Домашняя работа №10
по дисциплине "Дифференциальная геометрия и топология"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

Условие задачи

Найти натуральное уравнение кривой.

Кривизна:

$$k(t) = \frac{\|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\|}{\|\vec{\gamma}'\|^3}$$

Кручение:

$$\Xi(t) = \frac{(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{\gamma}'''}{\|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\|^2}$$

Условие задачи №1

Задана кривая:

$$\gamma(t) = \big(a\cos(t), a\sin(t), bt\big), \quad t \geq 0$$

Решение

Для вычислений требуется найти первые три производные векторной функции $\gamma(t)$.

1. Первая производная:

$$\gamma'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b)$$

2. Модуль первой производной:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2(t) + a^2\cos^2(t) + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3. Вторая производная:

$$\gamma''(t) = (-a\cos(t), -a\sin(t), 0)$$

4. Третья производная:

$$\gamma'''(t) = (a\sin(t), -a\cos(t), 0)$$

Вычисление кривизны

Вычисляем векторное произведение $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$:

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (ab\sin(t), -ab\cos(t), a^2)$$

Модуль векторного произведения:

$$\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\| = \sqrt{a^2b^2\sin^2(t) + a^2b^2\cos^2(t) + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

Кривизна:

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Вычисление кручения

Находим определитель трёх векторов $(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))$:

$$\det\left(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)\right) = \begin{vmatrix} -a\sin(t) & a\cos(t) & b \\ -a\cos(t) & -a\sin(t) & 0 \\ a\sin(t) & -a\cos(t) & 0 \end{vmatrix}$$

Вычисляем определитель:

$$\det = a^2 b$$

$$\Xi(t) = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Для завершения решения мы перейдём к вычислению параметризации кривой с использованием натуральной длины дуги s.
Длина дуги определяется следующим образом:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\phi)\|\, d\phi$$

Так как $\|\gamma'(\phi)\| = \sqrt{a^2+b^2}$:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, d\phi = \sqrt{a^2+b^2} \cdot t$$

Таким образом, получаем зависимость длины дуги s от параметра t:

$$s(t) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot t$$

Выражение t через s

Из выражения для длины дуги $s(t)$ находим параметр t через s:

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Это позволяет нам выразить кривую через параметр s.

Параметризация кривой $\gamma(s)$

Подставляем найденное t в исходное уравнение кривой:

$$\gamma(t) = \left(a\cos(t), a\sin(t), bt\right)$$

С учётом того, что $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, получаем:

$$\gamma(s(t)) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Теперь кривая представлена в параметрической форме относительно натуральной длины дуги s.

Кривизна $k(s)$

Кривизна в натуральной параметризации остаётся неизменной, так как она не зависит от конкретного выбора параметра:

$$k(s) = \frac{a}{a^2+b^2}$$

Аналогично, кручение не меняется и выражается как:

$$\Xi(s) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Условие задачи №2

Задана кривая:

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{2t^3}{3}, \frac{t^4}{2}\right), \quad t \geq 0$$

Решение

1. Первая производная:

$$\gamma'(t) = \left(t, 2t^2, 2t^3\right)$$

2. Модуль первой производной:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{t^2 + 4t^4 + 4t^6} = 2t^3 + t$$

3. Вторая производная:

$$\gamma''(t) = \left(1, 4t, 6t^2\right)$$

4. Векторное произведение первой и второй производных:

$$\|\gamma' \times \gamma''\| = \left(4t^4, -4t^3, 2t^2\right)$$

Модуль этого векторного произведения:

$$\|\gamma' \times \gamma''\| = 2t^2\sqrt{(2t^2+1)}$$

5. Третья производная:

$$\gamma'''(t) = (0, 4, 12t)$$

6. Векторное произведение второй и третьей производных:

$$\|\gamma'' \times \gamma'''\| = \left(24t^2, -12t, 4\right)$$

Модуль этого векторного произведения:

$$\|\gamma'' \times \gamma'''\| = 4\sqrt{36t^4 + 9t^2 + 1}$$

Определитель трёх векторов:

$$(\gamma', \gamma'', \gamma''') = 8t^3$$

7. Кривизна:

$$k(t) = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{2}{t(2t^2+1)^2}$$

8. Кручение:

$$\Xi(t) = \frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2} = \frac{2}{36t^4 + 9t^2 + 1}$$

