**Лабораторная работа №3 на тему «Метод квадратного корня».**

**Цель:** Решить систему линейных алгебраических уравнений в виде $Ax = b$ методом квадратного корня.

В частном случае, если исходная матрица $A$ является симметричной и положительно определенной, то LU-разложение матрицы $A$ может быть представимо в виде комбинации матриц: $A = U^T U$, где $U$ – это верхнетреугольная матрица, а матрица $U^T$ – транспонированная нижнетреугольная матрица.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Таким образом в данном методе необходимо найти только одну матрицу U, а вычислив ее, легко можно будет найти транспонированную $U^T$.

**Ход работы:**

1. Находим матрицу $U$ по следующим формулам:
   - Задаем первый элемент $u_{11} = \sqrt{a_{11}}$.
   - При $i = 1$ вычисляем первую строку матрицы $U$: $u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}\ \forall j > 1;$
   - Если $i = j$ находим $u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}\,;$
   - Если $i < j$ находим $u_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_{ii}}$.
2. После нахождения значений матрицы $U$ найти транспонированную $U^T$.
3. Решить СЛАУ в два этапа:
   a) Из системы $U^T y = b$ находим вектор значений $y$;
   b) Вычислив массив «$y$» решаем СЛАУ вида $Ux = y$.
   c) Полученный массив $x$ будет являться решением исходной системы $Ax = b$.
4. Сравнить полученные результаты с точным решением $x^*$ тестовых СЛАУ, по-другому отладить свой алгоритм на тестах, приведенных в таблице 1 (стр. 2).
5. После отладки программы решить две СЛАУ:

$$I. \quad \begin{cases} 5.8x_1 + 0.3x_2 - 0.2x_3 = 3.1 \\ 0.3x_1 + 4.0x_2 - 0.7x_3 = -1.7 \\ -0.2x_1 - 0.7x_2 + 6.7x_3 = 1.1 \end{cases}$$

$$
II. \quad \begin{cases} 4.12x_1 + 0.42x_2 + 1.34x_3 + 0.88x_4 = 11.17 \\ 0.42x_1 + 3.95x_2 + 1.87x_3 + 0.43x_4 = 0.115 \\ 1.34x_1 + 1.87x_2 + 3.20x_3 + 0.31x_4 = 9.909 \\ 0.88x_1 + 0.43x_2 + 0.31x_3 + 5.17x_4 = 9.349 \end{cases}
$$

6. Вывести полученные решения СЛАУ.
7. *Подготовить отчет о выполненной работе.*

*Таблица 1. Тесты.*

| **№** | **Матрица $\boldsymbol{A}$** | **Столбец $\boldsymbol{b}$** | **Точное решение $\boldsymbol{x}^*$** |
|---|---|---|---|
| 1 | $A = \begin{pmatrix} 81 & -45 & 45 \\ -45 & 50 & -15 \\ 45 & -15 & 38 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} 531 \\ -460 \\ 193 \end{pmatrix}$ | $x^* = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ |
| 2 | $A = \begin{pmatrix} 6.25 & -1 & 0.5 \\ -1 & 5 & 2.12 \\ 0.5 & 2.12 & 3.6 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} 7.5 \\ -8.68 \\ -0.24 \end{pmatrix}$ | $x^* = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| 3 | $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 5.4 \\ 5.0 \\ 7.5 \\ 3.3 \end{pmatrix}$ | $x^* = \begin{pmatrix} -6.0978 \\ -2.2016 \\ -6.8011 \\ -8.8996 \\ 0.1998 \end{pmatrix}$ |
| 5 | $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{pmatrix}$ | $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 150 \end{pmatrix}$ | $x^* = \begin{pmatrix} 2.22 \\ 0.55 \\ 1.67 \end{pmatrix}$ |