Universiteti Publik “Kadri Zeka”,

Gjilan

Fakulteti i Shkencave Kompjuterike

Lënda: Teoria e Grafeve

Tema:

Udhët, shtigjet dhe ciklet

Përkufizim: Le të jetë dhënë grafi $G=(V,E)$. Vargu i alternuar i kulmeve dhe brinjëve

$i=i_0, e_1, i_1, e_2, i_2, \ldots, i_{k-1}, e_k, i_k, \ldots, i_{n-1}, e_n, i_n=j$ i tillë që çdo brinjë e_k e vargut ka për skaje kulmet i_{k-1} dhe i_k quhet ***udhëtim*** (ose $i-j$ *udhëtim*) në grafin G.

Kulmet i dhe j quhen skaje të udhëtimit.

Shembull.1. A paraqet udhëtim vargu
U_1: $1, e_3, 2, e_3, 1, e_2, 4, e_8, 5$ për

grafin e dhënë G,

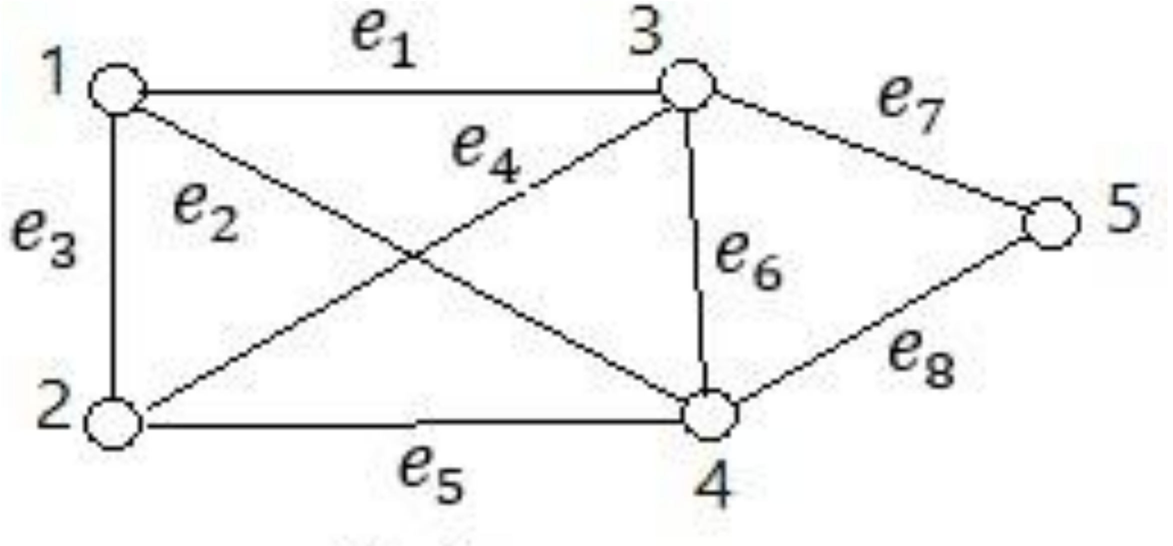


fig.1.

Shembull.1. Vargu

U_1: $1, e_3, 2, e_3, 1, e_2, 4, e_8, 5$ është

udhëtim në grafin G,

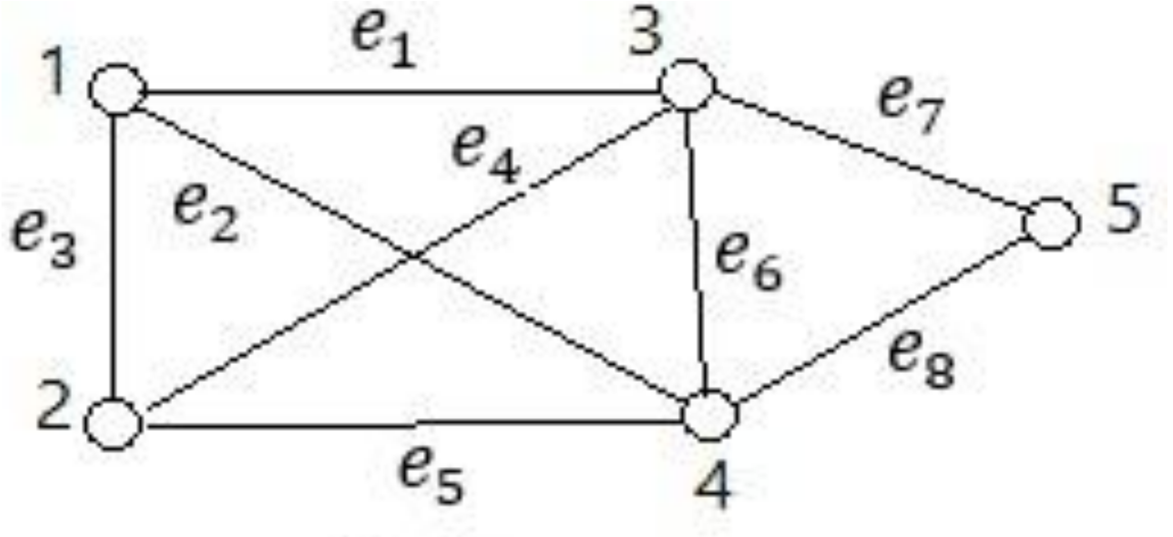


fig.1.

Shënim: Lejohet përsëritja e brinjëve brenda të njëjtit udhëtim (Shiko grafin në fig.1.).

Shembull.2. Vargu

U_2: $1,\ e_1,\ 3,\ e_6,\ 4,\ e_8,\ 5,\ e_7,\ 3,\ e_4,\ 2$ a

është udhëtim në grafin e dhënë G ?

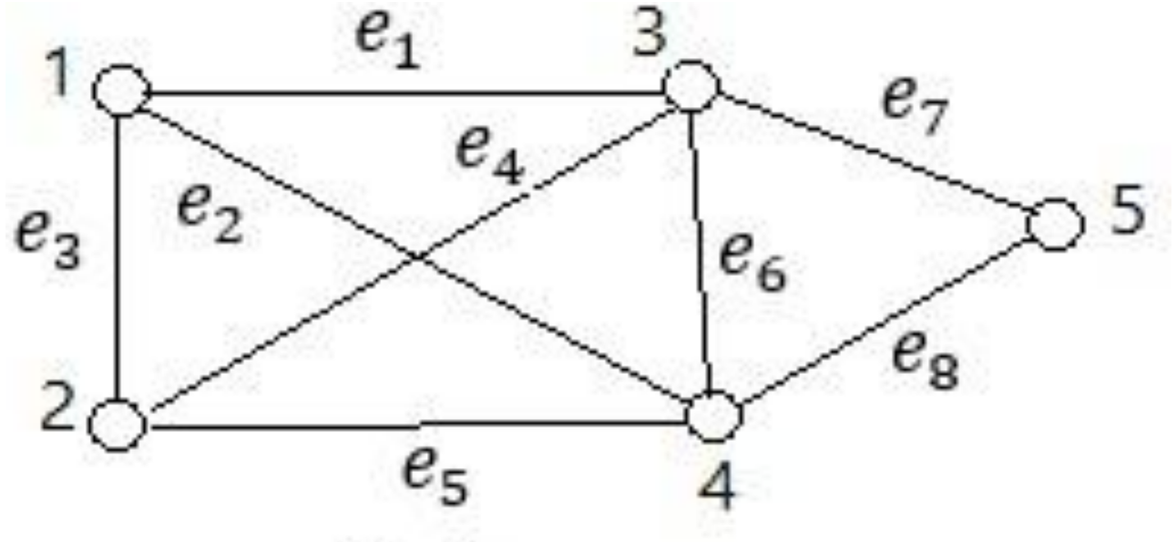


fig.1.

Shembull.2. Vargu

U_2: 1, e_1, 3, e_6, 4, e_8, 5, e_7, 3, e_4, 2 është

udhëtim në grafin G,

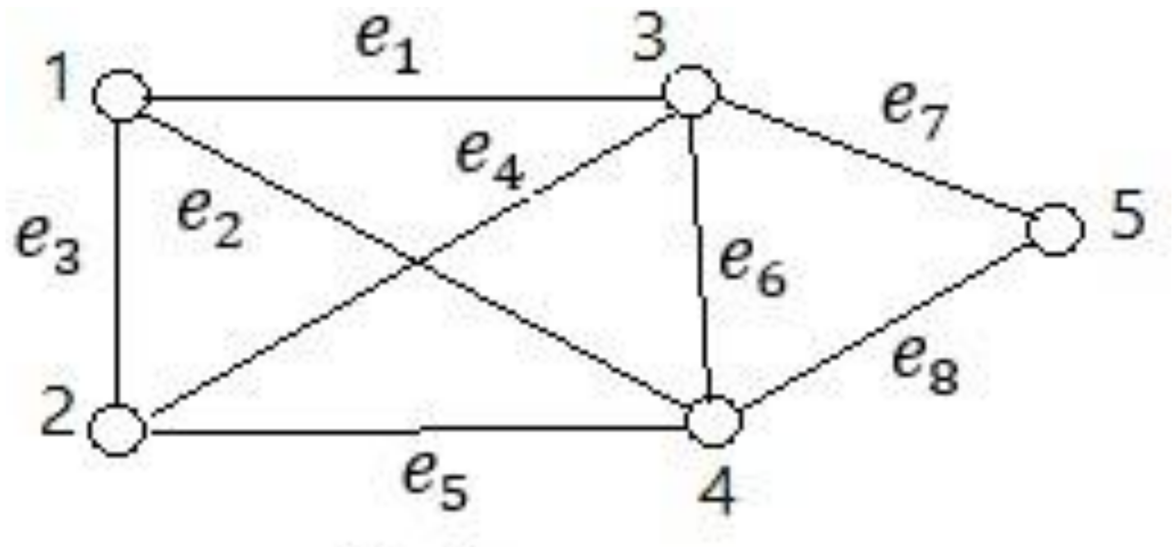


fig.1.

Shembull.3. Vargu U_3: $1, e_2, 4, e_6, 3, e_4, 2$ a është udhëtim në grafin G ?

