

Spis treści

1	Zadanie 0.1	3
1.1	Rozwiązanie Równania	3
1.2	Jakie jest maksymalne napięcie na oporniku i kondensatorze po długim czasie (brak odpowiedzi swobodnej) w przypadku wymuszenia źródłem napięciowym sinusoidalnym o amplitudzie 2V i częstotliwościach odpowiednio 0.1, 1, 10 Hz ??	4
1.3	Wykonaj wykres charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej	7
2	Zadanie 0.2 Oscylator harmoniczny z tłumieniem i bez wymuszenia	9
2.1	Zapisz poprawnie równanie dla masy m_1 na sprężynie k_1 z tłumieniem δ	9
2.2	Sprowadź równanie układu do układu równań stopnia pierwszego, zapisz równanie w postaci macierzowej	9
2.3	Wyznacz częstość własną drgań.	10
2.4	a) Narysuj przebieg wychYLENIA w czasie dla dwóch wybranych warunków początkowych. Skomentuj interpretację tych wyników.	11
2.5	b) Wyznacz tłumienie krytyczne dla tego układu	12
2.6	c) Ruch układu w przestrzeni fazowej (x, v)	13
3	Zadanie 0.3	14
3.1	a) Równanie dla masy m_1 na sprężynie k_1	14
3.2	b) Sprowadź równanie układu do układu równań stopnia pierwszego, zapisz równanie w postaci macierzowej	14
3.3	c)	15
4	Oscylator harmoniczny podwójny bez tłumienia i bez wymuszenia	18
4.1	Zapisz poprawnie równanie dla masy m_1 na sprężynie k_1 i połączonej z nią masy m_2 na sprężynie k_2	18
4.2	Sprowadź równanie układu do układu równań stopnia pierwszego, zapisz równanie w postaci macierzowej	18

4.3	Wyznacz wartości własne macierzy układu. Jaki jest sens fizyczny tych wielkości	19
4.4	Narysuj przebiegi w przestrzeni fazowej (x,v) nakładając na siebie ruch obu mas. Warunki początkowe jak w punkcie 2e.	19

Rozdział 1

Zadanie 0.1

Po jakim czasie w obwodzie bez wymuszenia napięcie spadnie do 0.1 napięcia początkowego?

1.1 Rozwiązanie Równania

Wzór, który poddajemy rozwiązywaniu:

$$\frac{1}{10} = e^{-\alpha * t} \quad (1.1)$$

Zmienna alpha dla R=1 i C=0.949:

$$\alpha = \frac{-1}{RC} \quad (1.2)$$

Po podstawieniu zależności (1.2) otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{-1}{0.949} \quad (1.3)$$

Podstawiamy wzór (1.3) do wzoru (1.1):

$$\frac{1}{10} = e^{-\frac{1}{0.949} * t} \quad (1.4)$$

Rozwiązujemy eksponentę z przybliżeniem:

$$\frac{1}{10} = 2.718282^{-1.053741t} \quad (1.5)$$

Stosujemy logarytm obustronnie:

$$\log\left(\frac{1}{10}\right) = \log(2.718282^{-1.053741t}) \quad (1.6)$$

Kontynuujemy rozwiązywanie poprzez wyłączenie potęgi przed logarytm oraz robimy zamianę stronami:

$$-1.053741t * \log(2.718282) = \log\left(\frac{1}{10}\right) \quad (1.7)$$

Dzielimy przez logarytm z eksponenty:

$$-1.053741t = \frac{\log(\frac{1}{10})}{\log(2.718282)} \quad (1.8)$$

Rozwiązujemy prawą stronę:

$$-1.053741t = -2.302585 \quad (1.9)$$

Następnie dzielimy obustronnie przez -1.053741:

$$\frac{-1.053741t}{-1.053741} = \frac{-2.302585}{-1.053741} \quad (1.10)$$

Otrzymujemy przybliżoną odpowiedź na zadane pytanie. Napięcie spadnie do 0.1 napięcia początkowego po czasie:

$$t = 2.185153 \quad (1.11)$$

1.2 Jakie jest maksymalne napięcie na oporniku i kondensatorze po długim czasie (brak odpowiedzi swobodnej) w przypadku wymuszenia źródłem napięciowym sinusoidalnym o amplitudzie 2V i częstościach odpowiednio 0.1, 1, 10 Hz ??

