МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

Теоретические Вопросы

по дисциплине
«Методы сплайн-функций»

Направление подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Выполнила студентка
группы Б9122-02.03.01сцт
Винницкая Д.С. ____________

(ФИО) *(подпись)*

« 27 » ноября 20 25 г.

г. Владивосток
2025

1 Задание №1 Вывод базисных функций кубического эрмитова сплайна

Пусть на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ задан кубический полином:

$$S(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - x_i) + a_{i2}(x - x_i)^2 + a_{i3}(x - x_i)^3.$$

Его производная:

$$S'(x) = a_{i1} + 2a_{i2}(x - x_i) + 3a_{i3}(x - x_i)^2.$$

Применяя граничные условия:

$$\begin{aligned}
S(x_i) &= a_{i0} = f_i, \\
S(x_{i+1}) &= a_{i0} + a_{i1}h_i + a_{i2}h_i^2 + a_{i3}h_i^3 = f_{i+1}, \\
S'(x_i) &= a_{i1} = f_i', \\
S'(x_{i+1}) &= a_{i1} + 2a_{i2}h_i + 3a_{i3}h_i^2 = f_{i+1}'.
\end{aligned}$$

Подставляя известные значения $a_{i0} = f_i$ и $a_{i1} = f_i'$ во второе и четвертое уравнения, получается система:

$$\begin{cases}
a_{i2}h_i^2 + a_{i3}h_i^3 = f_{i+1} - f_i - f_i'h_i, \\
2a_{i2}h_i + 3a_{i3}h_i^2 = f_{i+1}' - f_i'.
\end{cases}$$

Решая эту систему относительно a_{i2} и a_{i3}.

Умножив первое уравнение на 2:

$$2a_{i2}h_i^2 + 2a_{i3}h_i^3 = 2(f_{i+1} - f_i - f_i'h_i).$$

Вычитая из него второе уравнение, умноженное на h_i:

$$(2a_{i2}h_i^2 + 2a_{i3}h_i^3) - (2a_{i2}h_i^2 + 3a_{i3}h_i^3) = 2(f_{i+1} - f_i - f_i'h_i) - (f_{i+1}' - f_i')h_i,$$

что дает:

$$-a_{i3}h_i^3 = 2(f_{i+1} - f_i - f_i'h_i) - (f_{i+1}' - f_i')h_i.$$

Отсюда:

$$a_{i3} = \frac{f_{i+1}'h_i - 2f_{i+1} + 2f_i + f_i'h_i}{h_i^3}.$$

Аналогично, подставив a_{i3} в одно из уравнений, можно найти:

$$a_{i2} = \frac{3f_{i+1} - 3f_i - 2f_i'h_i - f_{i+1}'h_i}{h_i^2}.$$

Теперь подставив найденные коэффициенты в исходный полином $S(x)$:

$$S(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \left(\frac{3f_{i+1} - 3f_i - 2f_i'h_i - f_{i+1}'h_i}{h_i^2}\right)(x - x_i)^2 +$$

$$+ \left(\frac{f_{i+1}'h_i - 2f_{i+1} + 2f_i + f_i'h_i}{h_i^3}\right)(x - x_i)^3.$$

Введя нормированную переменную $t = \frac{x - x_i}{h_i}$, тогда $x - x_i = th_i$, и:

$$S(x) = f_i + f_i'th_i + \left(\frac{3f_{i+1} - 3f_i - 2f_i'h_i - f_{i+1}'h_i}{h_i^2}\right)t^2h_i^2 +$$

$$+ \left(\frac{f_{i+1}'h_i - 2f_{i+1} + 2f_i + f_i'h_i}{h_i^3}\right)t^3h_i^3.$$

Упрощая:

$$S(x) = f_i + f_i'th_i + (3f_{i+1} - 3f_i - 2f_i'h_i - f_{i+1}'h_i)t^2 +$$

$$+(f_{i+1}'h_i - 2f_{i+1} + 2f_i + f_i'h_i)t^3 =$$

$$= f_i(1 - 3t^2 + 2t^3) + f_{i+1}(3t^2 - 2t^3) + f_i' h_i(t - 2t^2 + t^3) + f_{i+1}' h_i(-t^2 + t^3).$$

Таким образом, можно записать:

$$S(x) = \phi_1(t) f_i + \phi_2(t) f_{i+1} + \phi_3(t) h_i f_i' + \phi_4(t) h_i f_{i+1}',$$

