Universiteti Publik “Kadri Zeka”, Gjilan

Fakulteti i Shkencave Kompjuterike

Lënda: Teoria e Grafeve

Tema:

Lidhshmëria

Lidhshmëria

Shumë probleme mund të modelohen me shtigje të cilat formohen duke udhëtuar përgjatë degëve të grafit.

Kështu, problemi për të përcaktuar nëse një mesazh mund të dërgohet mids dy kompjutërve duke përdorur lidhje të ndërmjetme mund të studiohet me një model grafi.

Lidhshmëria-Vazhdim

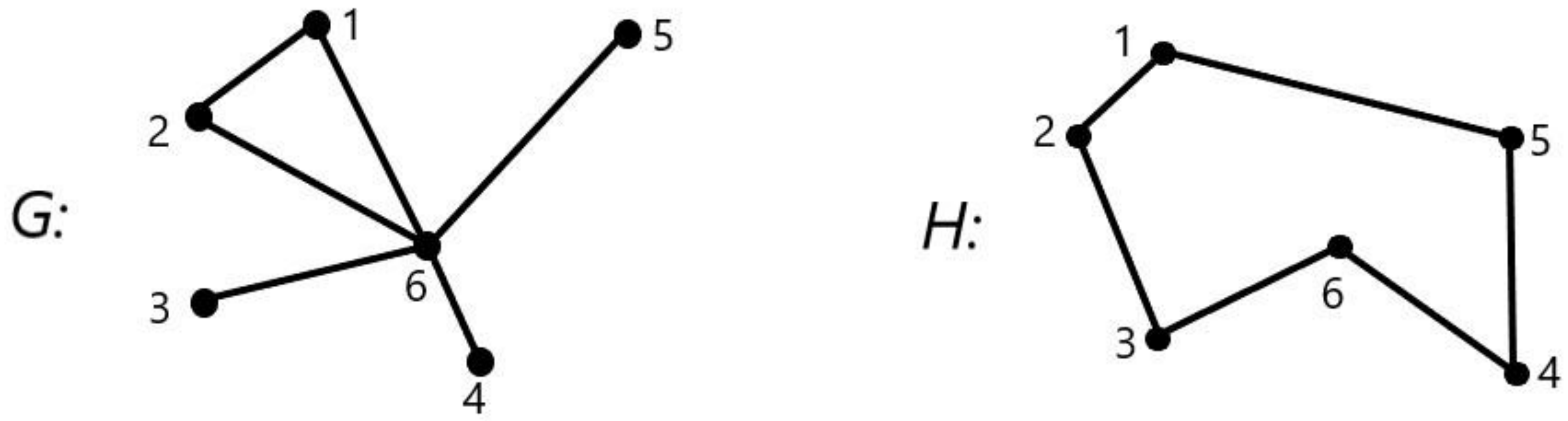
Problemet e planifikimit efektiv të transporteve apo të rrugëve elektronike për shpërndarjen e postave elektronike, të diagnostikimit në rrjetin kompjuterik, të gjetjes së defektit në një qark elektrik apo në një sistem kanalizimesh të nëndheshme, etj. mund të zgjidhen duke përdorur modele që përfshijnë shtigje në grafet.

Shpesh kërkohet ndërtimi i grafëve që të jenë të theshtë sa të jetë e mundur, dhe ku dy nyje të jenë gjithnjë të lidhura prej të paktën dy shtigjesh të pavarura.

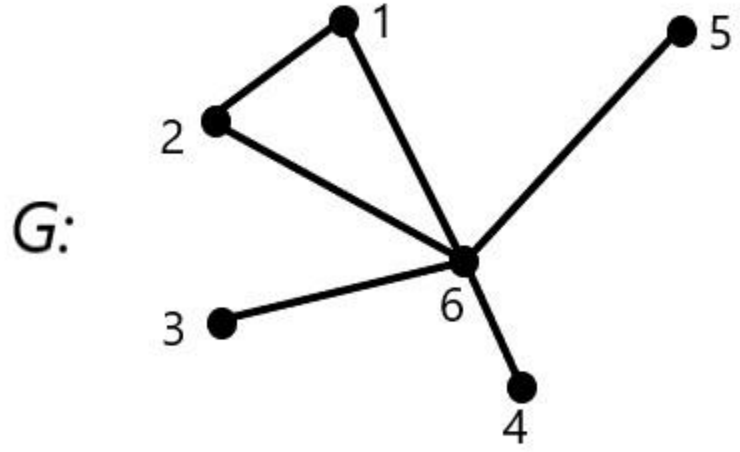
Ky problemë lidhet me aspektin e dështimit në tolerancën dhe qëndrueshmërinë e rrjeteve, ku duhet siguruar që prishja e një lidhje të mos ndikojë në funksionalitetin e rrjetit.

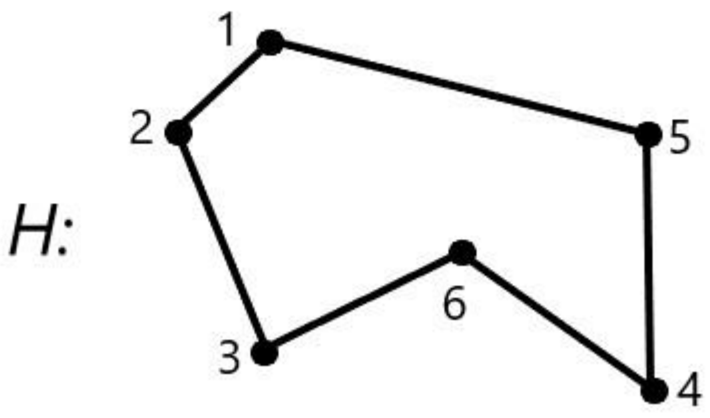
Po ashtu, në një rrjet të qëndrueshëm kërkohet që prishja e një kompjuteri të mos rezultojë me mosaktivitetin e gjithë rrjetit.

Shembull: Nëse secili nga grafet G dhe H paraqesin një rrjet kompjuterik në figurë, atëherë cili nga grafet e dhëna ka shkallë më të ulët lidhshmërie?



Përgjigje. Nëse secili nga grafet G dhe H paraqesin një rrjet kompjuterik në figurë, atëherë shihet se rrjeti G ka shkallë lidhshmërie më të ulët se rrjeti H. Eliminimi i nyjes 6 sjell daljen pothuajse plotësishtë jashtë funksionimit të rrjetit G ndërsa në rrjetin H një ndodhi e tillë nuk e ndërpret mundësinë e ndërlidhjes.





