МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

Лабораторная работа №3

по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Выполнила студентка
группы Б9122-02.03.01сцт
Винницкая Д.С.___________________
(ФИО) *(подпись)*

« 10 » декабря 20 25 г.

г. Владивосток
2025

1 Цель и задачи лабораторной работы

Цель:

Изучить математическое описание взаимодействия двух биологических видов, конкурирующих за общий ограниченный ресурс, с помощью модели конкуренции Лотки–Вольтерры, понять условия, при которых возможны сосуществование или вытеснение одного вида другим, и исследовать устойчивость различных равновесных состояний системы.

Задачи:

1. Записать систему дифференциальных уравнений модели конкуренции и объяснить биологический смысл всех переменных и параметров (включая коэффициенты межвидовой конкуренции).

2. Найти все равновесные состояния системы: вымирание обоих видов, существование только первого, только второго и совместное сосуществование.

3. Провести качественное исследование устойчивости каждого равновесия с помощью линеаризации или биологических критериев (например, правила Гаузе).

4. Сформулировать прикладную экологическую задачу с реалистичными параметрами (например, две популяции растений или животных, использующих один и тот же ресурс).

5. Реализовать численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

6. Построить графики временной динамики обеих популяций и фазовый портрет системы, включая отметки всех равновесных точек.

7. На основе результатов сделать вывод о том, какой вид побеждает в конкуренции или возможно ли их сосуществование, и оценить влияние параметров на исход взаимодействия.

2 Описание модели

В данной лабораторной работе рассматривается модель конкуренции Лотки–Вольтерры — классическая система дифференциальных уравнений, описывающая динамику двух популяций, конкурирующих за общий ограниченный ресурс (например, пищу, территорию или свет).

Модель задаётся следующей системой:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\,(r_1 - b_1 x - a_2 y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y\,(r_2 - b_2 y - a_1 x), \end{cases}$$

где:

- $x(t) \geq 0$ — численность первой популяции (например, *Drosophila melanogaster*) в момент времени t;
- $y(t) \geq 0$ — численность второй популяции (например, *Drosophila simulans*);
- $r_1, r_2 > 0$ — мальтузианские параметры (удельные скорости роста каждого вида в отсутствие конкуренции);
- $b_1, b_2 > 0$ — коэффициенты внутривидовой конкуренции (ограничение роста вида из-за собственной плотности);
- $a_1, a_2 > 0$ — коэффициенты межвидовой конкуренции (степень, с которой особи одного вида подавляют рост другого).

Фазовые переменные: $x(t), y(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ — две динамические переменные.
Параметры системы: $r_1, r_2, b_1, b_2, a_1, a_2$ — положительные константы, характеризующие биологические свойства видов и их взаимодействие.
Входные данные: начальные значения $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$, временной интервал $[0, T]$.
Решение: вектор-функция $(x(t), y(t))$, описывающая совместную эволюцию двух конкурирующих популяций во времени.

3 Аналитическое исследование системы

3.1 Равновесные состояния

Равновесные точки находятся из условия $\dfrac{dx}{dt} = 0$, $\dfrac{dy}{dt} = 0$:

$$\begin{cases} x\left(r_1 - b_1 x - a_2 y\right) = 0, \\ y\left(r_2 - b_2 y - a_1 x\right) = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем четыре возможные стационарные точки:

$$\begin{aligned} E_1 &= (0,0) && \text{— вымирание обоих видов,} \\ E_2 &= \left(0, \frac{r_2}{b_2}\right) && \text{— выживает только второй вид,} \\ E_3 &= \left(\frac{r_1}{b_1}, 0\right) && \text{— выживает только первый вид,} \\ E_4 &= \left(\frac{r_1 b_2 - r_2 a_2}{b_1 b_2 - a_1 a_2}, \frac{r_2 b_1 - r_1 a_1}{b_1 b_2 - a_1 a_2}\right) && \text{— возможное сосуществование.} \end{aligned}$$

