Séance 4

Exercice 1.
Soit un graphe simple à n sommets. Quel nombre maximal d'arêtes peut-il avoir ?

Exercice 2.
Construire un graphe simple et connexe sur 8 sommets tel que chaque sommet est incident à exactement trois arêtes. Pourriez-vous faire la même chose avec 7 sommets? Avec 9 sommets ? Donner un exemple ou justifier.

Exercice 3. Dans un groupe de n personnes, il y a toujours deux individus qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.

1. Formaliser cette propriété dans le vocabulaire des graphes.
2. Démontrer cette propriété (par l'absurde).

Exercice 4. Soit G un graphe simple à $2n$ sommets. On suppose que le degré de chaque sommet est plus grand que n. Montrer que G est connexe.

Exercice 5. Soit G un graphe simple à n sommets et m arêtes avec $m < n$. Utiliser la récurrence pour montrer que G possède au moins $n - m$ composantes connexes.

Exercice 6.
Determiner $\mid V \mid$ pour les graphes G suivants. Justifier votre raisonnement sans dessiner le graphe.

1. G à 12 arêtes et tous les sommets sont de degré 3.
2. G à 10 arêtes avec 2 sommets de degré 3 et tous les autres de degré 2.

Exercice 7.
Un graphe G a 65 arêtes et 40 sommets. Chaque sommet est soit de degré 3 soit de degré 4. Combien des 40 sommets ont un degré 3 et combien un degré 4?

Exercice 8. Soit $G = (V, E)$ une graphe dont la matrice d'incidence est donnée ci-dessous.

$$Inc = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Dessiner G et trouver sa matrice d'adjacence A.

2. Déterminer si le graphe est biparti.

3. Déterminer le nombre de circuits de longueur 4 dans G.

Exercice 9. (Question d'examen 2017)
On coupe une pizza le long de n lignes disjointes afin d'obtenir le nombre maximum de pièces. On suppose donc que chaque paire de lignes a un point d'intersection à l'intérieur de la pizza et que chaque triplet de lignes n'a aucun point d'intersection.
On note G_n le graphe dont les sommets sont les points d'intersection des lignes entre elles et avec le pourtour de la pizza, et dont les arêtes sont les segments de lignes ou de pourtour entre deux points.

(a) Combien de sommets et d'arêtes comptent G_4 et G_5 ?

(b) Combien de sommets ajoute-t-on à la $i$ème coupe ?

(c) Combien de sommets a G_n ?

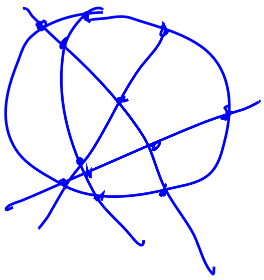
(d) Combien d'arètes a G_n ?

(e) *(facultatif)* Vérifiez vos formules pour $n = 4$ et $n = 5$.

Ex 9

a)

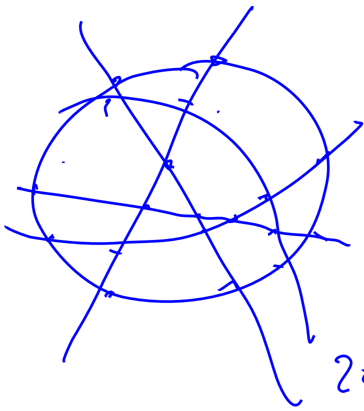
G_4



14 sommets

24 arêtes

G_5



20 sommets

35 arêtes

b) $(i-1)$ sommets en plus à l'intérieur

(intersect° avec les $i-1$ coupes précédentes)

+ 2 sommets supplémentaires (sur les bords)

Total : $i-1+2 = i+1$

c) Nb total de sommets dans G_n : $\sum_{i=1}^{n} (i+1) = n + \sum_{i=1}^{n} i$

$1+1+2+1+3+1+4+1+\dots$

$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$= n + \frac{n(n+1)}{2} = n\left[1 + \frac{n+1}{2}\right] = n\,\frac{n+3}{2}$$

d) Dans G_n, chacune des n découpes possède n arêtes, à l'intérieur de la pizza.

Le bord, qui est subdivisé en $2n$ arêtes.

Total : $n^2 + 2n$