

# ИДЗ №2

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02-03-01сст

## 1 Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin z(z-\pi)} dz$$

### Решение:

Особые точки:  $z = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  В рассматриваемую область попадают только точки  $z = \pi$ ,  $z = 2\pi$  Точка  $z = \pi$  является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow \pi} [f(z)(z - \pi)] = \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{(z - \pi)z(z + \pi)}{\sin z(z - \pi)} = \left[ \frac{t = z - \pi}{z = t + \pi} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} = \frac{t(t + \pi) \cdot (t + 2\pi)}{t \cdot \sin(t - \pi)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t + \pi)(t + 2\pi)}{(t - \pi)} = \frac{\pi \cdot 2\pi}{-\pi} = -2\pi \end{aligned}$$

Точка  $z = 2\pi$  является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_2} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2\pi} [f(z)(z - 2\pi)] = \lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{(z - 2\pi)z(z + \pi)}{\sin z(z - \pi)} = \left[ \frac{t = z - 2\pi}{z = t + 2\pi} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} = \frac{t(t + 2\pi) \cdot (t + 3\pi)}{t \cdot \sin(t - \pi)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t + \pi)(t + 2\pi)}{(t - \pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t + 2\pi) \cdot (t + 3\pi)}{(t - \pi)} = \frac{2\pi \cdot 3\pi}{-\pi} = -6\pi \\ \oint_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin z(z-\pi)} dz &= 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{z_i} f(z) = 2\pi i \cdot (-2\pi - 6\pi) = 2\pi i(-8\pi) = -16\pi^2 i \end{aligned}$$

**Ответ:**  $-16\pi^2 i$

## 2 Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=2} z^2 \sin \frac{1}{z^2} dz$$

### Решение:

У этой функции одна особая точка:  $z = 0$ . Необходимо использовать разложение в ряд Лорана в окрестности вышеуказанной точки, чтобы непосредственно определить ее тип:

$$z^2 \sin \frac{1}{z^2} = z^2 \left( \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \dots \right) = 1 - \frac{1}{3!z^4} + \frac{1}{5!z^8} - \dots$$

Главная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это - существенная особая точка. Тогда ее вычет находится, как:

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

Пользуясь основной теоремой Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=2} z^2 \sin \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i \cdot \left( -\frac{1}{6} \right) = -\frac{2\pi i}{6}$$

Ответ:  $-\frac{2\pi i}{6}$

### 3 Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch}(2z) - 1 - 2z}{z^4 \sin \frac{2\pi z}{3}} dz$$

Решение:

Несмотря на то, что особыми точками этой функции  $z = \frac{3ik}{2}$ , в непосредственный контур попадает только лишь  $z = 0$ .

Далее необходимо найти непосредственный тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch} 2z - 1 - 2z^2}{z^4 \sin \frac{2\pi z}{3}} = \frac{g(z)}{f(z)}$$

$$g(z) = \operatorname{ch} 2z - 1 - 2z^2, \quad h(z) = z^4 \sin \frac{2\pi z}{3}$$

Заметим, что  $z = 0$  представляет собой простой полюс. Тогда, можно использовать правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} [f(z)z] &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2z - 1 - 2z^2}{z^3 \sin \frac{2\pi z}{3}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{ch} 2z - 4z}{3z^2 \sin \frac{2\pi z}{3} + \frac{2}{3} 4\pi z^3 \cos \frac{2\pi z}{3}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{8 \operatorname{ch} 2z - 4}{(6 - 4\pi^2 z^2) \sin \frac{2\pi z}{3} + (12\pi z - \frac{8}{27}\pi^3 z^3) \cos \frac{2\pi z}{3}} = \frac{16}{16\pi} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch}(2z) - 1 - 2z}{z^4 \sin \frac{2\pi z}{3}} dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{2}{\pi} = 4i$$

Ответ:  $4i$

### 4 Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z-2i|=2} \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} - \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} + 1} dz$$

Решение:

Необходимо разбить имеющийся интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint_{|z-2i|=2} \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} dz - \oint_{|z-2i|=2} \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} + 1} dz$$

Для начала воспользуемся вычетами для нахождения первого интеграла:

$$\oint_{|z-2i|=2} \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки  $z = 1 + 2i$  и  $z = 3 + 2i$ . При этом точка  $z = 3 + 2i$  не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.

