Universiteti Publik “Kadri Zeka”, Gjilan

Fakulteti i Shkencave Kompjuterike

Lënda: Teoria e Grafeve

Tema:

Shtegu i Eulerit dhe qarku i Eulerit

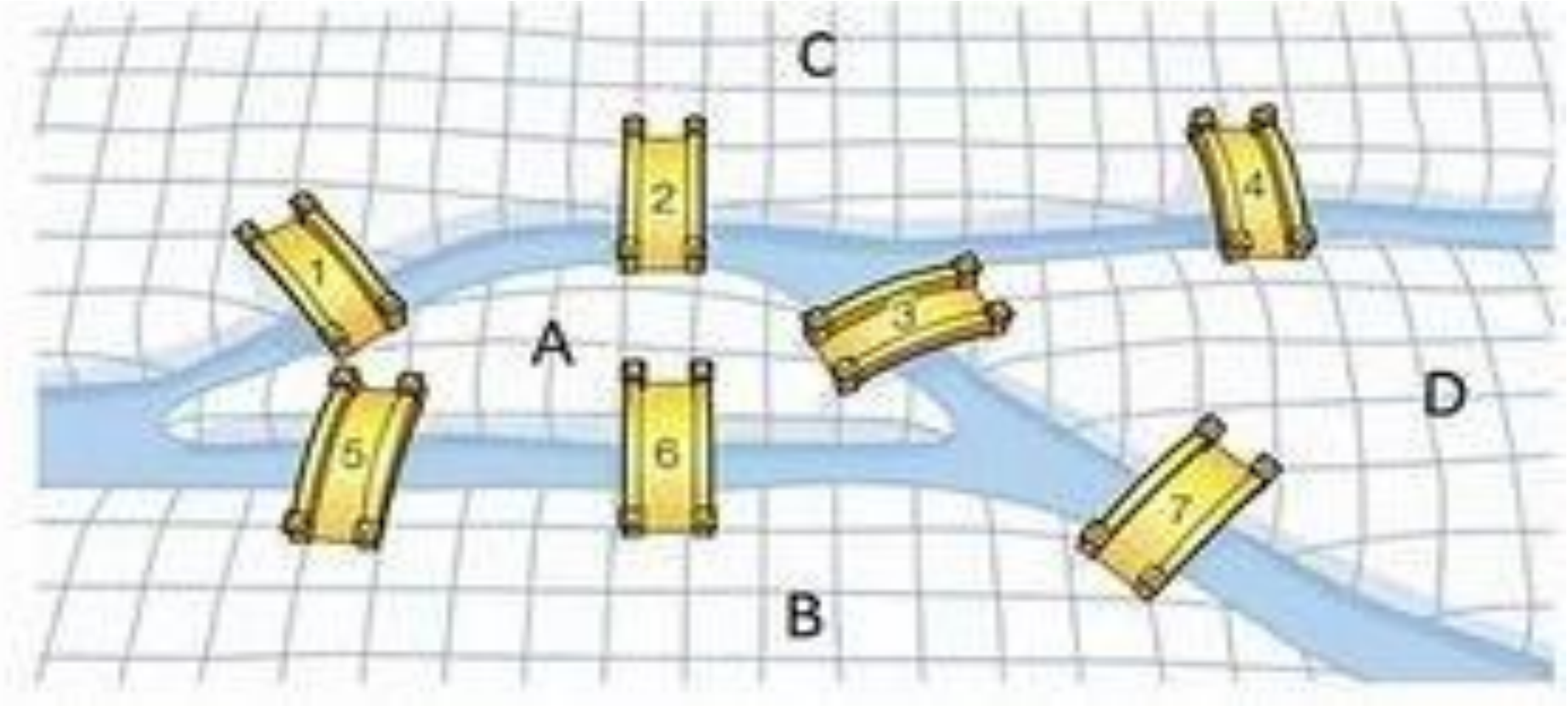
- Kuptimi dhe shembuj
- Kondita e nevojshme dhe e mjaftueshme që multigrafi të ketë qark ose shteg të Eulerit

Hyrje:

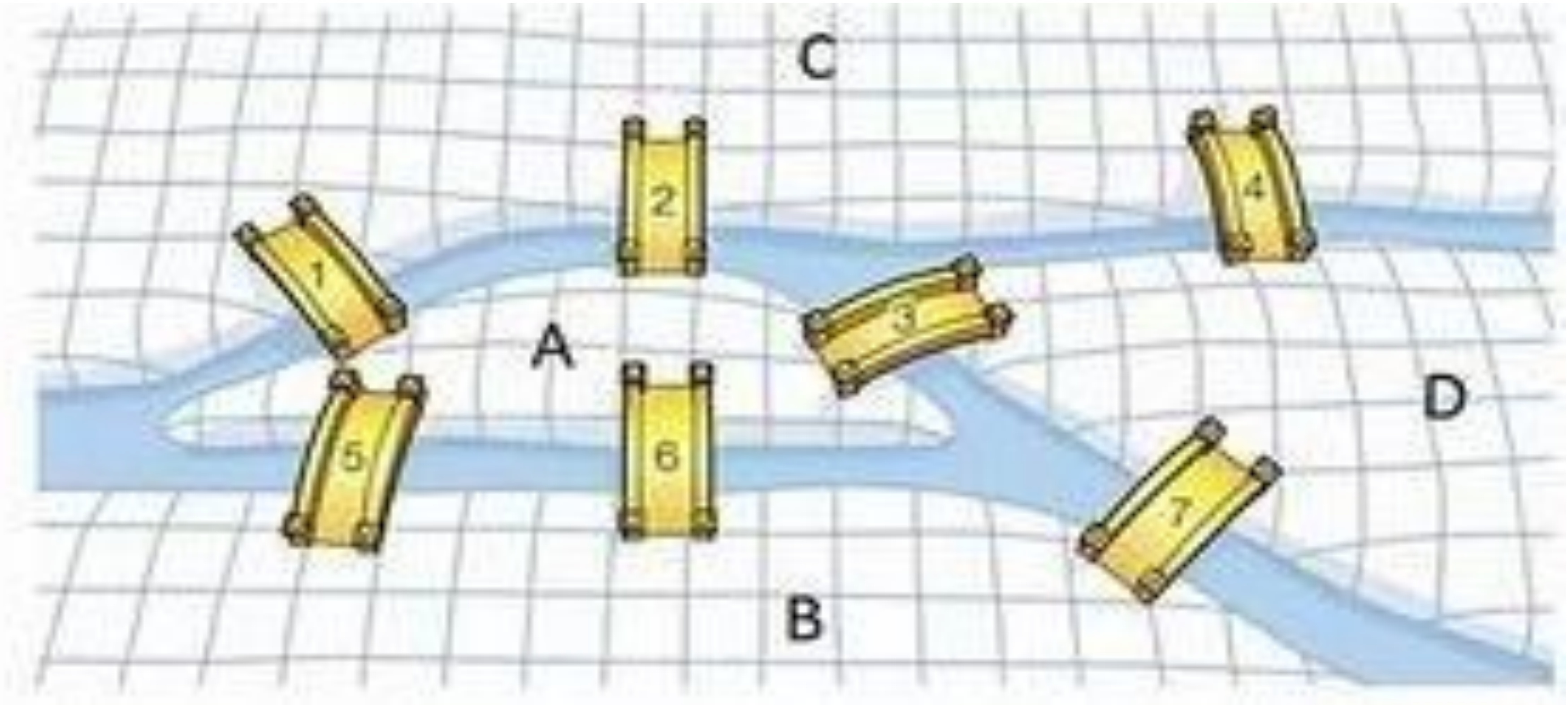
- A është e mundur të udhëtohet nëpër degët e një grafi duke u nisur nga një nyje dhe duke u kthyer tek ajo në mënyrë që secila degë e grafit të përshkohet vetëm një herë?
- Në mënyrë të ngjashme, a mund të udhëtohet nëpër degët e një grafi duke u nisur nga një nyje dhe duke u kthyer tek ajo në mënyrë që secila nyje e grafit të vizitohet vetëm një herë?

- Megjithëse pyetjet duken të ngjashme, e para lidhet me ekzistencën e një qarku të Eulerit në graf dhe mund të jepet lehtë përgjigje për të gjithë grafët, kurse e dyta ka lidhje me ekzistencën e një qarku të Hamiltonit dhe ka vështirësi për tu zgjidhur.
- Megjithëse të dy pyetjet kanë shumë zbatime praktike në shumë zona të ndryshme, ato kanë lindur si problema zbavitëse enigmatike por të cilat gjetën zbatime praktike në kohët moderne.
- Qyteti Königsberg-Gjermani ishte i ndarë në katër sektorë A, B, C, D prej degëve të lumit Predel.

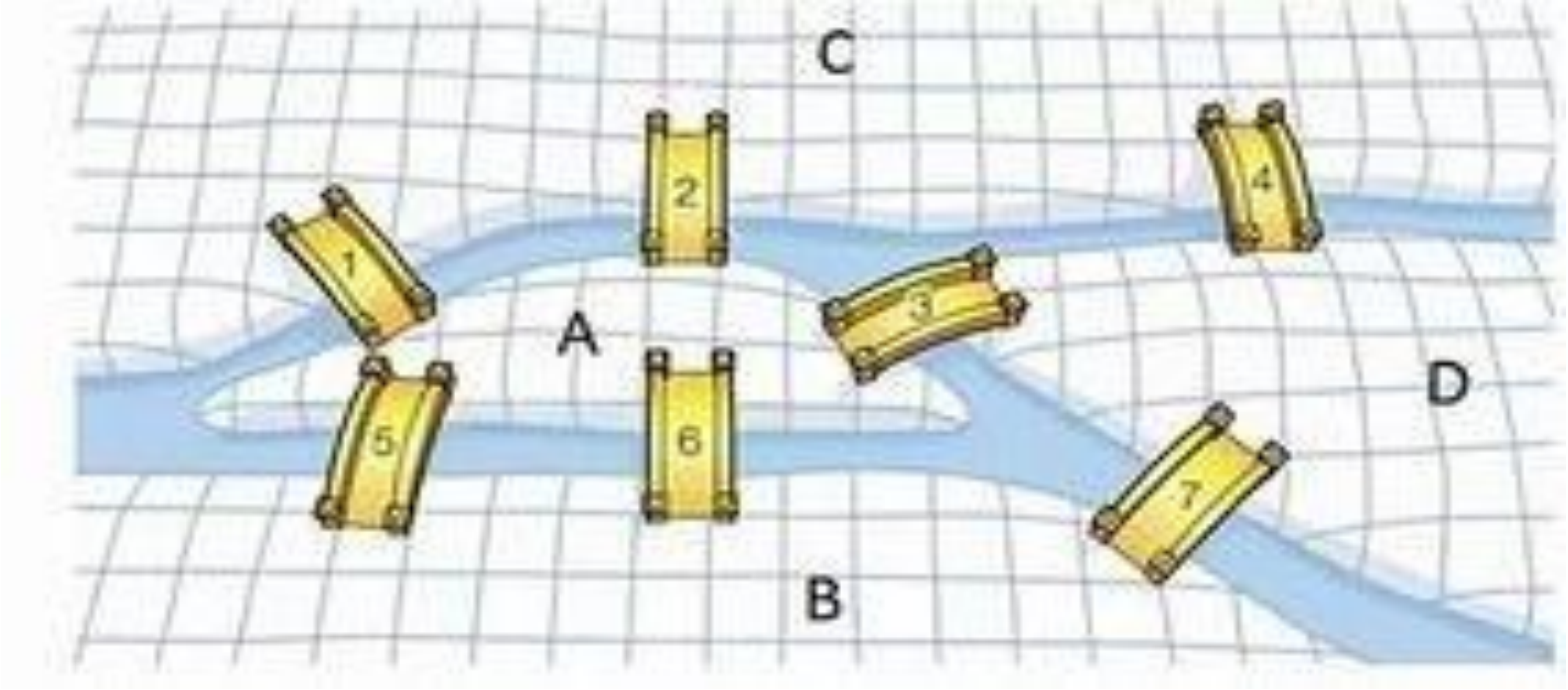
- Në shekullin e 18-të këto sektorë lidheshin me anë të shtatë urave ashtu si tregohet në këtë skemë.



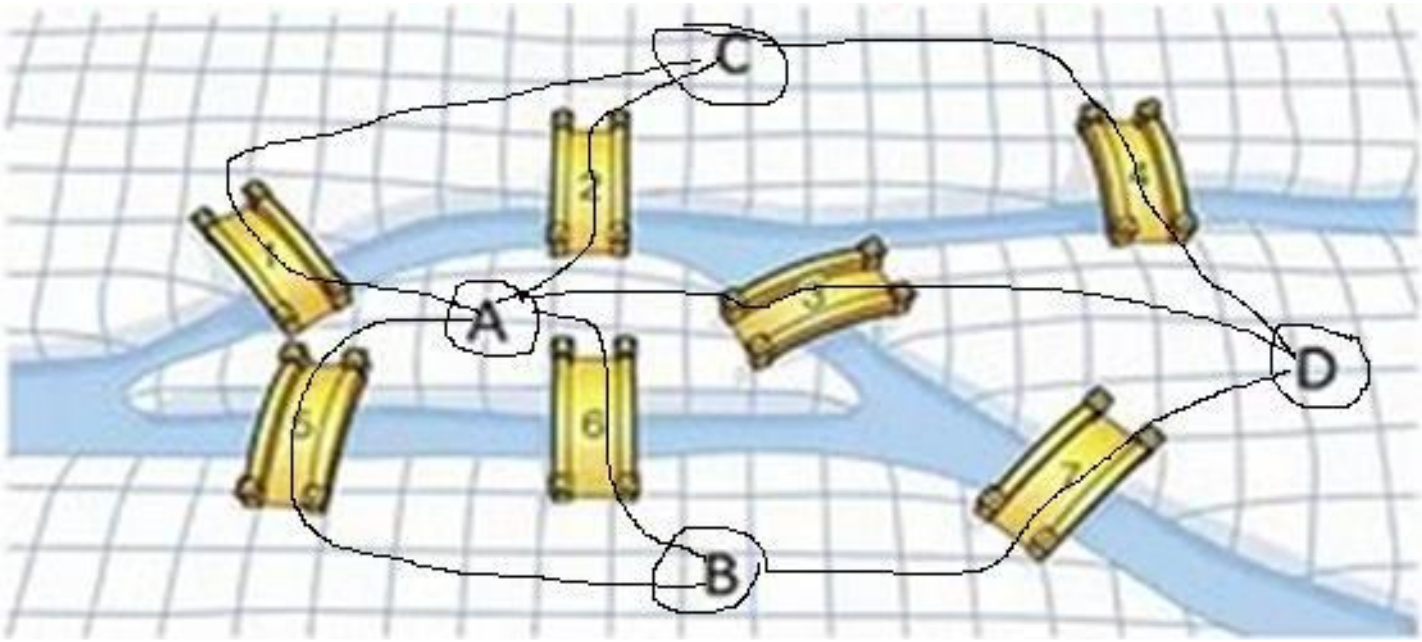
- Banorët që bënin shëtitje të gjata në ditët e Diela, pyesnin me çudi nëse ishte e mundur të niseshin nga një pikë e caktuar e qytetit, të kalonin nëpër të gjitha urat por pa kaluar dy herë në të njëjtën urë, dhe të ktheheshin në pikën e nisjes.