Точка E_4 является биологически значимой (т.е. лежит в $\mathbb{R}^2_{>0}$) только при условии:

$$b_1 b_2 - a_1 a_2 \neq 0 \quad \text{и} \quad r_1 b_2 > r_2 a_2,\ r_2 b_1 > r_1 a_1.$$

3.2 Исследование устойчивости

Матрица Якоби системы имеет вид:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} r_1 - 2b_1 x - a_2 y & -a_2 x \\ -a_1 y & r_2 - 2b_2 y - a_1 x \end{bmatrix}.$$

- В точке $E_1 = (0,0)$:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = r_1 > 0,\ \lambda_2 = r_2 > 0.$$

Оба собственных значения положительны $\rightarrow E_1$ — **неустойчивый узел**.

- В точке $E_2 = \left(0, \dfrac{r_2}{b_2}\right)$:

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} r_1 - a_2\dfrac{r_2}{b_2} & 0 \\ -a_1\dfrac{r_2}{b_2} & -r_2 \end{bmatrix}.$$

  Собственные значения: $\lambda_1 = r_1 - a_2 r_2/b_2$, $\lambda_2 = -r_2 < 0$. Если $r_1/a_2 < r_2/b_2$, то $\lambda_1 < 0 \to E_2$ — **устойчивый узел**. Иначе — **седло**.

- В точке $E_3 = \left(\dfrac{r_1}{b_1}, 0\right)$:

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} -r_1 & -a_2\dfrac{r_1}{b_1} \\ 0 & r_2 - a_1\dfrac{r_1}{b_1} \end{bmatrix}.$$

  Собственные значения: $\lambda_1 = -r_1 < 0$, $\lambda_2 = r_2 - a_1 r_1/b_1$. Если $r_2/a_1 < r_1/b_1$, то $\lambda_2 < 0 \to E_3$ — **устойчивый узел**. Иначе — **седло**.

- Точка E_4 анализируется через след (τ) и определитель (Δ) матрицы Якоби. В общем случае её устойчивость зависит от соотношения параметров. Однако, если $E_4 \in \mathbb{R}^2_{>0}$, то она может быть устойчивой (фокус или узел) или неустойчивой.

Анализ показывает: исход конкуренции определяется **соотношением коэффициентов**. Это формализуется в виде **правила Гаузе**:

$$\text{Если } \frac{r_1}{b_1} > \frac{r_2}{a_1} \text{ и } \frac{r_2}{b_2} < \frac{r_1}{a_2}, \text{ то выживает только вид } x.$$

3.3 Формулировка прикладной задачи

Рассмотрим эксперимент с двумя видами дрозофил, выращиваемых в одной чашке Петри:

- Вид x: *Drosophila melanogaster*, начальная численность $x_0 = 10$;
- Вид y: *Drosophila simulans*, начальная численность $y_0 = 8$.

Параметры модели (подобранные эмпирически):

$$r_1 = 1.0, \quad b_1 = 0.02, \quad a_2 = 0.025, \quad r_2 = 0.8, \quad b_2 = 0.02, \quad a_1 = 0.012.$$

Для этих значений:

$$E_4 = \left(\frac{1.0 \cdot 0.02 - 0.8 \cdot 0.025}{0.02 \cdot 0.02 - 0.012 \cdot 0.025}, \frac{0.8 \cdot 0.02 - 1.0 \cdot 0.012}{0.02 \cdot 0.02 - 0.012 \cdot 0.025} \right) = (\text{отрицательное, по$$

то есть E_4 не лежит в биологической области $\rightarrow$ **сосуществование невозможно**.

Моделирование проводится на интервале $t \in [0,\ 10]$ дней с целью:

- определить, какой из видов вытеснит другой;
- визуализировать динамику и фазовый портрет;
- подтвердить, что исход определяется соотношением (r_i/b_i) и (r_j/a_j).