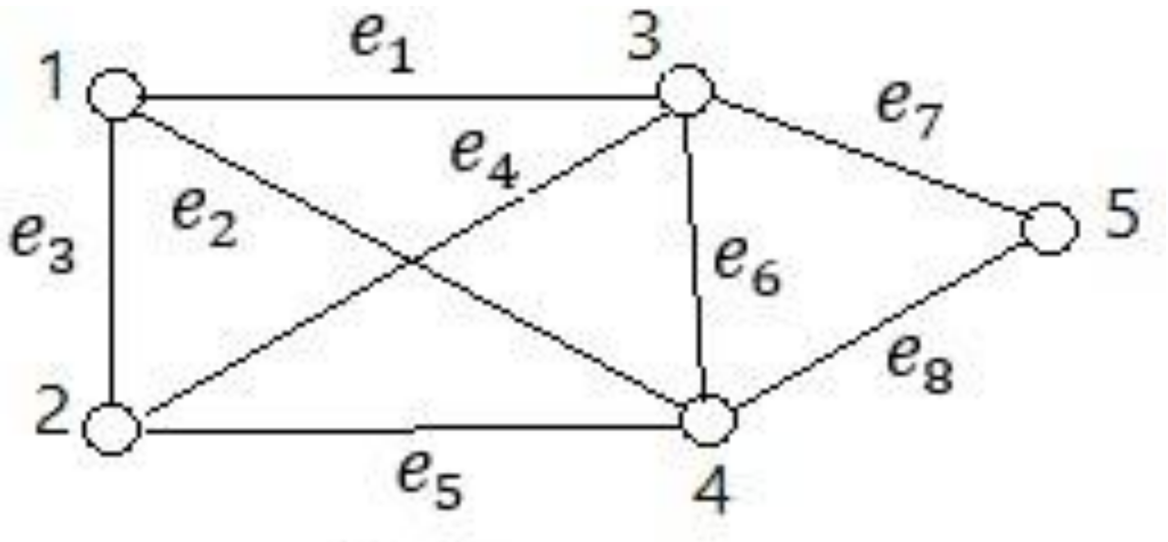


fig.1.

Shembull.3. Vargu U_3: 1, e_2, 4, e_6, 3, e_4, 2 është udhëtim në grafin G ?

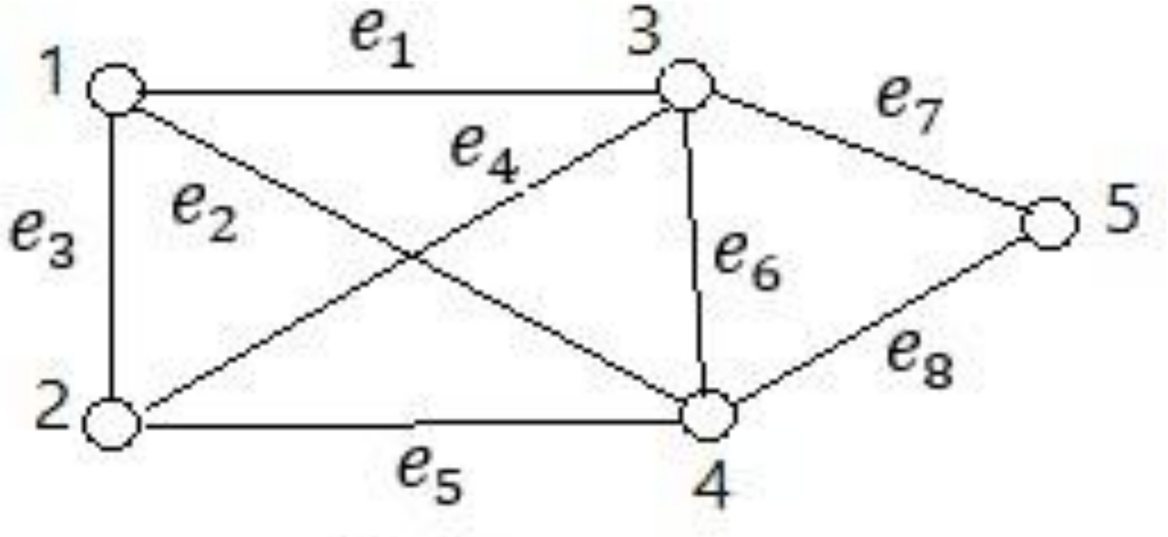


fig.1.

Përfundime:

- Nga shembujt e mësipërm mundë të përfundojmë se gjatë një $i - j$ udhëtimi ka mundësi të përsëriten:
- vetëm brinjët,
- vetëm kulmet,
- edhe brinjët dhe kulmet,

- as brinjët e as kulmet.
- Numrin e brinjëve (degëve, linjave) të një udhëtimi e quajmë ***gjatësi e udhëtimit***.
- Nëse kalojmë gjatë udhëtimit ***k*** degë atëherë gjatësia e udhëtimit në grafin G është ***k***.

- **Shembull.** Sa e ka gjatësin udhëtimi $1, e_3, 2, e_5, 4, e_8, 5$. (figura 1)

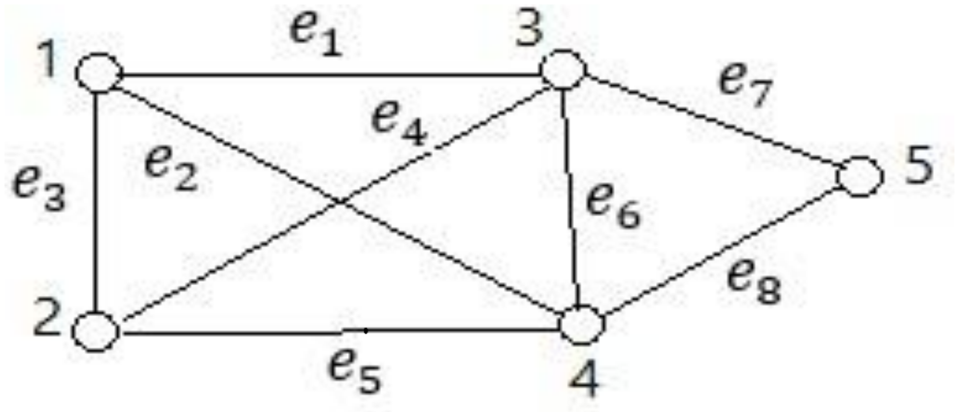


fig.1.

- **Shembull. U**dhëtimi $1, e_3, 2, e_5, 4, e_8, 5$ e ka gjatësin 3. (figura 1)

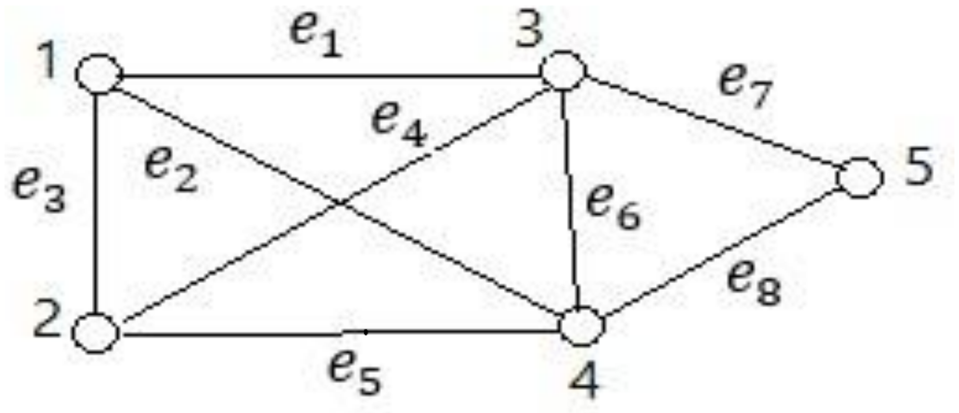


fig.1.

- Nëse skajet i dhe j të udhëtimit përputhen dmth $i = j$, udhëtimi quhet i mbyllur.

Shembull. A është i mbyllur udhëtimi $1, e_3, 2, e_5, 4, e_8, 5, e_7, 3, e_1, 1$? (Arsyeto përgjigjen).

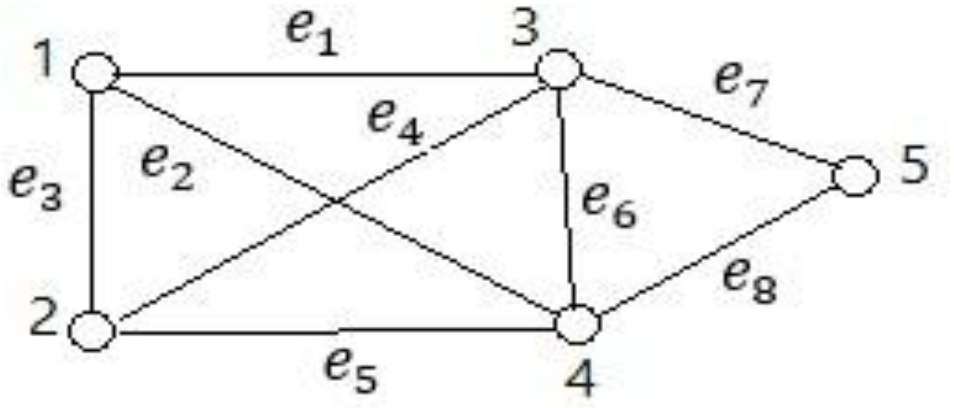


fig.1.

Shembull. Udhëtimi $1, e_3, 2, e_5, 4, e_8, 5, e_7, 3, e_1, 1$ është i mbyllur sepse fillon në nyjen 1 dhe mbaron po ashtu në nyjen 1.

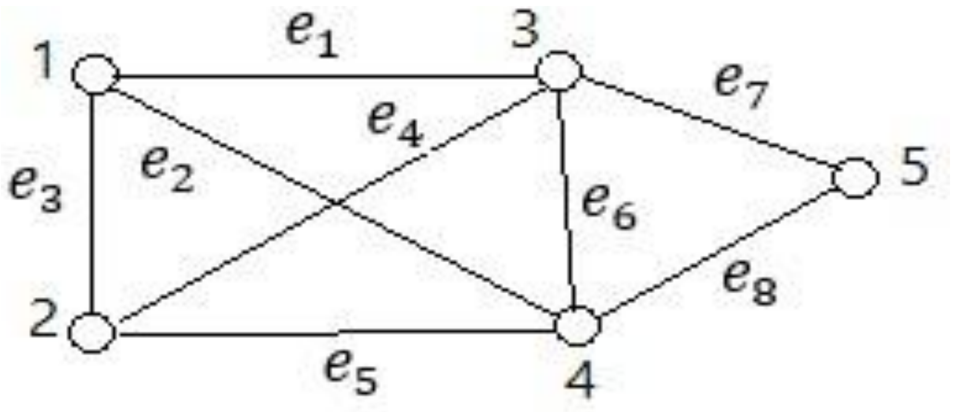


fig.1.