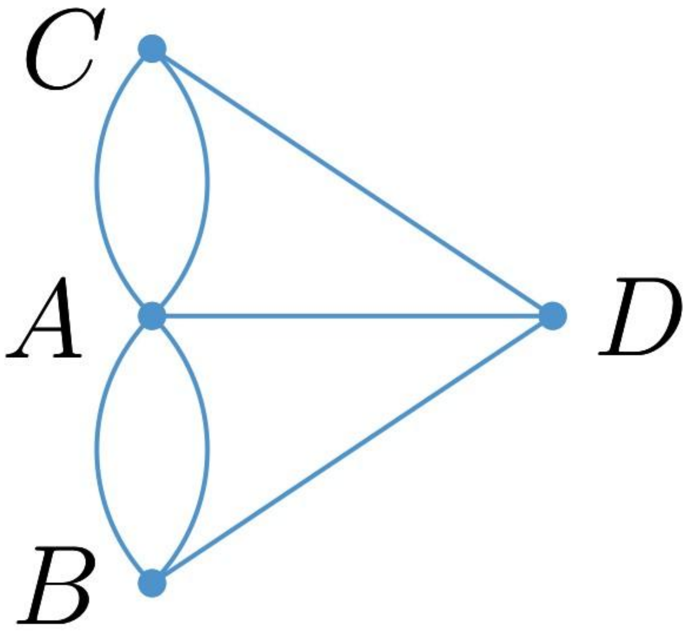


- Matamatikani Zviceran Leonard Euler e zgjidhi këtë problemë, dhe zgjidhja e tij është botuar në vitin 1736, ku mendohet se është përdorur për herë të parë teoria e grafeve.



- Euleri e studioi këtë problemë duke përdorur multigraf i cili merret duke përfaqësuar katër zonat me nyje dhe urat me linja. Ky multigraf tregohet si në figurë.



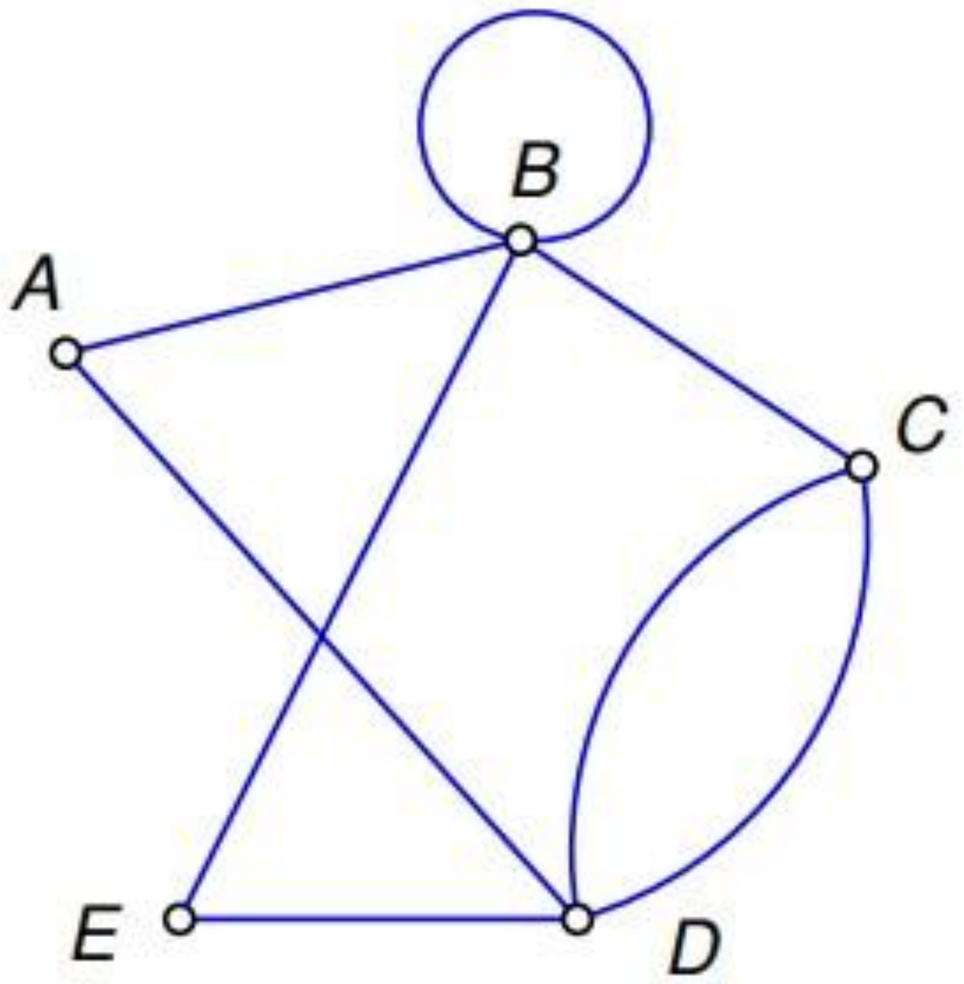


Problemi i kalimit të çdo ure pa kaluar më shumë se një herë në cilëndo urë mund të rifrazohet me termat e këtij modeli dhe pyetja merr trajtën:

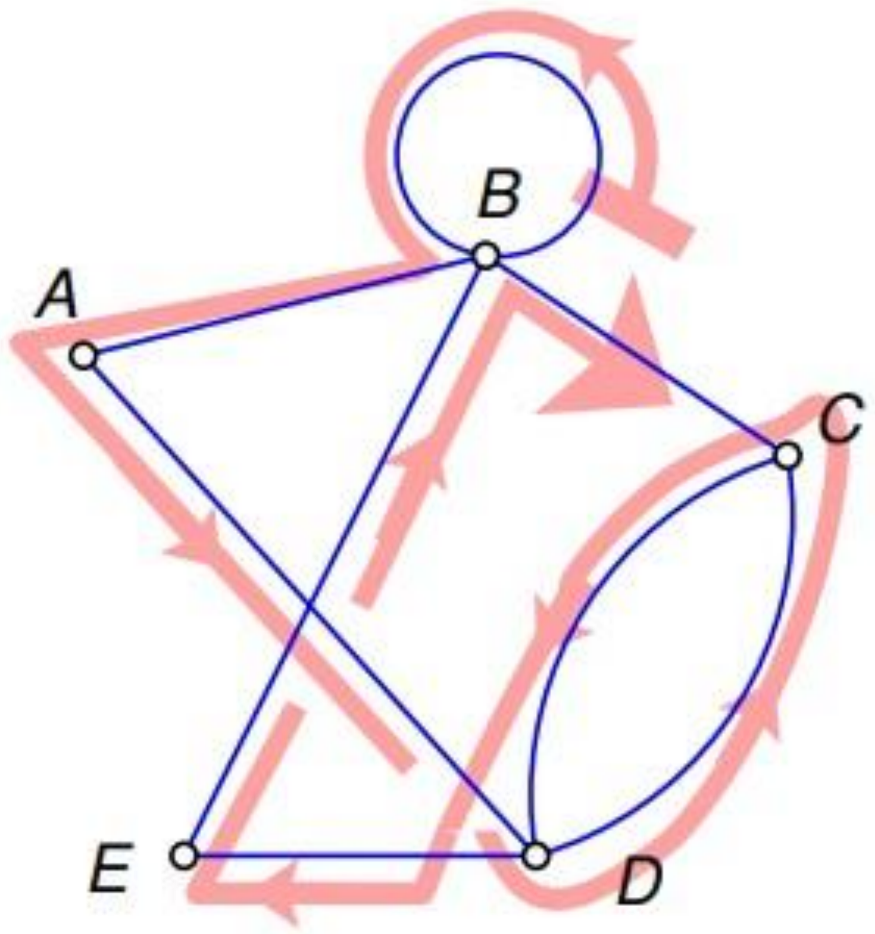
A ka ndonjë qark të thjeshtë në këtë multigraf i cili duhet të përmbajë secilën nga degët ?

- **Shteg i Eulerit** në grafin G është një shteg i cili përmban çdo degë të grafit G saktësishtë njëherë.
- Një shteg i eulerit fillon dhe mbaron në nyje të ndryshme.

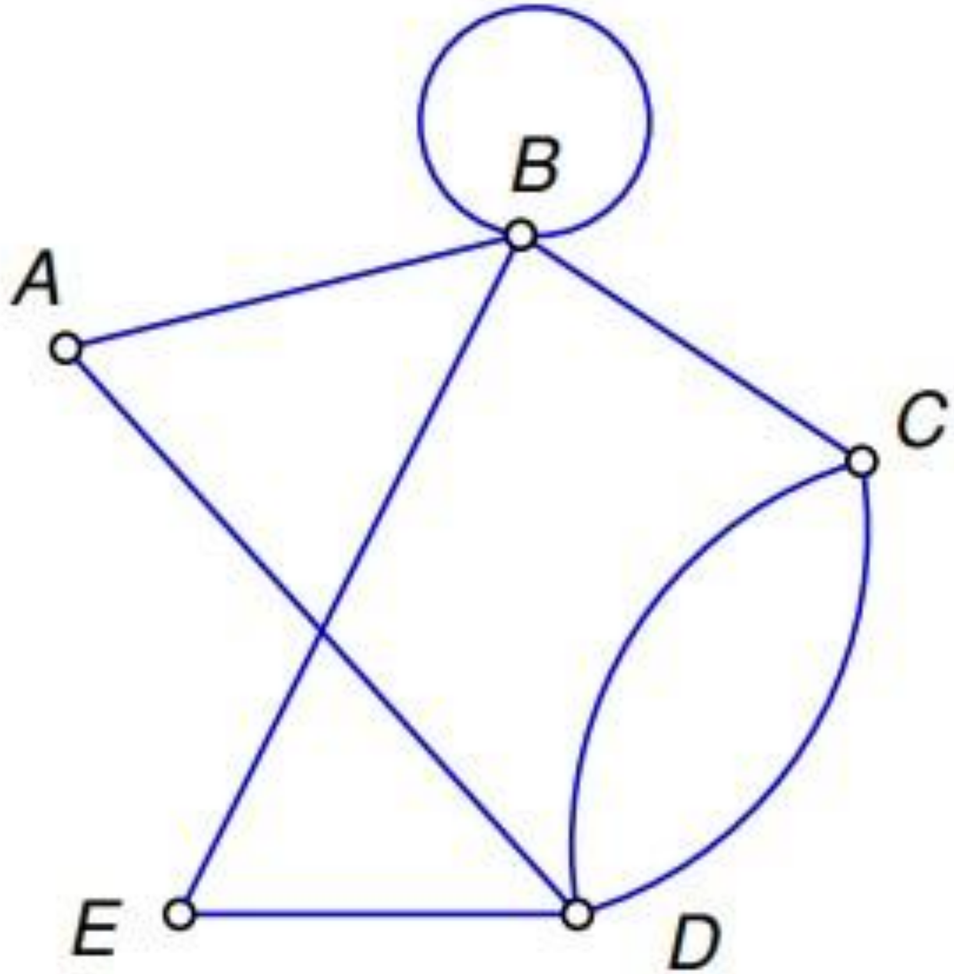
Shembull. Për grafin e dhënë G si në figurë gjeni një shtegë të Eulerit.


B
A
C
E
D

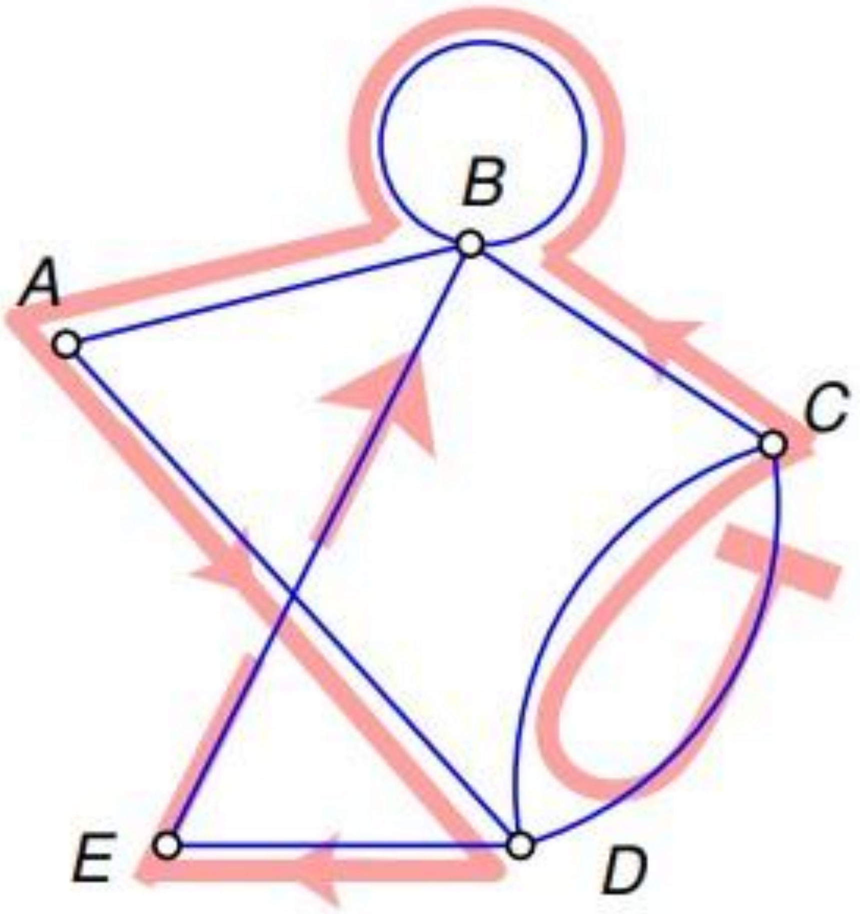
Zgjidhje. Për grafin e dhënë G si në figurë një shtegë i Eulerit është BBADCDEBC.



Shembull. Për grafin e dhënë G si në figurë gjeni një shtegë të Eulerit.

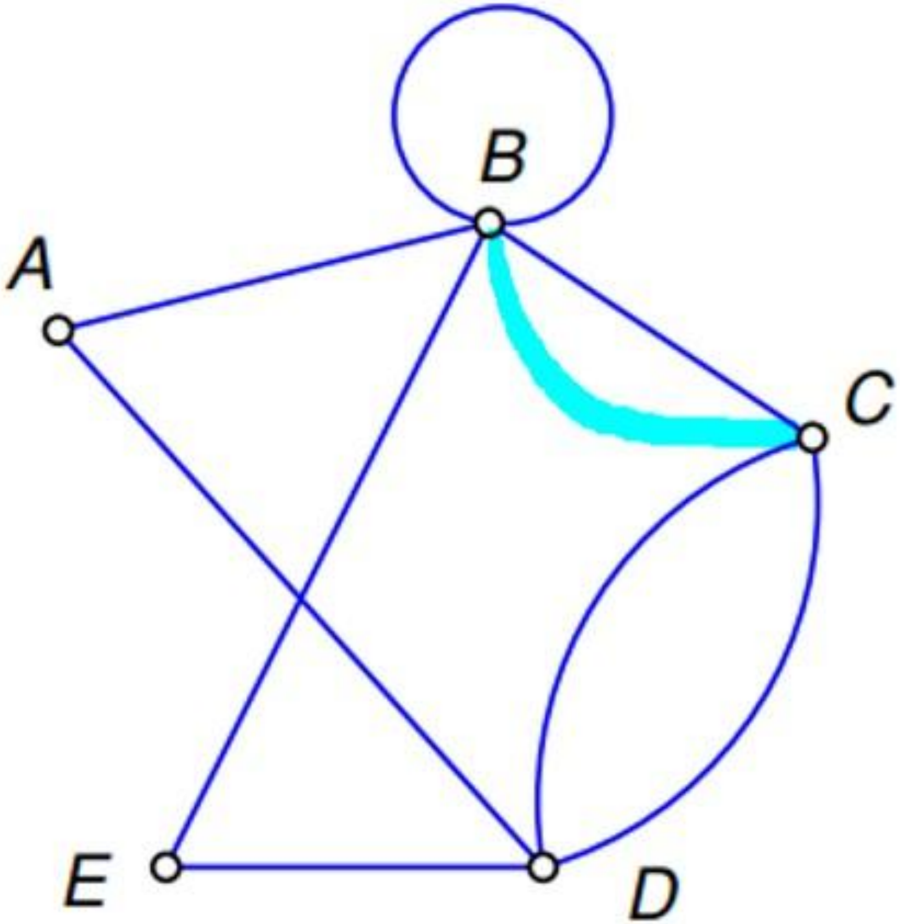

A
B
C
D
E

Zgjidhje. Për grafin e dhënë G si në figurë një shtegë i Eulerit ështëCDCBBADEB.

