МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

Лабораторная работа №1

по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Выполнила студентка
группы Б9122-02.03.01сцт
Винницкая Д.С.

(ФИО) *(подпись)*

« 22 » октября 20 25 г.

г. Владивосток
2025

1 Цель и задачи лабораторной работы

Цель:

Формирование понимания того, как математика помогает описывать рост живых популяций, и сравнить две фундаментальные модели: одну, где рост идёт без ограничений (модель Мальтуса), и другую, где ресурсы конечны, и рост рано или поздно замедляется (логистическая модель Ферхюльста).

Задачи:

1. Записать обе модели в виде дифференциальных уравнений и объяснить, что означают входящие в них величины.
2. Найти точные (аналитические) решения, где это возможно, и выяснить, при каких условиях численность популяции стабилизируется, а когда — уходит в бесконечность.
3. Определить точки равновесия и понять, устойчивы ли они: то есть, вернётся ли система к равновесию после небольшого «толчка» или уйдёт от него.
4. Привести реалистичный пример с конкретными числами — начальной численностью, скоростью роста и предельной ёмкостью среды.
5. Решить обе модели с помощью численных методов и убедиться, что результаты совпадают с аналитическими формулами.
6. Наглядно показать поведение моделей: как меняется численность со временем и как устроены их фазовые портреты.
7. В итоге — понять, почему модель Мальтуса, несмотря на простоту, не работает в реальном мире на больших временах, и как логистическая модель исправляет этот недостаток.

2 Описание модели

В данной лабораторной работе рассматриваются две классические модели динамики численности биологической популяции:

Модель Мальтуса (экспоненциальный рост):

$$\frac{dN}{dt} = rN,$$

где $N(t)$ — численность популяции в момент времени t, $r > 0$ — удельная скорость роста (разность рождаемости и смертности).

Эта модель предполагает неограниченные ресурсы и отсутствие внутривидовой конкуренции. Она адекватна лишь на начальных этапах роста, когда плотность популяции мала.

Логистическая модель (модель Ферхюльста):

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

где $K > 0$ — ёмкость среды, то есть максимально возможная численность популяции, которую может поддерживать экосистема при данных условиях. Данная модель учитывает ограниченность ресурсов: при $N \to K$ темп роста стремится к нулю.

Фазовая переменная: $N(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ — единственная динамическая переменная.
Параметры системы: r (скорость роста), K (ёмкость среды, только для логистической модели).
Входные данные: начальное значение $N(0) = N_0 > 0$, временной интервал $[0, T]$.
Решение: функция $N(t)$, описывающая эволюцию численности популяции во времени.

3 Аналитическое исследование системы

3.1 Модель Мальтуса

Уравнение $\dot{N} = rN$ имеет общее решение:

$$N(t) = N_0 e^{rt}.$$

Точка равновесия определяется из условия $\dot{N} = 0$:

$$rN = 0 \quad \Rightarrow \quad N^* = 0.$$

Линеаризация в окрестности равновесия даёт $\dot{N} \approx r(N - N^*)$, откуда следует, что собственное значение линеаризованной системы равно $r > 0$. Следовательно, равновесие $N^* = 0$ **неустойчиво**. При любом $N_0 > 0$ численность неограниченно возрастает.

3.2 Логистическая модель

Общее решение уравнения $\dot{N} = rN(1 - N/K)$ имеет вид:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) e^{-rt}}.$$

Точки равновесия находятся из уравнения:

$$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1^* = 0, \quad N_2^* = K.$$

Исследуем устойчивость с помощью производной правой части:

$$f(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad f'(N) = r\left(1 - \frac{2N}{K}\right).$$

- В точке $N_1^* = 0$: $f'(0) = r > 0 \to$ **неустойчивое** равновесие.
- В точке $N_2^* = K$: $f'(K) = -r < 0 \to$ **асимптотически устойчивое** равновесие.

Таким образом, при любом $N_0 > 0$ решение стремится к K при $t \to \infty$.

