تمرینات سری ۸

۱- فرض کنید یک سکه متوازن با دو سمت head و tail را ده بار می‌اندازیم. احتمال رخدادهای زیر را محاسبه نمایید.

a) تعداد head ها و تعداد tail ها در این آزمایش برابر باشد

$$\underset{X}{\text{تعداد head}} + \underset{Y}{} = 10$$

$$p(\underset{5\text{ بار}}{head} = \underset{5\text{ بار}}{tail}) = ?$$

یکی کافیه حساب بشه

$$p(X=5) = \binom{10}{5} \times p^5 \times (1-p)^5 = \frac{10!}{5! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 5!} = 42 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 42 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.04$$

b) تعداد head ها از تعداد tail ها بیشتر باشند

بیشتر از 5 بار head

$$p(\underset{6}{X} > \underset{4}{Y}) = ?$$

$$p(X>5) = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{10-k}$$

$$p(X>5) = \left(p(k=6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-6}\right) + \left(p(k=7) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-7}\right)$$

$$+ \left(p(k=8) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-8}\right) + \left(p(k=9) = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-9}\right)$$

$$+ \left(p(k=10) = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{0}\right) =$$

2. یک شرکت پزشکی، یک تست جدید برای تشخیص اختلال های ژنتیکی معرفی کرده است، نرخ false negative

این تست بسیار کم می باشد، به طوری که اگر بیمار دارای اختلال باشد، احتمال اینکه تست نتیجه مثبت برگرداند برابر

با 0.999 می باشد همچنین نرخ false positive این تست نیز بسیار کم می باشد. به طوری که

اگر بیمار دارای اختلال نباشد، احتمال اینکه تست نتیجه مثبت برگرداند برابر با 0.005 می باشد. فرض

کنید که 2% جامعه دارای اختلال است. فرض کنید یک نفر از جامعه به صورت تصادفی انتخاب

می شود و از او تست گرفته می شود. اگر نتیجه تست مثبت باشد، احتمال اینکه شخص دچار اختلال

باشد چقدر است؟

$P =$ true positive $=$

$P(S) =$ person has this $= \frac{2}{100}$ $\qquad P(S') = 1 - 0.02 = 0.98$

$\boxed{\text{قانون بیز}}$

$P(P|S) = \frac{999}{1000} \qquad P(P|S') = \frac{5}{1000} \qquad P(S|P) = ?$

$$P(S|P) = \frac{P(P|S)\cdot P(S)}{P(P|S)\cdot P(S) + P(P|S')\cdot P(S')} = \frac{0.999 \times 0.02}{(0.999 \times 0.02) + (0.005 \times 0.98)} = 0.80$$

$0.01998 \qquad 0.0049$

0.02488

3. فرض کنید $P(A|B) = 0.4$ و $P(B) = 0.5$ باشد. احتمال های زیر را محاسبه نمایید:

a) $P(A \cap B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \longrightarrow 0.4 \times 0.5 = 0.2 = P(A \cap B)$$

b) $P(A' \cap B)$

مستقل از هم: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$0.2 = P(A) \times 0.5$

$P(A) = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \longrightarrow$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A)}$$

$P(A) = P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$P(A') = 1 - 0.4 = 0.6$

$P(A' \cap B) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$

۴) شرکت ها سامسونگ، پاناسونیک و LG تولید کننده های یک نوع میکروکنترلری باشند.

میکروکنترلرهای سامسونگ 40% مارکت را به خود اختصاص داده اند و همچنین میکروکنترلرها

پاناسونیک 25% مارکت را به خود اختصاص داده اند و باقی مارکت متعلق به LG می باشد.

