MATH-F307 - Mathématiques discrètes 2021-2022

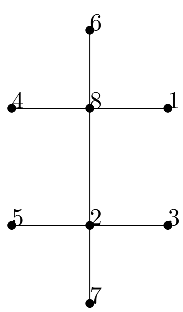
Exercice 1.

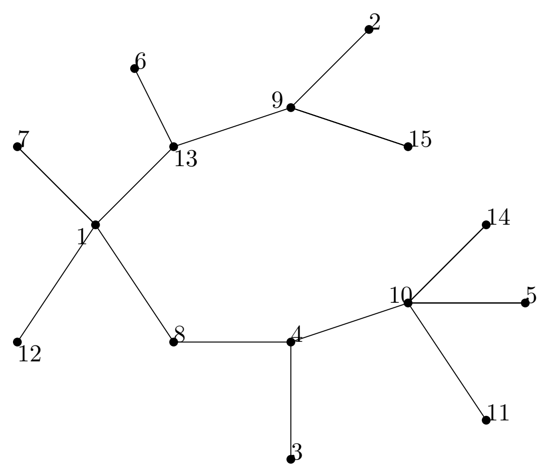
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \quad ?$$

Exercice 2.

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}(i+1)2^{i} = \quad ?$$

Exercice 3. Construire le code de Prüfer des arbres suivants:





Exercice 4. Construire l'arbre associé aux codes de Prüfer suivants:

1. $(4, 1, 3, 1)$;
2. $(3, 6, 6, 2, 1, 4)$.

Ex 1 :

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{j}$$

$$= \sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{i} \binom{4}{i}\binom{i}{j}$$ → on prend le 4 de manière arbitraire

$i=3$ $$\binom{4}{3}\binom{3}{0} + \binom{4}{3}\binom{3}{1} + \binom{4}{3}\binom{3}{2}$$

on met en évidence

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} 1^{j} 1^{i-j}}_{2^i}$$ binôme de Newton

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{i} \cdot 1^{n-i}$$ → Newton

$$= (2+1)^{n} = 3^{n}$$

Ex 2 :

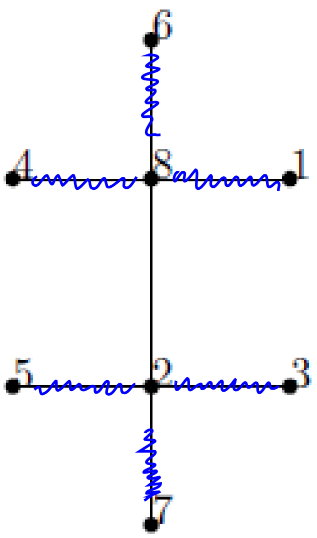
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} (i+1)\, 2^{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(n+1)!}{\cancel{(i+1)}(n-i)!} \cancel{(i+1)}\, 2^{i}$$

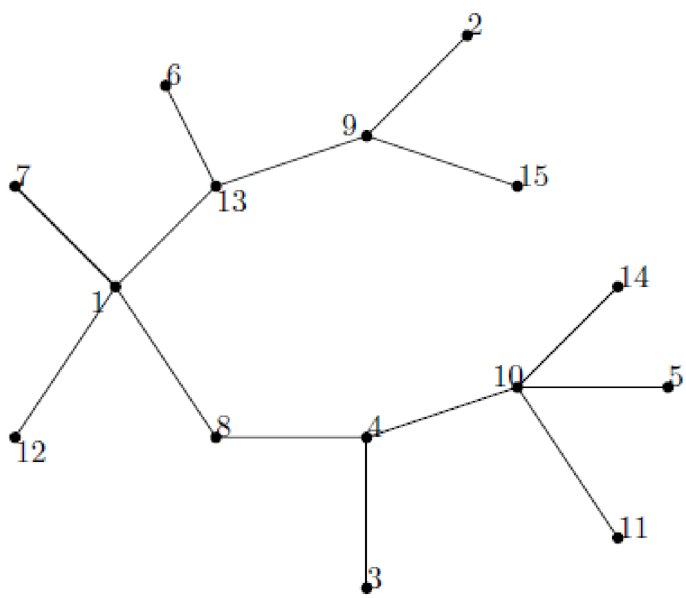
$$= (n+1) \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} 2^{i}\, 1^{n-i}$$

$$= (n+1)(2+1)^{n}$$ → binôme de Newton : $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i} y^{n-i} = (x+y)^{n}$

Ex 3 :



(7, 2, 8, 5, 8, 2)



↳ voir feuille suivante

(4, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 3, 1, 1)

0 4 0 2 3 0 0 2 3 0 2 0 0 2 1 0

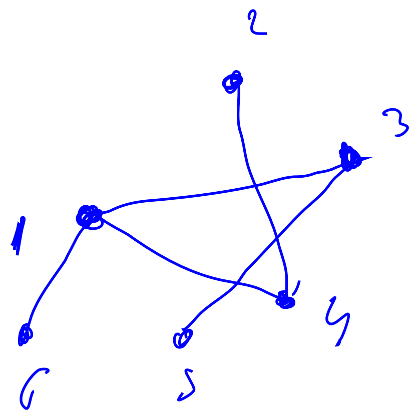
→ (9, 4, 10, 13, 1, 15, 1, 10, 4, 8, 1, 13, 9)