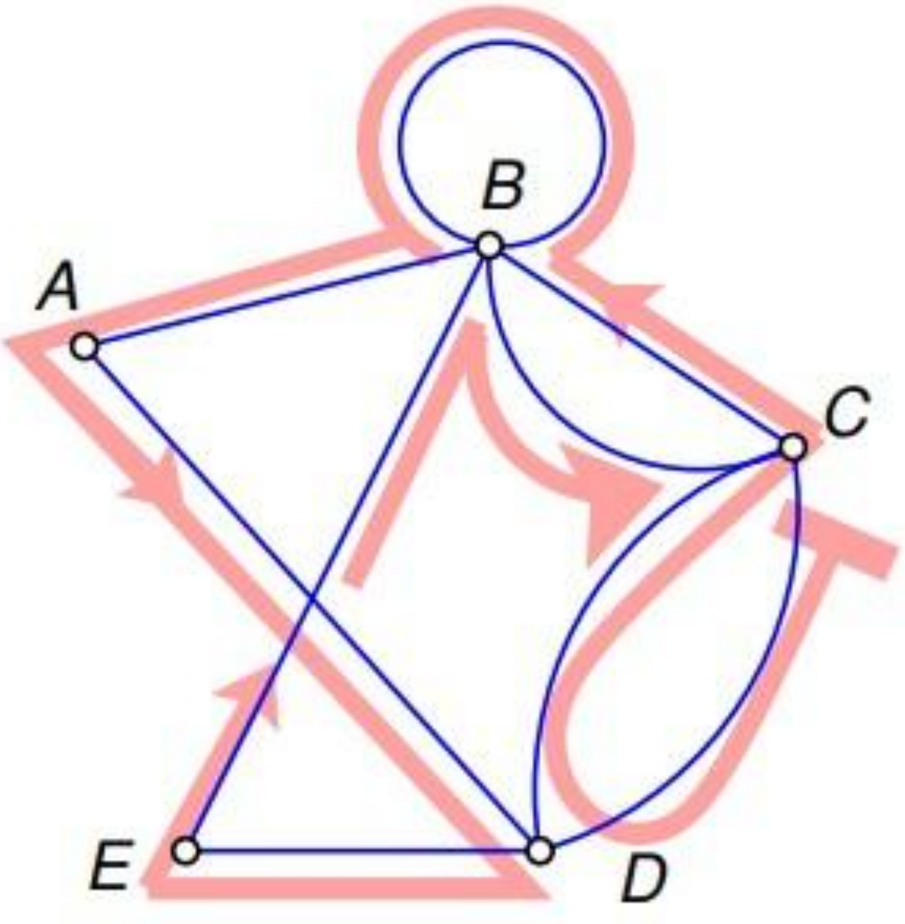


- **Qarku i Eulerit** në një graf G është një qark i cili përmban çdo degë të grafit G saktësishtë njëherë.
- Një qark i eulerit fillon dhe mbaron në të njëjtën nyje.

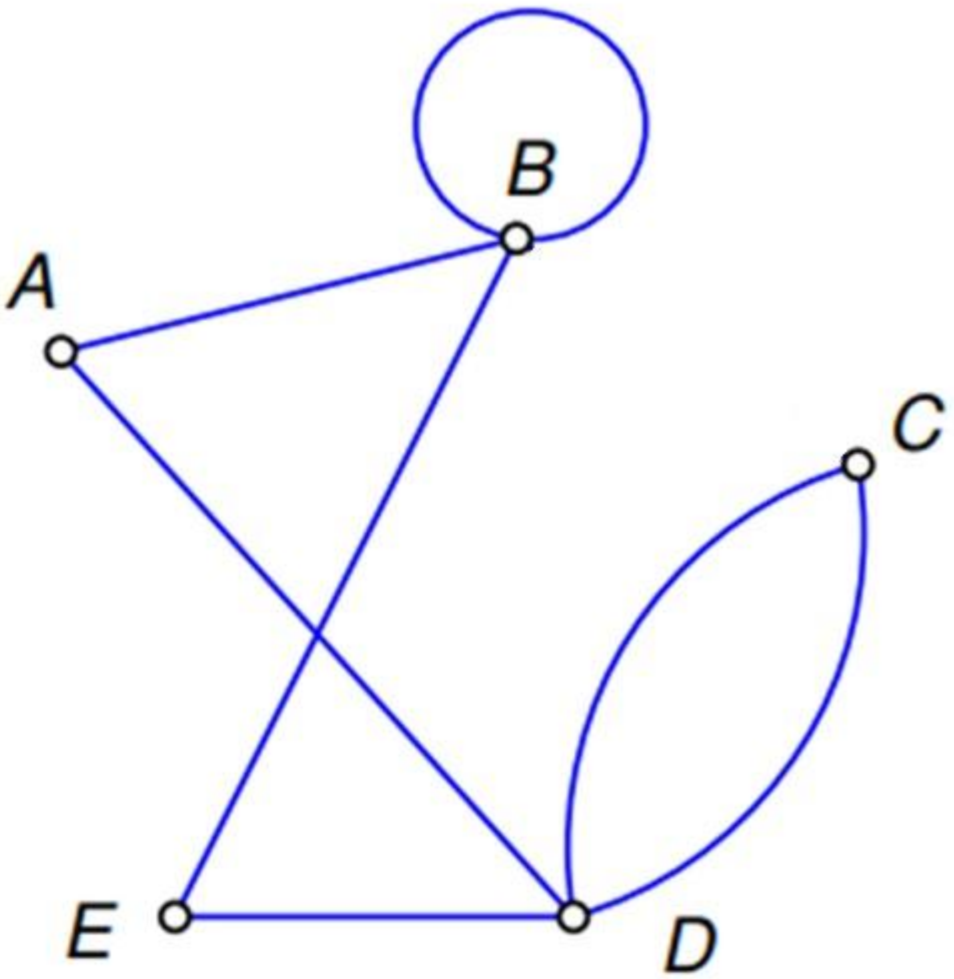
Shembull. Për grafin e dhënë G si në figurë gjeni një qark të Eulerit.



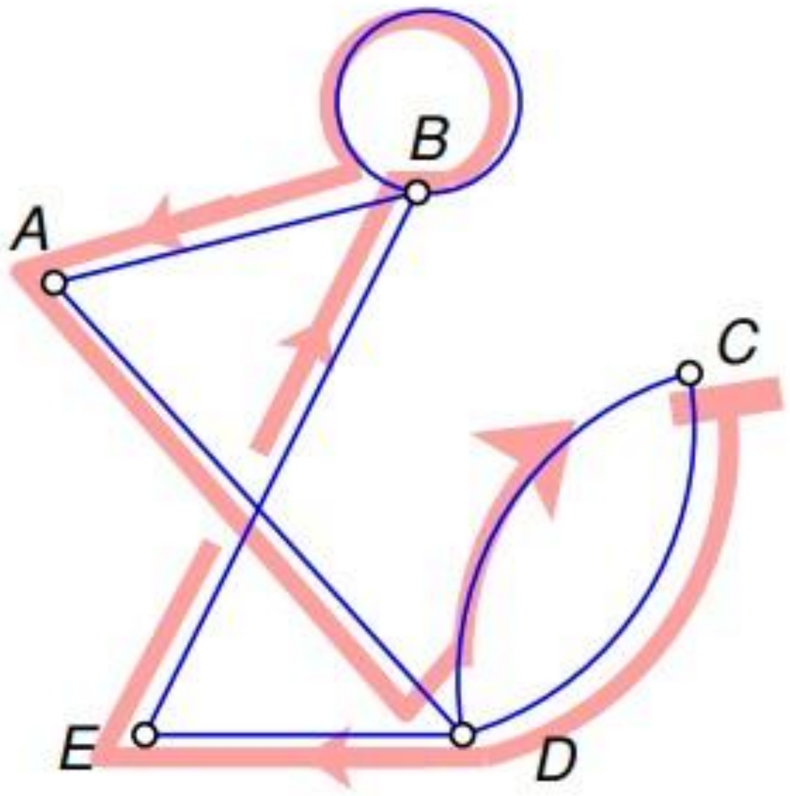
Zgjidhje. Për grafin e dhënë G si në figurë një qark i Eulerit ështëCDCBBADEBC.



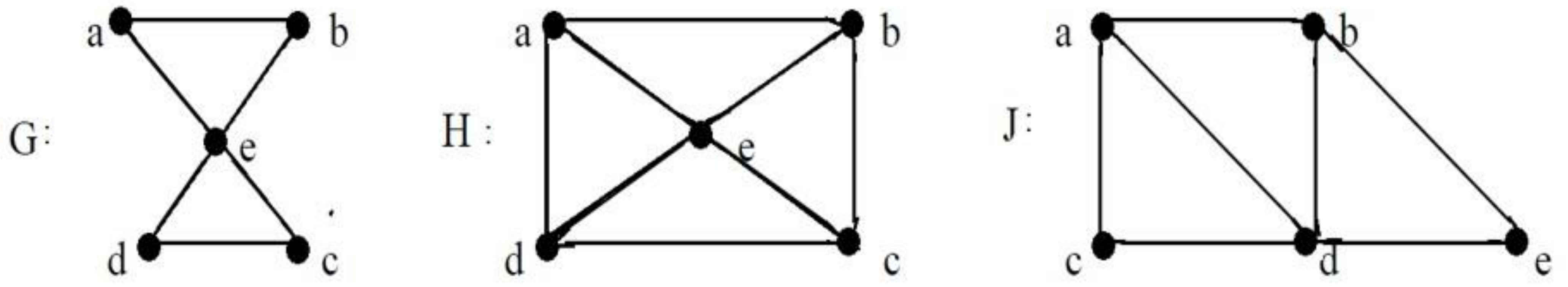
Shembull. Për grafin e dhënë G si në figurë gjeni një qark të Eulerit.


B
A
C
E
D

Zgjidhje. Për grafin e dhënë G si në figurë një qark i Eulerit është CDEBBADC.



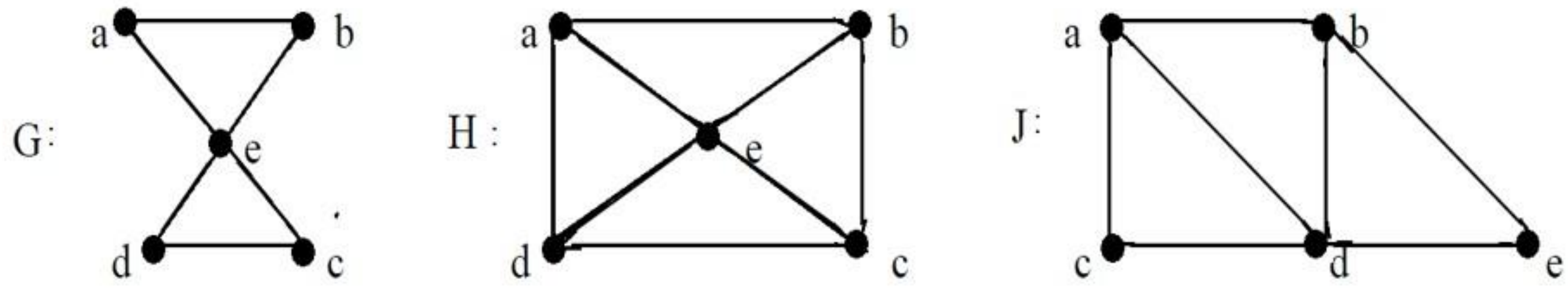
Shembull. Cili nga grafët e paorientuar të figurë ka qark të Eulerit? Cilët nga ata që nuk janë qarqe të Eulerit kanë shteg të Eulerit?



Grafet e paorientuara G, H, J.

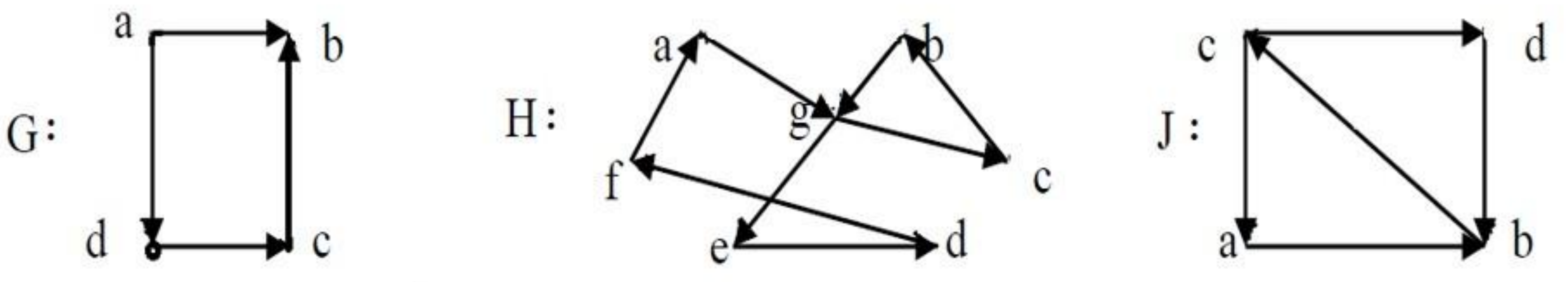
Zgjidhje. Grafi G ka një qark të Eulerit, p.sh., a,e,c,d,e,b,a; kurse asnjëri nga grafët e tjerë (H dhe J) nuk ka qark të Eulerit (të verifikohet).

Megjithatë, grafi J ka një shteg të Eulerit dhe pikërisht a,c,d,e,b,d,a,b, kurse H nuk ka të tillë.



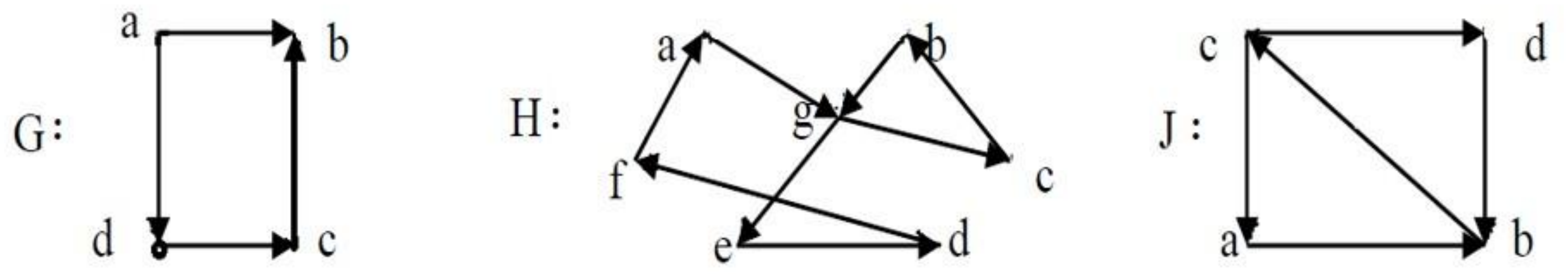
Grafet e paorientuara G, H, J.

Shembull. Cili nga grafët e orientuar në figurë ka qark të Eulerit? Nga ata që nuk kanë të tillë, cili ka shteg të Eulerit ?



Grafet e orientuar G, H dhe J.

Zgjidhje. Grafi H e ka një qark të Eulerit, p.sh., a,g,c,b,g,e,d,f,a. Asnjëri prej dy të tjerëve nuk ka të tillë(të kontrollohen). Grafi J ka një shteg të Eulerit që është : c,a,b,c,d,b, kurse grafi G nuk ka..



Grafet e orientuar G, H dhe J.

- Mendohet se problemi i parë në teorinë e grafeve ka qënë problemi me urën e Konigsberg-ut, që lidhet me udhëtimet në një graf në mënyrë të tillë që të shmanget përdorimi i një dege dy herë.

- Probleme të tilla ndeshen në praktikë në optimizimin e shpërndarjes në një rrjet, siç është shpërndarja e një poste, ku për të kursyer kohën secila rrugë duhet përshkuhet vetëm një herë.

- I njëjti problemë ndeshet në vizatimin e grafeve në mënyrë mekanike, ku duhet shmangur shkëputja e lapsit nga letra derisa bëhet vizatim.
- Të rikujtojmë:

- Shteg i Eulerit quhet shtegu $w = e_1 e_2 \ldots e_n$ në të cilin nuk përsëriten degët, për të gjitha $i \neq j$.