где базисные функции:

$$\begin{aligned}
&\phi_1(t) = (1 - t)^2(1 + 2t) = 1 - 3t^2 + 2t^3, \\
&\phi_2(t) = t^2(3 - 2t) = 3t^2 - 2t^3, \\
&\phi_3(t) = t(1 - t)^2 = t - 2t^2 + t^3, \\
&\phi_4(t) = -t^2(1 - t) = -t^2 + t^3.
\end{aligned}$$

2 Задание №2 Вывод кубическкого сплайна

Вывод кубическкого сплайна по наклонам

Целью данного вывода является построение **кубического сплайна класса** C^2, удовлетворяющего условиям:

- $S(x_i) = f_i$ — интерполяция значений функции,
- $S'(x_i) = m_i$ — заданные наклоны (производные),
- $S''(x_i)$ — непрерывна во всех внутренних узлах.

Сплайн на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ представляется как кубический полином, зависящий от значений функции и наклонов на концах сегмента. Для обеспечения C^2-гладкости необходимо приравнять вторые производные в узлах слева и справа.
На каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн $S_i(x)$ выражается через базисные функции Эрмита:

$$S_i(x) = f_i \cdot t^2(3-2t) + f_{i+1} \cdot t^2(3-2t) + h_i \cdot m_i \cdot t(1-t)^2 + h_i \cdot m_{i+1} \cdot t^2(t-1),$$

где:

- $t = \dfrac{x - x_i}{h_i}$ — нормированная переменная, $t \in [0, 1]$,
- $h_i = x_{i+1} - x_i$ — длина сегмента,
- $f_i = S(x_i)$, $f_{i+1} = S(x_{i+1})$ — значения функции,
- $m_i = S'(x_i)$, $m_{i+1} = S'(x_{i+1})$ — наклоны (производные).

Это стандартное представление кубического эрмитова сплайна, которое автоматически обеспечивает непрерывность функции и первой производной.

Дифференцируя $S_i(x)$ дважды по x. Учитывая, что $t = \dfrac{x - x_i}{h_i}$, получаем $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{h_i}$
На каждом узле x_i сплайн должен удовлетворять двум условиям:

$$S(x_i) = f_i$$

Значение функции в узле совпадает с заданным значением f_i.

$$S'(x_i) = m_i$$

Производная (наклон) в узле равна заданному значению m_i.

На интервале $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн $S_i(x)$ выражается через базисные функции Эрмита:

$$S_i(x) = f_i \cdot t^2(3-2t) + f_{i+1} \cdot t^2(3-2t) + h_i \cdot m_i \cdot t(1-t)^2 + h_i \cdot m_{i+1} \cdot t^2(t-1)$$

где $t = \dfrac{x - x_i}{h_i}$ — нормированная переменная, $h_i = x_{i+1} - x_i$.
Чтобы сплайн был класса C^2, необходимо, чтобы вторая производная была одинаковой слева и справа от узла x_i.
Рассмотрим левый сегмент $[x_{i-1}, x_i]$. На нём используется переменная:

$$t = \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}$$

Тогда вторая производная на этом сегменте:

$$S''_{i-1}(x) = f_{i-1} \cdot \frac{6-12t}{h_{i-1}^2} + f_i \cdot \frac{6-12t}{h_{i-1}^2} + h_{i-1} \cdot m_{i-1} \cdot \frac{6t-4}{h_{i-1}} + h_{i-1} \cdot m_i \cdot \frac{6t-2}{h_{i-1}}$$

Подставляя $t = 1$ (соответствует точке $x = x_i$), получаем:

$$S''_{i-1}(x_i) = -\left(f_{i-1} + f_i\right) \cdot \frac{6}{h_{i-1}^2} + \frac{2}{h_{i-1}}(2m_i + m_{i-1})$$

Теперь приравниваем это к значению справа — $S''_i(x_i)$ — и получаем условие непрерывности.

В точке x_i (внутренний узел) вторая производная должна быть одинаковой слева и справа:

$$(f_i + f_{i+1}) \cdot \frac{6}{h_i^2} - \frac{2}{h_i}(2m_i + m_{i+1}) = -\left(f_{i-1} + f_i\right) \cdot \frac{6}{h_{i-1}^2} + \frac{2}{h_{i-1}}(2m_i + m_{i-1})$$

Переносим все члены влево и группируем по m_i:

$$3\frac{f_i + f_{i+1}}{h_i^2} + 3\frac{f_{i-1} + f_i}{h_{i-1}^2} = \frac{2m_i + m_{i+1}}{h_i} + \frac{2m_i + m_{i-1}}{h_{i-1}}$$

Это — основное уравнение для наклонов m_i.
Оно связывает три соседних наклона: m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, и содержит известные значения функции f_j и длины сегментов h_j.