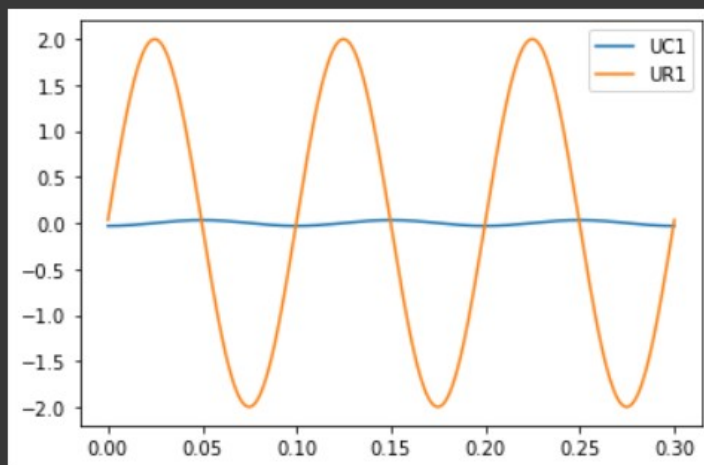
Listing 1.1: Napięcie na kondensatorze i oporniku częstotliwość 0.1Hz

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
R = 1;
C = 0.949;
a = 1/(R*C)
A = 2
#T=2*np.pi/w
w1=(2*np.pi)/0.1
w2=(2*np.pi)/1
w3=(2*np.pi)/10
```

```

# cz stotliwo  0.1Hz
t=np.linspace(0, 3*2*np.pi/w1, 300)
s1=A*(a*np.sin(w1*t)-w1*np.cos(w1*t))/(w1**2+a**2)
sd1=A*(a*w1*np.cos(w1*t)+w1**2*np.sin(w1*t))/(w1**2+a**2)
fig,ax=plt.subplots()
ax.plot(t,s1,t,sd1)
plt.legend(['UC1','UR1'])
plt.show()

```



Maksymalne napięcie przy częstotliwości 0.1Hz: I - kondensator, II - Opornik

```

[ ] max(s1), max(sd1)

(0.03182588912632142, 1.99971778199999465)

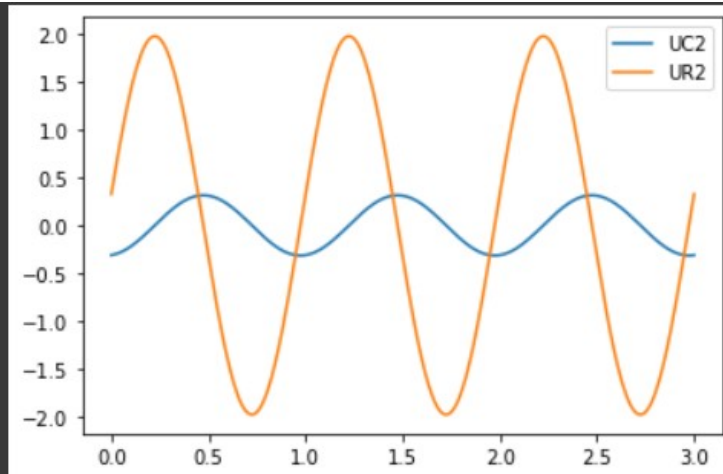
```

Listing 1.2: Napięcie na kondensatorze i oporniku częstotliwość 1Hz

