Universiteti Publik “Kadri Zeka”, Gjilan

Fakulteti i Shkencave Kompjuterike

Lënda: Teoria e Grafeve

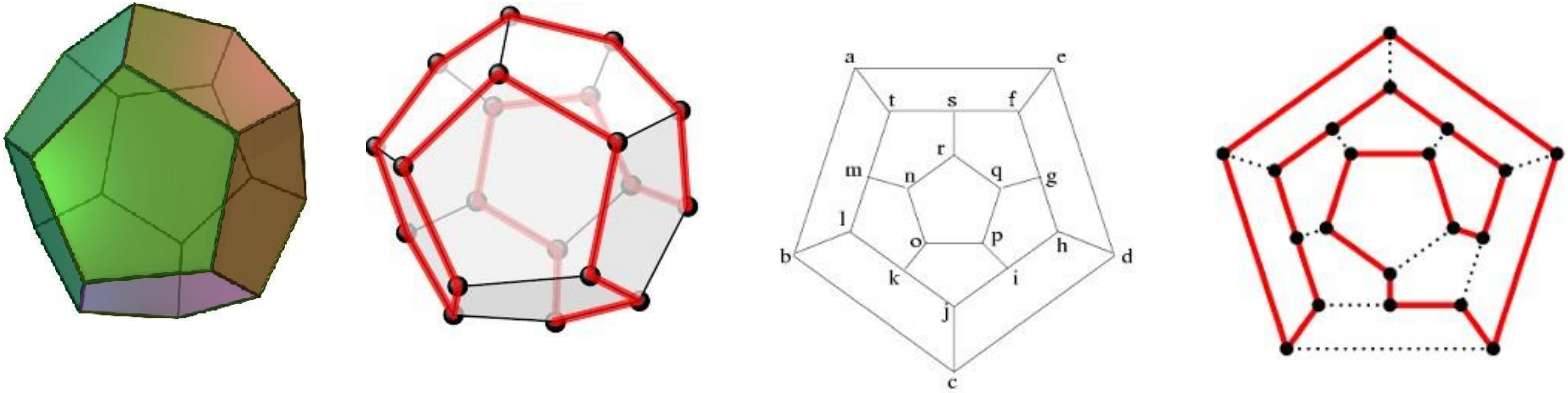
Tema:

Shtigjet dhe ciklet e Hamiltonit

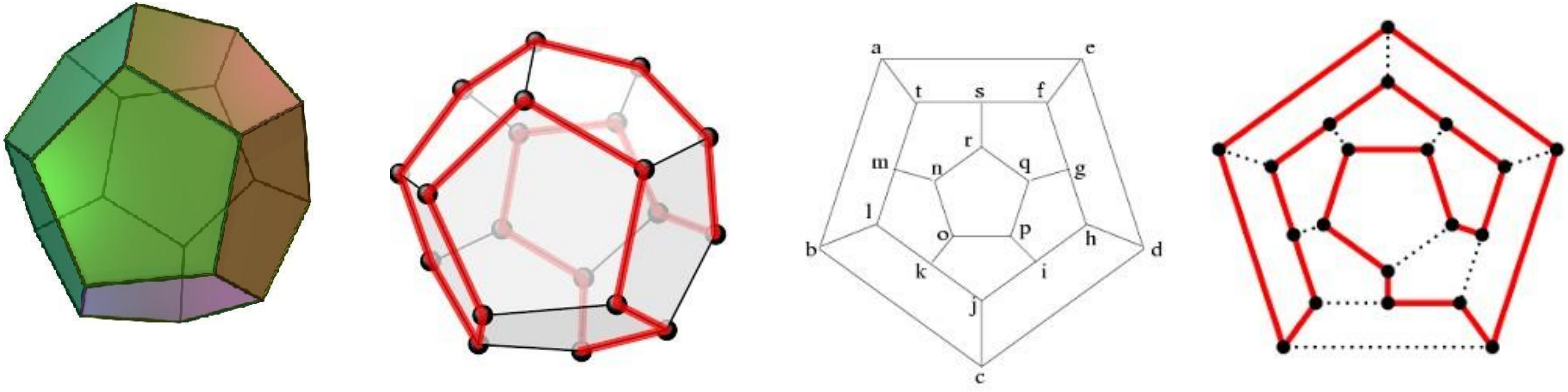
- Në vitin 1857, matematikanti Vilijam Rouan Hamilton e kishte dizajnuar një lojë, dhe për rastin në fjalë eksistojnë versione të ndryshme.

- Sipas një versioni, matematikanti Hamilton lojën e ka përshkruar në letër dhe këtë letër ia ka dërguar një miku të tijë.
- Sipas një versioni tjetër, Hamilton për lojën që e ka menduar, ai e ka shitur në një kompani për prodhimin e lojrave.
- Loja është e përbërë nga dodekaedri, (dodekaedri është trup gjeometrik faqet e të cilit janë 12 peskëndësha të rregullt). Secili nga kulmet e dodekaedrit është shpuar dhe është

vendosur nga një gozhdë ku çdo gozhdë ka paraqitur një qytet, (shiko figurën 1).



- Lojtari, duke përdorur vija, duhet ta gjejë rrugën ashtu që nëpër çdo qytet saktësisht të kaloj nganjëherë dhe të kthehet në qytetin fillestar. Dodekaedri mundë të coptohet (ndahet) si në figurën 1.



- Problemi i hapur si më sipër paraqet gjetjen e ciklit në graf ashtu që çdo nyje, në përjashtim të kulmit fillestar, të vizatohet vetëm njëherë.

- Sipas kësaj loje, çdo cikël i grafit i cili e ka këtë veti quhet cikël Hamiltonian.

- Dallimi në mes ciklit Eulerian dhe atij Hamiltonian është se në ciklin Eulerian çdo degë pësëritet vetëm njëherë.

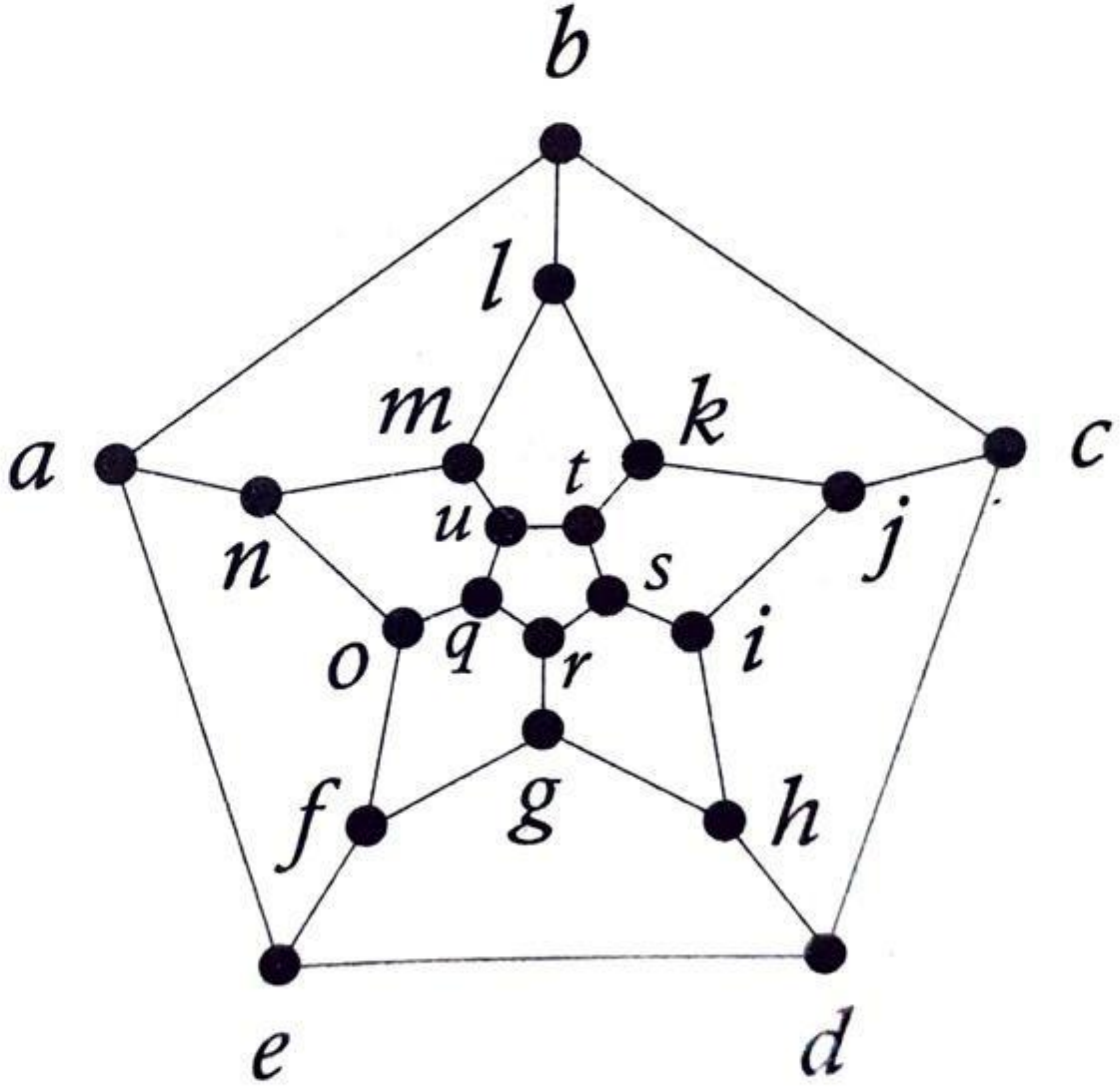
- Në shikim të parë cikli Hamiltonian dhe ai Eulerian duken të njejtë, por në vazhdim do të shohim se cikli Hamiltonian është më kompleks.

Përkufizim: Le të jetë dhënë grafi $G = (V, E)$. Një cikël në grafin G që kalon njëherë dhe vetëm njëherë në çdo nyje të grafit quhet cikël Hamiltonian.
Pak më ndryshe mundë të themi se cikël Hamiltonian në grafin G është çdo cikël elementar që përmban gjitha nyjet e grafit.

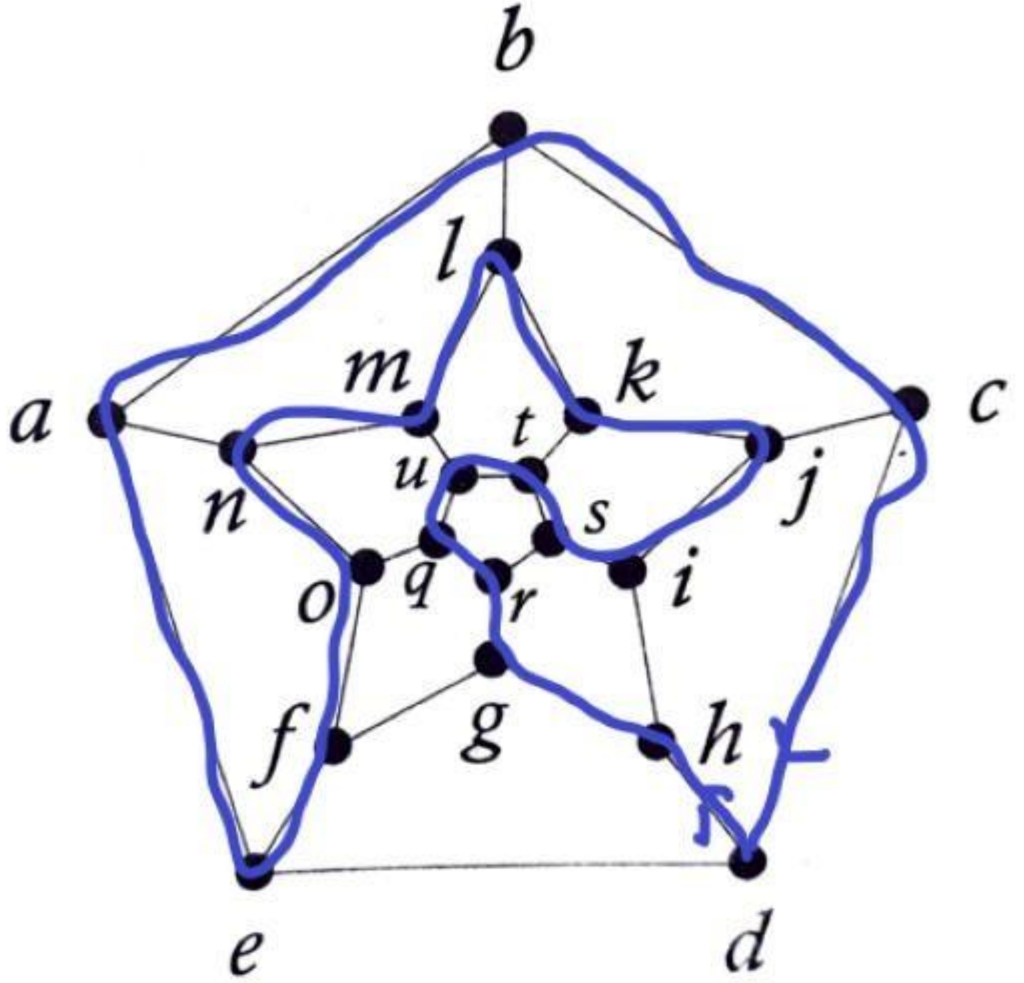
Grafi G quhet graf hamiltonian nëse përmban një cikël Hamiltonian.

Përkufizim: Le të jetë dhënë grafi $G = (V, E)$. Shteg Hamiltonian në grafin G quhet çdo shteg që përmban të gjitha nyjet e grafit.

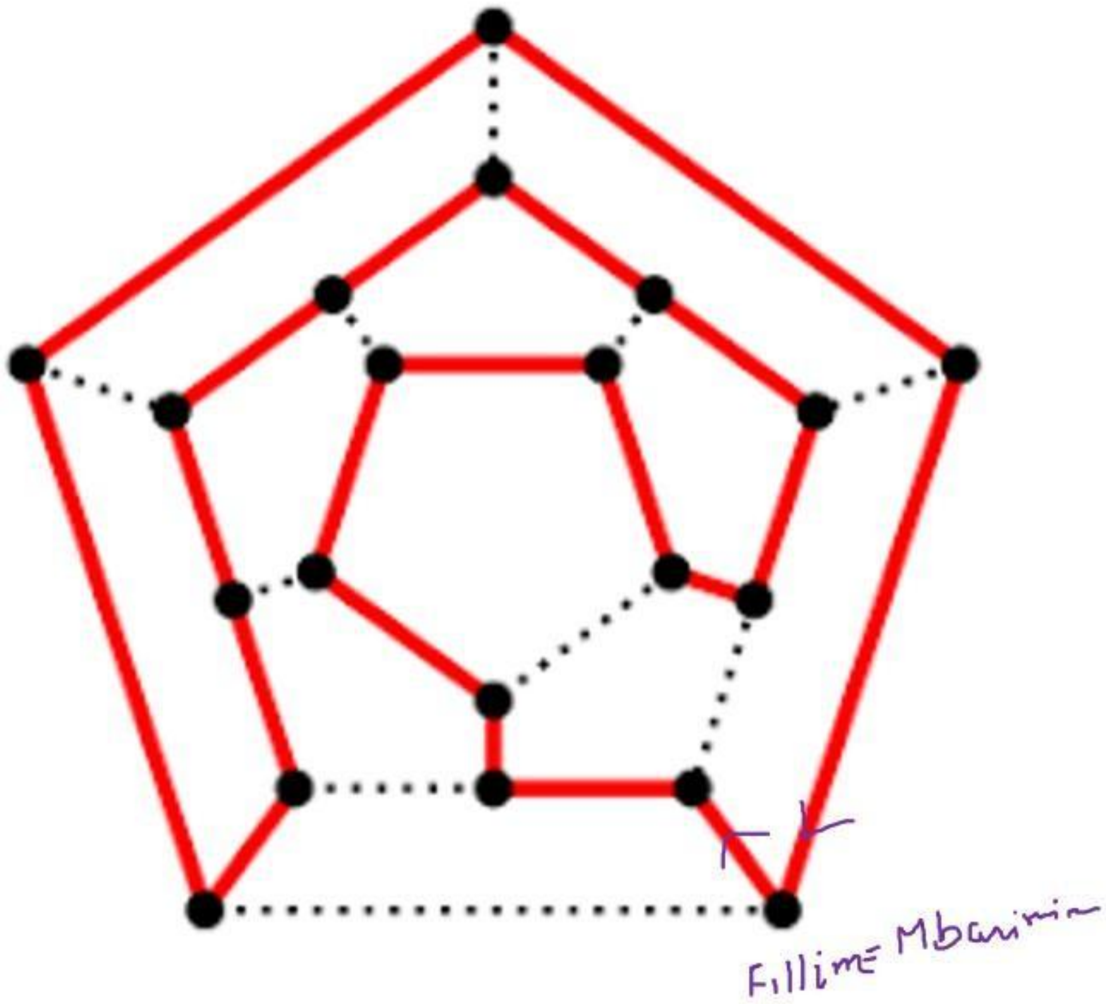
Shembull. Gjeni nëse grafi i dhënë si në figurë ka cikël Hamiltonian.


b
l
m
k
a
t
c
u
j
n
s
o
q
i
r
f
g
h
e
d

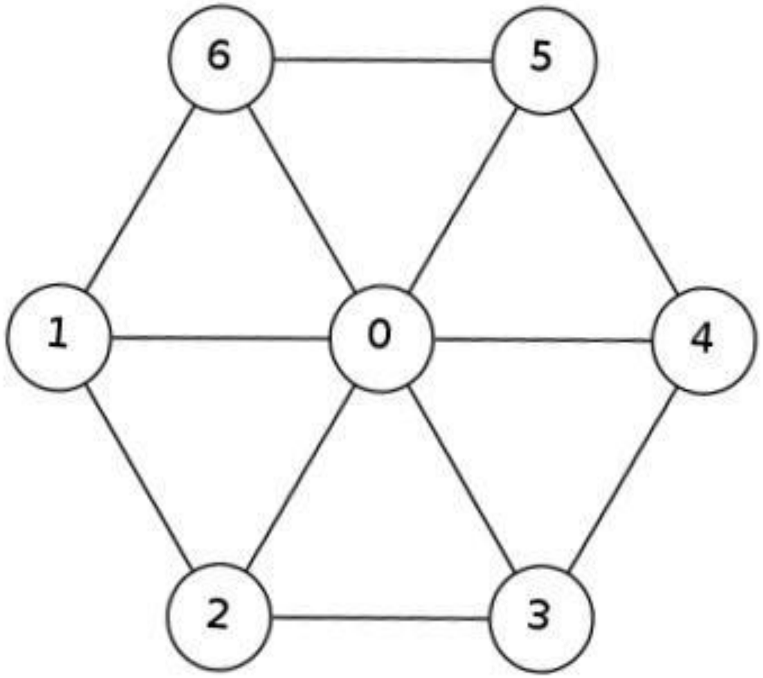
Zgjidhje. Grafi i dhënë si në figurë ka cikël Hamiltonian. Nisemi nga nyja d dhe duke i kaluar të gjitha nyjet kthehemi te nyja d.



