $K_n$ është i (n-1)-rregullt. Në vecanti,

$\underline{n(n-1)}$ $n\ n-1$

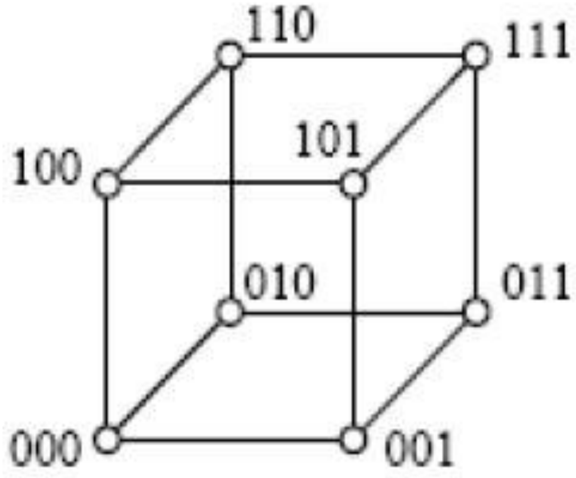
$K_n = \quad {}_2$ nga rrjedh se $\leq \frac{(\quad)}{2}$ ${}_G$ për të gjithë grafët e rendit $n$.

**Shembull**. Grafi Petersen është graf i 3-rregullt i rendit 10.



**Shembull.** Le të jetë $k \geq 1$ një numër i plotë, dhe shqyrtojmë bashkësinë $B^k$ të gjithë zinxhirëve binarë me gjatësi $k$. Kështu

}

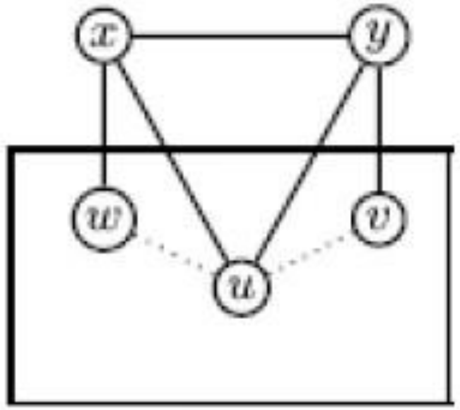



$B^3 = \{000, 001, 010, 100$, $011, 101, 110, 111$ (shiko figurën).

Le të jetë $Q_k$ grafi që quhet $k$-kub, me $V_{Qk} = B^k$, ku $uv \in E_{Qk}$ atëhere dhe vetëm atëhere kur vargjet $u$ dhe $v$ kanë ndryshim vetëm në një pozicion. Rendi i $Q_k$ është $V_{Qk} = 2^k$, (numri i zinxhirëve binarë me gjatësi $k$). Po ashtu $Q_k$ është i $k$-rregullt, prandaj nga lema e dorështrëngimit kemi: $_{Qk} = k \cdot 2^{k-1}$

???

**Shembull.** Le të jetë $n \geq 4$ një numër çfarëdo çift. Tregohet me induksion matematik që ekziston grafi $G$ i 3-rregullt dhe $v_G = n$.



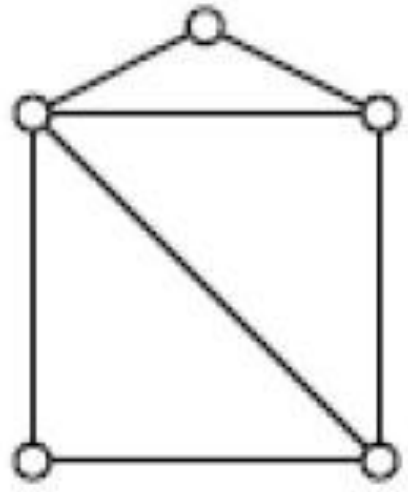

*Vërtet*, për $n = 4$, $K_4$ është i 3-rregullt. Le të jetë $G$ graf i 3-rregullt dhe i rendit $2m - 2$ dhe supozojmë që $uv, uw \in E_G$. Tani, le të kemi

$V_H = V_G \cup \{x, y\}$ dhe $E_H = (E_G \setminus \{uv, uw\}) \cup \{ux, xv, uy, yw, xy\}$.