Përkufizim. Grafi është i lidhur, nëse çdo dy nyje të tij janë të lidhur. Për dy nyje themi se janë të lidhur, nëse eksiston një shteg në mes të çdo dy nyjeve të ndryshme të grafit.

Nëse nuk eksiston një shteg i tillë atëherë themi se grafi nuk është i lidhur.

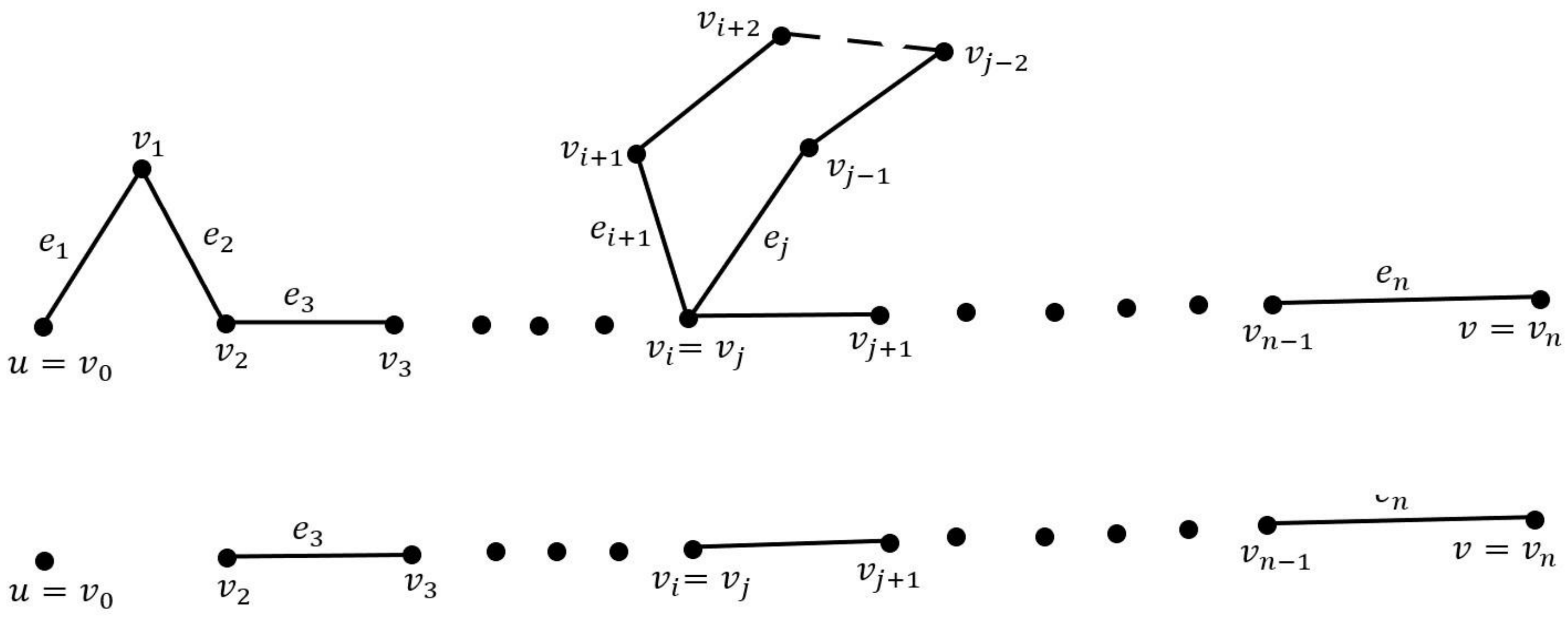
Një graf i çfradoshëm mundë të zbërthehet në numër të caktuar të nëngrafeve të lidhura, të cilat quhen komponente të grafit.

Komponentet e grafit mundë të definohen edhe si nëngrafe (të lidhura) maksimale të grafit.

Teoremë: Në mes çfardo dy nyjeve të grafit të lidhur G eksiston një shteg.

Vërtetim: Le të jenë u dhe v çfardo dy nyje të grafit të G. Pasi që grafi G është i lidhur shtegu $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2$ ... $v_{n-1} e_n v_n$ lidh nyjet $v_0 = u$ dhe $v_n =$

v. Nëse kemi udhëtim disa nga nyjet duhen të jenë të njejta $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$ psh. $v_i = v_j$ ku $i < j$. Si rrjedhim, duhet të eksistoj cikli (qarku) $v_i e_{i+1} v_{i+1} \ldots v_{j-1} e_j v_j$, si në figurë. Eliminojmë ciklin që e kemi në shqyrtim dhe gjejmë udhën më të shkurtër.



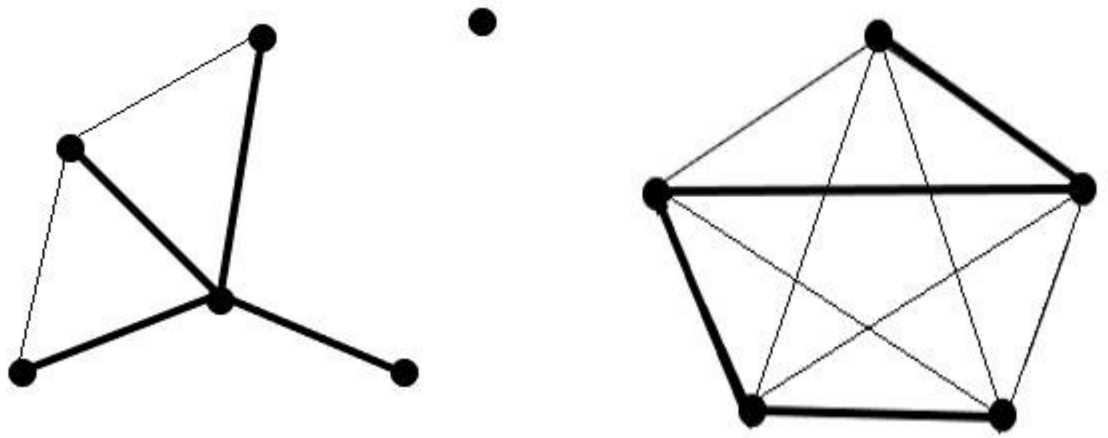
Vazhdim i vërtetimit të teoremës.

Ngjashëm, duke eliminur të gjithë ciklet në udhë fitohet udha më shkurtër nga nyja u në nyjen v. Udha e fituar nuk përmban nyje që përsëriten prandaj është shteg. Çka duhej të vërtetohej.

Teorema e mëposhtme jep përgjigje të pjesshme për pyetjen se sa mundë të jetë gjatësia e shtegut në mes dy nyjeve të ndryshme te grafi i lidhur?