- Një graf i lidhur G është graf i Eulerit, në qoftë se ai ka një shteg të mbyllur që përmban çdo degë të G .
- Vërejmë se, në qoftë se $w = e_1 e_2 \ldots e_n$ është një qark i Eulerit (d.m.th. $E_G = \{e_1, \ e_2 \ , \ \ldots \ , \ e_n\}$) po ashtu $e_i e_{i+1}$ …$e_n e_1$ …e_{i-1} është qark i Eulerit për të gjitha $i \in [1, n]$.

- Ka kritere të thjeshta për të përcaktuar nëse një multigraf ka një qark ose shteg të Eulerit.
- Euleri i zbuloi ato derisa ishte duke zgjidhur problemin e famshëm mbi urat e Konigsbergut.

- Në këtë pjesë do të supozohet që të gjithë grafët që do të diskutohen kanë një numër të fundëm nyjesh dhe degësh.
- Çfarë mund të themi nëse një multigraf i lidhur ka shteg të Eulerit?

- Grafi i lidhur G ka shteg të Eulerit, atëhere dhe vetëm atëherë nëse ai ka saktësishtë dy nyje që e kanë valencën numër tek.

- Në të kundërtën grafi i dhënë nuk ka shteg të Eulerit.

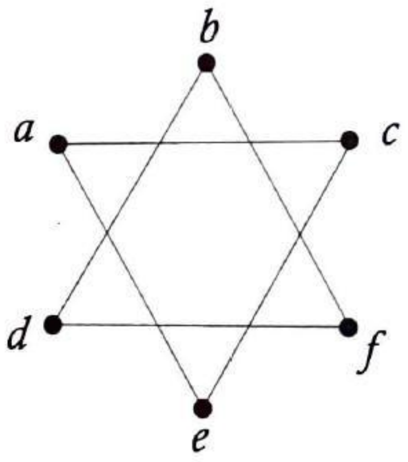
- Çfarë mund të themi nëse një multigraf i lidhur ka qark të Eulerit?

- Grafi i lidhur G ka qark të Eulerit atëhere dhe vetëm atëhere kur çdo nyje e ka valencën numër çift.

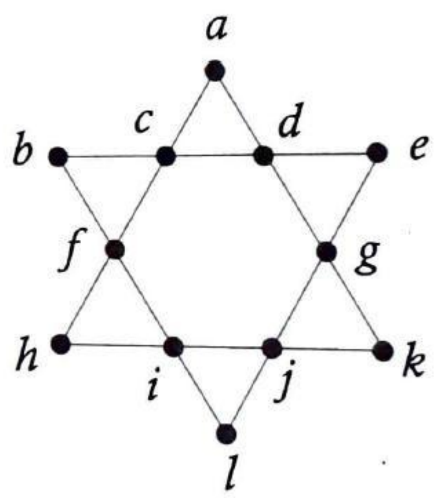
- Në të kundërtën nuk ka qark të Eulerit.

- Një graf i lidhur G ka një shtegtim të Eulerit atëhere dhe vetëm atëhere kur ai ka të shumtën dy nyje me valencë tek.

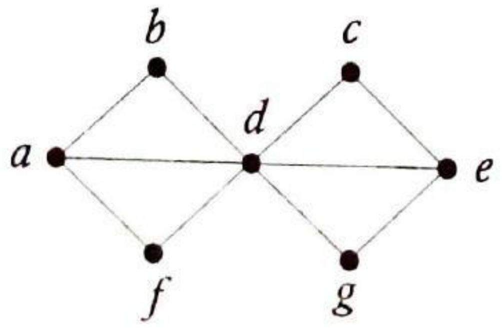
Detyrë. Cili nga grafet e mëposhtme ka qark të Eulerit?



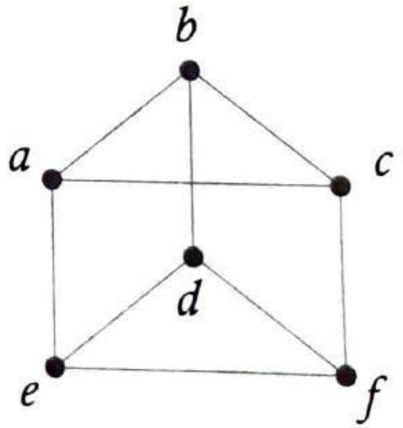
(a)



(b)

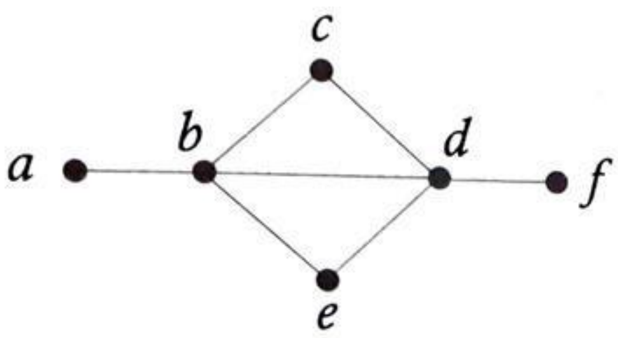


(c)

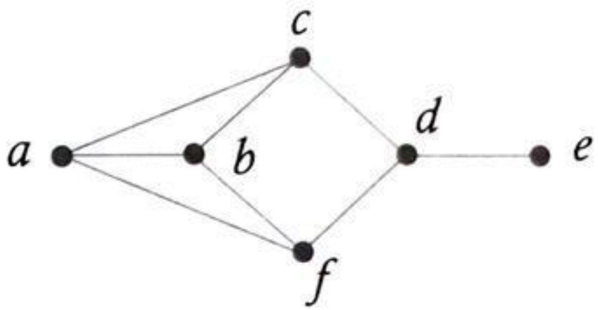


(d)

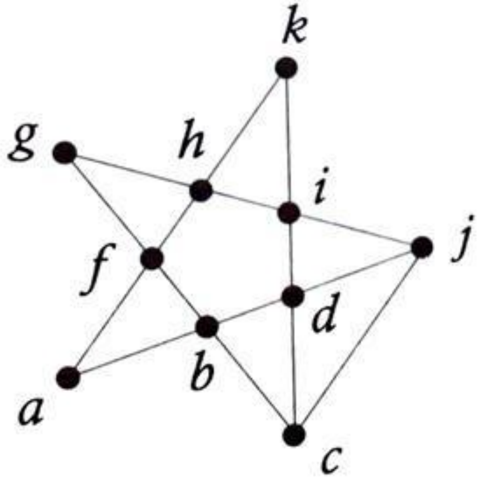
Detyrë. Cili nga grafet e mëposhtme ka shteg të Eulerit?



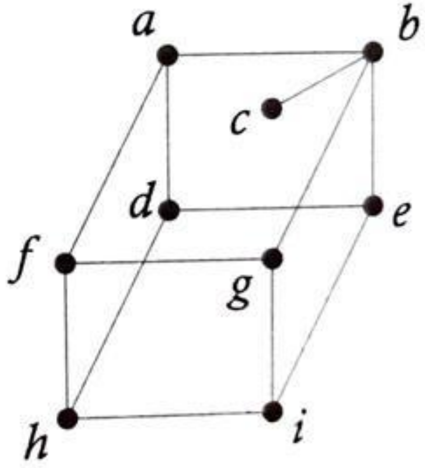
(a)



(b)

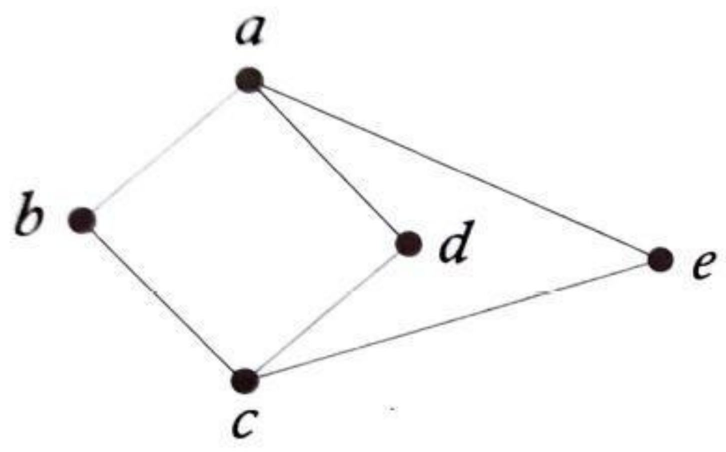


(c)

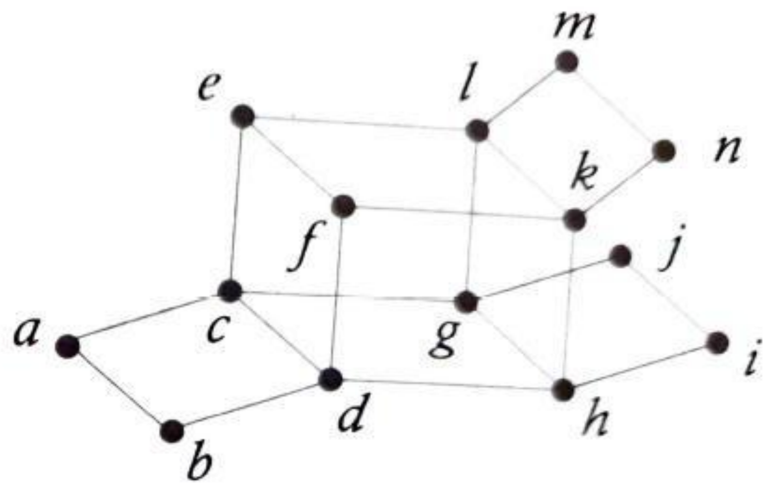


(d)

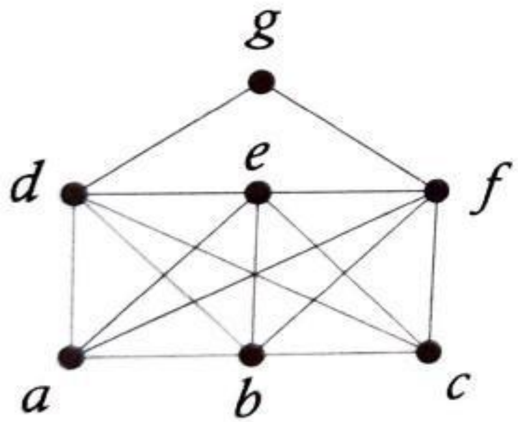
Shembull. Cili nga grafet e dhëna ka shteg të Eulerit?



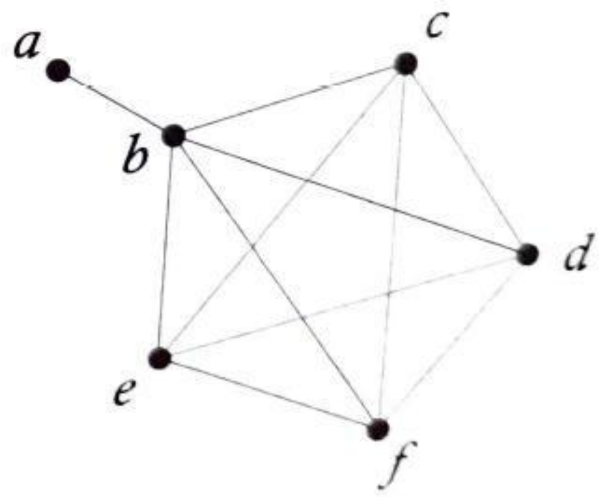
(a)



(b)



(c)

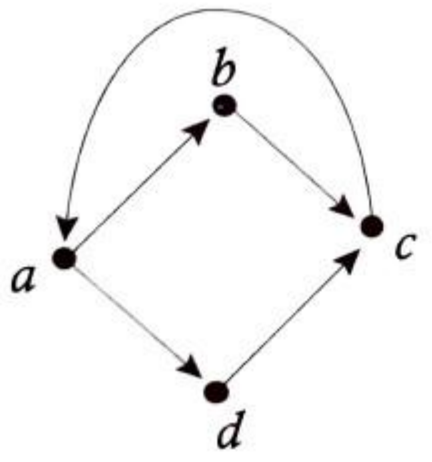


(d)

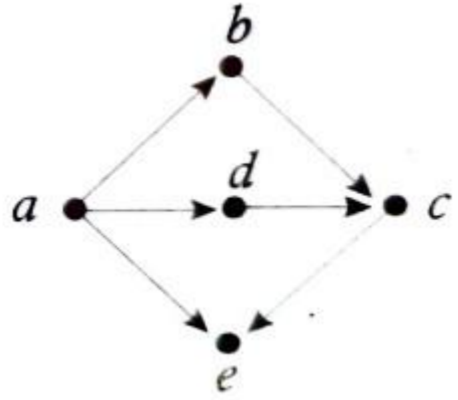
Shembull

. Cili nga grafet e orientuara është i lidhur fort?

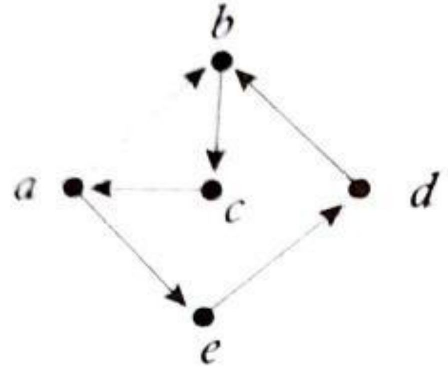
Shembull



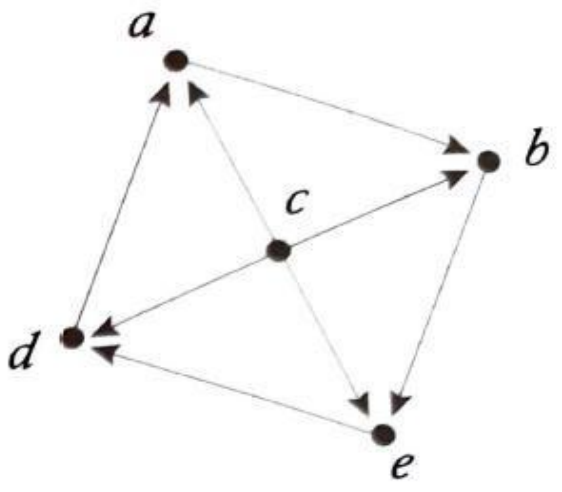
(a)



(b)



(c)

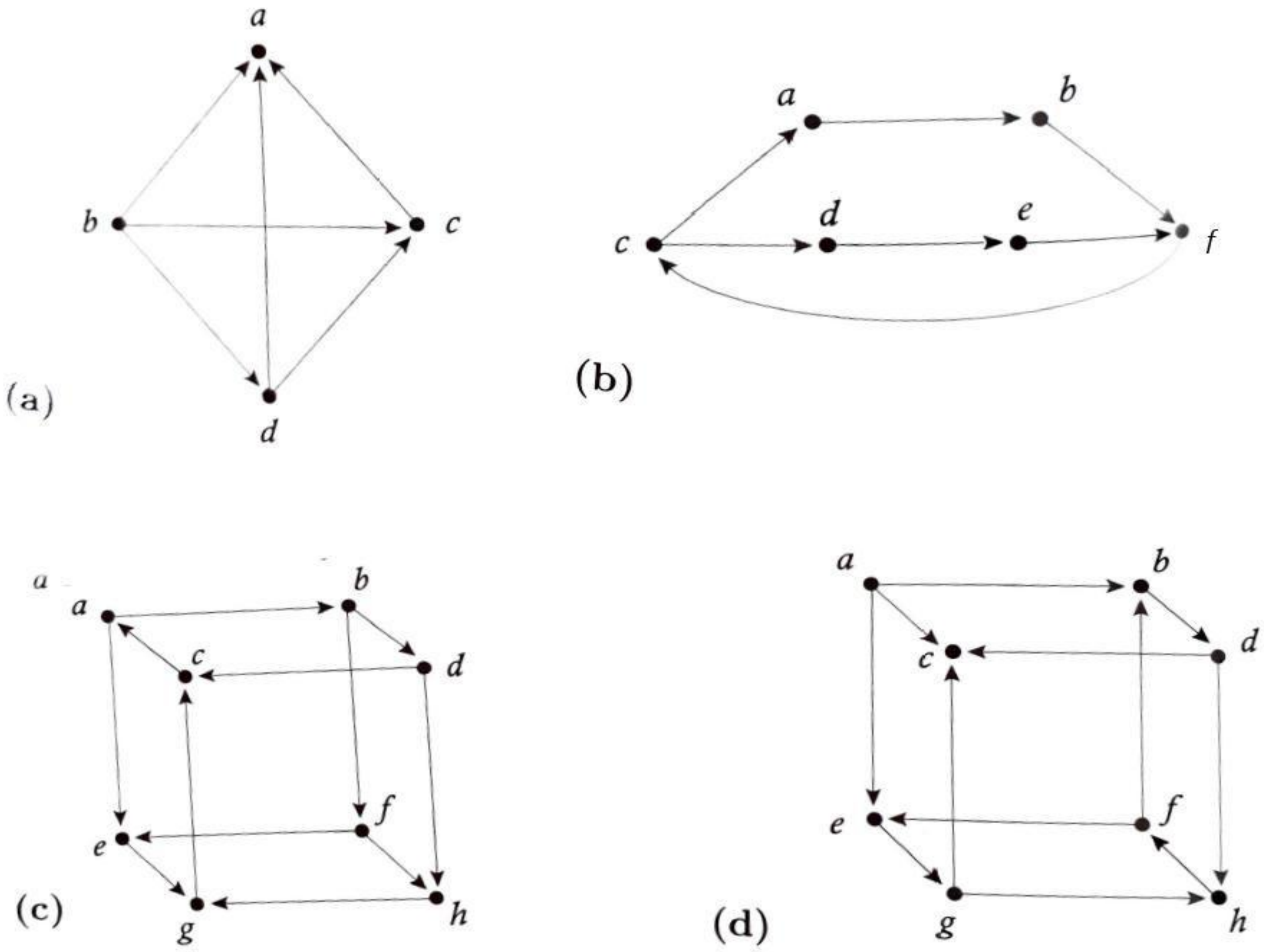


(d)

Shembull

. Cili nga grafet e dhëna është i lidhur fort?