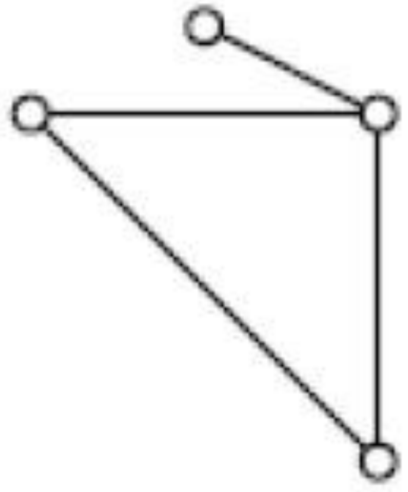
Atëhere, $H$ është i 3-rregullt dhe i rendit $2m$.(Shiko figurën më lart).

Nga lema e dorështrëngimit rrjedh se të gjithë grafët e 3-rregullt e kanë rendin çift???

- **Nëngrafët**. Grafi $H$ quhet **nëngraf** i grafit $G$, shënohet $H \subseteq G$ në qoftë se $V_H \subseteq V_G$ dhe $E_H \subseteq E_G$.

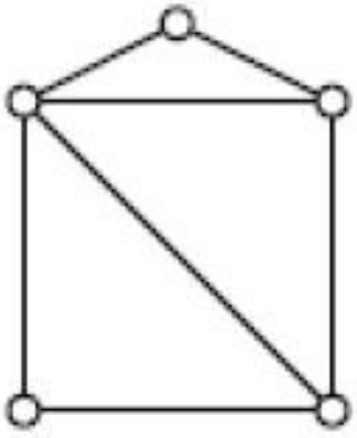


Grafi G

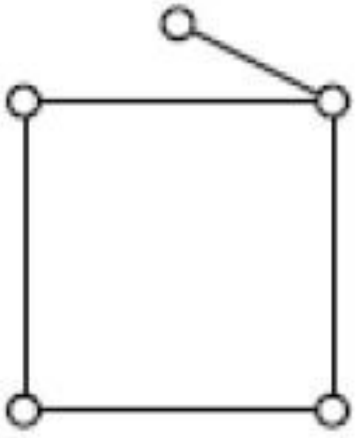


Nëngrafi i grafit G

Nëngrafi $H \subseteq G$ thuhet se është **nëngraf shtrirës** i grafit $G$ në qoftë se çdo nyje e grafit $G$ është në grafin $H$, d.m.th., $V_H = V_G$.

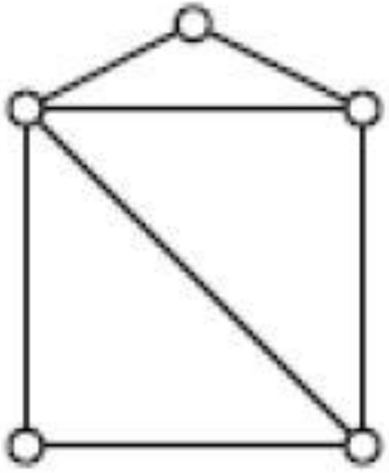


Grafi G

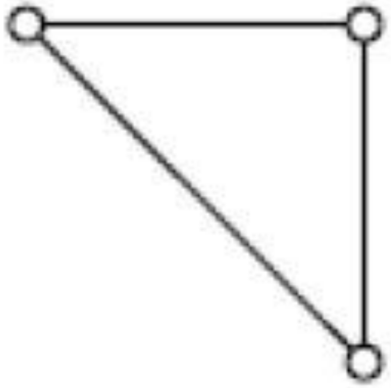


Nëngrafi shtrirës i grafit G

- Nëngrafi $H \subseteq G$ thuhet se është **nëngraf i induktuar** i grafit $G$ në qoftë se $E_H = E_G \cap E(V_H)$. Në këtë rast nëngrafi $H$ është i induktuar nga bashkësia e nyjeve të tij $V_H$ . Në nëngrafin e induktuar $H \subseteq G$ , bashkësia e linjave $E_H$ përbëhet nga të gjitha linjat $e \in E_G$ të tilla që $e \in E(V_H)$. Çdo nënbashkësi jo-boshe $\mathrm{A} \subseteq V_G$ ka në korespondencë një nëngraf të induktuar të vetëm $\mathrm{G}[A] = (A, E_G \cap E(V_H))$



