МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

Отчет
Вариант №4

по дисциплине
«Вычислительная математика»

Направление подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Выполнила студентка
группы Б9122-02.03.01сцт
Винницкая Д. ____________
(ФИО) *(подпись)*

« 31 » октября 20 24 г.

г. Владивосток
2024

1 Цель работы

Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом LU-разложения, а также сравнение полученных результатов с точными решениями для тестовых систем.

2 Постановка задачи

1. Найти матрицы L и U для заданной матрицы A методом LU-разложения.
2. Решить СЛАУ с использованием матриц L и U, сначала для системы $Ly = b$, затем для $Ux = y$.
3. Сравнить результаты с точными решениями для проверки точности метода.

3 Теоретические сведения

Метод LU-разложения позволяет представить матрицу A в виде произведения двух матриц: нижней треугольной L и верхней треугольной U, где $A = LU$. Это разложение используется для упрощения решения системы $Ax = b$.

Формулы для нахождения элементов матриц L и U:

- Для первой строки матрицы U: $u_{1j} = a_{1j}$.
- Для первого столбца матрицы L: $l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}$.
- Для всех $i, j > 1$:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}, \quad \text{если } i \leq j,$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \right), \quad \text{если } i > j.$$

Ход работы

1. Выполнить LU-разложение матрицы A на матрицы L и U.
2. Решить вспомогательную систему $Ly = b$ методом прямой подстановки.
3. Решить систему $Ux = y$ методом обратной подстановки, получив вектор решений x.
4. Сравнить полученные результаты с точными значениями и оценить точность.
5. Провести отладку программы и решить дополнительные СЛАУ

Код программы

```python
import numpy as np

A_main = np.array([
    [1, 2, 1, 4],
    [2, 0, 4, 3],
    [4, 2, 2, 1],
    [-3, 1, 3, 2]
], dtype=float)

b_main = np.array([13, 28, 20, 6], dtype=float)

A_I = np.array([
    [13.14, -2.12, 1.17, 0],
    [-2.12, 6.3, -2.45, 0],
    [1.17, -2.45, 4.6, 0],
    [0, 0, 0, 1]
], dtype=float)

b_I = np.array([1.27, 2.13, 3.14, 0], dtype=float)

A_II = np.array([
    [4.31, 0.26, 0.61, 0.27],
    [0.26, 2.32, 0.18, 0.34],
    [0.61, 0.18, 3.20, 0.31],
    [0.27, 0.34, 0.31, 5.17]
], dtype=float)

b_II = np.array([1.02, 1.00, 1.34, 1.27], dtype=float)

def lu_decomposition(A):
    n = A.shape[0]
    L = np.eye(n)
    U = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(i, n):
            U[i, j] = A[i, j] - sum(L[i, k] * U[k, j] for k in range(i))
        for j in range(i + 1, n):
            L[j, i] = (A[j, i] - sum(L[j, k] * U[k, i] for k in range(i))) / U[i, i]
    return L, U

def forward_substitution(L, b):
    n = L.shape[0]
    y = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        y[i] = (b[i] - sum(L[i, j] * y[j] for j in range(i))) / L[i, i]
    return y
```

```
def backward_substitution(U, y):
    n = U.shape[0]
    x = np.zeros(n)
    for i in range(n - 1, -1, -1):
        x[i] = (y[i] - sum(U[i, j] * x[j] for j in range(i + 1, n))) /
            U[i, i]
    return x

def solve_lu(A, b):
    L, U = lu_decomposition(A)
    y = forward_substitution(L, b)
    x = backward_substitution(U, y)
    return L, U, x

L_main, U_main, x_main = solve_lu(A_main, b_main)
print("Основная система:\n", x_main)

L_I, U_I, x_I = solve_lu(A_I, b_I)
print("Система I:\n", x_I)

L_II, U_II, x_II = solve_lu(A_II, b_II)
print("Система II:\n", x_II)
```

Листинг 1: Реализация LU-разложения

4 Описание

Код состоит из трех основных функций для выполнения LU-разложения и решения системы линейных уравнений методом подстановки. Ниже приводится краткое описание каждой функции.