Teoremë. Gjatësia e shtegut në mes dy nyjeve të ndryshme të grafit të lidhur me n-nyje, më së shumti është $n-1$.

Shembull. Në figurë është paraqitur një graf me tri komponente. Gjatësia e shtegut ndërmejt dy nyjeve të ndryshme më së shumti është 4, pra $5 - 1$.

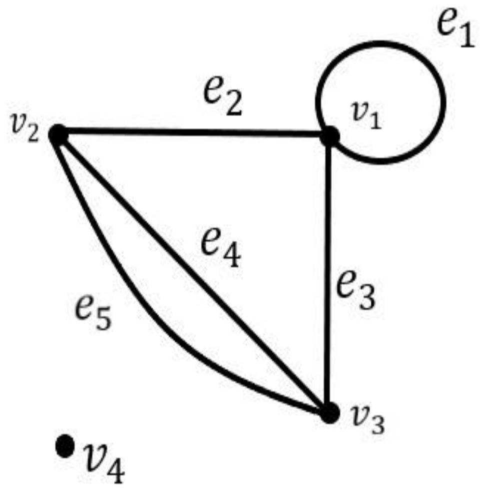


Numri i shtigjeve me gjatësi të caktuar r, në mes të cilave do dy nyje v_i dhe v_j të grafit, mundë të përcaktohet me anë të matricës së fqinjësisë së atij grafi.

Teormë. Le të jetë G graf me r nyje $v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}, v_r$ dhe A matrica e fqinjësis së tij. Numri i shtigjeve të ndryshme me gjatësi r nga nyja v_i në

v_j , ku r numër i plotë pozitiv, është ekuivalentë me elementin a_{ij} të matricës A^r.

Shembull. Le të jetë G graf i dhënë si në figurë.



Matrica e fqinjësisë për grafin e dhënë G është:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ \\ 12 & 0 & 0\,0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

Elementi a_{ij} i matricës A paraqet numrin e degëve që lidhin nyjet v_i, v_j. Ne mundë ti konsiderojmë këto si numra të vargjeve të degëve me gjatësi 1 që lidhin këto dy

nije.

Tani, katrori i matricës së fqinjësisë është

$$A^2 = A \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 2 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 2 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ & 5 & 1 & 0 & \\ 3 & 1 & 5 & 0 & \\ 0 & 0 & & & \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix}$$

Te matrica A^2 elementi a_{ij} paraqet numrin e vargjeve të degëve me gjatësi 2 që lidhin nyjet v_i dhe v_j.

Psh elementi a_{22} është 5 prandaj eksistojnë këto pesë vargje të degëve me gjatësi 2 (gjatësinë 2 e përshkruan eksponenti i matricës i cili është 2) të cilët lidhin v_2 me vetveten: e_2, e_2; e_4, e_4; e_5, e_5; e_4, e_5; e_5, e_4.

Nuk është e vështirë të shikohet pse ndodhë kështu.

Elementi a_{ij} i A^2 fitohet duke shumëzuar rreshtin e i-të me shtyllën e $j$të të A. Te përkufizimi i shumëzimit të matricave këtë e kemi shprehur me

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$$

Termi i r-të në këtë shumë, $a_{ir}a_{rj}$ është prodhimi i numrave të degëve të cilat lidhin nyjet v_i dhe v_r me numrin e degëve që lidhin nyjet v_r dhe v_j; me fjalë të tjera numri i vargjeve të degëve me gjatësi 2 që lidhin v_i dhe v_j nëpërmes v_r. Në fund, shuma për të gjitha vlerat e k jep numrin e përgjithshëm të vargjeve të formuar nga degët me gjatësi 2 të cilat lidhen nga nyjet v_i dhe v_j.

Ngjashëm, elementi a_{ij} te matrica A^3 paraqet numrin e vargjeve të degëve me gjatësi 3 që lidhin nyjet v_i dhe v_j.

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3\ 5 & 1 & 0\ 3 \\ & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1\ 0 & 2 & 0\ 1 \\ & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & 13 & 0 \\ 9 & 13 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

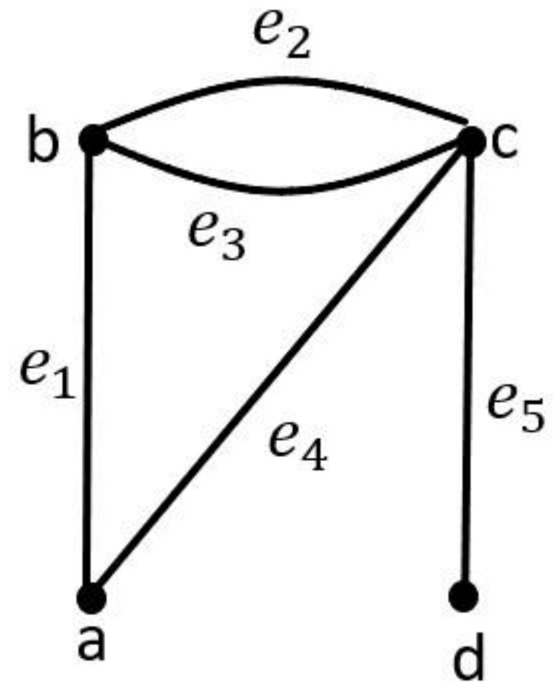
$0 \quad 0 \ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

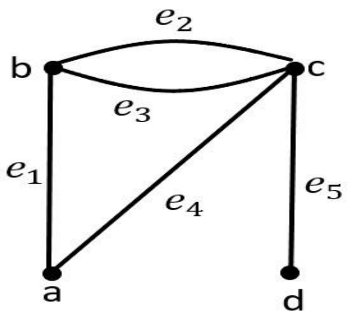
Elementi $a_{12} = 9$, që dmth se janë nëntë vargje të degëve me gjatësi 3 (gjatësinë 3 e përshkruan eksponenti i matricës, i cili është 3) që lidhin nyjet v_1 dhe v_2 janë:

e_1, e_1, e_2; e_2, e_2, e_2; e_1, e_3, e_4; e_1, e_3, e_5; e_3, e_3, e_2; e_2, e_4, e_4; e_2, e_5, e_5; e_2, e_4, e_5; e_2, e_5, e_4.

Shembull. Grafi G i dhënë si në figurë paraqet linjat telefonike që lidhin qytetet a, b, c dhe d . Secila degë në graf paraqet lidhjen direkte telefonike.