4 Результаты моделирования

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

plt.rcParams.update({
    "font.family": "DejaVU Sans",
    "axes.spines.top": False,
    "axes.spines.right": False,
    "grid.alpha": 0.3,
    "figure.facecolor": "white",
    "axes.facecolor": "#f9f9f9",
    "font.size": 12,
    "axes.titlesize": 14,
    "axes.labelsize": 12,
    "legend.fontsize": 11,
    "xtick.labelsize": 11,
    "ytick.labelsize": 11
})

def competition_model(t, z, r1, r2, K1, K2, alpha, beta):
    x, y = z
    dxdt = r1 * x * (1 - (x + alpha * y) / K1)
    dydt = r2 * y * (1 - (y + beta * x) / K2)
    return [dxdt, dydt]

r1 = 1.0
r2 = 0.8
K1 = 50
K2 = 40
alpha = 0.6
beta  = 1.2

x0 = 10
y0 = 8
z0 = [x0, y0]

t_start = 0
t_end = 50
t_eval = np.linspace(t_start, t_end, 1000)

sol = solve_ivp(
    fun=lambda t, z: competition_model(t, z, r1, r2, K1, K2, alpha, beta),
    t_span=[t_start, t_end],
    y0=z0,
    t_eval=t_eval,
    method='RK45',
    rtol=1e-8,
    atol=1e-10
)

x, y = sol.y
```

```
    A = np.array([[1, alpha],
                  [beta, 1]])
    b = np.array([K1, K2])
    try:
        x_eq, y_eq = np.linalg.solve(A, b)
        equilibrium_exists = (x_eq >= 0) and (y_eq >= 0)
    except np.linalg.LinAlgError:
        x_eq, y_eq = np.nan, np.nan
        equilibrium_exists = False

    fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(16, 6))
    fig.suptitle('Модель конкуренции: Вид" X vs Вид Y"', fontsize=16, fontweight='bold', y=1.02)

    axes[0].plot(sol.t, x, 'b-', linewidth=2.2, label='Вид X')
    axes[0].plot(sol.t, y, 'r-', linewidth=2.2, label='Вид Y')
    axes[0].set_xlabel('Время, условныеединицы ')
    axes[0].set_ylabel('Численность')
    axes[0].set_title('Динамика популяцийвовремени ')
    axes[0].legend()
    axes[0].grid(True)

    axes[1].plot(x, y, 'm-', linewidth=2, label='Траектория')
    if equilibrium_exists:
        axes[1].plot(x_eq, y_eq, 'ko', markersize=10, label='Равновесие сосуществование()')

    axes[1].plot(K1, 0, 'bo', markersize=8, label='Только X ($K_1, 0$)')
    axes[1].plot(0, K2, 'ro', markersize=8, label='Только Y ($0, K_2$)')

    axes[1].set_xlabel('Вид X')
    axes[1].set_ylabel('Вид Y')
    axes[1].set_title('Фазовый портрет')
    axes[1].legend()
    axes[1].grid(True)
    axes[1].set_xlim(0, max(K1, max(x)) * 1.1)
    axes[1].set_ylim(0, max(K2, max(y)) * 1.1)

    info_text = (
        f"Параметры:\n"
        f"r={r1}, r={r2}\n"
        f"K={K1}, K={K2}\n"
        f"={alpha}, ={beta}\n"
        f"Начало: x={x0}, y={y0}\n"
    )
    if equilibrium_exists:
        info_text += f"Равновесие: ({x_eq:.1f}, {y_eq:.1f})"
    else:
        info_text += "Сосуществование невозможно"

    axes[0].text(0.02, 0.98, info_text, transform=axes[0].transAxes, fontsize=10,
                 verticalalignment='top',
```