- **Функция** lu_decomposition(A): Выполняет LU-разложение квадратной матрицы A на нижнюю треугольную матрицу L и верхнюю треугольную матрицу U. Сначала вычисляются элементы U над диагональю, а затем элементы L под диагональю, используя уже найденные значения.
- **Функция** forward_substitution(L, b): Решает вспомогательную систему $Ly = b$ методом прямой подстановки. Поскольку L — нижняя треугольная, решение начинается с верхних элементов и продвигается вниз.
- **Функция** backward_substitution(U, y): Решает систему $Ux = y$ методом обратной подстановки. Так как U — верхняя треугольная матрица, решение начинается с нижнего элемента и продвигается вверх.

Основная часть программы выполняется следующим образом:

1. Производится LU-разложение матрицы A с помощью функции lu_decomposition.
2. Решается система $Ly = b$ с использованием функции forward_substitution.
3. Затем решается система $Ux = y$ с использованием функции backward_substitution.

Полученный вектор x является решением исходной системы $Ax = b$. Метод LU-разложения разбивает решение на два этапа: сначала находится промежуточный вектор y, а затем — конечное решение x.

5 Полученные результаты

В результате выполнения программы были получены следующие выходные данные для основной системы и двух дополнительных систем линейных уравнений (СЛАУ).

Основная система для варианта VI

- **Матрица L:**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1.5 & 1 & 0 \\ -3 & -1.75 & -1.9 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Матрица U:**

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -7.5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

- **Вектор решений x:**

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Система I

- **Матрица L:**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1613 & 1 & 0 & 0 \\ 0.0890 & -0.3795 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Матрица U:**

$$U = \begin{pmatrix} 13.14 & -2.12 & 1.17 & 0 \\ 0 & 5.958 & -2.261 & 0 \\ 0 & 0 & 3.638 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Вектор решений x:**

$$x = \begin{pmatrix} 0.130 \\ 0.800 \\ 1.076 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Система II

- **Матрица L:**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0603 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1415 & 0.0621 & 1 & 0 \\ 0.0626 & 0.1405 & 0.0811 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Матрица U:**

$$U = \begin{pmatrix} 4.31 & 0.26 & 0.61 & 0.27 \\ 0 & 2.3043 & 0.1432 & 0.3237 \\ 0 & 0 & 3.1048 & 0.2517 \\ 0 & 0 & 0 & 5.0872 \end{pmatrix}$$

- **Вектор решений x:**

$$x = \begin{pmatrix} 0.153 \\ 0.358 \\ 0.351 \\ 0.193 \end{pmatrix}$$

6 Заключение

В результате выполнения данной лабораторной работы были получены практические навыки в использовании метода LU-разложения для решения систем линейных алгебраических уравнений. В ходе выполнения данной лабораторной работы были приобретены следующие навыки и умения:

- Выполнение LU-разложения матриц, включая разложение исходной матрицы на нижнюю и верхнюю треугольные матрицы L и U;
- Решение систем линейных уравнений с использованием методов прямой и обратной подстановки, что позволяет упростить процесс вычислений;
- Анализ и оценка точности полученных решений для тестовых систем, а также интерпретация результатов.

Метод LU-разложения зарекомендовал себя как надежный и эффективный способ решения систем линейных уравнений, позволяющий упростить процесс решения за счет разбиения на подзадачи. Этот метод особенно полезен для больших систем, где важна оптимизация вычислений. LU-разложение также позволяет использовать одни и те же матрицы L и U для решения нескольких систем с различными правыми частями, что делает его полезным инструментом в линейной алгебре и численных методах.

Таким образом, метод LU-разложения показал свою ценность как удобный и точный способ нахождения решений для систем линейных уравнений, обеспечивая высокий уровень точности при выполнении вычислений.