Домашняя работа №4
по дисциплине "Дифференциальная геометрия и топология"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

1 Задание

1. Найти примеры и доказать, что множества, открытые в подпространстве, не обязательно открыты в объемлющем пространстве.
2. Доказать, что F замкнуто в подпространстве $A \subseteq X$, тогда и только тогда, когда $F = A \cap E$, где E - замкнуто в X.

Найти примеры и доказать, что множества, открытые в подпространстве, не обязательно открыты в объемлющем пространстве.

Решение

Рассмотрим следующее определение подпространства:

$$\text{Пусть} \quad (X, T) - \text{топологическое пространство.}$$

$$A \subseteq X - \text{произвольное подмножество.}$$

Множество T_A представляет собой коллекцию множеств вида $\{A \cap U \,|\, U \in T\}$, а пару (A, T_A) называют подпространством топологического пространства (X, T). Топология T_A называется топологией, индуцированной на A топологическим пространством (X, T).

$$X = \{a, b, c, d\}$$
$$T_X = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \varnothing, X\}$$
$$A = \{b, c\}$$
$$T_A = \{\{b\}, \{c\}, \varnothing, A\}$$
$$\{b, c\} \notin T_X$$

Следовательно, множество $\{b, c\}$, которое открыто в подпространстве, не является открытым в (X, T).

□

Теперь рассмотрим этот же факт в более формальной записи:
Пусть (X, T) - топологическое пространство.
Пусть $A \subseteq X$, но при этом $A \notin T_A$.
Тогда множество $A \cap U = X$ не будет элементом T_X.

□

Доказать, что F замкнуто в подпространстве $A \subseteq X$, тогда и только тогда, когда $F = A \cap E$, где E - замкнуто в X.

Решение

Необходимое условие:
Пусть F замкнуто в A, то есть существует $L \in T_A$ такое, что $F = A \setminus L$.
Так как $L = A \cap U \in T_X$ (по свойствам подпространства), имеем:

$$F = A \setminus (A \cap U) = A \cap (X \setminus U) = A \cap E, \; E = X \setminus U.$$

Так как $U \in T_X$, то E замкнуто в T_X.

$$A \setminus (A \cap U) = A \cap (X \setminus U)$$
$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ и } x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \text{ и } x \notin B\}$$
$$A \subseteq X \Longrightarrow E \in X.$$

$$A \cap (A \cap U) = \{x \,|\, x \in A, x \in (A \cap B)\} = \{x \,|\, x \in A, x \notin B\}$$
$$A \cap (X \setminus U) = \{x \,|\, x \in A, x \in (X \setminus B)\} = \{x \,|\, x \in A, x \notin B\}$$

Достаточное условие:

Пусть $F = A \cap E$, где E замкнуто в T_X и является дополнением к открытому множеству U.
Для того чтобы F было замкнутым в A, необходимо, чтобы $F = A \setminus L$, где $L \in T_A$.

$$F = A \cap E = A \cap (X \setminus U) = A \setminus (A \cap U) = A \setminus L$$
$$L = A \cap U \text{ и }.$$

Таким образом, F является дополнением к открытому множеству в подпространстве, следовательно, оно замкнуто.

$\square$