- Nëse skajet i dhe j të udhëtimit janë të ndryshëm $i \neq j$, udhëtimi quhet i hapur.

Shembull. A është i hapur udhëtimi $1, e_3, 2, e_5, 4, e_8, 5$?

(Arsyeto përgjigjen).

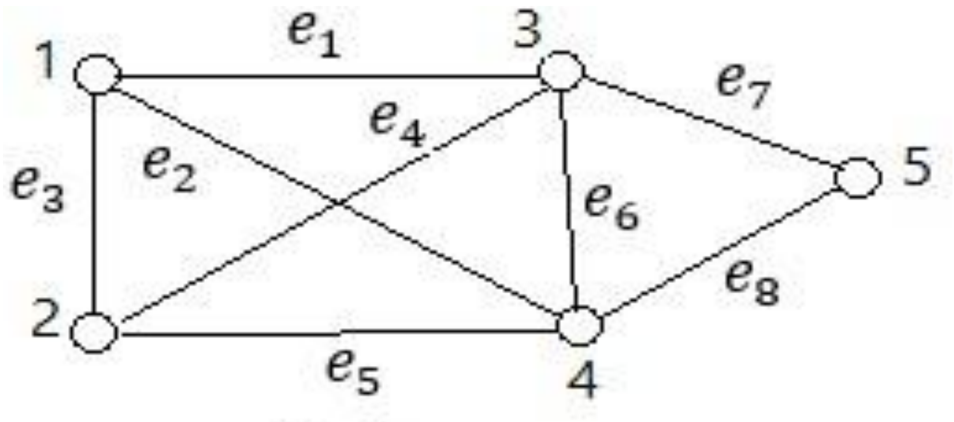


fig.1.

- Nëse skajet i dhe j të udhëtimit janë të ndryshëm $i \neq j$, udhëtimi quhet i hapur.

Shembull. Udhëtimi $1, e_3, 2, e_5, 4, e_8, 5$ është i hapur sepse fillon në nyjen 1 dhe mbaron në nyjen 5.

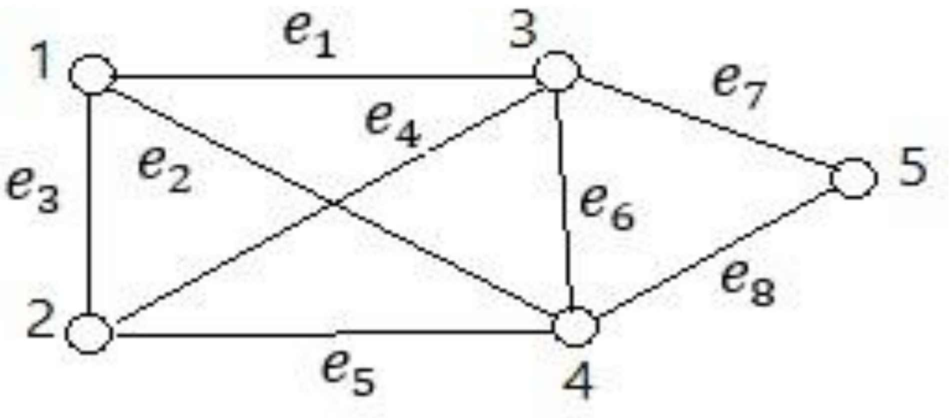
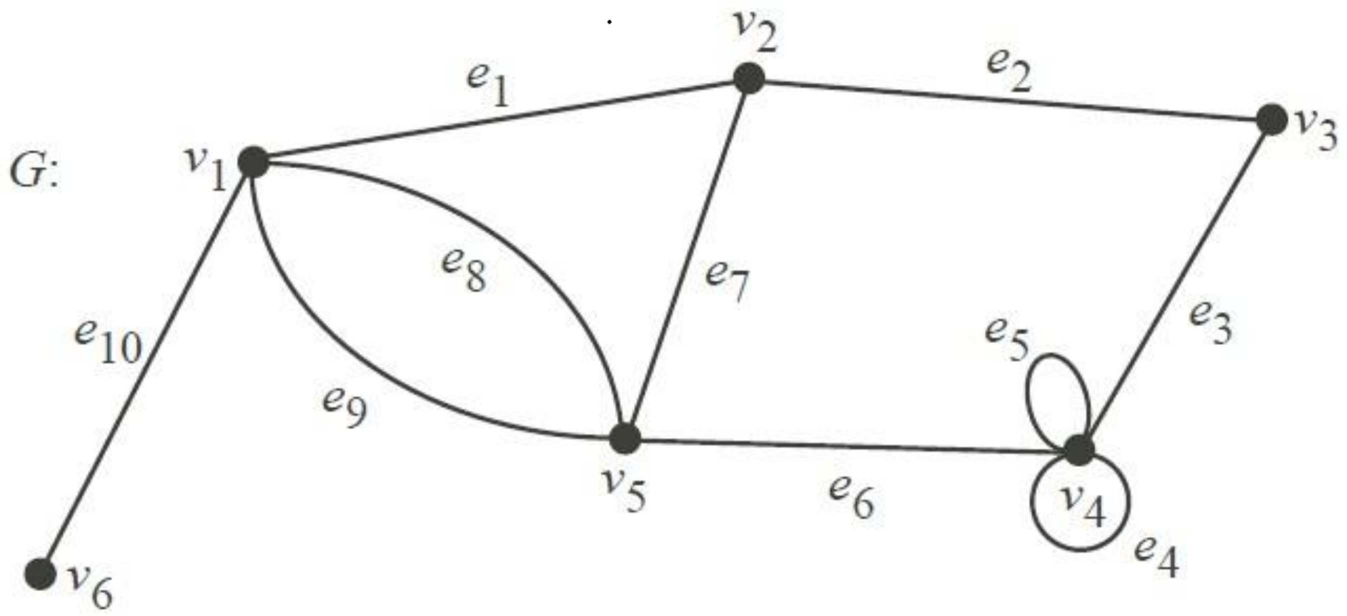


fig.1.

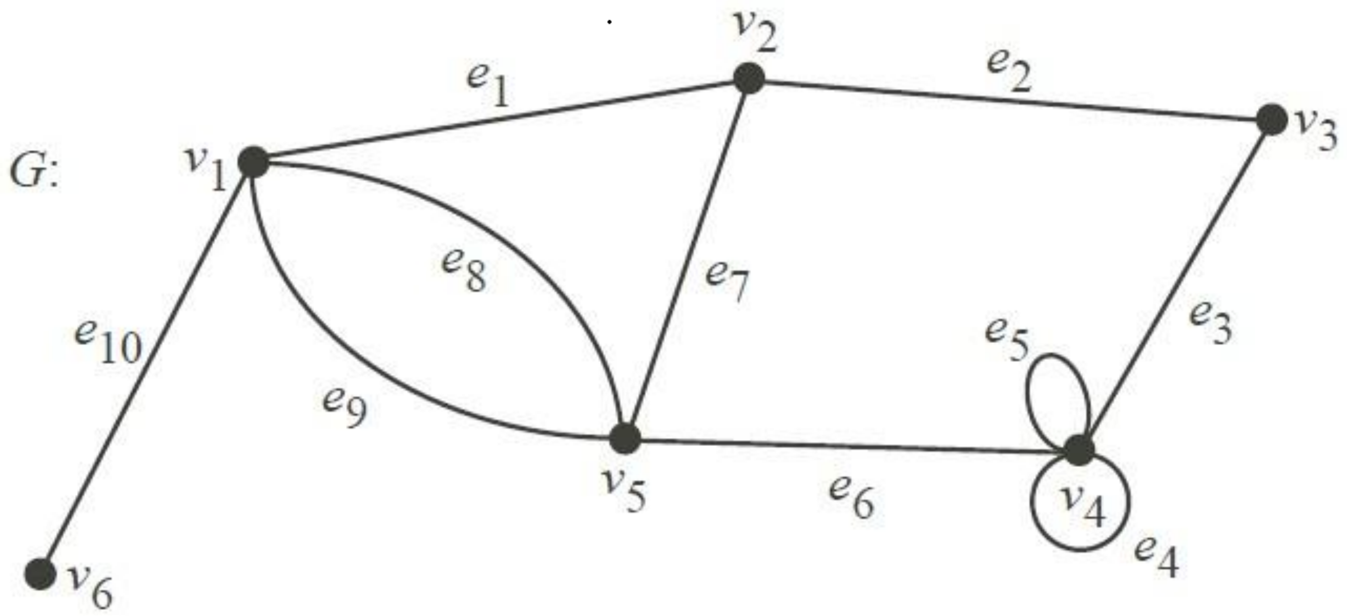
Shembull. Në grafin e dhënë G, a është i hapur apo i mbyllur udhëtimi? (Arsyeto përgjigjen).

$$v_2, e_7, v_5, e_8, v_1, e_8, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_5, v_4$$



Shembull. Në grafin e dhënë G, është i hapur udhëtimi, sepse fillon në brinjën v_2 dhe mbaron në brinjën v_4 .

$$v_2, e_7, v_5, e_8, v_1, e_8, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_5, v_4$$

