ИДЗ №1

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02-03-01сцт

1 Найти все значения корня: $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$

Решение:

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \implies \sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$$

Необходимо перейти к тригонометрической форме:

$$x = Re(z) = -1; \quad y = Im(z) = \sqrt{3}$$

$$arg(z) = \psi = \pi - \arctan(\frac{y}{|x|}) \implies z - \psi - \pi - \arctan(\frac{\sqrt{3}}{|-1|}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$$

$$z_k = \sqrt[4]{|z|} = \sqrt[4]{|z|}\cos(\frac{\psi 2\pi k}{4}) + i\sin(\frac{\psi 2\pi k}{4}), \quad k = 0, 1, 2, 3...$$

$$w_0 = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})$$

$$w_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$$

$$w_2 = \cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6})$$

$$w_3 = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})$$

2 Представить в алгебраической форме: $\cos(\frac{\pi}{2} - i)$

Решение:

Воспользуемся тригонометрической формулой:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - i) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(i) + \sin(\frac{\pi}{2})\sin(i) = 0\,\mathrm{ch}(1) + i\,\mathrm{sh}(1) = i\,\mathrm{sh}(1)$$

Ответ: $i\,\mathrm{sh}(1)$

3 Представить в алгебраической форме: $\arccos(-3i)$

Решение:

$$\arccos(-3i) = \theta \implies \cos(\theta) = -3i$$

$$\theta : [\theta = \arccos(-3i) = \pi + i\ln(3 + \sqrt{3^2 - 1})]$$

$$\arccos(-3i) = \pi + i\ln(3 + \sqrt{8})$$

Ответ: $\pi + i\ln(3+\sqrt{8})$

4 Представить в алгебраической форме: $(2+i)^{-3i}$

Решение:

$$(2+i)^{-3i} = e^{-3i\ln(2+i)}$$

$$\ln(2+i) = \ln|2+i| + iArg(2+i) = \ln\sqrt{5} + i(\arctan\frac{1}{2} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Таким образом, получаем:

$$(2+i)^{-3i} = e^{-3i(\ln\sqrt{5}+i(\arctan\frac{1}{2}+2\pi n)} = e^{3(\arctan\frac{1}{2}+2\pi n)}(\cos(3\ln\sqrt{5}) + i\sin(3\ln\sqrt{5})$$

Ответ: $e^{3(\arctan\frac{1}{2}+2\pi n)}(\cos(3\ln\sqrt{5}) + i\sin(3\ln\sqrt{5})$

5 Представить в алгебраической форме: Ln$(2+2\sqrt{3}i)$

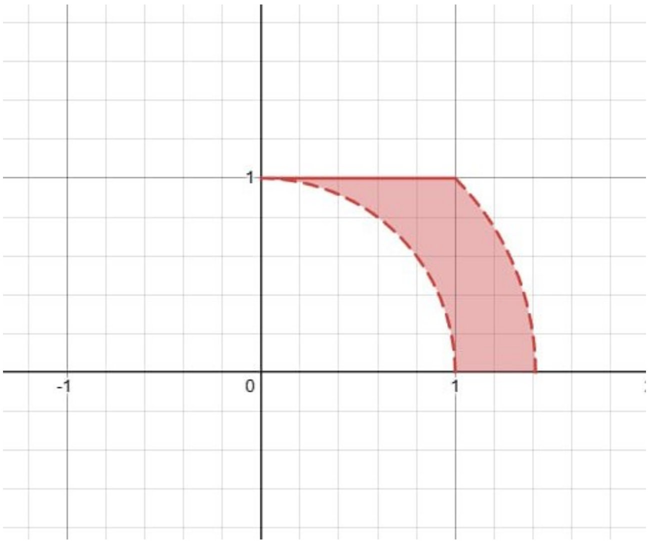
Решение:

$$\mathrm{Ln}(2+2\sqrt{3}i) = \ln|2+2\sqrt{3}i| + i\mathrm{Arg}(2+2\sqrt{3}i) = \ln 4 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\ln 4 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

