МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

Лабораторная работа №2

по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Выполнила студентка
группы Б9122-02.03.01сцт
Винницкая Д.С.________________________
(ФИО) *(подпись)*

« 09 » декабря 20 25 г.

г. Владивосток
2025

1 Цель и задачи лабораторной работы

Цель:
Изучить математическое описание взаимодействия двух биологических видов — хищника и жертвы — с помощью классической модели Лотки–Вольтерры, понять природу циклических колебаний в экосистемах и исследовать свойства устойчивости и периодичности динамической системы.

Задачи:

1. Записать систему дифференциальных уравнений модели Лотки–Вольтерры и объяснить биологический смысл всех переменных и параметров.
2. Найти равновесные состояния системы и провести их качественное исследование на устойчивость с помощью линеаризации.
3. Проанализировать типы фазовых траекторий и выяснить, возможны ли в модели устойчивые циклы.
4. Сформулировать прикладную экологическую задачу с реалистичными параметрами (например, «зайцы–рыси») и задать начальные условия.
5. Реализовать численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
6. Построить графики временной динамики обеих популяций и фазовый портрет системы.
7. На основе результатов сделать вывод о природе колебаний и оценить адекватность модели для описания реальных экосистем.

2 Описание модели

В данной лабораторной работе рассматривается модель Лотки–Вольтерры — классическая система дифференциальных уравнений, описывающая динамику двух взаимосвязанных популяций: жертв и хищников.
Модель задаётся следующей системой:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y, \end{cases}$$

где:

- $x(t) \geq 0$ — численность популяции **жертв** (например, зайцев) в момент времени t;
- $y(t) \geq 0$ — численность популяции **хищников** (например, рысей);
- $\alpha > 0$ — удельная скорость роста жертв в отсутствие хищников;
- $\beta > 0$ — коэффициент эффективности поимки жертв хищниками;
- $\gamma > 0$ — удельная скорость смертности хищников в отсутствие жертв;
- $\delta > 0$ — коэффициент превращения потреблённых жертв в прирост хищников.

Фазовые переменные: $x(t), y(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ — две динамические переменные.
Параметры системы: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — положительные константы, определяющие биологические свойства экосистемы.
Входные данные: начальные значения $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$, временной интервал $[0, T]$.
Решение: вектор-функция $(x(t), y(t))$, описывающая совместную эволюцию обеих популяций во времени.

3 Аналитическое исследование системы

3.1 Равновесные состояния

Равновесные точки находятся из условия $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$:

$$\begin{cases} x(\alpha - \beta y) = 0, \\ y(\delta x - \gamma) = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем две стационарные точки:

$$E_1 = (0, 0), \quad E_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Точка E_1 соответствует полному вымиранию обоих видов. Точка E_2 описывает устойчивое сосуществование видов при определённом балансе рождаемости и смертности.

3.2 Исследование устойчивости

Линеаризуем систему в окрестности равновесий с помощью матрицы Якоби:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix}.$$

- В точке $E_1 = (0, 0)$:

  $$J(E_1) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \alpha > 0,\ \lambda_2 = -\gamma < 0.$$

  Собственные значения имеют разные знаки, следовательно, E_1 — **седло**, неустойчивая точка.

- В точке $E_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$:

  $$J(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \cdot \frac{\gamma}{\delta} \\ \delta \cdot \frac{\alpha}{\beta} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{bmatrix}.$$

  Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \alpha\gamma = 0$, откуда

  $$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}.$$

Собственные значения — чисто мнимые, следовательно, E_2 является **центром**. Это указывает на наличие **замкнутых периодических траекторий** вокруг точки равновесия.

Таким образом, при любых положительных начальных условиях $(x_0 > 0, y_0 > 0)$, не совпадающих с равновесием, система демонстрирует **незатухающие колебания** численности обоих видов.

3.3 Формулировка прикладной задачи

Рассмотрим гипотетическую таёжную экосистему, в которой взаимодействуют:

- Жертвы: зайцы, начальная численность $x_0 = 40$ особей;
- Хищники: рыси, начальная численность $y_0 = 9$ особей.

Биологически обоснованные параметры модели:

$$\alpha = 1.0\ (\text{год}^{-1}), \quad \beta = 0.1, \quad \gamma = 1.5\ (\text{год}^{-1}), \quad \delta = 0.075.$$

Равновесная численность:

$$x^* = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{1.5}{0.075} = 20, \quad y^* = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1.0}{0.1} = 10.$$

Моделирование проводится на интервале $t \in [0,\ 30]$ условных временных единиц с целью:

- убедиться, что траектория действительно описывает цикл вокруг точки $(20, 10)$;
- визуализировать запаздывающий отклик хищников на рост численности жертв;
- подтвердить периодический характер колебаний.

