Opracował: Arkadiusz Wieczorek L1

Podstawy Modelowania i Symulacji

Spis treści

Rozdział 1

Zadanie 0.1

1.1 Wyprowadzenie wzorów

Drugie (napięciowe) prawo Kirchhoffa:

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot q(t) = U(t) \tag{1.1}$$

Związek między natężeniem i ładunkiem jest następujący:

$$\frac{dq}{dt} = i(t) \tag{1.2}$$

Po podstawieniu zależności (1.2) do równania (1.1) oraz podzieleniu obu stron równania przez R, otrzymujemy:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot q(t) = \frac{U(t)}{R} \tag{1.3}$$

Funkcja wymuszająca ma następującą postać:

$$U(t) = sin(\omega \cdot t) \tag{1.4}$$

Po podstawieniu równania (1.4) do równania (1.3), mamy:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot q(t) = \frac{sin(\omega \cdot t)}{R} \tag{1.5}$$

Po wykonaniu przypisania $\alpha := \frac{1}{RC}$ oraz po pominięciu czynnika $\frac{1}{R}$ z prawej części równania; możemy to zrobić gdyż czynnik ten nie wpływa na kształt funkcji a jedynie na amplitudę funkcji wymuszającej, otrzymujemy:

$$\frac{dq}{dt} + \alpha \cdot q(t) = sin(\omega \cdot t) \tag{1.6}$$

Rozwiązanie równania (1.6) ma następującą postać:

$$q(t) = A \cdot e^{-\alpha t} + \frac{\alpha sin(\omega t) - \omega cos(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} \tag{1.7}$$

Ponieważ pierwszy składnik równania (1.7) $A \cdot e^{-\alpha t} \to 0$ dla $t \to \infty$, dlatego ostatecznie otrzymujemy:

$$q(t) = \frac{\alpha sin(\omega t) - \omega cos(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} \tag{1.8}$$

Z zależności (1.8) oraz (1.2) wynika:

$$i(t) = \frac{\alpha \omega cos(\omega t) - \omega^2 sin(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} \tag{1.9}$$

Po jakim czasie w obwodzie bez wymuszenia napięcie spadnie do 0.1 napięcia początkowego?

1.2 Rozwiązanie Równania

Wzór, który poddajemy rozwiązywaniu:

$$\frac{1}{10} = e^{-\alpha * t} \tag{1.10}$$

Zmienna alpha dla R=1 i C=0.949:

$$\alpha = \frac{-1}{RC} \tag{1.11}$$

Po podstawieniu zależności (1.2) otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{-1}{0.949} \tag{1.12}$$

Podstawiamy wzór (1.3) do wzoru (1.1):

$$\frac{1}{10} = e^{-\frac{1}{0.949} * t} \tag{1.13}$$

Rozwiązujemy eksponentę z przybliżeniem:

$$\frac{1}{10} = 2.718282^{-1.053741t} \tag{1.14}$$

Stosujemy logarytm obustronnie:

$$\log(\frac{1}{10}) = \log(2.718282^{-1.053741t}) \tag{1.15}$$

Kontynuujemy rozwiązywanie poprzez wyłączenie potęgi przed logarytm oraz robimy zamianę stronami:

$$-1.053741t * \log(2.718282) = \log(\frac{1}{10}) \tag{1.16}$$

Dzielimy przez logarytm z eksponenty:

$$-1.053741t = \frac{\log(\frac{1}{10})}{\log(2.718282)} \tag{1.17}$$

Rozwiązujemy prawą stronę:

$$-1.053741t = -2.302585 \tag{1.18}$$

Następnie dzielimy obustronnie przez -1.053741:

$$\frac{-1.053741t}{-1.053741} = \frac{-2.302585}{-1.053741} \tag{1.19}$$

Otrzymujemy przybliżoną odpowiedź na zadane pytanie. Napięcie spadnie do 0.1 napięcia początkowego po czasie:

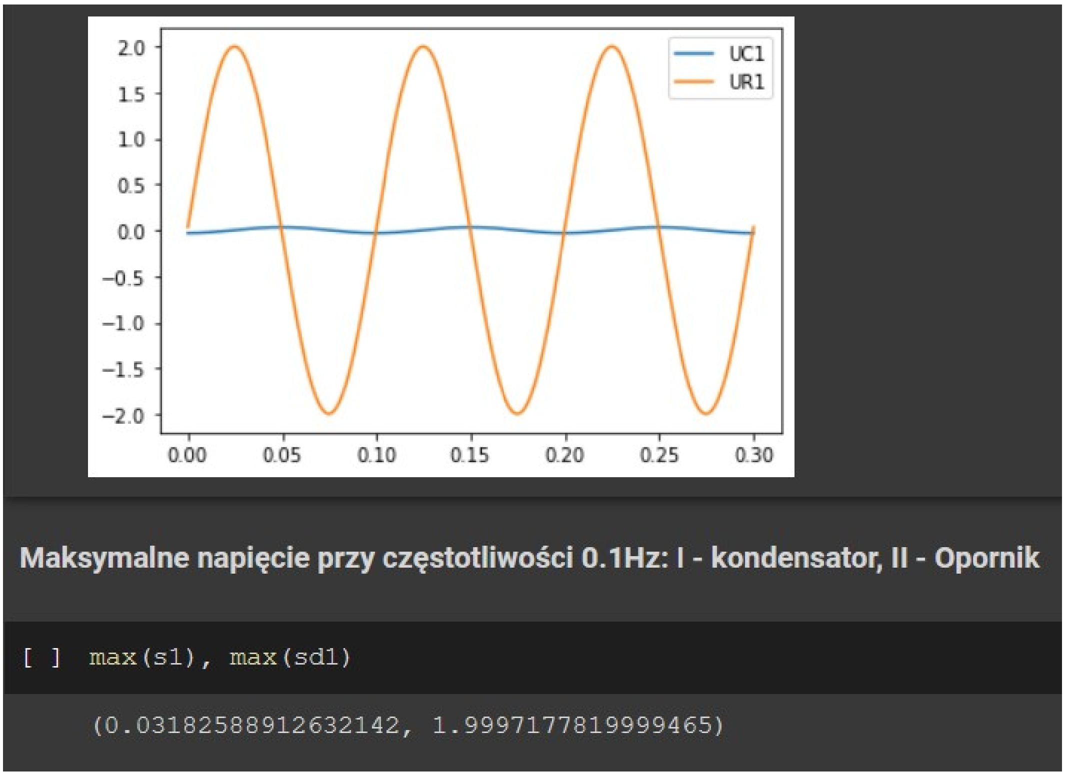
$$t = 2.185153 \tag{1.20}$$

1.3 Jakie jest maksymalne napięcie na oporniku i kondensatorze po długim czasie brak odpowiedzi swobodnej) w przypadku wymuszenia źródłem napięciowym sinusoidalnym o amplitudzie 2V i częstościach odpowiednio 0.1,1,10 Hz ??

Listing 1.1: Napięcie na kondensatorze i oporniku częstotliwość 0.1Hz

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
R = 1;
C = 0.949;
a = 1/(R*C)
A = 2
#T=2*np.pi/w
w1=(2*np.pi)/0.1
w2=(2*np.pi)/1
w3=(2*np.pi)/10