Grafi G



Nëngrafi i indukuar i grafit G

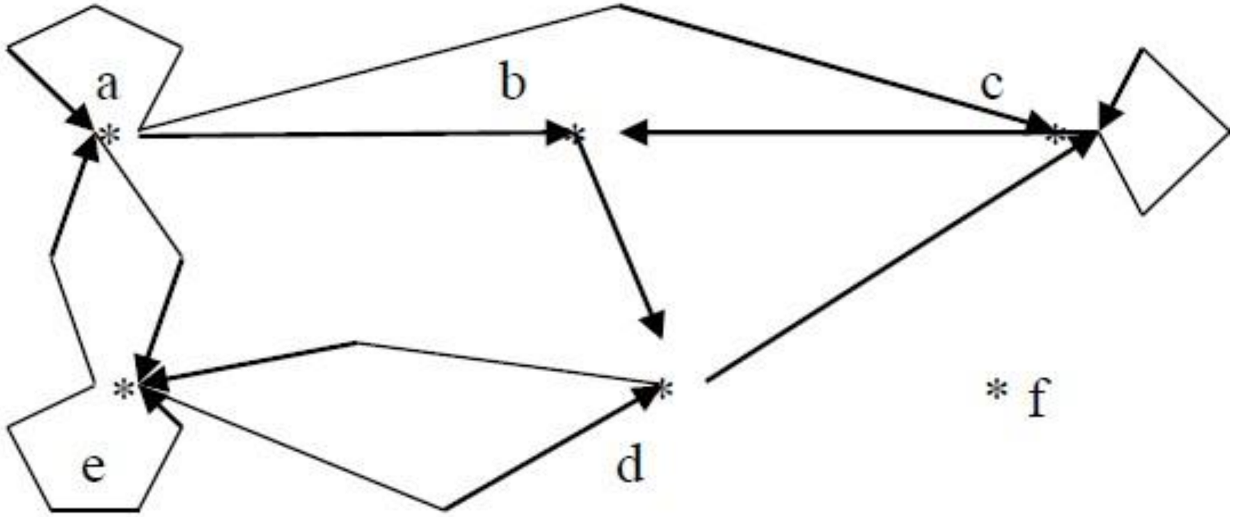
**PËRKUFIZIM.** Në qoftë se $(u, v)$ është një linjë e grafit $G$ me linja të orientuara (drejtuara), thuhet se $u$ **është fqinjë** për $v$, kurse $v$ është fqinjë prej $u$. Nyja $u$ quhet **nyja nisëse** (fillimore ose burimore) e $(u, v)$, kurse $v$ quhet **nyja fundore** (terminale) e $(u, v)$. Për lakun, nyja nisëse dhe ajo terminale janë e njëjta nyje.

**PËRKUFIZIM.** Në një graf me linja të drejtuara **valenca hyrëse** e nyjes $v$ , e shënuar me $deg^{-}(v)$, është e barabartë me numrin e linjave që kanë si terminal të tyre nyjen $v$. **Valenca dalëse** e nyjes $v$, e shënuar me $deg^{+}(v)$

, është e barabartë me numrin e linjave që kanë si nisje (fillim) të tyre nyjen $v$.

Një lak i një nyje kontribuon 1 herë tek të dya valencat hyrëse dhe dalëse të kësaj nyje.

**Shembull.** Të gjenden valencat hyrëse dhe dalëse të secilës nyje në grafin $G$ me linja të orientuara (drejtuara) të paraqitur në figurë.




