Math : Synthèse

Les fonctions Génératrices

Chapitre 5

Jerome Jadot
[Date]

Table des matières

Définition

"Une fonction génératrice est une corde à linge où on peut prendre les termes d'une suite"

$$
\begin{aligned}
b &= a \\
ab &= a^2 \\
ab - b^2 &= a^2 - b^2 \\
b(a-b) &= (a+b)(a-b) \\
b &= a + b \\
b &= b + b \\
b &= 2b \\
1 &= 2
\end{aligned}
$$

Les nombres de Catalan

Triangularisation

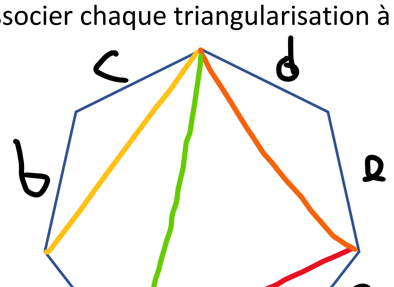
C'est le nombre de triangle que l'on peut faire dans une forme en y ajoutant des segments.

- Triangle : 1 Triangularisation
- Carré : 2 Triangularisation
- Pentagone : 5 Triangularisation
- Hexagone : 14 Triangularisation
- Heptagone : 42 Triangularisation
- Octogone : 132 Triangularisation
- Ennéagone : 429 Triangularisation
- Décagone : 1430 Triangularisation

"Catalan démontre le lien entre le nombre de manières de parenthéser n facteurs et le nombre de triangularisations d'un polygone à n+1 cotés."

Exemple

Associer chaque triangularisation à un parenthésage ?



b x c

a x (b x c)

(a x (b x c)) x (d x c)

d x c

(a x (b x c) x (d x c)) x f

Mot de Dyck

Definition 1

"Un mot de Dyck est un mot

- De deux lettres : 'A' et 'B'
- Contenant autant de 'A' que de 'B'
- Aucun préfixe ne contient strictement plus de 'B' que de 'A' "

Exemple

- Mot de Dyck : AAABBAABABBB -> 6 A et 6B
- N'est pas un mot de Dyck : AABBBAAB -> Car BBB suivit de AA !!!

Il existe une manière plus visuelle de se représenter les mots de Dyck, c'est un mot :

- Composé de : "(" et ")"
- Contenant autant de "(" que de ")"
- Aucun préfixe ne contient strictement plus de ")" que de "("
- Succession valide de parenthèses.

Voir aussi exemple des escaliers au-dessus de la diagonale vue en tp.

Définition 2

"Quel est le nombre de manières c_n de parenthéser un produit de n facteurs $x_1, \ldots, x_n$? Ce nombre c_n s'appelle n-ème **nombre de Catalan**."

Exemple

Pour n = 1 et n = 2, on trouve les parenthésages triviaux :

- $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_1x_2}$

Pour n = 3 il y a 2 parenthésages :

- $\mathbf{(x_1x_2)x_3}$ et $\mathbf{x_1(x_2x_3)}$

Pour n = 4, il y a 5 parenthésages :

- $\mathbf{((x_1x_2)x_3)x_4}$ et $\mathbf{(x_1(x_2x_3))x_4}$ et $\mathbf{(x_1x_2)(x_3x_4)}$ et $\mathbf{x_1((x_2x_3)x_4)}$ et $\mathbf{x_1(x_2(x_3x_4))}$

Théorème

Théorème 8

Pour tout $n \geqslant 1$, le n-ème nombre de Catalan est

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Si on compare les valeurs de c_n à celles de F_n (Fibonacci), on observe que $c_n > F_n$. Les deux ont un comportement exponentiel. Avec les comportement asymptotiques on peut voir que $c_n = \Omega((4-\varepsilon)^n)$ (pour tout $\varepsilon > 0$) et $F_n = \Theta(\varphi_n) = \Theta(((1+\sqrt{5})/2)_n = O((1.6181)_n)$.