Точка  $z = 1 + 2i$  является полюсом второго порядка. Необходимо найти вычет в этой точке:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=1+2i} f_1(z) &= \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{2(z-1-2i)^2 \sin \frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2+4i}}{(z-3-2i)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+2i} \left[ \frac{(1-2i)\pi}{5(z-3-2i)} \cdot \cos \frac{(1-2i)\pi z}{10} - \frac{2}{(z-3-2i)^2} \cdot \sin \frac{(1-2i)\pi z}{10} \right] = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\oint_{|z-2i|=2} \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=1+2i} f_1(z) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

Теперь необходимо рассмотреть второй интеграл:

$$\oint_{|z-2i|=2} \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} + 1} dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\frac{\pi z}{2}} + 1 = 0 \rightarrow e^{\frac{\pi z}{2}} = -1 e^{\frac{\pi z}{2}} \rightarrow \frac{2\pi i}{2} = \ln(-1) = \pi i \rightarrow z = 2i + 2ik, k \in \mathbb{Z}$$

Из этих точек только одна охвачена контуром  $|z-2i|=2$  и должна приниматься во внимание. Эта точка  $z = 2i$ , являющаяся простым полюсом. Найдём вычет в этой точке, пользуясь правилом Лопиталя:

$$\operatorname{res}_{z=2i} f_2(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\pi(z-2i)}{e^{\frac{\pi z}{2}} + 1} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} + 1} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2} e^{\pi i}} = \frac{2}{e^{\pi i}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\oint_{|z-2i|=2} \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} + 1} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=1+2i} f_2(z) = 2\pi i \cdot (-2) = -4\pi i$$

$$\begin{aligned} \oint_{|z-2i|=2} \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} - \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} + 1} dz &= \oint_{|z-2i|=2} \frac{2 \sin \frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} dz - \oint_{|z-2i|=2} \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} + 1} dz = \\ &= -\pi i + 4\pi i = 3\pi i \end{aligned}$$

**Ответ:**  $3\pi i$

## 5 Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2} \sin t + 3}$$

**Решение:**

Преобразуем в контурный интеграл, используя следующие преобразования:

$$z = e^{\pi i}; \quad \cos t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right); \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right); \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t), \quad dt = \oint_{|z|=1} F(z), \quad dz$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2} \sin t + 3} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{\sqrt{2}}{t} \left( z - \frac{1}{z} \right) + 3} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{2}(z^2 - 1) + 3iz} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{2}(z + i\sqrt{2})(z + \frac{i}{\sqrt{2}})}$$

Таким образом, подынтегральная функция имеет 2 особые точки:  $z = -i\sqrt{2}$ ;  $z = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

Точка  $z = -i\sqrt{2}$  не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка  $z = \frac{-1}{\sqrt{2}}$  является простым полюсом. Необходимо вычислить вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z=\frac{-1}{\sqrt{2}}} f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}}} \left[ f(z) \left( z + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right] = \lim_{z \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}(z + i\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}(\frac{-i}{\sqrt{2}} + i\sqrt{2})} = -i$$

По основной теореме Коши о вычетах получаем:

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{2}(z + \frac{i}{\sqrt{2}})(z + i\sqrt{2})} = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z) = 2\pi i \cdot (-i) = 2\pi$$

Ответ:  $2\pi$

## 6 Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6} + \sqrt{5} \cos t)^2}$$

Решение:

Преобразуем в контурный интеграл, используя следующие преобразования:

$$z = e^{\pi i}; \quad \cos t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right); \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right); \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t), \quad dt = \oint_{|z|=1} F(z), \quad dz$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6} + \sqrt{5} \cos t)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{(\sqrt{6} + \frac{\sqrt{5}}{2}(z + \frac{1}{z}))^2} = \oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i(2\sqrt{6}z + \sqrt{5}(z^2 + 1))^2} = \oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{i \left[ \sqrt{5}(z - \frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{5}})(z + \frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{5}}) \right]^2}$$

Таким образом, подынтегральная функция имеет 2 особые точки:  $z = \frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}$ ;  $z = \frac{(-\sqrt{6}-1)}{\sqrt{5}}$

Точка  $z = \frac{(-\sqrt{6}-1)}{\sqrt{5}}$  не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка  $z = \frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}$  является полюсом второго порядка. Необходимо вычислить вычет в этой точке:

$$\operatorname{res}_{z=\frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}} f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}} \frac{d}{dz} \left[ f(z) \left( z - \frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}} \right)^2 \right] = \lim_{z \rightarrow \frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}} \frac{d}{dz} \frac{4z}{i \left[ \sqrt{5}(z + \frac{(\sqrt{6}+1)}{\sqrt{5}})^2 \right]} =$$

$$\frac{4i}{5i} \cdot \lim_{z \rightarrow \frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z + \frac{(\sqrt{6}+1)}{\sqrt{5}})^2} = \frac{4i}{5i} \cdot \lim_{z \rightarrow \frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}} \left[ -5 \frac{z\sqrt{5} - 1 - \sqrt{6}}{(z\sqrt{5} + 1 + \sqrt{6})^3} \right] = -\frac{4}{i} \cdot \frac{1 - \sqrt{6} - 1 - \sqrt{6}}{(1 - \sqrt{6} + 1 + \sqrt{6})^3} = -\frac{4}{i} \cdot \frac{-2\sqrt{6}}{2^3} = \frac{\sqrt{6}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах получаем:

$$\oint_{|z|=1} \frac{4zdz}{\sqrt{5} \left( z - \frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \right) \left( z + \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{5}} \right)} = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{6}}{i} = 2\pi\sqrt{6}$$

Ответ:  $2\pi\sqrt{6}$

## 7 Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 5)^2}$$

Решение:

Применяем формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_m \operatorname{res} R(z)$$

Сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ . Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 5)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + 5)^2(z^2 + 1)^2}$$

Особые точки:

$$\begin{aligned} z = i\sqrt{5} \quad (\operatorname{Im} z > 0); \quad z = -i\sqrt{5} \quad (\operatorname{Im} z < 0) \\ z = i \quad (\operatorname{Im} z > 0); \quad z = -i \quad (\operatorname{Im} z < 0) \end{aligned}$$

Точка  $z = i$  является полюсом второго порядка и вычет в ней равен:

$$\operatorname{res}_{z=i} f(x) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [f(z)(z-i)^2] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{(z+i)^2(z^2+5)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left[ \frac{-2(3z^2+5+2iz)}{(2+i)^3(z^2+5)^3} \right] = 0$$

Точка  $z = i\sqrt{5}$  является полюсом второго порядка и вычет в ней равен:

$$\operatorname{res}_{z=i\sqrt{5}} f(x) = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{5}} \frac{d}{dz} [f(z)(z-i\sqrt{5})^2] = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{5}} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{(z+i\sqrt{5})^2(z^2+1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{5}} \frac{-2(3z^2+1+2\sqrt{5}iz)}{(z+i\sqrt{5})^3(z^2+1)^3} = -\frac{3i\sqrt{5}}{800}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2} = 2\pi i \left( -\frac{3i\sqrt{5}}{800} \right) = \frac{3\pi\sqrt{5}}{400}$$

