INFO-F-302
Informatique Fondamentale
Exercices - Logique Propositionnelle *

Prof. Emmanuel Filiot

Exercice 1 – Tableaux Sémantiques En utilisant la méthode des tableaux sémantiques, déterminez si les formules suivantes sont satisfaisables, valides, ou non-satisfaisables :

1. $\phi_1 \equiv a \wedge \neg(b \rightarrow a)$
2. $\phi_2 \equiv ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \rightarrow (\neg b \rightarrow ((a \wedge b) \vee c))$
3. $\phi_3 \equiv \neg((a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a))$
4. $\phi_4 \equiv ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \vee ((c \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a))$
5. $\phi_5 \equiv (a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \leftrightarrow (a \rightarrow c))$
6. $\phi_6 \equiv ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$

Exercice 2 - Déduction Naturelle Démontrer les séquents suivants en déduction naturelle :

1. $\vdash p \rightarrow p$
2. $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$
3. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
4. $\vdash p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$
5. $p \wedge q \vdash p \vee r$
6. $p \wedge q \vdash r \rightarrow p$
7. $p \rightarrow q \rightarrow r \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$
8. $p \rightarrow q \rightarrow r \vdash q \rightarrow p \rightarrow r$
9. $p \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)$
10. $p \rightarrow (q \vee r) \vdash \neg r \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
11. $\vdash p \vee \neg p$ (sans utiliser la règle LEM !)

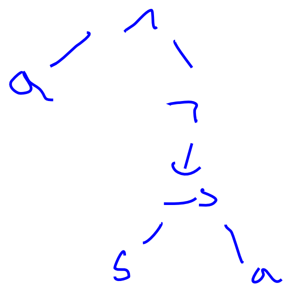
Exercice 3 – Logique Minimale On pose $\uparrow$ l'opérateur Booléen suivant : $\phi_1 \uparrow \phi_2$ est faux si et seulement si ϕ_1 et ϕ_2 sont toutes les deux vraies. Démontrer que pour toute formule de la logique propositionnelle, il existe une formule équivalente qui ne contient que l'opérateur $\uparrow$.

Exercice 4 – Equivalences Démontrer les équivalences $\phi_1 \vee (\phi_2 \wedge \phi_3) \equiv (\phi_1 \vee \phi_2) \wedge (\phi_1 \vee \phi_3)$ et $\phi_1 \rightarrow \phi_2 \equiv \neg\phi_2 \rightarrow \neg\phi_1$.

* `http://www.ulb.ac.be/di/info-f-302/`

(1)

1. $\phi : a \wedge \neg (b \to a)$



$\{a, \neg(b \to a)\}$

$\{a, b, \neg a\}$ $\quad ((ar\ \neg(b \to a) = \neg(\neg b \vee a) = b \wedge \neg a)$

ϕ n'est pas satisfaisable

$\neg \phi$ est valide

---

4. $((a \to b) \wedge (b \to c)) \vee ((c \to b) \wedge (b \to a))$

$(a \to b) \wedge (b \to c)$ | $(c \to b) \wedge (b \to a)$

$\{a \to b, b \to c\}$ | $\{c \to b, b \to a\}$

$\{\neg a, b \to c\}$ | $\{b, b \to c\}$ | $\{\neg c, b \to a\}$ | $\{b, b \to a\}$

$\{\neg a, \neg b\}$ ✓ | $\{\neg a, c\}$ ✓ | $\{b, \neg b\}$ ✗ non satisfaisable | $\{b, c\}$ ✓ | $\{\neg c, \neg b\}$ ✓ | $\{\neg c, a\}$ ✓ | $\{b, \neg b\}$ ✗ | $\{b, a\}$ ✓

$\Rightarrow$ la formule est satisfaisable mais est-elle valide?

$\Rightarrow$ si ϕ_4 valide alors $\neg \phi_4$ non satisfaisable

$\neg \phi_4 : \neg\big((a \to b) \wedge (b \to c) \big) \vee \big((c \to b) \wedge (b \to a) \big)$

$\{ \neg((a \to b) \wedge (b \to c)),\ \neg((c \to b) \wedge (b \to a)) \}$

$\{ \neg(a \to b),\ \neg((c \to b) \wedge (b \to a)) \}$; $\{ \neg(b \to c),\ \neg((c \to b) \wedge (b \to a)) \}$

$\{ a, \neg b,\ '' \}$

$\{ a, \neg b, \neg(c \to b) \}$; $\{ a, \neg b, \neg(b \to a) \}$

$\{ a, \neg b, c, \neg b \}$

✓

↳ on a trouvé une interprétation où $\neg \phi_4$ est vraie $\Rightarrow \neg \phi_4$ satisfaisable $\Rightarrow \phi_4$ satisfaisable mais non valide

---

6. $((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$

$\neg((a \to b) \wedge (b \to c))$; $a \to c$

$\neg a$; c

✓ ✓

$\Rightarrow \phi_6$ est satisfaisable

$\neg\phi_c$: $\neg\big(((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)\big)$

$$\{(a \to b) \wedge (b \to c),\ \neg(a \to c)\}$$

$$\{(a \to b) \wedge (b \to c),\ a,\ \neg c\}$$

$$\{a \to b,\ b \to c,\ a,\ \neg c\}$$

$\{\neg a,\ b \to c,\ a,\ \neg c\}$ contradict.