6 Вычертить область, заданную неравествами: $D = \{z : 1 < z\bar{z} < 2, Re(z) > 0, 0 \le Im(z) \le 1\}$

Ответ:



7 Определить вид пути и в случае, когда он проходит через точку ∞, исследовать его поведение в этой точке: $z = 3\tan t + i4\sec t$

Решение:

Наименьший общий период функций sec и tan равен $2\pi \implies$ достаточно построить кривую для:

$$t \in (-\frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{2}) \cup t \in (\frac{\pi}{2}; \quad \frac{3\pi}{2})$$

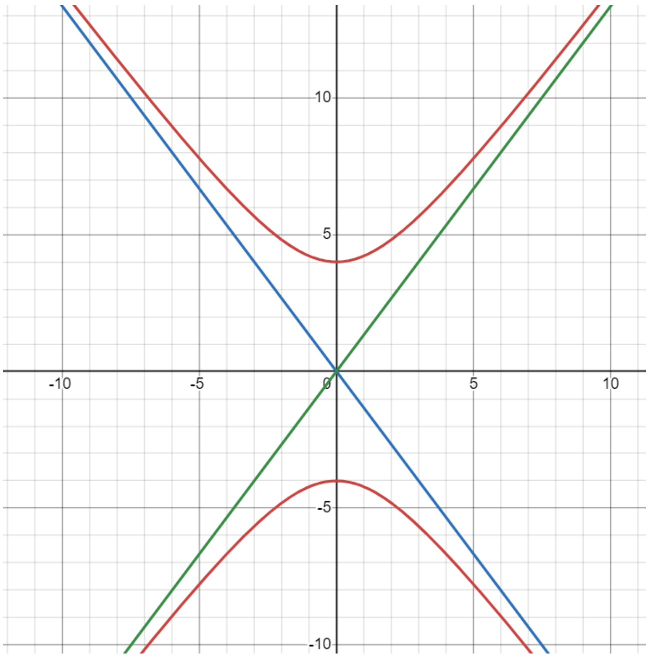
Параметрические уравнения кривой, которую необходимо найти имеют вид:

$$\begin{cases} x = 3\tan t \\ y = 4\sec t \end{cases}$$

Исключим параметр t:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \tan t & \qquad \frac{y}{4} &= \sec t \\ \frac{x^2}{9} &= \tan^2 t + 1 - 1 & \qquad \frac{y^2}{6} &= \sec^2 t \\ \frac{x^2}{9} &= \frac{1}{\cos^2 t - 1} & \qquad \frac{y^2}{6} &= \frac{1}{\cos^2 t} \end{aligned}$$

$\implies \quad \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} - 1 \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ - каноническое уравнение гиперболы $\quad \frac{x}{3} \mp \frac{y}{4} = 0$ - асимптоты



$$\begin{aligned} &t \to -\frac{\pi}{2} + 0, \quad x \to -\infty \quad y \to +\infty \\ &t \to \frac{\pi}{2} - 0, \quad x \to +\infty \quad y \to +\infty \\ &t \to \frac{\pi}{2} + 0, \quad x \to -\infty \quad y \to -\infty \\ &t \to \frac{3\pi}{2} - 0, \quad x \to +\infty \quad y \to -\infty \end{aligned}$$

8 Восстановить голоморфную в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ и начальному значению $f(z_0)$: $-2xy - 2y, \ f(0) = i$

Решение:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = -2y & \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \\ \frac{du}{dy} = -2x - 2 & \qquad \frac{d^2u}{dy^2} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\implies \triangle u = 0$$

Удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \end{cases} \tag{2}$$

Условие Коши-Римана

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} & \Longrightarrow\ v = x^2 + 2x + \phi y \\ \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} & \Longrightarrow\ \phi'(y) \end{cases} \tag{3}$$

$$\phi(y) = -y^2 + C$$

$$v(x, y) = x^2 + 2x - y^2 + C$$

$$f(x, y) = -2xy - 2y + i(x^2 + 2x - y^2 + C$$

Голоморфная функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = -2xy - 2y + i(x^2 + 2x - y^2 + C) = -2xy - 2y + ix^2 + 2ix - iy^2 + C \cdot i =$$

$$= (ix^2 - iy^2 - 2xy) + (-2y + 2ix) + C \cdot i \circeq$$

$$z^2 \cdot i = ix^2 - iy^2 - 2xy$$

$$2z \cdot i = -2y + 2ix$$

$$\circeq z^2 \cdot i + 2z \cdot i + C \cdot i$$

$$f(0) = i = i \cdot C \qquad C = 1$$

$$f(x) = z^2 \cdot i + 2z \cdot i + i = i(z^2 + 2z + 1)$$

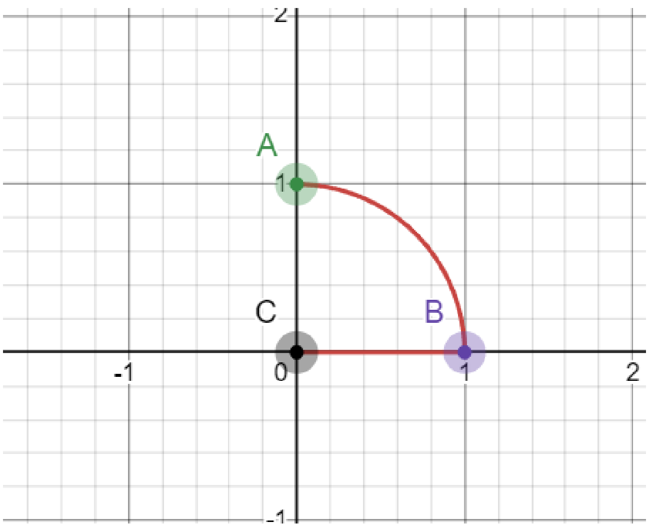
Ответ: $f(x) = i(z^2 + 2z + 1)$

9 Вычислить интеграл от функции комплексной переменной по данному пути: $\int_{ABC} z\bar{z}dz$; $AB = \{z : |z| = 1, \quad Re(z) \geq 0, \quad Im(z) \geq 0\}$ BC - отрезок прямой

Решение:

$$y = \{0 < x < 1\}$$

$A = (0, 1) \quad B = (1, 0) \quad C = (0, 0)$



$$I = \int_{ABC} z\bar{z}dz = \int_{ABC} (x + iy)(x + iy)dz = \int_{ABC} (x^2 + y^2)dz$$

$$f(x + iy) = x^2 + y^2 \implies \textbf{мнимая часть функции равна 0}$$

$\Longrightarrow$ из условия Коши-Римана выполняться не будет, следовательно применяем параметризацию

$$\int_{ABC} = -\int_{CBA} = -\int_{CB} - \int_{AB} \textbf{−аддитивность области}$$

$CB: \quad (t;0) \quad 0 \le t \le 1$
$BA: \quad (\cos t; sint) \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$I = -\int_{CB}(x^2+y^2)dz - \int_{AB}(x^2+y^2)dz = -\int_0^1 t^2\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t + sin^2 t)d(\cos t + i\sin t)$$

$$I = -\frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(e^{it}) = -\frac{1}{3} - (e\frac{i\pi}{2} - e^0) = \frac{2}{3} - i$$

Ответ: $\frac{2}{3} - i$

10 Найти радиус сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+i)^n \cdot \sin n \cdot z^n$