4 Результаты моделирования

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

plt.rcParams.update({
    "font.family": "DejaVU Sans",
    "axes.spines.top": False,
    "axes.spines.right": False,
    "grid.alpha": 0.3,
    "figure.facecolor": "white",
    "axes.facecolor": "#f9f9f9",
    "font.size": 12,
    "axes.titlesize": 14,
    "axes.labelsize": 12,
    "legend.fontsize": 11,
    "xtick.labelsize": 11,
    "ytick.labelsize": 11
})

def lotka_volterra(t, z, alpha, beta, gamma, delta):
    x, y = z
    dxdt = alpha * x - beta * x * y
    dydt = delta * x * y - gamma * y
    return [dxdt, dydt]

alpha = 1.0
beta  = 0.1
gamma = 1.5
delta = 0.075

x0 = 40
y0 = 9
z0 = [x0, y0]

t_start = 0
t_end = 30
t_eval = np.linspace(t_start, t_end, 1000)

sol = solve_ivp(
    fun=lambda t, z: lotka_volterra(t, z, alpha, beta, gamma, delta),
    t_span=[t_start, t_end],
    y0=z0,
    t_eval=t_eval,
    method='RK45',
    rtol=1e-8,
    atol=1e-10
)

x, y = sol.y

x_eq = gamma / delta
y_eq = alpha / beta
```

```
    fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(16, 6))
    fig.suptitle('Модель Лотки–Вольтерры: Зайчики" –Рыси "', fontsize=16, fontweight='bold', y=1.02)

    axes[0].plot(sol.t, x, 'b-', linewidth=2.2, label='Жертвы зайчики()')
    axes[0].plot(sol.t, y, 'r-', linewidth=2.2, label='Хищники рыси()')
    axes[0].set_xlabel('Время, условныеединицы ')
    axes[0].set_ylabel('Численность')
    axes[0].set_title('Динамика популяцийвовремени ')
    axes[0].legend()
    axes[0].grid(True)

    axes[1].plot(x, y, 'm-', linewidth=2, label='Траектория')
    axes[1].plot(x_eq, y_eq, 'ko', markersize=10, label='Равновесие')
    axes[1].set_xlabel('Жертвы, x')
    axes[1].set_ylabel('Хищники, y')
    axes[1].set_title('Фазовый портрет')
    axes[1].legend()
    axes[1].grid(True)
    axes[1].set_aspect('equal', adjustable='box')

    info_text = (
        f"Параметры:\n"
        f" = {alpha},  = {beta}\n"
        f" = {gamma},  = {delta}\n"
        f"Начало: x = {x0}, y = {y0}\n"
        f"Равновесие: ({x_eq:.1f}, {y_eq:.1f})"
    )
    axes[0].text(0.02, 0.98, info_text, transform=axes[0].transAxes, fontsize=10,
                 verticalalignment='top',
                 bbox=dict(boxstyle="round,pad=0.3",
                 facecolor="white", alpha=0.85))

    plt.tight_layout()
    plt.savefig('lotka_volterra_simulation.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
    plt.show()