Ex 4 : ① (4, 1, 3, 1) → # +2 nb de sommets

1 2 3 4 5 6

degrés : (3, 1, 2, 2, 1, 1)

0 1 2 0 1 0 0 1



on obtient vect deg en faisant nb instance +1

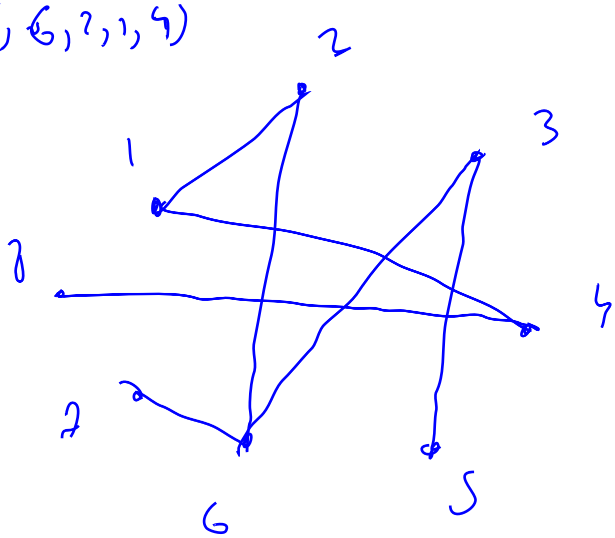
(1 2 3 4 5 6

3 1 2 ② 1 1 → on trouve celui qu'on relie

③ 0 2 1 1 1

- - - -

2 (3, 6, 6, 2, 1, 4)



Exercice 5. (Examen août 2011.) Pour des naturels strictement positifs n et r, on pose

$$A_r^n := \sum_{k=0}^{n} k^r \binom{n}{k} .$$

- Sur base de cette relation de récurrence, donner une formule pour A_1^n et A_2^n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En utilisant les propriétés des coefficients binomiaux, démontrer que les nombres A_r^n vérifient la relation de récurrence $A_r^n = n(A_{r-1}^n - A_{r-1}^{n-1})$ pour $n, r \geq 2$.

Exercice 6. Ecrire l'algorithme permettant de calculer le code de Prüfer $c = c(T)$ d'un arbre T sur $[n]$. Trouver ensuite un algorithme permettant, étant donné un code de Prüfer $c \in [n]^{n-2}$, de trouver l'arbre T correspondant. Justifier soigneusement que votre algorithme est correct.

Exercice 7. Vérifier que

$$\sum_{(d_1,\ldots,d_n)} \binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1} = n^{n-2}$$

où la somme est prise sur les vecteurs des degrés des arbres sur $[n]$.

Ex 5 :

$$A^n_r := \sum_{k=0}^{n} k^r \binom{n}{k}$$

$$A^n_1 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$ → voir ex 8 TP 2

$$= n 2^{n-1}$$

$$A^n_1 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n + \sum_{k=2}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

$$= n + \sum_{k=2}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= n + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{k(k-1)}_{k^2-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} + k\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

on ajoute ce terme car on a ajouté $-k$ → il faut rétablir l'égalité

$$= n + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n + n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}_{\binom{n-2}{k-2}} + n \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}_{\binom{n-1}{k-1}}$$

$$= n + n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} + n \sum_{k=2}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n + n(n-1) \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} \cdot 1^j \cdot 1^{n-2-j}}_{2^{n-2}} + n \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i}}_{\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} - 1}$$

$$= n + n(n-1)\, 2^{n-2} + n\left(2^{n-1} - 1\right) = n(n-1)\, 2^{n-2} + n\, 2^{n-1}$$

Ex 6 : ① Ashe Code :

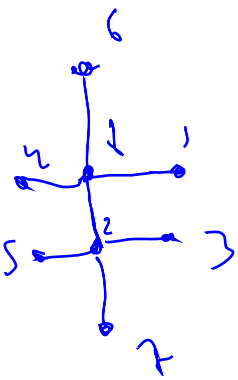
→ Former le vecteur des degrés

→ Repérer le 1er 1 (la plus petite feuille)

→ Prendre note du voisin

→ Diminuer le degré de la feuille et du voisin de 1 ds le vecteur des degrés

→ stop quand il y a deux 1 (vecteur des degrés) et que des 0



→ vecteur des degrés

(~~1~~, ~~4~~, ~~1~~, ~~1~~, ~~1~~, ~~1~~, 1, ~~4~~)

1 → 0   3

8 → 3 0   2

4 → 0

5 → 2   0

6 →   0   1

7 →   0 0

(1, 2, 8, 2, 8, 2)

② Code → arbre

→ Former le vecteur de degrés en comptant le nb d'apparit° de chaque sommet ds le code en ajoutant 1

→ Repérer le premier 1 et puis relier le sommet qui y correspond au premier du lock de Printer.

→ Stop quand obtient 1 et que des 0 ds le vecteur où élagués

+ relier les 2 sommets correspondants

_ _ . - - _