



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

Отчет Вариант №4

по дисциплине
«Вычислительная математика»

Направление подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Выполнила студентка
группы Б9122-02.03.01сцт
Винницкая Д.

(ФИО)

(подпись)

« 31 » декабря 20 24 г.

**г. Владивосток
2024**

Цель работы

Цель лабораторной работы заключается в нахождении методом простых итераций одного из собственных значений и всех собственных значений симметричной положительно определённой матрицы A методом вращений (Якоби).

Постановка задачи

Рассматривается симметричная положительно определённая матрица A произвольного размера $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Требуется:

1. Реализовать метод простых итераций для нахождения наибольшего собственного значения матрицы A с заданной точностью ε .
2. Реализовать метод вращений Якоби для нахождения всех собственных значений матрицы A .
3. Сгенерировать случайные симметричные положительно определённые матрицы размерностей $n = 3, 5, 7$.
4. Для каждой матрицы исследовать сходимость методов при точностях $\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-7}$.
5. Вывести количество итераций, потребовавшихся для выполнения условий сходимости.
6. Сравнить эффективность методов по количеству итераций.

1 Теоретические сведения

Собственные значения и собственные векторы являются ключевыми понятиями линейной алгебры, которые широко применяются в различных областях науки и техники. Например, в механике и физике они используются для анализа устойчивости систем, в обработке сигналов для фильтрации и декомпозиции данных, в машинном обучении для уменьшения размерности данных, а в численных методах для решения сложных систем уравнений.

Определение собственных значений и собственных векторов

Для квадратной матрицы A размерности $n \times n$ число λ называется собственным значением, если существует ненулевой вектор x такой, что:

$$Ax = \lambda x.$$

Вектор x , удовлетворяющий этому уравнению, называется собственным вектором, соответствующим собственному значению λ . Собственные значения являются корнями характеристического уравнения:

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

где I — единичная матрица того же размера, что и A .

Метод простых итераций

Метод простых итераций (или степенной метод) является численным способом нахождения наибольшего по модулю собственного значения матрицы A . Основные шаги метода включают:

1. Выбор начального приближения для вектора $x^{(0)}$.
2. На каждой итерации вычисляется новый вектор:

$$y^{(k+1)} = Ax^{(k)}.$$

3. Выполняется нормировка вектора:

$$x^{(k+1)} = \frac{y^{(k+1)}}{\|y^{(k+1)}\|}.$$

4. Собственное значение вычисляется как:

$$\lambda^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k+1)T} A \mathbf{x}^{(k+1)}.$$

Процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность ε .

Метод простых итераций эффективен, если наибольшее собственное значение значительно больше по модулю всех остальных собственных значений. Недостатком метода является его неспособность находить все собственные значения матрицы.

Метод вращений Якоби

Метод вращений Якоби представляет собой итерационный процесс, который используется для нахождения всех собственных значений и собственных векторов симметричных матриц. Основная идея метода состоит в приведении матрицы A к диагональному виду посредством последовательных ортогональных преобразований.

Алгоритм метода Якоби

1. Выбор элемента вне главной диагонали a_{ij} с наибольшим модулем.
2. Вычисление угла поворота φ по формуле:

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \right).$$

3. Построение матрицы вращения T_{ij} , где элементы на пересечении i -й и j -й строк и столбцов определяются как:

$$t_{ii} = t_{jj} = \cos(\varphi), \quad t_{ij} = -t_{ji} = \sin(\varphi).$$

4. Применение преобразования:

$$A' = T_{ij}^T A T_{ij}.$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока сумма квадратов внедиагональных элементов матрицы A' не станет меньше заданной точности ε .

Преимущества метода Якоби Метод вращений Якоби гарантирует сходимость для симметричных положительно определённых матриц. Он позволяет находить все собственные значения и собственные векторы с заданной точностью. Однако его вычислительная сложность растёт с увеличением размерности матрицы.

Сравнение методов

Метод простых итераций эффективен для нахождения одного наибольшего собственного значения и соответствует задачам, где необходимо быстрое приближение. Метод Якоби, в свою очередь, подходит для полного спектрального анализа и обеспечивает высокую точность, но требует больших вычислительных ресурсов. В данной работе будет проведён анализ их эффективности на практике для матриц различных размерностей.