# czŹstotliwoŻ 0.1Hz
t=np.linspace(0, 3*2*np.pi/w1, 300)
```

```
s1=A*(a*np.sin(w1*t)-w1*np.cos(w1*t))/(w1**2+a**2)
sd1=A*(a*w1*np.cos(w1*t)+w1**2*np.sin(w1*t))/(w1**2+a**2)
fig,ax=plt.subplots()
ax.plot(t,s1,t,sd1)
plt.legend(['UC1','UR1'])
plt.show()
```

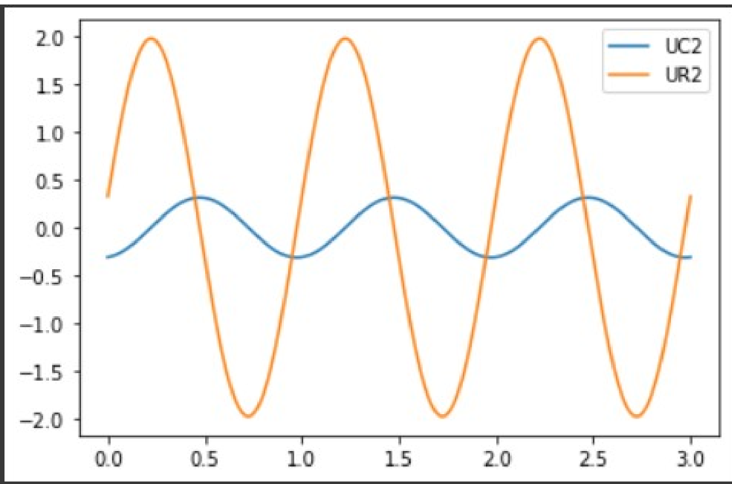


Listing 1.2: Napięcie na kondensatorze i oporniku częstotliwość 1Hz

```
# czŹstotliwoŻ 1Hz
t=np.linspace(0, 3*2*np.pi/w2, 300)
s2=A*(a*np.sin(w2*t)-w2*np.cos(w2*t))/(w2**2+a**2)
sd2=A*(a*w2*np.cos(w2*t)+w2*w2*np.sin(w2*t))/(w2**2+a**2)
fig,ax=plt.subplots()
ax.plot(t,s2,t,sd2)
plt.legend(['UC2','UR2'])
plt.show()
```

Listing 1.3: Napięcie na kondensatorze i oporniku częstotliwość 10Hz

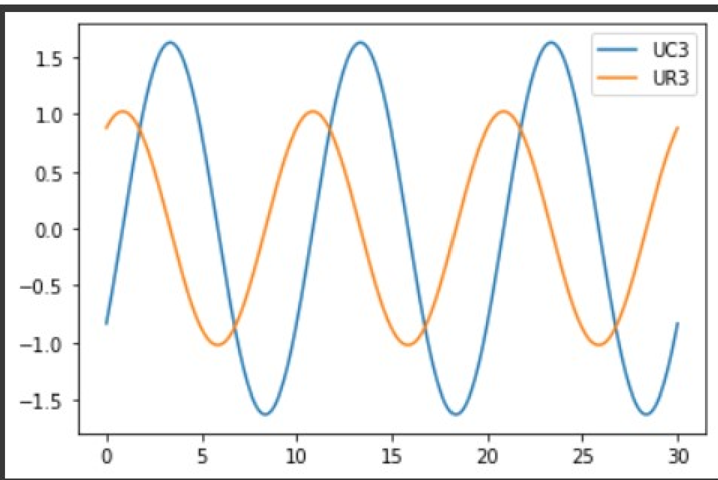
```
# czŹstotliwoŻ 10Hz
t=np.linspace(0, 3*2*np.pi/w2, 300)
```



Maksymalne napięcie przy częstotliwości 1Hz: I - kondensator, II - Opornik

```
[ ]  max(s2), max(sd2)

(0.31391427026153207, 1.9724429786958044)
```

```
s2=A*(a*np.sin(w2*t)-w2*np.cos(w2*t))/(w2**2+a**2)
sd2=A*(a*w2*np.cos(w2*t)+w2*w2*np.sin(w2*t))/(w2**2+a**2)
fig,ax=plt.subplots()
ax.plot(t,s2,t,sd2)
plt.legend(['UC2','UR2'])
plt.show()
```



Maksymalne napięcie przy częstotliwości 10Hz: I - kondensator, II - Opornik

