# ИДЗ №2

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02-03-01сцт

## 1 Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin z(z-\pi)}\,dz$$

### Решение:

Особые точки: $z = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ В рассматриваемую область попадают только точки $z = \pi, \quad z = 2\pi$ Точка $z = \pi$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to\pi} [f(z)(z-\pi)] = \lim_{z\to\pi} \frac{(z-\pi)z(z+\pi)}{\sin z(z-\pi)} = \begin{bmatrix} t = z-\pi \\ z = t+\pi \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} = \frac{t(t+\pi)\cdot(t+2\pi)}{t\cdot\sin(t-\pi)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(t+\pi)(t+2\pi)}{(t-\pi)} = \frac{\pi\cdot 2\pi}{-\pi} = -2\pi$$

Точка $z = 2\pi$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to 2\pi} [f(z)(z-2\pi)] = \lim_{z\to 2\pi} \frac{(z-2\pi)z(z+\pi)}{\sin z(z-\pi)} = \begin{bmatrix} t = z-2\pi \\ z = t+2\pi \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} = \frac{t(t+2\pi)\cdot(t+3\pi)}{t\cdot\sin(t-\pi)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(t+\pi)(t+2\pi)}{(t-\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{(t+2\pi)\cdot(t+3\pi)}{(t-\pi)} = \frac{2\pi\cdot 3\pi}{-\pi} = -6\pi$$

$$\oint\limits_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin z(z-\pi)}\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{i=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_i} f z = 2\pi i\cdot(-2\pi-6\pi) = 2\pi i(-8\pi) = -16\pi^2 i$$

**Ответ:** $-16\pi^2 i$

## 2 Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} z^2 \sin\frac{1}{z^2}\,dz$$

### Решение:

У этой функции одна особая точка: z = 0. Необходимо использовать разложение в ряд Лорана в окресности вышеуказанной точки, чтобы непосредственно определить ее тип:

$$z^2\sin\frac{1}{z^2} = z^2\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \ldots\right) = 1 - \frac{1}{3!z^4} + \frac{1}{5!z^8} - \ldots$$

Главная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это - существенная особая точка. Тогда ее вычет находится, как:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

Пользуясь основной теоремой Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=2} z^2\sin\frac{1}{z^2}\,dz = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{2\pi i}{6}$$

**Ответ:** $-\frac{2\pi i}{6}$

## 3 Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch}(2z)-1-2z}{z^4 \sin\frac{2\pi z}{3}}\,dz$$

### Решение:

Несмотря на то, что осбыми точками этой функции $z = \frac{3ik}{2}$, в непосредственный контур попадает только лишь $z = 0$.
Далее необходимо найти непосредтсвенный тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch}2z - 1 - 2z^2}{z^4 \sin\frac{2\pi z}{3}} = \frac{g(z)}{f(z)}$$

$$g(z) = \operatorname{ch}2z - 1 - 2z^2, \qquad h(z) = z^4 \sin\frac{2\pi z}{3}$$

Заметим, что $z = 0$ представляет собой простой полюс. Тогда, можно использоавать правило Лапиталя:

$$\lim_{z\to 0}[f(z)z] = \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{ch}2z - 1 - 2z^2}{z^3 \sin\frac{2\pi z}{3}} = \lim_{z\to 0}\frac{2\operatorname{ch}2z - 4z}{3z^2\sin\frac{2\pi z}{3} + \frac{2}{3}4\pi z^3\cos\frac{2\pi z}{3}} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{8\operatorname{ch}2z - 4}{(6-4\pi^2 z^2)\sin\frac{2\pi z}{3} + (12\pi z - \frac{8}{27}\pi^3 z^3)\cos\frac{2\pi z}{3}} = \frac{16}{16\pi} = \frac{1}{\pi}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch}(2z)-1-2z}{z^4 \sin\frac{2\pi z}{3}}\,dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n} res f(z) = 2\pi i\cdot\frac{2}{\pi} = 4i$$

**Ответ:** $4i$

## 4 Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} - \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}\,dz$$

### Решение:

Необходимо разбить имеющийся интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}\,dz - \oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}\,dz$$

Для начала воспользуемся вычетами для нахождения первого интеграла:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}\,dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки $z = 1+2i$ и $z = 3+2i$. При этом точка $z = 3+2i$ не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается.
Точка $z = 1+2i$ является полюсом второго порядка. Необходимо найти вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=1+2i} f_1(z) = \lim_{z\to 1+2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{2(z-1-2i)^2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}\right] = \lim_{z\to 1+2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-3-2i)}\right] =$$

$$\lim_{z\to 1+2i}\left[\frac{(1-2i)\pi}{5(z-3-2i}\cdot\cos\frac{(1-2i)\pi z}{10} - \frac{2}{(z-3-2i)^2}\cdot\sin\frac{(1-2i)\pi z}{10}\right] = -\frac{1}{2}$$