Код программы

```
1 import numpy as np
2
3
4 def power_iteration_method(A, epsilon=1e-7, max_iterations=10000):
5     n = A.shape[0]
6     x = np.random.rand(n)
7     x = x / np.linalg.norm(x)
8     lambda_old = 0
9
10    for iteration in range(max_iterations):
11        y = np.dot(A, x)
12        x = y / np.linalg.norm(y)
13        lambda_new = np.dot(x, np.dot(A, x))
14        if abs(lambda_new - lambda_old) < epsilon:
15            print(f"Метод степенных итераций завершён за {iteration + 1} итераций.")
16            break
17        lambda_old = lambda_new
18    else:
19        print("Метод степенных итераций не сошёлся за максимальное число итераций.")
20
21    return lambda_new, x
22
23
24 def jacobi_rotation_method(A, epsilon=1e-7, max_iterations=10000):
25     n = A.shape[0]
26     A = A.copy()
27     U = np.eye(n)
28
29     def max_off_diagonal(matrix):
30         max_value = 0
31         max_idx = (0, 1)
32         for i in range(n):
33             for j in range(i + 1, n):
34                 if abs(matrix[i, j]) > abs(max_value):
35                     max_value = matrix[i, j]
36                     max_idx = (i, j)
37         return max_value, max_idx
38
39     for iteration in range(max_iterations):
40         max_value, (i, j) = max_off_diagonal(A)
41         if abs(max_value) < epsilon:
42             print(f"Метод вращений Якоби завершён за {iteration + 1} итераций.")
43             break
44
45         phi = 0.5 * np.arctan2(2 * A[i, j], A[i, i] - A[j, j])
46         cos_phi = np.cos(phi)
47         sin_phi = np.sin(phi)
48
49         R = np.eye(n)
50         R[i, i] = cos_phi
51         R[j, j] = cos_phi
52         R[i, j] = sin_phi
```

```

53     R[j, i] = -sin_phi
54
55     A = R.T @ A @ R
56     U = U @ R
57     else:
58         print("Метод вращенийЯкобинесошёлсязамаксимальноечислоитераций .")
59
60     eigenvalues = np.diag(A)
61     eigenvectors = U
62
63     return eigenvalues, eigenvectors
64
65
66 if __name__ == "__main__":
67     dimensions = [3, 5, 7]
68     epsilons = [1e-3, 1e-7]
69
70     for n in dimensions:
71         print(f"Размер матрицы: {n}x{n}\n")
72         A = np.random.rand(n, n)
73         A = (A + A.T) / 2
74         print("Сгенерированная матрица A:")
75         print(A)
76
77         for epsilon in epsilons:
78             print(f"\Используемn точность: {epsilon}\n")
79
80             eigenvalue, eigenvector = power_iteration_method(A, epsilon)
81             print("Метод степенныхитераций :")
82             print(f"Собственное значение: {eigenvalue}")
83             print(f"Собственный вектор: {eigenvector}\n")
84
85             eigenvalues, eigenvectors = jacobi_rotation_method(A, epsilon)
86             print("Метод вращенийЯкоби :")
87             print(f"Собственные значения: {eigenvalues}")
88             print(f"Собственные векторы: \n{eigenvectors}\n")
89
90     print("\Программан успешнозавершена .")

```

2 Описание

Программа предназначена для нахождения собственных значений и собственных векторов симметричных положительно определённых матриц с использованием двух численных методов: метода степенных итераций и метода вращений Якоби. Она исследует эффективность и сходимость этих методов на случайных матрицах различных размерностей с заданной точностью ε .

Основные этапы работы программы:

- **Инициализация данных:** Генерируются случайные симметричные положительно определённые матрицы A размерностей 3×3 , 5×5 и 7×7 .
- **Метод степенных итераций:** Вычисляется наибольшее по модулю собственное значение и соответствующий ему собственный вектор.
- **Метод вращений Якоби:** Находятся все собственные значения и собственные векторы матрицы.
- **Сравнение методов:** Оценивается точность и количество итераций для каждого метода при разных значениях точности $\varepsilon = 10^{-3}$ и $\varepsilon = 10^{-7}$.