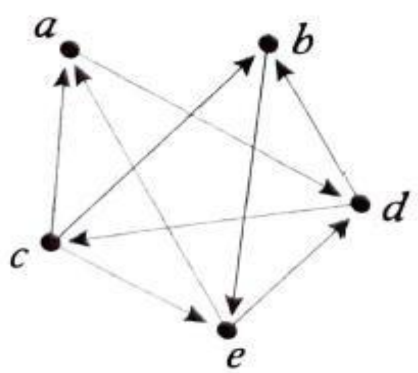
Shembull



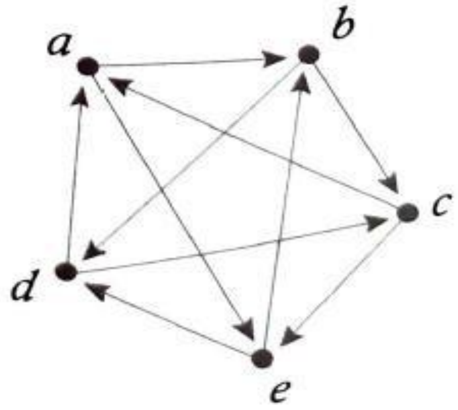
Shembull

. Cili nga grafet e dhëna ka qark të Eulerit?

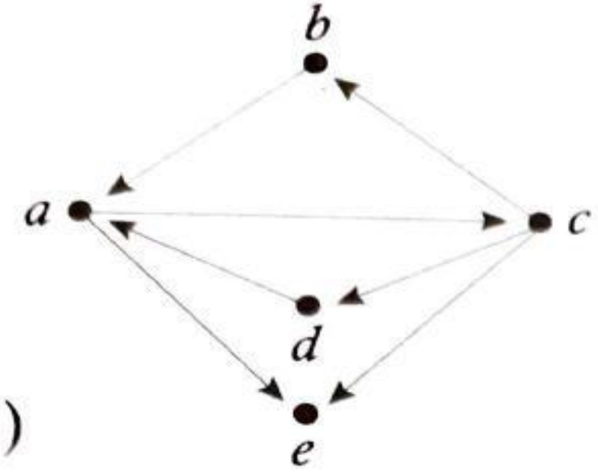
Shembull



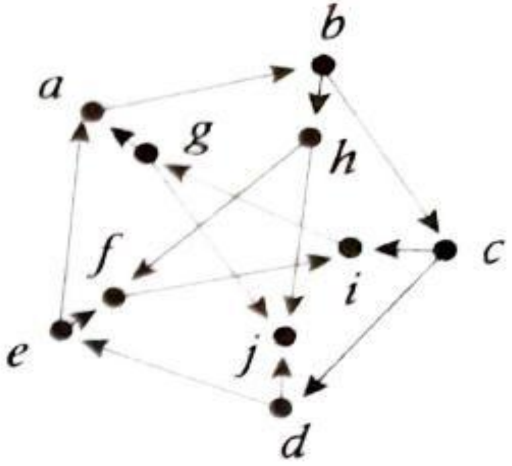
(a)



(b)



(c)

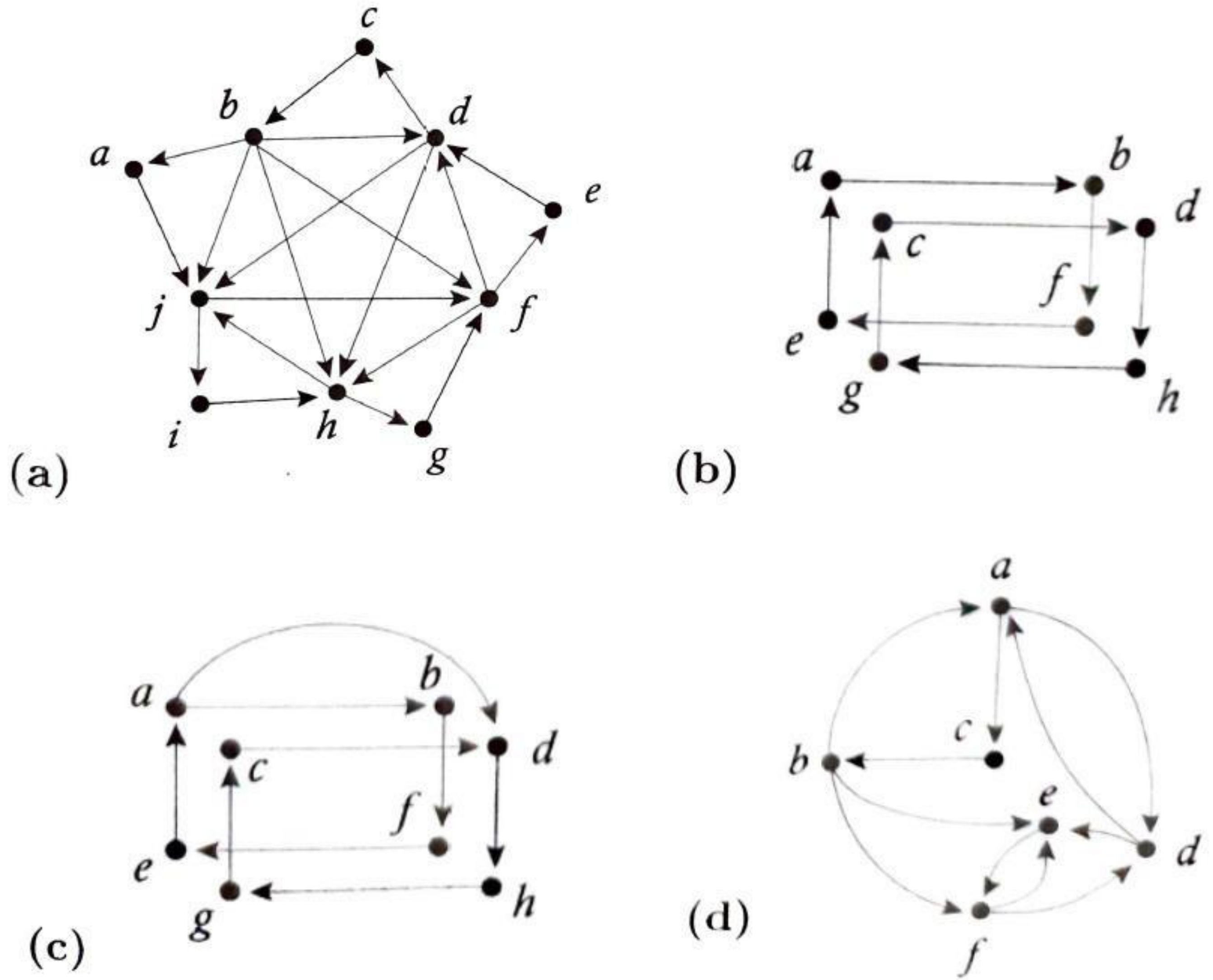


(d)

Shembull

. Cili nga grafet e dhëna ka qark të Eulerit?

Shembull



Algoritmi i Fleury-t :

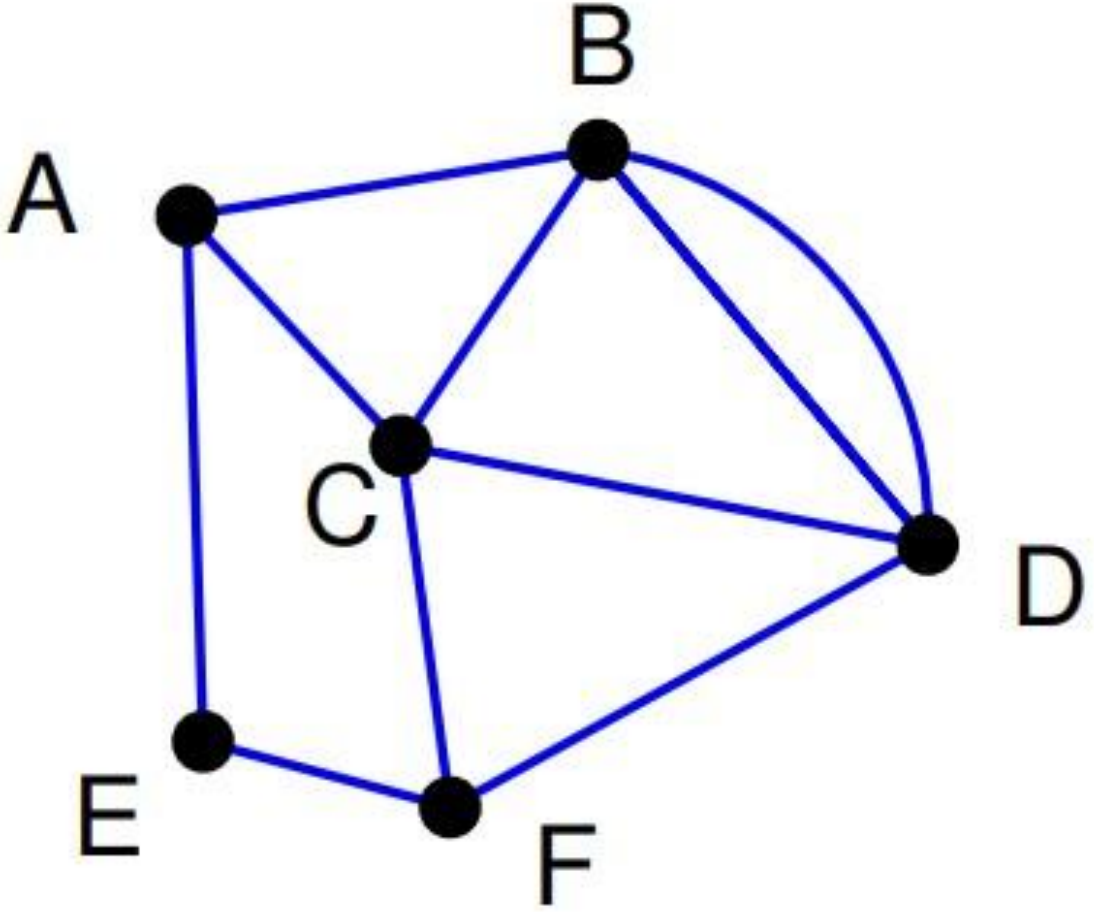
Për me gjetë një shteg të Eulerit ose një qark të Eulerit veprojmë si më posht:

1. Duhet të mirret parasyshë nëse grafi nuk ka asnjë nyje me valencë tek ose ka dy nyje me valecë tek.
2. Nëse nuk ka asnjë nyje me valencë tek atëherë fillo te cila do nyje. Nëse ka 2 nyje me valencë tek atëherë fillo njëra nga këto do nyje
3. Ndiçni degët një nga një. Nëse keni një zgjedhje midis një ure dhe një jo-ure, zgjidhni gjithmonë degën jo-urë.

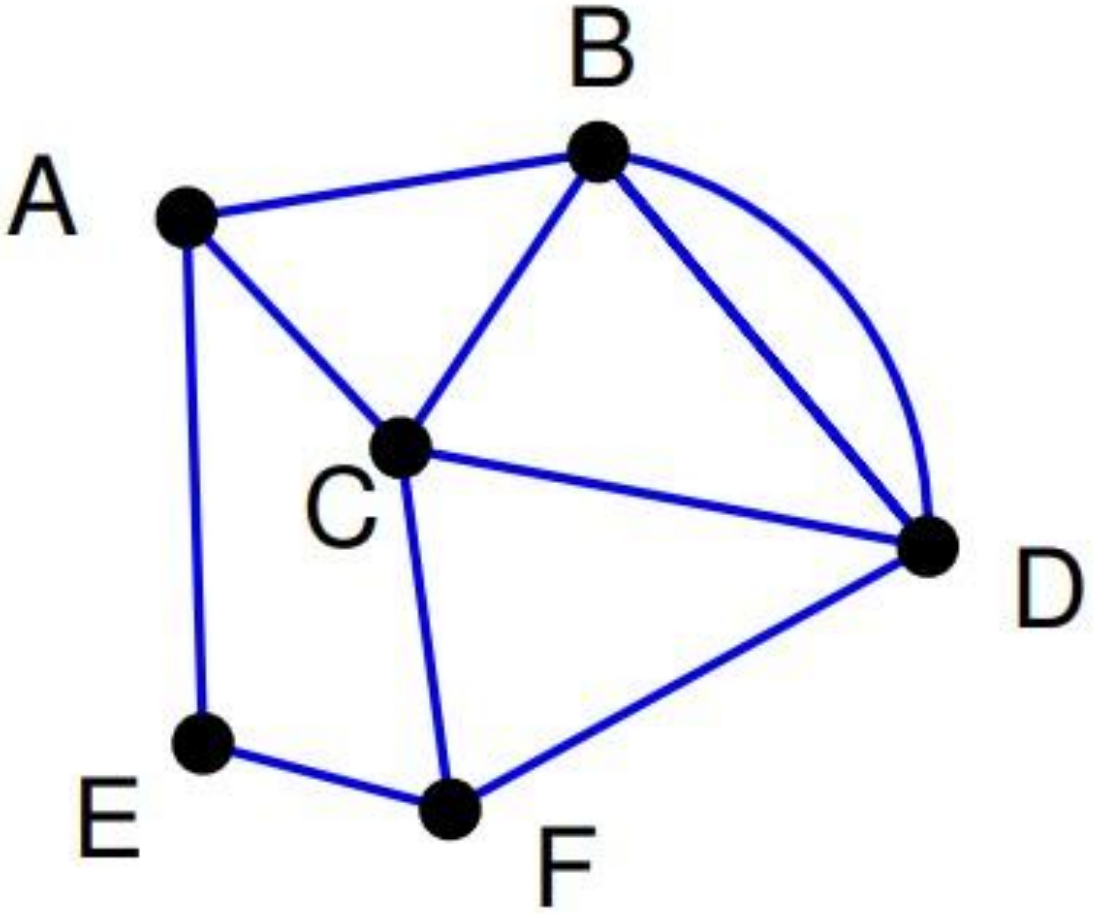
4. Ndalo kur të mbarojnë degët.