Théorème 9

Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
&\#(\text{arbres binaires enracinés à } n \text{ feuilles})\\
&= \#(\text{triangulations d'un } (n+1)\text{-gone})\\
&= n\text{-ème nombre de Catalan}\\
&= \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{n + 1 - ème nombre de Catalan}\\
&= \#(\text{triangulations d'un (n + 2) - gone})\\
&= \#(\text{parenthèsage d'un produit de n + 1 facteurs})\\
&= \#(\text{arbres binaires enracinés à n + 1 feuilles})\\
&= \#(\text{arbres enracinés à n arêtes})\\
&= \#(\text{manières de disposer n paires de parenthèses})\\
&= \#(\text{mot de Dyck de longueur 2n})\\
&= \#(\text{d'escaliers de Dyck de longueur 2n})\\
&= \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Retour sur les nombres de Fibonacci

Rappel

Suite de Fibonacci est définie par la RLCC :

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $\forall n >= 2$; $F_0 = 0; F_1 = 1$

Posons maintenant

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

Alors on a :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{0 + x}_{\text{conditions initiales}} + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= x + \underbrace{x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1}}_{=xf(x)} + \underbrace{x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2}}_{=x^2 f(x)} .
\end{aligned}
$$

On débouche sur une équation fonctionnelle :

$(1 - x - x^2)\, f(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$

Détails du calcul :

(*) $f(x) = \frac{x}{\boxed{1-x-x^2}}$

1) racines du dénominateur : $-x^2 - x + 1 = 0$

$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$1 - x - x^2 = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x)$

2) $\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{1-\alpha_1 x} + \frac{B}{1-\alpha_2 x}$? A, B ctes

même dénominateur $= \frac{A \quad (1-\alpha_2 x)}{(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)} + \frac{B \quad (1-\alpha_1 x)}{(1-\alpha_2 x)\,(1-\alpha_1 x)}$

$= \frac{A(1-\alpha_2 x) + B(1-\alpha_1 x)}{1-x-x^2}$

Résoudre pour trouver A, B

$\frac{1.x}{\cancel{1-x-x^2}} = \frac{A(1-\alpha_2 x) + B(1-\alpha_1 x)}{\cancel{1-x-x^2}}$

$= (A+B) + (-\alpha_2 A - \alpha_1 B)\, x$

$\begin{cases} 0 = A + B \\ -1 = \alpha_2 A + \alpha_1 B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = A + B \Leftrightarrow B = -A \\ -1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) A + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \underset{-A}{\underset{\shortparallel}{B}} \end{cases}$

$\begin{cases} B = -A \\ -1 = \frac{\cancel{1}-\sqrt{5} \quad \cancel{-1}-\sqrt{5}}{2} A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1/\sqrt{5} \\ A = 1/\sqrt{5} \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1/\sqrt{5}}{1 - \underset{\varphi}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} x} + \frac{-1/\sqrt{5}}{1 - \underset{\bar{\varphi}}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} x}$

Décomposons f(x) en fractions simples :

$$
f(x) = \frac{\overset{A}{\frac{1}{\sqrt{5}}}}{1 - \varphi x} + \frac{\overset{B}{\frac{-1}{\sqrt{5}}}}{1 - \bar{\varphi} x}
$$

En utilisant l'identité :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda x)^n = \frac{1}{1-\lambda x} \ ,$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n x^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\varphi}^n x^n \ .$$

Finalement, en identifiant le coefficient de x^n dans l'expression de gauche avec le coefficient de x^n dans l'expression de droite, on retombe sur la *formule de Binet* :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \bar{\varphi}^n) \ .$$

Fonction génératrice ordinaire (FGO)

Définition

Définition 3 (Fonction génératrice ordinaire)

La fonction génératrice ordinaire (FGO) de la suite

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

est définie par

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

On note $[x^n]A(x)$ *le coefficient de* x^n *dans* $A(x)$, *c'est-à-dire*

$$[x^n]A(x) = a_n \ .$$

Théorème

Théorème 11

Soient $A(x)$ *la FGO de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $B(x)$ *la FGO de* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Alors :*

(i) $A(x)+B(x)$ *est la FGO de* $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $xA(x)$ *est la FGO de* $(0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots)$.

(iii) $\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$ *est la FGO de* $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n}, \ldots)$.

(iv) $\frac{A(x)-a_0}{x}$ *est la FGO de* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, \ldots)$.

(v) $A'(x)$ *est la FGO de* $(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, (n+1)a_{n+1}, \ldots)$.

(vi) $A(x)B(x)$ *est la FGO de* $(a_0b_0, a_0b_1+a_1b_0, a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0, \ldots)$.