```
[ ] max(s3), max(sd3)
```

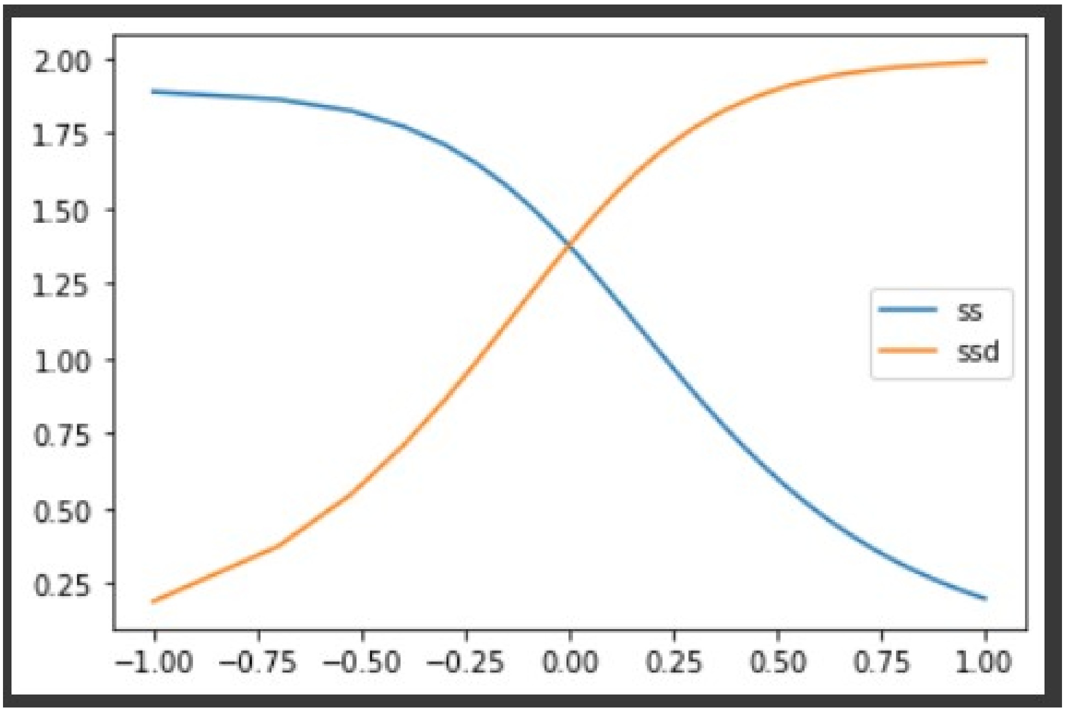
```
(1.6301542270770581, 1.0242430621782224)
```

1.4 Wykonaj wykres charakterystyki amplitudowo-częstościowej

W przedziale częstości (0.1, 10) . Oś częstości przedstaw w skali logarytmicznej o podstawie 10

```
logw = []
ss=[]
ssd=[]

ww=np.linspace(0.1,10,100)

for w in ww:
  t = np.linspace(0, 2 * np.pi / w, 100)
  s=A*(a*np.sin(w*t)-w*np.cos(w*t))/(w**2+a**2)
  sd=A*(a*w*np.cos(w*t)+w*w*np.sin(w*t))/(w**2+a**2)
  ss.append(max(s))
  ssd.append(max(sd))
  logw.append(np.log10(w))
```