```

# cz stotliwo  1Hz
t=np.linspace(0, 3*2*np.pi/w2, 300)
s2=A*(a*np.sin(w2*t)-w2*np.cos(w2*t))/(w2**2+a**2)
sd2=A*(a*w2*np.cos(w2*t)+w2**2*np.sin(w2*t))/(w2**2+a**2)
fig,ax=plt.subplots()
ax.plot(t,s2,t,sd2)
plt.legend(['UC2','UR2'])
plt.show()

```



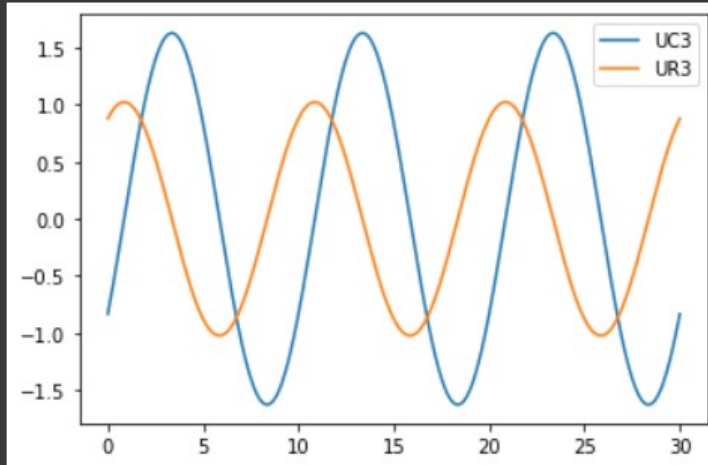
Maksymalne napięcie przy częstotliwości 1Hz: I - kondensator, II - Opornik

```
[ ] max(s2), max(sd2)

(0.31391427026153207, 1.9724429786958044)
```

Listing 1.3: Napięcie na kondensatorze i oporniku częstotliwość 10Hz

```
# cz Ęstotliwo Ę 10Hz
t=np.linspace(0, 3*2*np.pi/w2, 300)
s2=A*(a*np.sin(w2*t)-w2*np.cos(w2*t))/(w2**2+a**2)
sd2=A*(a*w2*np.cos(w2*t)+w2*w2*np.sin(w2*t))/(w2**2+a**2)
fig,ax=plt.subplots()
ax.plot(t,s2,t,sd2)
plt.legend(['UC2','UR2'])
plt.show()
```



Maksymalne napięcie przy częstotliwości 10Hz: I - kondensator, II - Opornik

```
[ ] max(s3), max(sd3)

(1.6301542270770581, 1.0242430621782224)
```

1.3 Wykonaj wykres charakterystyki amplitudowo- częstościowej

W przedziale częstości (0.1, 10) . Oś częstości przedstaw w skali logarytmicznej o podstawie 10

```
logw = []
```

```
ss = []
```

```
ssd = []
```

```
ww=np.linspace(0.1,10,100)
```

```
for w in ww:
```

```
    t = np.linspace(0, 2 * np.pi / w, 100)
```

```
    s=A*(a*np.sin(w*t)-w*np.cos(w*t))/(w**2+a**2)
```

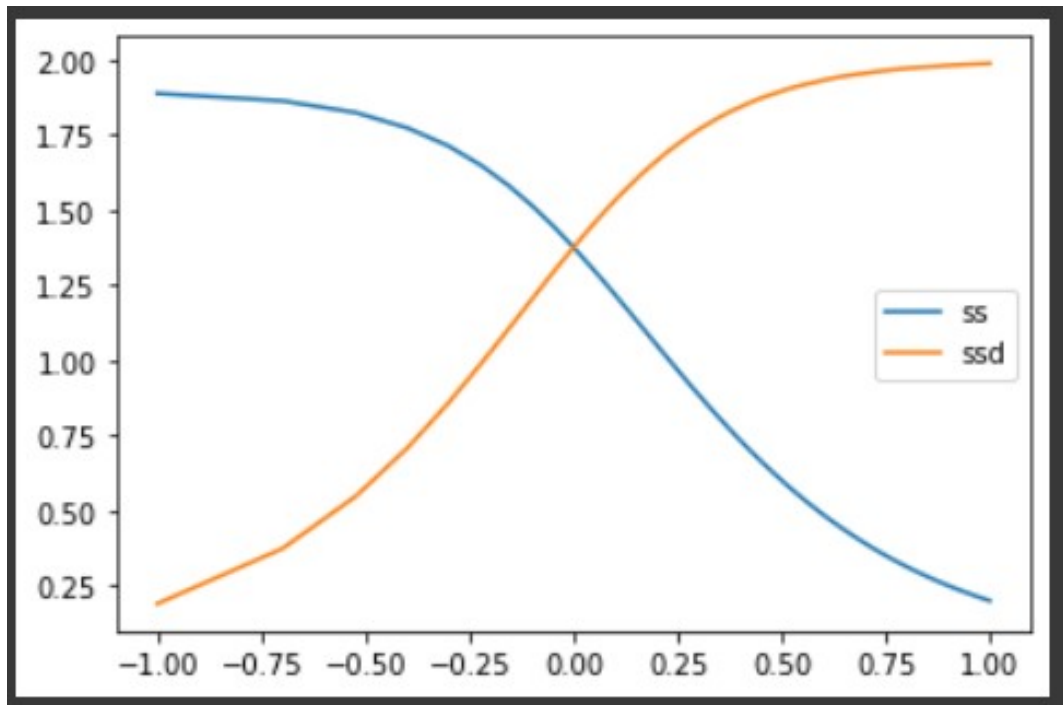
```
    sd=A*(a*w*np.cos(w*t)+w*w*np.sin(w*t))/(w**2+a**2)
```