(vii) $(1-x)A(x)$ *est la FGO de* $(a_0, a_1-a_0, a_2-a_1, \ldots, a_n-a_{n-1}, \ldots)$.

(viii) $\frac{A(x)}{1-x}$ *est la FGO de* $(a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \ldots, \sum_{k=0}^{n} a_k, \ldots)$.

Exemple

Je remets la théorie sur les FGO tel quel car je n'ai pas tout compris si je comprends je referai une nouvelle version.

Voyons quelques applications du théorème. Pour commencer, quelle est la FGO de la suite $(0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots)$?

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \text{FGO de } (1, 1, 1, 1, \dots) \\
\underset{(viii)}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} &= \text{FGO de } (1, 1+1, 1+1+1, \dots) \\
&= (1, 2, 3, \dots, n+1, \dots) \\
\underset{(ii)}{\Longrightarrow} \quad \frac{x}{(1-x)^2} &= \text{FGO de } (0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots)\ .
\end{aligned}$$

Théorème

Théorème 12

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, la FGO de $\left(\binom{n}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $k \in \mathbb{N}$ fixé est égal à

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Exemple

- Cherchons maintenant la FGO de $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$. Par (iii), c'est

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t = \Big[-\ln(1-t) \Big]_0^x = \left[\ln \frac{1}{1-t} \right]_0^x = \ln \frac{1}{1-x} - 0\ .$$

- Par (viii), la FGO de $(0, 1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \dots, 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, \dots)$ est donc

$$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$$

Nombre harmonique

Définition

Définition 4 (Nombre harmonique)

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

*est le n-ème **nombre harmonique**. (Pour $n = 0$, on a $H_0 := 0$.)*

Théorème

Théorème 13

La FGO de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres harmoniques est

$$\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}\ .$$

FGO : récurrences linéaires

Il est possible de résoudre les RLCC homogène ou non en utilisant les FGO

Exemple

Avec les nombres de Fibonacci dont la FGO est $f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$

Autre avec une RLCC non homogène :

Exemple 14

Soit $A(x)$ la FGO de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_n = 2a_{n-1}+1 \quad \forall n \geq 1; \quad a_0 = 0\ .$$

Alors

$$A(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1}+1)x^n = 0 + 2xA(x) + \underbrace{\left(\frac{1}{1-x}-1\right)}_{=\frac{x}{1-x}}\ .$$

Par conséquent,

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}\ .$$

Détails :

$A(x) = 0 + 2x\,A(x) + \frac{x}{1-x}$

isoler $A(x)$

$(1-2x)\,A(x) = \frac{x}{1-x} \iff A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$

technique des fraction simples : $\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}$? A, B

$\frac{A(1-2x)+B(1-x)}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A+B-(2A+B)x}{(1-x)(1-2x)}$

$\iff 0+1x = (A+B) - (2A+B)x$

$\begin{cases} A+B=0 \\ 1=-2A-B \end{cases} \iff \begin{cases} B=-A \\ 1=-2A+A \end{cases} \quad \begin{cases} B=1 \\ A=-1 \end{cases}$

Exemple 15 (suite)

En décomposant en fractions simples, on trouve

$$A(x) = \overset{B}{\frac{1}{1-2x}} - \overset{A}{\frac{1}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}1x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(2^n-1)}_{a_n}x^n.$$

$(*)\ A=2 \qquad (*)\ A=1$

Donc

$$a_n = [x^n]A(x) = 2^n - 1 \quad \forall n \geq 0.$$

Ceci se généralise à toutes les RLCC

Méthode de résolution

1. Déterminer la FGO A(x) de la suite inconnue $(a_n)n \in \mathbb{N}$. Celle-ci sera toujours une fonction rationnelle du type $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, et deg P < deg Q.
2. Décomposer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fractions simples
3. Extraire les coefficients en utilisant la décomposition

FGO le problème de monnaie

De combien de manières peut-on rendre n cents de monnaie avec des pièces de 1,2,5 et 10 centimes.

Soit $A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la FGO de la suite recherchée. Alors

$$A(x) = \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} x^{n_1}\right)\left(\sum_{n_2=0}^{\infty} x^{2n_2}\right)\left(\sum_{n_5=0}^{\infty} x^{5n_5}\right)\left(\sum_{n_{10}=0}^{\infty} x^{10n_{10}}\right) ,$$

et donc

$$A(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \; !$$

Remarquez le peu d'efforts à fournir pour trouver une expression de la FGO $A(x)$. Maintenant, comme extraire les coefficients a_n ?