Algoritmi i Fleury-t funksionon gjithmonë!

Shembull. Gjeni një qark të Eulerit për grafin e dhënë.



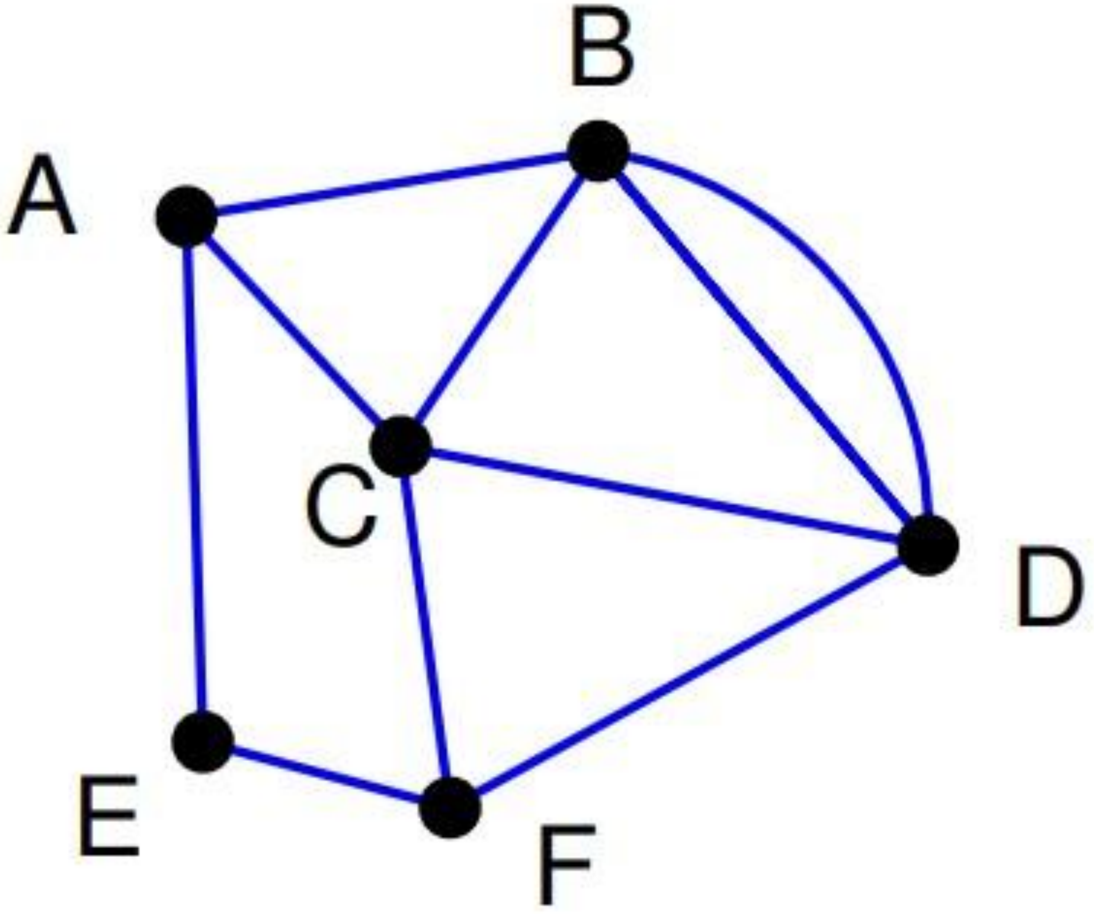
Zgjidhje. Këtu i kemi dy nyje me valencë numër tek dhe ato janë A dhe F.


A
B
C
D
E
F

Vazhdim.

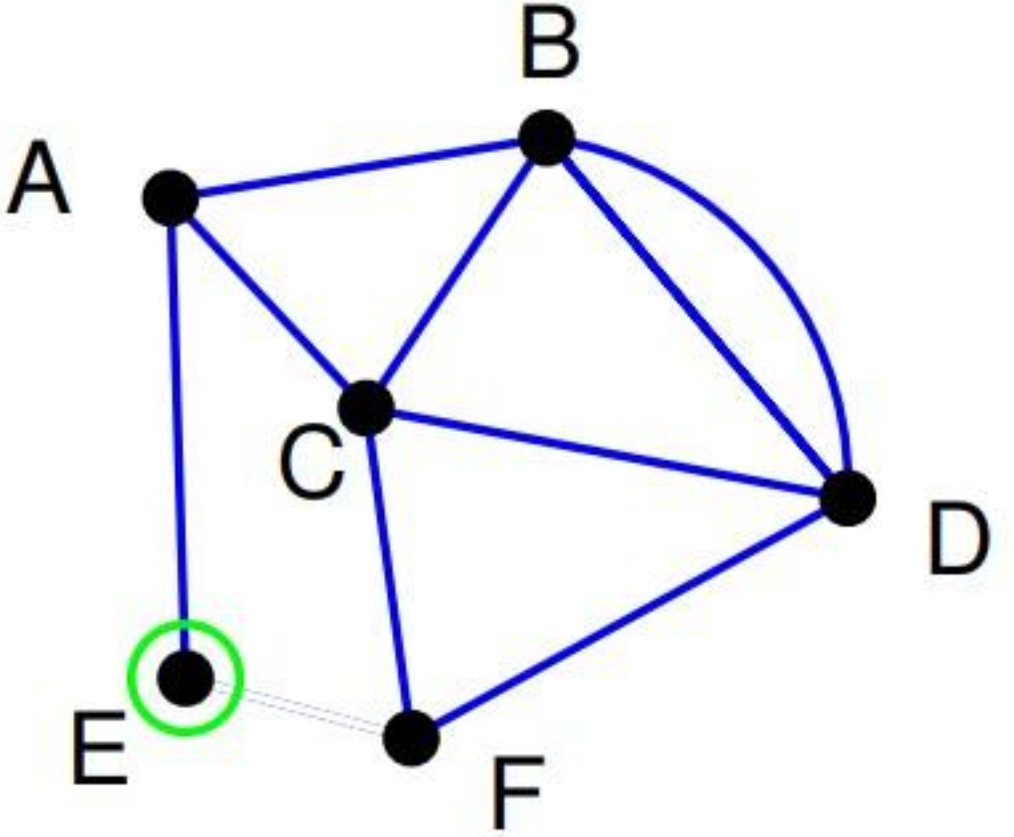
Fillojmë të udhëtojmë nga nyja F. Kur e përdorim një degë pastaj e heqim atë.

Vazhdim.



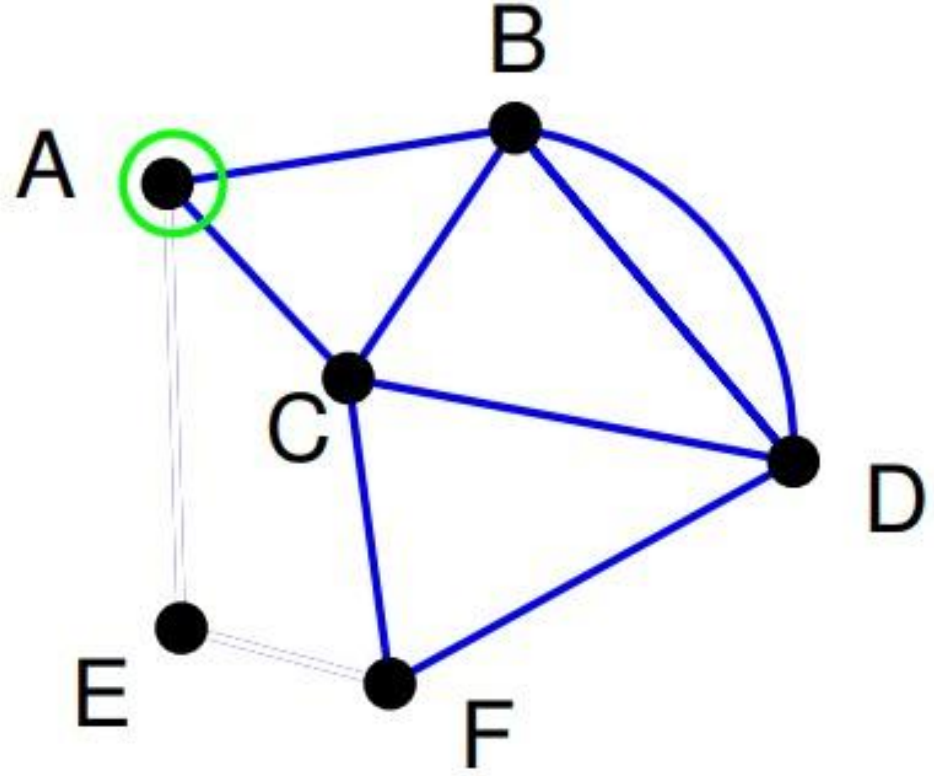
Shtegu i deritanishëm FE.

Vazhdim.



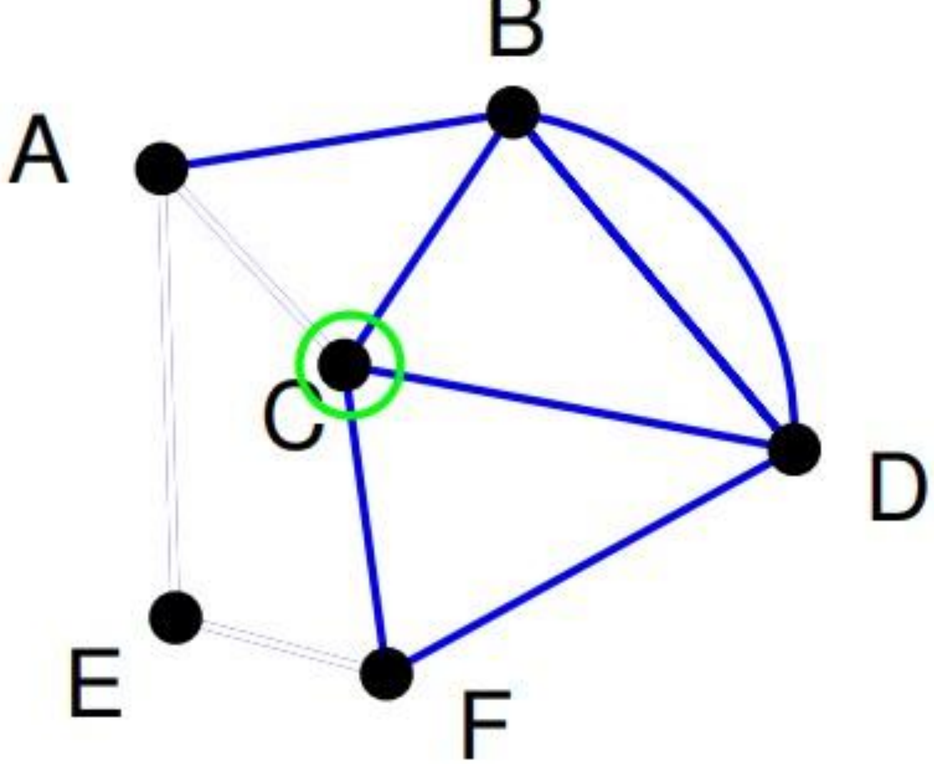
Shtegu i deritanishëm FEA.

Vazhdim.



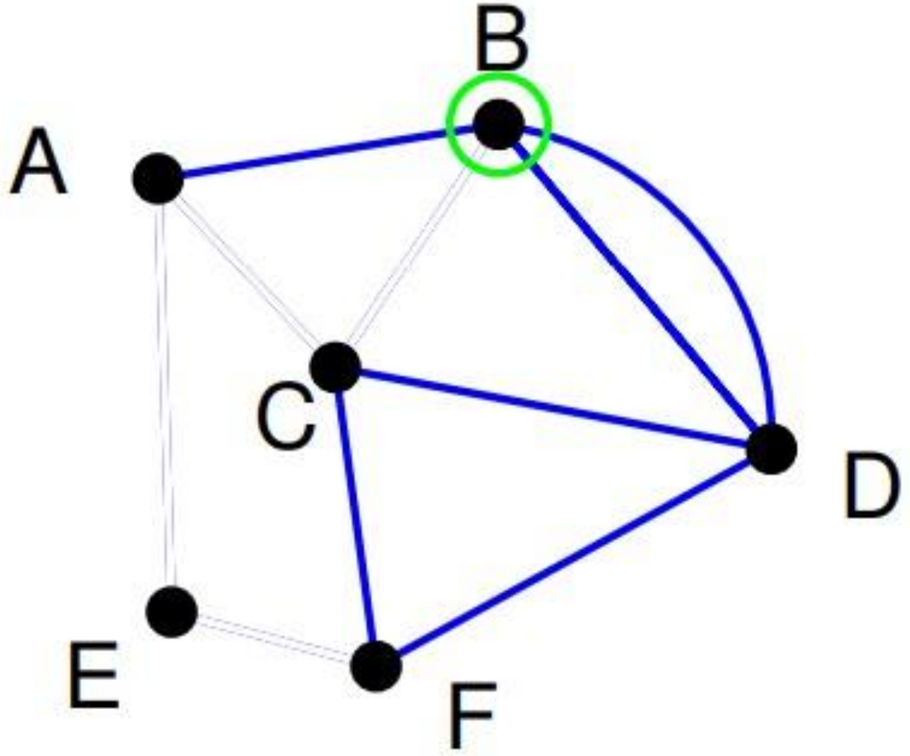
Shtegu i deritanishëm FEAC.

Vazhdim.



Shtegu i deritanishëm FEACB.

Vazhdim.



Deri në këtë pikë, zgjedhjet nuk kishin rëndësi.

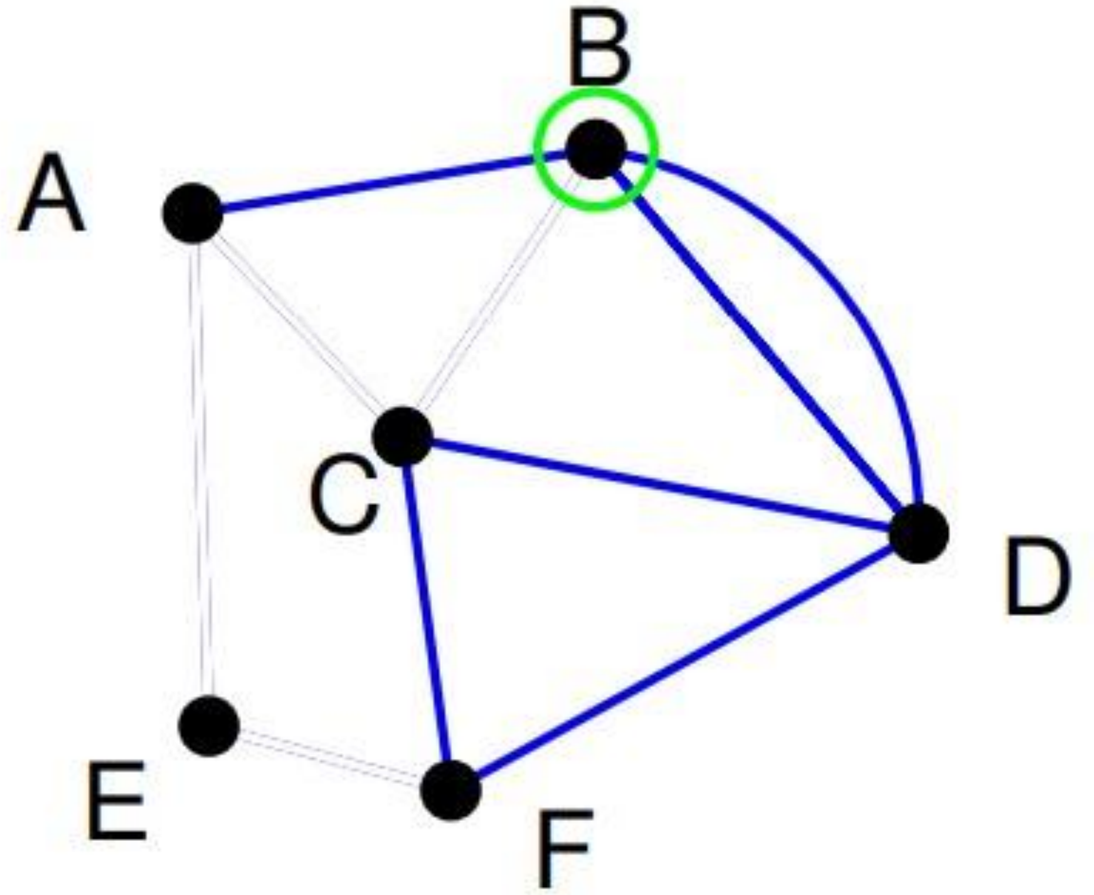
Vazhdim.

