INFO-F-302
Informatique Fondamentale
Logique du premier ordre

Prof. Emmanuel Filiot

Exercice 1

1. Soit un langage $\mathcal{L} = (p, q, r, s, t, f, g)$ où p, q sont des prédicats unaires, r, s, t sont des prédicats binaires, et f, g sont des fonctions unaires. Modélisez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :
   (a) La relation r modélise une fonction.
   (b) le prédicat s contient le produit cartésien de p et q.
   (c) le prédicat t est égal au produit cartésien de q et p.
   (d) La fonction f est surjective.
   (e) La fonction g est injective.
2. Soit un langage $\mathcal{L} = (p, f, g)$ où p est un prédicat binaire, f une fonctions binaire, et soit une formule φ de $\mathcal{L}$ telle que $\varphi \equiv \exists y \cdot p(z, f(x, y))$. La formule φ est-elle vraie dans la structure $\mathcal{M}$, en utilisant la valuation $\mathcal{V}$?
   (a) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{N}, p \equiv \leq, f \equiv +)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   (b) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}, p \equiv \leq, f \equiv +)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   (c) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{N}, p \equiv \leq, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   (d) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}, p \equiv =, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   (e) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}_6, p \equiv =, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   (f) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{N}, p \equiv \leq, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 2, z \mapsto 4)$
   (g) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}, p \equiv \leq, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 2, z \mapsto 4)$
3. Trouver un modèle non vide avec le moins d'éléments possibles qui satisfait la formule :
   (a) $\exists x \exists y \exists z \cdot x \neq y \wedge y \neq z$
   (b) $\forall x \cdot [f(x) \neq x]$
   (c) $\forall x \cdot [f(x) \neq x] \wedge \exists x \forall y \cdot [f(y) \neq x]$
   (d) $\forall x \cdot [f(x) \neq x] \wedge \forall x \forall y \forall z \cdot [(f(x) = z \wedge f(y) = z) \rightarrow x = y]$
   (e) $\forall x \cdot [f(x) \neq x] \wedge \exists x \forall y \cdot [f(y) \neq x] \wedge \forall x \forall y \forall z \cdot [(f(x) = z \wedge f(y) = z) \rightarrow x = y]$

Exercice 2 On s'intéresse à l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$, muni de la fonction unaire "successeur" s telle que $s(n) = n + 1$.

1. Donnez une formule φ_0 ouverte sur la variable x qui est validée si et seulement si x vaut 0. Attention, la constante 0 ne fait pas partie du vocabulaire.

Rappel :

- $\forall x \exists y : x > y$
  - faux ds $\mathbb{N}$: $x = 0$
  - vrai ds $\mathbb{Z}$

  différence de modèle

- $\exists y \quad x > y$

  vrai ds $\mathbb{N}$?

  - oui si $x = 5$
  - non si $x = 0$

  différence d'interprétat°

- $\forall x \exists y \quad P(x, y)$ — P prédicat binaire
  - vrai ds $\mathbb{N}$ si P : $\leq$
  - faux " " " " : $\geq$

① $\neg \exists x\, \varphi \Leftrightarrow \forall x\, \neg \varphi$

1)

a) $\forall x\, \forall y\, [r(x,y) \to \neg \exists y' (r(x,y') \wedge y \neq y')]$

$\forall x\, \forall y\, [r(x,y) \to \forall y'\, \neg r(x,y') \vee \neg (y \neq y')]$

$\forall x\, y\, y'\quad r(x,y) \to (\neg r(x,y') \vee y = y')$

$r(x,y') \to y = y'$

(b) S contient $p \times q$

(x,y) $\quad x \quad y$

$\forall x, y\, [p(x) \wedge q(y)] \to S(x,y)$

(c) $r = q \times p$: $r \subseteq q \times p$ et $q \times p \subseteq r$

$\forall x, y\, [q(x) \wedge p(y)] \to r(x,y)$ $\quad$ r contient $q \times p$

$\wedge\ r(x,y) \to [q(x) \wedge p(y)]$ $\quad$ $q \times p$ contient r

---

(d) $\forall y \; \exists x \quad f(x) = y$

ici on peut écrire $f(x) = y$ car f est une fonct° → valeur MAIS

$p(x)$ → prédicat → renvoie booléen → ~~$p(x) = y$~~

(g) $\forall x \, y \quad g(x) = g(y) \rightarrow x = y$

---

2)

(a) $\exists y \; p(z, f(x,y)) \qquad p : \leq \quad f : + \quad x : 5 \quad z : 3$

· $\exists y \quad 5 \leq 5 + y$ → vrai

· $\forall y \quad 3 \leq 5 + y$ → vrai

Si $p : \geq$? → faux

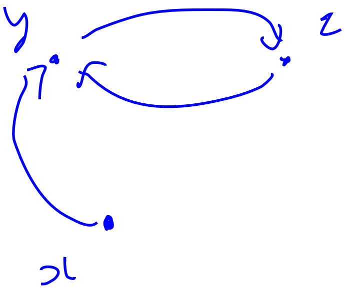
(b) Dans $\mathbb{Z} \qquad p : \leq \quad f : + \quad x : 5 \quad z : 3$

$\exists y \quad 3 \leq 5 + y$ ✓

$\forall y \quad 3 \leq Sf\, y$ ✗ $\quad y = -2$

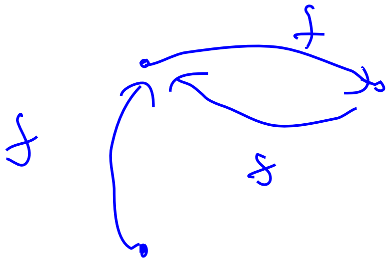
Si p : $\geq$? ✓ ✗

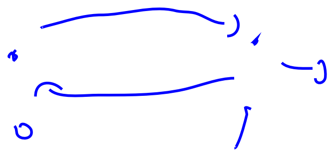
3) (a)