Graf i orientuar

**Shembull.** Të gjenden valencat hyrëse dhe dalëse të secilës nyje në grafin $G$ me linja të orientuara (drejtuara) të paraqitur në figurë.

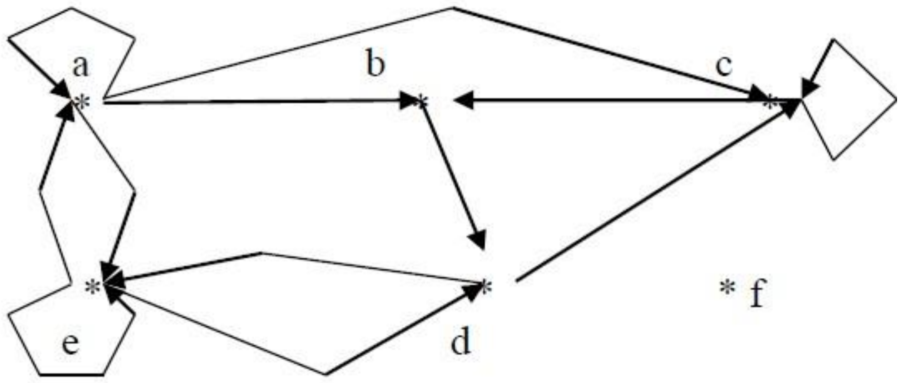
**Zgjidhje**: Valencat hyrëse në $G$ janë:

$$deg^{-}(a) = 2, deg^{-}(b) = 2, deg^{-}(c) = 3,$$

$$deg^{-}(d) = 2, deg^{-}(e) = 3, deg^{-}(f) = 0$$

Valencat dalëse në $G$ janë:

$$deg^{+}(a) = 4, deg^{+}(b) = 1, deg^{+}(c) = 2,$$
$$deg^{+}(d) = 2, deg^{+}(e) = 3, deg^{+}(f) = 0$$




Graf i orientuar

**TEOREMË.** Le të jetë $G = (V, E)$ një graf me linja të drejtuara. Atëhere,

$$\sum_{v \in V} deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} deg^{+}(v) = |E|.$$

**Vërtetim**: Përderisa çdo linjë ka një nyje nisëse (fillimore) dhe një nyje terminale(fundore), shuma e valencave hyrëse dhe shuma e valencave dalëse e të gjitha nyjeve të grafit me linja të drejtuara janë të barabarta. Secila nga këto shuma tregon numrin e linjave në graf, i cili shënohet me $|E|$ (lexohet: kardinali i E). Në një graf me linja të drejtuara ka shumë veti që nuk varen nga drejtimi i linjave të tij. Prandaj, shpesh është e dobishme të mos merren parasysh këto drejtime. Grafi i padrejtuar që merret nga mosmarrja parasysh e drejtimeve të linjave quhet **graf nënshtresor i padrejtuar**. Grafi me linja të drejtuara dhe grafi nënshtresor i padrejtuar i tij kanë të njëjtin numër linjash.

Numrin e linjave me një skaj në nyjen $v$ e shënojmë me $|E_v|$.

$\delta(G) = \min\{\deg(v) : v \in V\}$ është valenca minimale në grafin $G$.

$\Delta(G) = \max\{\deg(v) : v \in V\}$ është valenca maksimale në grafin $G$.

Në qoftë se të gjitha nyjet e grafit $G$ kanë të njëjtën valencë $k$, atëhere $G$ quhet i ***k*-rregullt**, ose thjesht i rregullt.

Grafi i 3-rregullt quhet **kubik**.