Matrica e fqinjësisë e grafit të dhënë është:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nga figura shihet se në mes nyjeve a dhe d nuk ka lidhje direkte. Mirëpo, nyja a ka mundësi të komunikoj me d nëpërmes nyjës c. Kjo linjë e komunikimit, e quajtur lidhje komunikuese e shkallës së dytë, është rruga ae_4ce_5d, lidhja në mes të a dhe d që kalon saktësisht vetëm nëpër një qytet, qytetin c. Ngjashëm lidhja komunikuese e shkallës së dytë në mes të nyjeve b dhe d jepet me anë të rrugës:

be_2ce_5d dhe be_2ce_5d.

Nga teorema në sllajdin 8, numi i lidhjeve të shkallës së dytë, vija që kalojnë vetëm nëpër një qytet, janë elemente të ndryshme në A^2.

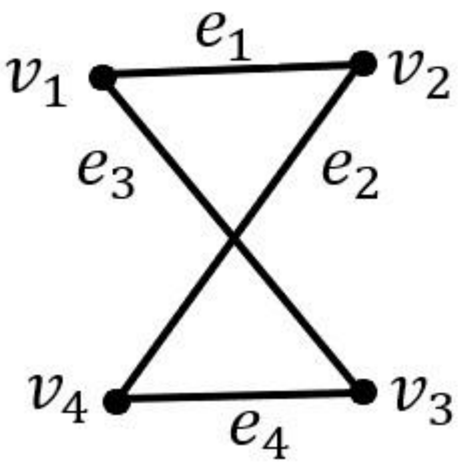
$$A^2 = A \cdot A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0\ 1 \\ & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0\ 1 \\ & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2\ 2 \\ & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$0 \quad 0\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

$$0 \quad 1$$

Eksistojnë pesë lidhje komunikuese të shkallës së dytë në mes qytetit b me vetveten be_1ae_1b ; be_2ce_2b ; be_2ce_3b ; be_3ce_2b dhe be_3ce_3b.
Asnjë lidhje e shkallës së dytë nuk lidh c me d.

Shembull. Grafi G është dhënë si në figurë. Gjeni sa është numri i rrugëve me gjatësi 4, nga nyja v_1 deri te nyja v_4.



Zgjidhje.

Matrica e fqinjësisë për grafin G është:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \end{bmatrix}$$

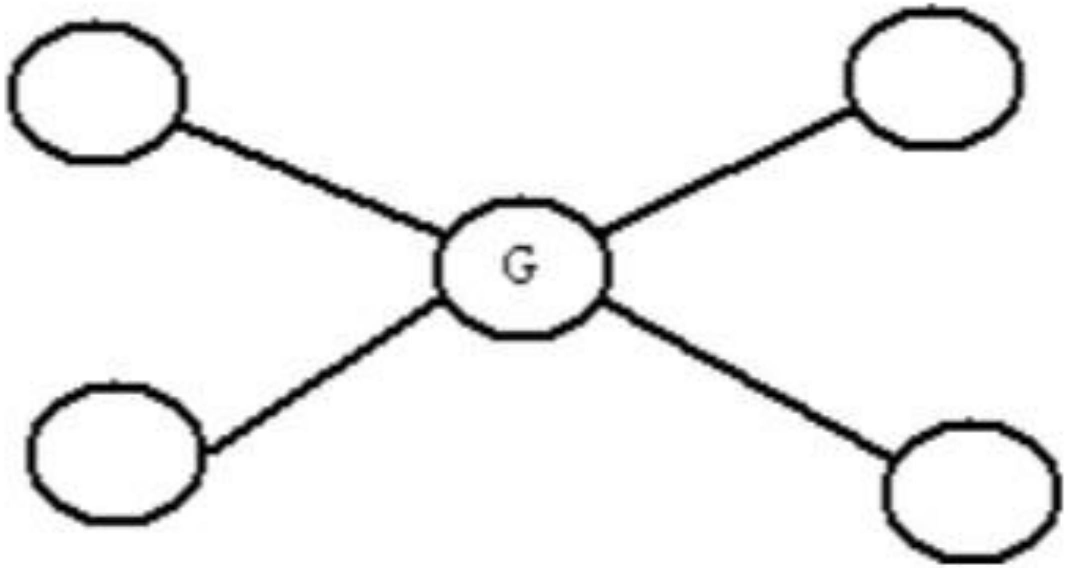
$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1\,0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$

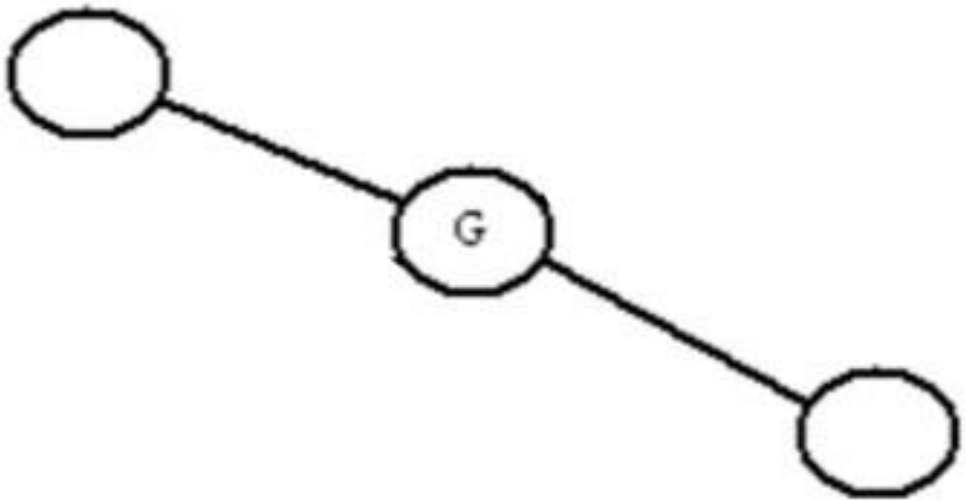
Prandaj, numri i shtigjeve me gjatësi 4 nga nyja v_1 deri te nyja v_4 është elementi a_{14} i A^4. Pasi që

$$\begin{matrix} & & 8 & 0 & & & 0 & 8 \\ A_4 = 0 & & 8 & 8 & 0 & 0 & & \\ 8 & 8 & & & & 0 & & \\ & & 8 & 0 & & & 0 & 8 \end{matrix}$$