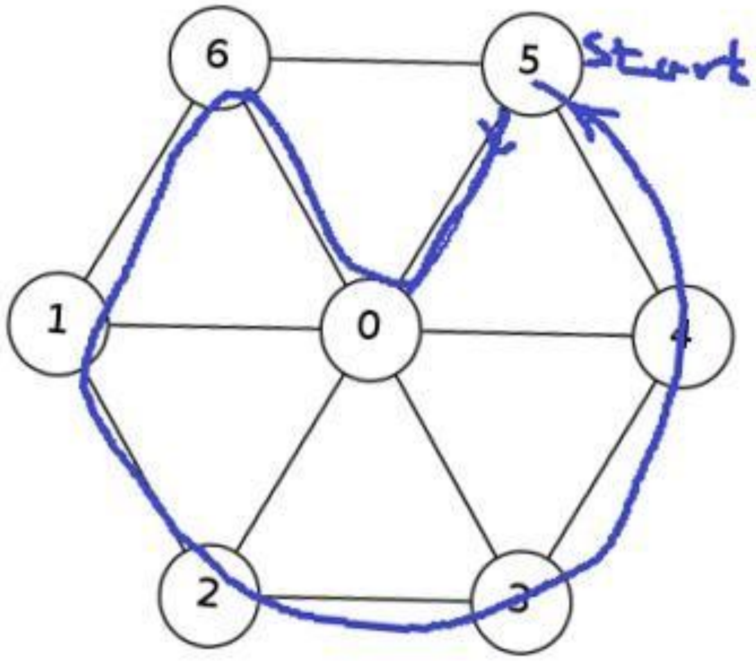
Shembull: Po ashtu këtu kemi dhënë një graf Hamiltonian



Shembull. A ka cikël të Hamiltonit grafi i dhënë si në figurë.

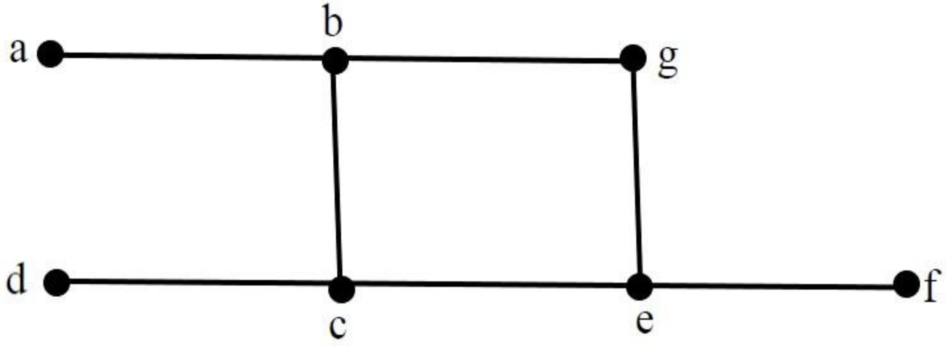


Zgjidhje. Grafi i dhënë si në figurë cikël të Hamiltonit

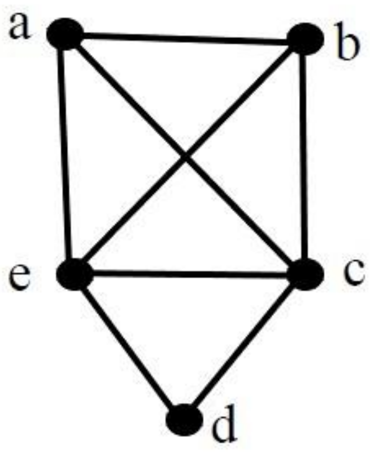

6
5
Start
1
0
4
2
3

Shembull. Cili nga grafët e thjeshtë ka cikël (qark) të Hamiltonit dhe cili shteg të Hamiltonit?

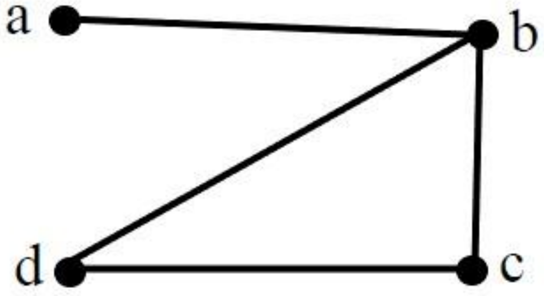
J



G



H



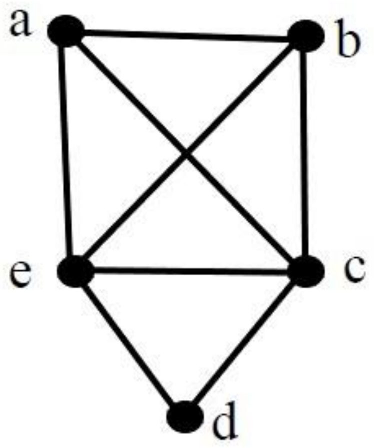
Zgjidhje: Grafi G ka një cikël të Hamiltonit: a, b, c, d, e, a.

Në grafin H nuk ka cikël të Hamiltonit, sepse duket që, çfarëdo cikël i cili duhet të përmbajë çdo nyje e përmban degën $\{a, b\}$ dy herë,

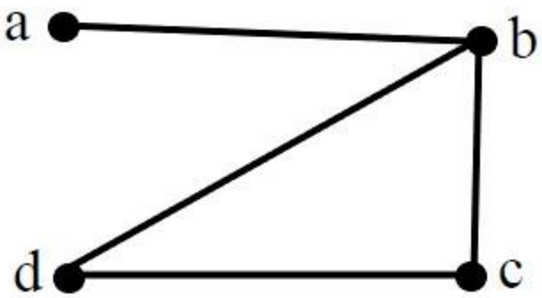
Por, H ka një shteg të Hamiltonit: a, b, c, d.

Grafi J nuk përmban as cikël dhe as shteg të Hamiltonit, sepse çdo shteg i cili përmban të gjitha nyjet do të përmbajë degët $\{a, b\}$, $\{e, f\}$ dhe $\{c, d\}$ më shumë se një herë.

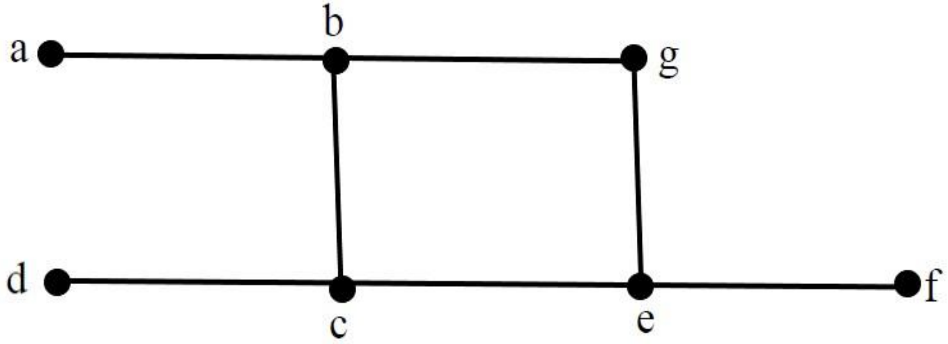
G



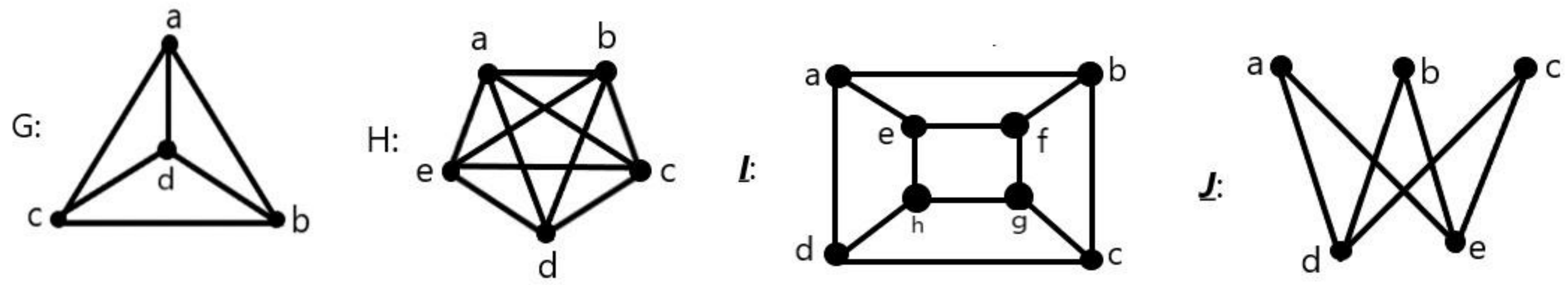
H



J



Detyrë: cilat nga grafet e dhëna si në figurë janë Euleriane dhe cilat grafe janë Hamiltoniane. Përshkruani shtegun ose ciklin Eulerian dhe Hamiltonian, atje ku është e mundur.



Zgjidhje: Grafi G dhe I nuk janë grafe Euleriane sepse të gjitha nyjet e kanë valencën numër tek. Grafi H është graf Eulerian kurse grafi J ka shteg Eulerian.

Cikli $a\ d\ b\ e\ d\ c\ b\ a\ e\ c\ a$ është cikël Eulerian në grafin H.

Shtegu $d\ a\ e\ c\ d\ b\ e$ është shteg Eulerian në grafin J.

Grafet G, H dhe I janë grafe Hamiltoniane ndërsa grafi J ka shteg Hamiltonian.

Shembull. Gjeni disa cikle Hamiltoniane te grafi K_5.

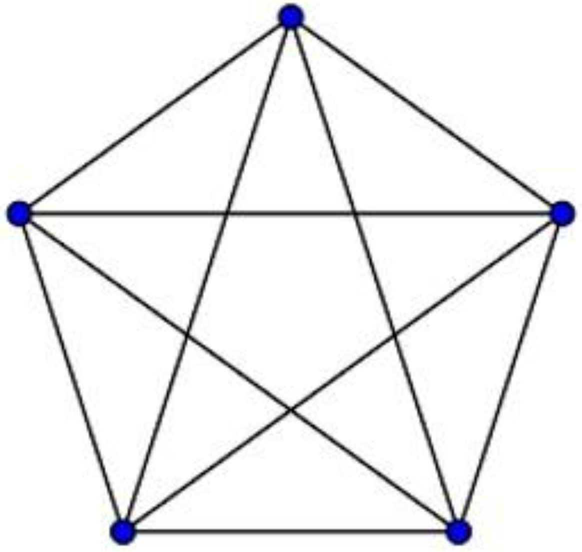


Figura 1.

Zgjidhje. Grafi K_5 është dhënë në figurën 1. ndërsa në figurën 2 dhe 3 janë paraqitur dy cikle Hamiltoniane.

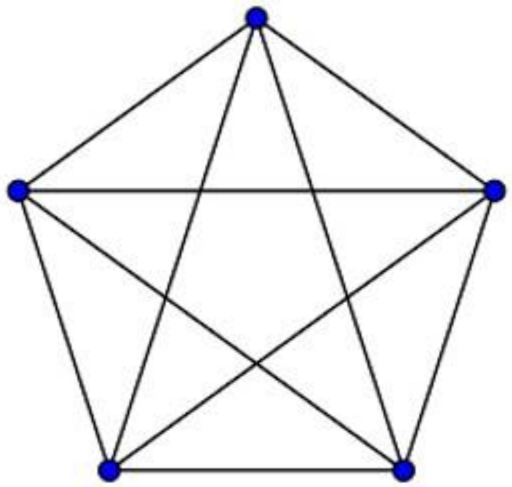


Figura 1.

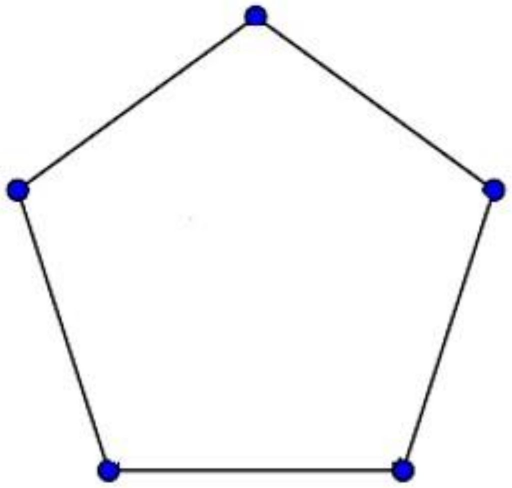


Figura 2.

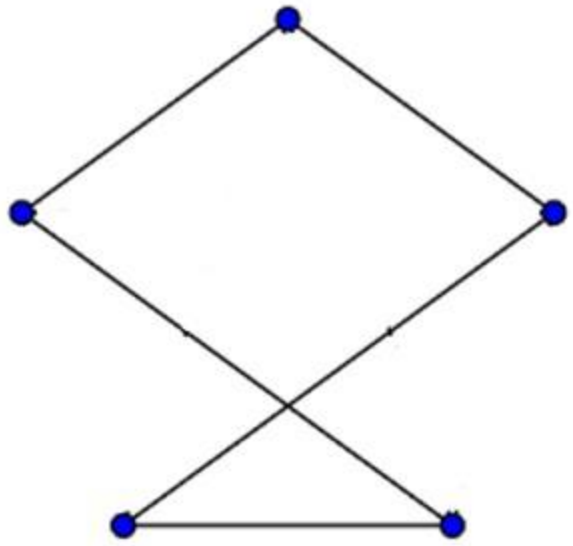


Figura 3.

Shembull. Gjeni disa cikle Hamiltonian te grafi K_6.

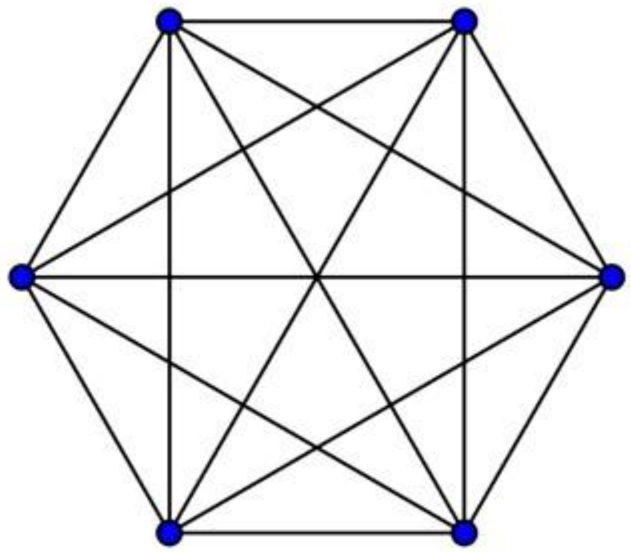


Figura 1.

Zgjidhje. Grafi K_6 është dhënë në figurën 1. ndërsa në figurën 2 dhe 3 janë paraqitur dy cikle Hamiltoniane.