Por tani, kalimi i skajit BA do të ishte një gabim, sepsedo të mbesim aty.

Arsyeja është se BA është një urë. Ne nuk duam të kalojmë ("djegim"?) një urë nëse nuk është e vetmja degë në dispozicion.

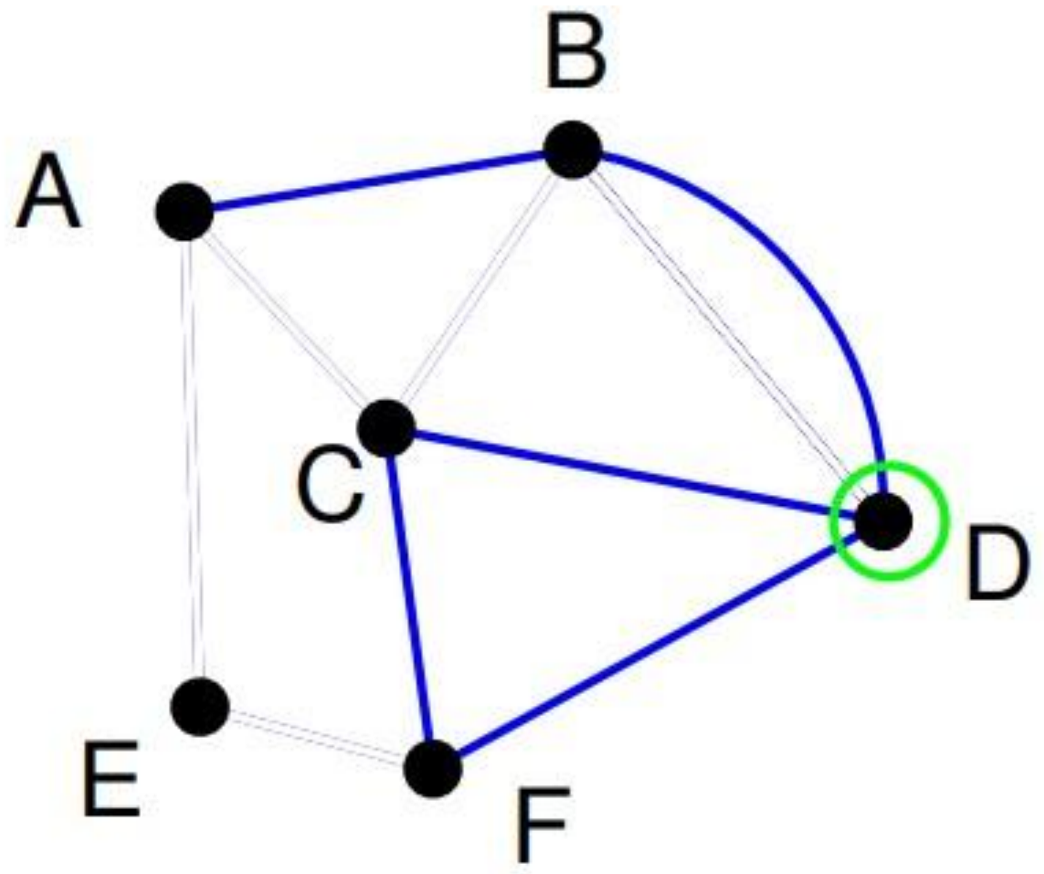
Shtegu i deritanishëm FEACB.

Vazhdim.



Shtegu i deritanishëm FEACBD.

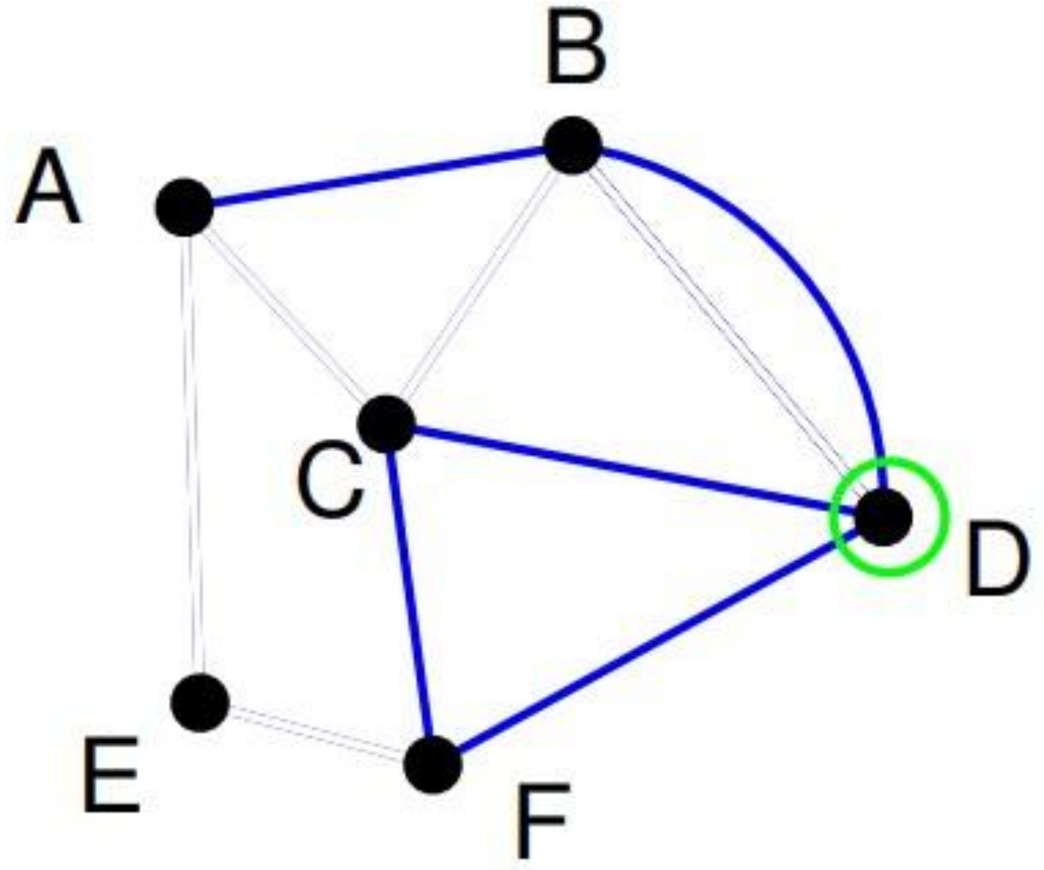
Vazhdim.



Vazhdim.

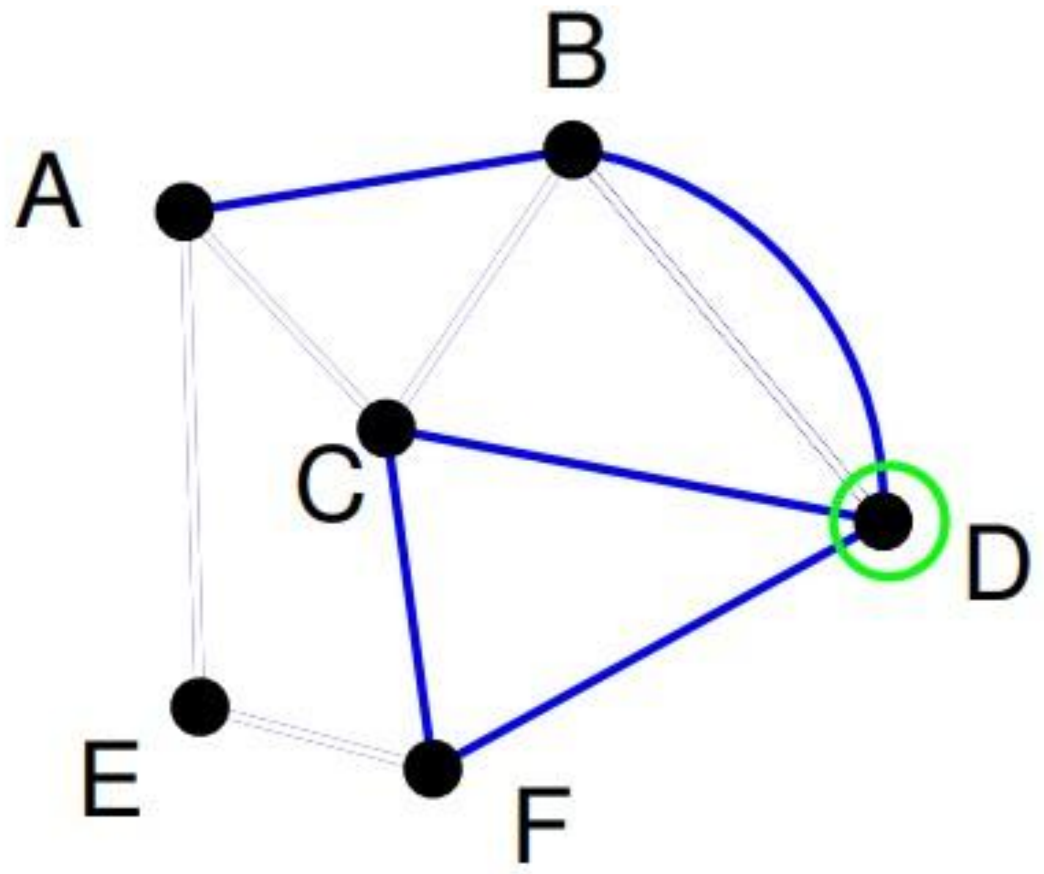
Shtegu i deritanishëm FEACBD. Nuk duhet ta kalojmë urën!

Vazhdim.



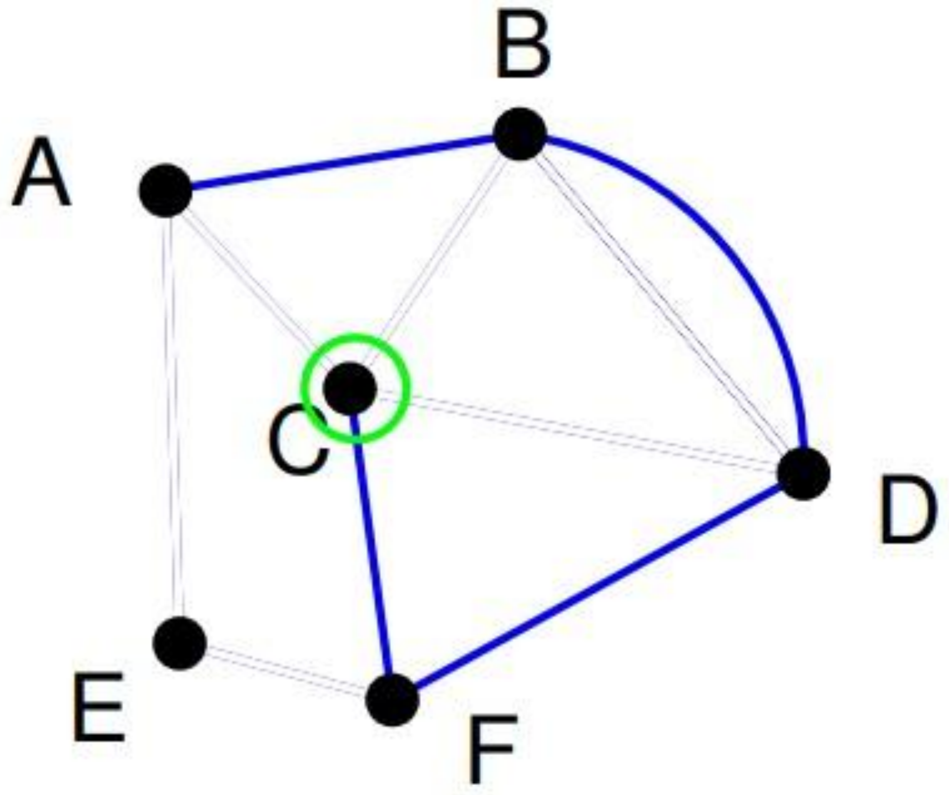
Shtegu i deritanishëm FEACBDC.

Vazhdim.



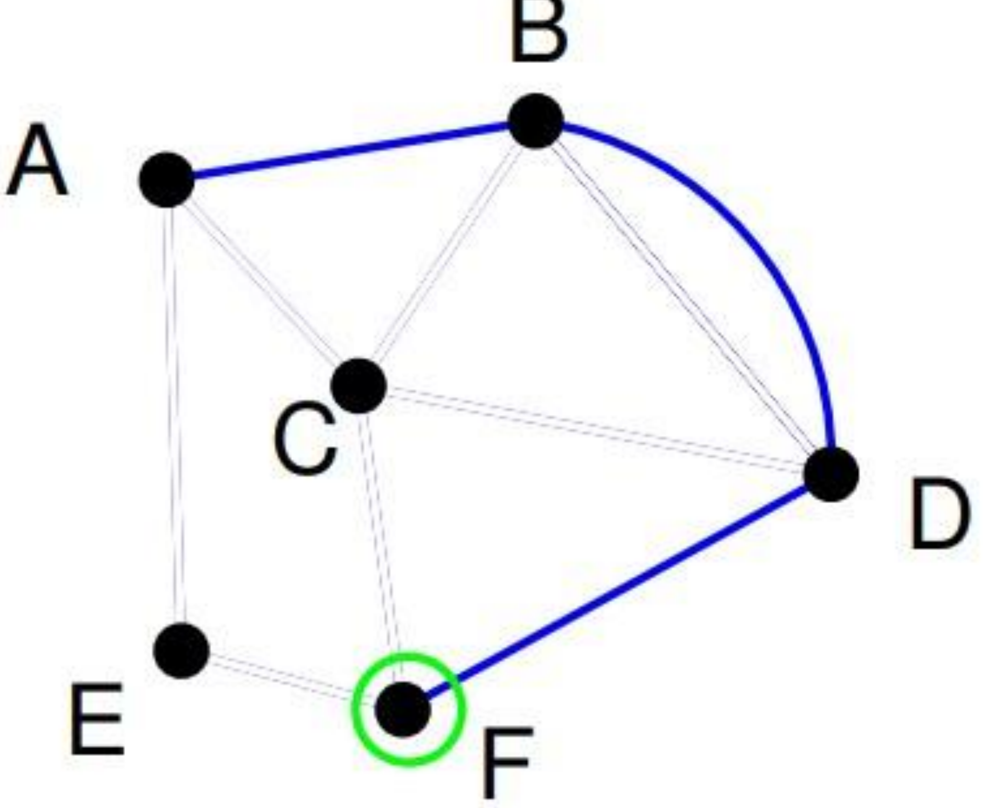
Vazhdim.

Shtegu i deritanishëm FEACBDC. Tani duhet të kalojmë urën CF.