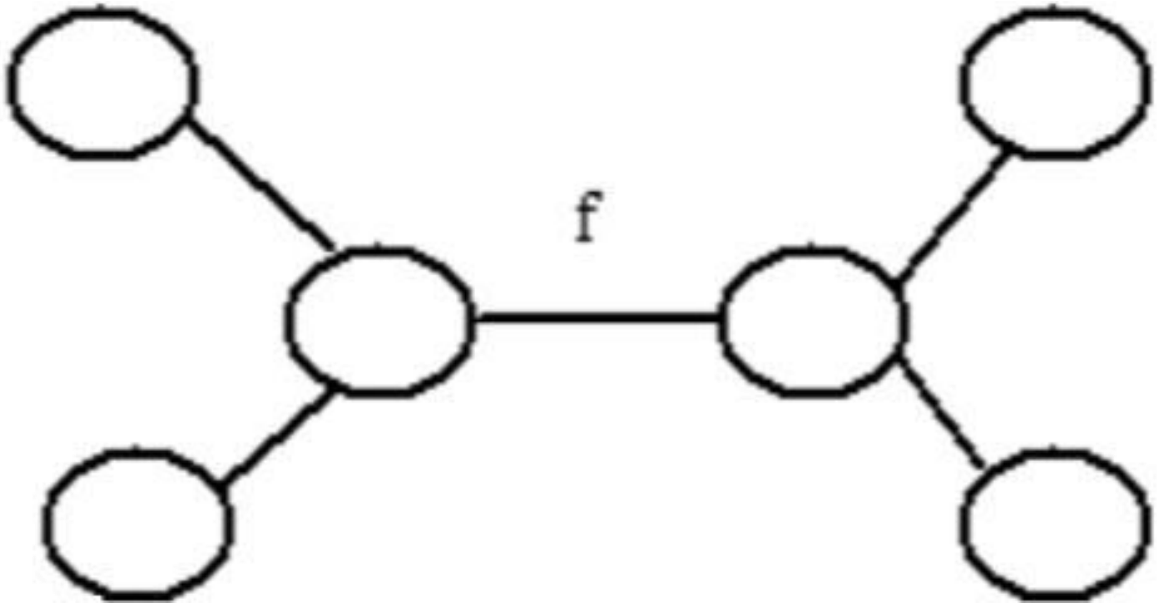
Ka saktësisht 8 shtigje me gjatësi 4 nga nyja v_1 deri te nyja v_4.

Grafi i lidhur me tre nyje është graf 1-lidhorë nëse largojmë një nyje të grafit ai bëhet graf jo i lidhur.





Ngjashëm, grafi quhet 1-lidhor sipas degëve nëse e heqim një degë grafi bëhet i pa lidhur (shiko figurën).

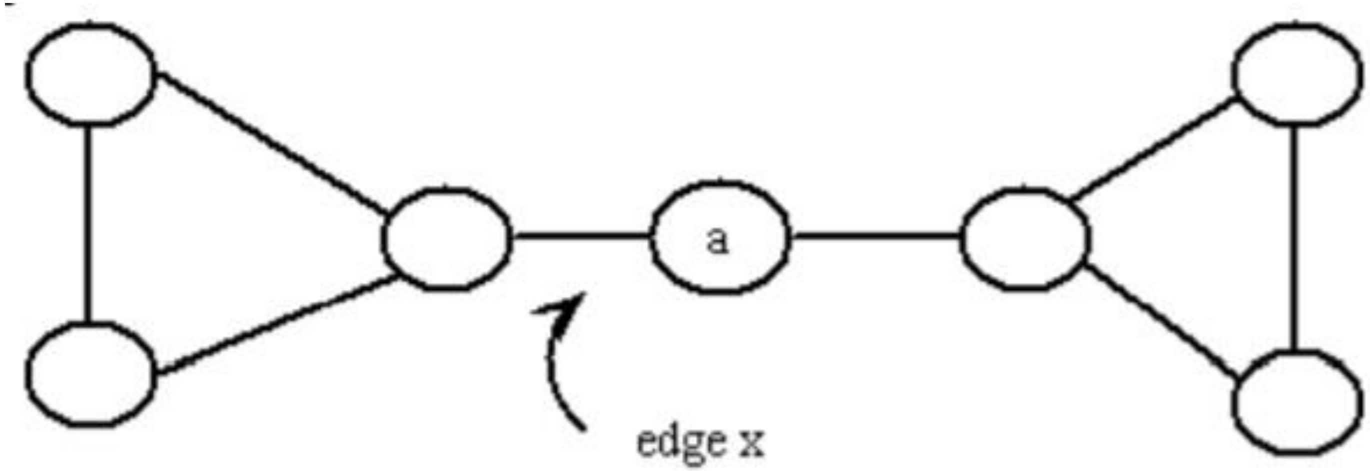


Lidhshmëria sipas nyjeve dhe sipas degëve.

Lidhshmëria sipas nyjeve dhe sipas degëve.

Lidhshëria sipas degëve i jep një form të qëndrueshme grafit në krahasim me lidhshmërin sipas nyjeve. Kjo ndodhë sepse çdo nyje e grafit të lidhur mundë të bashkangjitet me një ose më shumë nyje. Me largimin (heqjen) e kësaj nyje e ka të njejtin efekt (ndikim) sikur ti heqim gjithë këto degë të bashkangjitura. Si rezultat, grafi i cili është 1lidhor sipas degëve është gjithashtu edhe 1-lidhor sipas nyjeve.

Shembull. Siç kemi treguar në figurë grafi në figurë është 1-lidhorë sipas degëve dhe 1-lidhor sipas nyjeve. Heqja e degës x e ka të njejtin efekt me heqjen e mundshme të nyjes a (me termin **efekt** nënkuptojmë **grafin jo të lidhur**).



Të njejtët përkufizime i aplikojmë në grafet k-lidhore.

