Лабораторная работа №1 «Исследование матричных норм и зависимости ошибки решения СЛАУ от числа обусловленности матрицы»

Исследование системы вида $Ax = b$.

1. Составить 5 матриц A_k размером 25x25, где $k = 1, \dots, 5$, заполненные случайными числами в диапазоне $(0, 1)$. Диагональное преобладание необязательно.
2. Вывести полученные матрицы.
3. Написать функцию подсчета нормы матрицы. Норма матрицы соответствует определенному варианту в таблице№1, который вычисляется как остаток от деления своего порядкового номера в списке группы на общее количество норм = 6. *Например, если вы в группе являетесь 9-м по счету, то ваш вариант будет 9%6 = 3*
4. Найти число обусловленности каждой матрицы $cond(A) = \|A_k\| \cdot \|A_k^{-1}\|$.
5. Вывести результаты по пяти сгенерированным матрицам в таблицу:

$\boldsymbol{k}$	**Норма матрицы** $\|A\|$	$\boldsymbol{cond(A)}$
1		
…		
5		

6. Исследовать матрицу Вандермонда из задачи полиномиальной интерполяции с прошлого семестра. Для этого задаем равномерную сетку $[x_0, \dots x_n]$. Условие интерполяции: $P(x_i) = y_i = f(x_i)$. Решить любым встроенным методом СЛАУ следующего вида:
$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$
Здесь неизвестными является вектор коэффициентов из $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, в то время как вектор столбец y получается перемножением матрицы Вандермонда на вектор столбец из единиц: $y = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$. Взять $\mathrm{n} = 25$.
7. Посчитать число обусловленности для матрицы Вандермонда и векторную норму между получившимся решением СЛАУ и точным решением. Для вычисления нормы используйте любую из приведенных ниже формул:
$$\|x\|_\infty = \max|x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$
Замечание: *точным решением данной СЛАУ является вектор столбец из всех единиц, для n = 25 точным решением будет вектор столбец из всех 25 коэффициентов* $a_i = 1,\ i = \overline{1, n}$
8. Сделать вывод.
9. Оформить отчет, который должен содержать:
   a. *Титульник с номером своего варианта.*
   b. *Полученные пять матриц* A_k.

c. *Результаты выполнения пунктов 4, 5, и 6.*
d. *Заключение.*
e. *Листинг программы.*

Графиков здесь нет 😊

Таблица 1.

Вариант	**Нормы матрицы** $\|A\|$
1	$\|A_k\| = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|$
2	$\|A_k\| = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} \|a_{ij}\|$
3	$\|A_k\| = \frac{1}{n} \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|$
4	$\|A_k\| = \frac{1}{n} \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} \|a_{ij}\|$
5	$\|A_k\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|^2}$
6	$\|A_k\| = \frac{1}{n}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|^2}$