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}\,dz = 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=1+2i} f_1(z) = 2\pi z\cdot(-\frac{1}{2}) = -\pi i$$

Теперь необходимо рассмотреть второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}\,dz$$

Чтобы найти особые точки подынтегральной функции, следует решить уравнение:

$$e^{\frac{\pi z}{2}}+1=0 \to e^{\frac{\pi z}{2}} = -1 e^{\frac{\pi z}{2}} \to \frac{2\pi i}{2} = \ln(-1) = \pi i \to z = 2i+2ik, k\in\mathbb{Z}$$

Из этих точек только одна охвачена контуром $|z-2i|=2$ и должна приниматься во внимание. Эта точка $z=2i$, являющаяся простым полюсом. Найдем вычет в этой точке, пользуясь правилом Лопиталя:

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f_2(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{\pi(z-2i)}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1} = \lim_{z\to 2i}\frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}e^{\pi i}} = \frac{2}{e^{\pi i}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}\,dz = 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=1+2i} f_2(z) = 2\pi i\cdot(-2) = -4\pi i$$

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} - \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}\,dz = \oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}\,dz - \oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}\,dz =$$

$$= -\pi i + 4\pi i = 3\pi i$$

**Ответ:** $3\pi i$

## 5 Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3}$$

### Решение:

Преобразуем в контурный интеграл, используя следующие преобразования:

$$z = e^{\pi};\quad \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right);\quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right);\quad dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t),\ dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z),\ dz$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{\sqrt{2}}{t}(z-\frac{1}{z})+3} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{2}(z^2-1)+3iz} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{2}(z+i\sqrt{2})(z+\frac{i}{\sqrt{2}})}$$

Таким образом, подынтегральная функция имеет 2 особые точки: $z=-i\sqrt{2}$; $\quad z=\frac{-1}{\sqrt{2}}$
Точка $z=-i\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.
Точка $z=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ является простым полюсом. Необходимо вычислить вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}} f(z) = \lim_{\frac{i}{\sqrt{2}}}\left[f(z)(z+\frac{i}{\sqrt{2})}\right] = \lim_{\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{2}(z+i\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}(\frac{-i}{\sqrt{2}}+i\sqrt{2})} = -i$$

По основной теореме Коши о вычетах получаем:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{2}(z+\frac{i}{\sqrt{2}})(z+i\sqrt{2})} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n} resf(z) = 2\pi i\cdot(-i) = 2\pi$$

**Ответ:** $2\pi$

# 6 Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t)^2}$$

## Решение:

Преобразуем в контурный интеграл, используя следующие преобразования:

$$z = e^{\pi}; \quad \cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right); \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right); \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t),\ dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z),\ dz$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t)^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{(\sqrt{6}+\frac{\sqrt{5}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{4zdz}{i(2\sqrt{6}z+\sqrt{5}(z^2+1))^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{4zdz}{i\left[\sqrt{5}(z-\frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{5}})(z+\frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{5}})\right]^2}$$

Таким образом, подынтегральная функция имеет 2 особые точки: $z=\frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}; \quad z=\frac{(-\sqrt{6}-1)}{\sqrt{5}}$

Точка $z=\frac{(-\sqrt{6}-1)}{\sqrt{5}}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования.

Точка $z=\frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}$ является полюсом второго порядка. Необходимо вычислить вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}} f(z) = \lim_{z\to\frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}} \frac{d}{dz}\left[f(z)(z-\frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}})^2\right] = \lim_{z\to\frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}} \frac{d}{dz}\frac{4z}{i\left[\sqrt{5}(z+\frac{(\sqrt{6}+1)}{\sqrt{5}})^2\right]} =$$

$$\frac{4i}{5i}\cdot \lim_{z\to\frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}} \frac{d}{dz}\frac{z}{(z+\frac{(\sqrt{6}+1)}{\sqrt{5}})^2} = \frac{4i}{5i}\cdot \lim_{z\to\frac{(1-\sqrt{6})}{\sqrt{5}}} \left[-5\frac{z\sqrt{5}-1-\sqrt{6}}{(z\sqrt{5}+1+\sqrt{6})^3}\right] = -\frac{4}{i}\cdot\frac{1-\sqrt{6}-1-\sqrt{6}}{(1-\sqrt{6}+1+\sqrt{6})^3} = -\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{6}}{2^3} = \frac{\sqrt{6}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах получаем:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{4zdz}{\sqrt{5}\left(z-\frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{5}})(z+\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{5}}\right)} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n} resf(z) = 2\pi i\cdot\frac{\sqrt{6}}{i} = 2\pi\sqrt{6}$$

