ИДЗ №2

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

Задание 5.16. (б)

Пусть $A : \ell_p \to \ell_p$,

$$Ax = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j \right\}_{k=1}^{\infty}$$

Тогда A — сжимающее отображение в пространстве ℓ_p, если

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1 \quad \text{при } p = \infty;$$

Решение

Пусть $x = (\xi_j) \in \ell_\infty$. Это означает, что существует константа M, такая что для всех $j \in \mathbb{N}$ выполнено $|\xi_j| \le M$. Другими словами, последовательность x ограничена по модулю, и её супремум конечен:

$$\|x\|_\infty = \sup_j |\xi_j| < \infty$$

Теперь рассмотрим, как действует оператор A на такой вектор x. Его k-ая координата равна:

$$(Ax)_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j$$

Нас интересует, насколько может быть большим модуль этой суммы. Применим неравенство треугольника:

$$|(Ax)_k| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j \right| \le \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| \cdot |\xi_j|$$

Так как $|\xi_j| \le \|x\|_\infty$ для всех j, то:

$$|(Ax)_k| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| \right) \cdot \|x\|_\infty.$$

Теперь найдём норму всего вектора Ax:

$$\|Ax\|_\infty = \sup_k |(Ax)_k| \le \sup_k \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| \cdot \|x\|_\infty \right)$$

Вынесем константу за скобки:

$$\|Ax\|_\infty \leq \left(\sup_k \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| \right) \cdot \|x\|_\infty$$

Обозначим:

$$\alpha := \sup_k \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|$$

Таким образом, мы получили:

$$\|Ax\|_\infty \leq \alpha \cdot \|x\|_\infty.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha < 1$. В этом случае:

$$\|Ax\|_\infty < \|x\|_\infty$$

что и означает, что A является *сжимающим оператором* в пространстве ℓ_∞.

$\square$