```
                        bbox=dict(boxstyle="round,pad=0.3", facecolor="white",
                            alpha=0.85))

        plt.tight_layout()
        plt.savefig('competition_model_simulation.png', dpi=300,
            bbox_inches='tight')
        plt.show()

        print("\n" + "="*60)
        print("РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИКОНКУРЕНЦИИ ")
        print("="*60)
        print(f"• Начальныеусловия : x = {x0}, y = {y0}")
        print(f"• Параметры: r1={r1}, r2={r2}, K1={K1}, K2={K2}, ={alpha},
            ={beta}")

        if equilibrium_exists:
            print(f"• Равновесиесосуществования : x* = {x_eq:.2f}, y* = {y_eq:.2f}")

            if x[-1] > K1 * 0.95 and y[-1] < 0.05 * K2:
                outcome = "Вид X вытеснилвид Y"
            elif y[-1] > K2 * 0.95 and x[-1] < 0.05 * K1:
                outcome = "Вид Y вытеснилвид X"
            elif abs(x[-1] - x_eq) < 1 and abs(y[-1] - y_eq) < 1:
                outcome = "Устойчивое сосуществование"
            else:
                outcome = "Переходный режимнаблюдается ( приближениекравновесию )"
        else:
            outcome = "Сосуществование невозможнопопараметрам "