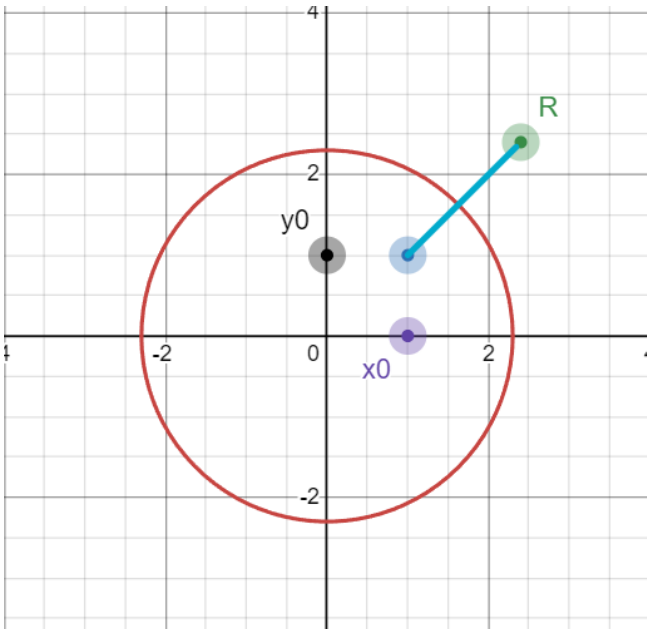
Решение:

$$\implies R = \frac{1}{p}; \quad p = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_n \cdot (z-z_0)^n \implies C_n = (1+i)^n \cdot \sin n, \quad |C_n| = 2^{\frac{n}{2}}|\sin n|$$

$$\sqrt[n]{|C_n|} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[n]{|\sin n|} \le \sqrt{2}$$

$$\sin n \le 1$$



$$\exists \quad n_k \xrightarrow{n\to\infty} \infty \cdot \sin n + 1 \to 0 \ne 0$$

$$\sqrt[n_k]{|\sin|n_k|} \le 1, \quad k > \mathbb{N}$$

$$|\sin n_k| \to |\alpha| \ne 0$$

$$\sqrt{2} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[n_k]{\frac{|\alpha|}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt[n]{|\sin n|} \le \sqrt{2}$$

11 Найти лорановские разложения данной функции в 0 и в ∞: $f(z) = \frac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$

Решение:

Чтобы найти нужное разложение, предварительно разложим нашу функцию на простые дроби. Для этого найдём все корни знаменателя:

$$-z^4 + 3z^3 + 18z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2(z^2 - 3z - 18) = 0$$

$$z_1 = z_2 = 0 \quad x_3 = -3 \quad x_4 = 6$$

Таким образом, $-z^4+3z^3+18z^2 = z^2(z^2-3z-18)$ поэтому разложение нашей функции на простые дроби должно иметь вид:

$$\frac{3z+36}{-z^4+3z^3+18z^2} = \frac{3z+36}{z^2(z^2-3z-18)} = \frac{3z+36}{z^2(z+3)(z-6)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+3} + \frac{D}{z-6}$$

Коэффициенты A, B, C, D можно найти как обычно, приводя к общему знаменателю справа и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z слева и справа. Но B, C и D можно найти проще. Для нахождения B: умножаем обе части равенства на z^2 и в результат подставляем $z = 0$:

$$\left.\frac{3z+36}{(z+3)(z-6)}\right|_{z=0} = (Az + B + \frac{Cz^2}{z+3} + \frac{Dz^2}{z-6}) \implies B = -2$$

$$\left.\frac{3z+36}{z^2(z-6)}\right|_{z=-3} = (\frac{A(z+3)}{z} + \frac{B(z+3)}{z^2} + C + \frac{D(z+3)}{z-6}) \implies C = -\frac{1}{3}$$

$$\left.\frac{3z+36}{z^2(z+3)}\right|_{z=6} = (\frac{A(z-6)}{z} + \frac{B(z-6)}{z^2} + \frac{C(z-6)}{z+3} + D) \implies D = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3z+36}{z^2(z+3)(z-6)} = \frac{A}{z} - \frac{2}{z^2} - \frac{1}{3(z+3)} + \frac{1}{6(z-6)} \implies A = \frac{1}{6}$$

$$\implies \quad \frac{3z+36}{z^2(z+3)(z-6)} = \frac{1}{6z} - \frac{2}{z^2} - \frac{1}{3(z+3)} + \frac{1}{6(z-6)}$$

