Домашняя работа №3
по дисциплине "Дифференциальная геометрия и топология"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

1 Задание

1. Σ^2 - все открытые круги $\quad B^2((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon\}$
2. Σ^∞ - все открытые квадраты $\quad k((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \mid \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \varepsilon\}$
3. Σ^1 - все открытые квадраты $\quad k'((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \mid |x - x_0| + |y - y_0| \leq \varepsilon\}$

   Доказать, что они являются базами канонической топологии на $\mathbb{R}$

2 Σ^2 - все открытые круги $B^2((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon\}$

Решение:

Чтобы Σ^2 была базой канонической топологии T^2, необходимо, чтобы

$$\forall U^2 \in T^2 \quad \forall (x_i, y_i) \in U^2 \quad \exists B^2((x_i, y_i), \varepsilon) \in \Sigma^2 \quad : x \in B^2 \subset U^2$$

Согласно условию, $\Sigma = \{B_i^2 \mid i \in I\}$, где $B^2 = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon\}$.

Видно, что Σ^2 принадлежит топологии и представляет собой набор множеств открытых кругов.

Следовательно, для любого круга из U^2 можно найти аналогичный круг из Σ^2, который имеет центр в точке (x, y) и радиус ε.

3 Σ^∞ - все открытые квадраты $k((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \mid \max\{|x - x_0|,\ |y - y_0|\} < \varepsilon\}$

Решение

Чтобы Σ^∞ была базой канонической топологии T^2, необходимо, чтобы

$$\forall U^2 \in T^2 \quad \forall (x_i, y_i) \in U^2 \quad \exists k^2((x_i, y_i), \varepsilon) \in \Sigma^2 : x \in k^2 \subset U^2$$

Требуется, чтобы любая точка любого круга $U^2((x_0, y_0), \varepsilon)$ могла быть покрыта квадратом $k^2((x_1, y_1), \varepsilon_1)$.

Требуется рассмотреть случай, когда центр круга не совпадает с точкой (x_1, y_1). Необходимо найти квадрат, который будет иметь своим центром эту точку.

Пусть $\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. Тогда для точки (x_1, y_1) можно записать следующее неравенство:

$$\max\{|x - x_1|,\ |y - y_1|\} < \frac{\varepsilon - \rho}{2}$$

Таким образом, для любой точки из U^2 найдётся квадрат, описывающий эту точку.

$\square$

4 Σ^1 - все открытые квадраты $k'((x_0, y_0)) = \{(x, y) \mid |x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon\}$

Решение

Чтобы Σ^1 была базой канонической топологии T^2, необходимо, чтобы

$$\forall U^2 \in T^2 \quad \forall (x_i, y_i) \in U^2 \quad \exists k'^2((x_i, y_i), \varepsilon) \in \Sigma^1 : x \in k'^2 \subset U^2$$

Необходимо, чтобы любая точка из любого круга $U^2((x_0, y_0), \varepsilon)$ могла быть покрыта квадратом $k'^2((x_1, y_1), \varepsilon_1)$.

Требуется рассмотреть случай, когда центр круга не совпадает с точкой (x_1, y_1).

Необходимо найти квадрат, который будет содержать эту точку в качестве своего центра.

Пусть $\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

Для точки (x_1, y_1) можно записать следующее неравенство:

$$|x - x_1| + |y - y_1| < \varepsilon - \rho$$

Таким образом, для любой точки из U^2 найдётся квадрат, содержащий эту точку.

□