Numri

$$\overline{\deg}(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg(v)$$

quhet **valencë mesatare** e grafit $G$ ( $|V|$ tregon numrin e gjithë nyjeve në $G$). Është e qartë që:

$$\delta(G) \leq \overline{\deg}(G) \leq \Delta(G).$$

Lidhja midis $|E|$ dhe $|V|$ gjendet fare lehtë duke patur parasysh se për çdo linjë ka dy nyje (skajet e saj). Atëhere kemi:

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} \deg(v) = \frac{1}{2}\cdot|V|\cdot\overline{\deg}(G).$$

Nganjëherë valenca mesatare shprehet drejtpërdrejt dhe shënohet $\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}$

nga rrjedhë se $\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|} = \frac{1}{2}\overline{\deg}(G).$

Në qoftë se një graf $G$ ka një valencë minimale të madhe, d.m.th. grafi ka lokalisht shumë linja për nyje, natyrisht që grafi ka shumë linja për nyje edhe globalisht sepse

$$(G) = \frac{1}{2}\overline{\deg(G)} \geq \frac{1}{2}\delta(G)$$

**PËRKUFIZIM.** Le të jetë dhënë grafi $G = (V, E)$. Në qoftë se $V' \subseteq V$ dhe $E' \subseteq E$ atëhere grafi $H = (V', E')$ quhet **nëngraf** i $G$, kurse $G$ quhet **supergraf** i $H$, dhe shënohet $H \subseteq G$ .

**TEOREMË.** Çdo graf $G$ me të paktën një linjë ka një nëngraf $H$ për të cilin

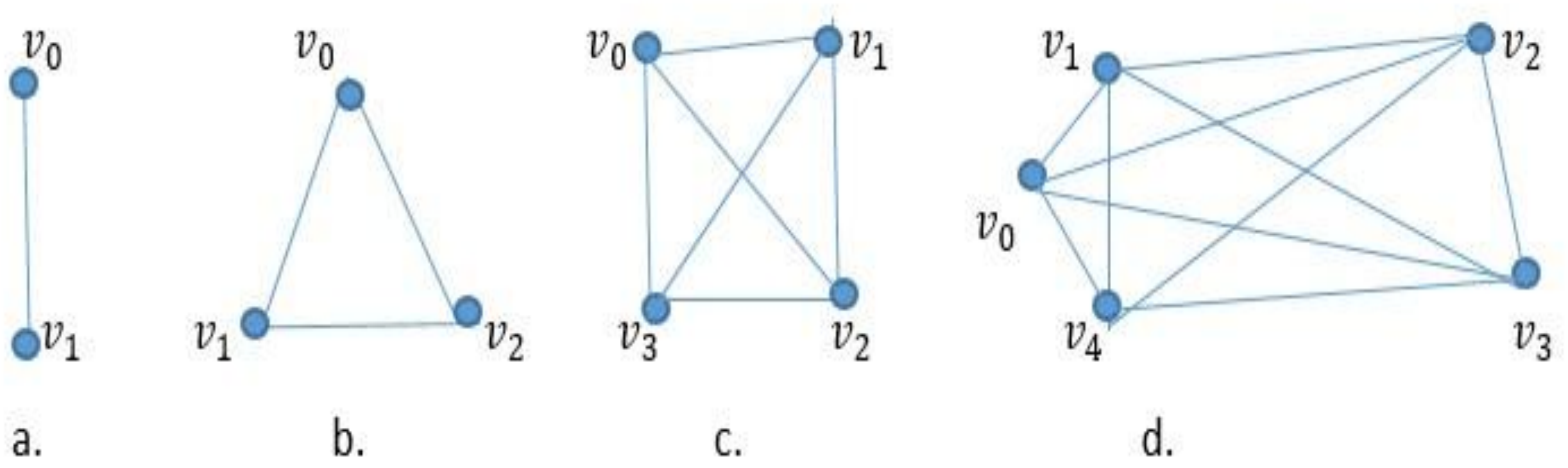
$$\delta(H) > \ (H) > \ (G)$$

**Vërtetim:** Për të ndërtuar nëngrafin $H$ duke u nisur nga grafi $G$, fshihen nyjet me valencë të vogël një nga një deri sa të mbeten vetëm nyje më valencë të madhe. Deri sa do të vazhdohet procesi i fshirjeve të nyjeve të tilla, ose deri tek cila valencë? Ky proces do të vazhdohet deri sa të mos zvogëlohet vlera e $(\ )$ ku $G = \frac{1}{2}\overline{\deg}(G)$.