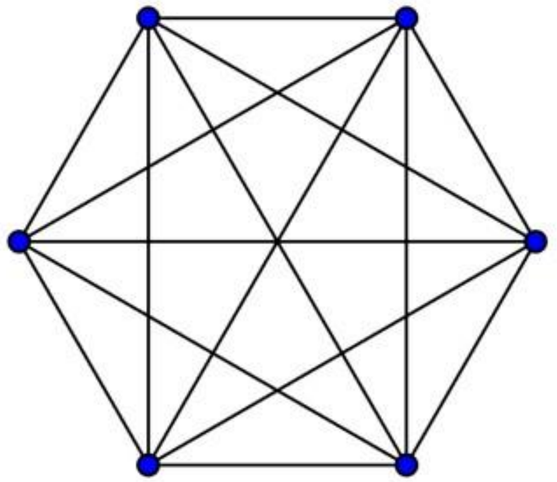


Figura 1.

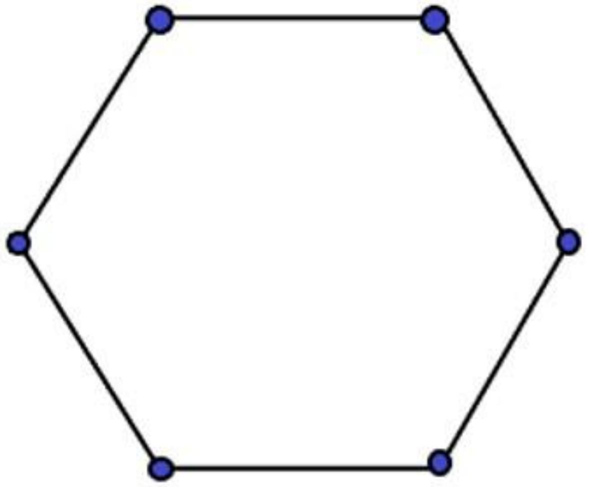


Figura 2.

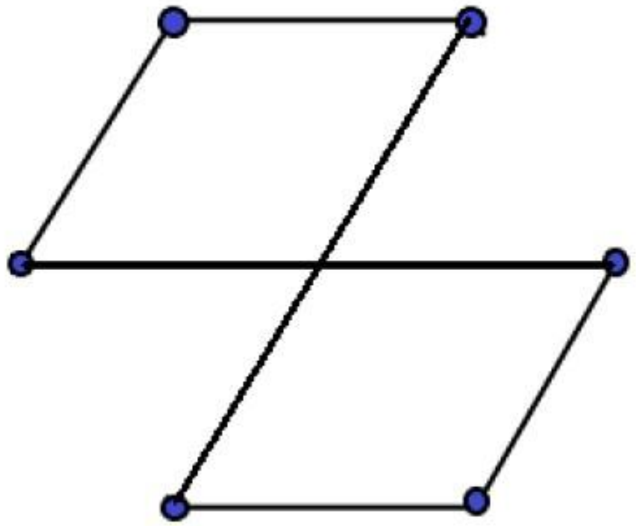
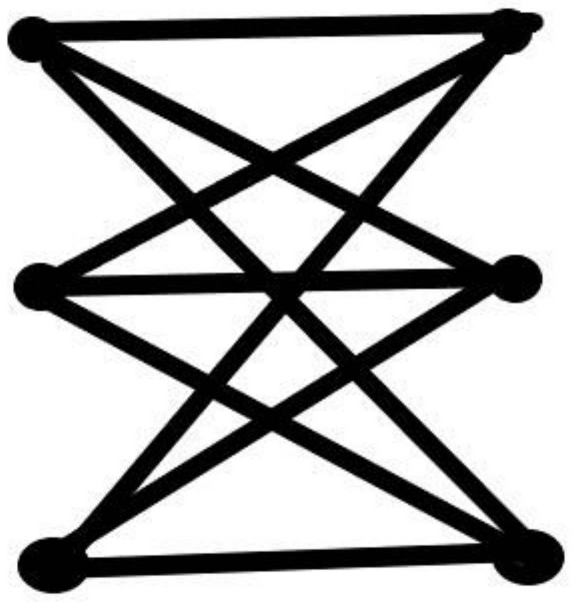


Figura 3.

Grafi bipartitiv $K_{m,n}$ është Hamiltonian për $m = n$,

Shembull. Nëse $m = n = 3$ atëherë fitojmë grafin $K_{3,3}$ i cili është Hamiltonian.



Deri tani nuk njihen kritere apo kondita të nevojshme dhe të mjaftueshme për ekzistencën e cikleve të Hamiltonit.

Ka vetëm teorema që japin konditën e mjaftueshme për ekzistencën e tyre.

Gjithashtu, ka veti të caktuara të cilat mund të përdoren për të treguar se një graf nuk ka cikël të Hamiltonit.

Po ashtu, nëse një nyje në graf e ka valencën 2 atëhere të dy degët që janë incidente me këtë nyje duhet të jenë pjesë e një cikli të Hamiltonit.

Kur është duke u ndërtuar një cikël i Hamiltonit dhe cikli kalon nëpër një nyje, atëhere të gjitha degët që mbeten dhe incidente me këtë nyje (përveç atyre dy degëve që përdoren për ndërtimin e ciklit) duhen larguar.

Po ashtu, një cikël i Hamiltonit nuk mund të përmbajë një cikël më të vogël brenda tij.

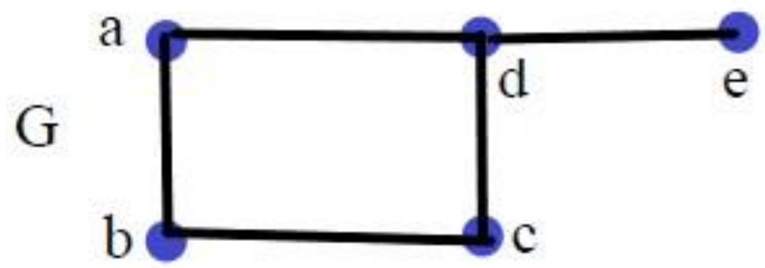
Teoremë: Në ciklin Hamiltonian, për nyjen e dhënë v, eksistojnë saktësishtë dy degë të ciklit të cilat janë incidente me nyjen v.

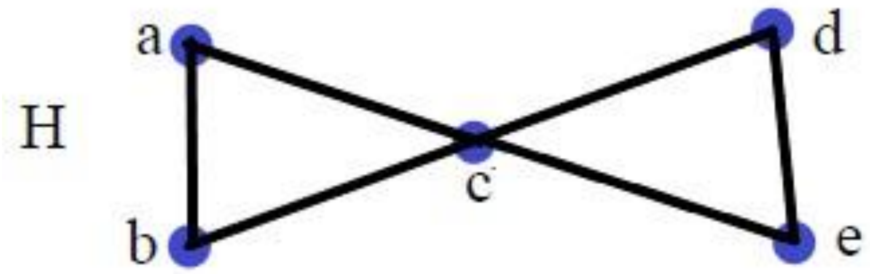
Vërtetim. Duke e vëzhguar ciklin, për çdo nyje v eksiston dega e ciklit e cila futet te nyja v dhe dega e cila del nga nyja v. Po të eksistonte edhe ndonjë degë e ciklit incidente me v, atëherë cikli do të ishte kthyer në nyjen v dhe v përsëri do të ishte paraqitur në cikël. Prandaj, në ciklin Hamiltonian eksistojnë saktësishtë dy degë incidente me v.

Kujtojmë që: një graf me një nyje me valencë 1 nuk mund të ketë cikël të Hamiltonit, përderisa në ciklin e

Hamiltonit secila nyje është incidente me dy nyje në cikël.

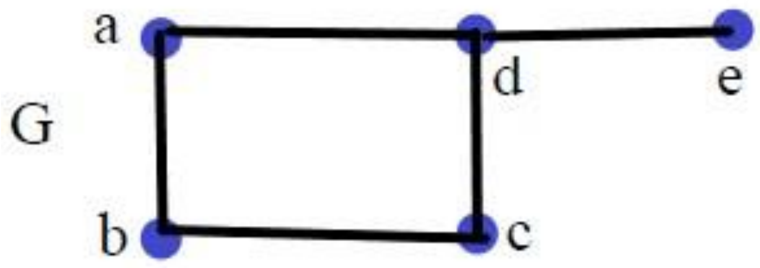
Shembull.2 Të tregohet se asnjëri nga grafët e dhënë nuk ka cikël Hamiltonian.

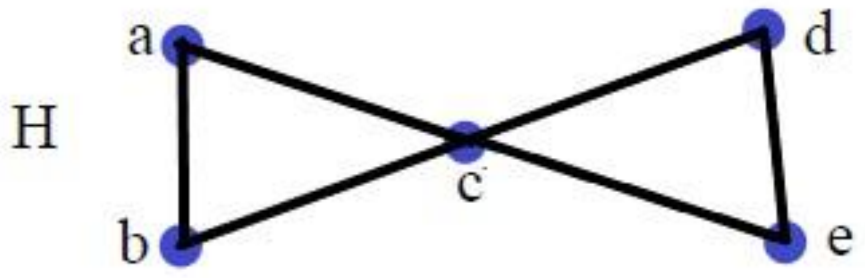




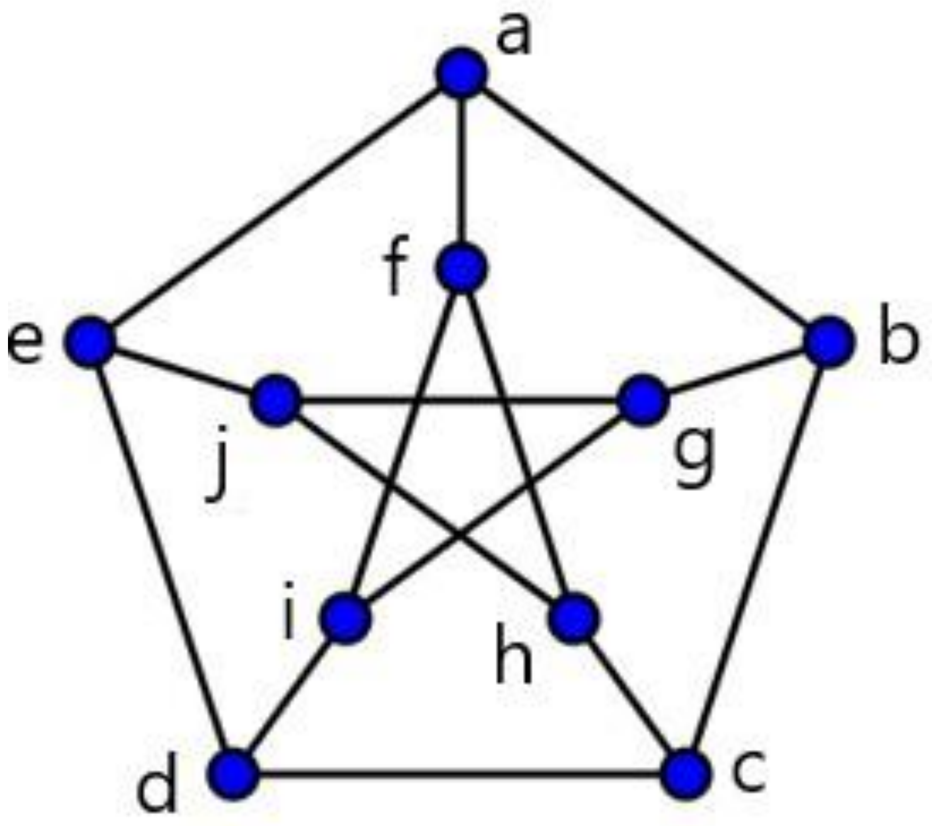
Zgjidhje. Grafi G ka një nyje me valencë 1 (nyja $\boldsymbol{e}$) prandaj nuk ka cikël Hamiltonian.

Shqyrtojmë grafin H. Meqë valencat e nyjeve a, b, d dhe e janë 2, çdo degë incidente me këto nyje duhet të jetë pjesë e një cikli Hamiltonian. Por atëhere, cikli çfarëdo Hamiltonian duhet të përmbajë 4 degë incidente me c, nga rrjedh se nyja c përmbahet më shumë se një herë. Pra, nuk ka cikël Hamiltonian.

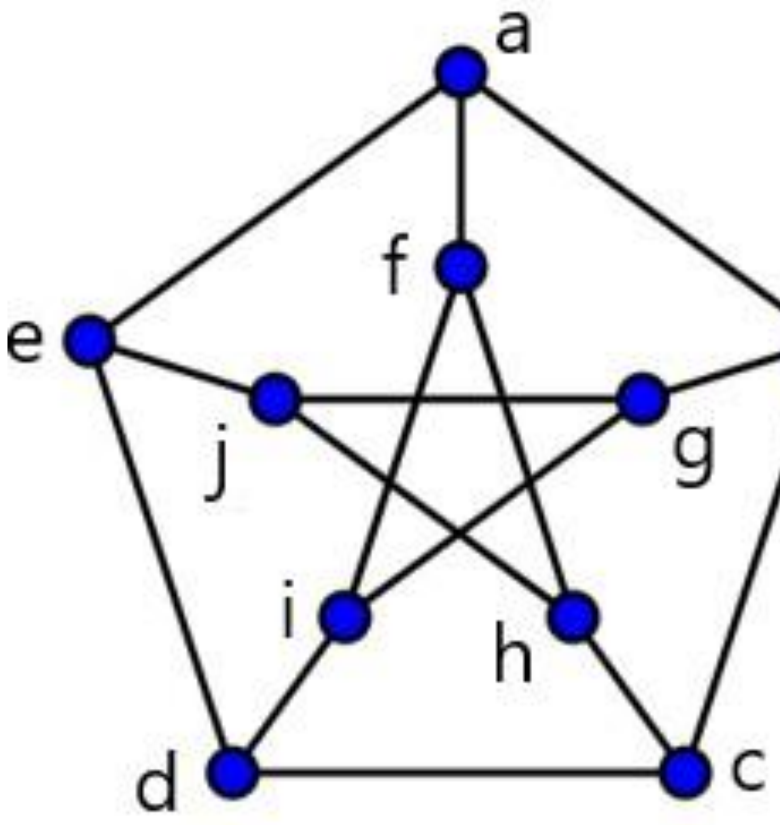


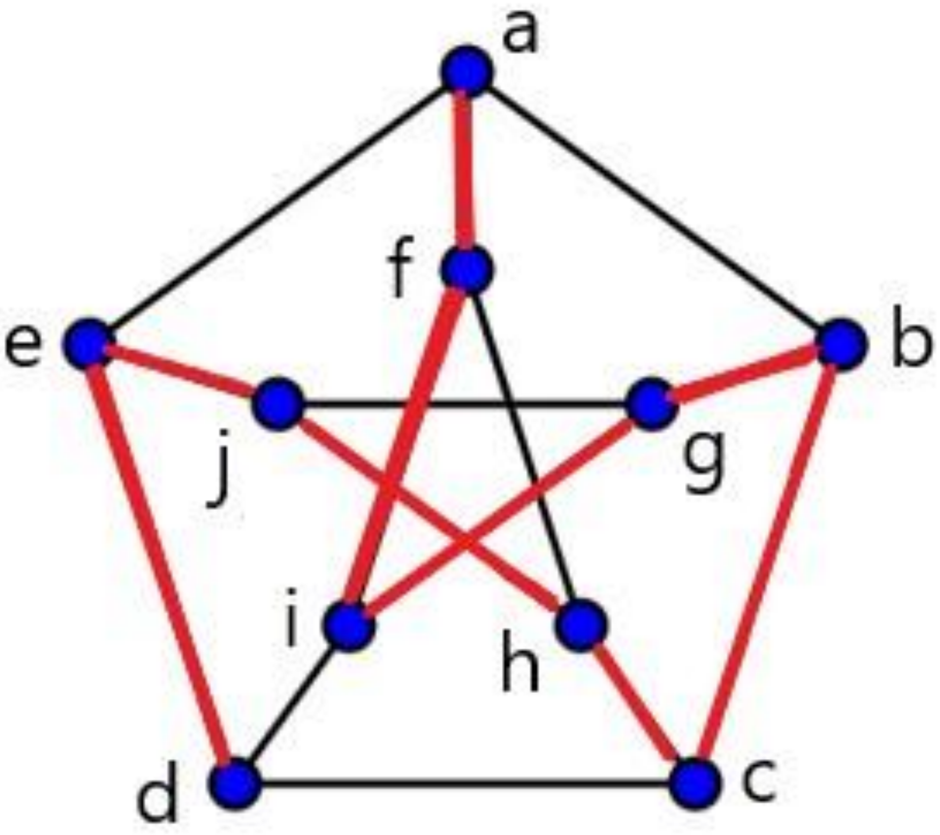


Shembull. Grafi i Petersen-it i dhënë si në figurë ka shteg Hamiltonian por nuk ka cikël Hamiltonian, tregoni këtë.



Zgjidhje. Grafi i Petersen-it i dhënë si në figurë ka shteg Hamiltonian por nuk ka cikël Hamiltonian. Shtegu Hamiltonian është treguar në figurën me shteg të kuq. (psh nisemi nga kulmi a dhe nuk mundë të kthehemi te kulmi a).