```
fig ,ax=plt.subplots()
ax.plot(logw,ss,logw,ssd)
plt.legend(['ss', 'ssd'])
plt.show()
```



Rozdział 2

Zadanie 0.2 Oscylator harmoniczny z tłumieniem i bez wymuszenia

2.1 Zapisz poprawnie równanie dla masy m1 na sprężynie k1 z tłumieniem δ

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2.1}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{2.2}$$

Po podstawieniu:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \frac{k}{m} = 0 \tag{2.3}$$

Klasyfikacja równania: jest to równanie jednorodne rzędu drugiego.

2.2 Sprowadź równanie układu do układu równań stopnia pierwszego, zapisz równanie w postaci macierzowej

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2.4}$$

$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -2\delta v - \omega^2 x \end{cases}$

$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\delta \end{bmatrix}$

$$def \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ \delta^2 & -2\delta - \lambda \end{bmatrix}$$

2.3 Wyznacz częstość własną drgań.

$$-\lambda(-2\lambda - \lambda) + \omega^2 = 0 \tag{2.5}$$

$$2\delta\lambda + \lambda^2 + \omega^2 = 0 \tag{2.6}$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$
$$a = 1$$
$$b = 2\delta$$
$$\delta = 0,095$$
$$k = 17,5$$
$$m = 17$$
$$\tfrac{k}{m} = \omega^2$$
$$c = \omega^2$$

$$\triangle = 4\delta^2 - 4\omega^2 \tag{2.7}$$

$$\triangle = 4 * (0,095)^2 - 4 * (\tfrac{17,5}{17})$$
$$\triangle = 0,0361 - 4,117$$
$$\triangle = -4,0809$$
$$\triangle = 4,0809i^2$$
$$\sqrt{\triangle} = 2,0201i$$

$$\lambda_1 = \frac{-0,19 - 2,0201i}{2 * 1} \tag{2.8}$$

$$\lambda_1 = -0,095 - 1,01005i$$

$$\lambda_2 = \frac{-0,19 + 2,0201i}{2 * 1} \tag{2.9}$$

$$\lambda_2 = -0,095 + 1,01005i$$

Częstości własne drgań w przybliżeniu to:

$-0,095 - 1,01005$

$-0,095 + 1,01005$

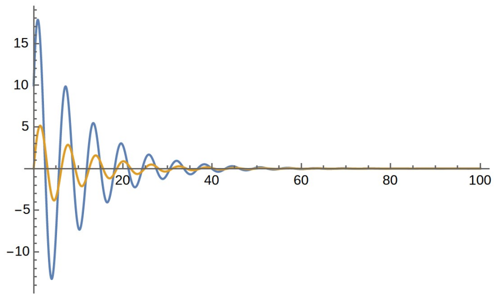
2.4 a) Narysuj przebieg wychylenia w czasie dla dwóch wybranych warunków początkowych.Skomentuj interpretację tych wyników.

Warunki początkowe:

$$x[0] = 10$$
$$\dot{x}[10] = 16$$
$$\delta = 0.095$$
$$\omega = 1.0145$$

```
In[1]:= ω = 1.0145
        δ = 0.095
        sol = DSolve[{x''[t] + 2 δ x'[t] + ω^2 x[t] == 0, x[0] == 10, x'[0] == 16}, x[t], {t, 0, 100}];
        sol2 = DSolve[{x2''[t] + 2 δ x2'[t] + ω^2 x2[t] == 0, x2[0] == 0, x2'[0] == 6}, x2[t], {t, 0, 200}];
        Plot[{x[t] /. sol, x2[t] /. sol2}, {t, 0, 100}, PlotRange → All]
Out[1]= 1.0145
Out[2]= 0.095
```

Out[5]=

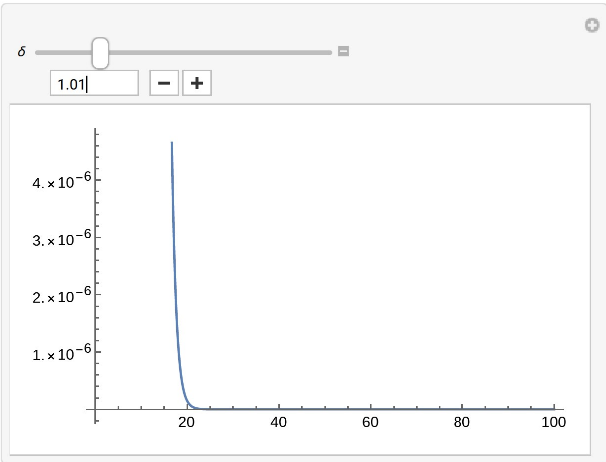


Wniosek: Pomimo początkowej dużej róznicy w wychyleniu po krótkim czasie następuje zrównanie funkcji.

2.5 b) Wyznacz tłumienie krytyczne dla tego układu

