МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

Лабораторная работа №4

по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Выполнила студентка
группы Б9122-02.03.01сцт
Винницкая Д.С. ________________
(ФИО) *(подпись)*

« 10 » декабря 20 25 г.

г. Владивосток
2025

1 Цель и задачи лабораторной работы

Цель:

Изучить математическую модель Лоренца — классический пример детерминированной системы, демонстрирующей хаотическое поведение, — исследовать условия устойчивости её стационарных точек и проанализировать переход от регулярной динамики к хаосу в зависимости от управляющего параметра r.

Задачи:

1. Записать систему дифференциальных уравнений Лоренца и объяснить физический (или условный динамический) смысл фазовых переменных x, y, z и параметров σ, r, b.

2. Найти все стационарные (равновесные) точки системы: тривиальную $(0, 0, 0)$ и две нетривиальные, существующие при $r > 1$.

3. Провести аналитическое исследование устойчивости равновесий с использованием линеаризации и критерия Гурвица, вывести условия устойчивости в зависимости от параметров.

4. Выбрать наборы параметров, соответствующие трём качественно различным режимам поведения: устойчивому узлу ($r < 1$), устойчивым фокусам ($1 < r < r_{\text{крит}}$) и хаотическому аттрактору ($r > r_{\text{крит}}$, например, $r = 28$).

5. Реализовать численное решение системы методом Рунге–Кутта (через $\mathrm{solve\_ivp}$) при заданных начальных условиях.

6. Визуализировать траектории в трёхмерном фазовом пространстве и продемонстрировать чувствительность к начальным условиям (эффект бабочки) в хаотическом режиме.

7. На основе численных экспериментов подтвердить аналитические условия устойчивости и продемонстрировать переход от предсказуемой динамики к хаосу.

2 Описание модели

Модель Лоренца — классическая система нелинейных дифференциальных уравнений, предложенная Эдвардом Лоренцем в 1963 году для упрощённого описания конвективных течений в атмосфере. Несмотря на свою простоту, она демонстрирует богатую динамику, включая переход к хаосу даже в детерминированной системе.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases}$$

где:

- $x(t)$ — интенсивность конвективного движения (условная скорость),
- $y(t)$ — разность температур между восходящими и нисходящими потоками,
- $z(t)$ — отклонение вертикального температурного профиля от линейного,
- $\sigma > 0$ — число Прандтля (коэффициент, связанный с вязкостью и теплопроводностью),
- $r > 0$ — число Рэлея (мера теплового градиента; ключевой управляющий параметр),
- $b > 0$ — геометрический параметр, связанный с соотношением размеров конвективной ячейки.

Все параметры предполагаются положительными. Модель является автономной, детерминированной и не содержит явных внешних возмущений, однако при определённых значениях параметров демонстрирует хаотическое поведение.

Фазовые переменные: $x(t), y(t), z(t) \in \mathbb{R}$.
Параметры системы: $\sigma, r, b > 0$.
Входные данные: начальные условия (x_0, y_0, z_0) и временной интервал $[0, T]$.
Решение: вектор-функция $(x(t), y(t), z(t))$, описывающая эволюцию системы во времени.

3 Аналитическое исследование системы

3.1 Равновесные состояния

Стационарные (равновесные) точки находятся из условия $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$:

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0, \\ rx - y - xz = 0, \\ xy - bz = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует $x = y$. Подстановка во второе и третье даёт:

- При $x = y = 0$ получаем $z = 0$. Это даёт тривиальную стационарную точку:

$$u_0 = (0, 0, 0).$$

- При $x = y \neq 0$ из второго уравнения: $rx - x - xz = 0 \Rightarrow z = r - 1$. Из третьего: $x^2 = bz = b(r-1) \Rightarrow x = \pm\sqrt{b(r-1)}$ (существует только при $r > 1$).