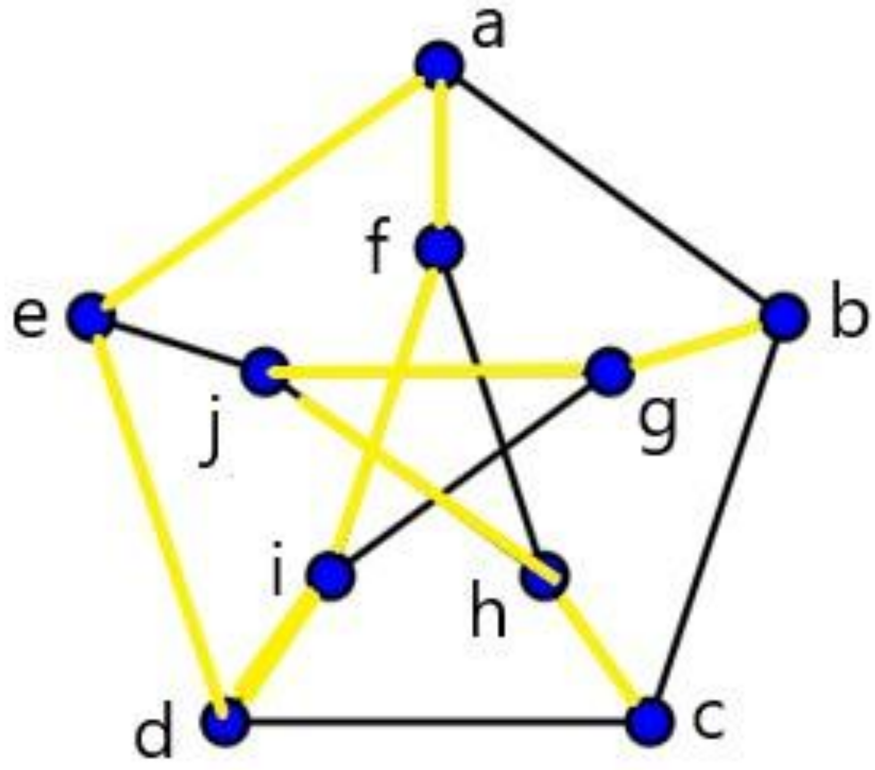


Që të tregojmë se garfi i Petersonit nuk ka cikël Hamiltonian, duhet të provojmë shumë herë, ndonjëherë mundë edhe të gabojmë.

Provojmë të konstruktojmë ciklin Hamiltonian por e shohim se nuk ja arrijmë dot.

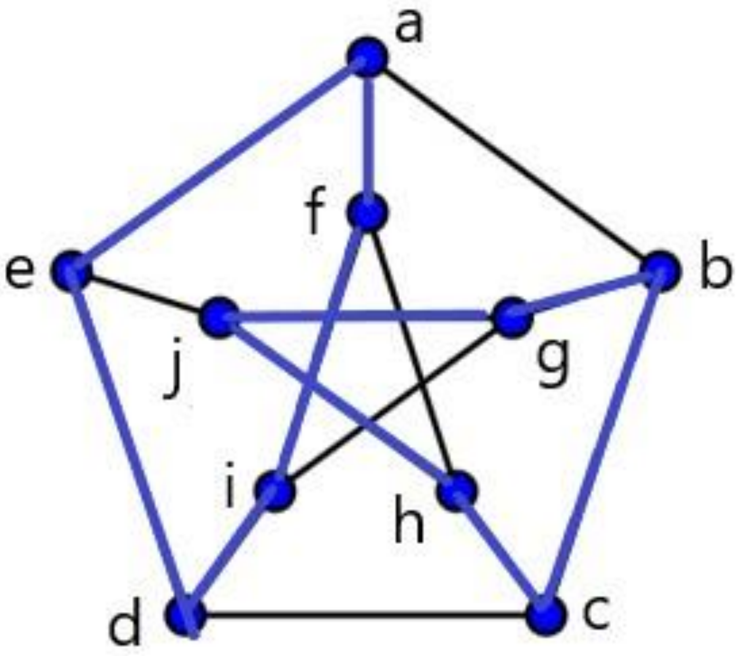
Në fillim, dimë që ylli brënda grafit duhet të jetë i lidhur me peskëndëshin e jashtëm të grafit, pa e humbur përgjithësimin marrim që $\{a, f\}$ është degë e ciklit. Nga nyja f deri te pjesa e mbetur e ciklit duhet të shkojmë përmes nyjes i ose përmes nyjes h, nuk ka rëndësi se përmes cilës nyje vazhdojmë, supozojmë që dega $\{f, i\}$ në cikël. Sipas teoremës së më sipërme, dega $\{f, h\}$ nuk mundë të jetë në cikël, sepse atëherë në cikël do të ishin tri degë incidente me f. Prandaj, $\{j, h\}$ dhe $\{h, c\}$ duhet të jenë në cikël, sepse janë të vetmët degë të mundshme incidente me h.

Nëse dega $\{i, d\}$ është në cikël, atëherë, pasi që $\{f, i\}$ është në cikël, dega $\{i, g\}$ nuk mund të jetë në cikël, sepse sipas teoremës së mëparshme, vetëm dy degë mundë të jenë incidente me nyjen i. Prandaj, $\{d, e\}$ dhe $\{e, a\}$ duhet të jenë në cikël, kështu që eksistojnë dy degë incidente me nyjen e, dhe fitojmë pjesët vijuese të ciklit, si në



figurën me shteg të verdhë.

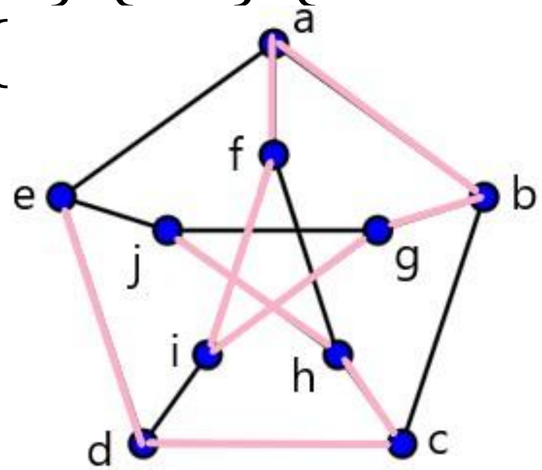
Pasi që degët $\{i, d\}$ dhe $\{d, a\}$ janë në cikël, dega $\{d, c\}$ nuk mundë të jetë në cikël, sepse atëherë do të kishim tri degë incidente me nyjen d, prandaj dega $\{c, b\}$ duhet patjetër të jetë në cikël që të eksistojnë dy degë incidente me nyjen c. Pasi që degët $\{b, g\}$ dhe $\{c, b\}$ janë në cikël, dega $\{a, b\}$ nuk mundë të jetë në cikël dhe kemi grafin si në figurën me ngjyrë të kaltër i nuk më degë të cilat kanë mundësi të marrin pjesë në cikël. Prandaj në këtë rastë nuk mundë të formojmë një cikël



Hamiltonian.

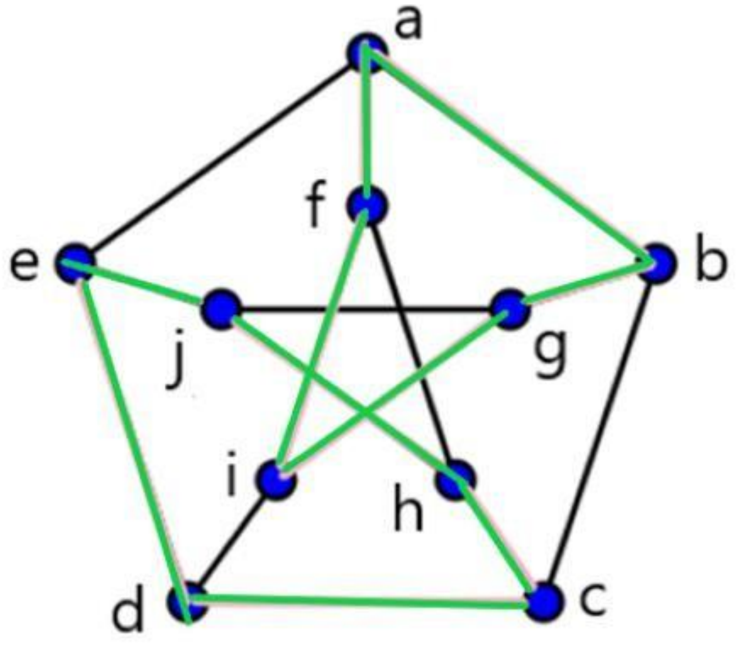
} nuk mund të jetë

Nëse kthehemi në rastin ku kemi pasur degët { } { } {
a, f , f, i , j, h} dhe { { } h, c } në cikël dhe f, h{
jashtë ciklit, pasi { } që dega i, d nuk mundë të
jetë në cikël, dega$i$, $g$patjetër duhet të jetë në cikël
që të eksistojnë dy degë incidente me i. Degët {e, d}



dhe $\{d, c\}$ patjetër duhet të jenë në cikël që të eksistojnë dy degë incidente me i. Përkatësisht, pasi që degët $\{h, c\}$ dhe $\{d, c\}$ në cikël, dega $\{b, c\}$ nuk mund të jetë në cikël, sepse në të kundërtën do të eksistinin tri degë incidente me nyjen c. Përkatësishtë, degët $\{a, b\}$ dhe $\{g, b\}$ patjetër duhet të jenë në cikël ashtu që dy degë të jenë icidente me nyjen b. Përkatësisht, degët $\{i, g\}$dhe $\{g, b\}$ duhet të jenë patjetër në cikël, dega $\{j, g$ në cikël, sepse në të kundërtën do të eksistinin tri degë incidente me nyjen g. Në këtë rast kemi grafin me ngjyrë rozë.

Dega $\{e, j\}$ duhet patjetër të jetë në cikël që të eksistoni dy degë incidente me nyjen j. Pasi që degët $\{e, d\}$ dhe $\{e, j\}$ patjetër duhet të jenë në cikël, dega $\{e, d\}$ nuk mundë të jetë në cikël. Kështu fitojmë grafin si në figurën me ngyrë të gjelbërt, në të cilin nuk mbetet asnjë degë, e cila paraqet cikël Hamiltonian. Pasi që i kemi shterruar gjitha mundësit, si rrjdhim fitojmë se grafi i Petersonit nuk ka asnjë cikël të Hamiltonit.



Nga shembulli i mësipërm kemi parë që: grafi të ketë cikël Hamiltonian, valenca e çdo nyje duhet të jetë 2 apo më e madhe se 2.

Gjithashtu, shihet qartë se grafi duhet të jetë i lidhur që në përgjithësi të shqyrtohet eksistenca e ciklit Hamiltonian.

Teorema në vazhdim na jep më shumë informacione:

Teoremë. Nëse grafi G ka urë, atëherë grafi G nuk mundë të ketë cikël Hamiltonian. Nëse komponentet e grafit, që janë shkaktuar nga heqja e urës, kanë cikle Hamiltoniane, atëherë grafi G ka shteg të Hamiltonit.

Shembull. Të tregohet se grafi K_n ka një cikël të Hamiltonit kurdoherë që $n \geq 3$.

Zgjidhje.

Le të jenë $v_1 v_2 \ldots v_n$ nyje për grafin K_n. Pasi që në mes çfardo dy nyjeve eksiston degë, gjithherë eksiston dega nga v_i deri te v_{i+1} dhe, përfundimisht, nga nyja e fundit v_n deri te nyja fillestare v_1. Kjo tregon se grafi K_n ka një cikël Hamiltonian.

Tregohet se **sa më shumë degë të ketë një graf aq më shumë të ngjarë ka që grafi të ketë cikël (qark) të Hamiltonit**.

Për më tepër, duke shtuar degë (por jo nyje) tek një graf që ka cikël të Hamiltonit prodhohet një graf që ka po atë cikël të Hamiltonit. Si pasojë, derisa shtohen degë tek një graf, veçanërisht duke siguruar të shtohen degë tek çdo nyje, shtimi bëhet me mundësinë (probabilitetin) në rritje që: ekziston një cikël i Hamiltonit në atë graf. Për rrjedhojë, do të pandehet se ka kondita të mjaftueshme për ekzistencën e cikleve të Hamiltonit që varen nga valencat e nyjeve dhe që janë të mëdha mjaftueshëm.

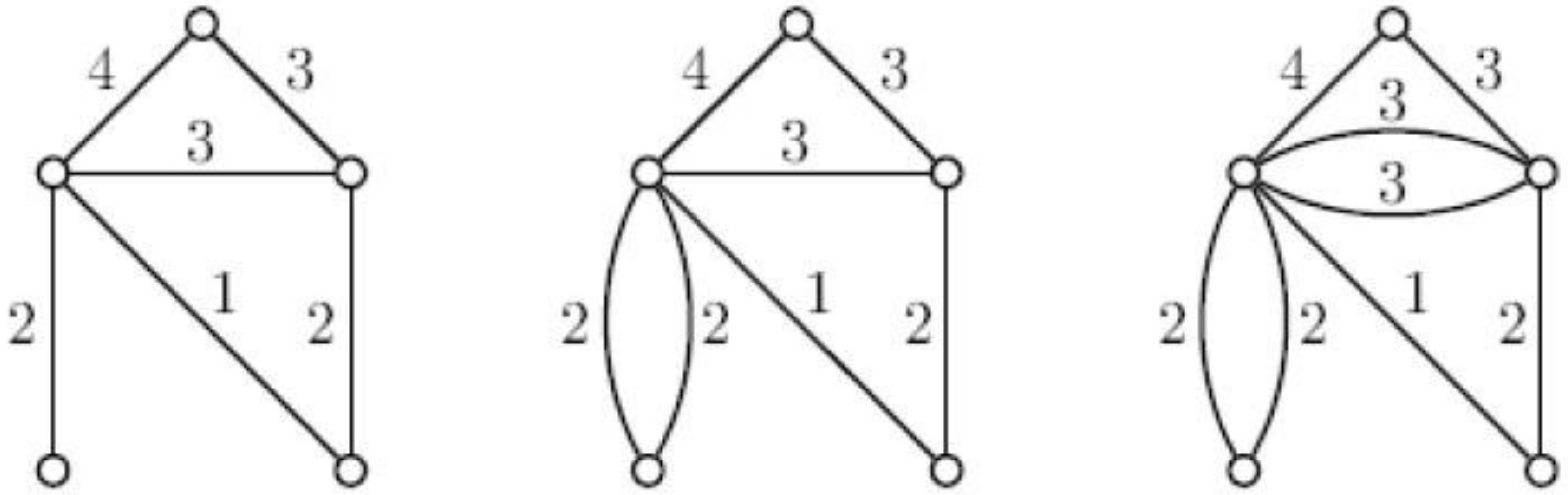
Shqyrtojmë dy konditat e mjaftueshme më të rëndësishme, të themeluara nga Gabriel Dirac (1952) dhe Oystein Ore (1960).

Në qoftë se grafi G nuk është Eulerian, atëhere postierit të shkretë i duhet të përshkojë të paktën një rrugë dy herë. Kjo ndodh kur ndonjë nga rrugët përfundon pa rrugë-dalje dhe, në përgjithësi kur ka kryqëzim të një numri tek rrugësh.

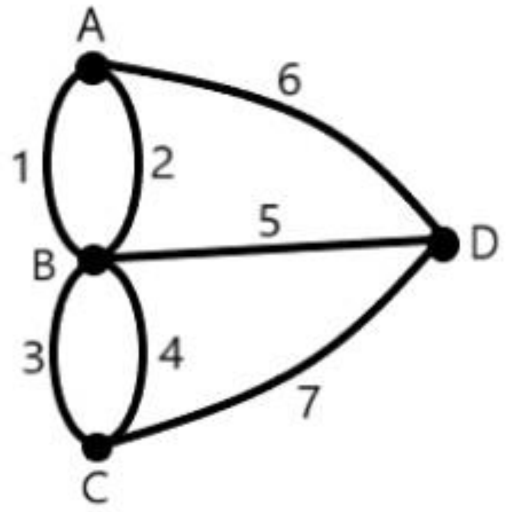
Kjo situatë mund të zgjidhet duke e shëndrruar grafin e dhënë me anë të duplikimit të degëve ekzistuese për ta sjellë në rastin e grafit Eulerian si vijon:

një degë $e = \{u, v\}$ do të duplikohet në qoftë se grafit G i shtohet paralelisht me degën ekzistuese dega $e' = \{u, v\}$ me të njëjtën peshë $\alpha\, e' = (\alpha\, e)$. ( )

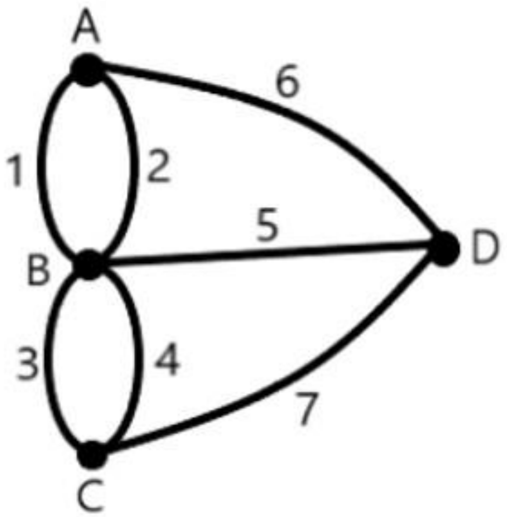
Në grafet e mëposhtme, shikoni figurën, në të cilën janë bërë dy duplikime, deri sa është fituar grafi i djathtë i cili është Eulerian.