```
    ss.append(max(s))
```

```
    ssd.append(max(sd))
```

```
    logw.append(np.log10(w))
```

```
fig ,ax=plt .subplots ()  
ax .plot (logw , ss ,logw , ssd )  
plt .legend ([ 'ss ', 'ssd '])  
plt .show ()
```



Rozdział 2

Zadanie 0.2 Oscylator harmoniczny z tłumieniem i bez wymuszenia

2.1 Zapisz poprawnie równanie dla masy m na sprężynie k z tłumieniem δ

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.1)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (2.2)$$

Po podstawieniu:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (2.3)$$

Klasyfikacja równania: jest to równanie jednorodne rzędu drugiego.

2.2 Sprowadź równanie układu do układu równań stopnia pierwszego, zapisz równanie w postaci macierzowej

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -2\delta v - \omega^2 x \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

$$\text{def} \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ \delta^2 & -2\delta - \lambda \end{bmatrix}$$

2.3 Wyznacz częstość własną drgań.

$$-\lambda(-2\lambda - \lambda) + \omega^2 = 0 \quad (2.5)$$

$$2\delta\lambda + \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = 2\delta$$

$$\delta = 0,095$$

$$k = 17,5$$

$$m = 17$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$c = \omega^2$$

$$\Delta = 4\delta^2 - 4\omega^2 \quad (2.7)$$

$$\Delta = 4 * (0,095)^2 - 4 * (\frac{17,5}{17})$$

$$\Delta = 0,0361 - 4,117$$

$$\Delta = -4,0809$$

$$\Delta = 4,0809i^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2,0201i$$

$$\lambda_1 = \frac{-0,19 - 2,0201i}{2 * 1} \quad (2.8)$$

$$\lambda_1 = -0,095 - 1,01005i$$

$$\lambda_2 = \frac{-0,19 + 2,0201i}{2 * 1} \quad (2.9)$$

$$\lambda_2 = -0,095 + 1,01005i$$

Częstości własne drgań w przybliżeniu to:

$$-0,095 - 1,01005i$$

$$-0,095 + 1,01005i$$

2.4 a) Narysuj przebieg wychylenia w czasie dla dwóch wybranych warunków początkowych. Skomentuj interpretację tych wyników.

Warunki początkowe:

$$x[0] = 10$$

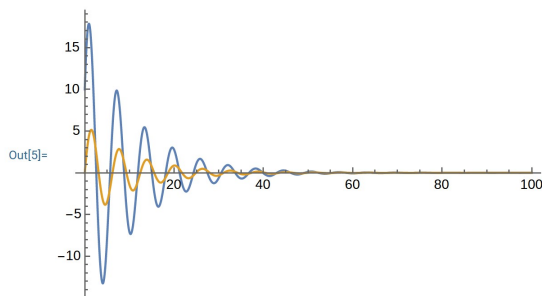
$$\dot{x}[0] = 16$$

$$\delta = 0.095$$

$$\omega = 1.0145$$

```
In[1]:=  $\omega = 1.0145$ 
 $\delta = 0.095$ 
sol = DSolve[{x''[t] + 2  $\delta$  x'[t] +  $\omega^2$  x[t] == 0, x[0] == 10, x'[0] == 16}, x[t], {t, 0, 100}];
sol2 = DSolve[{x2''[t] + 2  $\delta$  x2'[t] +  $\omega^2$  x2[t] == 0, x2[0] == 0, x2'[0] == 6}, x2[t], {t, 0, 200}];
Plot[{x[t] /. sol, x2[t] /. sol2}, {t, 0, 100}, PlotRange -> All]