$\Rightarrow$ x et y suffisant

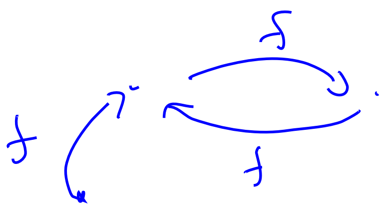
(b)



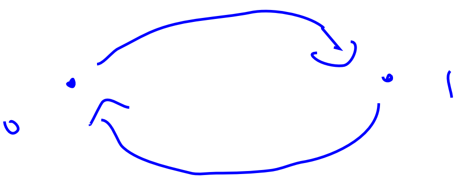


$\rightarrow$ modèle min

(c)



(d)



(e) $\mathbb{N}$: $f \quad n \mapsto n+1$

② 1) $\exists y \quad S(y) = x$

- Vrai quand $x = 0$?

$\exists y \quad y + 1 = 0$ ✗

- Vrai quand $x \neq 0$

$\exists y \quad y + 1 = 5$ ✓

$\exists y \quad y + 1 = 7$ ✓

- $\exists y \quad S(y) = x \quad f_0$!

$\forall y \quad S(y) \neq x$

$\exists z \,; \; f_0(z) \wedge x + z = y$

---

2) p, i prédicats unaires

$p(x)$: $\top$ si x est pair

$\bot$ si x impair

$i(x)$: $\top$ si x impair

$\bot$ " " pair

$\exists x \; T_0(x) \wedge p(x)$ 0 est pair

$\wedge \forall x \; p(x) \rightarrow i(S(x))$ • si n est pair, n+1 impair

$\wedge \; i(x) \rightarrow p(S(x))$

$\wedge \; \forall x \; p(x) \leftrightarrow \neg i(x)$ x ne peut pas être pair et impair

2. Soient p et i deux prédicats unaires. Donnez une formule qui garantit que $p(n)$ est vrai exactement pour les n pairs, et $i(n)$ exactement pour les n impairs.
3. Soit d une fonction unaire. Donnez une formule qui garantit que $d(n) = 2n$ pour tout n.
4. On cherche à réinventer les symboles $+$, $\times$, et $\geqslant$. Seraient-ce des prédicats ? Des fonctions ? De quelle arité ? Donner une formule pour garantir leur bon fonctionnement.

Exercice 3 On s'intéresse maintenant au modèle qui contient à la fois les entiers et les listes d'entiers strictement positifs. Les entiers sont identifiés par le prédicat $N(x)$, et on peut appliquer sur eux le vocabulaire de l'Exercice 2 ($s, 0, p, i, d, +, \times, \geqslant$). Les listes sont identifiés par le prédicat $L(x)$, et on peut appliquer sur elles la fonction $e(x, y)$ qui retourne le $y^{\text{ème}}$ élément de x. Par convention si x n'a pas de $y^{\text{ème}}$ élément, $e(x, y) = 0$.

— On veut "typer" la fonction e et s'assurer qu'elle renvoie toujours un entier. Donner la formule qui doit être vraie dans ce cas.

— On veut s'assurer que si une liste a n éléments, alors tous les $e(x, y)$ avec $y > n$ valent 0. Donner la formule qui doit être vraie dans ce cas.

On s'intéresse maintenant à la conjecture de Syracuse. Soit une valeur n. On génère une liste de valeurs comme suit.

— Si n est pair, la prochaine valeur est $n/2$

— Si n est impair, la prochaine valeur est $3n + 1$

On s'arrête si on atteint 1. Par exemple, pour une valeur initiale de 13, la séquence serait :

$$13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

La conjecture de Syracuse dit que : quelque soit la valeur de départ, on atteint toujours 1.

Exprimer la conjecture de Syracuse en logique du premier ordre à l'aide de fonctions et prédicats de votre choix.

Exercice 4 Soit un langage $\mathcal{L} = (t)$, où t est un prédicat binaire.

1. Modélisez en logique du premier ordre que t est une relation transitive (φ_1) et totale (φ_2).
2. Soit un graphe non-dirigé G, et $\mathcal{M}_G$ la structure définie par G où le domaine est l'ensemble des nœuds de G et t la présence d'un chemin entre deux nœuds. Est-ce que $\mathcal{M}_G$ est un modèle pour la propriété de transitivité sur t ? Sinon donnez un contre-exemple.
3. Est-ce qu'on a $\mathcal{M}_G \models \varphi_2$? Sinon donnez un contre-exemple.
4. Soit un graphe non-dirigé G tel que $\mathcal{M}_G \not\models (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$, que pouvez-vous dire de G ?
5. Construire φ sur $\mathcal{L}$ telle que $\mathcal{M}_G \models \varphi$:
   (a) Si et seulement si G possède un élément qui est un successeur de tous les autres nœuds.
   (b) Si et seulement si G possède une clique de taille k.

Exercice 5 Soit le langage $\mathcal{L} = (p)$, où p est un prédicat binaire. Ecrire une formule φ telle que si $\mathcal{M} \models \varphi$, alors le domaine de $\mathcal{M}$ est infini. Si c'est le cas, montrer que $\mathbb{N} \models \varphi$ pour une certaine interprétation de p.