```
In[6]:= δ = 0.095
        w = 1.0145
        Manipulate[
         sol = DSolve[{x''[t] + 2 δ x'[t] + w^2 x[t] == 0, x[0] == 6, x'[0] == 3}, x[t], {t, 0, 50}];
         Plot[Evaluate[x[t] /. sol], {t, 0, 100}], {δ, 0, 5}]

Out[6]= 0.095

Out[7]= 1.0145
```

Out[8]=



Tłumienie krytyczne wynosi: $\delta = 1.01$

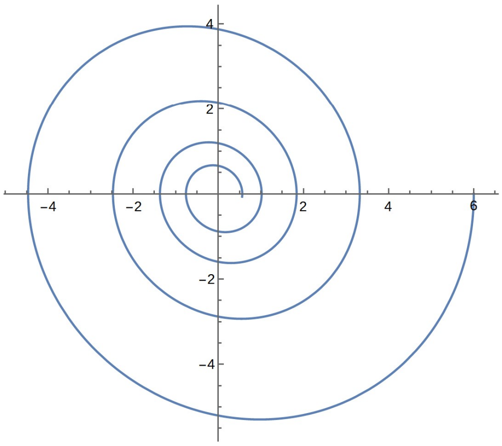
2.6 c) Ruch układu w przestrzeni fazowej (x, v)

