ИДЗ №2

по дисциплине "Уравнения математической физики"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

Вариант №11

Задание 1

Решить краевую задачу для уравнения Лапласса $\Delta u = 0$

Вне круга $r \geq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, с граничным условием $u(a, \varphi) = 14(\cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi)$.

Решение

Рассмотрим уравнение Лапласа вне круга радиуса $a > 0$:

$$\Delta u = 0, \quad r \geq a, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

с граничным условием:

$$u(a, \varphi) = 14(\cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi).$$

В полярных координатах (r, φ) уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Общее ограниченное при $r \to \infty$ решение уравнения Лапласа вне круга радиуса a:

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos(n\varphi) + B_n \left(\frac{a}{r}\right)^n \sin(n\varphi) \right).$$

Подставляем граничное условие:

$$u(a, \varphi) = 14(\cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi).$$

Используем тригонометрические тождества:

- $\cos^3\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos(3\varphi)$, - $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}$.

Тогда:

$$u(a,\varphi) = 14\left(\frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos(3\varphi) + \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\right) = 7 + \frac{21}{2}\cos\varphi - 7\cos(2\varphi) + \frac{7}{2}\cos(3\varphi).$$

Сравниваем с рядом Фурье:

$$u(a,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)\right).$$

Получаем значения коэффициентов:

$$A_0 = 7, \quad A_1 = \frac{21}{2}, \quad A_2 = -7, \quad A_3 = \frac{7}{2}, \quad A_n = 0\ (n \geq 4), \quad B_n = 0\ (\forall n).$$

Подставляем найденные коэффициенты в общее выражение:

$$u(r,\varphi) = 7 + \frac{21}{2}\cdot\frac{a}{r}\cos\varphi - 7\cdot\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos(2\varphi) + \frac{7}{2}\cdot\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos(3\varphi)$$

Ответ $u(r,\varphi) = 7 + \frac{21}{2}\cdot\frac{a}{r}\cos\varphi - 7\cdot\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos(2\varphi) + \frac{7}{2}\cdot\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos(3\varphi)$