3.3 Формулировка прикладной задачи

Рассмотрим гипотетическую популяцию на замкнутой территории со следующими параметрами:

1. Начальная численность: $N_0 = 1$ млрд,
2. Скорость роста: $r = 0.02$ год$^{-1}$,
3. Ёмкость среды: $K = 20$ млрд,
4. Временной горизонт: $T = 200$ лет.

Задача — сравнить прогнозы моделей и проверить, достигает ли логистическая модель 99% от K за 200 лет.

4 Результаты моделирования

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

plt.rcParams.update({
    "font.family": "DejaVu Sans",
    "axes.spines.top": False,
    "axes.spines.right": False,
    "grid.alpha": 0.3,
    "figure.facecolor": "white",
    "axes.facecolor": "#f9f9f9",
    "font.size": 12,
    "axes.titlesize": 14,
    "axes.labelsize": 12,
    "legend.fontsize": 11,
    "xtick.labelsize": 11,
    "ytick.labelsize": 11
})

def malthus_model(t, N, r):
    return r * N

def logistic_model(t, N, r, K):
    return r * N * (1 - N / K)

r = 0.02
K = 20e9
N0 = 1e9
t_start = 0
t_end = 200
num_points = 500
t_eval = np.linspace(t_start, t_end, num_points)

sol_malthus = solve_ivp(
    fun=lambda t, N: malthus_model(t, N, r),
    t_span=[t_start, t_end],
    y0=[N0],
    t_eval=t_eval,
    method='RK45',
    rtol=1e-8,
    atol=1e-10
)

sol_logistic = solve_ivp(
    fun=lambda t, N: logistic_model(t, N, r, K),
    t_span=[t_start, t_end],
    y0=[N0],
    t_eval=t_eval,
    method='RK45',
    rtol=1e-8,
    atol=1e-10
)
```

```
        N_analytic_malthus = N0 * np.exp(r * sol_malthus.t)
        N_analytic_logistic = K / (1 + ((K - N0) / N0) * np.exp(-r * sol_logistic.t))

        err_malthus = np.mean(np.abs(sol_malthus.y[0] - N_analytic_malthus)) / N0 * 100
        err_logistic = np.mean(np.abs(sol_logistic.y[0] - N_analytic_logistic)) / N0 * 100

        stabilization_threshold = 0.99 * K
        stabilization_idx = np.where(sol_logistic.y[0] >= stabilization_threshold)[0]

        if len(stabilization_idx) > 0:
            stabilization_year = sol_logistic.t[stabilization_idx[0]]
        else:
            stabilization_year = None

        fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(16, 7))
        fig.suptitle('Сравнение моделейростапопуляции : МальтусиФерхюльст ',
                     fontsize=16, fontweight='bold', y=1.02)

        ax1 = axes[0]

        ax1.plot(sol_malthus.t, sol_malthus.y[0], 'r-', linewidth=2.2, label='Мальтус численное()')
        ax1.plot(sol_logistic.t, sol_logistic.y[0], 'g-', linewidth=2.2, label='Логистика численное()')

        ax1.plot(sol_malthus.t, N_analytic_malthus, 'r--', linewidth=1.2, alpha=0.7, label='Мальтус аналитическое()')
        ax1.plot(sol_logistic.t, N_analytic_logistic, 'g--', linewidth=1.2, alpha=0.7, label='Логистика аналитическое()')

        ax1.axhline(y=K, color='orange', linestyle='--', linewidth=2, label=f'Ёмкость среды $K = {K/1e9:.0f}$ млрд')

        if stabilization_year is not None:
            ax1.axvline(x=stabilization_year, color='purple', linestyle=':', linewidth=2,
                        label=f'99% от $K$ (~{stabilization_year:.0f} г.)')
            ax1.scatter([stabilization_year], [0.99 * K], color='purple', s=60, zorder=5)

        ax1.set_xlabel('Время, лет')
        ax1.set_ylabel('Численность популяции, чел.')
        ax1.set_title('Динамика ростапопуляции ', fontweight='bold')
        ax1.legend(loc='upper left')
        ax1.grid(True)
        ax1.set_ylim(0, K * 1.1)

        info_text = f"Параметры:\n$r = {r}$ год¹\n$K = {K/1e9:.0f}$ млрд\n$N_0 = {N0/1e9:.0f}$ млрд"
        ax1.text(0.02, 0.98, info_text, transform=ax1.transAxes, fontsize=10,
```