Нам надо найти разложение нашей функции в окрестностях нуля и бесконечности. Оба эти разложения по степеням z. Первые два слагаемые — это уже суммы степеней z. Поэтому остаётся разложить в ряды Лорана только последние слагаемые $\frac{1}{3(z+3)}$ и $\frac{1}{6(z-6)}$. Разложим $\frac{1}{3(z+3)}$ в окрестности нуля. Очевидно, эта функция голоморфна в круге $|z| < 3$. Поэтому её ряд Лорана в этом круге совпадёт с рядом Тейлора (с кругом сходимости $|z| < 3$):

$$\frac{1}{3(z+3)} = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{(1+\frac{z}{3})} = \frac{1}{3^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n(\frac{z}{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \quad \frac{(-1)^n}{3^{n+2}} \cdot z^n$$

Аналогично находим разложение $\frac{1}{6(z-6)}$ в окрестности 0. Замечаем, что функция голоморфна в круге $|z| < 6$, поэтому

$$\frac{1}{6(z-6)} = \frac{1}{6^n} \cdot \frac{1}{(1+\frac{z}{3})} = \frac{1}{6^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n(\frac{z}{6})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \quad \frac{(-1)^n}{6^{n+2}} \cdot z^n$$

Оба полученных разложения справедливы в меньшем круге $|z| < 6$. Поэтому в этом круге имеет место равенство

$$\frac{3z+36}{z^2(z+3)(z-6)} = \frac{1}{6z} - \frac{2}{z^2} - \frac{1}{3(z+3)} + \frac{1}{6(z-6)} = \frac{1}{6z} - \frac{2}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \quad \frac{(-1)^n}{3^{n+2}} \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \quad \frac{(-1)^n}{6^{n+2}} \cdot z^n$$

$$\frac{1}{6z} - \frac{2}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \quad (\frac{(-1)^n}{3^{n+2}} + \frac{(-1)^n}{6^{n+2}}) \cdot z^n \qquad 0 < z < 6$$

Отсюда видим, что в кольце $0 < z < 6$ разложение в ряд Лорана имеет вид:

$$\frac{3z+36}{z^2(z+3)(z-6)} = \frac{1}{6z} - \frac{2}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \quad (\frac{(-1)^n}{3^{n+2}} + \frac{(-1)^n}{6^{n+2}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$

$$\begin{cases} 0, \quad n \leq -3 \\ -2, \quad n = 2 \\ -\frac{1}{3} \quad n = -1 \\ \frac{(-1)^n}{3^{n+2}} + \frac{1}{6^{n+2}} \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Разложим теперь $\frac{1}{(1+\frac{z}{3})}$ в окрестности ∞. Очевидно, эта функция голоморфна в кольце $|z| > 3$. Поэтому преобразуем её так:

$$\frac{1}{(1+\frac{z}{3})} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{(1+\frac{3}{z}} \qquad |z| > 3 \quad |\frac{3}{z}| < 1$$

$$\frac{1}{1+\frac{3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n (\frac{3}{z})^n$$

$$\frac{1}{3(z+3)} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{(1+\frac{3}{z}} = \frac{1}{3z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n (\frac{3}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n \cdot \frac{3^{n-1}}{z^{n+1}} = n+1 = n' = \sum_{n=0}^{\infty} \quad \sum_{n'=-\infty}^{-1} \quad \frac{(-1)^{n'+1}}{3^{n'+2}} \cdot z^{n'}$$