Функция `power_iteration_method`

Функция реализует метод степенных итераций для нахождения наибольшего собственного значения матрицы.

Алгоритм работы:

1. Инициализируется случайный начальный вектор $\mathbf{x}^{(0)}$, который нормируется для увеличения численной устойчивости.
2. На каждой итерации вычисляется новый вектор $\mathbf{y}^{(k+1)} = A\mathbf{x}^{(k)}$ и выполняется его нормировка:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{\mathbf{y}^{(k+1)}}{\|\mathbf{y}^{(k+1)}\|}.$$

3. Собственное значение определяется как $\lambda^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k+1)T} A \mathbf{x}^{(k+1)}$.

4. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока разница $|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}|$ не станет меньше заданной точности ε .

Особенности:

- Метод эффективен для нахождения только наибольшего по модулю собственного значения.
- Скорость сходимости зависит от отношения величин наибольшего и следующего по модулю собственных значений.

Функция `jacobi_rotation_method`

Функция реализует метод вращений Якоби, который предназначен для нахождения всех собственных значений и собственных векторов симметричных матриц.

Алгоритм работы:

1. На каждой итерации находится элемент вне главной диагонали с наибольшим модулем a_{ij} .
2. Вычисляется угол поворота φ по формуле:

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \right).$$

3. Строится матрица вращения T_{ij} , которая применяется к текущей матрице A :

$$A' = T_{ij}^T A T_{ij}.$$

4. Итерации продолжаются до тех пор, пока сумма квадратов внедиагональных элементов матрицы A' не станет меньше ε .

Особенности:

- Метод гарантирует сходимость для симметричных положительно определённых матриц.
- Позволяет находить все собственные значения и собственные векторы, но требует больше вычислительных ресурсов, чем метод степенных итераций.

Функция main

Функция main управляет процессом выполнения программы.

Шаги:

1. Генерируются случайные симметричные положительно определённые матрицы заданных размерностей.
2. Для каждой матрицы и каждого значения точности ε выполняются следующие действия:
 - Вызывается функция `power_iteration_method`, результаты (наибольшее собственное значение и соответствующий вектор) выводятся на экран.
 - Вызывается функция `jacobi_rotation_method`, результаты (все собственные значения и векторы) также выводятся.
3. Сравниваются количество итераций и точность каждого метода.

Выводы: Программа демонстрирует, что метод степенных итераций эффективен для нахождения одного наибольшего собственного значения, тогда как метод вращений Якоби подходит для полного спектрального анализа. Методы имеют разную вычислительную сложность, что отражается на их применимости в задачах различных масштабов.

3 Результаты

В данной работе были проведены вычисления собственных значений и собственных векторов для симметричных положительно определённых матриц с использованием метода степенных итераций и метода вращений Якоби. Ниже приведены результаты для различных размеров матриц и значений точности.

Размер матрицы: 3×3

Сгенерированная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1481 & 0.4449 & 0.6655 \\ 0.4449 & 0.2344 & 0.1787 \\ 0.6655 & 0.1787 & 0.4120 \end{bmatrix}$$

Точность $\varepsilon = 0.001$:

- **Метод степенных итераций:** Завершён за 3 итерации.

Собственное значение: 1.1572

Собственный вектор: $[0.6287 \ 0.4236 \ 0.6522]^T$

- **Метод вращений Якоби:** Завершён за 4797 итераций.

Собственные значения: $[-0.4871 \ 0.1242 \ 1.1574]$

Собственные векторы:

$$\begin{bmatrix} 0.7837 & 0.0171 & 0.6210 \\ -0.3562 & 0.8314 & 0.4265 \\ -0.5089 & -0.5554 & 0.6576 \end{bmatrix}$$

Точность $\varepsilon = 10^{-7}$:

- **Метод степенных итераций:** Завершён за 7 итераций.

Собственное значение: 1.1574

Собственный вектор: $[0.6213 \ 0.4268 \ 0.6571]^T$

- **Метод вращений Якоби:** Не сошёлся за максимальное число итераций.