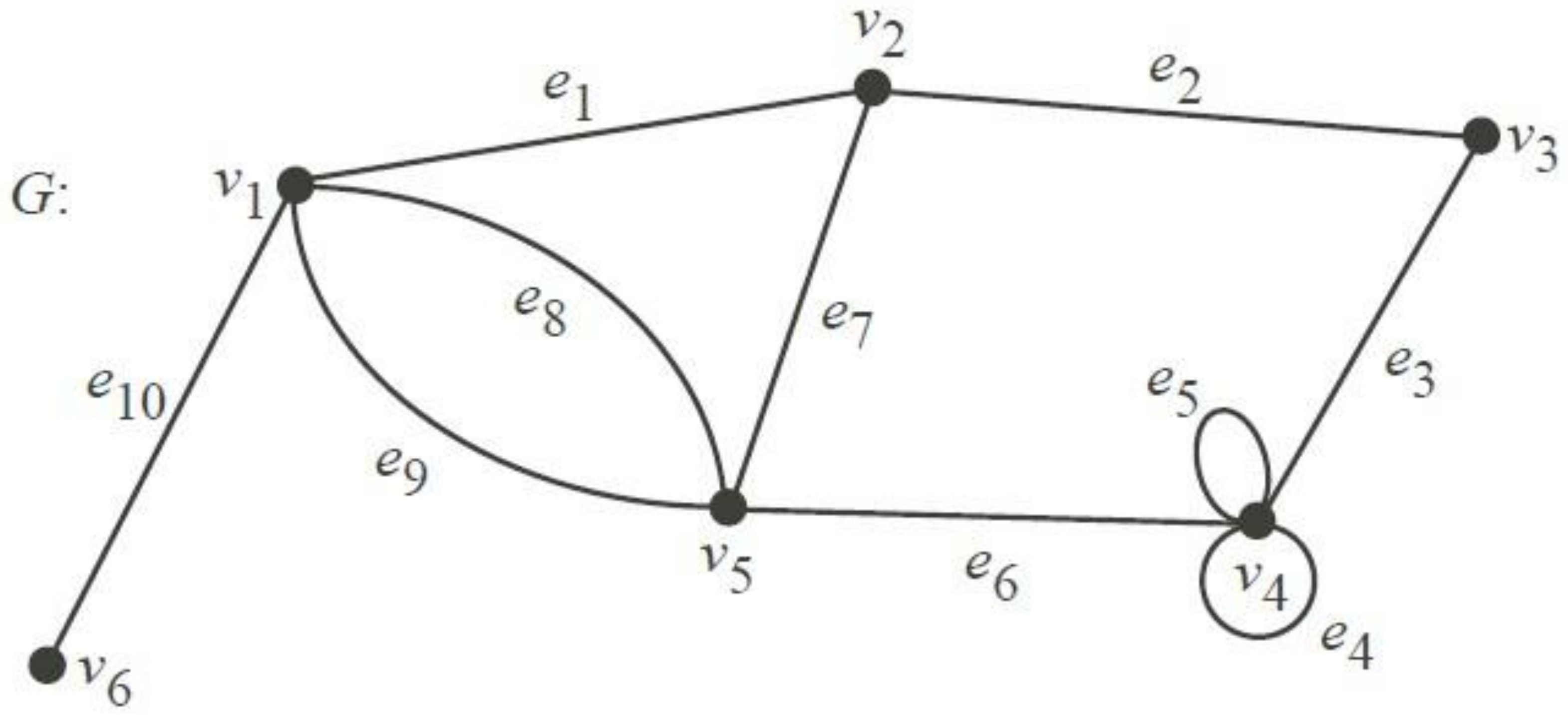


Shembull. Në grafin e dhënë G

Udhëtimi

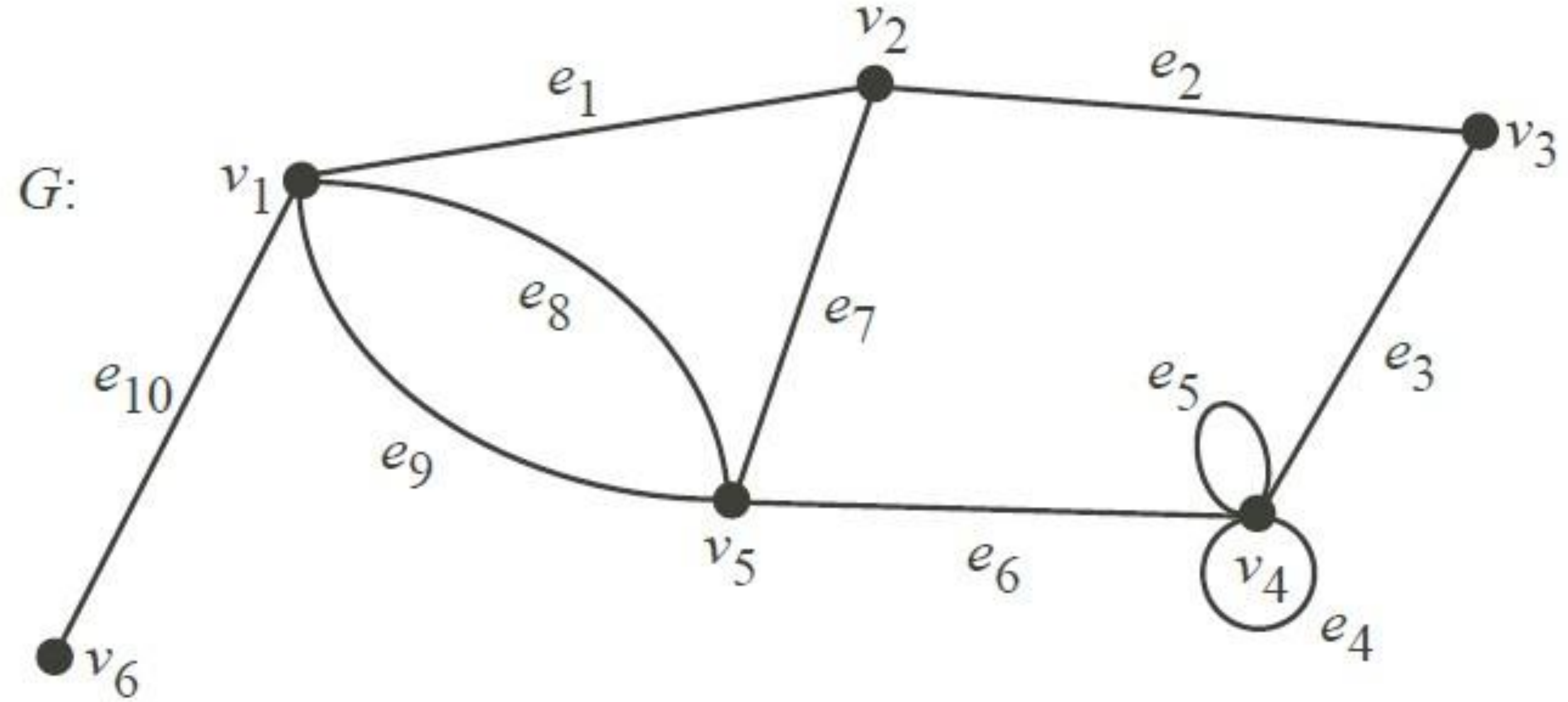
$$v_4, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4$$

a është i mbyllur ?



Përkufizim. Një udhëtim në të cilin nuk përsëritet ndonjë brinjë e tij quhet *udhë* në grafin G.

Shembull. Gjeni një udhë në grafin e dhënë:

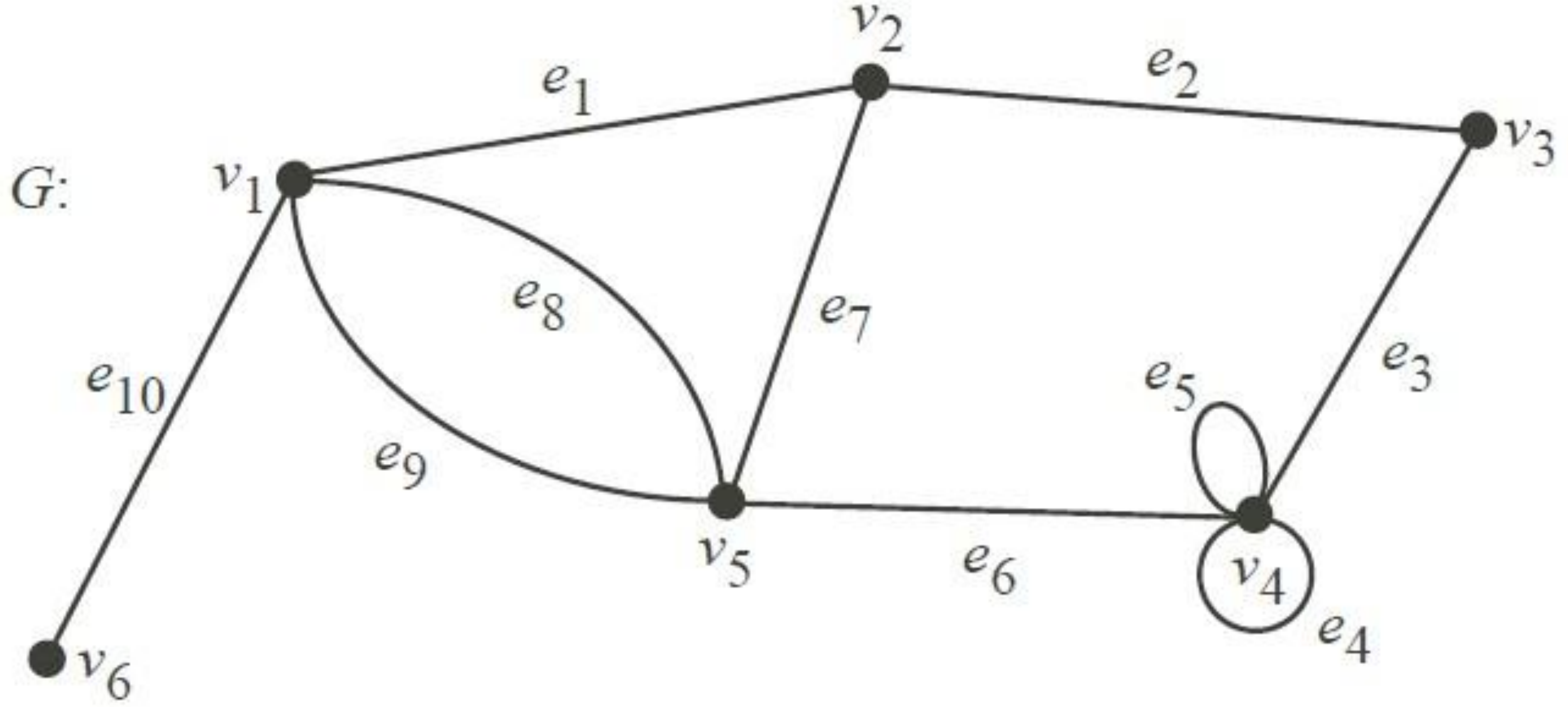


Përkufizim. Një udhëtim në të cilin nuk përsëritet ndonjë brinjë e tij quhet ***udhë*** në grafin G.

