

# Домашняя работа №13

## по дисциплине "Дифференциальная геометрия и топология"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сст

### Условие задачи

Вычислить коэффициент  $I$ , где  $I$  — параметр, проверяющий свойства цилиндра.

### Решение

#### Параметризация цилиндра

Цилиндр параметризуется следующим образом:

$$\vec{R}(u, v) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos u, \\ R \cdot \sin u, \\ v \end{pmatrix},$$

где:

- $R$  — радиус цилиндра;
- $u$  — угол, задающий положение точки на окружности (основе цилиндра);
- $v$  — вертикальная координата вдоль оси цилиндра.

#### Частные производные параметризации

Рассчитаем частные производные параметризации по параметрам  $u$  и  $v$ .

##### Производная по $u$ :

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(R \cdot \cos u), \\ \frac{\partial}{\partial u}(R \cdot \sin u), \\ \frac{\partial}{\partial u}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin u, \\ R \cdot \cos u, \\ 0 \end{pmatrix}.$$

##### Производная по $v$ :

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v}(R \cdot \cos u), \\ \frac{\partial}{\partial v}(R \cdot \sin u), \\ \frac{\partial}{\partial v}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \\ 0, \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### Коэффициенты метрики

С помощью частных производных определим коэффициенты первой фундаментальной формы.

##### Коэффициент $E$ :

$$E = \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \right\|^2 = (-R \cdot \sin u)^2 + (R \cdot \cos u)^2 + 0^2.$$

Учитывая тригонометрическую идентичность  $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ , получаем:

$$E = R^2 \cdot (\sin^2 u + \cos^2 u) = R^2.$$

##### Коэффициент $F$ :

$$F = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} = (-R \cdot \sin u) \cdot 0 + (R \cdot \cos u) \cdot 0 + 0 \cdot 1.$$

Отсюда:

$$F = 0.$$

**Коэффициент  $G$ :**

$$G = \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \right\|^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1.$$

## **Итоговый результат**

Коэффициенты метрики цилиндра:

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Таким образом, параметризация цилиндра выражается в следующем виде:

$$\vec{R}(u, v) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos u, \\ R \cdot \sin u, \\ v \end{pmatrix},$$

где коэффициенты  $E$ ,  $F$ ,  $G$  подтверждают корректность параметризации.