1. Grafi i lidhur është k-lidhor sipas nyjeve nëse i heqim k nyje fitojmë graf jo të lidhur.

2. Grafi i lidhur është k-lidhor sipas degëve nëse i heqim k degë fitojmë graf jo të lidhur.

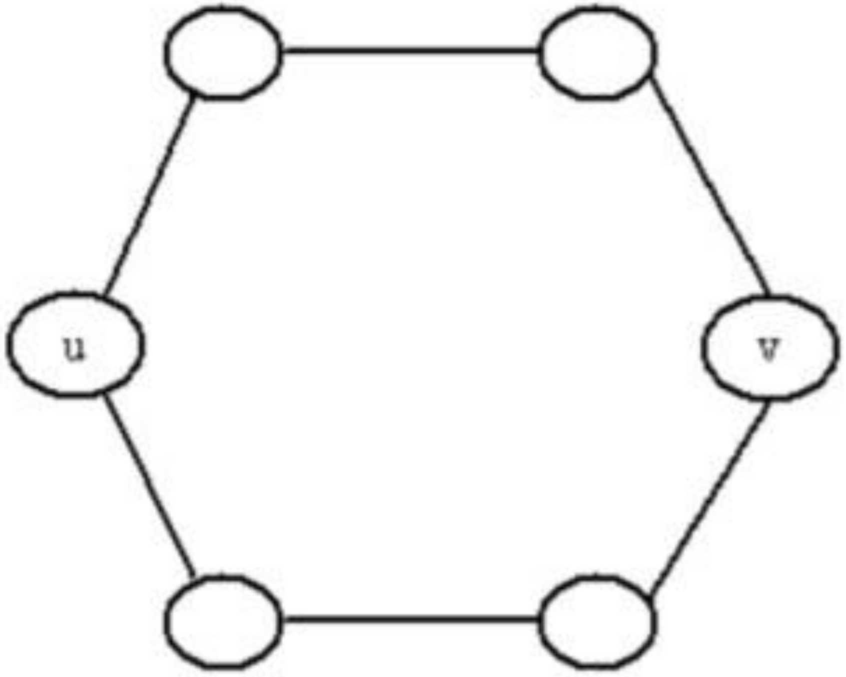
Nëse grafi G është graf i lidhur, ne e quajmë degë prerëse e grafit G nëse ajo degë hiqet e bënë grafin jo të lidhur.

Nëse grafi G është graf i lidhur, ne e quajmë nyje e prerëse e grafit G nëse ajo nyje hiqet e bënë grafin jo të lidhur.

Grafet 2-lidhore.

Rast i veçant i grafeve k-lidhore janë edhe grafet 2-lidhore.

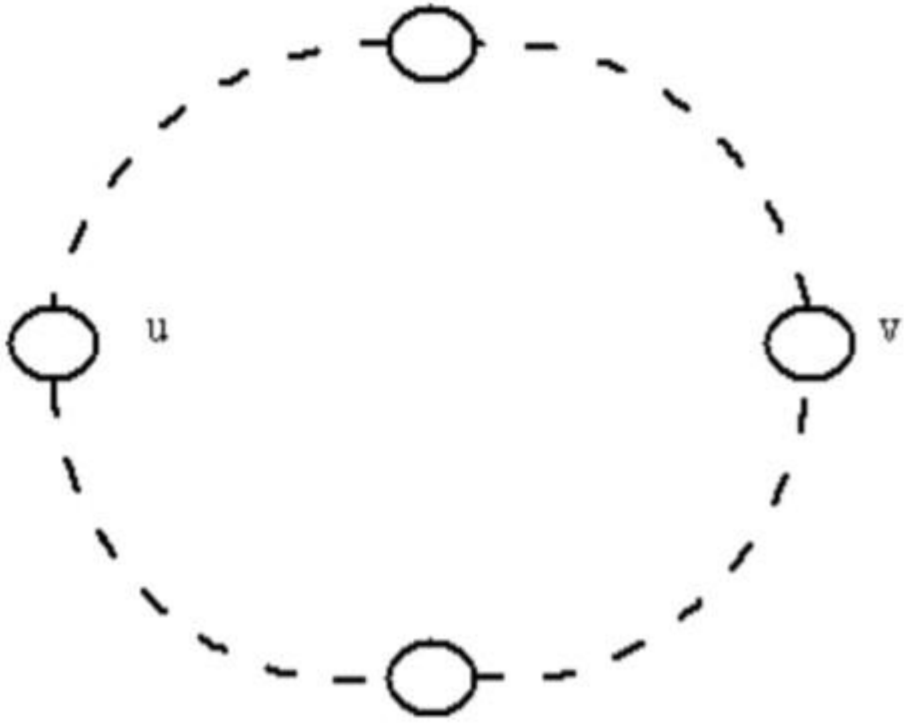
Lemë. Grafi G është 2-lidhorë nëse për çdo dy nyje u dhe v nga grafi G gjenden dy shtigje të ndara në mes nyjeve u dhe v**.** Ato janë dy shtigje që nuk kanë të përbashkët degë e as nyje në përjashtim të nyjeve u dhe v.



Teoremë: Për çdo dy nyje u dhe v të grafit 2-lidhor G gjendet një cikël i thjesht i cili i përmban nyjet u dhe v.

Vërtetim: Supozojmë se nuk ka cikël të thjesht i cili i përmban nyjet u dhe v. Atëherë gjendet vetëm një shteg nga nyja u deri te nyja v. Nëse e heqim shtegun ne e bëjmë grafin të pa lidhur. Kjo dmth se grafi është 1-lidhor. Kështu kemi kontradiksion. Pra pohimi i teoremës është i vërtet.

Në figurë është Paraqitur një graf 2-lidhor.



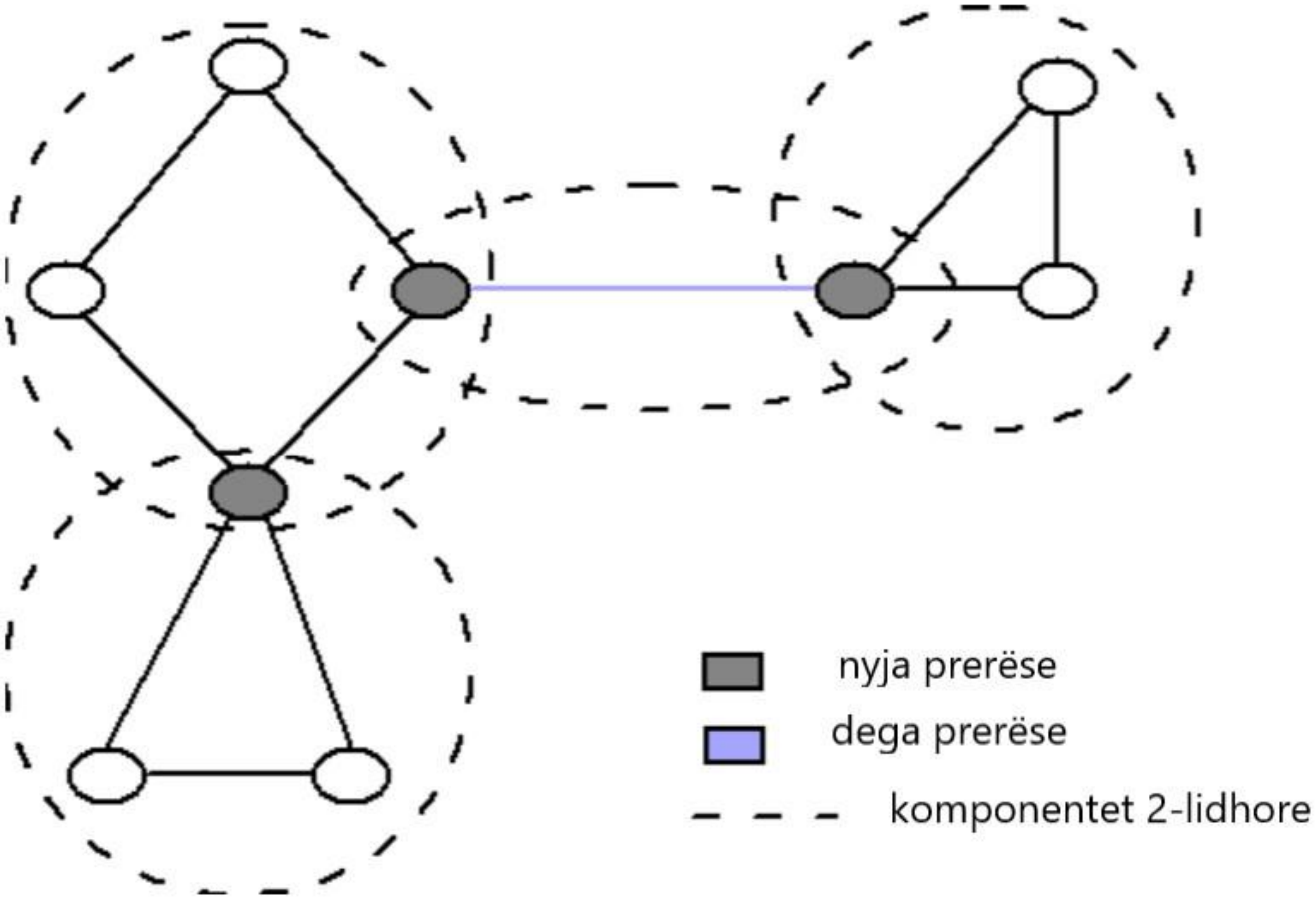
Komponentet 2-lidhore.