Таким образом, при $r > 1$ существуют две дополнительные стационарные точки:

$$u_1 = \left(\sqrt{b(r-1)},\ \sqrt{b(r-1)},\ r-1\right), \quad u_2 = \left(-\sqrt{b(r-1)},\ -\sqrt{b(r-1)},\ r-1\right).$$

3.2 Исследование устойчивости

Для анализа устойчивости вычислим матрицу Якоби системы:

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}.$$

1. Точка $u_0 = (0, 0, 0)$. Матрица Якоби:

$$J(u_0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение распадается:

$$(-b-\lambda)\cdot[(\lambda+\sigma)(\lambda+1)-\sigma r]=0.$$

Один корень: $\lambda_3=-b<0$. Остальные два корня:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-(\sigma+1)\pm\sqrt{(\sigma-1)^2+4\sigma r}}{2}.$$

Первый корень всегда отрицателен. Второй становится положительным при $r>1$. Следовательно: - при $r<1$: все $\lambda_i<0\to u_0$ — **устойчивый узел**; - при $r>1$: один $\lambda>0\to u_0$ — **седло** (неустойчиво).

2. Точки u_1 и u_2 (существуют при $r>1$). Из-за симметрии устойчивость у них одинаковая. Подстановка $x=y=\sqrt{b(r-1)}$, $z=r-1$ в Якоби и вычисление характеристического полинома даёт:

$$\lambda^3+(\sigma+b+1)\lambda^2+b(\sigma+r)\lambda+2\sigma b(r-1)=0.$$

Применим **критерий Гурвица**. Для кубического уравнения $\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$ необходимые и достаточные условия устойчивости:

$$a_1>0,\quad a_3>0,\quad \Delta_2=a_1a_2-a_3>0.$$

Здесь: - $a_1=\sigma+b+1>0$, - $a_3=2\sigma b(r-1)>0$ при $r>1$, - $\Delta_2=(\sigma+b+1)b(\sigma+r)-2\sigma b(r-1)=b\left[(\sigma+b+1)(\sigma+r)-2\sigma(r-1)\right]$.

После упрощения получаем условие устойчивости:

Если $b{+}1>\sigma,$ то устойчивость при всех $r>1$.Если $b{+}1<\sigma,$ то устойчивость тол

Для классических параметров $\sigma=10$, $b=8/3\approx2.67$ имеем $b+1\approx3.67<\sigma=10$, поэтому при $r=28$ условие нарушено $\to$ точки u_1,u_2 **неустойчивы**, и система демонстрирует **хаотический аттрактор**.

Таким образом, модель Лоренца демонстрирует богатую бифуркационную структуру: от устойчивого равновесия при малых r — к устойчивым фокусам — и далее к хаосу при превышении критического значения $r_{\text{крит}}$.