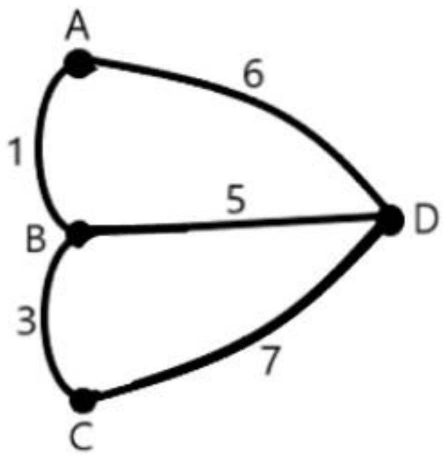


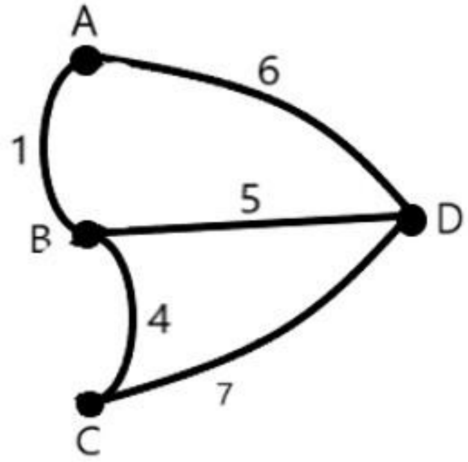
Detyrë: Tregoni nëse grafi i urave të Konigsbergut është graf Hamiltonian dhe Eulerian? Nëse nuk është, sa duhet të jetë numri minimal i urave të cilat duhet të ndërtohen ashtu që grafi të jetë Hamiltonian dhe sa duhet të jetë numri minimal i urave të cilat duhet të ndërtohen ashtu që grafi të jetë Eulerian. Të vizatohet grafi i tillë?



Zgjidhje. Grafi quhet Hamiltonian nëse ka cikël Hamiltonian. Grafi i urave të Konigsbergut është si në figurë, dhe ky graf është Hamiltonian dhe një cikël hamiltonian është $A1B3C7D6A$ ose $A1B4C7D6A$ etj.

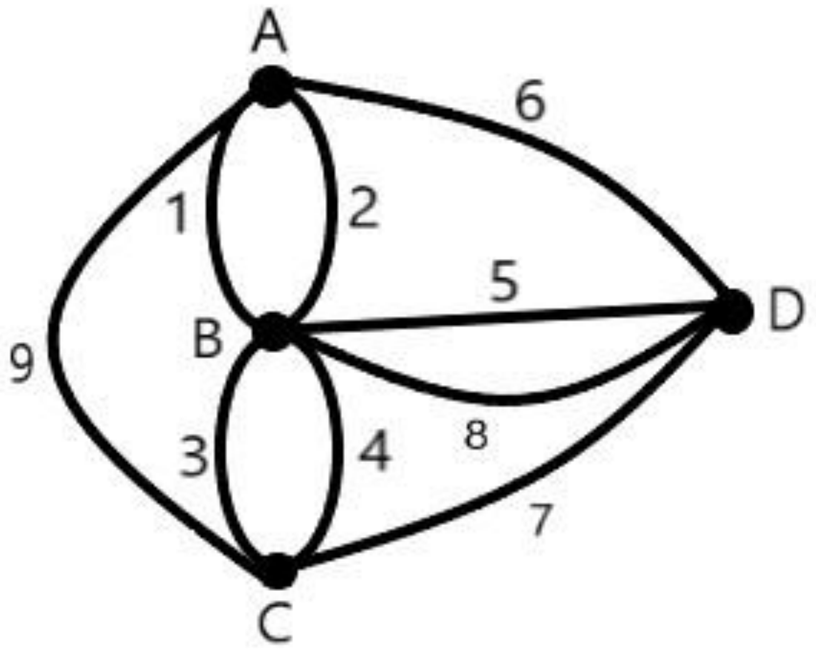


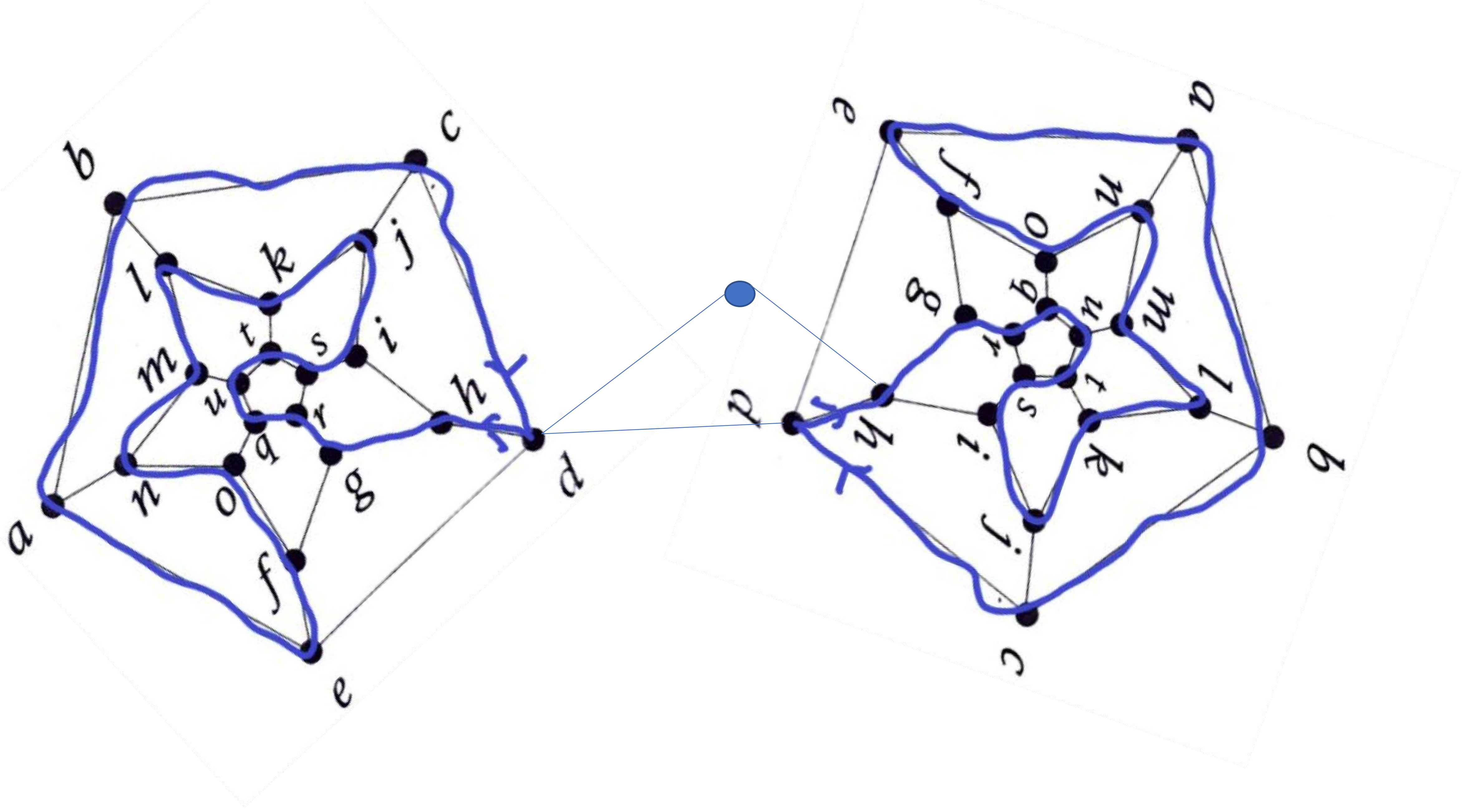




Detyrë: **Vazhdim**. Grafi i urave të Konigsbergut nuk është graf Eulerian për shkak nyjeve që i ka me valenca numër tek.

Numri minimal i urave që duhet të ndërtohet që të fitohet grafi Eulerian është dy.


A
B
C
D
1
2
3
4
5
6
7
8
9



a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
o
q
r
s
t
u

Ka problema të ndryshme, ku kostoja matet nga një përdorues aktiv i grafit.

P.sh., në **problemën e tregtarit shitës** një person supozohet të vizitojë secilin qytet në distriktin e tij dhe këtë ai duhet ta bëjë në mënyrë të tillë që të kursejë kohë dhe para. Kjo arrihet duke planifikuar që çdo qytet të vizitohet një herë dhe në mënyrë që, koha e përgjithshme e dashur të jetë sa më e shkurtër të jetë e mundur. Sipas kuptimit mbi grafët, ai është duke kërkuar për një cikël Hamiltonian me peshë minimale të një grafi, nyjet e të cilit janë qytetet dhe peshat në degë janë kohët e udhëtimeve midis çdo dy qyteteve. Deri tani nuk njihet ndonjë algoritëm për gjetjen e shtegut më të shkurtër për këtë problemë. Madje, besohet se nuk ka ndonjë algoritëm praktik për këtë problemë.

Ciklet Hamiltonianë

(I kujtojmë përkufizimet e mësipërme)

Përkufizim. Një shteg P i një grafi G është një **shteg Hamiltonian** në qoftë se nëpërmjet shtegut P vizitohet një herë cdo nyje e grafit G.

Në mënyrë të ngjashme, një cikël C është **cikël Hamiltonian** në qoftë se nëpërmjet tij çdo nyje vizitohet vetëm një herë. Një graf është Hamiltonian, në qoftë se ai ka një cikël Hamiltonian.

Shënojmë, nëse se $C: u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \cdots \rightarrow u_n$ është një cikël Hamiltonian, i tillë është edhe $u_i \rightarrow u_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow u_n \rightarrow u_1 \rightarrow \cdots \rightarrow u_{i-1}$ për çdo $i \in [1, n]$, nga mund të bëhet zgjedhje për nyjen fillestare të ciklit.

Shembull. Është e qartë që K_n është graf Hamiltonian sa herë që $n \geq 3$. Po ashtu, kuptohet lehtë që $K_{n,m}$ është Hamiltonian atëhere dhe vetëm atëhere kur $n = m \geq 2$.

Zgjidhje.

Le të kemi një bi-ndarje (bipartitiv) të $K_{n,m}$ në (X, Y) ku, $|X| = n$ dhe $|Y| = m$. Tani, meqë grafi është bipartitiv, gjatësia e cdo cikli të tij shprehet me numër çift, kështu që bashkësitë X, Y vizitohen shumë herë nëpërmjet ciklit një numër të barabartë herësh sepse ato janë nënbashkësi të qëndrueshme. Po atëhere kemi, patjetër që $|X| = |Y|$ (d.m.th. $m = n$).

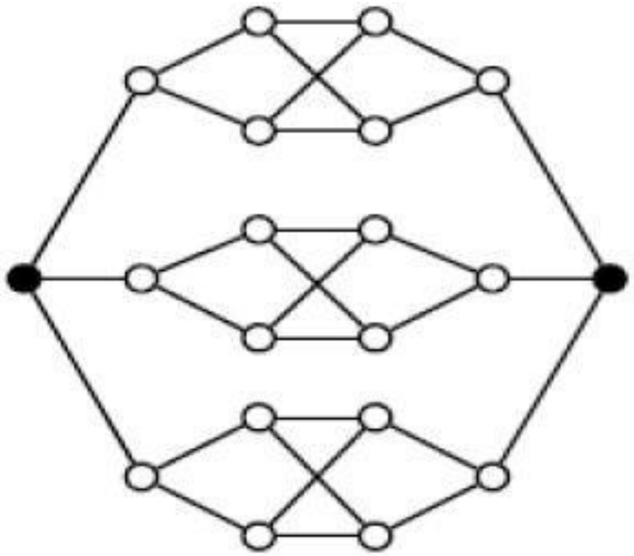
Ekzistojnë disa kondita të përgjithshme për të përcaktuar nëse një graf është Hamiltonian.

Teoremë: Në qoftë se G është Hamiltonian, atëhere për cdo nënbashksi joboshe $S \subseteq V_G$ kemi $c(G - S) \leq |S|$

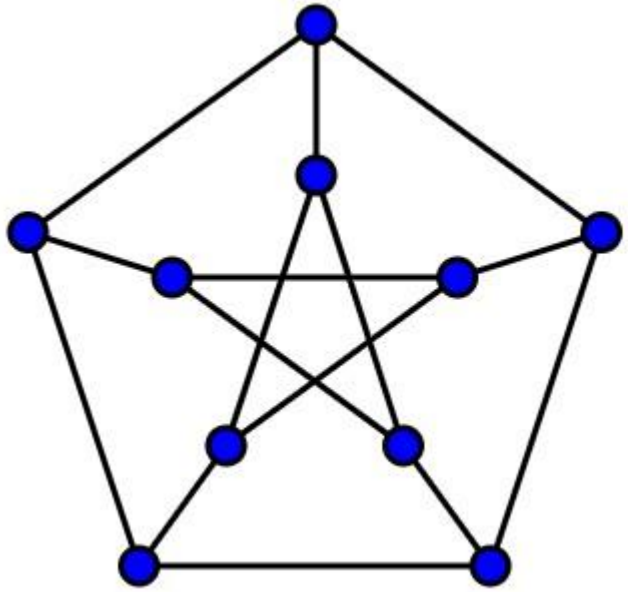
Vërtetim. Le të kemi $S \subseteq V_G$ $(S \neq \emptyset)$, $u \in S$, dhe le të jetë C: $u \to u$ një cikël Hamiltoninan i grafit G. Supozojmë se $G - S$ ka k komponente të lidhur, G_i, i

$\in [1, k]$. Rasti $k = 1$ është trivial, prandaj supozojmë që $k > 1$. Le të jetë $u_i \in S$ për çdo i nga vetë zgjedhja e u_i, dhe $v_j \neq v_t$ për të gjitha $j \neq t$, sepse C është cikël dhe $\{u_i, v_i\} \in E_G$ për çdo i. Rrjedh se, $S \geq k$ ashtu si kërkohej.

Shembull. Shqyrtojmë grafin e mësipërm në të djathtë. Për atë kemi, $c(G - S) = 3 > 2 = |S|$ për bashkësinë S të nyjeve të zeza. Prandaj G nuk e plotëson konditën e teoremës së mësipërme, dhe prandaj ai nuk është Hamiltonian. Interesante është se ky graf është (X, Y)-bipartitiv i rendit çift dhe $|X| = |Y|$. Ai është edhe i 3-rregullt.

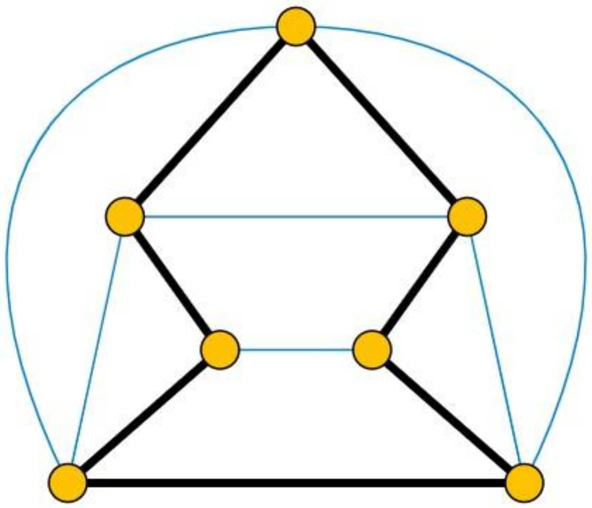


Shembull. Edhe grafi i Petersen-it nuk është Hamiltonian, ndërkohë që ai plotëson konditën $c(G-S) \leq |S|$ për të gjitha $S \neq \emptyset$. Kjo do të thotë se përfundimi i teoremës së mësipërme nuk është i mjaftueshme për të siguruar që një graf të jetë Hamiltonian.



Teoremë. (Ore, 1962). Le të jetë G një graf i rendit ν_G dhe le të jenë $u, v \in G$ të tilla që $d_G(u) + d_G(v) \geq \nu_G$. Atëhere, grafi G është Hamiltonian atëhere dhe vetëm atëhere kur $G + \{u, v\}$ është graf Hamiltonian.

Vërtetim. *(KN):* Le të jetë $n = \nu_G$, dhe $u, v \in G$ të tilla që $d_G(u) + d_G(v) \geq n$. Në qoftë se $\{u, v\} \in G$ atëhere nuk ka ndonjë gjë për tu vërtetuar. Supozojmë se $\{u, v\} \notin G$. Atëhere, duke supozuar që ka një cikël C Hamiltonian, rrjedh menjëherë që C është gjithashtu cikël Hamiltonian edhe i grafit $G + \{u, v\}$.



(KM): Le të jetë $e = \{u, v\}$ dhe supozojmë që $G + e$ ka një cikël Hamiltonian C. Në qoftëse C nuk e përdor degën e atëhere ai është një cikël Hamiltonian i G. Supozojmë se dega e është në C. Atëhere mund

të supozohet që C: $u \to v \to u$. Por $u = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n = v$, është një shteg Hamiltonian i grafit G. Atëhere, ekziston një i , ku $1 < i < n$,e tillë që $\{u, v_i \in E$, Përndryshe, po të kishim $d < n - d_G u$ do të kundërshtohej supozimi,

Por, $u = v_u \to v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to v_{i+1} \to v_i \to v_1 = u$ është një cikël i Hamiltonit në G.