**Ответ:** $2\pi\sqrt{6}$

# 7 Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$$

## Решение:

Применяем формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_m \operatorname*{res}_{z_m} R(z)$$

Сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $Imz > 0$. Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+5)^2(z^2+1)^2}$$

Особые точки:

$$z = i\sqrt{5} \quad (Imz>0); \quad z=-i\sqrt{5} \quad (Imz<0)$$
$$z = i \quad (Imz>0); \quad z=-i \quad (Imz<0)$$

Точка z = i является полюсом второго порядка и вычет в ней равен:

$$\underset{z=i}{\operatorname{res}} f(x) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[f(z)(z-i)^2\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2(z^2+5)^2}\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{-2(3z^2+5+2iz)}{(2+i)^3(z^2+5)^3}\right] = 0$$

Точка $z = i\sqrt{5}$ является полюсом второго порядка и вычет в ней равен:

$$\underset{z=i\sqrt{5}}{\operatorname{res}} f(x) = \lim_{z\to i\sqrt{5}} \frac{d}{dz}\left[f(z)(z-i\sqrt{5})^2\right] = \lim_{z\to i\sqrt{5}}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i\sqrt{5})^2(z^2+1)^2}\right] = \lim_{z\to i\sqrt{5}}\frac{-2(3z^2+1+2\sqrt{5}iz)}{(z+i\sqrt{5})^3(z^2+1)^3} = -\frac{3i\sqrt{5}}{800}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2} = 2\pi i\left(-\frac{3i\sqrt{5}}{800}\right) = \frac{3\pi\sqrt{5}}{400}$$

**Ответ:** $\frac{3\pi\sqrt{5}}{400}$

## 8 Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2z+17},\ dx$$

### Решение:

Воспользуемся формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx = Re\left[2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{res}} R(z)e^{i\lambda z}\right], \lambda > 0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы. Необходимо найти $z_m$:

$$x^2 - 2z + 17 = 0 \to z_{1,2} = 1 \pm 4i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $Imz > 0$. Из этого следует $z_m = \{1+4i\}$ Это особая точка является полюсом. Необходимо найти в ней вычет:

$$\underset{z=1+4i}{\operatorname{res}} R(z)e^{i\lambda z} = \lim_{z\to 1+4i}\frac{z(z-1-4i)}{z^2-2z+17}\cdot e^{iz} = \lim_{z\to 1+4i}\frac{z}{z-1+4i}\cdot e^{iz} = 1+4i1+4i-1+4ie^{i(1+4i)} =$$

$$= \frac{1+4i}{8i}\cdot e^{i-3} = \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{8}\right)e^{-4}(\cos 1 - i\cos 1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx = Re\left[2\pi i\sum_m \underset{z_m}{\operatorname{res}} R(z)e^{i\lambda z}\right] = \frac{\pi}{4}e^{-4}\cos 1 + \pi e^{-4}\sin 1$$

**Ответ:** $\frac{\pi}{4}e^{-4}\cos 1 + \pi e^{-4}\sin 1$

## 9 Найти оригинал по заданному изображению: $\frac{1}{p(p^3+1)}$

### Решение:

Необходимо представитть выражение, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{p(p^3+1)} = \frac{1}{p(p-1)(p^2-p+1)} = \frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2-p+1} = \frac{Ap^3+A+Bp^3-Bp^2+Bp+Cp^3+Cp^2+Dp^2+Dp}{p(p+1)(p^2-p+1)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)p^3+(-B+C+D)p^2+(B+D)p+A}{p(p+1)(p^2-p+1)}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -B+C+D=0 \\ B+D=0 \\ A=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=-\frac{2}{3} \\ D=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{1}{p(p^3+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{p^2-p+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2-p+1}$$

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{p^2-p+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2-p+1}=\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{p-\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\longrightarrow 1-\frac{1}{3}e^{-1}-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

