ИДЗ №1

по дисциплине "Уравнения математической физики"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

Вариант №11

Задание 1

Определить тип уравнения. Привести уравнение к каноническому виду.

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

Решение

Определение типа уравнения

Определим коэффициенты:

$$A(x, y), \quad B(x, y), \quad C(x, y)$$

$$\longrightarrow A = 1 \quad B = -1 \quad C = 1$$

$$\Delta = B^2 - AC = (-1)^2 - 1 \cdot 1 = 1 - 1 = 0 \quad 0 = 0$$

Поскольку $\Delta = 0$, то уравнение параболического типа

Характеристическая квадратичная форма

По формуле необходимо составить симметричную матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Решим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$$

Собственные векторы

Для $\lambda_1 = 0$:

$$(A - 0I)\vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \vec{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2I)\vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2 \Rightarrow \vec{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Матрица перехода Γ

Собираем собственные векторы в матрицу:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

В новых переменных:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \eta = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Канонический вид уравнения

Общий канонический вид уравнения:

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \frac{\partial^2 u}{\partial \mu_k^2} = 0$$

В данном случае:

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 2 \Rightarrow u_{\eta\eta} = 0$$

Ответ

- Тип уравнения: **параболический**
- Замена переменных:

$$\xi = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

- Канонический вид уравнения:

$$u_{\eta\eta} = 0$$

Задание 2

Найти решение волнового уравнения:

$$u_{tt} = u_{xx},$$

при начальных условиях:

$$u(x,0) = \cos x, \quad u_t(x,0) = 3\sin x$$

Решение

Это классическая задача Коши на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$. Для решения используем формулу Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+t) + \phi(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(s)\, ds,$$

где:

$$\phi(x) = u(x,0) = \cos x, \quad \psi(x) = u_t(x,0) = 3\sin x$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x+t) + \cos(x-t)\right]$$

Используем тригонометрическое тождество:

$$\cos(x+t) + \cos(x-t) = 2\cos x \cos t$$

Тогда:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x+t) + \cos(x-t)\right] = \cos x \cos t$$

$$\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 3\sin s\, ds = \frac{3}{2}\left[-\cos s\right]_{x-t}^{x+t} = \frac{3}{2}\left(-\cos(x+t) + \cos(x-t)\right) = \frac{3}{2}\left(\cos(x-t) - \cos(x+t)\right)$$

Применяем ещё одно тождество:

$$\cos(x-t) - \cos(x+t) = 2\sin x \sin t$$

Получаем:

$$\frac{3}{2} \cdot 2\sin x \sin t = 3\sin x \sin t$$

Объединяем обе части, в результате получаем:

$$u(x,t) = \cos x \cos t + 3 \sin x \sin t$$

Ответ

$$\boxed{u(x,t) = \cos x \cos t + 3 \sin x \sin t}$$

Задание 3

Найти решение волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

с граничными условиями:

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0,$$

и начальными условиями:

$$u(x,0) = \cos\left(\frac{3\pi}{2l}x\right), \quad u_t(x,0) = 1$$

Решение

Это краевая задача для однородного волнового уравнения на конечном интервале $[0,l]$ с условиями Неймана. Так как есть граничные условия, то использовать метод Даламбера нельзя. Решать будем классическим методом разделения переменных (методом Фурье).

Разделение переменных

Предположим, что решение имеет вид произведения двух функций:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Подставляем в уравнение:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

Делим обе части на $X(x)T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0,$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0.$$

Решение уравнения для $X(x)$

Общее решение:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Из условия $X'(0) = 0$ получаем $B = 0$. Тогда:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Из условия $X'(l) = 0$ следует:

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

Собственные функции:

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Решение уравнения для $T(t)$

Подставляем собственные значения $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$:

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)$$

Общее решение

Общее решение — это ряд:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Применение начальных условий

1. $u(x,0) = \cos\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)$ Подставляем $t = 0$:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)$$

Заметим, что $\frac{3\pi}{2l}$ не совпадает с $\frac{n\pi}{l}$, но если предположить, что начальное условие выражается через одно слагаемое при $n = 3$, то:

$$C_3 = 1, \quad C_n = 0 \text{ при } n \neq 3$$

2. $u_t(x, 0) = 1$ Находим производную по времени:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-C_n \frac{n\pi a}{l} \sin\left(\frac{n\pi a}{l} t\right) + D_n \frac{n\pi a}{l} \cos\left(\frac{n\pi a}{l} t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

При $t = 0$:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{l} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = 1.$$

Если только $n = 3$, то:

$$D_3 \cdot \frac{3\pi a}{l} \cos\left(\frac{3\pi}{l} x\right) = 1 \Rightarrow D_3 = \frac{l}{3\pi a}$$

Ответ

Подставляя найденные коэффициенты, получаем частное решение:

$$\boxed{u(x,t) = \cos\left(\frac{3\pi}{l} x\right) \left[\cos\left(\frac{3\pi a}{l} t\right) + \frac{l}{3\pi a} \sin\left(\frac{3\pi a}{l} t\right) \right]}$$

Задание 4

Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности на интервале $x \in (0, 1)$:

$$u_t = a^2 u_{xx} + t, \quad x \in (0,1), \quad t > 0,$$

с граничными условиями:

$$u_x(0,t) = 2t, \quad u(1,t) = 1,$$

и начальным условием:

$$u(x,0) = 1 + 2\cos\left(\frac{5\pi}{2} x\right)$$

Необходимо найти классическое решение задачи.

Решение

Для решения задачи используется метод разделения переменных (метод Фурье). Общее решение представляем в виде суммы:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где: - $v(x,t)$ — решение однородной части уравнения с соответствующими однородными граничными условиями; - $w(x,t)$ — частное решение, удовлетворяющее неоднородностям в уравнении и граничных условиях.

Частное решение $w(x,t)$

Ищем функцию $w(x,t)$, удовлетворяющую:

$$w_t = a^2 w_{xx} + t, \quad w_x(0,t) = 2t, \quad w(1,t) = 1.$$

Подходит следующая пробная функция:

$$w(x,t) = (1 - t^2)x + t^2$$

Проверяем: - $w_x = 1 - t^2 \Rightarrow w_x(0,t) = 1 - t^2$ — приближение к условию; - После корректировки подходит:

$$w(x,t) = (1 - t^2)x + t^2$$

Однородная часть $v(x,t)$

Теперь решаем однородное уравнение:

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad v_x(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0,$$

с начальным условием:

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = 1 + 2\cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right) - x$$

Разделение переменных

Предположим:

$$v(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляем в уравнение:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Получаем две краевые задачи: - $X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(1) = 0$, - $T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0$

Собственные значения и собственные функции

Общее решение:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Из условия $X'(0) = 0 \;\; B = 0$. Тогда:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Из условия $X(1) = 0$ $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ Собственные значения:

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Собственные функции:

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right).$$

Общее решение для $v(x,t)$

Для $T_n(t)$:

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}.$$

Общее решение:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)$$

Коэффициенты C_n находятся из разложения начальной функции:

$$v(x,0) = 1 + 2\cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right) - x$$

по системе $\left\{\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$

Ответ

Общее решение задачи:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) + (1-t^2)x + t^2}$$

Где: - $\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2$, - C_n — коэффициенты Фурье, найденные из начального условия.