Studimi i komponenteve 2-lidhore është e rëndësishme në rrjetat kompjuterike ku degët paraqesin lidhjet. Nëse ruteri në komponentet 2lidhore dështon, mesazhet ende mundë të drejtohen në komponentet duke i përdorur ruterët e tjerë.

Komponentja 2-lidhore e grafit G është nëngraf nëse i plotëson:

1. Ai është nëngraf maksimal i grafit G i cili është 2-lidhor (maksimal e ka kuptimin: nëse shtojmë ndonjë nyje ose degë, grafiku nuk mbetet 2-lidhor).
2. Një degë e grafit G që përbëhet nga dega prerëse dhe një nyje e mbarimit të tij.

Degët prerëse quhen ura ndërsa nyjet prerëse quhen pika të artikulacionit shih figurën.

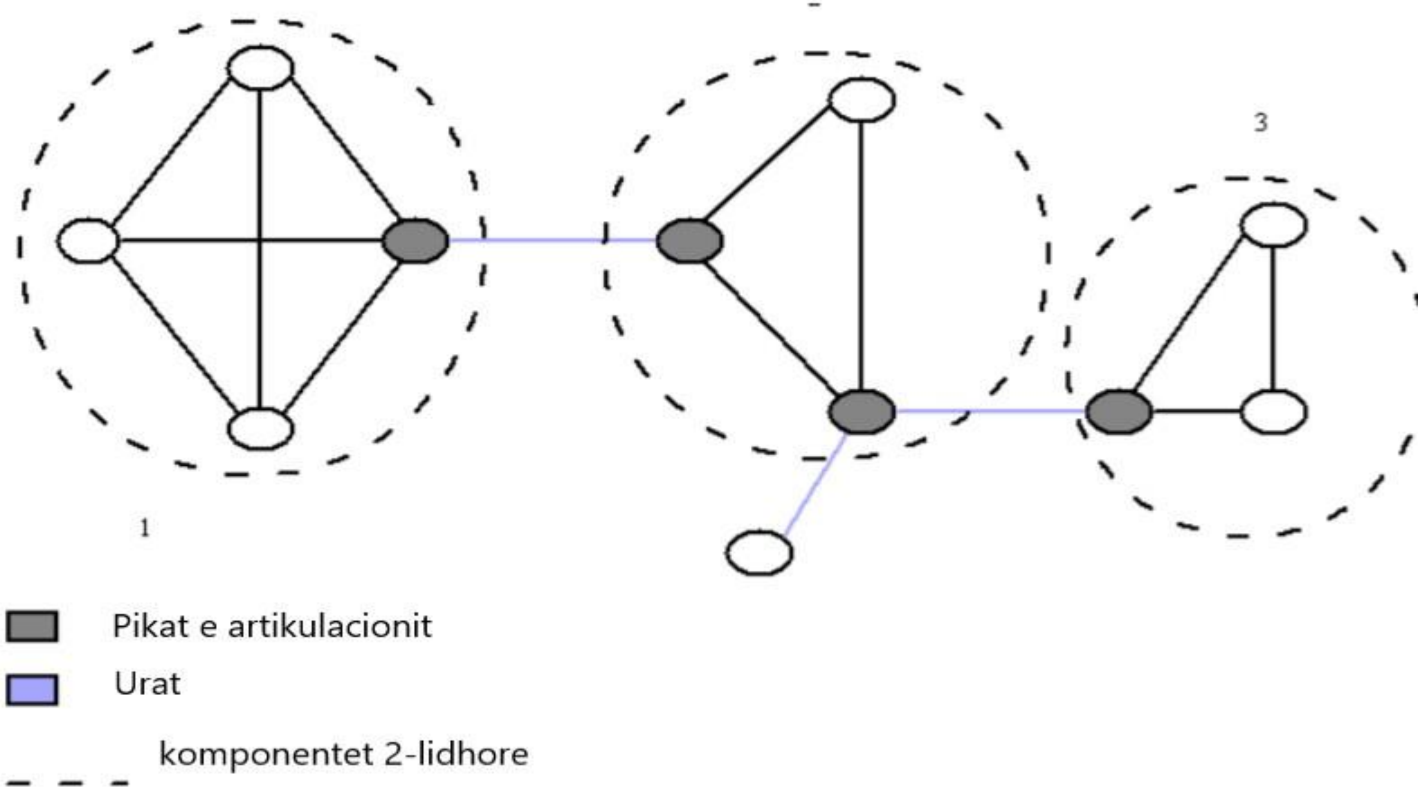


Komponentet 2-lidhore, urat dhe pikat e artikulacionit

Një pikë artikulimi është një nyje heqja e së cilës shkëput grafin G.

Një urë është një degë heqja e së cilës shkëput grafin G.

