Домашняя работа №11
по дисциплине "Дифференциальная геометрия и топология"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

Условие задачи

Вывести уравнение соприкасающейся окружности для произвольной параметризации.

Решение

Рассмотрим кривую, заданную параметрически:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

а также окружность с радиусом R, заданную в параметрическом виде:

$$r(t) = (R\cos t, R\sin t).$$

Чтобы найти уравнение соприкасающейся окружности, нужно определить её кривизну, радиус и вектор нормали.

№1 Нахождение кривизны окружности

Кривизна определяется как мера изгиба кривой в точке. Для параметрической кривой её значение вычисляется по формуле:

$$k(t) = \frac{\|r'(t), r''(t)\|}{|r'(t)|^3}.$$

Сначала найдем первую производную $r'(t)$ по параметру t:

$$r(t) = (R\cos t, R\sin t),$$

$$r'(t) = \left(\frac{d}{dt}(R\cos t), \frac{d}{dt}(R\sin t)\right) = (-R\sin t, R\cos t).$$

Теперь найдём вторую производную $r''(t)$:

$$r''(t) = \left(\frac{d}{dt}(-R\sin t), \frac{d}{dt}(R\cos t)\right) = (-R\cos t, -R\sin t).$$

Далее вычислим длины производных:

$$|r'(t)| = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = R,$$

$$|[r'(t), r''(t)]| = |R|^2.$$

Подставляя значения в формулу кривизны:

$$k(t) = \frac{|[r'(t), r''(t)]|}{|r'(t)|^3} = \frac{|R|^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, радиус окружности равен:

$$R = \frac{1}{k(t)}.$$

№2 Нахождение вектора нормали

Нормальный вектор направлен перпендикулярно касательной к кривой в точке. Для его нахождения нужно определить направление вектора производной и нормализовать его. Используем формулы для нормали:

$$v(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma''(t)|}., \quad n(t) = \frac{v(t)}{|v(t)|}.$$

Для кривой $\gamma(t)$ параметры $x(t)$ и $y(t)$ связаны производными. Формула кривизны также выражается как:

$$k(t) = \frac{|\gamma', \gamma''|}{|\gamma'|^3}.$$

И отсюда радиус определяется:

$$R = \frac{1}{k(t)} = \frac{|\gamma'|^3}{|[\gamma', \gamma'']|}.$$

Для двумерной кривой это упрощается до:

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - y'x''|}.$$

№3 Уравнение соприкасающейся окружности

Соприкасающаяся окружность в каждой точке $\gamma(t)$ состоит из трёх компонентов:

- вектора положения кривой $\gamma(t)$;
- отрицательного нормального вектора $n(t)$, умноженного на радиус R;
- параметрической записи окружности радиуса R.

Формула окружности:

$$R(t, \phi) = \gamma(t) - Rn(t) + r(\phi),$$

где $r(\phi)$ — это параметрическое представление окружности:

$$r(\phi) = (R\cos\phi, R\sin\phi).$$

Подставляя выражение для радиуса и нормали, получаем итоговую формулу:

$$R(t, \phi) = \gamma(t) - \frac{1}{k(t)}n(t) + \frac{1}{k(t)}(\cos\phi, \sin\phi).$$