Разложим теперь $\frac{1}{(1+\frac{z}{3})}$ в окрестности ∞. Очевидно, эта функция голоморфна в кольце $|z| > 3$. Поэтому преобразуем её так:

$$\frac{1}{(1+\frac{z}{3})} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{(1+\frac{3}{z}} \qquad |z| > 3 \quad |\frac{3}{z}| < 1$$

$$\frac{1}{1+\frac{6}{z}} = \frac{1}{6z} \cdot \frac{1}{(1-\frac{6}{z})} = \frac{1}{6z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{z^{n+1}} = \sum_{n'=-\infty}^{-1} \frac{1}{6^{n+2}} \cdot z^{n'}$$

Оба полученных разложения справедливы в кольце $|z| > 6$. Поэтому в этом кольце имеет место равенство

$$\frac{3z+36}{z^2(z+3)(z-6)} = \frac{1}{6z} - \frac{2}{z^2} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \quad (\frac{(-1)^n}{3^{n+2}} + \frac{1}{6^{n+2}})$$

12 Найти все лорановское разложение данной функции по степеням $z - z_0$: $f(z) = \frac{z-2}{(z+1)\cdot(z+3)}$, $z_0 = -2 - i$

Решение:

$$\frac{1}{z \cdot (1+\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n \cdot (\frac{1}{z})^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n \cdot \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^{n+1} \cdot z^n$$

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \quad (-1)^{n+1} \cdot z^n, \qquad |z| > 0$$

$$\frac{z-2}{(z+1)(z-3)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z-3)} = \frac{1}{4} = (\frac{3}{(z+1)} + \frac{1}{(z-3)})$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \quad \frac{1}{4}(\frac{3 \cdot (-1)^n}{(1+z_0)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(z_0-3)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4}(\frac{(-1)^{n+1}}{(1+z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \quad \frac{(-1)^{n+1}}{4(z_0-3)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n$$

$$I: \quad \{z: \quad 0 < |z-z_0| < \sqrt{2}$$

$$II: \quad \{z: \quad \sqrt{2} < |z-z_0| < \sqrt{26}$$

$$III: \quad \{z: \quad \sqrt{26} < |z-z_0| < \infty$$

$$VI: \quad \{z: \quad 0 < |z-z_0| > \sqrt{26}$$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+z_0+z-z_0} = \frac{1}{(1+z_0)(1+\frac{z-z_0}{1+z_0}} = \frac{1}{(1+z_0)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n \cdot (\frac{z-z_0}{1+z_0})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \quad \frac{(-1)^n}{(1+z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n$$

$$I: \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \quad \frac{(-1)^n}{(1+z_0)^n} \cdot (z-z_0)^n = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{\frac{1+f_0}{z-z_0}}$$

$$\frac{1}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n (\frac{1+z_0}{z-z_0})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n \cdot (1+z_0)^n \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$|\frac{1+z_0}{z-z_0}| < 1 \implies \quad |z-z_0| > |1+z_0| = \sqrt{2}$$

$$n+1 = -n' \quad n = -(n'+1)$$

$$\sum_{n'=-1}^{-\infty} \quad \frac{(-1)^{n'+1}}{(1+z_0)^{n'+1}} \cdot (z-z_0)^n$$

$$\frac{z-2}{(z+1)(z-3)} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \quad \frac{(-1)^{n+1}}{(1+z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n \qquad |1+z_0| > 1$$

$$\frac{1}{(z_0-3)(1+\frac{z-z_0}{z_0-3}} = \frac{1}{z_0-3} \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n (\frac{z-z_0}{z_0-3})^3$$

$$|\frac{z-z_0}{z_0-3}| < 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z_0-3)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n$$

$$|z-z_0| < |z_0-3| = |-5-i| = \sqrt{26}$$

$$\frac{1}{(z-z_0)\cdot(1+\frac{z_0-3}{z-z_0}} = \frac{1}{(z-z_0)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n \cdot (\frac{z_0-3}{z-z_0})^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n \cdot (z_0-3)^n \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \quad \frac{(-1)^{n+1}}{(z_0-3)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n$$

$$\frac{1}{z_0-3} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \quad \frac{(-1)^{n+1}}{(z_0-3)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n$$