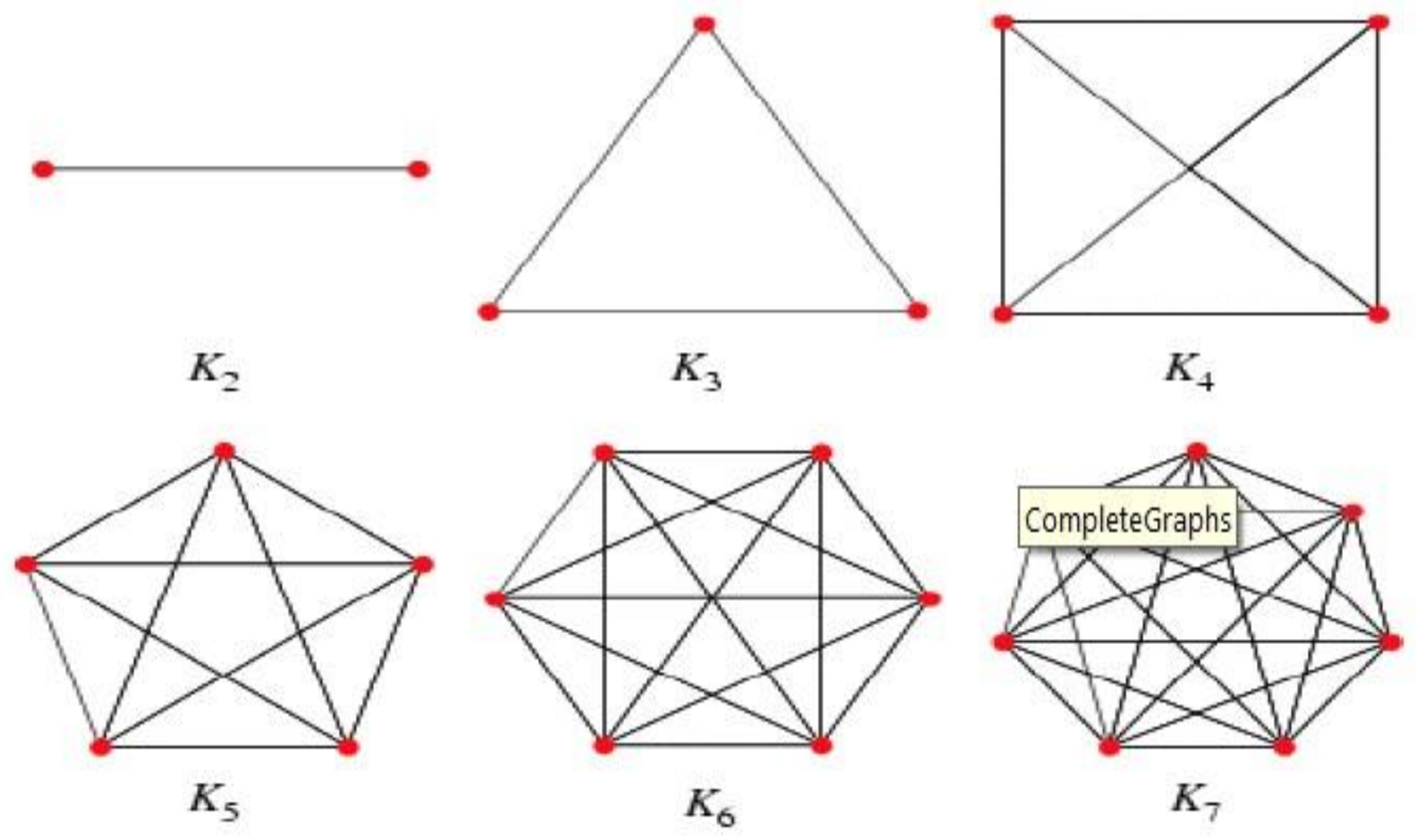
Pra, procesi i fshirjes do të vazhdojë deri tek ajo nyje v për të cilën: $\deg v (=)$. Pas këtij hapi numri i nyjeve vazhdon të zvogëlohet me 1, kurse numri i linjave zvogëlohet me te shumtën që shpreh numrin mesatar të linjave për nyje, kështu që $(\ )\ \frac{|E|}{|\ |}$ raporti i përgjithshëm $G$ $=$i numrit të linjave me numrin e nyjeve nuk do të $V$ zvogëlohet. Formalisht, ndërtohet një varg nëngrafesh të induktuar në $G$, $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots$ (indekset tregojnë numrin e nyjeve të fshira) të tilla që: n.q.s. $G_i$ ka një nyje $v_i$ me valencë $\deg v_i \leq G_i$ atëhere ndërtojmë më tutje nëngrafin $G_{i+1} = G_i - v_i$ (d.m.th. fshihet nyja $v_i$ ; n.q.s. jo, atëhere ndërpritet procesi i fshirjes së nyjeve(apo vargu i nëngrafeve) dhe caktohet $H = G_i$. Sipas rasteve të nyjes $v_i$ kemi $(G_{i+1}) \geq G_i$ për të gjitha i, prej nga $H \geq G$ . Meqë $H$ është grafi për të cilën nuk ka më nyje për tu fshirë atehere, $\delta\ H > H$ , dhe pohimi është vërtetuar.

