Домашняя работа №9
по дисциплине "Дифференциальная геометрия и топология"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

Условие задачи

Найти кривизну и кручение:

1. Окружности
2. Винтовой линии
3. $\vec{\gamma}(t) = \left(t - \sin(t), 1 - \cos(t), 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right), \quad t = \pi$

Решение

Выкладки

Кривизна:

$$k(t) = \frac{\|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\|}{\|\vec{\gamma}'\|^3}.$$

Кручение:

$$\Xi(t) = \frac{(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{\gamma}''')}{\|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\|^2}.$$

1. Окружность

Задана окружность:

$$\vec{\gamma}(t) = (r\cos(t), r\sin(t), c).$$

Производные:

$$\vec{\gamma}'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t), 0),$$
$$\vec{\gamma}''(t) = (-r\cos(t), -r\sin(t), 0),$$
$$\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'' = (0, 0, r^2).$$

Модули:

$$\|\vec{\gamma}'\| = r, \quad \|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\| = r^2.$$

Кривизна: Кривизна вычисляется по стандартной формуле. Для окружности:

$$k(t) = \frac{\|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\|}{\|\vec{\gamma}'\|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Это означает, что кривизна окружности обратна её радиусу r.

Кручение: Так как окружность — двумерная фигура, кручение определяется, но его значение всегда равно нулю:

$$\Xi(t) = 0.$$

Физически это связано с тем, что окружность не имеет третьей координаты для "закручивания"в пространстве.

Таким образом:

- Кривизна окружности равна $\frac{1}{r}$.
- Кручение существует и равно нулю.

2. Винтовая линия

Задана винтовая линия:

$$\vec{\gamma}(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ht)\,.$$

Производные:

$$\vec{\gamma}' = (-r\sin(t), r\cos(t), h)\,,$$
$$\vec{\gamma}'' = (-r\cos(t), -r\sin(t), 0)\,,$$
$$\vec{\gamma}''' = (r\sin(t), -r\cos(t), 0)\,.$$

Векторное произведение:

$$[\vec{\gamma}', \vec{\gamma}''] = \begin{pmatrix} hr\sin(t) \\ -hr\cos(t) \\ r^2 \end{pmatrix}.$$

Модули:

$$\|\vec{\gamma}'\| = \sqrt{r^2+h^2}, \quad \|\vec{\gamma}', \vec{\gamma}''\| = r\sqrt{h^2+r^2}.$$

Кривизна: Кривизна вычисляется как:

$$k(t) = \frac{\|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\|}{\|\vec{\gamma}'\|^3} = \frac{r}{(h^2+r^2)}.$$

Смешанное произведение:

$$(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{\gamma}''') = hr^2.$$

Кручение: Кручение вычисляется как:

$$\Xi = \frac{(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{\gamma}''')}{\|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\|^2} = \frac{h}{h^2+r^2}.$$

Вывод:

- Кривизна винтовой линии равна:
$$k(t) = \frac{r}{h^2+r^2}.$$
- Кручение винтовой линии существует и вычисляется как:
$$\Xi(t) = \frac{h}{h^2+r^2}.$$

3. Пространственная кривая

Задана пространственная кривая:

$$\vec{\gamma}(t) = \left(t - \sin(t), 1 - \cos(t), 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right), \quad t = \pi.$$

Производные:

$$\vec{\gamma}'(t) = \left(1 - \cos(t), \sin(t), 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right),$$
$$\vec{\gamma}''(t) = \left(\sin(t), \cos(t), -\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right),$$
$$\vec{\gamma}'''(t) = \left(\cos(t), -\sin(t), -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

Вычисление в точке $t = \pi$:

$$\vec{\gamma}(\pi) = (\pi, 1+1, 0) = (\pi, 2, 0)\,,$$
$$\vec{\gamma}'(\pi) = (2, 0, 0)\,,$$
$$\vec{\gamma}''(\pi) = (0, 1, -1)\,,$$
$$\vec{\gamma}'''(\pi) = (1, 0, 0)\,.$$

