ИДЗ №3

по дисциплине "Функциональный анализ"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

Задание 10.8. (a)

$$f(x) = \int_0^1 \sqrt{t} \cdot x(t^2)\, dt,$$

$$X = [0, 1]\,;$$

Решение

Рассмотрим функционал

$$f(x) = \int_0^1 \sqrt{t} \cdot x(t^2)\, dt,$$

заданный на пространстве $C[0,1]$ — пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с нормой супремума $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$.

Функция $x(t^2)$ определена корректно, поскольку при $t \in [0,1]$ имеем $t^2 \in [0,1]$, а значит аргумент функции x лежит в области определения.

Композиция непрерывной функции $x(t)$ с непрерывной функцией t^2 остаётся непрерывной, поэтому $x(t^2)$ — непрерывна на $[0,1]$. Функция $\sqrt{t}$ также непрерывна на $[0,1]$, включая $t = 0$.

Следовательно, произведение $\sqrt{t} \cdot x(t^2)$ — непрерывная функция на $[0,1]$, а значит интеграл определён как обычный определённый интеграл Римана.

Покажем теперь, что функционал f линеен и непрерывен. Линейность очевидна, так как оператор интегрирования и умножение на фиксированную функцию сохраняют линейность.

Проверим ограниченность функционала. По модулю:

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 \sqrt{t} \cdot x(t^2)\, dt \right| \leq \int_0^1 \sqrt{t} \cdot |x(t^2)|\, dt.$$

Так как $x \in C[0,1]$, то $|x(t^2)| \leq \|x\|_\infty$ для всех $t \in [0,1]$.

Получаем:

$$|f(x)| \leq \|x\|_\infty \cdot \int_0^1 \sqrt{t}\, dt = \|x\|_\infty \cdot \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\|x\|_\infty.$$

$$\|f\| = \frac{2}{3}$$