$\{b,\ b \to c,\ a,\ \neg c\}$

$\{b, \neg b, a, \neg c\}$ contrad.

$\{b, c, a, \neg c\}$ contrad.

$\neg\phi_c$ pas sat. $\Rightarrow$ ϕ_c valide

② Rappel sur la sémantique :

$p \to p$

$$\begin{array}{l|l}
1 & \quad \underline{p} \\
2 & \quad p \\
3 & p \to p
\end{array}$$

= Supposons p ou Hyp. p

alors p est vrai (règle copie)

Donc $p \to p$ $\underbrace{\to i}$

règle de l'introduction de l'implication

$\underbrace{\phi_1, \phi_2}_{\text{si on suppose}} \vdash \underbrace{\phi_3}_{\text{on a}}$

si on suppose, alors on a

2.

1	$p \land \neg p$	
2	p	$\land e$, 1
3	$\neg p$	$\land e$, 2
4	$\bot$	$\neg e$ 2, 3
5	$\neg(p \land \neg p)$	$\neg i$ 1–4 (introduction de la négation)

3. $\vdash p \to (q \to p)$

1	p	Hyp	Supposons p
2	q	Hyp	supposons q
3	p	copie 1	
4	$q \to p$	$\to i$ 2–3	
5	$p \to (q \to p)$	$\to i$ 1–4	

où toute
les prem…
et sous-prem…
p est vrai

4. $p \to ((p \to q) \to q)$

p	Hyp
$p \to q$	Hyp
q	$\to e_{2,1}$
$(p \to q) \to q$	
$p \to ((p \to q) \to q)$	

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}$$

modus ponens

Exercice supplémentaire :

déduct° naturelle sur ϕ_6 (exercice 1)

$(a \to b \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$

1 $(a \to b) \land (b \to c)$ Hyp

2 $a \to b$ $\land e_1$ 1

3 $b \to c$ $\land e_2$ 1

4 a Hyp

5 b $\to e$ 2, 4

6 c $\to e$ 3, 5

7 $a \to c$ $\to i$ 4, 6

8 $((a \to b) \land (b \to c)) \to (a \to c)$ $\to i$ 1, 7

5. $p \land q \vdash p \lor r$

1 $p \land q$ Hyp

2 p $\land e_1$ 1

3 $p \lor r$ $\lor i_1$ 2 $\to$ $\dfrac{\phi}{\phi \lor \psi}\,\lor i$

Formulaires

Tableaux sémantiques

α	α_1	α_2
$\neg\neg\phi$	ϕ	ϕ
$\phi_1 \wedge \phi_2$	ϕ_1	ϕ_2
$\neg(\phi_1 \vee \phi_2)$	$\neg\phi_1$	$\neg\phi_2$
$\neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$	ϕ_1	$\neg\phi_2$
$\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$	$\phi_1 \rightarrow \phi_2$	$\phi_2 \rightarrow \phi_1$

fig. 1 - $\wedge$-règles

β	β_1	β_2
$\phi_1 \vee \phi_2$	ϕ_1	ϕ_2
$\neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$	$\neg\phi_1$	$\neg\phi_2$
$\phi_1 \rightarrow \phi_2$	$\neg\phi_1$	ϕ_2
$\neg(\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$	$\neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$	$\neg(\phi_2 \rightarrow \phi_1)$

fig. 2 - $\vee$-règles

Règles de déduction

- Conjonction :

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\wedge_i \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\wedge_{e_1} \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\wedge_{e_2}$$

- Double négation :

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg_i \qquad \frac{\neg\neg\phi}{\phi}\neg\neg_e$$

- Implication :

$$\frac{\begin{array}{l}\phi \ \ hyp. \\ \vdots \\ \psi \ \ fin\ hyp.\end{array}}{\phi \rightarrow \psi}\rightarrow_i \qquad \frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\rightarrow_e$$

- Contradiction :

$$\frac{\perp}{\phi}\perp_e$$

- Copie :

$$\frac{\phi}{\phi}copie$$

- Négation :

$$\frac{\begin{array}{l}\phi \ \ hyp. \\ \vdots \\ \perp fin\ hyp.\end{array}}{\neg\phi}\neg_i \qquad \frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp}\neg_e$$

- Disjonction :

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\vee_{i_1} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\vee_{i_2} \qquad \frac{\psi_1 \vee \psi_2 \quad \begin{array}{l}\psi_1 \ \ hyp. \\ \vdots \\ \phi \ \ fin\ hyp.\end{array} \quad \begin{array}{l}\psi_2 \ \ hyp. \\ \vdots \\ \phi \ \ fin\ hyp.\end{array}}{\phi}\vee_e$$

- Règles dérivées :

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi}LEM \qquad \frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}MT \qquad \frac{\begin{array}{l}\neg\phi \ \ hyp. \\ \vdots \\ \perp \ \ fin\ hyp.\end{array}}{\phi}RAA$$