تعریف: الف) گوییم تابع f در (a,b) مشتق‌پذیر است، هرگاه در هر نقطه این فاصله مشتق‌پذیر باشد.

ب) گوییم تابع f در $[a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه تابع f در (a,b) مشتق‌پذیر و در a از راست مشتق‌پذیر و در b از چپ مشتق‌پذیر باشد.

ج) گوییم تابع f در $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در (a,b) مشتق‌پذیر و در b از چپ مشتق‌پذیر باشد.

د) گوییم تابع f در $[a,b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه f در (a,b) مشتق‌پذیر و در a از راست مشتق‌پذیر باشد.

مثال: $f(x)=8-x^3$ ، $f'(x)$ را پیدا کنید.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8-(x+\Delta x)^3-8+x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{8}-\cancel{x^3}-3x^2\Delta x-3x(\Delta x)^2-(\Delta x)^3-\cancel{8}+\cancel{x^3}}{\Delta x}=-3x^2$$

مثال: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ ، $f'(3)$ را پیدا کنید.

حل:

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{6+2\Delta x+3}}-\frac{1}{3}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3-\sqrt{9+2\Delta x}}{3\Delta x\sqrt{9+2\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(3-\sqrt{9+2\Delta x})(3+\sqrt{9+2\Delta x})}{3\Delta x\sqrt{9+2\Delta x}\,(3+\sqrt{9+2\Delta x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{3\Delta x\sqrt{9+2\Delta x}\,(3+\sqrt{9+2\Delta x})}=\frac{-1}{27}$$

قضیه: اگر تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در نقطه a پیوسته است.

نکته: عکس قضیه فوق لزوماً برقرار نیست.

مثال: $f(x)=|x^2-4|$ ، تابع f در نقاط ۲ و ۲- مشتق‌پذیر نیست ولی در این

نقاط پیوسته است،

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x>2 \text{ یا } x<-2 \\ 4-x^2 & -2\leq x\leq 2 \end{cases}$$

$f'_+(2)=4 \qquad f'_-(2)=-4 \qquad f'_+(-2)=4 \qquad f'_-(-2)=-4$

قضایای مشتق:

الف) اگر c یک عدد ثابت و $f(x)=c$، آنگاه $f'(x)=0$.

ب) اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $(f(x)\pm g(x))$ مشتق‌پذیر و

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$$

ج) اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع مشتق‌پذیر باشند آنگاه $f(x)g(x)$ مشتق‌پذیر و

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

د) اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع مشتق‌پذیر باشند، آنگاه با فرض $g(x)\neq 0$ داریم $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ مشتق‌پذیر است و

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

هـ) اگر $n\in\mathbb{Z}$ و $f(x)=cx^n$، آنگاه $f'(x)=cnx^{n-1}$

مشتق توابع مثلثاتی:

۱) $(\sin x)'=\cos x$ 　　 ۲) $(\cos x)'=-\sin x$

۳) $(tg x)'=1+tg^2x=\sec^2x$

۴) $(cotg x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x}=\frac{-1}{\sin^2x}=-\csc^2x$

۵) $(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{0+\sin x}{\cos^2x}=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\sec x\cdot tg x$

۶) $(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=\frac{0-\cos x}{\sin^2x}=\frac{-\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}=-\csc x\cdot cotg x$

مشتق ترکیب توابع : (قاعده زنجیری)

قضیه: فرض کنید تابع g در x_1 و تابع f در $g(x_1)$ مشتق‌پذیر است، در این صورت

fog در x_1 مشتق‌پذیر است و

$$(fog)'(x_1) = f'(g(x_1)) \cdot g'(x_1)$$

(صورت دیگر) اگر $\frac{du}{dx}$ و $\frac{dy}{du}$ موجود ، $y = f(u)$, $u = g(x)$,

آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: $f(x) = \sin(\cos(tg\, x))$ مطلوب است محاسبه $f'(x)$

حل: $h(x) = tg\, x \quad , \quad g(x) = \cos x \quad , \quad k(x) = \sin x$

$$f = kogoh \Rightarrow f'(x) = k'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$= \cos(\cos(tg\, x)) \cdot (-\sin(tg\, x)) \cdot \sec^2 x$$

مثال: $h(x) = (1 + tg\sqrt{x})^2$، مطلوب است محاسبه $h'(x)$

حل: $h'(x) = 2(1 + tg\sqrt{x}) \cdot (\sec^2\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

نکته: اگر $f(x) = x^r$ و r یک عدد گویا ، آنگاه $f'(x) = rx^{r-1}$.

مثال: فرض کنید تابع f به ازای هر دو عدد حقیقی a و b در رابطه

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$$

صدق کند و $f(0) = 1$ و $f'(0)$ موجود باشد. نشان دهید تابع f در هر نقطه

x_0 مشتق‌پذیر است و $f'(x_0) = f'(0) f(x_0)$

حل:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0)f(h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x_0) \frac{(f(h) - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} f(x_0) \frac{(f(h) - f(0))}{h} = f(x_0) f'(0)$$

مثال: فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x & \text{گویا } x \\ \sin x & \text{گنگ } x \end{cases}$. نشان دهید تابع f تنها در ۰ مشتق‌پذیر است و $f'(0)=1$.