Shembull. Në grafin e dhënë G udhëtimi

$$v_1, e_8, v_5, e_9, v_1, e_1, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_4, v_4$$

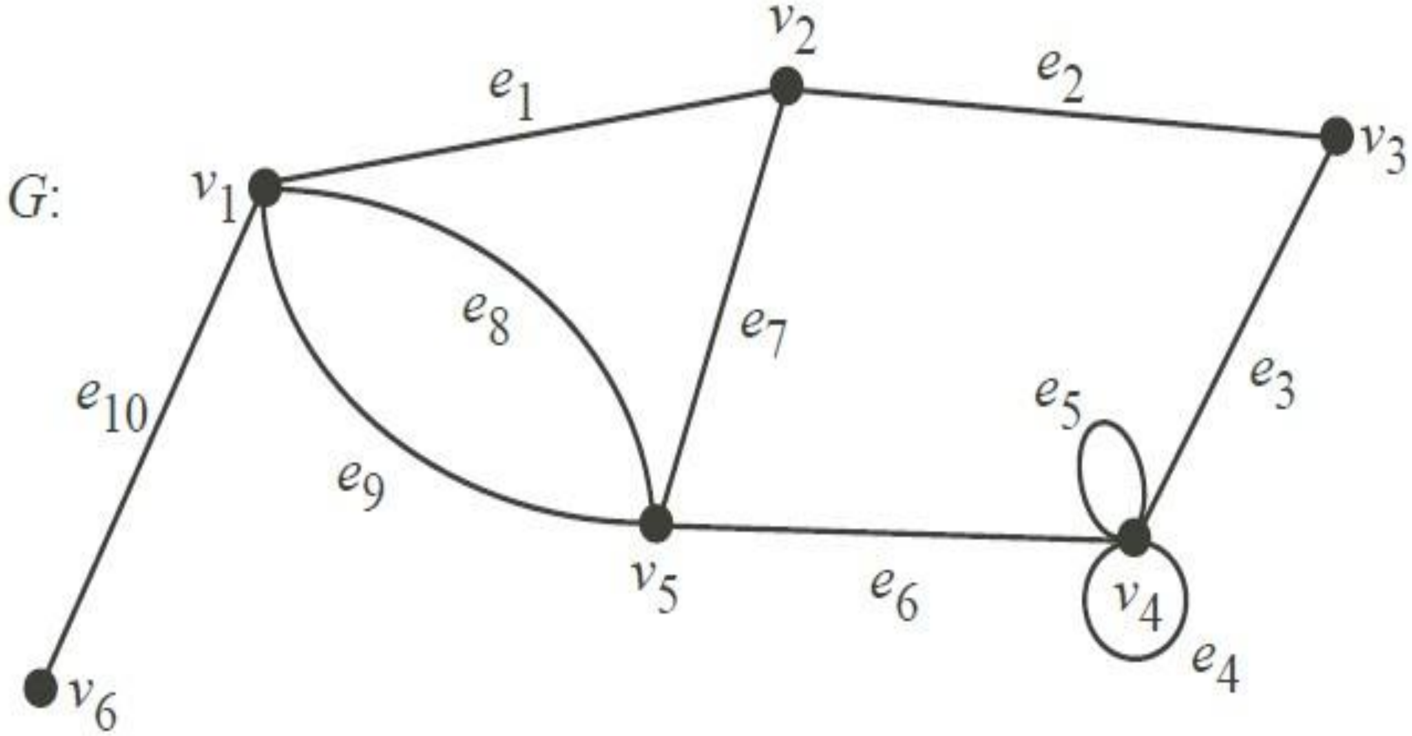
është **udhë** sepse nuk përsëriten brinjët



Përkufizim. Një udhëtim në të cilin nuk përsëritet ndonjë kulm përjashtuar këtu skajet e tij quhet *shteg* në grafin G. **Shembull.** Në grafin e dhënë G udhëtimi

$$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3$$

A është shteg ?

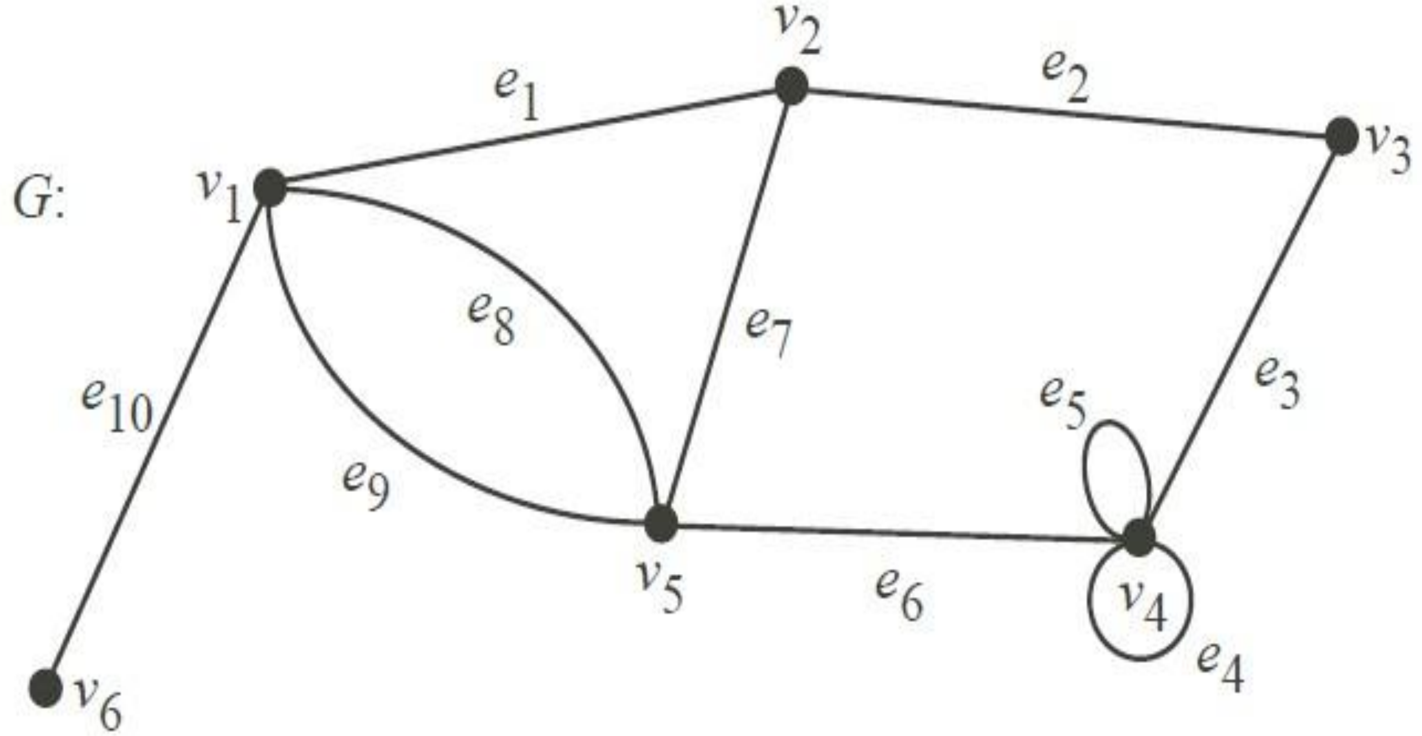


Përkufizim. Një udhëtim në të cilin nuk përsëritet ndonjë kulm përjashtuar këtu skajet e tij quhet *shteg* në grafin G. **Shembull.**

Në grafin e dhënë G udhëtimi

$$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3$$

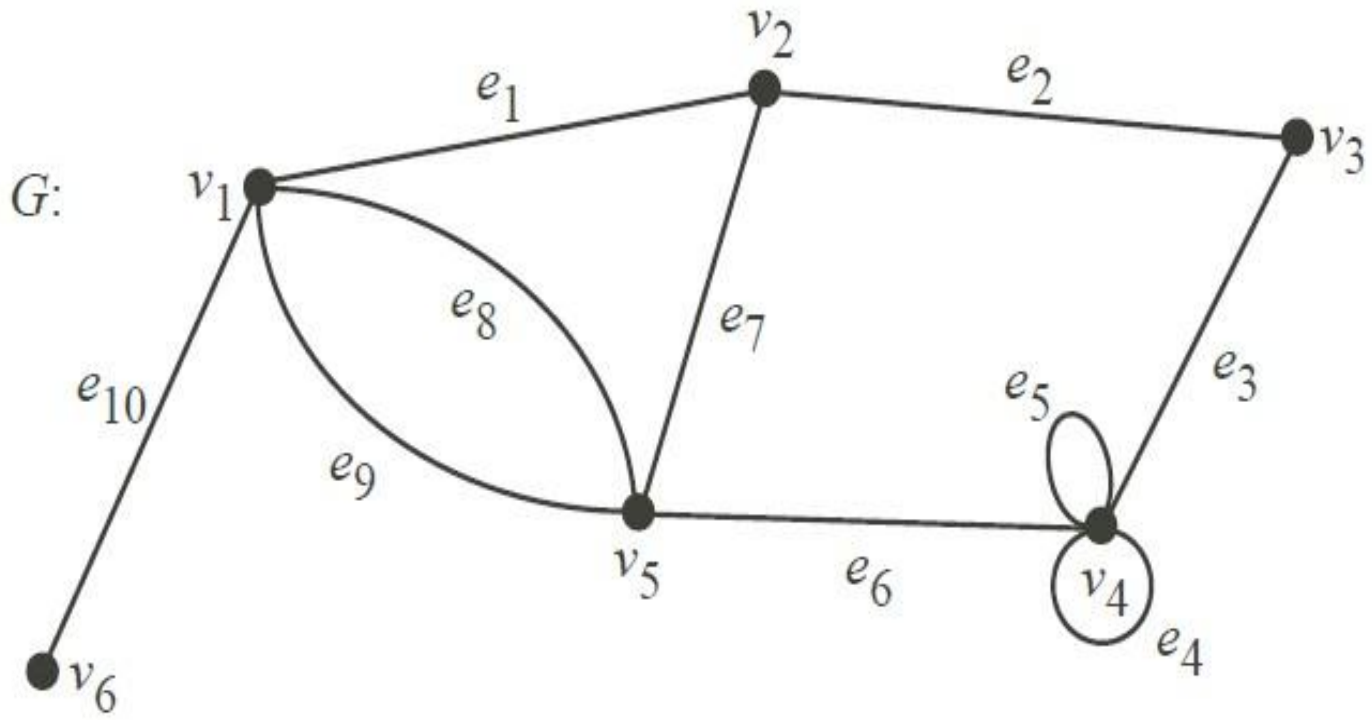
është shteg sepse nuk përsëriten kulmet



Përkufizim. Numri i brinjëve të një shtegu quhet *gjatësi e shtegut*.
Shembull. Në grafin e dhënë G të arsyetohet se udhëtimi