Граничные условия

Для замыкания системы необходимо задать два дополнительных условия на концах интервала $[a, b] = [x_0, x_N]$.
Границы по первой производной
Если не заданы производные на концах, можно положить:

$$S'(a) = f'(a), \quad S'(b) = f'(b)$$

Тогда просто:

$$m_0 = f_0', \quad m_N = f_N'$$

Границы по второй производной
Если известны вторые производные на концах:

$$S''(a) = f''(a), \quad S''(b) = f''(b)$$

Рассмотрим левый край ($x = a = x_0$):
На сегменте $[x_0, x_1]$ при $x = x_0$ имеем $t = 0$:

$$S_0''(x) = f_0 \cdot \frac{6 - 12t}{h_0^2} + f_1 \cdot \frac{6 - 12t}{h_0^2} + m_0 \cdot \frac{6t - 4}{h_0} + m_1 \cdot \frac{6t - 2}{h_0}$$

Подставляем $t = 0$:

$$S_0''(a) = f_0 \cdot \frac{6}{h_0^2} + f_1 \cdot \frac{6}{h_0^2} + m_0 \cdot \frac{-4}{h_0} + m_1 \cdot \frac{-2}{h_0} = (f_0 + f_1) \cdot \frac{6}{h_0^2} - \frac{2}{h_0}(2m_0 + m_1)$$

Приравниваем к $f''(a)$:

$$f''(a) = (f_0 + f_1) \cdot \frac{6}{h_0^2} - \frac{2}{h_0}(2m_0 + m_1)$$

Аналогично для правого края ($x = b = x_N$):
На сегменте $[x_{N-1}, x_N]$ при $x = x_N$ имеем $t = 1$:

$$S''_{N-1}(x) = f_{N-1} \cdot \frac{6 - 12t}{h^2_{N-1}} + f_N \cdot \frac{6 - 12t}{h^2_{N-1}} + m_{N-1} \cdot \frac{6t - 4}{h_{N-1}} + m_N \cdot \frac{6t - 2}{h_{N-1}}$$

Подставляем $t = 1$:

$$S''_{N-1}(b) = f_{N-1} \cdot \frac{-6}{h^2_{N-1}} + f_N \cdot \frac{-6}{h^2_{N-1}} + m_{N-1} \cdot \frac{2}{h_{N-1}} +$$

$$+ m_N \cdot \frac{4}{h_{N-1}} = -\left(f_{N-1} + f_N\right) \cdot \frac{6}{h^2_{N-1}} + \frac{2}{h_{N-1}}(m_{N-1} + 2m_N)$$

Приравниваем к $f''(b)$:

$$f''(b) = -\left(f_{N-1} + f_N\right) \cdot \frac{6}{h^2_{N-1}} + \frac{2}{h_{N-1}}(m_{N-1} + 2m_N)$$

Вывод кубического сплайна по моментам

На каждом узле x_i заданы:

$$S(x_i) = f_i$$

Значение функции в узле равно заданному значению f_i.

$$S''(x_i) = M_i$$

Рассмотрим сегмент $[x_i, x_{i+1}]$:

$$x \in [x_i, x_{i+1}]$$

На этом интервале строится кусочно-кубический сплайн.
Особо отметим тот факт, что вторая производная сплайна есть линейная функция:

$$S''(x) = a + bx = M_i \cdot (1 - t) + M_{i+1} \cdot t =$$

$$M_i \cdot \left(1 - \frac{x - x_i}{h_i}\right) + M_{i+1} \cdot \frac{x - x_i}{h_i} = M_i \cdot \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \cdot \frac{x - x_i}{h_i}$$

где $t = \dfrac{x - x_i}{h_i}$, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Это линейная интерполяция между M_i и M_{i+1}.
Интегрируя $S''(x)$ дважды, получаем:

$$S(x) = M_i \cdot \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \cdot \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + A_i(x - x_i) + B_i$$

Это общее решение дифференциального уравнения $S''(x) =$ линейная функция. Константы A_i, B_i определяются из условий интерполяции.
Применим условие $S(x_i) = f_i$:

$$S(x_i) = M_i \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6h_i} + B_i =$$

$$= M_i \cdot \frac{h_i^2}{6} + B_i = f_i \quad \Rightarrow \quad B_i = f_i - M_i \cdot \frac{h_i^2}{6}$$