حل: ابتدا نشان می‌دهیم اگر $x_0 \neq 0$ ، f در x_0 پیوسته نیست و لذا مشتق ندارد.

دنباله‌های گویا $\{r_n\}$ و گنگ $\{\alpha_n\}$ همگرا به x_0 را در نظر بگیرید، در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x_0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = x_0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\alpha_n = \sin x_0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n = x_0$$

اگر $x_0 \neq \sin x_0$ ، تابع f در x_0 پیوسته نیست.

تساوی $\sin x_0 = x_0$ تنها در $x_0=0$ برقرار است.

حال نشان می‌دهیم تابع f در ۰ مشتق‌پذیر است.

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 1 & \text{گویا } x \\ \frac{\sin x}{x} & \text{گنگ } x \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-0}{x} = 1$$

$$\Rightarrow f'(0)=1$$

مثال: نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در ۰ مشتق‌پذیر است ولی تابع f' در ۰ پیوسته نیست.

حل:
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

حد $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ موجود نیست (به کمک دنباله‌ها می‌توانید نشان دهید) پس $\lim_{x\to 0} f'(x)$ موجود نیست، پس f' در ۰ پیوسته نیست.

$$\left(a_n = \frac{1}{2n\pi} \; , \; b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)$$

مشتقات مراتب بالاتر:

فرض کنید تابع $f(x)$ روی بازه I مشتق پذیر باشد. حال می‌توان راجع به مشتق پذیری تابع $f'(x)$ صحبت کرده. مشتق تابع $f(x)$ را با $f'(x)$ و مشتق دوم تابع $f(x)$ را با $f''(x)$ و به همین ترتیب مشتق nام تابع $f(x)$ را با $f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهیم.

$$f^{(0)}(x)=f(x) \quad , \quad f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

مثال: به استقراء نشان دهید اگر $f(x)=\sin x$، آنگاه $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

حل:

$$f^{(1)}(x)=f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

فرض کنید برای $n=k$ داشته باشیم

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

حال برای $n=k+1$ ثابت می‌کنیم

$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

قضیه: (دستور لایبنیتز) فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ دارای مشتقات متوالی تا مرتبه nام باشند. در این صورت مشتق nام تابع $f(x)g(x)$ از رابطه

$$\left(f(x)g(x)\right)^{(n)}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(n-j)}(x)\,g^{(j)}(x)$$

به دست می‌آید.

$$\binom{n}{j}=\frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$

مثال: مشتق دهم تابع $f(x)=x^4\sin x$ را پیدا کنید.

حل:

$$\left(x^4\sin x\right)^{(10)}=\binom{10}{0}\sin^{(10)}(x)\,x^4+\binom{10}{1}\sin^{(9)}(x)\cdot(4x^3)+\dots+\binom{10}{10}\sin^{(0)}(x)\,(x^4)^{(10)}$$

اما:

$$(x^4)'=4x^3 \quad , \quad (x^4)''=12x^2 \quad , \quad (x^4)^{(3)}=24x \quad , \quad (x^4)^{(4)}=24$$

$$(x^4)^{(5)}=0 \quad , \quad (x^4)^{(n)}=0 \quad n\geq 5$$

$$\sin^{(10)}(x) = \sin\left(x + \frac{10\pi}{2}\right) = -\sin x$$

طبق مثال قبل

$\sin^{(9)}(x) = \cos x$ $\qquad \sin^{(8)}(x) = \sin x$ $\qquad \sin^{(7)}(x) = -\cos x$

$\sin^{(6)}(x) = -\sin x$

$$(x^4 \sin x)^{(10)} = -x^4 \sin x + 40x^3 \cos x \cdot x^3 + 540\, x^2 \sin x - 2880\, x \cos x + 5040 \sin x$$

مشتق تابع ضمنی (مشتق‌گیری ضمنی)

توابعی که تا کنون با آن‌ها روبرو شده‌ایم یک متغیر را به طور صریح بر حسب متغیر دیگر تعریف می‌کند مثل $y = x\sin\frac{1}{x}$ یا $y=\sqrt{x^2+1}$ و یا در حالت کلی $y=f(x)$

اما برخی اوقات رابطه بین x و y به طور ضمنی تعریف می‌شود مثل $x^2+y^2=25$

پس در حالت کلی رابطه ضمنی به صورت $F(x,y)=C$ است.

می‌خواهیم از رابطه ضمنی $F(x,y)=C$ نسبت به x مشتق بگیریم.

روش اول:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{-F'_x}{F'_y}$$

اگر از رابطه $F(x,y)=C$ نسبت به y مشتق بگیریم

$$x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{-F'_y}{F'_x}$$

روش دوم: هم‌چنین می‌توانیم برای محاسبه y' $\left(\frac{dy}{dx}\right)$، y را به عنوان تابعی از x در نظر گرفته و جمله به جمله مشتق بگیریم.

مثال: فرض کنید $x^2y^2=x^2+y^2$، مطلوب است محاسبه y'.

حل: روش اول:

$$F(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$$

$$F'_x = 2xy^2 - 2x \quad , \quad F'_y = 2x^2y - 2y$$