Séance 9

Exercice 1. Finir les exercices 6,7 et 8 du TP 8

Exercice 2. Que vaut le déterminant de la matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad ?$$

Exercice 3. Avec l'alphabet $\{A, B, C\}$, combien peut-on écrire de mots de n lettres dans lesquels on ne trouve pas

1. deux lettres A côte-à-côte ?
2. deux lettres A ni deux lettres B côte-à-côte ?
3. deux lettres A ni deux lettres B ni deux lettres C côte-à-côte ?

Exercice 4. Donner le comportement asymptotique des suites $T(n)$ pour chacune des récurrences suivantes :

1. $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$
2. $T(n) = T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + n$
3. $T(n) = 16T(\lceil n/4 \rceil) + n^2$
4. $T(n) = 7T(\lceil n/3 \rceil) + n^2$
5. $T(n) = 7T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$
6. $T(n) = 2T(\lfloor n/4 \rfloor) + \sqrt{n}$
7. $T(n) = T(n-1) + n$

Ex 2 i

$$\begin{array}{c} \overset{n}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$a_n = \det$

$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

$-1 \det$

$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$a_n = (An + B) \cdot 1^n \quad (A, B \in \mathbb{R})$

$a_1 = \det[2] = 2$

$a_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2.2 - 1.1 = 3$

$A + B = 2$

$$\begin{cases} A+B=2 & (1) \\ 2A+B=3 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} 1+B=2 & (\text{dans } (1)) \\ \end{cases}$$

$a_n = n+1$

Ex 3 :

1) $\{A, B, C\}$

1) a_n nb de mots de n lettres, sans "AA", qui commencent par A

b_n " " " " " " par B

c_n " " " " " " par C

$A \; \overbrace{\begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \; \ldots \ldots \; \cancel{AA}}^{n-1}$

x_n

$a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$

↳ nb de mots de $n-1$ lettres ....

+

$B \; \overbrace{\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \; \ldots\ldots}^{n-1}$

$b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$

+

$C \; \overbrace{\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \; \ldots\ldots}^{n-1}$

$c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$

$x_n := a_n + b_n + c_n$ (x_n nb de mots de n lettres sans AA)

$= 2a_{n-1} + 3b_{n-1} + 3c_{n-1}$

$(x_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1})$

$= 2x_{n-1} + \underbrace{b_{n-1}}_{a_{n-2}+b_{n-2}+c_{n-2}} + \underbrace{c_{n-1}}_{a_{n-2}+b_{n-2}+c_{n-2}}$

$= 2x_{n-1} + 2\underbrace{(a_{n-2} + b_{n-2} + c_{n-2})}_{x_{n-2}}$

$x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}$

$x_1 = 3$ (A ou B ou C)

$x_2 = 8$ (AB ou AC ou BA ou BB ou BC ou ...)

$x_n - 2x_{n-1} - 2x_{n-2} = 2$

fct caractéristique $x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 4$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$$x_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n \qquad (A, B \in \mathbb{R})$$

$$3 = x_1 = A(1+\sqrt{3}) + B(1-\sqrt{3}) \qquad (1)$$

$$8 = x_2 = A(1+\sqrt{3})^2 + B(1-\sqrt{3})^2$$

$$= A(4+2\sqrt{3}) + B(4-2\sqrt{3})$$

$$4 = A(2+\sqrt{3}) + B(2-\sqrt{3}) \qquad (2)$$

$$(2)-(1): \quad 1 = A+B$$

$$3 = A(1+\sqrt{3}) + B(1-\sqrt{3})$$

$$= A + \sqrt{3}A + B - \sqrt{3}B$$

$$= A+B + \sqrt{3}(A-B)$$

$$3 = 1 + \sqrt{3}(A-B)$$

$$2 = \sqrt{3}(A-B)$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = A - B$$

$$A + B = 1 \qquad (3)$$

$$A - B = \frac{2\sqrt{3}}{2} \qquad (4)$$

$$(3)+(4): \quad 2A = 1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\to A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$$

Dans (3) : $B = \dfrac{1 - \frac{3+2\sqrt{3}}{6}}{}$

$= \dfrac{6 - 3 - 2\sqrt{3}}{6}$

$= \dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{6}$

· $X_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$

. . .