4 Результаты моделирования

```
    import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

plt.rcParams.update({
    "font.family": "DejaVu Sans",
    "axes.spines.top": False,
    "axes.spines.right": False,
    "grid.alpha": 0.3,
    "figure.facecolor": "white",
    "axes.facecolor": "#f9f9f9",
    "font.size": 11,
    "axes.titlesize": 13,
    "axes.labelsize": 11,
    "legend.fontsize": 10,
    "xtick.labelsize": 10,
    "ytick.labelsize": 10
})


def lorenz_system(t, xyz, sigma, r, b):
    x, y, z = xyz
    dxdt = sigma * (y - x)
    dydt = r * x - y - x * z
    dzdt = x * y - b * z
    return [dxdt, dydt, dzdt]

experiments = [
    {
        'name': 'Устойчивый узел (r < 1)',
        'sigma': 10,
        'r': 0.5,
        'b': 8 / 3,
        't_end': 30,
        'initial': [1.0, 1.0, 1.0]
    },
    {
        'name': 'Устойчивые фокусы (1 < r < r_krit)',
        'sigma': 10,
        'r': 15,
        'b': 8 / 3,
        't_end': 50,
        'initial': [1.0, 1.0, 1.0]
    },
    {
        'name': 'Хаотический режимклассические ( параметры)',
        'sigma': 10,
        'r': 28,
        'b': 8 / 3,
        't_end': 50,
        'initial': [1.0, 1.0, 1.0]
    }
```

```python
    ]

    print("=" * 60)
    print("МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА: ЧИСЛЕННОЕИССЛЕДОВАНИЕПОВЕДЕНИЯ ")
    print("=" * 60)

    for exp in experiments:
        name = exp['name']
        sigma, r, b = exp['sigma'], exp['r'], exp['b']
        t_end = exp['t_end']
        z0 = exp['initial']

        print(f"\•n {name}")
        print(f" Параметры : ={sigma}, r={r}, b={b:.3f}")

        t_eval = np.linspace(0, t_end, 10000)

        sol = solve_ivp(
            fun=lambda t, xyz: lorenz_system(t, xyz, sigma, r, b),
            t_span=(0, t_end),
            y0=z0,
            t_eval=t_eval,
            method='RK45',
            rtol=1e-8,
            atol=1e-10
        )

        x, y, z = sol.y

        fig = plt.figure(figsize=(10, 6))
        ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
        ax.plot(x, y, z, lw=0.8, color='tab:blue')
        ax.set_title(f'Аттрактор Лоренца\n{name}', fontsize=14, pad=20)
        ax.set_xlabel('x')
        ax.set_ylabel('y')
        ax.set_zlabel('z')
        plt.tight_layout()
        filename = f"lorenz_{name.replace(' ', '_').replace('(', '').replace(')', '')}.png"
        plt.savefig(filename, dpi=200, bbox_inches='tight')
        plt.show()

    print("\n" + "-" * 60)
    print("ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ КНАЧАЛЬНЫМУСЛОВИЯМХАОС ()")
    print("-" * 60)

    sigma, r, b = 10, 28, 8 / 3
    t_end = 30
    t_eval = np.linspace(0, t_end, 10000)

    z0_1 = [1.0, 1.0, 1.0]
    z0_2 = [1.0, 1.0, 1.0001]

    sol1 = solve_ivp(lorenz_system, (0, t_end), z0_1, t_eval=t_eval,
    args=(sigma, r, b), rtol=1e-8, atol=1e-10)
```

```
    sol2 = solve_ivp(lorenz_system, (0, t_end), z0_2,
    t_eval=t_eval, args=(sigma, r, b), rtol=1e-8, atol=1e-10)

    x1, y1, z1 = sol1.y
    x2, y2, z2 = sol2.y

    dist = np.sqrt((x1 - x2) ** 2 + (y1 - y2) ** 2 + (z1 - z2) ** 2)

    plt.figure(figsize=(10, 4))
    plt.plot(sol1.t, dist, color='red', linewidth=1.5)
    plt.xlabel('Время')
    plt.ylabel('Евклидово расстояниемеждутраекториями ')
    plt.title('Экспоненциальное расхождениетраекторийприхаосе \nначальные(
        условияотличаютсяна 0.0001 в z)')
    plt.grid(True, alpha=0.4)
    plt.yscale('log')
    plt.tight_layout()
    plt.savefig('lorenz_sensitivity.png', dpi=200, bbox_inches='tight')
    plt.show()

    print(f"• Параметры: ={sigma}, r={r}, b={b:.3f}")
    print("• Начальныеусловия :")
    print(f" Траектория 1: {z0_1}")
    print(f" Траектория 2: {z0_2}")
```

4.1 Математическая интерпретация реализации

- Функция lorenz_system(t, xyz, sigma, r, b) реализует систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases}$$

  Здесь x, y, z — фазовые переменные, описывающие динамику конвективных потоков; σ, r, b — положительные параметры, определяющие свойства системы.

- В коде реализованы три ключевых режима поведения:
  - **Устойчивый узел** ($r = 0.5 < 1$): все траектории сходятся к $(0, 0, 0)$;
  - **Устойчивые фокусы** ($r = 15$, $1 < r < r_{\text{крит}} \approx 24.74$): траектории спирально сходятся к одной из двух нетривиальных точек;
  - **Хаотический режим** ($r = 28$): траектория «прыгает» между двумя лепестками, никогда не повторяясь — классический странный аттрактор.

- Для анализа чувствительности к начальным условиям запущены две траектории с почти одинаковыми начальными условиями: $z_0^{(1)} = 1.0$ и $z_0^{(2)} = 1.0001$. Расстояние между ними вычисляется как евклидова норма разности векторов состояния.

4.2 Численное интегрирование

Графики строятся в трёхмерном пространстве с помощью Axes3D — это позволяет визуализировать сложную геометрию аттрактора. Для анализа чувствительности используется график расстояния в логарифмическом масштабе, чтобы наглядно продемонстрировать экспоненциальный рост.