Out[1]= 1.0145
Out[2]= 0.095
```



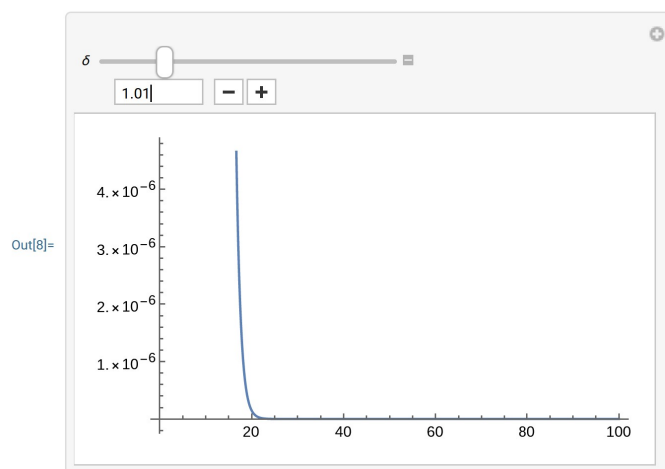
Wniosek: Pomimo początkowej dużej różnicy w wychyleniu po krótkim czasie następuje zrównanie funkcji.

2.5 b) Wyznacz tłumienie krytyczne dla tego układu

```
In[6]:=  $\delta = 0.095$   
 $w = 1.0145$   
Manipulate[  
  sol = DSolve[{x''[t] + 2  $\delta$  x'[t] + w^2 x[t] == 0, x[0] == 6, x'[0] == 3}, x[t], {t, 0, 50}];  
  Plot[Evaluate[x[t] /. sol], {t, 0, 100}], { $\delta$ , 0, 5}]
```

Out[6]= 0.095

Out[7]= 1.0145



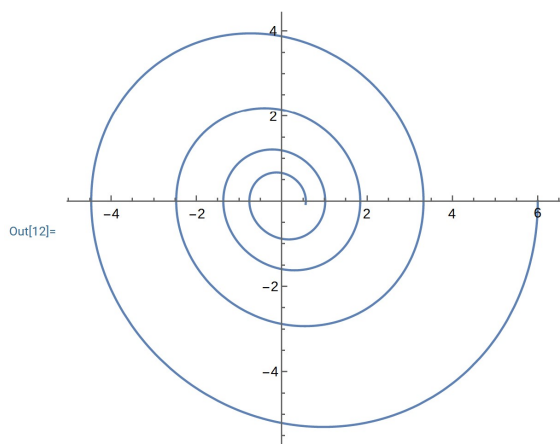
Tłumienie krytyczne wynosi: $\delta = 1.01$

2.6 c) Ruch układu w przestrzeni fazowej (x, v)