فرض کنید 1% از میکروکنترلرهای پاناسونیک وسامسونگ و 2% از میکروکنترلرهای LG

معیوب باشند. اگر میکروکنترلی که شما خریداری کرده اید دچار عیب باشد، احتمال اینکه سازنده

این میکروکنترلر LG باشد، چقدر است؟

$S = SAMSUNG$ $\quad P(S) = 40\%$ $\quad P(E|S) = 1\%$

$P = Panasonic$ $\quad P(P) = 25\%$ $\quad P(E|P) = 1\%$

$L = LG$ $\quad P(L) = 35\%$ $\quad P(E|L) = 2\%$

$$P(L|E) = ?$$

$$P(L|E) = \frac{P(E|L).P(L)}{P(E|S).P(S) + P(E|P).P(P) + P(E|L).P(L)} = \frac{0.02 \times 0.35}{(0.01 \times 0.40) + (0.01 \times 0.25) + (0.02 \times 0.35)} = 0.51$$

$$\underbrace{}_{0.004} \quad \underbrace{}_{0.0025} \quad \underbrace{}_{0.007} \quad 0.0135$$

۵) فرض کنید 13% مردم چپ دست هستند. اگر برای آزمایشی ما بطور تصادفی 5 نفر را انتخاب

کنیم، احتمال رخدادهای زیر را محاسبه نمایید:

$L = Left hand$ $\quad P(L) = 13\%$

$R = Right hand$ $\quad P(R) = 87\%$

a) اولین چپ دست گروه، پنجمین نفری باشد که انتخاب می شود.

$$P(X=1) = \left(\binom{5}{1}\left(\frac{13}{100}\right)^1\left(1-\frac{13}{100}\right)^4\right).\frac{1}{5} + \left(\binom{5}{4}\left(\frac{87}{100}\right)^4\left(1-\frac{87}{100}\right)^1\right).\frac{4}{5} = (0.3718 \times \frac{1}{5}) + (0.375 \times \frac{4}{5})$$

$$P(a) = P(a|L).P(L) + P(a|R).P(R)$$

$$= 0.074 + 0.296$$

$$= 0.370$$

$$P(L|a) = \frac{P(a|L).P(L)}{P(a)}$$

$$= \frac{0.074}{0.370} \simeq 0.20$$

b) دقیقا 3 چپ دست در گروه وجود داشته باشد.

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{13}{100}\right)^3\left(1-\frac{13}{100}\right)^{5-3}\frac{3}{5} + \binom{5}{2}\left(\frac{87}{100}\right)^2\left(1-\frac{87}{100}\right)^3\frac{2}{5} = 0.0047 + 0.0033$$

$$P(L|a) = \frac{P(a|L).P(L)}{P(X=3)} = \frac{0.0047}{0.0080} = 0.58$$

c) حداقل یک چپ دست در گروه وجود داشته باشد.

$$P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}p^k.(1-p)^{5-k} = \sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}\left(\frac{13}{100}\right)^k.\left(1-\frac{13}{100}\right)^{5-k}$$

d) بیشتر از 3 چپ دست در گروه وجود نداشته باشد.

$$P(0<X<3) = \sum_{k=0}^{3}\binom{5}{k}p^k.(1-p)^{5-k} = \sum_{k=0}^{3}\binom{5}{k}\left(\frac{13}{100}\right)^k.\left(1-\frac{13}{100}\right)^{5-k}$$

---

6) حدود $\frac{2}{3}$ از رانندگان در حین رانندگی با گوشی موبایل خود کار می‌کنند. فرض کنید که احتمال تصادف هنگامی که راننده با گوشی کار می‌کند، 5 برابر حالتی باشد که راننده با گوشی کار نمی‌کند. برای رانندگانی که با گوشی کار نمی‌کنند 1% احتمال تصادف وجود دارد. احتمال اینکه شخصی که تصادف کرده است، قبل از اینکه تصادف رخ دهد با گوشی موبایل خود کار کرده باشد چقدر است؟

N = Not using phone $\quad P(A|N) = 1\% \quad P(N) = \frac{1}{3} = 0.13$

U = Using phone $\quad P(A|U) = 5\% \quad P(U) = \frac{2}{3} = 0.66$

5x

A = Person Accidented

$$P(U|A) = \frac{P(A|U).P(U)}{P(A|U).P(U)+P(A|N).P(N)} = \frac{0.66 \times 0.05}{(0.66\times0.05)+(0.13\times0.01)} = \frac{0.033}{0.0343}$$

$$=0.96$$