Домашняя работа №12
по дисциплине "Дифференциальная геометрия и топология"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

Условие задачи

1. Где параметризация ленты мебиуса не регулярна
2. Найти кривизну и кручение её границы

Решение

Векторное произведение и Мебиусова лента

Векторное произведение двух векторов a и b в трёхмерном пространстве определяется следующим образом:

$$F_{VecDot}(a, b) = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y, \\ a_z b_x - a_x b_z, \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Здесь $a = (a_x, a_y, a_z)$ и $b = (b_x, b_y, b_z)$ представляют собой координаты векторов a и b.

Мебиусова лента и её граница

Мебиусова лента определяется параметрически функцией $\mu(u, v)$, которая описывает её поверхность:

$$\mu(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u,\ \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u,\ \frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}\right)$$

Границы параметров определяют форму и размер ленты:

$$\begin{aligned} \mu(u, v):&\quad 0 \le u \le 2\pi, \quad -1 \le v \le 1, \\ \mu(u, 1):&\quad 0 \le u \le 4\pi. \end{aligned}$$

Параметр u задаёт положение вдоль ленты, а v описывает поперечное смещение относительно центральной линии.

Частные производные ленты и их векторное произведение

Частные производные параметризации $\mu(u, v)$ вычисляются по переменным u и v:

$$\mu_u = \frac{\partial}{\partial u}\mu(u, v), \quad 0 \le u \le 2\pi, \quad -1 \le v \le 1,$$

$$\mu_v = \frac{\partial}{\partial v}\mu(u, v), \quad 0 \le u \le 4\pi, \quad -1 \le v \le 1.$$

Векторное произведение частных производных μ_u и μ_v даёт нормальный вектор к поверхности Мебиусовой ленты:

$$F_{VecDot}(\mu_u, \mu_v), \quad -2\pi \le u \le 4\pi, \quad -1 \le v \le 1.$$

Производные от μ

Рассчитаем частную производную по параметру u:

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix}\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u,\\ \left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u,\\ \frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}\end{pmatrix}.$$

Развёрнутое выражение частной производной по u имеет вид:

$$\mu_u=\begin{pmatrix}-\frac{v}{4}\sin\frac{u}{2}\cos u-\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u,\\ -\frac{v}{4}\sin\frac{u}{2}\sin u+\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u,\\ \frac{v}{4}\cos\frac{u}{2}.\end{pmatrix}$$

Для параметра v производная выглядит следующим образом:

$$\mu_v=\frac{\partial}{\partial v}\begin{pmatrix}\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u,\\ \left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u,\\ \frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}\end{pmatrix}.$$

Результат:

$$\mu_v=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\cos u,\\ \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\sin u,\\ \frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}.\end{pmatrix}$$

Наконец, векторное произведение μ_u и μ_v вычисляется по формуле:

$$[\mu_u,\mu_v]=\begin{pmatrix}\mu_{u2}\mu_{v3}-\mu_{u3}\mu_{v2},\\ \mu_{u3}\mu_{v1}-\mu_{u1}\mu_{v3},\\ \mu_{u1}\mu_{v2}-\mu_{u2}\mu_{v1}.\end{pmatrix}$$

Примерные вычисления

В данном разделе приведены вычисления компонентов векторов A и B, их суммы, а также модуль вектора B.

Кроме того, проводится проверка регулярности и рассчитываются кривизна и торсия для заданной параметризации.

Компоненты вектора A:

$$A.x=-\frac{v}{8}\sin u$$

Компонента x вектора A вычисляется как результат производной параметрической функции $\mu(u,v)$ по переменной u, включающей поперечные и продольные слагаемые.

Здесь v определяет поперечное смещение, а $\sin u$ отвечает за изменение компоненты x по основному направлению u.

$$A.y=-\frac{v}{8}\cos u$$

Компонента y аналогично зависит от $\cos u$, который контролирует изменение по направлению y при фиксированном v.

$$A.z=0$$

Значение $A.z$ равно нулю, так как параметризация не включает компоненту по z для производной μ_u в этом направлении.

Итоговый вид вектора A:

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{v}{8}\sin u,\\ -\frac{v}{8}\cos u,\\ 0\end{pmatrix}$$

Компоненты B

Для вектора B вычисляем компоненты, учитывая производные параметризации μ по v.

$$B.x = \left(\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\right) - 0 = \left(\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\right)$$

Здесь $B.x$ представляет собой произведение двух слагаемых: первого, описывающего основной вклад параметра u, и второго, включающего производную по v.

$$B.y = 0 - \left(\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\right) = -\left(\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\right)$$

Компонента $B.y$ включает аналогичное произведение, но с отрицательным знаком, определяемым направлением производной.