```
sol = NDSolve[{x''[t] + 2 δ x'[t] + w^2 x[t] == 0, x[0] == 6, x'[0] == 0}, {x[t], x'[t]}, {t, 0, 25}];  
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. sol], {t, 0, 25}]
```

Out[9]= 0.095

Out[10]= 1.0145



Rozdział 3

Zadanie 0.3

3.1 a) Równanie dla masy m_1 na sprężynie k_1

Zapisz poprawnie równanie dla masy m_1 na sprężynie k_1 z tłumieniem i wymuszeniem harmonicznym o częstotliwości ω i amplitudzie $0.1m$. Zaklasyfikuj typ równania.

Równanie ruchu:

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + k_1 x = A \sin(\omega t) \quad (3.1)$$

Po uproszczeniu:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = 0.1 \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

Gdzie:

- δ - tłumienie
- ω - częstotności własne
- $u(x)$ - funkcja wymuszająca
- 0.1 - amplituda

Klasyfikacja równania: jest to Równanie różniczkowe drugiego rzędu liniowe niejednorodne

3.2 b) Sprowadź równanie układu do układu równań stopnia pierwszego, zapisz równanie w postaci macierzowej

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin(\omega t) \quad (3.3)$$

$$\ddot{x} = -2\delta\dot{x} - \omega_0^2 x + A \sin(\omega t) \quad (3.4)$$

Redukcja równania z rzędu II do rzędu I:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -2\delta v - \omega_0^2 x + A \sin(\omega t) \end{cases}$$

Postać macierzowa:
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

3.3 c

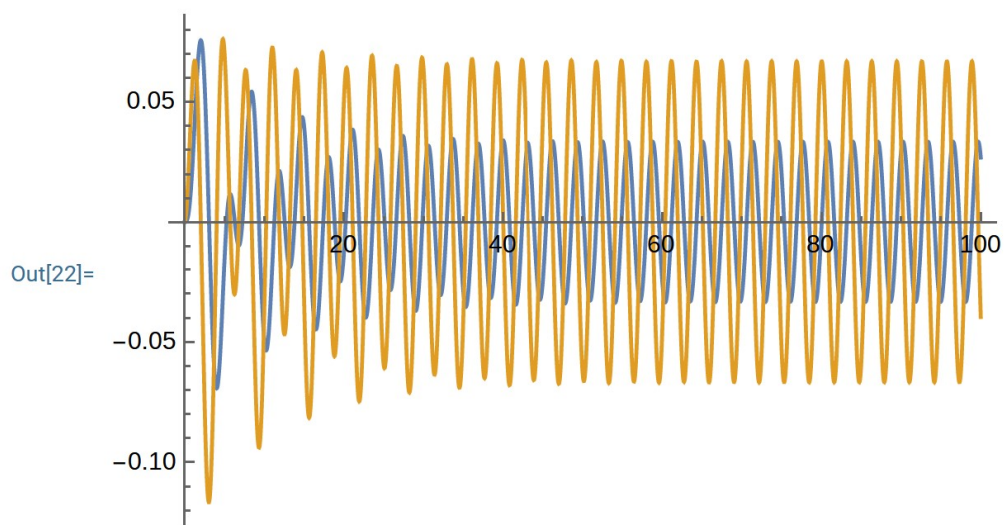
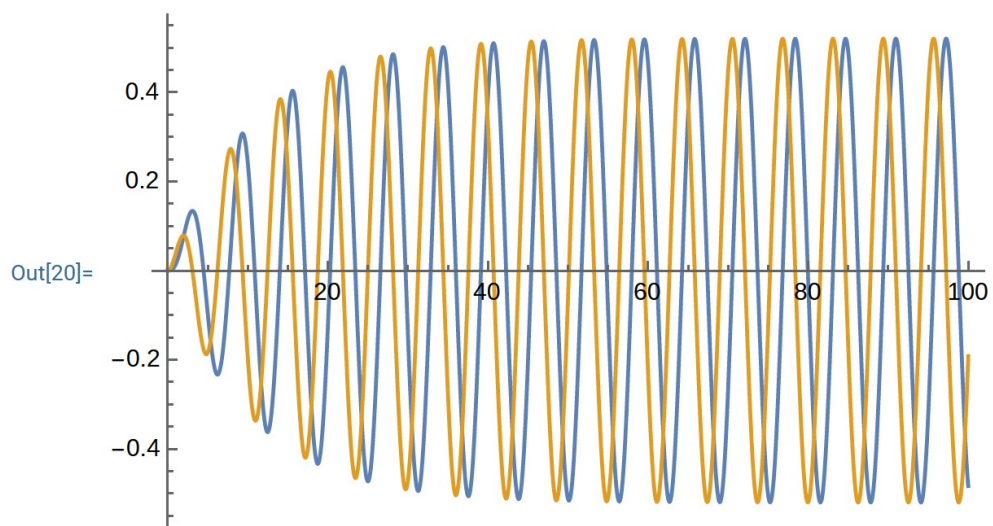
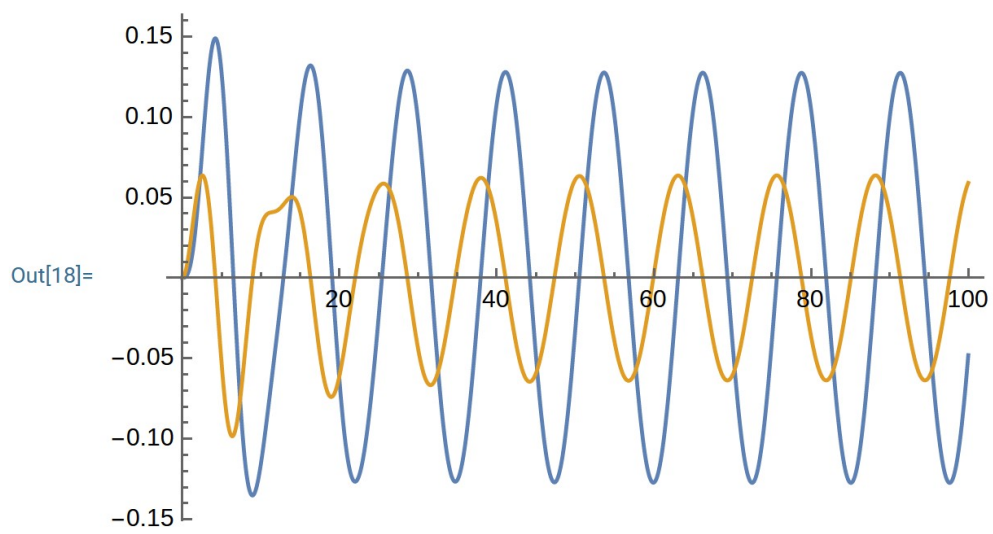
narysuj przebieg wychylenia w czasie dla zerowych warunków początkowych i wymuszenia z częstością 0.5ω , oraz 2ω , (ω - częstość drgań własnych).

