Домашняя работа №5
по дисциплине "Дифференциальная геометрия и топология"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

1 Задание

Найти $Int(0,1)$ в топологии Зарисского.
Пусть:

$$X = \mathbb{R}$$

$$T = \text{все множества, являющиеся дополнениями конечных подмножеств, или пустое множество}$$

Решение:

Рассмотрим множество:

$$A = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, 0] \cup [1, +\infty))$$

Предположим, что существует такая точка $x \in A$, что найдётся её окрестность $U_x \subset Int(A)$, где $U_x = \mathbb{R} \setminus V$, при этом V — конечное множество.

$$V = \mathbb{R} \setminus U_x$$

$$\mathbb{R} \setminus A \subset V$$

$$V \supset \mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

Следовательно, V оказывается бесконечным, что противоречит предположению о его конечности. Таким образом, предположение оказалось неверным. Следовательно, $Int(0,1) = \emptyset$.

2 Задание

В $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_{\text{канонич}}$: найти $Cl([0,1]), Cl(\mathbb{Q}), Cl(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), Cl(\{a\})$ в ξ:

$$\xi = \begin{pmatrix} X = \{a, b, c, d\} \\ T_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\} \end{pmatrix}$$

Решение

Замыканием множества A называется совокупность всех его точек прикосновения, и обозначается как $Cl_x(A)$.

$$Cl_x(A) = \{x \in X \mid \forall U_x \quad U_x \cap A \neq \emptyset\}$$

$$Cl(A) = \bigcap F_i, \quad F_i - \text{замкнуто и} \quad F_i \supset A$$

Каноническая топология на $\mathbb{R}$ определяется как топология, в основе которой лежат открытые интервалы, то есть:

$$U \in \mathcal{T} \quad \Longleftrightarrow \quad U = \emptyset \quad \text{или} \quad \forall x \in U \, \exists V : V = \{x \mid |x - x_0| < \varepsilon\} : V \subseteq U$$

$$\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0) \cup (1; +\infty) \quad - \text{открытое}$$

$$\Rightarrow [0,1] \quad - \text{замкнутое, и является наименьшим замкнутым множеством, содержащим } A$$

$$Cl([0,1]) = [0,1]$$

Замыкание $Cl(\mathbb{Q})$

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall U_x \text{ в каждой окрестности существуют рациональные точки}$$

$$\text{Следовательно, любая точка}\, \mathbb{R} - \text{ точка прикосновения множества}\, \mathbb{Q}$$

$$Cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

Замыкание $Cl(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$$\forall x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\, \forall\, U_x, \text{ в каждой окрестности существуют рациональные точки}$$

$$\text{Следовательно, любая точка множества}\, \mathbb{R} - \text{ точка прикосновения множества}\, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$Cl(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

Замыкание $Cl(\{a\})$

$$\{a, c, d\} = X \setminus \{d\}$$

$$Cl(\{a\}) = \{a, c, d\}$$

Задание

Показать, что множество A замкнуто тогда и только тогда, когда его граница A содержится в самом множестве A, то есть:

$$A\, \text{замкнуто} \quad \Longleftrightarrow \quad \partial A \subseteq A$$

Решение

Граница $A = \partial A$

Необходимость

A — замкнутое множество $\Rightarrow X \setminus A \in T \Rightarrow \forall x \in X \setminus A\, \exists U_x = X \setminus A : U_x \cap A = \emptyset \Rightarrow x$ не является граничной точкой для A $\forall x \in X \setminus A \Rightarrow \partial A \subseteq A$

Достаточность

$\partial A \subseteq A \Rightarrow \exists x \in A : \forall U_x,\, U_x \cap A \neq \emptyset \vee U_x \cap V \neq \emptyset,\, V = X \setminus A$
Поскольку $\partial A \nsubseteq V$, то $\forall x \in V\, \exists U_x \subseteq V$, так что $U_x \cap A = \emptyset$
Следовательно, $Cl(A) = A$ Так как Cl — замкнуто, то и A — замкнутое