$$B.z = -\left(\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u\right)\left(\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\sin u\right) - \left(\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u\right)\left(\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\cos u\right)$$

$$= -\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left[(\sin u)(\sin u)+(\cos u)(\cos u)\right]\right) = -\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\right)$$

Итоговый вектор B имеет вид:

$$B = [\mu_{u2}, \mu_v] = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\right), \\ \left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u, \\ -\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Сумма $A_m + B_m$

$$A_m = \begin{pmatrix} -\frac{v}{8}\sin u, \\ -\frac{v}{8}\cos u, \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u \le 4\pi, \quad -1 \le v \le 1$$

$$B_m = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\right), \\ \left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u, \\ -\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Сумма векторов:

$$A_m + B_m, \quad 0 \le u \le 4\pi, \quad -1 \le v \le 1$$

Модуль вектора B

$$|B| = \sqrt{\left(\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u\left(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\right)\right)^2 + \left(\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u\left(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\right)\right)^2 + \left(\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\left(\cos^2 u+\sin^2 u\right)\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left|1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right|$$

Проверка на регулярность

Проверяем условие регулярности. Если модуль вектора B зануляется:

$$\frac{1}{2}\left|1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right| = 0 \implies \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2} = -1 \implies v = -\frac{2}{\cos\frac{u}{2}}$$

Однако при таких условиях параметризация остаётся регулярной, так как условие зануления не выполняется на всей области $[0, 4\pi] \times [-1, 1]$.
Таким образом, лента Мебиуса регулярна везде.

Кривизна и торсия

Формулы для кривизны $k(t)$ и торсии $\tau(t)$:

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{[\gamma'(t) \times \gamma''(t)] \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}$$

Где $\gamma(t)$, $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ и $\gamma'''(t)$ — параметризация и её производные по параметру t.

Параметризация и производные

Параметризация $\gamma(t)$ и её производные:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \frac{1}{4}\cos\frac{t}{2}, \\ \sin t + \frac{1}{4}\sin\frac{t}{2}, \\ \frac{1}{4}\sin\frac{3t}{2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t - \frac{1}{8}\sin\frac{t}{2}, \\ \cos t + \frac{1}{8}\cos\frac{t}{2}, \\ \frac{3}{8}\cos\frac{3t}{2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma''(t) = \begin{pmatrix} -\cos t - \frac{1}{16}\cos\frac{t}{2}, \\ -\sin t - \frac{1}{16}\sin\frac{t}{2}, \\ -\frac{9}{16}\sin\frac{3t}{2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma'''(t) = \begin{pmatrix} \sin t + \frac{1}{32}\sin\frac{t}{2}, \\ \cos t + \frac{27}{32}\cos\frac{3t}{2}, \\ -\frac{9}{16}\cos\frac{3t}{2} \end{pmatrix}$$

Векторное произведение

Векторное произведение $A = [\gamma'(t), \gamma''(t)]$ вычисляется как:

$$A_x = \left(-\sin t - \frac{1}{8}\sin\frac{t}{2}\right)\left(-\frac{9}{16}\sin\frac{3t}{2}\right) - \left(\frac{3}{8}\cos\frac{3t}{2}\right)\left(-\sin t - \frac{1}{16}\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$A_y = \cdots$$

Итоговые выражения

Кривизна и торсия:

$$k(t) = \frac{|A_x, A_y, A_z|}{|\gamma'(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{[A_x, A_y, A_z] \cdot \gamma'''(t)}{|[A_x, A_y, A_z]|^2}$$

$$y = k(x), \quad y = \tau(x)$$

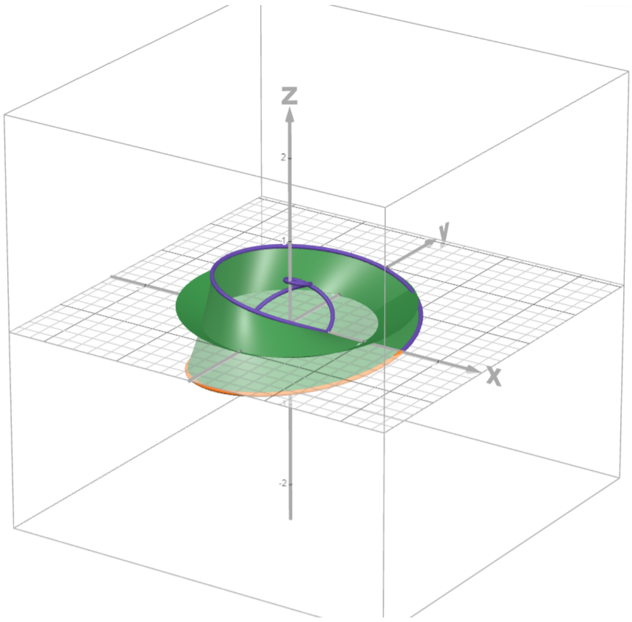

Рис. 1: График