② $A\overbrace{\begin{matrix}B\\C\end{matrix}}^{n-1}$ $\quad a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$

$B\overbrace{\begin{matrix}A\\C\end{matrix}}^{n-1}$ $\quad b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$

$C\overbrace{\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}}^{n-1}$ $\quad c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$

$X_n = 2(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) + \underbrace{c_{n-1}}_{a_{n-2}+b_{n-2}+c_{n-2}}$

$= 2X_{n-1} + X_{n-2}$

$$x_n - 2x_{n-1} - x_{n-2} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

$$3 = x_1 = A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) \quad (1)$$

$$7 = x_2 = A(1+\sqrt{2})^2 + B(1-\sqrt{2})^2$$

$$= A(3+2\sqrt{2}) + B(3-2\sqrt{2}) \quad (2)$$

$(2) - 2(1)$

$$1 = A + B$$

$$3 = A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2})$$

$$= A + A\sqrt{2} + B - \sqrt{2}B = A+B+\sqrt{2}(A-B)$$

$$3 = 1 + \sqrt{2}(A-B)$$

$$2 = \sqrt{2}(A-B)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = A - B$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} A+B = 1 & (3) \\ A-B = \sqrt{2} & (4) \end{cases}$$

$(3)+(4)$: $2A = 1+\sqrt{2}$

$$A = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Dans (3) : $B = 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{2-1-\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$$X_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^n$$

$$= \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n$$

3

A   B, C $\qquad a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$

B   A, C $\qquad b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$

C   A, B $\qquad c_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

$$x_n = a_n + b_n + c_n$$

$$= 2(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1})$$

$$= 2x_{n-1}$$

$$x_1 = \underbrace{\underbrace{3 \cdot 2}_{x_2} \cdot 2}_{x_3} \cdot 2 \cdot 2$$

$$x_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Ex 4 : Master theorem :

Comportement asymptotique :

- O : $f(n) = O(g(n))$ f égale ou battue par g

  $\exists\, C > 0$ tq $f(n) \leq C\, g(n)$ $\forall n$ assez grand

  ex : $n = O(n^2)$

- Ω : $f = \Omega(g)$ f égale ou bat g

  quand $g = O(f)$

  ex : $n^2 = \Omega(n)$

- Θ : $f = \Theta(g)$

  si $f = O(g)$ et $g = O(f)$

  $f = \Omega(g)$

$$n = \Theta(n+1)$$

$$n \leq \underset{\to 1}{c}\,(n+1)$$

$$n+1 \leq \underset{\to 2}{c}\,n$$

$\to$ Master theorem :

$\alpha \geq 1$, $\beta > 1$ constante

$f : \underbrace{\mathbb{N}}_{f(n)} \to \mathbb{R}^+$

$$a_n = \alpha\, a_{\frac{n}{\beta}} + f(n)$$

$\to$ tantôt $\left\lceil \frac{n}{\beta} \right\rceil$ ou $\left\lfloor \frac{n}{\beta} \right\rfloor$

$\hookrightarrow$ Si a_n stricte

- Cas 1 :

Si $f(n) = O\left(n^{(\log_\beta \alpha) - \varepsilon}\right)$

pour $\varepsilon > 0$ alors

$$a_n = \Theta\left(n^{\log_\beta \alpha}\right)$$

- **Cas 2 :**

Si $f(n) = \Theta(n^{\log_\beta \alpha})$

alors $u_n = \Theta(n^{\log_\beta \alpha} \log_2 n)$

- **Cas 3 :**

Si $f(n) = \Omega(n^{(\log_\beta \alpha) + \varepsilon})$

et $\alpha f\left(\frac{n}{\beta}\right) \leq c f(n)$

pour $c < 1$ avec n assez grand

$u_n = \Theta(f(n))$

① $T(n) = \underbrace{2}\, T\left(\left\lceil \underbrace{\frac{n}{2}} \right\rceil\right) + \underbrace{n^2}$

$u_n = \underbrace{\alpha}\, u_{\underbrace{\frac{n}{\beta}}} + \underbrace{f(n)}$

$\alpha = 2$

$\beta = 2$

$f(n) = n^2$

$\log_\beta \alpha = \log_2 2 = 1$

$n^{\log_\beta \alpha} = n$

$n^2 = \Omega\left(\underbrace{n^{1+\varepsilon}}_{n^{3/2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