**Përkufizim.** Grafi $G = G(V, E)$ paraqet graf të plotë (komplet) nëse eksiton brinjë në mes cilave do dy kulmeve të tijë. Grafi i plotë me $n$ kulme shënohet me $K_n$.

**Shembull**. Grafet $K_2$ , $K_3$ , $K_4$ dhe $K_5$ janë paraqitur, respektivishtë, ne figurën a,b,c,d.




**Shembull.** Grafet Kompletë(të plotë). **Grafi komplet me $\boldsymbol{n}$ nyje**, i shënuar me $K_n$, është grafi i thjeshtë që përmban saktësisht një linjë ndërmjet çdo çifti nyjesh të dallueshme. Grafët $K_n$, për $n = 2,3,4,5,6,7$ paraqiten si në figurë.




Grafet $K_n$..për..$n = 2,3,....,7$

**Vetitë e $K_n$**

(1) Çdo nyje (kulm) në $K_n$ e ka fuqinë $n - 1$. $n \; n-1$

(2) $K_n$ ka $\frac{(\qquad)}{2}$ degë (brinjë)

(3) $K_n$ përmbajnë më së shumti degë prej gjithë grafeve të thjeshta me $n$ degë.

**Përkufizim**. Grafi $G = G(V, E)$ quhet graf bipartitiv nëse bashkësia $V$ mund të shprehet si union e bashkësive joboshe dhe joprerëse. Psh $V = A \cup B$ ashtu që secila brinjë të jetë e trajtës $\{a, b\}$ , për të cilën $a \in A$ dhe $b \in B$ . Prandaj, cilado brinjë lidhë kulmin nga bashkësia $A$ me kulmin nga bashkësia $B$, kurse çfardo do dy kulme që i takojnë bashkësis $A$ ose bashkësis $B$ nuk janë të lidhura me brinjë. Grafi bipartitiv quhet graf bipartitiv i plotë $K_{m,n}$ nëse bashkësi $A$ përmban $m$ kulme, bashkësia $B$ përmban $n$ kulme dhe nëse për çdo kulm $a \in A$ , $b \in B$ , $\{a, b\} \in E$. Pra, për çdo kulm $a \in A$ dhe për çdo kulm $b \in B$, eksiston brinja e cila i lidhë ata.

**Shembull**. Grafet $K_{1,2}$ , $K_{2,3}$ , $K_{2,2}$ dhe $K_{3,3}$ janë treguar, respektivishtë, në figurat a, b, c,d.

a. b. c. d.