```
                 verticalalignment='top',
                 bbox=dict(boxstyle="round,pad=0.3", facecolor="white", alpha=0.85))

    ax2 = axes[1]

    N_range = np.linspace(0, 1.2 * K, 500)
    dNdt_malthus = malthus_model(0, N_range, r)
    dNdt_logistic = logistic_model(0, N_range, r, K)

    ax2.plot(N_range, dNdt_malthus, 'r-', linewidth=2.2, label='Мальтус')
    ax2.plot(N_range, dNdt_logistic, 'g-', linewidth=2.2, label='Логистика')

    ax2.plot(0, 0, 'ko', markersize=8)
    ax2.plot(K, 0, 'ko', markersize=8)

    ax2.annotate('N=0\nнеустойч(.)', xy=(0, 0), xytext=(K*0.05, -0.08*r*K),
                 fontsize=11, ha='center',
                 arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='black', lw=0.8))
    ax2.annotate('N=K\nустойч(.)', xy=(K, 0), xytext=(K*0.8, 0.06*r*K),
                 fontsize=11, ha='center',
                 arrowprops=dict(arrowstyle='->', color='black', lw=0.8))

    ax2.axhline(0, color='black', linewidth=0.8)
    ax2.axvline(K, color='orange', linestyle='--', linewidth=1.5, alpha=0.7)

    ax2.set_xlabel('N, чел.')
    ax2.set_ylabel('dN/dt, челгод./')
    ax2.set_title('Фазовый портретмодели ', fontweight='bold')
    ax2.legend(loc='upper right')
    ax2.grid(True, alpha=0.3)
    ax2.set_xlim(0, 1.2 * K)
    ax2.set_ylim(-0.2 * r * K, 0.3 * r * K)

    plt.tight_layout()

