# ИДЗ №4

# по дисциплине "Функциональный анализ"

Винницкая Дина Сергеевна

Группа: Б9122-02.03.01сцт

## Задание 8.33. (а)

Найти ортогональную проекцию элемента

$$x_0 = \left\{ \frac{1}{k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$$

на подпространство $L$, а также расстояния $\rho(x_0, L)$ и $\rho(x_0, L^{\perp})$, если

$$L = \{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 : \xi_1 - 3\xi_3 + \xi_5 = 0 \} .$$

## Решение

**Шаг 1. Определяем направление ортогонального дополнения $L^{\perp}$.**

Подпространство $L$ задано одним линейным уравнением — это значит, что $L$ является гиперплоскостью в $\ell_2$, перпендикулярной некоторому вектору $a$. Этот вектор получается из коэффициентов уравнения:

$$\xi_1 - 3\xi_3 + \xi_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = (1, 0, -3, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

Вектор $a$ задаёт линейную форму, ортогональную к $L$.

Таким образом,

$$L^{\perp} = \mathrm{span}(a)$$

— одномерное подпространство, порождённое вектором $a$. **Шаг 2. Строим ортогональную проекцию элемента $x_0$ на $L^{\perp}$.**

Чтобы найти проекцию вектора $x_0$ на прямую, порождённую $a$, используем стандартную формулу проекции:

$$P_{L^{\perp}} x_0 = \frac{\langle x_0, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a.$$

В числителе — скалярное произведение $x_0$ и $a$:

$$\langle x_0, a\rangle = 1 \cdot \frac{1}{1} + (-3) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{5} = 1 - 1 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

В знаменателе — квадрат нормы вектора $a$:

$$\langle a, a\rangle = 1^2 + (-3)^2 + 1^2 = 1 + 9 + 1 = 11.$$

Тогда проекция:

$$P_{L^\perp} x_0 = \frac{1}{5 \cdot 11} \cdot a = \frac{1}{55} \cdot (1, 0, -3, 0, 1, 0, 0, \dots).$$

**Шаг 3. Вычисляем проекцию $x_0$ на само подпространство $L$.**

Ортогональная проекция на $L$ получается вычитанием проекции на $L^\perp$ из вектора $x_0$:

$$P_L x_0 = x_0 - P_{L^\perp} x_0 = x_0 - \frac{1}{55} \cdot a.$$

Явно:

$$P_L x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right) - \left(\frac{1}{55}, 0, -\frac{3}{55}, 0, \frac{1}{55}, 0, \dots\right).$$

**Шаг 4. Находим расстояние от $x_0$ до подпространства $L$.**

Так как $P_{L^\perp} x_0$ — это компонент вектора, перпендикулярный $L$, то его длина — это расстояние от $x_0$ до $L$:

$$\rho(x_0, L) = \|P_{L^\perp} x_0\| = \left\|\frac{1}{55} \cdot a\right\| = \frac{1}{55} \cdot \|a\| = \frac{1}{55} \cdot \sqrt{11} = \frac{\sqrt{11}}{55} = \frac{1}{5\sqrt{11}}.$$

**Шаг 5. Находим расстояние от $x_0$ до $L^\perp$.**

Это расстояние равно длине проекции $x_0$ на подпространство $L$, и его можно найти через теорему Пифагора:

$$\|x_0\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\|P_{L^\perp} x_0\|^2 = \left(\frac{1}{55}\right)^2 \cdot \|a\|^2 = \frac{1}{3025} \cdot 11 = \frac{11}{3025} = \frac{1}{275}.$$

Следовательно:

$$\rho(x_0, L^\perp) = \sqrt{\|x_0\|^2 - \|P_{L^\perp} x_0\|^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{275}}.$$

**Итог:**

- Ортогональная проекция на $L$:

$$P_L x_0 = x_0 - \frac{1}{55}(1, 0, -3, 0, 1, 0, \dots)$$

- Расстояние до $L$:

$$\rho(x_0, L) = \frac{1}{5\sqrt{11}}$$

- Расстояние до $L^\perp$:

$$\rho(x_0, L^\perp) = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{275}}$$