9. Длина дуги:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\phi)\| d\phi = \int_0^t \left(2\phi^3 + \phi\right) d\phi$$

Вычисляем интеграл:

$$s(t) = \frac{t^4 + t^2}{2}$$

10. Особые значения:

$$t_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{\sqrt{8s+1} - 1}}{\sqrt{2}}, \quad t_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{\sqrt{8s+1} + 1}}{\sqrt{2}}$$

Переход к параметризации через s

Так как $t \geq 0$, то из зависимости длины дуги $s(t)$ находим t через s:

$$t = \frac{\sqrt{\sqrt{8s+1} - 1}}{\sqrt{2}}$$

Кривизна $k(s)$:

Кривизна $k(s)$ выражается через параметризацию по s следующим образом:

$$k(s) = \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{\sqrt{8s+1}-1}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(2\left(\frac{\sqrt{\sqrt{8s+1}-1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right)^2}$$

Кручение $\Xi(s)$ через параметризацию по s принимает вид:

$$\Xi(s) = \frac{\left(\frac{\sqrt{\sqrt{8s+1}-1}}{\sqrt{2}}\right)^3}{2\left(36\left(\frac{\sqrt{\sqrt{8s+1}-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 + 9\left(\frac{\sqrt{\sqrt{8s+1}-1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right)}$$

Условие задачи №3

Задана кривая:

$$\gamma(t) = \big(a \cdot \cosh(t), b \cdot \sinh(t), at\big), \quad a > 0$$

Решение

Для данной кривой необходимо найти кривизну $k(t)$, кручение $\Xi(t)$, а также выразить её через длину дуги s.

1. Первая производная: Вектор первой производной:

$$\gamma'(t) = \big(a\sinh(t), b\cosh(t), a\big)$$

2. Вторая производная:

$$\gamma''(t) = \big(a\cosh(t), b\sinh(t), 0\big)$$

Производные:

- - Производная от $a\sinh(t)$ равна $a\cosh(t)$,
- - Производная от $b\cosh(t)$ равна $b\sinh(t)$,
- - Производная от a равна 0, так как это константа.

3. Третья производная:

$$\gamma'''(t) = \big(a\sinh(t), b\cosh(t), 0\big)$$

Производные:

- - Производная от $a\cosh(t)$ равна $a\sinh(t)$,
- - Производная от $b\sinh(t)$ равна $b\cosh(t)$,
- - Производная от 0 равна 0.

4. Кривизна: Кривизна выражается формулой:

$$k(t) = \frac{a}{\cosh^2(t) \cdot (a^2 + b^2)}$$

5. Кручение: Кручение определяется как:

$$\Xi(t) = \frac{b}{\cosh^2(t) \cdot (a^2 + b^2)}$$

6. Длина дуги: Формула длины дуги:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2(\sinh^2(\phi) + 1) + b^2 \cosh^2(\phi)} d\phi$$

Упрощая, используя свойства гиперболических функций $(\sinh^2(x) + 1 = \cosh^2(x))$:

$$s(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \sinh(t)$$

7. Выражение t через s: Из найденного выражения для $s(t)$, находим:

$$t = \operatorname{arsinh}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

8. Выражение кривой через s: Подставляем $t = \operatorname{arsinh}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ в кривую:

$$\gamma = \left(\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\right), b, a\right)$$

9. Свойства гиперболического косинуса: Используем свойства гиперболических функций:

$$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{1 + x^2}$$

Подставляя:

$$\cosh^2\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\right) = 1 + \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + s^2}{a^2 + b^2}$$

Кривизна через длину дуги:

$$k(s) = \frac{a}{a^2 + b^2 + s^2}$$

Кручение через длину дуги:

$$\Xi(s) = \frac{b}{a^2 + b^2 + s^2}$$