Teoremë. (Dirak 1952) Në qoftë se G është një graf i thjeshtë me n nyje

n ku $(n \geq 3$

dhe i tillë që valenca e çdo nyje në G është të paktën _ $(d\ v \quad \geq$

n $\quad 2$

$\frac{n}{2}$) , atëhere G ka një cikël Hamiltonian.

Vërtetim. Le të jetë $G = (V, E)$ një graf për të cilin dhe $|V| = n \geq 3$ dhe $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Atëhere G është i lidhur, përndryshe valenca e çdo nyje në komponentin më të vogël C të G do të ishte më e vogël se $C \leq \frac{n}{2}$.

Le të jetë $P = x_0 x_i \ldots x_k$ shtegu më i gjatë në grafin G. Pasi që P është shtegu më i gjatë dmth shtegu maksimal, atëherë të gjtiha nyjet fqinje të nyjes x_0 dhe të gjitha nyjet fqinje të nyjes x_k ndodhen në shtegun P.

Prandaj $\frac{n}{2}$ e nyjeve $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ janë fqinje me nyjen x_k, dhe të paktën

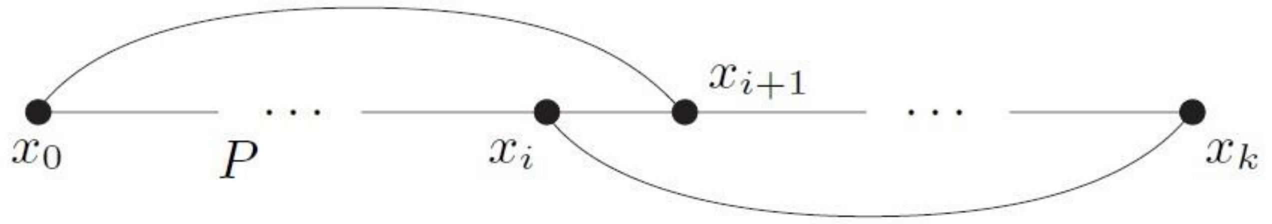
n

_ e këtyre k nyjeve të njëjta $(k < n)$ të cilat i shënojmë me x_i janë të tilla

2

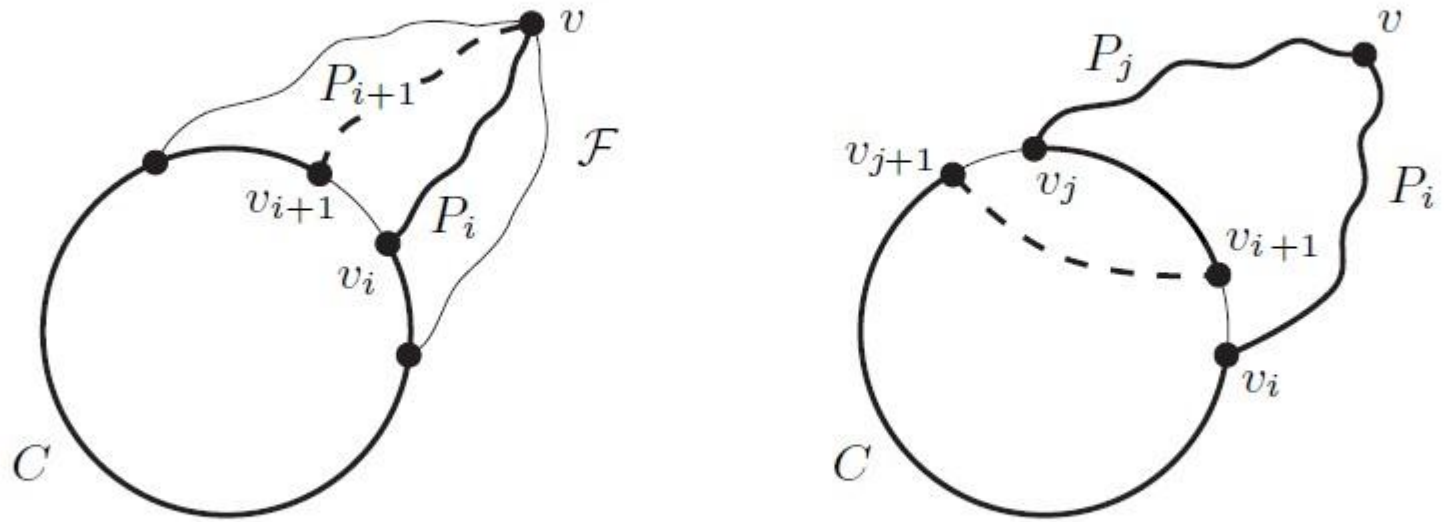
$\{x_0, x_{i+1}\} \in E$.

Sipas parimit mbi folet e pëllumbave, eksiston një nyje x_i që i ka të dy vetit, prandaj kemi $\{x_0, x_{i+1}\} \in E$ dhe $\{x_i, x_k\} \in E$ për disa $i < k$ (shiko figurën).



Atëherë cikli C: $x_0 x_{i+1} P x_k x_i P x_0$ ës Vërtet, meqë G është i lidhur ai është cikël i Hamiltonit sepse përndryshe C do të kishte një fqinjë në $G-$ C e cila (nyja fqinjë) do të formonte në C një shteg më të gjatë se P. Shtegu P është pjesë e ciklit C dhe nga supozimi është shtegu më i gjatë në grafin G.

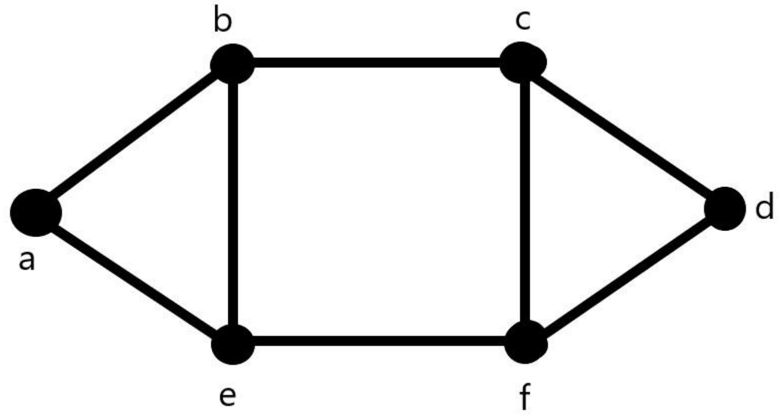
Pohim: çdo graf G me $|G| \geq 3$ dhe $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ ka cikël të Hamiltonit.



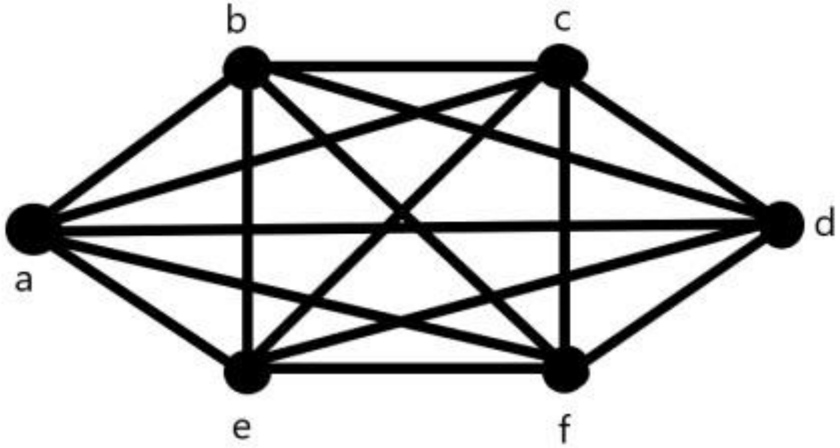
Teoremë. **(Tutte 1956)** Çdo graf planar 4-lidhor ka cikël të Hamiltonit.

Përkufizim. Le të jetë grafi G me $\nu_G = n$ nyje. Mbyllje të grafit G, që simbolikisht e shënojmë $\mathrm{cl}(G)$, është grafi i fituar prej shtimit të degëve në mënyrë rekurzive në mes nyjeve fqinje u dhe v të grafit G për të cilat $d_G(u) + d_G(v) \geq \nu_G = n$ deri sa të jetë e mundur.

Shembull: Nëse G është graf si në figurë



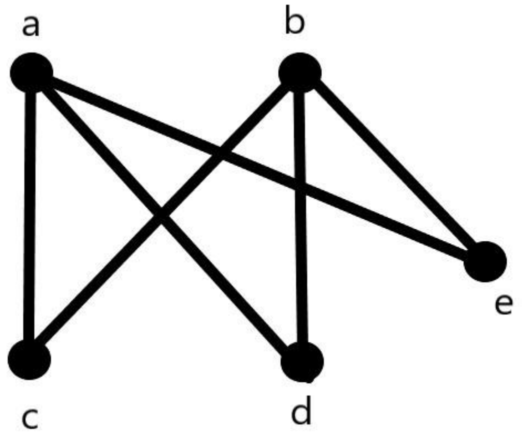
$(\quad)$ është



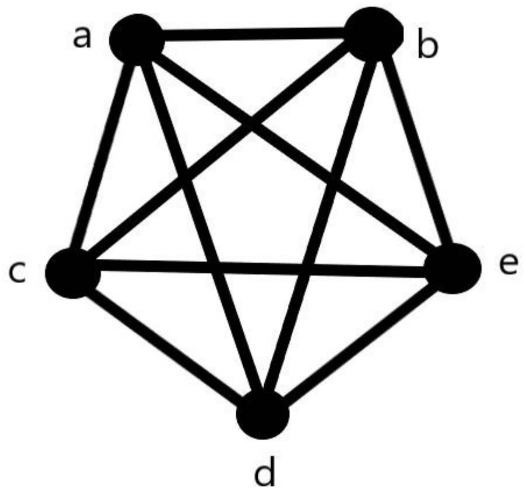
Atëherë grafi cl

graf si në figurë

G **Shembull**: Nëse G është

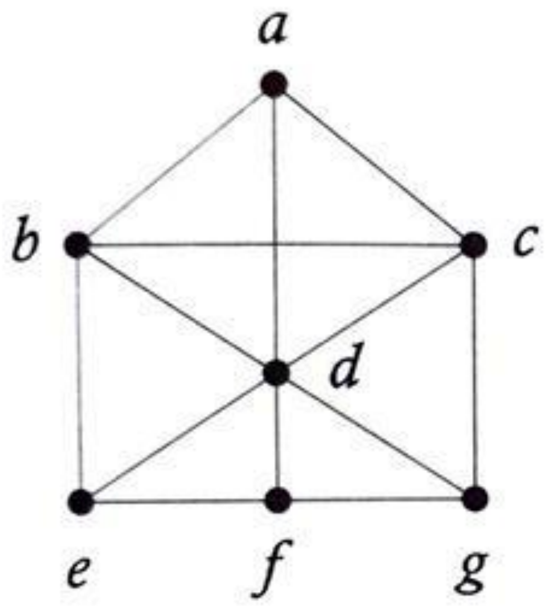


( ) është

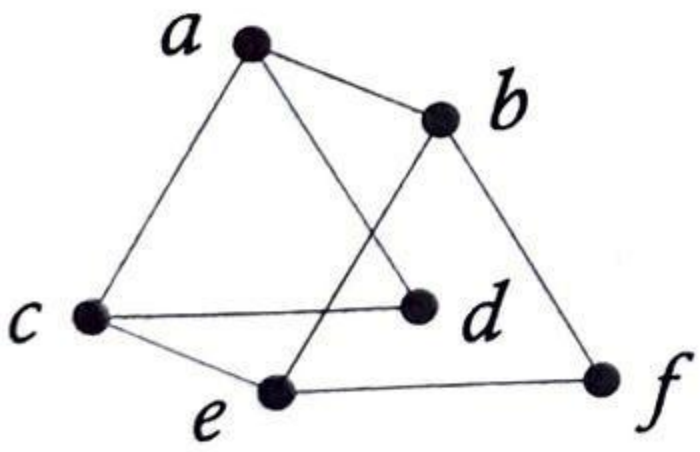


Atëherë grafi cl G

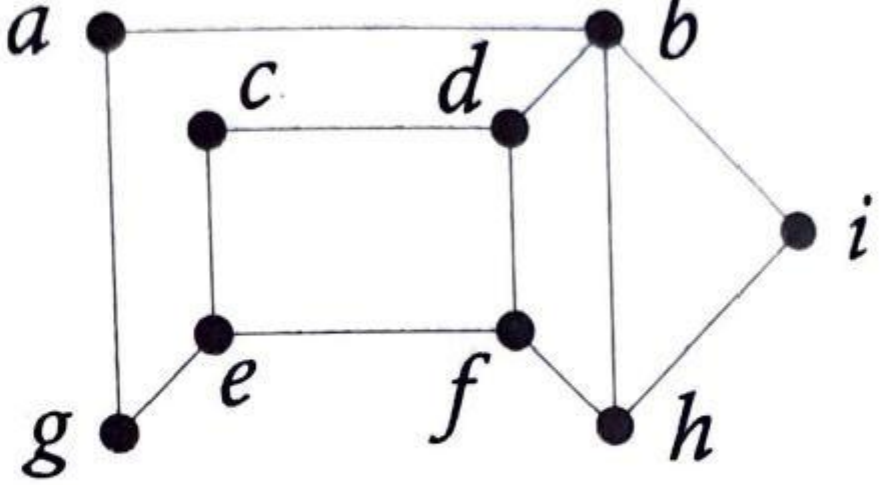
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



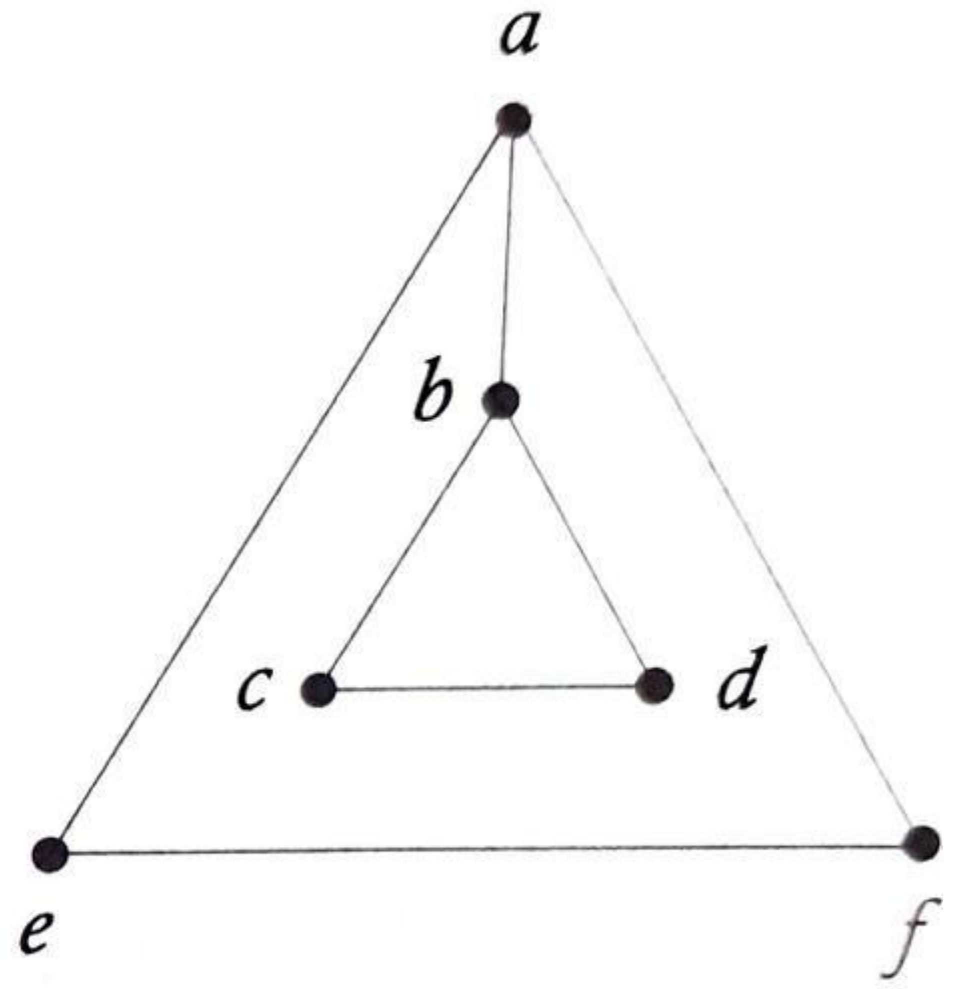
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:

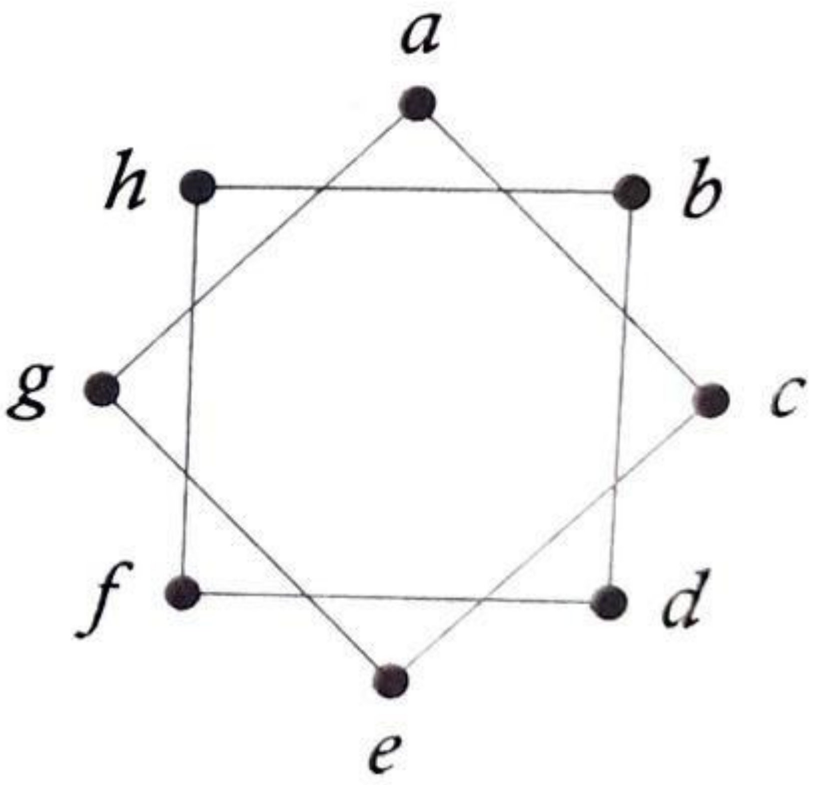


Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



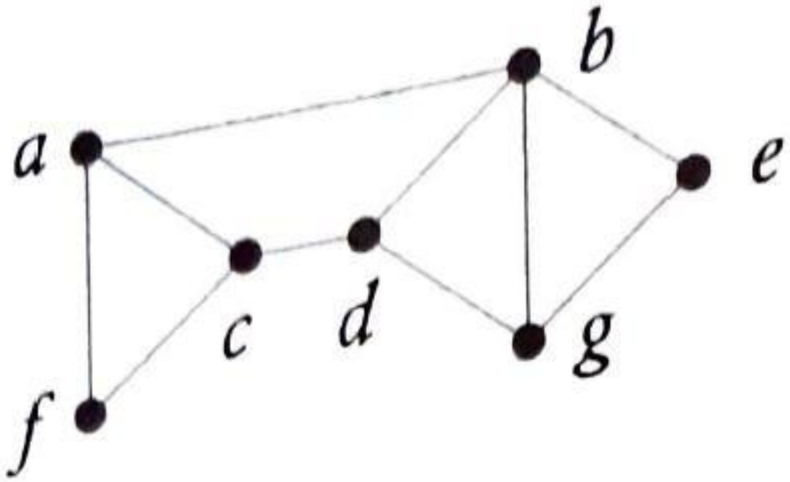
Detyra.

Nëse ekziston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:

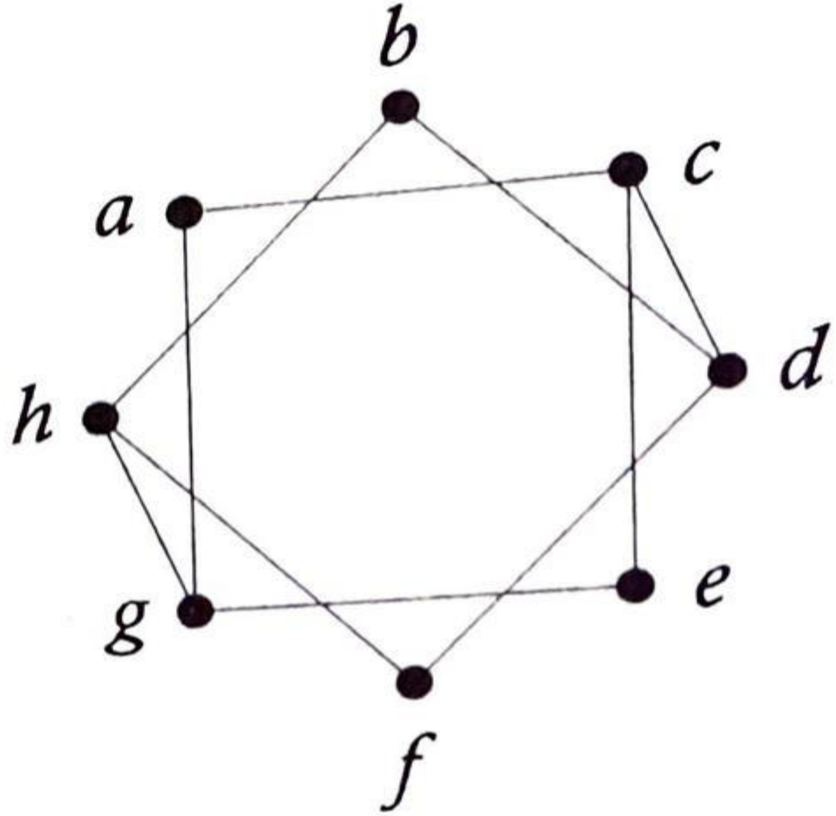


Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:

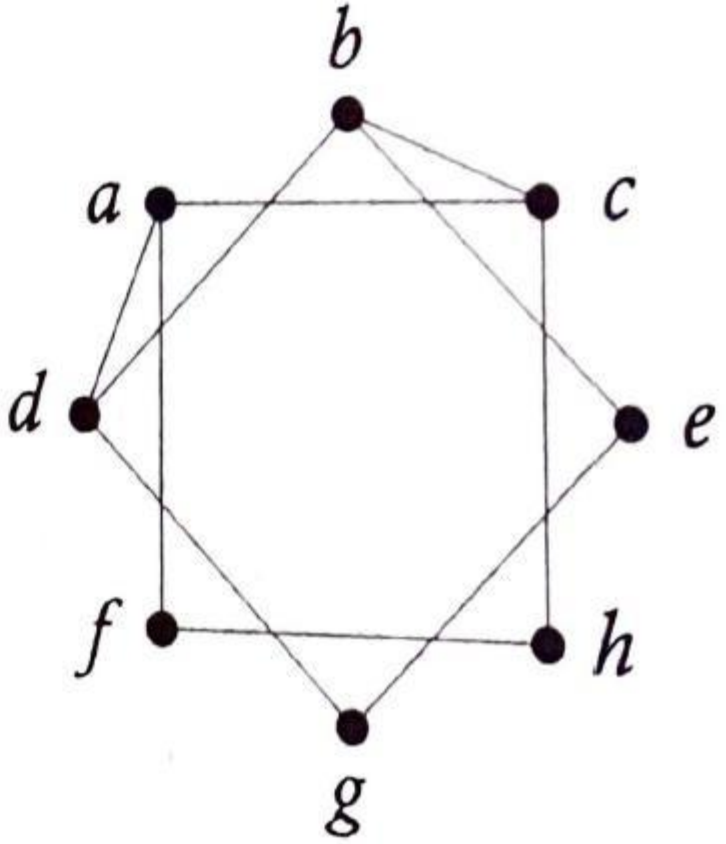
Detyra.



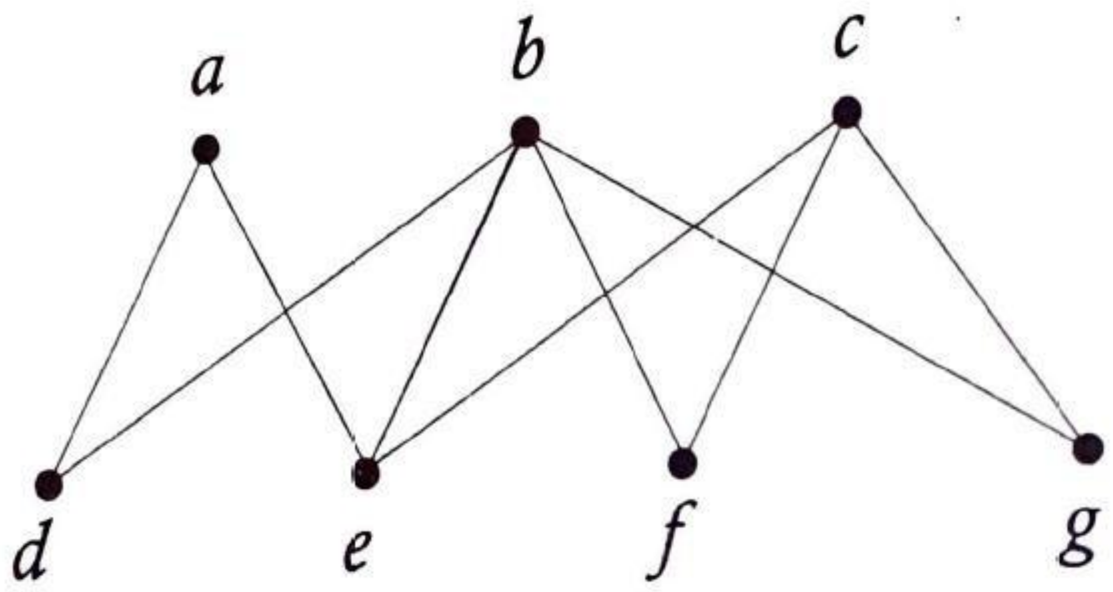
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



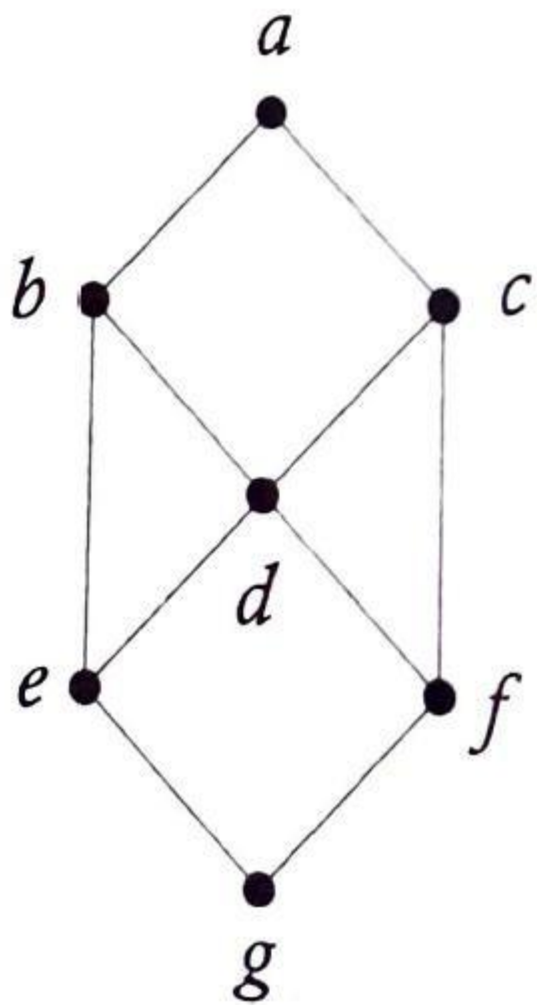
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



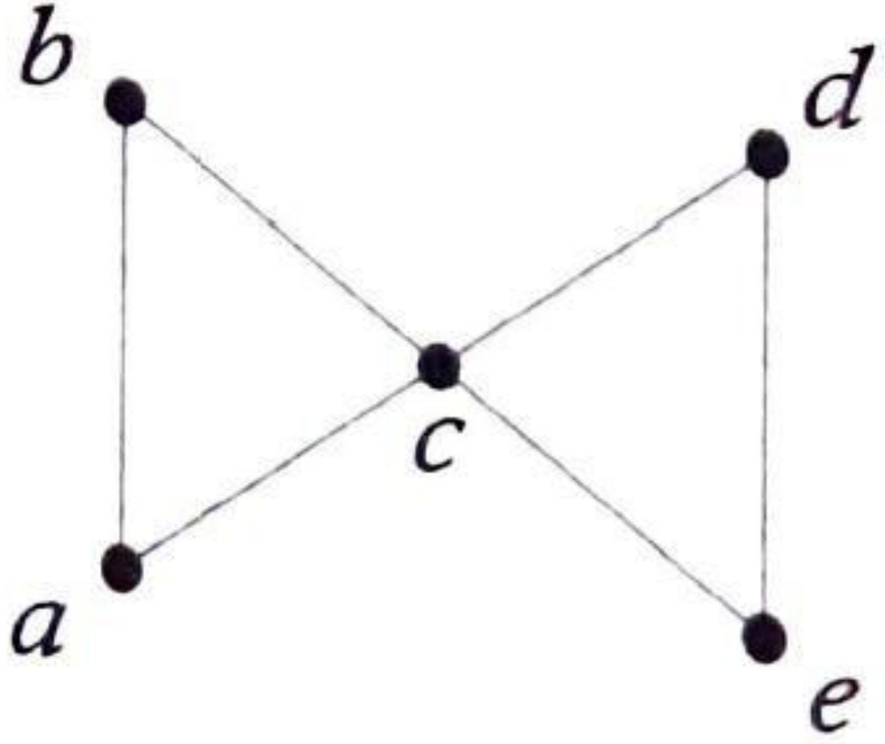
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



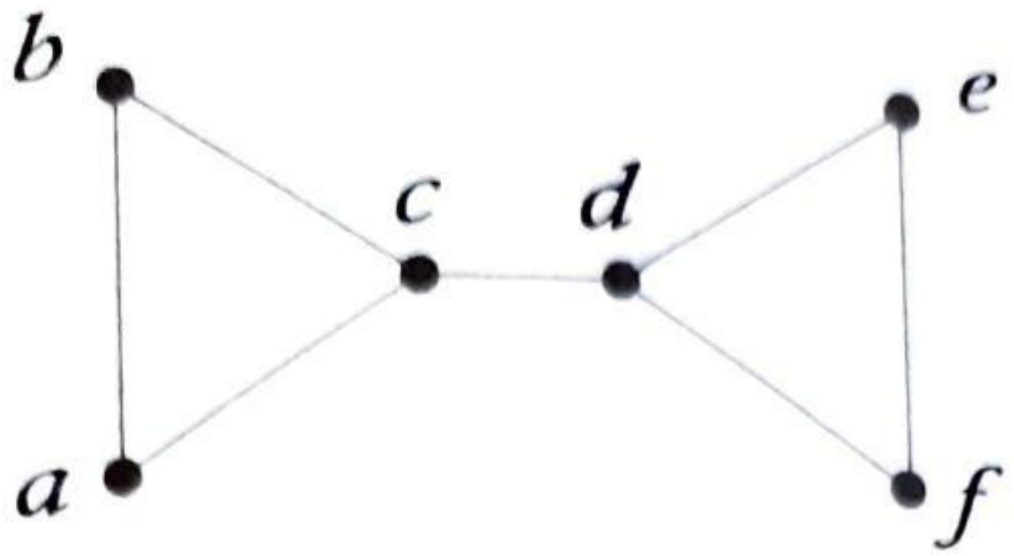
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:


a
b
c
d
e
f
g

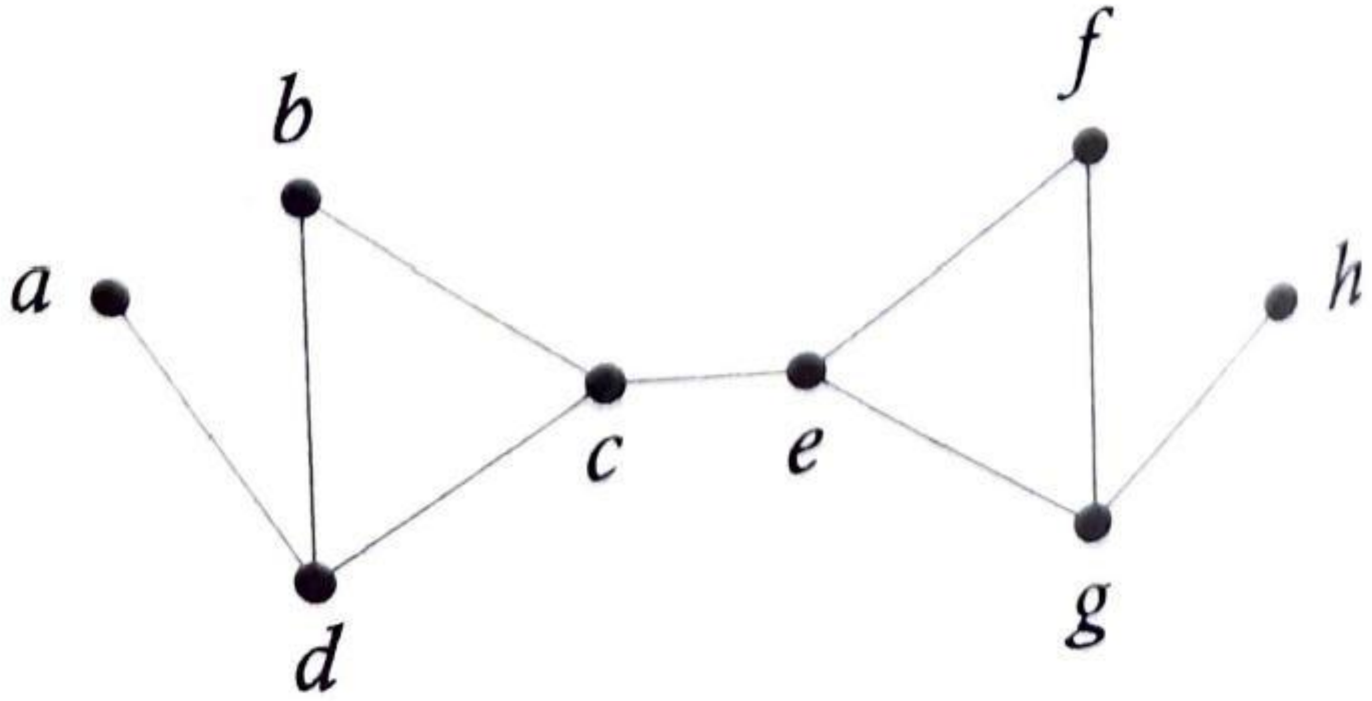
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