**Ответ:** $1-\frac{1}{3}e^{-1}-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$

## 10 Найти решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие условиям: $y“-4y=\operatorname{th}^2 2t$

**Решение:**

$$p^2y(p)-pC_1-C_2-4\cdot\overline{y}(p)=4\cdot\overline{f}(p)\longrightarrow(p^2-4)\cdot\overline{y}(p)=\overline{f}(p)+pC_1+C_2$$

$$\overline{y}(p)=\frac{\overline{f}+pC_1+C_2}{p^2-4}=\frac{\overline{f}(p)}{p^2-4}+C_1\cdot\frac{p}{p^2-4}+\frac{C_2}{2}\cdot\frac{2}{p^2-4}$$

$$y(t)=C_1\cdot\operatorname{ch}2t+\frac{C_2}{2}\operatorname{sh}2t$$

$$\frac{\overline{f}(p)}{p^2-4}=\frac{1}{2}(\overline{f}(p)\cdot\frac{2}{p^2-4})=\frac{1}{2}\cdot f(t)*\operatorname{sh}2t$$

$$\int_0^t\operatorname{th}2\tau\cdot\operatorname{sh}2(t-\tau),\ d\tau=\int_0^t\operatorname{th}^2 2\tau(\operatorname{sh}2t+\operatorname{ch}2\tau-\operatorname{ch}2t\cdot\operatorname{sh}2\tau),\ d\tau=\operatorname{sh}2t\int_0^t\frac{\operatorname{sh}^2 2\tau}{\operatorname{ch}2\tau}-\operatorname{ch}2t\int_0^t\frac{\operatorname{sh}^3 2t}{\operatorname{ch}^3 2\tau},dt$$

$$\int_0^t\frac{\tanh(2\tau)\cdot\sinh(2(t-\tau))}{2},d\tau$$

$$u=\tanh(2\tau)\qquad dv=\sinh(2(t-\tau))$$

$$=\frac{\sinh(2t)}{2}-\int_0^t\frac{\sinh^2(2\tau)}{\cosh(2\tau)},d\tau=\frac{\sinh(2t)}{2}-\int_0^t\frac{1}{2}\left(\cosh(2\tau)-1\right),d\tau=\frac{\sinh(2t)}{2}-\left[\frac{\sinh(2\tau)}{4}-\frac{\tau}{2}\right]_0^t$$

$$=\frac{\sinh(2t)}{2}-\left(\frac{\sinh(2t)}{4}-\frac{t}{2}\right)=\frac{\sinh(2t)}{4}+\frac{t}{2}$$

**Ответ:** $\frac{\sinh(2t)}{4}+\frac{t}{2}$

## 11 Операционным методом решить задачу Коши $y“-9y=\sin t-\cos t,\quad y(0)=-3,\quad y‘(0)=2$

**Решение:**

$$p^2Y(p)-py(0)-y‘(0)-9Y(p)=\frac{1}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+1}$$

$$p^2Y(p)+3p+2-9Y(p)=\frac{1}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+1}$$

$$(p^2-9)Y(p)=\frac{1}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+1}-3p-2$$

$$Y(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p^2-9)}-\frac{p}{(p^2+1)(p^2-9)}-\frac{3p}{(p^2-9)}-\frac{2}{(p^2-9)}$$

Необходимо найти оригинал y(t):

$$Y(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p^2-9)}-\frac{p}{(p^2+1)(p^2-9)}-\frac{3p}{(p^2-9)}-\frac{2}{(p^2-9)}=$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p^2-9} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2-9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{3p}{p^2-9} - \frac{2}{p^2-9} =$$

$$-\frac{19}{10}\cdot\frac{1}{p^2-9} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{31}{10}\cdot\frac{p}{p^2-9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1} = -\frac{19}{30}\cdot\frac{3}{p^2-9} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{31}{10}\cdot\frac{p}{p^2-9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1} \to$$

$$\to y(t) = -\frac{19}{30}\cdot\operatorname{sh}3t - \frac{1}{10}\cdot\sin t - \frac{31}{10}\cdot\operatorname{ch}3t + \frac{1}{10}\cdot\cos t$$

**Ответ:** $y(t) = -\frac{19}{30}\cdot\operatorname{sh}3t - \frac{1}{10}\cdot\sin t - \frac{31}{10}\cdot\operatorname{ch}3t + \frac{1}{10}\cdot\cos t$

# 12 Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданному начальному условию

$$\begin{cases} x` = 3x + 2 \qquad x(0) = -1 \\ y` = x + 2y \qquad y(0) = 1\frac{p-2}{p^2-5p+6} \end{cases}$$

**Решение:**

Применяем преобразование Лапласа к обеим уравнениям:

$$sX(s) - x(0) = 3X(s) + 2 \; sY(s) - y(0) = X(s) + 2Y(s)$$

$$X(s) = \frac{s+1}{s(s-3)} \; Y(s) = \frac{2s-5}{s(s-2)(s-3)}$$

Обратное преобразование Лапласа: Выполним обратное преобразование Лапласа для (X(s)) и (Y(s)) с помощью известных таблиц:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}X(s) = 1 - e^{3t} \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(s) = -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{5}{3}e^{3t}$$

**Ответ:** $x(t) = 1 - e^{3t}$, $y(t) = -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{5}{3}e^{3t}$