$$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3$$

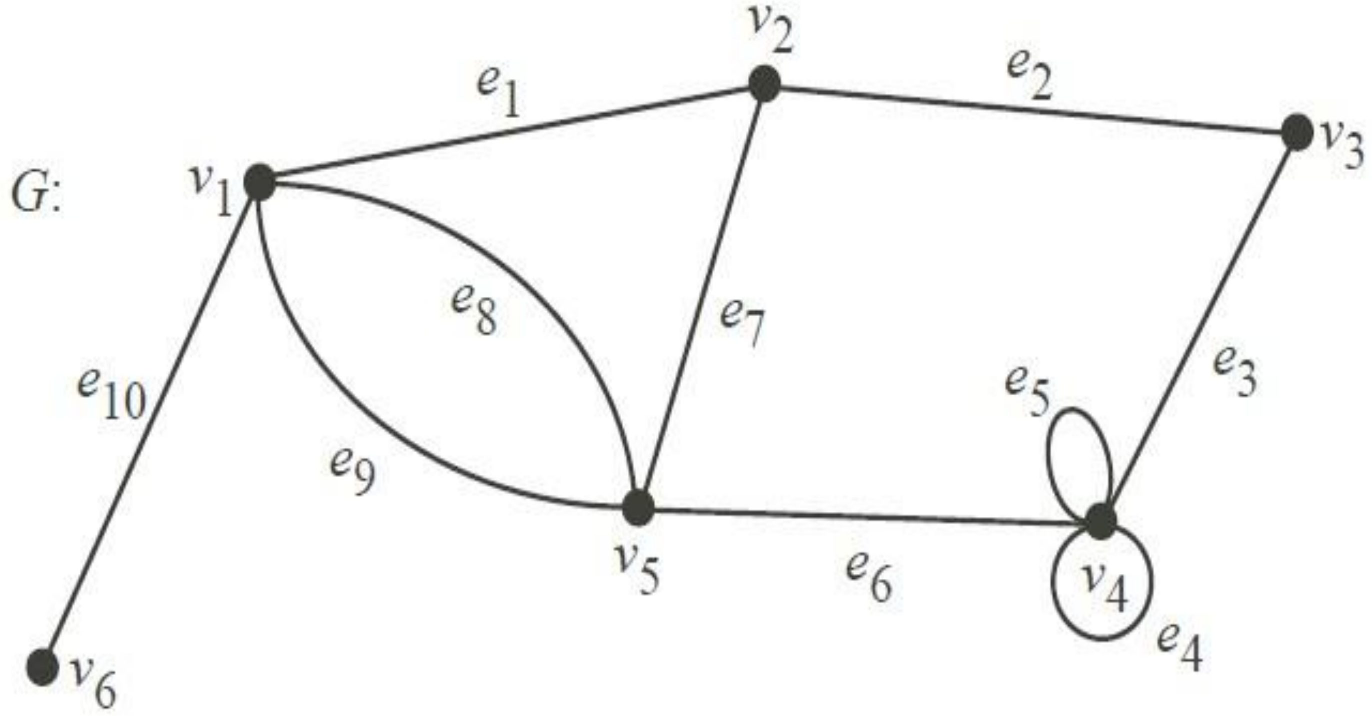
është shteg dhe gjeni gjatësin e tijë ?



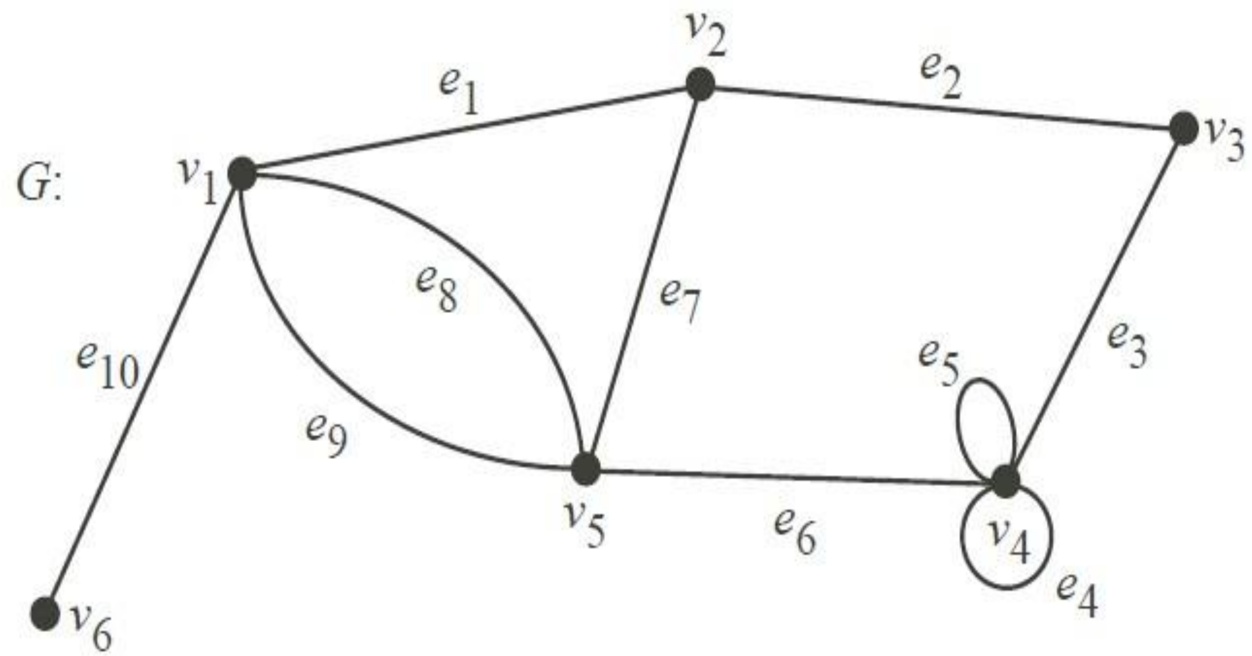
Përkufizim. Numri i brinjëve të një shtegu quhet *gjatësi e shtegut*. **Shembull.** Në grafin e dhënë G udhëtimi

$$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3$$

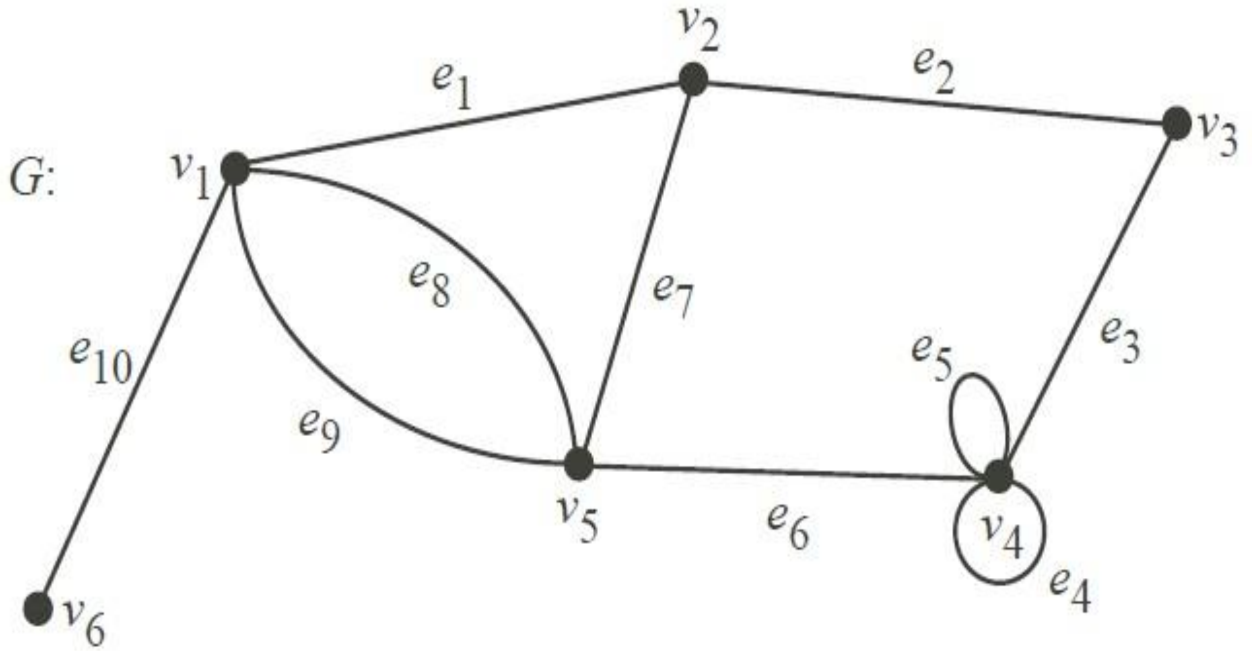
është shteg sepse nuk përsëriten kulmet ndërsa gjatësia e tijë është 3.



Përkufizim. Gjatësia e shtegut më të shkurtër që bashkon dy kulme quhet ***largesë*** ndërmjet atyre kulmeve.