On a

$$A(x) = \frac{1+x+x^2+\ldots+x^9}{1-x^{10}} \cdot \frac{1+x^2+\ldots+x^8}{1-x^{10}} \cdot \frac{1+x^5}{1-x^{10}} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} .$$

Maintenant, on peut allègrement effectuer le produit des numérateurs. Le numérateur résultant est un polynôme de degré 22, que nous noterons $\sum_{i=0}^{22} c_i x^i$. Reprenons :

$$A(x) = \frac{\sum_{i=0}^{22} c_i x^i}{(1-x^{10})^4} = \sum_{i=0}^{22} c_i \frac{x^i}{(1-x^{10})^4} ,$$

avec

$$c = (1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 8, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 1, 1) .$$

On sait que $\frac{x^3}{(1-x)^4}$ est la FGO de $\left(\binom{n}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir Proposition 12).
Donc $\frac{1}{(1-x)^4}$ est la FGO de $\left(\binom{n+3}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
On va se baser là-dessus pour extraire les coefficients :

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k \Longrightarrow \frac{1}{(1-x^{10})^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{10k} ,$$

donc

$$[x^{10k}]\frac{1}{(1-x^{10})^4} = \binom{k+3}{3}$$

puis

$$[x^n]\frac{1}{(1-x^{10})^4} = \begin{cases} \binom{\frac{n}{10}+3}{3} & \text{si } 10 \mid n \\ 0 & \text{si } 10 \nmid n \end{cases}$$

En posant $c_i = 0$ pour $i \in \{23, \ldots, 29\}$, et en utilisant le fait que $\binom{p}{3} = 0$ pour $p < 3$, on peut écrire la formule suivante pour a_n :

$$a_n = [x^n]A(x) = c_t \binom{\frac{n-t}{10}+3}{3} + c_{t+10} \binom{\frac{n-t}{10}+2}{3} + c_{t+20} \binom{\frac{n-t}{10}+1}{3} ,$$

où t est le reste de la division de n par 10, c'est-à-dire $t \equiv n \pmod{10}$ et $t \in \{0, \ldots, 9\}$.

Exemple

Exemple 17

Pour $n = 10$, la formule donne

$$a_{10} = \binom{4}{3} + 7 \cdot \binom{3}{3} + 0 = 4 + 7 = 11 ,$$

ce qui est bien correct (exercice : compter le nombre de manières de rendre 10 eurocents de monnaie avec des pièces de 1, 2, 5 et 10 et vérifier que c'est bien 11 comme le prédit notre formule.)

Fonction génératrice exponentielle (FGE)

Différence avec une FGO, est que la FGE se prête mieux au comptage de structures étiquetées alors que la FGO pour les structures non étiquetées.

Théorie de base

Définition

Définition 5 (Fonction génératrice exponentielle)

La fonction génératrice exponentielle (FGE) de la suite

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

est définie par

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \ .$$

On écrit :

$$n![x^n]A(x) = a_n \ .$$

Théorème

Théorème 19

Soient $A(x)$ la FGE de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B(x)$ la FGE de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :

(i) $A(x) + B(x)$ *est la FGE de* $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots)$

(ii) $\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$ *est la FGE de* $(0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \dots)$

(iii) $xA(x)$ *est la FGE de* $(0, a_0, 2a_1, 3a_2, \dots, na_{n-1}, \dots)$

(iv) $A'(x)$ *est la FGE de* $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n+1}, \dots)$

(v) $\frac{A(x)-A(0)}{x}$ *est la FGE de* $(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots, \frac{a_{n+1}}{n+1}, \dots)$

(vi) $A'(x) - A(x)$ *est la FGE de* $(a_1 - a_0, a_2 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_n, \dots)$

(vii) $A(x)B(x)$ *est la FGE de* $(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + 2a_1b_1 + a_2b_0, \dots, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}, \dots)$

(viii) $e^x A(x)$ *est la FGE de* $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + 2a_1 + a_2, \dots, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k, \dots)$

Théorème 21

Pour tous $t, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{0\leqslant k<n} k^t = \frac{1}{t+1} \sum_{k=0}^{t} \binom{t+1}{k} B_k n^{t+1-k} \ .$$