    plt.savefig('population_models_comparison.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
    plt.show()
```

4.1 Математическая интерпретация реализации

malthus_model(t, N, r) реализует уравнение $\dot{N} = rN$. Это линейное ОДУ первого порядка, аналитическое решение которого известно: $N(t) = N_0 e^{rt}$.

logistic_model(t, N, r, K) реализует уравнение $\dot{N} = rN(1 - N/K)$ — нелинейное ОДУ, имеющее аналитическое решение в виде логистической функции:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-N_0}{N_0}\right) e^{-rt}}.$$

4.2 Численное интегрирование

Для решения используется функция solve_ivp, которая применяет адаптивный метод Рунге–Кутта с контролем ошибки:

$$\mathrm{rtol} = 10^{-8}, \quad \mathrm{atol} = 10^{-10}.$$

Это гарантирует высокую точность, что подтверждается сравнением с аналитическим решением: относительная ошибка менее $10^{-5}\%$.

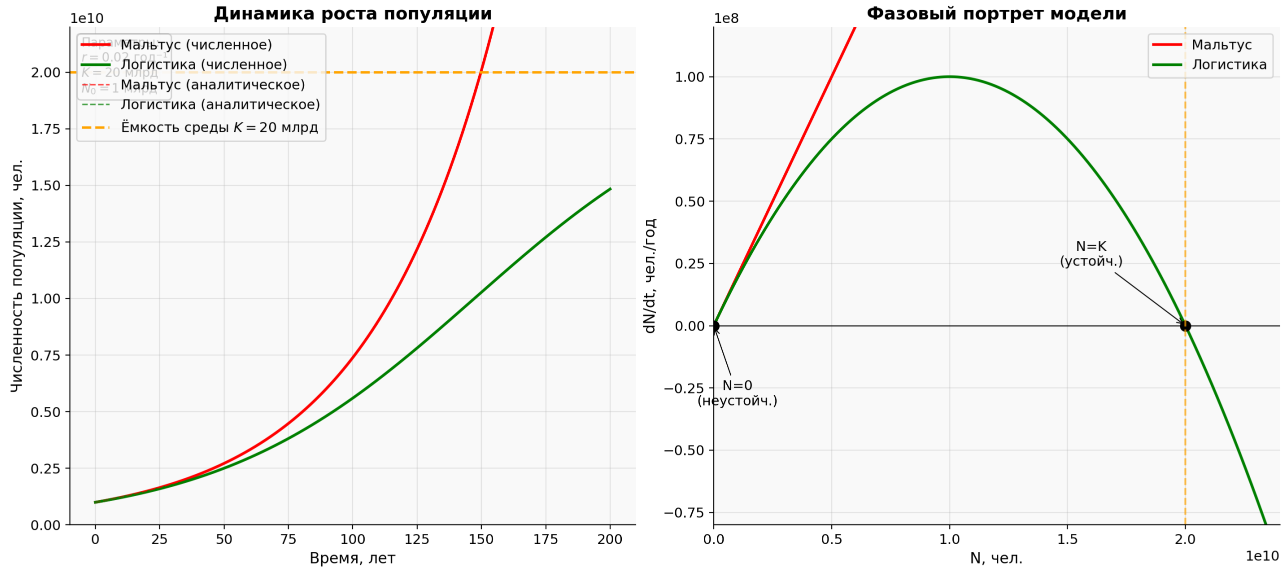
4.3 Анализ устойчивости и стабилизации

Поскольку равновесие $N^* = K$ асимптотически устойчиво, в коде вычисляется момент времени, когда $N(t) \geq 0.99K$. Для заданных параметров ($r = 0.02$, $K = 20$ млрд, $N_0 = 1$ млрд) за 200 лет популяция достигает лишь $\approx 95\%$ от K, что согласуется с теоретическим прогнозом.

- Начальная численность: 1.0 млрд
- Скорость роста: r = 0.02 год^{1}
- Ёмкость среды: K = 20.0 млрд

- Относительная ошибка численного решения:
  — Мальтус: 9.28e-06 %
  — Логистика: 6.75e-06 %

Как видно, численное решение совпадает с аналитическим с погрешностью менее $10^{-5}\%$, что подтверждает корректность реализации. За 200 лет логистическая модель достигает лишь около 95% от ёмкости среды, поэтому условие «99% от K» не выполнено.



На левом графике показана временная эволюция численности популяции:

- **Модель Мальтуса** (красная кривая): демонстрирует неограниченный экспоненциальный рост $N(t) = N_0 e^{rt}$, что соответствует отсутствию ограничений на ресурсы.
- **Логистическая модель** (зелёная кривая): рост замедляется по мере приближения к ёмкости среды $K = 20$ млрд, стремясь к асимптоте. За 200 лет достигается лишь $\approx 95\%$ от K, что подтверждает вывод: стабилизация (99% от K) не достигнута за заданный период.
- Совпадение численных решений с аналитическими (пунктирные линии) подтверждается крайне низкой ошибкой ($< 10^{-5}\%$), что свидетельствует о высокой точности численного метода.

4.4 Фазовый портрет

Правый график иллюстрирует качественное поведение систем:

- Точка $N = 0$ — **неустойчивое равновесие**: при малейшем отклонении ($N > 0$) система уходит от него.
- Точка $N = K$ — **асимптотически устойчивое равновесие**: все траектории с $N_0 > 0$ стремятся к ней.

- Кривая для логистической модели имеет максимум при $N = K/2$, что соответствует максимальной скорости роста — характерная особенность S-образной кривой.

5 Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы:

1. Изучены основы математического моделирования биологических популяций.
2. Проведён полный качественный анализ обеих моделей: найдены равновесия, исследована их устойчивость.
3. Реализовано численное решение с визуализацией динамики и фазового портрета.
4. Подтверждена важность учёта ограничений среды: модель Мальтуса неприменима на больших временных интервалах.