Përkufizim. *Largesa maksimale për të gjitha çiftet e ndryshme të kulmeve të një grafi quhet **diametër i grafit**.*



Përkufizim. *Vargun e përbërë vetëm nga një kulm e konsiderojmë si **shteg**.*

- Vërejmë që çdo *shteg* është një *udhë* por e anasjellta nuk është e vërtet.

Përkufizim. Një udhëtim në të cilin nuk përsëritet ndonjë brinjë e tij quhet *udhë* në grafin G.

Përkufizim. Një udhëtim në të cilin nuk përsëritet ndonjë kulm përjashtuar këtu skajet e tij quhet *shteg* në grafin G.

Vërejtje: Shpesh për paraqitjen më të thjeshtuar të udhëve dhe shtigjeve në një graf shkruajm vetëm vargun e kulmeve, sepse në graf (por jo në multigraf) kjo është e mjaftueshme për identifikimin e tyre.

Përkufizim. Në një diagraf $G = (V, E)$, një varg i alternuar i kulmeve dhe brinjëve

$$i = i_0, a_1, i_1, a_2, i_2, \ldots, i_{k-1}, a_k, i_k, \ldots, i_{n-1}, a_n, i_n = j$$

i tillë që çdo brinjë a_k i vargut ka si fillim dhe mbarim përkatësisht kulmet i_{k-1} dhe i_k dhe asnjëri prej brinjëve të grafit nuk përsëritet quhet *rrugëtim* me fillim i dhe mbarim j (ose $i - j$ *rrugëtim*) në grafin G.

Përkufizim. Një rrugëtim në të cilin nuk përsëritet ndonjë kulm, përjashtuar këtu fillimin dhe mbarimin, quhet *rrugë* (ose $i - j$ *rrugë*).

Përkufizim. Le të jetë dhënë diagrafi $G = (V, E)$. *Udhë* quajm një vargë të alternuar kulmesh dhe brinjësh pa përsëritje të tyre të tillë që çdo brinjë a_j $j = 1,2,3, \dots, k$ skajet i ka në kulmet paraardhës dhe pasardhës, por jo detyrimisht paraardhësi është fillimi i harkut a_j.

- Në të njejtën mënyrë do të përdorim edhe termin *shteg* në një diagraf.
- **Përkufizim.** Një *udhë* në një graf G quhet *cikël* në qoftë se skajet i dhe j të sajë janë i njejti kulm.

Përkufizim. Një *shteg* me skaje të njëjtë në një graf G quhet cikël elementar.

Përkufizim. Kur një cikël elementar është graf identik me nëngrafin e përcaktuar nga kulmet e tij, atëherë ai quhet *cikël i indukuar.*

Përkufizim. Një *rrugëtim* me skaje të njëjtë në një diagraf G quhet cirkuit elementar.

Përkufizim. Numri i brinjëve të një cikli apo cikli elementar quhet *gjatësi e ciklit.*

Përkufizim. Cikli me gjatësi minimale në një graf G quhet *cikël i belit* dhe vet gjatësia e tij quhet *beli i grafit* dhe shënohet me $g(G)$.

Përkufizim. Çdo cikël i belit është cikël i indukuar.

Përkufizim. Maksimumi i gjatësive të cikleve të një grafi quhet *perimetër* i grafit.

- Kur grafi nuk përmban cikël, beli merret ∞ dhe perimetri zero.

Përkufizim. Një brinjë e një grafi G që nuk është brinjë e një cikli C në G dhe skajet i ka në kulmet e ciklit quhet *kordë* e tij.

Pohim. Çdo cikël i indukuar në një graf $G = (V, E)$ nuk përmban korda.

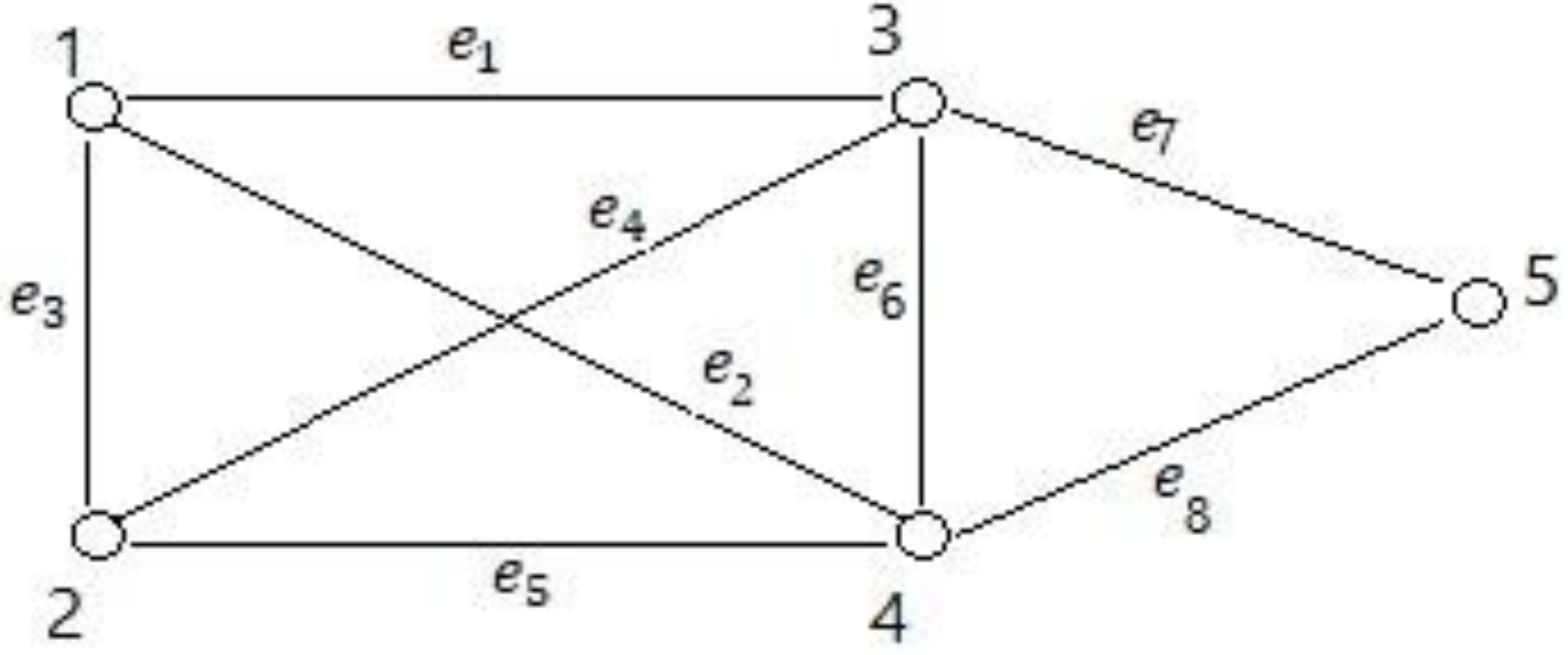
Teoremë. Çdo $i - j$ *udhë* në një graf $G = (V, E)$ përmban një $i - j$ shteg.

Vërtetim. Le të jetë U një $i - j$ *udhë* në një graf G. Nëse *udha* U është e mbyllur, dmth $i = j$, atëherë në rolin e një shtegu marrim thjesht atë që përbëhet vetëm nga kulmi i. Supozojmë se U është udhë e hapur e trajtës $i = i_0, i_1, i_2, \dots, i_k = j$. Bëjmë një kalim nëpër udhën U duke vendosur një shenjë në çdo kulm që ndeshim. Nëse një kulm i_r dhe se $s > r$. Largojmë prej U kulmet $i_r, i_{r+1}, \dots, i_{s-1}$. Përftohet një $i - j$ *udhë* U_1 është shteg, atëherë pohimi është vërtetuar, për ndryshe përsërisim proçesin. Derisa U është një varg i fundëm, atëherë pas disa hapash do të merret një $i - j$ udhë U_q në të cilën nuk ndeshet për së dyti ndonjë kulm i saj, pra përftohet një $i - j$ shteg.

Shembull. Le të jetë dhënë grafi G.

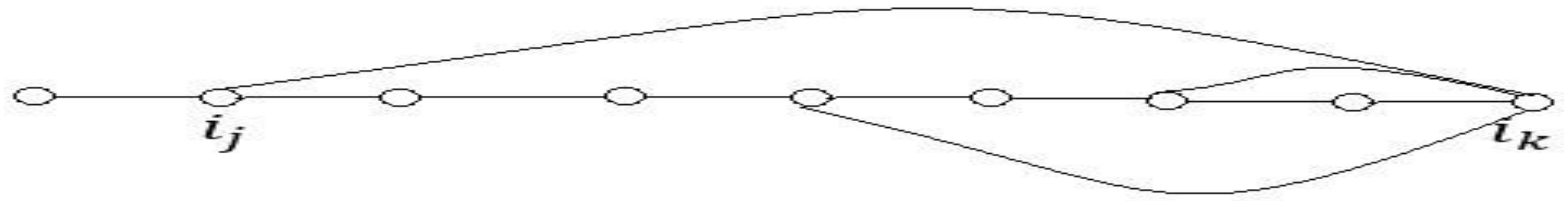
Shënojmë (1-5) udhën me $1e_3 2e_4 3e_1 1e_2 4e_6 3e_7 5$

Atëherë eksiston edhe (1-5) shtegu $1e_3 2e_4 3e_7 5$



Teoremë. Çdo graf G me $\delta(G) \geq 3$ përmban një shteg të hapur me gjatësi të paktën $\delta(G)$ dhe një cikël elementar me gjatësi të paktën $\delta(G) + 1$.

Vërtetim. Le të jetë $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_k$ një shteg me gjatësi maksimale në grafin G. Është e sigurt se për një shteg të tillë të gjithë fqinjët e skajit i_k ndodhen patjetër mbi këtë shteg (ky fakt njihet me emrin parimi i shtegut më të



Prej këtu rrjedhë se $k \geq \delta(G)$. Le të jetë i_j kulmi me tregues më të vogël i tillë që $i_j i_k \in E(G)$. Shihet tani se cikli $C: i_j, i_{j+1}, \ldots, i_k, i_j$ është $d(i_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$.
gjatë).