```
sol = NDSolve[{x''[t] + 2 δ x'[t] + w^2 x[t] == 0, x[0] == 6, x'[0] == 0}, {x[t], x'[t]}, {t, 0, 25}];
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. sol], {t, 0, 25}]
```

Out[9]= 0.095

Out[10]= 1.0145

Out[12]=



Rozdział 3

Zadanie 0.3

3.1 a) Równanie dla masy m1 na sprężynie k1

Zapisz poprawnie równanie dla masy m1 na sprężynie k1 z tłumieniem i wymuszeniem harmonicznym o częstości w i amplitudzie 0.1m. Zaklasyfikuj typ równania.

Równanie ruchu:

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k_1 x = Asin(\omega t) \tag{3.1}$$

Po uproszczeniu:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0.1sin(\omega t) \tag{3.2}$$

Gdzie:

- δ - tłumienie
- ω - częstości własne
- $u(x)$ - funkcja wymuszająca
- 0.1 - amplituda

Klasyfikacja równania: jest to Równanie różniczkowe drugiego rzędu liniowe niejednorodne

3.2 b) Sprowadź równanie układu do układu równań stopnia pierwszego, zapisz równanie w postaci macierzowej

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = Asin(\omega t) \tag{3.3}$$

$$\ddot{x} = -2\delta\dot{x} - \omega_0^2 x + Asin(\omega t) \tag{3.4}$$

Redukcja równania z rzędu II do rzędu I:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -2\delta v - \omega_0^2 x + Asin(\omega t) \end{cases}$$

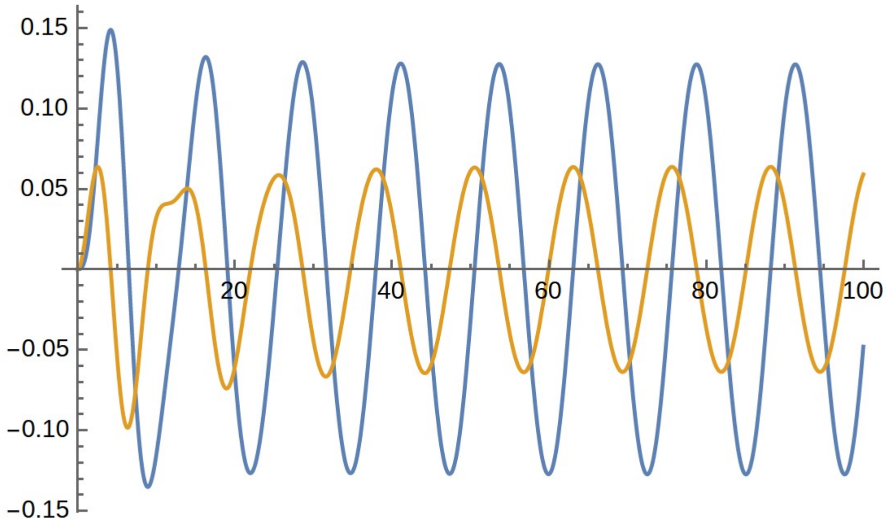
Postać macierzowa: $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Asin(\omega t) \end{bmatrix}$

3.3 c

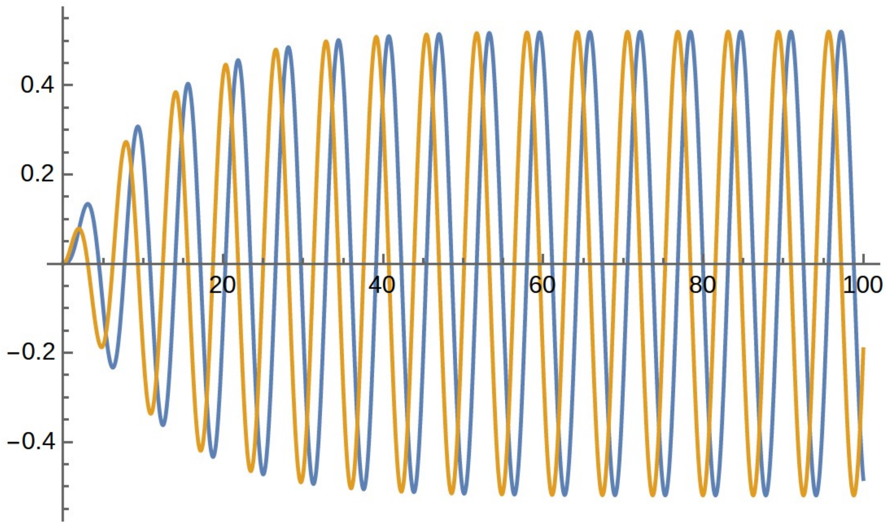
narysuj przebieg wychylenia w czasie dla zerowych warunków początkowych i wymuszenia z częstością 0.5ω, oraz 2ω, (ω - częstość drgań własnych).

```
In[13]:=
δ = 0.095
w = 1.0145
tmax = 100
A = 0.1

sol = NDSolve[{x''[t] + 2 δ x'[t] + w^2 x[t] == A Sin[0.5 t], x[0] == 0, x'[0] == 0}, {x[t], x'[t]}, {t, 0, tmax}];
Plot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. sol], {t, 0, tmax}]

sol2 = NDSolve[{x''[t] + 2 δ x'[t] + w^2 x[t] == A Sin[t], x[0] == 0, x'[0] == 0}, {x[t], x'[t]}, {t, 0, tmax}];
Plot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. sol2], {t, 0, tmax}]

