Домашняя работа №1
по дисциплине "Дифференциальная геометрия и топология"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

1 Доказать являются ли вектора базисами

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{линейно независимые вектора} \Longrightarrow \text{базис}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{линейно независимые вектора} \Longrightarrow \text{базис}$$

Ответ: Являются базисами

2 Найти матрицу перехода от базиса $\{a\}$ к базису $\{b\}$

Решение:

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_1^1 a_1 + \alpha_1^2 a_2 + \alpha_1^3 a_3 \\ b_2 = \alpha_2^1 a_1 + \alpha_2^2 a_2 + \alpha_2^3 a_3 \\ b_3 = \alpha_3^1 a_1 + \alpha_3^2 a_2 + \alpha_3^3 a_3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{3}{2} a_3 \\ b_2 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{3}{2} a_2 + \frac{1}{2} a_3 \\ b_3 = -\frac{1}{2} a_1 + \frac{5}{2} a_2 - \frac{3}{2} a_3 \end{cases}$$

Из этого следует то, что матрицей перехода будет матрица вида: $A^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Ответ: $A^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

3 Найти координаты вектора $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ в базисах $\{a\}$ и $\{b\}$

Решение:

$$\begin{cases} X_a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 \\ X_b = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} X_a = -\dfrac{5}{2}a_1 + \dfrac{1}{2}a_2 + \dfrac{3}{2}a_3 \\ X_b = \dfrac{29}{3}b_1 - 9b_2 + \dfrac{17}{3}b_3 \end{cases}$$

Таким образом получаем следующие координаты:

$$\textbf{Координаты } X \textbf{ в базисе } a \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Координаты } X \textbf{ в базисе } b \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{29}{3} \\ -9 \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

4 Найти координаты $y = 3a_1 - a_2 + 7a_3$ в базисе $\{b\}$

Решение:

Запишем уравнение $y = 3a_1 - a_2 + 7a_3$ в виде

$$Y_a = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу к T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Поскольку,

$$Y_b = T^{-1}Y_a$$

Тогда:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot (-1) + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 7 \\ \frac{1}{3} \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \\ \frac{4}{3} \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{58}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{3}{22} \end{pmatrix}$$

Таким образом, координаты уровнения в базисе $\{b\}$:

$$Y_b = \begin{pmatrix} -\frac{58}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{3}{22} \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{58}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{3}{22} \end{pmatrix}$