13 Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0: $\quad f(z) = ze^{\frac{z}{z-4}}, z_0 = 4$

Решение:

$$f(z) = ze^{\frac{z}{z-4}}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\frac{z-4+4}{z-4} = 1 + \frac{4}{z-4}$$

$$((z-4)+4)e^{1+\frac{4}{z-4}} = e((z-4)+4)e^{\frac{4}{z-4}} = e((z-4)+4)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!(z-4)^n}$$

Раскроем скобки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e4^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z-4)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e4^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{(z-4)^n} = e(z-4) + 4e + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e4^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z-4)^n} + 4e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e4^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{(z-4)^n} =$$

$$= 8e + e(z-4) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e(z-4)^n}{(1-n)!4^{n-1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e4^{n-1}(z-4)^n}{(-n)!} = 8e + e(z-4) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e}{4^{n-1}} \left(\frac{1}{(1-n)!} + \frac{1}{(-n)!} \right) (z-4)^n$$

z_0 - СОТ

Ответ: $f(z) = ze^{\frac{z}{z-5}} = 8e + e(z-4) + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \frac{e}{4^{n-1}} \left(\frac{1}{(1-n)!} + \frac{1}{(-n)!} \right) (z-4)^n$

14 Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции: $f(z) = \frac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}$

Решение:

Найдем степенные ряды для $\cos z^3$ и $\sin z$:

Для $\cos z^3$, мы имеем:

$$\cos z^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z^3)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{6n}$$

Для $\sin z$, мы имеем:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Заменим эти ряды в данной функции:

$$f(z) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{6n} - 1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} - z + \frac{z^3}{6}}$$

Упростим выражение:

$$f(z) \approx \frac{-z^3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{6n} - 1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} - z + \frac{z^3}{6}}$$

Когда z приближается к 0, высшие порядковые члены в рядах приближаются к 0. Поэтому при анализе поведения функции вблизи $z = 0$ с учетом только доминирующих членов:

$$\lim_{z \to 0} f(z) \approx \frac{-z^3}{-\frac{z^3}{6}} = 6$$

Так как предел не равен 0 или ∞, особая точка $z = 0$ функции $f(z) = \frac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}$

15 Для данной функции найти все изолированные особые точки и определить их тип: $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin \frac{1}{z}}$

Решение:

Изучим функцию

$$f(z) : [f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin \frac{1}{z}}]$$

Теперь рассмотрим анализ точек разрыва в функции (f(z)):

Точки, где знаменатель равен нулю:

$$\sin \frac{1}{z} = 0][\frac{1}{z} = n\pi, \text{ где } n \in \mathbb{Z}][z_n = \frac{1}{n\pi}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

Таким образом, точки $z_n = \frac{1}{n\pi}$ являются особыми точками.

Определим тип каждой особой точки:

$$\lim_{z \to z_n} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin \frac{1}{z}}$$

Проведем анализ предела, чтобы определить тип каждой особой точки

$$(z_n = \frac{1}{n\pi}) : [\lim_{z \to \frac{1}{n\pi}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin \frac{1}{z}} = \lim_{z \to \frac{1}{n\pi}} \frac{e^{n\pi}}{\sin n\pi} = \infty]$$

Следовательно, точки $z_n = \frac{1}{n\pi}$ являются полюсами первого порядка.

Ответ: Все изолированные особые точки функции $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin \frac{1}{z}}$ - целочисленные значения $z_n = \frac{1}{n\pi}$, где $n \in \mathbb{Z}$, их тип - полюс первого порядка.