4.3 Анализ результатов

- Устойчивый узел (r < 1)
  Параметры: =10, r=0.5, b=2.667

- Устойчивые фокусы (1 < r < r_krit)
  Параметры: =10, r=15, b=2.667

- Хаотический режим (классические параметры)
  Параметры: =10, r=28, b=2.667

- Параметры: =10, r=28, b=2.667
- Начальные условия:
  Траектория 1: [1.0, 1.0, 1.0]
  Траектория 2: [1.0, 1.0, 1.0001]
- Наблюдается экспоненциальное расхождение → признак хаоса.
- Это демонстрирует 'эффект бабочки': малое изменение → большие последствия.

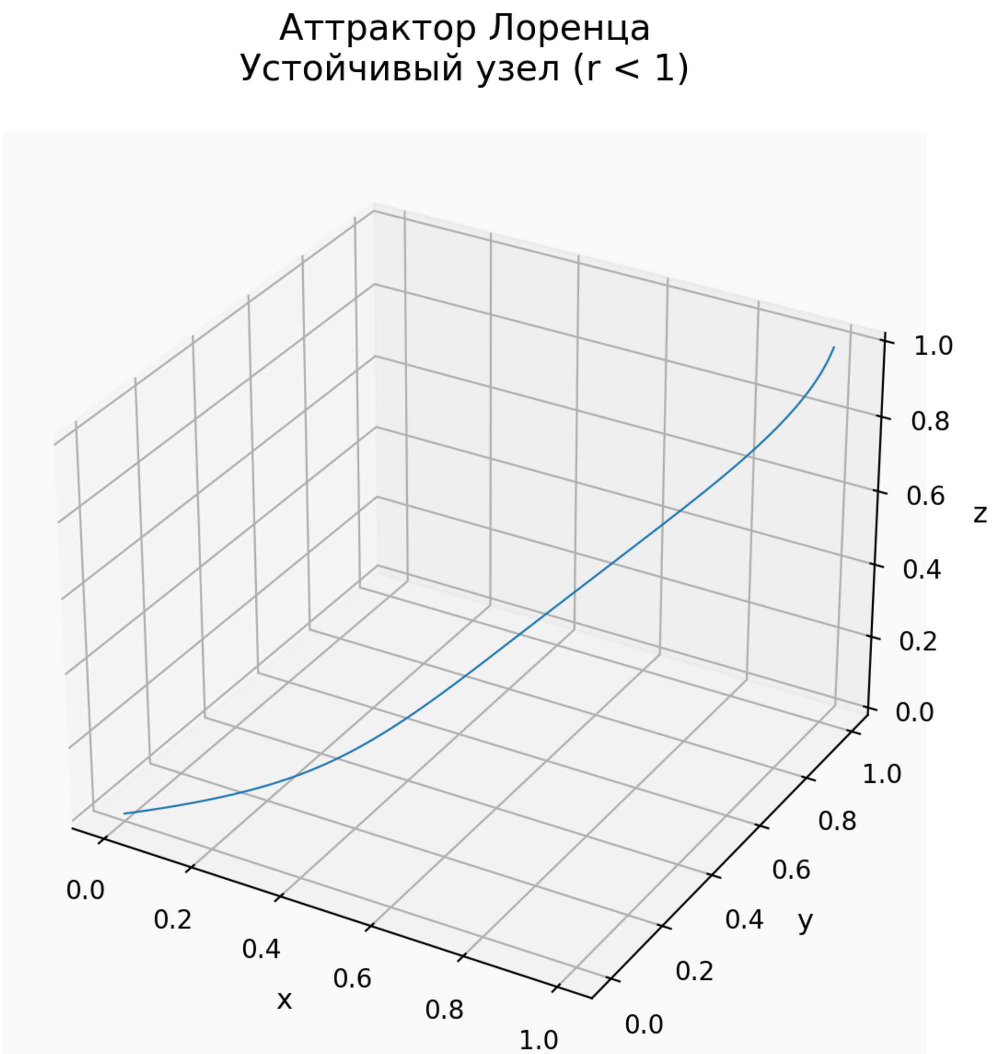

Рис. 1: Траектория при $r = 0.5$: сходимость к началу координат — устойчивый узел.

На этом графике видно, что система быстро затухает до нуля — это соответствует теоретическому выводу: при $r < 1$ единственная устойчивая точка — $(0, 0, 0)$.