Shembull. Me $d(i)$ shënojmë fuqin e **kulmit** i,

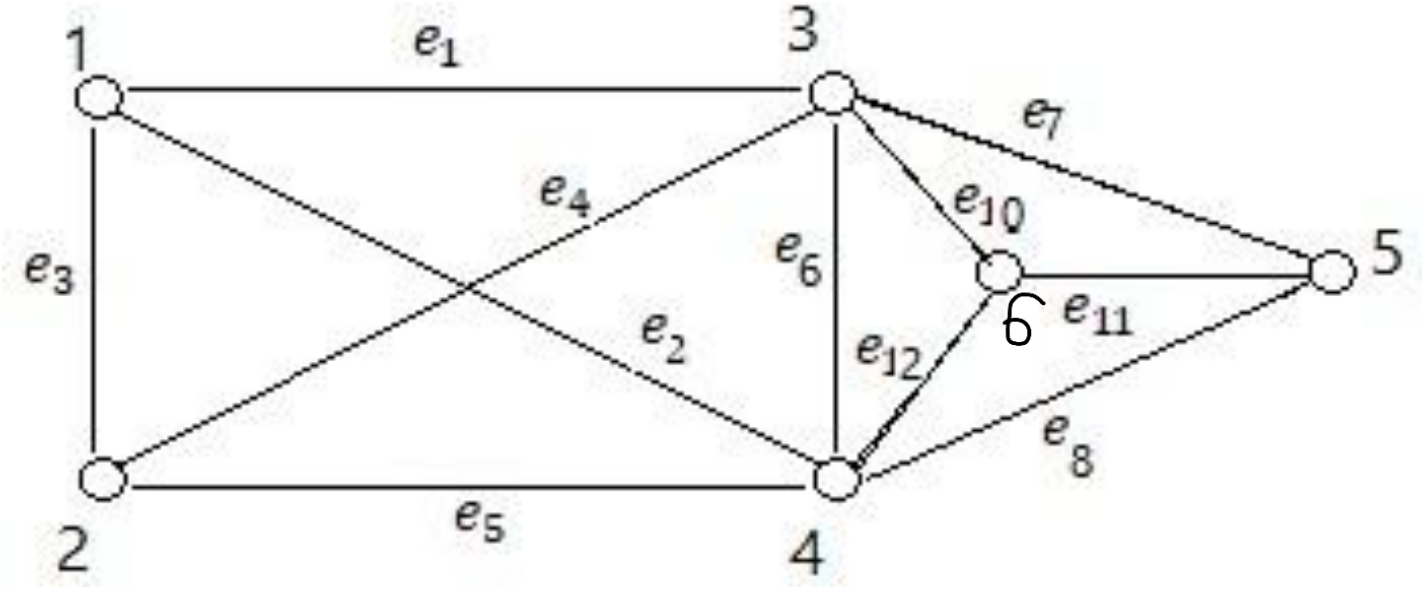
$\delta(G) = \min\{d(i) : i \in V\} = \min\{d(1), d(2), d(3), d(4), (d)\}$

$= \min\{3,3,5,5,\underline{3},\underline{3}\} = 3$

$\delta(G) = 3$; psh eksiston shtegu i hapur $1e_3 4e_9 3e_1 6e_{11} 5$

Cikli elementar e ka gjatësin $\delta(G) + 1 = 3 + 1 = 4$ psh

$1e_2 4e_9 6e_{10} 3e_1 1$ është cikli elementar me gjatësi 4.

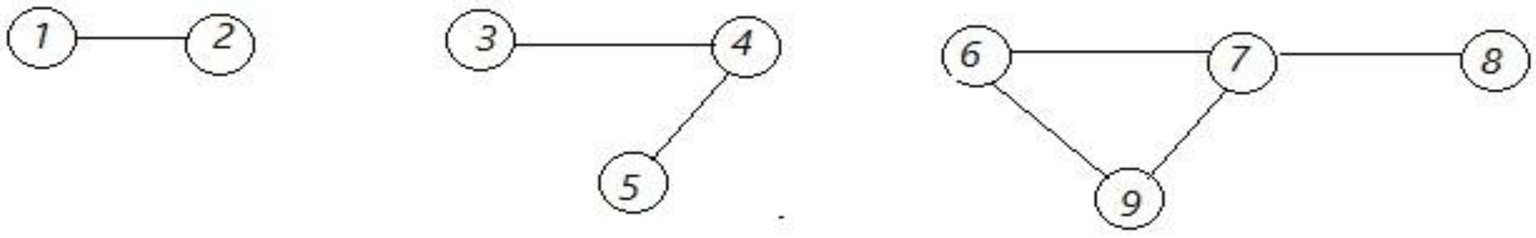


$$(5), d(6)\} \quad =$$

Teoremë. Në çdo graf G që përmban të paktën një cikël të vërtetohet mosbarazimi $g(G) \leq 2diam(G) + 1$. (me $g(G)$ shënojmë belin e grafit me $diam(G)$ shënojmë diametrin e grafit G)

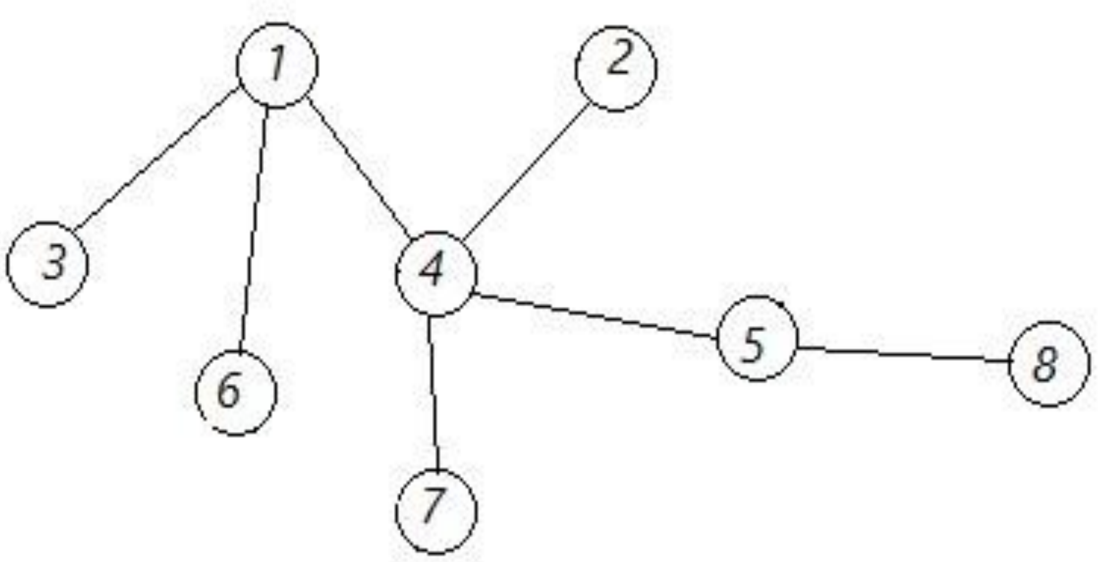
Përkufizim. Një graf (Diagraf) jo bosh G quhet i *lidhur* nëse për çdo dy kulme $i, j \in V(G)$ eksiston një shteg P me skaje në ata kulme. Në rast të kundërt grafi quhet i *palidhur*.

- Çdo graf me një kulm konsiderohet i lidhur.
- Nëse $U \subseteq V(G)$ dhe nëngrafi i indukuar $G[U]$ është i lidhur, atëherë thuhet se bashkësia e kulmeve U është në vetvete e lidhur në grafin G.
- Komponente e lidhur e një grafi është çdo nëngraf i lidhur maksimal i tij (maksimaliteti i një nënbashkësie kulmesh apo brinjësh është në kuptimin e shtrirjes, dmth po të shtohet një kulm apo brinjë çfardo nënbashkësia që përftohet e humbet vetinë).



- Grafi në figurë ka tri komponente të lidhura

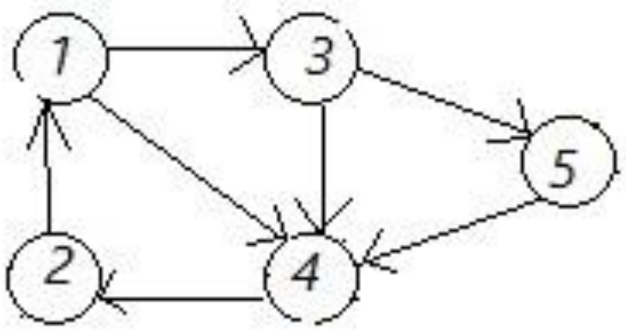
Përkufizim. Grafi i lidhur dhe pa cikle quhet dru (pemë). Në figurë është paraqitur një dru me 8 kulme.

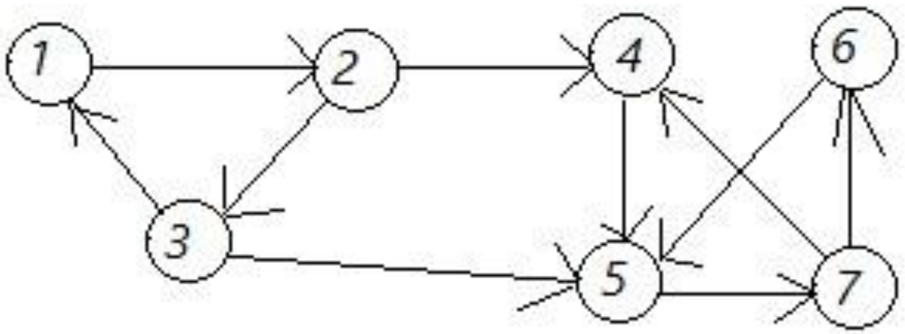


Përkufizim. Thuhet se një diagraf jo bosh G është i *lidhur fort* nëse për çdo dy kulme $i_j, i_k \in V(G)$ eksiston një rrugë nga i në j dhe një tjetër rrugë nga j në i.

Përkufizim. Çdo nëngraf i indukuar i G-së që është i lidhur fort dhe maksimal në G quhet *komponente e lidhur fort* e tij.

Grafi i parë në figurë është i lidhur fortë kurse grafi i dytë jo, ai përmban dy komponente të lidhura fort me bashkësi kulmesh përkatësisht $V_1 = \{1,2,3\}$ dhe $V_2 = \{4,5,6,7\}$


1
3
5
2
4


1
2
4
6
3
5
7