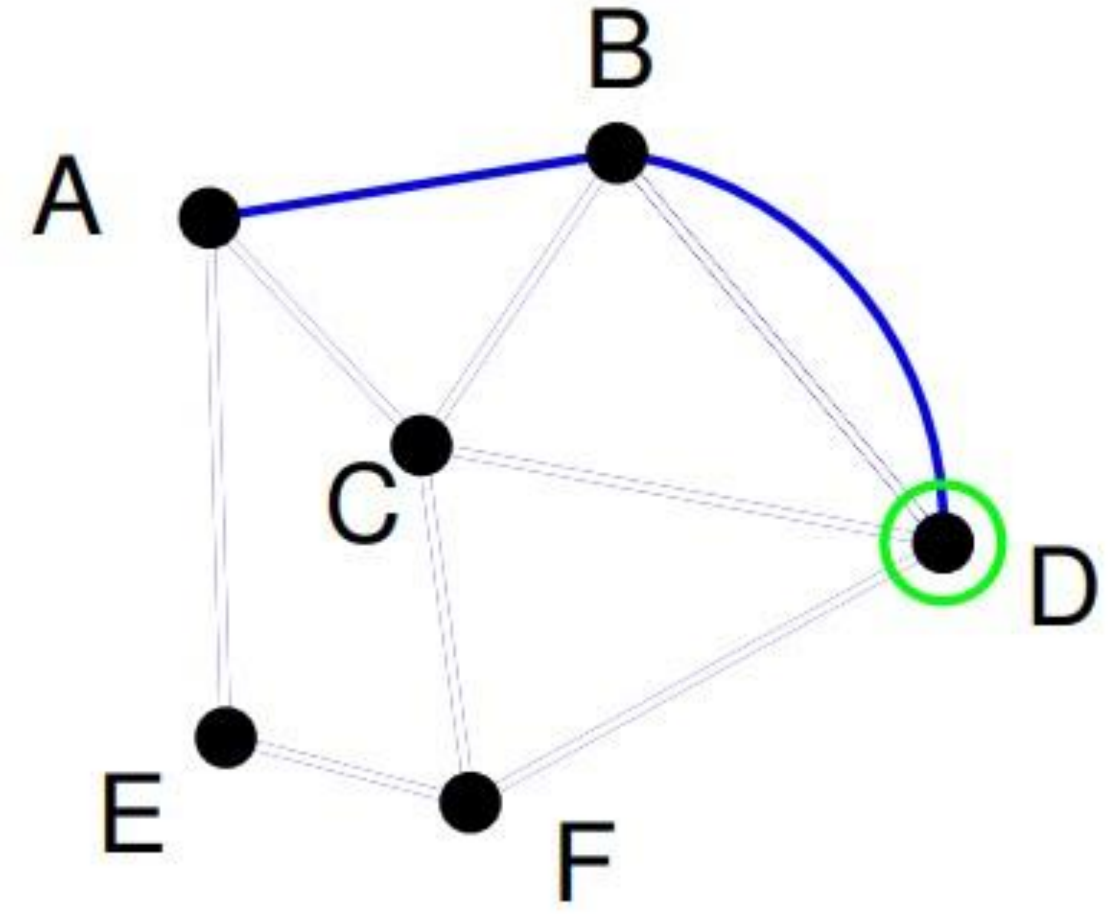
Vazhdim.

Shtegu i deritanishëm FEACBDCF.



Vazhdim.

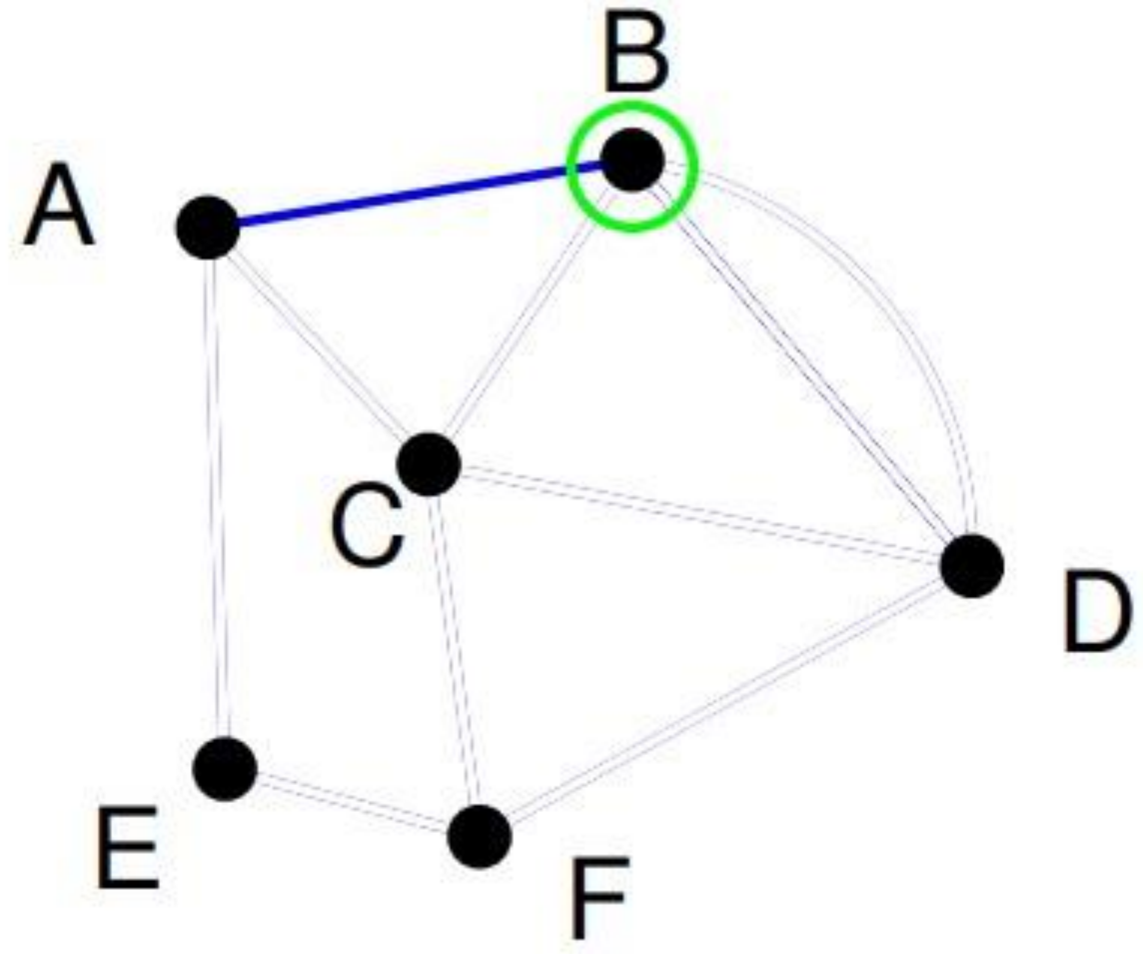
Shtegu i deritanishëm FEACBDCFD.



Vazhdim.

Shtegu i deritanishëm FEACBDCFDB.

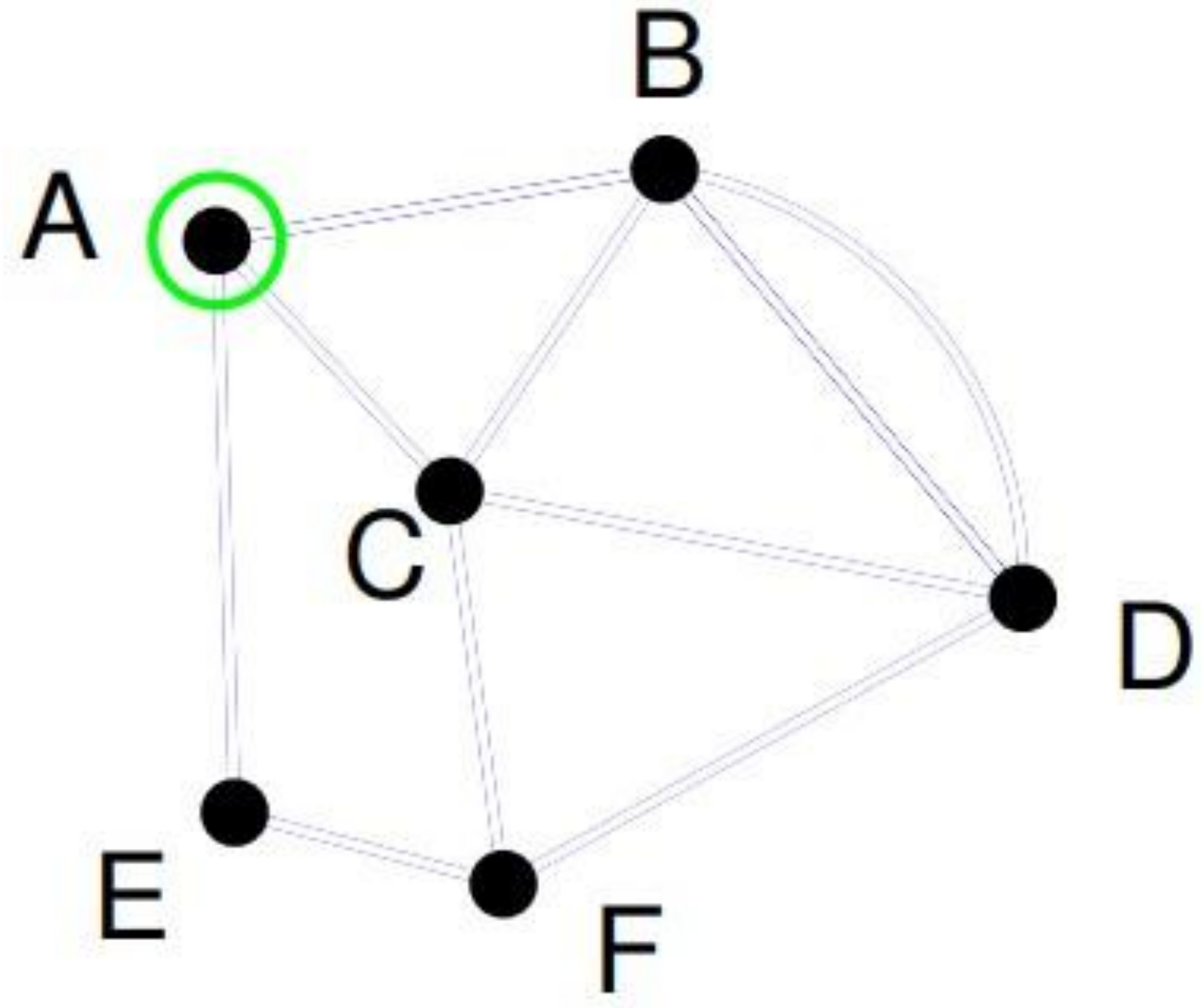
Vazhdim.



Vazhdim.

Shtegu i Eulerit: FEACBDCFDBA.

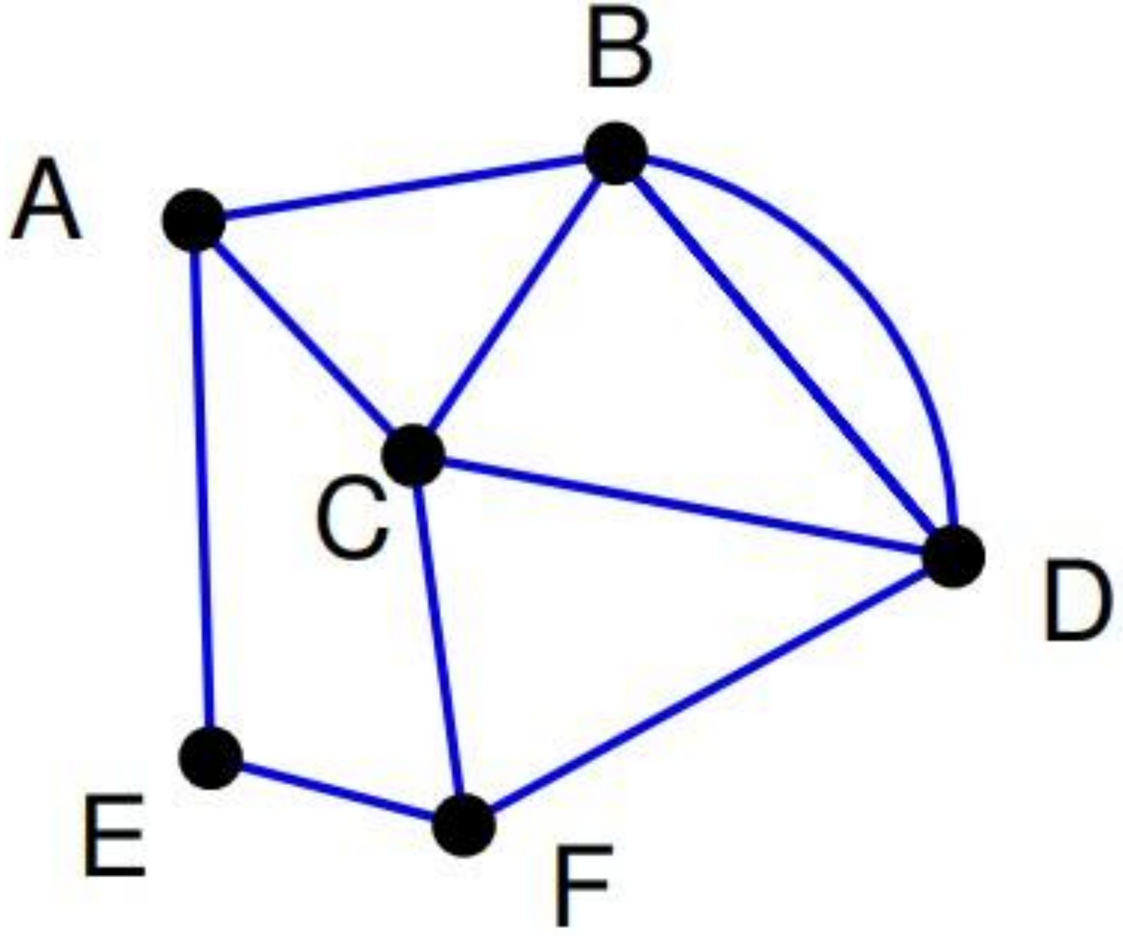
Vazhdim.



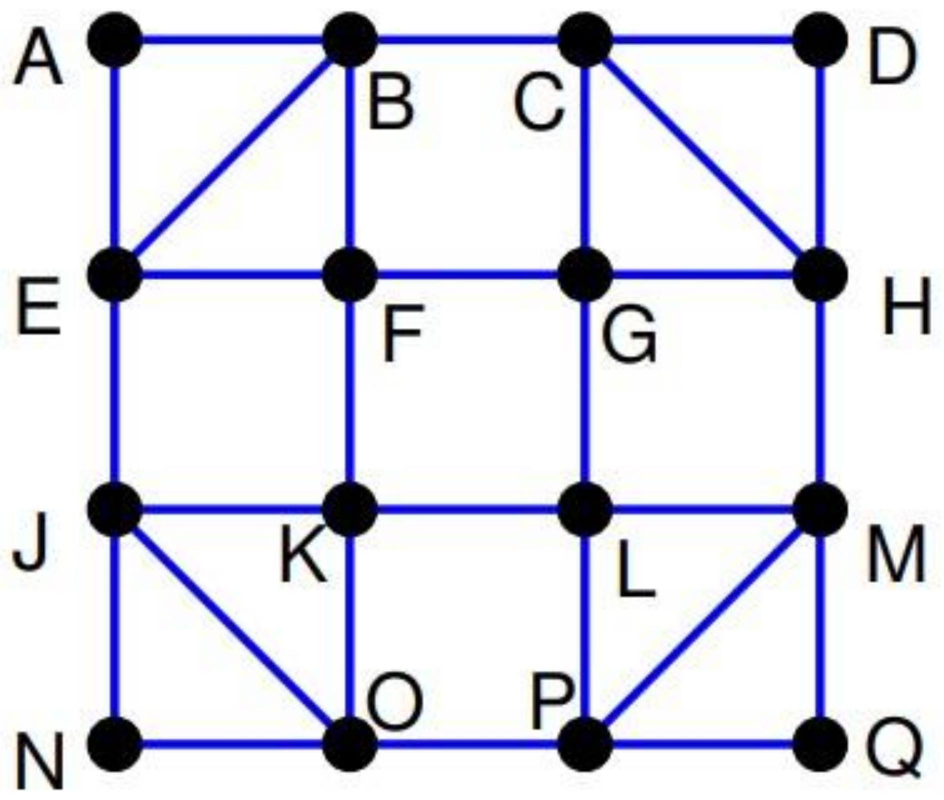
Vazhdim.

Shtegu i Eulerit: FEACBDCFDBA.

Vazhdim.



Shembull. Duke e përdorur algoritmin Fleury-t gjeni një qark të Eulerit për grafin e dhënë.


A
B
C
D
E
F
G
H
J
K
L
M
N
O
P
Q