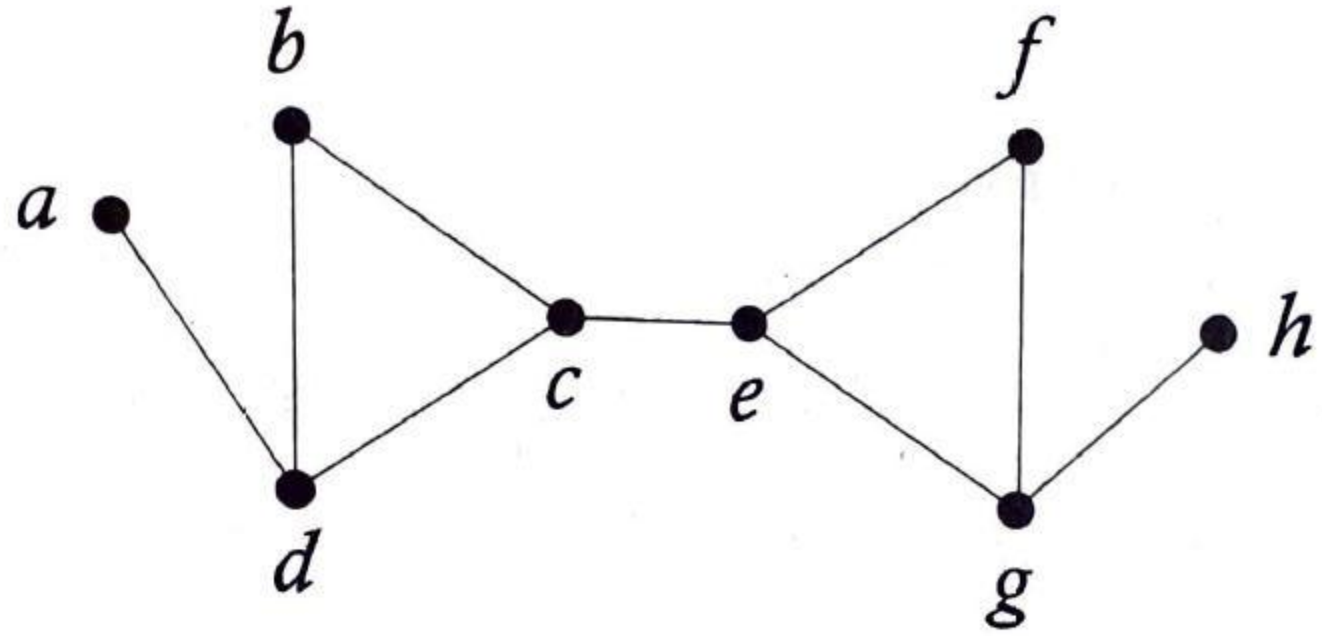
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



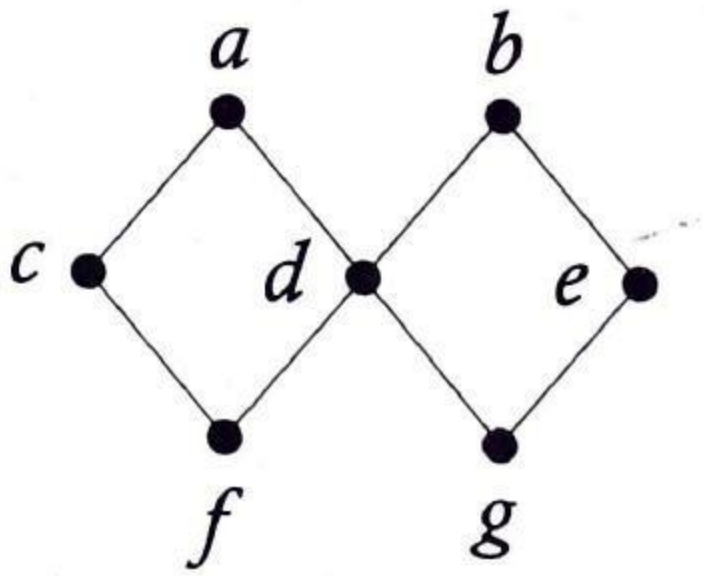
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



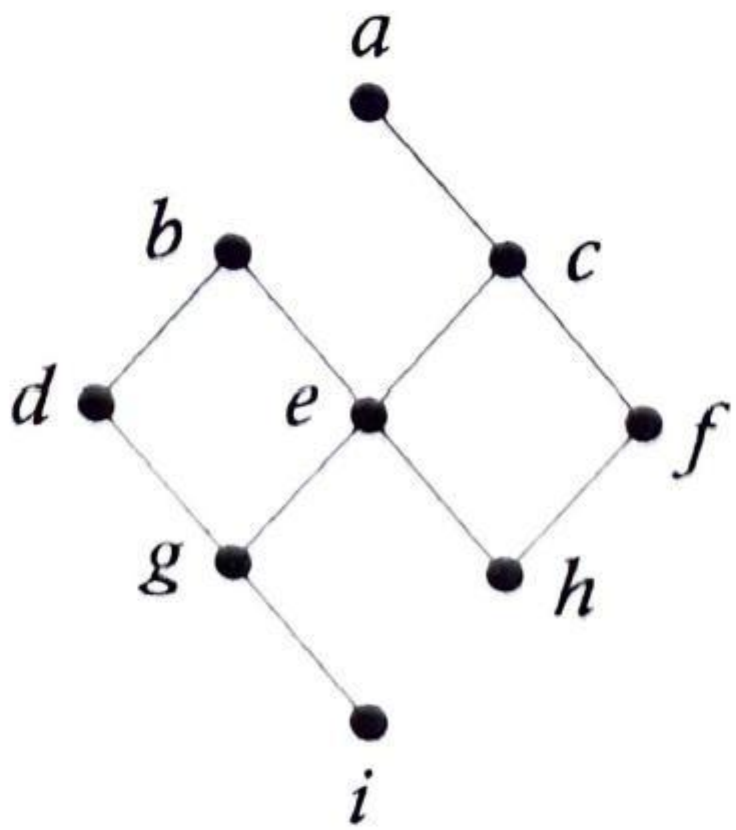
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



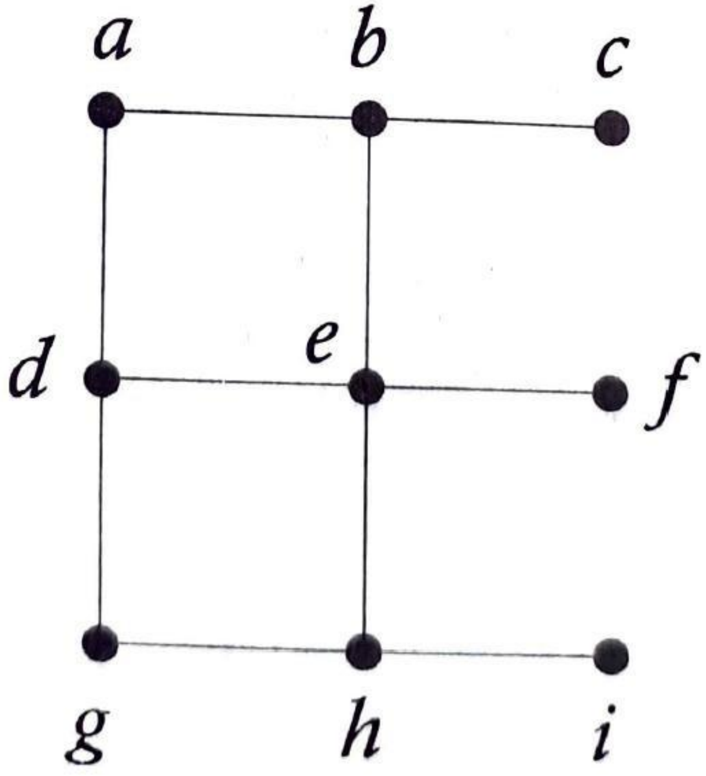
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



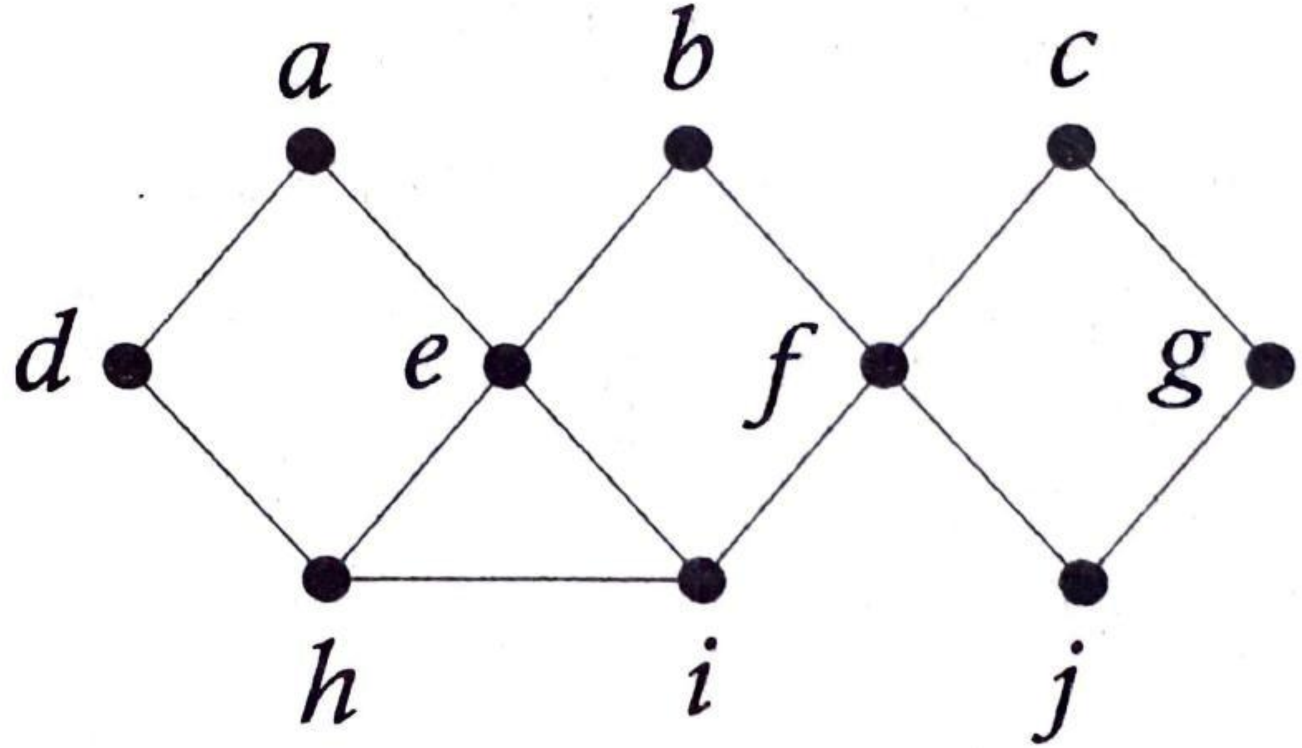
Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:



Detyra. Nëse eksiston, gjeni ciklin Hamiltonian për grafin:

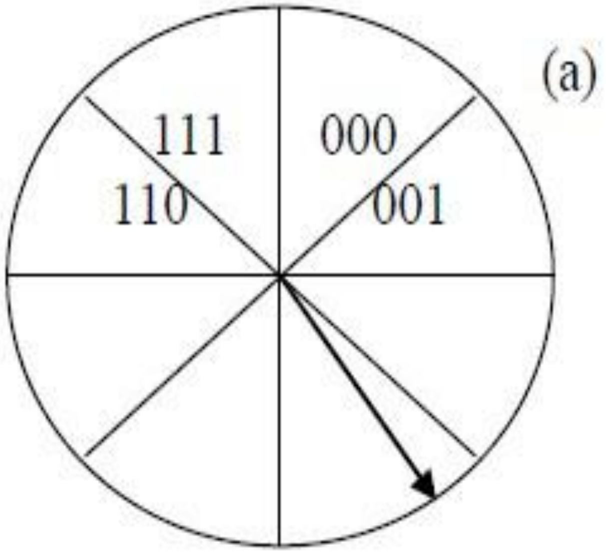


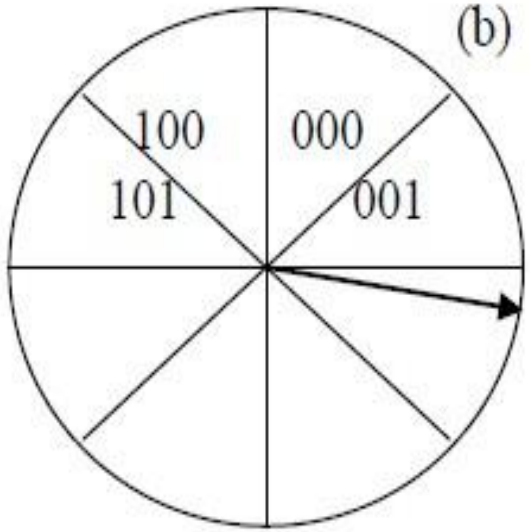
Vërejtje: Shtigjet dhe ciklet e Hamiltonit gjejnë zbatime në zgjidhjen e problemave praktike. Shumë zbatime kërkojnë ndërtimin e një shtegu apo cikli nëpërmjet të të cilit secila ndërprerje rrugësh të një qyteti, secili vend ku kryqëzohen degët me tuba të rrjetit për furnizim me gaz apo naftë, secila nyje e një rrjeti komunikimi, etj… të vizitohet vetëm një herë.

Kodet Gray. Pozicioni i sferës së miut të kompjuterit mund të paraqitet në formë dixhitale. Një nga mënyrat për ta bërë këtë është ndarja e rrethit në harqe me gjatësi të barabarta dhe caktohet një zinxhir me bite me gjatësi n për secilin hark. Dy mënyra për ta bërë këtë duke përdorur zinxhirë me bite me gjatësi 3 tregohen në figurë. Paraqitja dixhitale e pozicionit të treguesit mund të përcaktohet duke përdorur një bashkësi me n kontakte (pika takimi). Secili kontakt përdoret për të lexuar një bit në paraqitjen dixhitale të pozicionit, e cila ilustrohet në figurë. Kur treguesi është afër kufirit të dy harqeve mund të bëhet gabim në leximin e pozicionit të tij. Kjo gjë mund të rezultojë me një gabim të madh në leximin e zinxhirit me bite. Për shembull, në skemën e kodimit të figurën a, në qoftë se bëhet një gabim i vogël në përcaktimin e pozicionit të treguesit atëhere në vend të zinxhirit me bite 011 lexohet zinxhiri 100. Të tre bitet janë të gabuar .

Për të minimizuar efektin e ndonjë gabimi në përcaktimin e pozicionit të treguesit, caktimi i zinxhirëve me bite për 2^n harqet duhet bërë në mënyrë të tillë që vetëm një bit të jetë i ndryshëm në zinxhirët me bite për të përfaqësuar nga harqet fqinjë. Kjo është saktësisht situata në skemën e kodimit të figurës (b). Kështu që, një gabim në përcaktimin e pozicionit të treguesit, në vend të zinxhirit 011 jepet zinxhiri me bite 010, nga është gabuar vetëm me një bit. Kodi Gray (për nder të Frank Gray) është një etiketim i harqeve të rrethit në mënyrë që harqet fqinje të jenë me etiketa zinxhirësh me bite që ndryshojnë nga njëri tjetri vetëm me një bit. Caktimi që është bërë në figurën (b) është një kod i Gray.

Një kod Gray mund të gjendet duke listuar të gjithë zinxhirët me bite me gjatësi n në mënyrë të tillë që secili zinxhir të ndryshojë saktësisht me një pozicion prej zinxhirit para-ardhës, dhe zinxhiri i fundit të ndryshojë nga i pari po me një pozicion.





Ky problem mund të modelohet duke përdorur n-kubin Q_n. Ajo që duhet për ta zgjidhur këtë problemë është gjetja e një qarku të Hamiltonit në Q_n. Të tillë cikle gjenden lehtësisht. Një qark i tillë për Q_3 paraqitet në si në figurë, shembull i shqyrtuar edhe më parë. Vargu i zinxhirëve me bite që ndryshojnë saktësisht me 1 bit, i prodhuar nga qarku i Hamiltonit është: $000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100$.