**Ответ:**  $\frac{3\pi\sqrt{5}}{400}$

## 8 Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2z + 17}, dx$$

**Решение:**

Воспользуемся формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx = \operatorname{Re} \left[ 2\pi i \sum_m \operatorname{res}_{z_m} R(z) e^{i\lambda z} \right], \lambda > 0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы. Необходимо найти  $z_m$ :

$$x^2 - 2z + 17 = 0 \rightarrow z_{1,2} = 1 \pm 4i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ . Из этого следует  $z_m = \{1 + 4i\}$  Это особая точка является полюсом. Необходимо найти в ней вычет:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=1+4i} R(z) e^{i\lambda z} &= \lim_{z \rightarrow 1+4i} \frac{z(z-1-4i)}{z^2-2z+17} \cdot e^{iz} = \lim_{z \rightarrow 1+4i} \frac{z}{z-1+4i} \cdot e^{iz} = 1 + 4i \cdot 1 + 4i - 1 + 4ie^{i(1+4i)} = \\ &= \frac{1+4i}{8i} \cdot e^{i-3} = \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{8} \right) e^{-4} (\cos 1 - i \sin 1) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx = \operatorname{Re} \left[ 2\pi i \sum_m \operatorname{res}_{z_m} R(z) e^{i\lambda z} \right] = \frac{\pi}{4} e^{-4} \cos 1 + \pi e^{-4} \sin 1$$

**Ответ:**  $\frac{\pi}{4} e^{-4} \cos 1 + \pi e^{-4} \sin 1$

## 9 Найти оригинал по заданному изображению: $\frac{1}{p(p^3+1)}$

**Решение:**

Необходимо представить выражение, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(p^3+1)} &= \frac{1}{p(p-1)(p^2-p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2-p+1} = \frac{Ap^3+A+Bp^3-Bp^2+Bp+Cp^3+Cp^2+Dp^2+Dp}{p(p+1)(p^2-p+1)} = \\ &= \frac{(A+B+C)p^3+(-B+C+D)p^2+(B+D)p+A}{p(p+1)(p^2-p+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -B+C+D=0 \\ B+D=0 \\ A=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=-\frac{2}{3} \\ D=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(p^3+1)} &= \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{p^2-p+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^2-p+1} \\ \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{p^2-p+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^2-p+1} &= \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{(p-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{p-\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} &\longrightarrow 1 - \frac{1}{3}e^{-1} - \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t\end{aligned}$$

**Ответ:**  $1 - \frac{1}{3}e^{-1} - \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$

**10 Найти решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие условиям:  $y'' - 4y = \operatorname{th}^2 2t$**

**Решение:**

$$p^2 y(p) - pC_1 - C_2 - 4 \cdot \bar{y}(p) = 4 \cdot \bar{f}(p) \longrightarrow (p^2 - 4) \cdot \bar{y}(p) = \bar{f}(p) + pC_1 + C_2$$

$$\bar{y}(p) = \frac{\bar{f} + pC_1 + C_2}{p^2 - 4} = \frac{\bar{f}(p)}{p^2 - 4} + C_1 \cdot \frac{p}{p^2 - 4} + \frac{C_2}{2} \cdot \frac{2}{p^2 - 4}$$

$$y(t) = C_1 \cdot \operatorname{ch} 2t + \frac{C_2}{2} \operatorname{sh} 2t$$

$$\frac{\bar{f}(p)}{p^2 - 4} = \frac{1}{2}(\bar{f}(p) \cdot \frac{2}{p^2 - 4}) = \frac{1}{2} \cdot f(t) * \operatorname{sh} 2t$$

$$\int_0^t \operatorname{th} 2\tau \cdot \operatorname{sh} 2(t-\tau), d\tau = \int_0^t \operatorname{th}^2 2\tau (\operatorname{sh} 2t + \operatorname{ch} 2\tau - \operatorname{ch} 2t \cdot \operatorname{sh} 2\tau), d\tau = \operatorname{sh} 2t \int_0^t \frac{\operatorname{sh}^2 2\tau}{\operatorname{ch} 2\tau} - \operatorname{ch} 2t \int_0^t \frac{\operatorname{sh}^3 2\tau}{\operatorname{ch}^3 2\tau}, dt$$