sol3 = NDSolve[{x''[t] + 2 δ x'[t] + w^2 x[t] == A Sin[2 t], x[0] == 0, x'[0] == 0}, {x[t], x'[t]}, {t, 0, tmax}];
Plot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. sol3], {t, 0, tmax}]
```

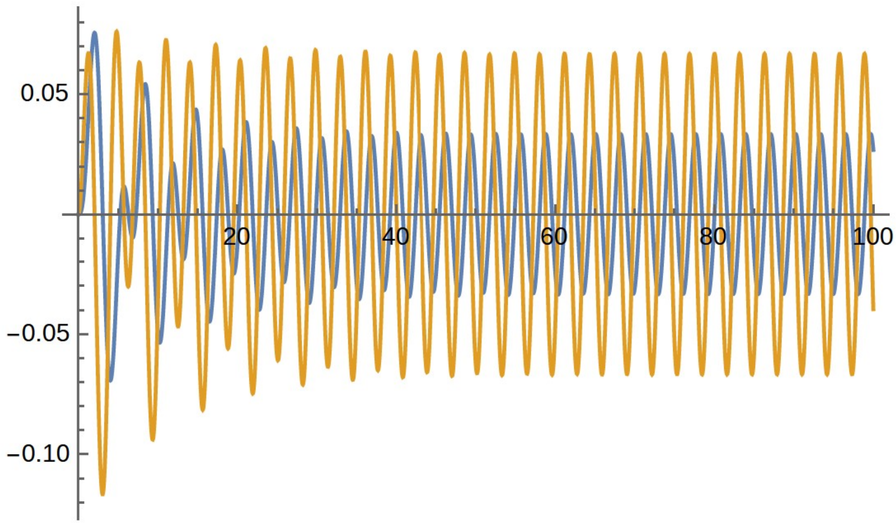
Out[18]=



Out[20]=



Out[22]=



Na podstawie tych przebiegów, można stwierdzić że w każdym po około 50 sekundach mamy do czynienia ze zjawiskiem rezonansu.
Rezonans to zjawisko wzrastania amplitudy drgań układu drgającego, w którym częstotliwość siły wymuszającej te drgania jest podobna do częstości własnej układu, czyli częstości drgań swobodnych tego układu.

Rozdział 4

Oscylator harmoniczny podwójny bez tłumienia i bez wymuszenia

4.1 Zapisz poprawnie równanie dla masy $m1$ na sprężynie $k1$ i połączonej z nią masy $m2$ na sprężynie $k2$.

$$\begin{cases} m_1 * \ddot{x}_1 = -k1x_1 + k2(x_2 - x_1) \\ m_2 * \ddot{x}_2 = -k2(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}(-k1x_1 + k2(x_2 - x_1)) \\ \ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2}(-k2(x_2 - x_1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k1}{m_1}x_1 + \frac{k2}{m_1}x_2 - \frac{k2}{m_1}x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\frac{k2}{m_2}x_2 + \frac{k2}{m_2}x_1 \end{cases}$$

Klasyfikacja równania: Jest to równanie różniczkowe niejednorodne rzędu drugiego.

4.2 Sprowadź równanie układu do układu równań stopnia pierwszego, zapisz równanie w postaci macierzowej

$$x' = v$$
$$x'' = v'$$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = v_1 \\ \dot{v_1} = -\frac{k1}{m_1}x_1 + \frac{k2}{m_1}x_2 - \frac{k2}{m_1}x_1 \\ \dot{x_2} = v_2 \\ \dot{v_2} = -\frac{k2}{m_2}x_2 + \frac{k2}{m_2}x_1 \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{v} \\ \ddot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k1}{m_1} * \frac{k2}{m_1} & 0 & \frac{k2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k2}{m_2} & 0 & \frac{k2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

4.3 Wyznacz wartości własne macierzy układu. Jaki jest sens fizyczny tych wielkości

$$det(a - \lambda f) = 0$$

$$det = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ (-\frac{k1}{m_1} + \frac{k2}{m_1} & -\lambda & \frac{k2}{m_1} & 0 \\ 0 &) & -\lambda & 1 \\ \frac{k2}{m_2} & 0 & \frac{k2}{m_2} & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{4.4}$$

$\lambda_1 = 0.$ - $1.43109i$ $\lambda_2 = 0. + 1.43109i$ $\lambda_3 = 0.$ - $2.44569i$ $\lambda_4 = 0. + 2.44569i$

4.4 Narysuj przebiegi w przestrzeni fazowej (x,v) nakładając na siebie ruch obu mas. Warunki początkowe jak w punkcie 2e.

Rozdział 5

Zadanie 6 i 7 na githubie. Link do wszystkich plików Poniżej.

Wszystkie Zadania