Подставили $x = x_i$, *тогда* $(x - x_i) = 0$, *а* $(x_{i+1} - x_i) = h_i$.
Теперь применим условие $S(x_{i+1}) = f_{i+1}$:

$$S(x_{i+1}) = M_{i+1} \cdot \frac{h_i^2}{6} + A_i h_i + B_i = f_{i+1} \quad \Rightarrow \quad A_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - (M_{i+1} - M_i) \cdot \frac{h_i}{6}$$

Подставили $x = x_{i+1}$, *тогда* $(x - x_i) = h_i$, *а* $(x_{i+1} - x) = 0$. Теперь подставим найденные A_i и B_i обратно в формулу для $S(x)$:

$$S_i(x) = M_i \cdot \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \cdot \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} +$$

$$+ \left[\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - (M_{i+1} - M_i) \cdot \frac{h_i}{6} \right] (x - x_i) + f_i - M_i \cdot \frac{h_i^2}{6}$$

Это — окончательное выражение для сплайна на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ *через моменты и значения функции.*
Дифференцируем $S_i(x)$ по x:

$$S_i'(x) = -M_i \cdot \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + M_{i+1} \cdot \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - (M_{i+1} - M_i) \cdot \frac{h_i}{6}$$

Непрерывность первой производной

*Чтобы сплайн был класса C^1, необходимо, чтобы первая производная была непрерывна в узле x_i.*Значение первой производной справа от узла x_i (на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$):

$$S_i'(x_i) = -M_i \cdot \frac{h_i}{2} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - (M_{i+1} - M_i) \cdot \frac{h_i}{6}$$

Это значение получено подстановкой $x = x_i$ в выражение для $S_i'(x)$, выведенное ранее.
Значение первой производной слева от узла x_i (на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$):

$$S_{i-1}'(x_i) = M_i \cdot \frac{h_{i-1}}{2} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - (M_i - M_{i-1}) \cdot \frac{h_{i-1}}{6}$$

Подстановка $x = x_i$ в выражение для $S_{i-1}'(x)$, где $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$.
Приравниваем эти два значения — условие непрерывности первой производной:

$$-M_i \cdot \frac{h_i}{2} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - (M_{i+1} - M_i) \cdot \frac{h_i}{6} = M_i \cdot \frac{h_{i-1}}{2} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - (M_i - M_{i-1}) \cdot \frac{h_{i-1}}{6}$$

Переносим все члены влево и группируем по M_{i-1}, M_i, M_{i+1}.
После упрощения получаем систему уравнений для моментов:

$$M_{i-1} \cdot \frac{h_{i-1}}{6} + M_i \cdot \frac{h_i + h_{i-1}}{3} + M_{i+1} \cdot \frac{h_i}{6} = \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}}\right) f_{i+1} - \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}}\right) f_i$$

Выражение для первой производной на сегменте $[x_{N-1}, x_N]$:

$$S_{N-1}'(x) = -M_{N-1} \cdot \frac{(b - x)^2}{2h_{N-1}} + M_N \cdot \frac{(x - b + h_{N-1})^2}{2h_{N-1}} +$$

$$+ \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}} - (M_N - M_{N-1}) \cdot \frac{h_{N-1}}{6}$$

где $b = x_N$, $h_{N-1} = x_N - x_{N-1}$, и $x \in [x_{N-1}, x_N]$.
Значение производной в правом конце — при $x = b$:

$$S'_{N-1}(b) = f'(b) = M_N \cdot \frac{h_{N-1}}{2} + \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}} - (M_N - M_{N-1}) \cdot \frac{h_{N-1}}{6}$$

Это выражение можно использовать как граничное условие, если задана первая производная на правом конце.
Если известны вторые производные на концах интервала:

$$S''(a) = f''(a), \quad S''(b) = f''(b)$$

Тогда, поскольку $S''(x_i) = M_i$, получаем:

$$S''_0(a) = f''(a) = M_0$$

На левом конце: $S''_0(x_0) = M_0$, поэтому просто $M_0 = f''(a)$.
Аналогично для правого конца:

$$S''_{N-1}(b) = f''(b) = M_N$$

На правом конце: $S''_{N-1}(x_N) = M_N$, поэтому $M_N = f''(b)$.