Le të jetë $G = (V, E)$ një pemë si në figurë. Pikat e artikulacionit janë nyjet e ngjyrosura, urat janë degët e ngyrosura dhe komponetet 2-lidhore janë degët në regjionet e rrethuara dhe të shënuara me numra.



Bashkësitë ndarëse.

Përkufizim: Le të jetë dhënë grafi $G = (V, E)$.

Një nyje $v \in G$ quhet **nyje prerëse**, në qoftë se $|G - v| > |G|$.

Një nënbashkësi $A \subseteq V_G$ është një **bashkësi ndarëse**, në qoftë se $G - A$ është jo e lidhur (shiko grafin më poshtë). Thuhet gjithashtu se A i ndan nyjet u dhe v, në qoftë se u dhe v u përkasin komponentëve të ndryshëm të $G - A$. Në qoftë se G është i lidhur, atëhere nyja v është nyje prerëse atëhere dhe vetëm atëhere kur $G - v$ është jo i lidhur, d.m.th., v është një bashkësi ndarëse.

Vërejmë gjithashtu se, në qoftë se $A \subseteq V_G$ ndan u dhe v, atëherë çdo shteg $P: u \to v$ viziton një nyje të bashkësis A.

Lemë. Në qoftë se një graf i lidhur G nuk ka bashkësi ndarëse, atëherë ai është graf i plotë (komplet).

Vërtetim:

Në qoftë se $\nu_G \leq 2$ atëherë pohimi është i qartë.

Për $\nu_G \geq 3$, supozojmë se grafi G nuk është i plotë (komplet) dhe le të jetë $\{u, v\} \in E_G$. Bashkësia $V_G \setminus \{u, v\}$ është një bashkësi ndarëse dhe që këtej rrjedh vërtetësia e pohimit.

Lidhshmëria e grafit $G = (V, E)$, që po e shënojmë me $\kappa(G)$ quhet minimumi i kulmeve largimi i të cilëve e kthen atë në graf të palidhur ose në një nyje të vetme.

Përkufizim. Numri i lidhshmërisë (për nyjet) $\kappa(G)$ të grafit G përcaktohet nga barazimi:

$\kappa(G) = min\{k: k = |A|, \text{është } i\ lidhur\ ose\ trivil, A \subseteq V_G\}$, Një graf G është i ***k*-lidhor** në qoftë se $\kappa(G) \geq k$. Me fjalë tjera:

- $\kappa(G) = 0$, nëse grafi G është jo i lidhur.
- $\kappa(G) = \nu_G - 1$, nëse grafi G është graf i plot (komplet).

- Për raste tjera $\kappa(G)$ është e barabartë me madhësinë minimale të bashkësisë ndarëse të grafit G.

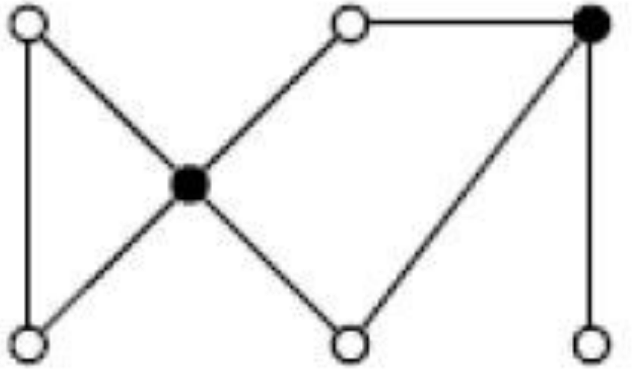
Është e qartë që, nëse është i lidhur ai është i 1-lidhor.

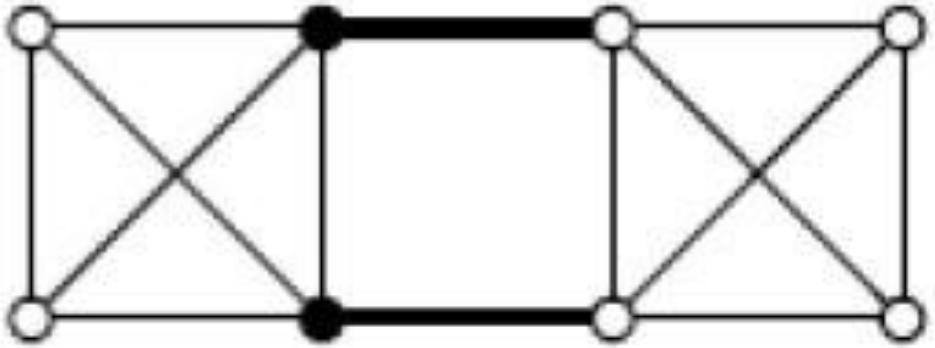
Përkufizim. Prerje degëzore F e grafit G quhet bashkësia që përmban degë të tilla që $G - F$ është jo i lidhur. Le të kemi

$$\kappa'(G) = min\, k:\{k = |F|,\, G - F\ jo\ i\ lidhur, F \subseteq E_G\},$$ Për grafët trivialë, $\kappa'(G) = 0$.

Një graf G është i k-lidhur sipas degëve, nëse $\kappa'(G) \geq k$. Një prerje minimale degëzore $F \subseteq E_G$ është një lidhje, me fjalë të tjera: $F - \{e\}$ nuk është prerje degëzor për çdo $e \in F$.

Shembull. Në qoftë se G është jo i lidhur, atëhere $\kappa'(G) = 0$. Në grafin e djathtë më lart, $\kappa(G) = 2$ dhe $\kappa'(G) = 2$. Vërehet se, valenca minimale është $\delta(G) = 3$.





Lemë. Le të jetë grafi G i lidhur. Në qoftë se $e = \{u, v\}$ është një urë, atëhere ose $G = K_2$ ose një nga nyjet u ose v është një nyje prerëse.

Vërtetim.

Supozojmë se $G \neq K_2$ nga rrjedh se $\nu_G \geq 3$, meqë G është i lidhur. Le të jenë $G_u = N^*_{G-e}(u)$ dhe $G_v = N^*_{G-e}(v)$ komponentë të lidhur të $G - E$ që përmbajnë

u dhe v. Tani, ose $\nu_{Gu} \geq 2$ dhe është nyje prerëse, ose $\nu_{Gv} \geq 2$ dhe v është nyje prerëse.

Teoremë. Për çfardo graf G kemi: $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$, ku

$\kappa(G) = \min\{k : k = |A|$, është $i\ lidhur\ ose\ trivil, A \subseteq V_G\}$

$\kappa'(G) = \min\{k : k = |F|, G - F\ jo\ i\ lidhur, F \subseteq E_G\}$ dhe

$\delta(G) = \min\{d(k) : k \in V\}$

Pa vërtetim.