Векторное произведение:

$$\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'' = (0, 2, 2)\,.$$

Модули:

$$\|\vec{\gamma}', \vec{\gamma}''\| = 2\sqrt{2}, \quad \|\vec{\gamma}'\| = 2.$$

Смешанное произведение:

$$(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{\gamma}''') = 0.$$

Кривизна: Кривизна рассчитывается по формуле:

$$k(t) = \frac{\|\vec{\gamma}', \vec{\gamma}''\|}{\|\vec{\gamma}'\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2^3} = 2^{-\frac{3}{2}}.$$

Кручение: Кручение рассчитывается по формуле:

$$\Xi = \frac{(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{\gamma}''')}{\|\vec{\gamma}', \vec{\gamma}''\|^2} = 0.$$

Условие задачи

Доказать, что кривая плоская:

$$\vec{\gamma}(t) = \left(2t, 3t + 4, t^2 - 3\right).$$

Найти уравнение плоскости, в которой лежит эта кривая.

Решение

Способ через нормаль к соприкасающейся |bad|

Найдем базис Френе для данной кривой:

$$\vec{\gamma}(t) = \left(2t, 3t + 4, t^2 - 3\right).$$

Первая производная:

$$\vec{\gamma}'(t) = (2, 3, 2t).$$

Нормируем вектор производной:

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} = \frac{(2, 3, 2t)}{\sqrt{4 + 9 + 4t^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{4t^2 + 13}}, \frac{3}{\sqrt{4t^2 + 13}}, \frac{2t}{\sqrt{4t^2 + 13}}\right).$$

Вторая производная:

$$\vec{v}'(t) = \left(-\frac{8t}{(4t^2 + 13)^{3/2}}, -\frac{12t}{(4t^2 + 13)^{3/2}}, \frac{4}{\sqrt{4t^2 + 13}} - \frac{4t^2}{(4t^2 + 13)^{3/2}}\right).$$

Модуль вектора второй производной:

$$\|\vec{v}'\| = \frac{26}{4t^2\sqrt{13} + 13^{3/2}}.$$

Комментарий: данный способ требует нахождения второго и третьего производных и анализа нормали. Однако он является сложным и неоптимальным для задачи проверки плоскостности, поскольку метод базиса Френе избыточен.

Способ через кручение

Используем кривую:

$$\vec{\gamma}(t) = \left(2t, 3t + 4, t^2 - 3\right).$$

Первая производная:

$$\vec{\gamma}'(t) = (2, 3, 2t).$$

Вторая производная:

$$\vec{\gamma}''(t) = (0, 0, 2).$$

Третья производная:

$$\vec{\gamma}'''(t) = (0, 0, 0).$$

Смешанное произведение:

$$(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{\gamma}''') = 0.$$

Кручение вычисляется как:

$$\Xi = \frac{(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{\gamma}''')}{\|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\|^2}.$$

Поскольку числитель равен нулю, кручение:

$$\Xi = 0.$$

Вывод: кручение равно нулю, следовательно, кривая плоская.

Нахождение соприкасающейся плоскости

Построим плоскость по 3 точкам при $t \in \{-1, 0, 1\}$:

$$\vec{\gamma}(-1) = (-2, 1, -2), \quad \vec{\gamma}(0) = (0, 4, -3), \quad \vec{\gamma}(1) = (2, 7, -2).$$

Уравнение плоскости запишем через определитель:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляем координаты точек:

$$\begin{vmatrix} x + 2 & y - 1 & z + 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель:

$$(x + 2)(3 \cdot 0 - 6 \cdot (-1)) - (y - 1)(2 \cdot 0 - 4 \cdot (-1)) + (z + 2)(2 \cdot 6 - 4 \cdot 3) = 0.$$

Упрощаем:

$$(x + 2)(6) - (y - 1)(-4) + (z + 2)(0) = 0.$$

Далее:

$$6x + 12 + 4y - 4 = 0.$$

Итоговое уравнение плоскости:

$$6x + 4y + 8 = 0.$$

Ответ:

$$3x - 2y + 8 = 0.$$