$$\int_0^t \frac{\tanh(2\tau) \cdot \sinh(2(t-\tau))}{2}, d\tau$$

$$u = \tanh(2\tau) \quad dv = \sinh(2(t-\tau))$$

$$= \frac{\sinh(2t)}{2} - \int_0^t \frac{\sinh^2(2\tau)}{\cosh(2\tau)}, d\tau = \frac{\sinh(2t)}{2} - \int_0^t \frac{1}{2} (\cosh(2\tau) - 1), d\tau = \frac{\sinh(2t)}{2} - \left[ \frac{\sinh(2\tau)}{4} - \frac{\tau}{2} \right]_0^t$$

$$= \frac{\sinh(2t)}{2} - \left( \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} \right) = \frac{\sinh(2t)}{4} + \frac{t}{2}$$

**Ответ:**  $\frac{\sinh(2t)}{4} + \frac{t}{2}$

**11 Операционным методом решить задачу Коши  $y'' - 9y = \sin t - \cos t$ ,  $y(0) = -3$ ,  $y'(0) = 2$**

**Решение:**

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) - 9Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$p^2 Y(p) + 3p + 2 - 9Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$(p^2 - 9)Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{p}{p^2 + 1} - 3p - 2$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 - 9)} - \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 - 9)} - \frac{3p}{(p^2 - 9)} - \frac{2}{(p^2 - 9)}$$

Необходимо найти оригинал  $y(t)$ :

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 - 9)} - \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 - 9)} - \frac{3p}{(p^2 - 9)} - \frac{2}{(p^2 - 9)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{p^2-9} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{p^2-9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{p^2+1} - \frac{3p}{p^2-9} - \frac{2}{p^2-9} = \\
&= -\frac{19}{10} \cdot \frac{1}{p^2-9} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{31}{10} \cdot \frac{p}{p^2-9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{p^2+1} = -\frac{19}{30} \cdot \frac{3}{p^2-9} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{31}{10} \cdot \frac{p}{p^2-9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{p^2+1} \rightarrow \\
&\rightarrow y(t) = -\frac{19}{30} \cdot \operatorname{sh} 3t - \frac{1}{10} \cdot \sin t - \frac{31}{10} \cdot \operatorname{ch} 3t + \frac{1}{10} \cdot \cos t
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $y(t) = -\frac{19}{30} \cdot \operatorname{sh} 3t - \frac{1}{10} \cdot \sin t - \frac{31}{10} \cdot \operatorname{ch} 3t + \frac{1}{10} \cdot \cos t$

**12 Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданному начальному условию**

$$\begin{cases} x' = 3x + 2 & x(0) = -1 \\ y' = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$$

**Решение:**

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} p\bar{x}(p) = 3\bar{x}(p) + 2\frac{1}{p} \\ p\bar{y}(p) = \bar{x}(p) + 2\bar{y}(p) \end{cases} \\
&\begin{cases} (p-3) \cdot \bar{x}(p) = \frac{2}{p} \\ \bar{x}(p) + (2-p) \cdot \bar{y}(p) = 0 \end{cases} \\
&\frac{2}{p(p-3)(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p-2} \\
&A + B + C = 0 \quad \rightarrow \quad -5A - 2B - 3C = 0 \quad \rightarrow \quad 6A = 2 \\
&\bar{x}(p) = \frac{2}{p(p-3)} = \left( \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p} \right) \cdot \frac{1}{2} \\
&\bar{y}(p) = +\frac{2}{p \cdot (p-3) \cdot (p-2)} = \frac{1}{3p} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-2}
\end{aligned}$$