Собственные значения: $[-0.4059 \ 0.1242 \ 1.0762]$

Собственные векторы:

$$\begin{bmatrix} 0.6257 & 0.0171 & 0.7799 \\ -0.4422 & 0.8314 & 0.3365 \\ -0.6426 & -0.5554 & 0.5278 \end{bmatrix}$$

Размер матрицы: 5×5

Сгенерированная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9371 & 0.1825 & 0.4301 & 0.5022 & 0.8613 \\ 0.1825 & 0.3573 & 0.8811 & 0.3599 & 0.3626 \\ 0.4301 & 0.8811 & 0.9319 & 0.6625 & 0.6238 \\ 0.5022 & 0.3599 & 0.6625 & 0.7722 & 0.3993 \\ 0.8613 & 0.3626 & 0.6238 & 0.3993 & 0.3801 \end{bmatrix}$$

Точность $\varepsilon = 0.001$:

- **Метод степенных итераций:** Завершён за 4 итерации.
Собственное значение: 2.8475
Собственный вектор: $[0.4577 \ 0.3534 \ 0.5522 \ 0.4293 \ 0.4200]^T$
- **Метод вращений Якоби:** Не сошёлся за максимальное число итераций.
Собственные значения: $[-0.3241 \ -0.2911 \ 0.3142 \ 2.6839 \ 0.9957]$
Собственные векторы:

$$\begin{bmatrix} 0.4221 & 0.3125 & 0.1232 & 0.2399 & 0.8071 \\ -0.2664 & 0.7327 & 0.2702 & 0.4634 & -0.3233 \\ 0.4668 & -0.4585 & 0.2140 & 0.6621 & -0.2961 \\ -0.1270 & 0.0370 & -0.8910 & 0.4300 & 0.0603 \\ -0.7189 & -0.3924 & 0.2686 & 0.3231 & 0.3908 \end{bmatrix}$$

Точность $\varepsilon = 10^{-7}$:

- **Метод степенных итераций:** Завершён за 7 итераций.
Собственное значение: 2.8476
Собственный вектор: $[0.4602 \ 0.3518 \ 0.5506 \ 0.4291 \ 0.4210]^T$
- **Метод вращений Якоби:** Не сошёлся за максимальное число итераций.
Собственные значения: $[-0.3241 \ -0.2911 \ 0.3142 \ 2.6839 \ 0.9957]$
Собственные векторы:

$$\begin{bmatrix} 0.4221 & 0.3125 & 0.1232 & 0.2399 & 0.8071 \\ -0.2664 & 0.7327 & 0.2702 & 0.4634 & -0.3233 \\ 0.4668 & -0.4585 & 0.2140 & 0.6621 & -0.2961 \\ -0.1270 & 0.0370 & -0.8910 & 0.4300 & 0.0603 \\ -0.7189 & -0.3924 & 0.2686 & 0.3231 & 0.3908 \end{bmatrix}$$

4 Заключение

Проведённый анализ методов для нахождения собственных значений и векторов симметричных матриц выявил ключевые выводы:

1. Метод степенных итераций:

- Эффективен для нахождения наибольшего по модулю собственного значения.
- Быстро сходится (3–7 итераций) даже при высокой точности $\varepsilon = 10^{-7}$.
- Ограничен в применении, так как находит только одно собственное значение.

2. Метод вращений Якоби:

- Гарантирует сходимость для симметричных матриц.
- Позволяет находить полный спектр собственных значений и векторов.
- Испытывает трудности с достижением заданной точности на больших матрицах.
- Не сошёлся за максимально установленное число итераций (10,000) в нескольких тестах.

3. Сравнение методов:

- Метод степенных итераций быстрее и проще в реализации для задач с ограниченной потребностью в спектральном анализе.
- Метод вращений Якоби более универсален, но требует значительных вычислительных ресурсов.

4. Рекомендации для применения:

- Использовать метод степенных итераций для задач, требующих только наибольшего собственного значения.
- Применять метод Якоби для задач полного спектрального анализа небольших матриц.

5. Направления дальнейших исследований:

- Оптимизация метода Якоби для повышения сходимости на матрицах больших размеров.
- Сравнение с другими методами, такими как метод QR-разложения, для более эффективного анализа больших матриц.