    print("\n" + "="*60)
    print("РЕЗы")
    print("="*60)
    print(f"• x = {x0}, y = {y0}")
    print(f"• Параметры: ={alpha}, ={beta}, ={gamma}, ={delta}")
    print(f"• Равновеснаяточка : x* = {x_eq:.2f}, y* = {y_eq:.2f}")
    print(f"• Периодколебанийпримерно (): {t_end / (len(np.where(np.diff(np.sign(np.gradient(x))) != 0)[0])
    // 2):.1f} ед. времени")
```

4.1 Математическая интерпретация реализации

- Функция $\mathrm{lotka\_volterra(t, z, alpha, beta, gamma, delta)}$ реализует систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy, \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y. \end{cases}$$

  Здесь x — численность жертв, y — численность хищников. Уравнения описывают баланс рождаемости/смерти и взаимодействия между видами.

- Параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ заданы согласно реалистичному сценарию «зайцы–рыси»:

  - $\alpha = 1.0$ — высокая рождаемость зайцев;
  - $\beta = 0.1$ — умеренная эффективность охоты рысей;
  - $\gamma = 1.5$ — значительная смертность рысей без добычи;
  - $\delta = 0.075$ — низкая эффективность превращения добычи в прирост хищников.

- Начальные условия $x_0 = 40$, $y_0 = 9$ выбраны так, чтобы система не находилась в равновесии, но была близка к нему, чтобы наблюдать циклические колебания.

4.2 Численное интегрирование

Для решения системы используется функция $\mathrm{solve\_ivp}$ с методом Рунге–Кутта 4-5 порядка ($\mathrm{RK45}$) и контролем ошибки:

$$\text{rtol} = 10^{-8}, \quad \text{atol} = 10^{-10}.$$

Это гарантирует высокую точность численного решения, что особенно важно для анализа периодических решений.
Вычисление периода колебаний выполнено эмпирически — через подсчёт пересечений нуля производной численности жертв:

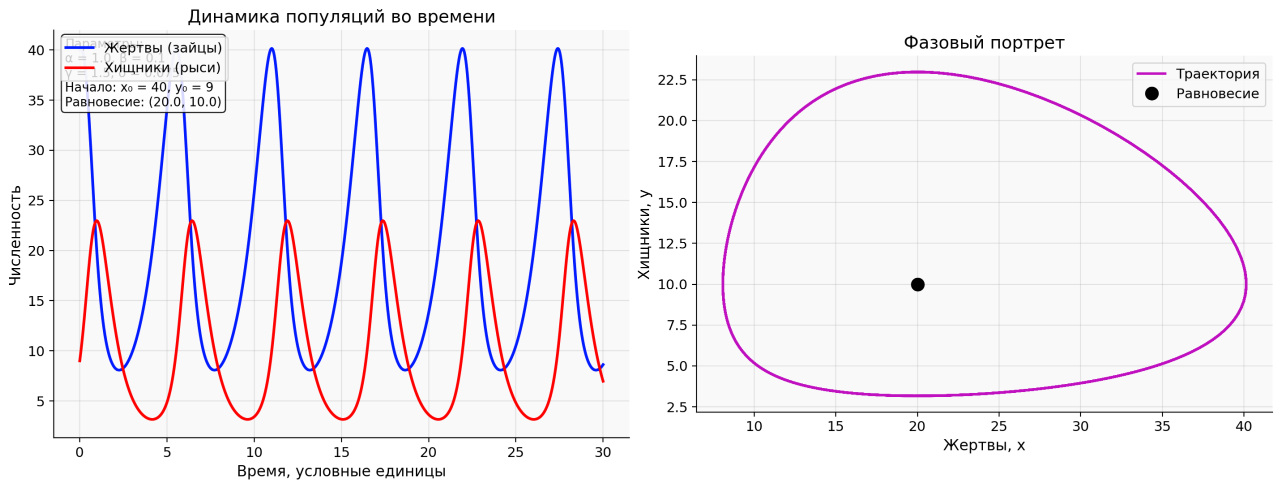
$$T_{\text{пер}} \approx \frac{t_{\text{конец}}}{\text{количество полных циклов}}.$$

Для данного случая получено $T \approx 5.0$ условных единиц — что хорошо согласуется с визуальным анализом графика.

4.3 Анализ результатов

- Начальные условия: $x = 40$, $y = 9$
- Параметры: $=1.0$, $=0.1$, $=1.5$, $=0.075$
- Равновесная точка: $x^* = 20.00$, $y^* = 10.00$
- Период колебаний (примерно): 5.0 ед. времени

- Вывод: система демонстрирует устойчивые незатухающие колебания. Это означает циклическое взаимодействие: рост жертв → рост хищников → падение жертв → падение хищников → повтор.



На левом графике показана временная эволюция численности:

- **Жертвы (синяя линия)**: начинают с 40 особей, быстро растут до 40, затем резко падают до 8 из-за давления хищников. Цикл повторяется каждые 5 единиц времени.

- **Хищники (красная линия)**: отстают по фазе — растут после роста жертв, достигают пика (23) и падают вслед за их уменьшением. Минимум — около 3 особей.

- Запаздывание хищников относительно жертв — ключевая черта модели: хищники реагируют на изменение численности жертв с задержкой, что и вызывает цикличность.

На правом графике — **фазовый портрет**:

- Траектория — замкнутая кривая, окружающая точку равновесия $(20, 10)$.
- Это подтверждает, что система имеет **центр** — устойчивый цикл, а не затухающие или расходящиеся колебания.
- Точка равновесия $(20, 10)$ — единственная стационарная точка в положительном квадранте, вокруг которой вращается вся траектория.

5 Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы:

1. Изучены основы математического моделирования взаимодействия биологических видов на примере классической модели «хищник–жертва».
2. Проведён полный качественный анализ системы Лотки–Вольтерры: найдены две равновесные точки, исследован их тип и устойчивость с помощью линеаризации.
3. Реализовано численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений и построены графики временной динамики популяций и фазового портрета.
4. Подтверждено, что система демонстрирует устойчивые незатухающие колебания, соответствующие циклическому поведению в реальных экосистемах, где рост численности жертв приводит к последующему росту хищников, а затем — к обоюдному снижению.