```
In[13]:=
δ = 0.095
w = 1.0145
tmax = 100
A = 0.1

sol = NDSolve[{x''[t] + 2 δ x'[t] + w^2 x[t] == A Sin[0.5 t], x[0] == 0, x'[0] == 0}, {x[t], x'[t]}, {t, 0, tmax}];
Plot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. sol], {t, 0, tmax}]

sol2 = NDSolve[{x''[t] + 2 δ x'[t] + w^2 x[t] == A Sin[t], x[0] == 0, x'[0] == 0}, {x[t], x'[t]}, {t, 0, tmax}];
Plot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. sol2], {t, 0, tmax}]

sol3 = NDSolve[{x''[t] + 2 δ x'[t] + w^2 x[t] == A Sin[2 t], x[0] == 0, x'[0] == 0}, {x[t], x'[t]}, {t, 0, tmax}];
Plot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. sol3], {t, 0, tmax}]
```



Na podstawie tych przebiegów, można stwierdzić że w każdym po około 50 sekundach mamy do czynienia ze zjawiskiem rezonansu.

Rezonans to zjawisko wzrastania amplitudy drgań układu drgającego, w którym częstotliwość siły wymuszającej te drgania jest podobna do częstotliwości własnej układu, czyli częstotliwości drgań swobodnych tego układu.

Rozdział 4

Oscylator harmoniczny podwójny bez tłumienia i bez wymuszenia

4.1 Zapisz poprawnie równanie dla masy m_1 na sprężynie k_1 i połączonej z nią masy m_2 na sprężynie k_2 .

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}(-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)) \\ \ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2}(-k_2(x_2 - x_1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{k_2}{m_1}x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\frac{k_2}{m_2}x_2 + \frac{k_2}{m_2}x_1 \end{cases}$$

Klasyfikacja równania: Jest to równanie różniczkowe niejednorodne rzędu drugiego.

4.2 Sprowadź równanie układu do układu równań stopnia pierwszego, zapisz równanie w postaci macierzowej

$$\begin{aligned} x' &= v \\ x'' &= v' \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{k_2}{m_1}x_1 \\ \dot{x}_2 = v_2 \\ \dot{v}_2 = -\frac{k_2}{m_2}x_2 + \frac{k_2}{m_2}x_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{v} \\ \ddot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

**4.3 Wyznacz wartości własne macierzy układu.
Jaki jest sens fizyczny tych wielkości**

$$\det(a - \lambda f) = 0$$

$$\det = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ (-\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} - \lambda & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 &) & -\lambda & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_2}{m_2} & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

$$\lambda_1 = 0. - 1.43109i \quad \lambda_2 = 0. + 1.43109i \quad \lambda_3 = 0. - 2.44569i \quad \lambda_4 = 0. + 2.44569i$$

**4.4 Narysuj przebiegi w przestrzeni fazowej (x,v)
nakładając na siebie ruch obu mas.
Warunki początkowe jak w punkcie 2e.**