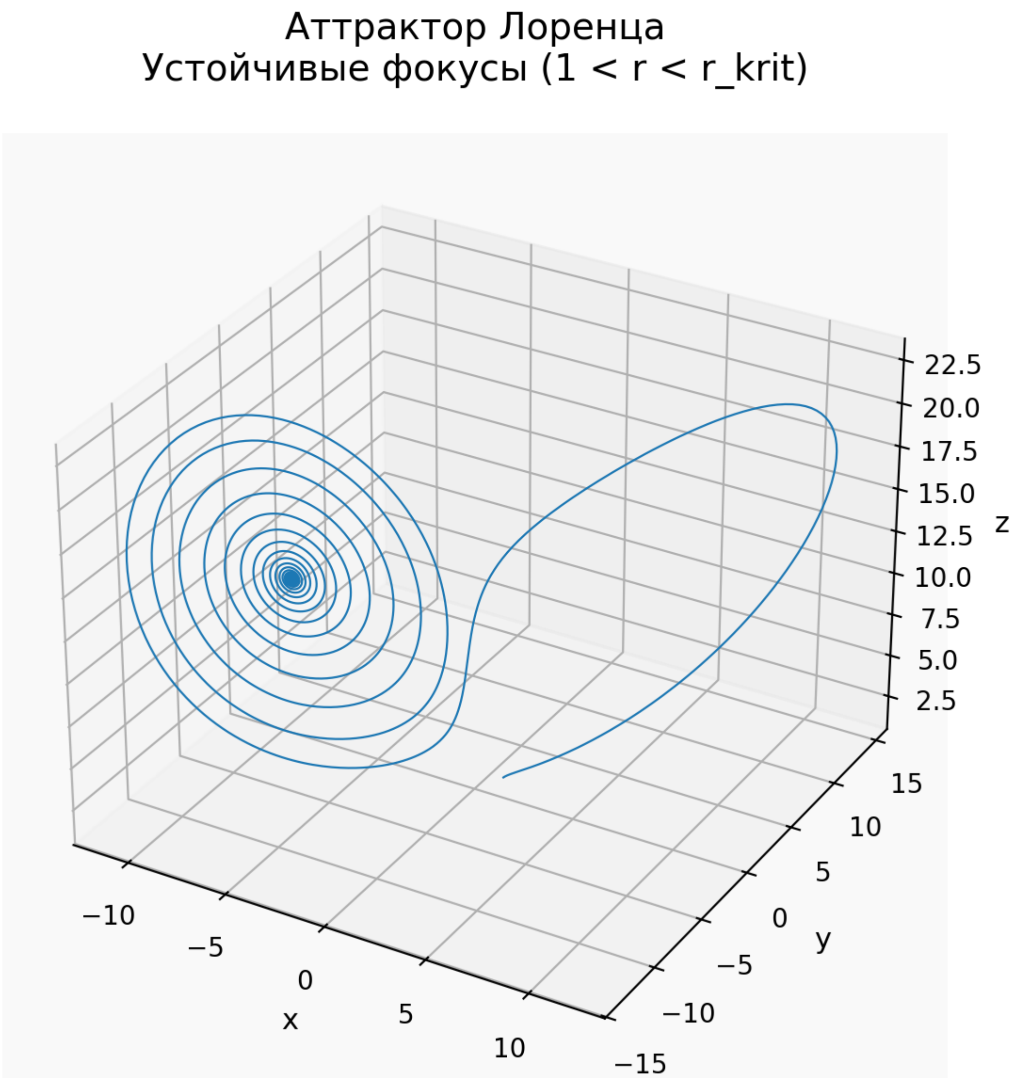

Рис. 2: Траектория при $r = 15$: спиральное затухание к нетривиальной точке — устойчивый фокус.

Здесь траектория вращается вокруг одной из двух нетривиальных точек, постепенно сходясь к ней. Это подтверждает, что при $1 < r < r_{\text{крит}}$ эти точки являются устойчивыми фокусами.