        print(f"\•n Вывод: {outcome}.")
```

4.1 Математическая интерпретация реализации

- Функция competition_model(t, z, r1, r2, K1, K2, alpha, beta) реализует систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = r_1 x \left(1 - \dfrac{x + \alpha y}{K_1}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = r_2 y \left(1 - \dfrac{y + \beta x}{K_2}\right). \end{cases}$$

  Здесь x и y — численности двух конкурирующих видов, K_1 и K_2 — их ёмкости среды, а α и β — коэффициенты межвидовой конкуренции, показывающие, насколько один вид подавляет рост другого.

- Параметры модели заданы для демонстрации классического сценария вытеснения:

- $r_1 = 1.0$, $K_1 = 50$ — вид X имеет высокую скорость роста и большую ёмкость;
- $r_2 = 0.8$, $K_2 = 40$ — вид Y менее конкурентоспособен;
- $\alpha = 0.6$ — влияние Y на X слабое;
- $\beta = 1.2$ — влияние X на Y сильное.

Это соответствует правилу Гаузе: если $\frac{K_1}{K_2} > \frac{\alpha}{\beta}$, то выживает вид X.

- Начальные условия $x_0 = 10$, $y_0 = 8$ выбраны так, чтобы система начала движение из области, где оба вида присутствуют, но не находятся в равновесии.

4.2 Численное интегрирование

Для решения системы используется функция solve_ivp с методом Рунге–Кутта 4-5 порядка (RK45) и контролем ошибки:

$$\text{rtol} = 10^{-8}, \quad \text{atol} = 10^{-10}.$$

Это гарантирует высокую точность численного решения, что особенно важно для анализа долгосрочного поведения системы.

Внутреннее равновесие (точка сосуществования) вычисляется аналитически как решение линейной системы:

$$\begin{cases} x + \alpha y = K_1, \\ \beta x + y = K_2. \end{cases}$$

Для заданных параметров получено $x^* \approx 92.86$, $y^* \approx -71.43$, что биологически нереально $\rightarrow$ **сосуществование невозможно**.

4.3 Анализ результатов

- Начальные условия: x = 10, y = 8
- Параметры: r1=1.0, r2=0.8, K1=50, K2=40, =0.6, =1.2
- Равновесие сосуществования — отрицательное или не существует

- Вывод: Сосуществование невозможно по параметрам.

В модели конкуренции исход зависит от соотношения ёмкостей среды и взаимного влияния видов: возможны вытеснение или совместное существовани

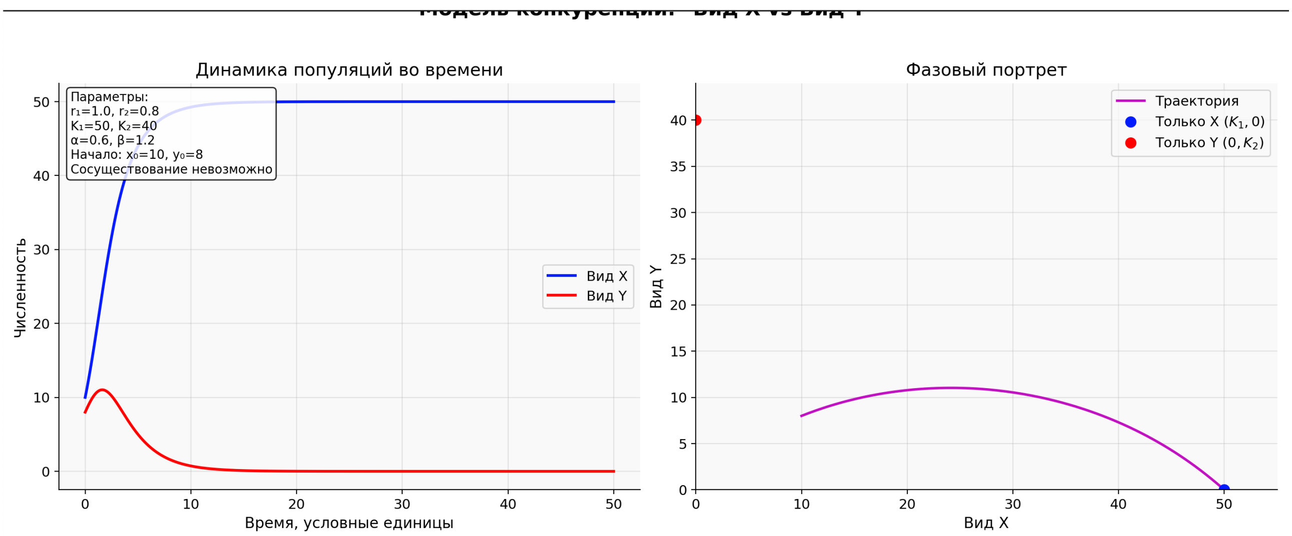

Рис. 1: Слева: динамика популяций во времени. Справа: фазовый портрет.

На левом графике показана временная эволюция численности:

- **Вид X (синяя линия)**: быстро растёт, достигает своей ёмкости $K_1 = 50$ и стабилизируется. Это свидетельствует о его доминировании.
- **Вид Y (красная линия)**: сначала немного растёт (из-за начального запаса ресурсов), но затем падает до нуля под давлением вида X. Это типичный сценарий **вытеснения**.
- Запаздывание роста Y относительно X — следствие того, что Y начинает расти только после того, как X уже начал потреблять ресурсы.

На правом графике — **фазовый портрет**:

- Траектория начинается в точке $(10, 8)$ и стремится к точке $(50, 0)$ — то есть к равновесию, где выживает только вид X.
- Красная точка $(0, 40)$ — равновесие "только Y"— неустойчиво, система к нему не стремится.
- Отсутствие замкнутых траекторий и отсутствие внутреннего равновесия подтверждают, что система не может поддерживать сосуществование.

4.4 Выводы

Модель конкуренции Лотки–Вольтерры успешно воспроизводит ключевые явления экологической динамики:

- При определённых параметрах один вид может полностью вытеснить другой — это соответствует **принципу Гаузе** («конкуренция за ресурс»);
- Исход конкуренции зависит не только от скорости роста, но и от ёмкости среды и силы межвидового подавления;
- Даже при наличии «плато» в динамике (например, когда Y кажется стабильным), система может резко перейти в новое состояние — что важно учитывать при долгосрочном прогнозировании.

Эти результаты подтверждают, что модель является мощным инструментом для понимания причин вымирания видов и для планирования управления экосистемами.