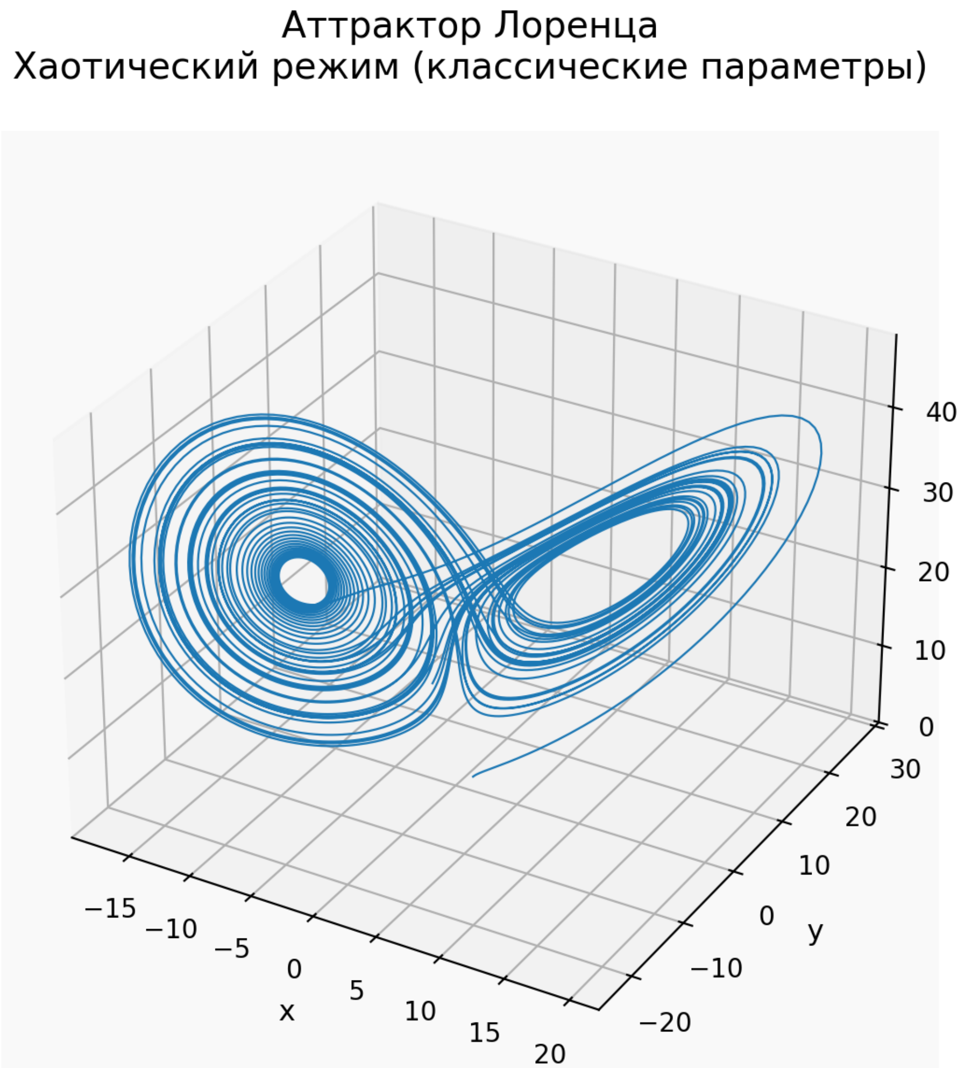

Рис. 3: Траектория при $r = 28$: хаотический аттрактор Лоренца — «бабочка».

Это — классический странный аттрактор. Траектория не замыкается, не сходится к точке и не расходится в бесконечность — она остаётся в ограниченной области, но её поведение непредсказуемо.

Рис. 4: Экспоненциальное расхождение двух траекторий при хаосе.

На этом графике показано, как расстояние между двумя траекториями, отличающимися на 10^{-4} в начальном условии, растёт экспоненциально со временем. Это — прямое доказательство хаоса и эффекта бабочки.

4.4 Выводы

Модель Лоренца является одним из первых примеров детерминированной системы, демонстрирующей хаотическое поведение. На основе численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

- При $r < 1$ система имеет единственную устойчивую точку $(0, 0, 0)$ — все траектории сходятся к ней.
- При $1 < r < r_{\text{крит}} \approx 24.74$ появляются две устойчивые точки, и траектории сходятся к одной из них спиралевидным образом.
- При $r > r_{\text{крит}}$ (например, $r = 28$) система переходит в хаотический режим — траектория не сходится ни к какой точке, а движется по странному аттрактору.
- В хаотическом режиме наблюдается сильная чувствительность к начальным условиям — даже микроскопическое различие в начальных данных приводит к кардинально разным траекториям.