↳ (cas 3)

2e condition : $\exists ?\ c < 1$ tq

$\alpha f\left(\frac{n}{\beta}\right) \leq c f(n)$

$\quad \| \qquad\qquad\qquad \|$

$2 f\left(\frac{n}{2}\right) \qquad c\, n^2$

$\quad \|$

$2\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{2}$

↳ oui, une val nb existe ;

ex : $c = \frac{1}{2}$

Donc par le MT :

$$T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$$

---

3) $T(n) = 16\, T(\lceil \frac{n}{4} \rceil) + n^2$

$$a_n = \alpha\, a_{\frac{n}{\beta}} + f(n)$$

$$\log_\beta \alpha = \log_4 16 = 2$$

$$f(n) = \Theta(n^{\log_\beta \alpha} = n^2)$$

$$\begin{array}{c} \| \\ n^2 \end{array}$$

Par le MT,

$$T(n) = \Theta(n^{\log_\beta \alpha} \cdot \log_2 n)$$

$$= \Theta(n^2 \cdot \log_2 n)$$

(5) $T(n) = 7\,T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n^2$

$a_n = \alpha\, a_{\frac{n}{\beta}} + f(n)$

$\log_\beta \alpha = \log_2 7 \rightarrow$ entre 2 et 3

$f(n) = O\left(n^{\log_\beta \alpha}\right)$

$\underset{n^2}{\parallel} \longleftrightarrow \underset{n^{2 < \log_2 7 < 3}}{\parallel}$

(!) pour le cas 1, il y a le "$-\varepsilon$"

Par exemple, pour $\varepsilon = \frac{\log_2 7 - 2}{2}$, on a

$n^2 = O\left(n^{\log_2 7 - \varepsilon}\right)$

<u>Cas 1</u>

$T(n) = \Theta\left(n^{\log_\beta \alpha}\right) = \Theta\left(n^{\log_2 7}\right)$

② $T(n) = T(\lceil 9n/10 \rceil) + n$

$\alpha = 1$ $\qquad \frac{n}{\frac{10}{9}} = \frac{9n}{10}$ $\qquad f(n) = n$

$\beta = \frac{10}{9}$

$\log_\beta \alpha = \log_{\frac{10}{9}} 1 = 0$

$f(n) = n^{\log_\beta \alpha}$

$\to n \qquad n^0 \longrightarrow f = \Omega \to$ cas 3

Cond. 1 : $n = \Omega\left(n^{\frac{1}{1000}}\right) \to$ par exemple

$\hookrightarrow$ car dans le cas 3 : il y a + ε

condit° 2 : $\frac{9n}{10} \leq \frac{9}{10} n$

---

④ $T(n) = 7T(\lceil \frac{n}{3} \rceil) + n^2$

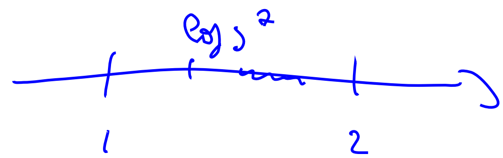
$\alpha = 7 \qquad \beta = 3 \qquad f(n) = n^2$

$\log_\beta \alpha = \log_3 7 \to 1 < \log_3 7 < 2$

$f(n) = n^2 \quad > \quad n^{\log_3 7}$

↳ Cas 3

$$f(n) = \Omega\left(n^{\log_3 7 + (2 - \log_3 7)/2}\right)$$



cond. 2 : $7\left(\frac{n}{3}\right)^2 \leq \ldots \; n^2$

$\rightarrow \frac{7}{9} n^2 \leq \frac{7}{9} n^2$

↳ $\frac{7}{9}$ fonctionne

$\Rightarrow$ Par le MT, $T(n) = \Theta(n^2)$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

(6) $\alpha = 2$ $\qquad f(n) = \sqrt{n}$

$\beta = 4$

$\log_\beta \alpha = \frac{1}{2}$

$\sqrt{n} \qquad \frac{1}{2} n$

Cas 2 : $T(n) = \Theta(n^{\frac{1}{2}} \log_2 n)$

- - - - - - -

⑦ $T(n) = T(n-1) + n$

$T(1) = T(0) + 1$

$T(2) = T(1) + 2$

$\vdots$

$\Rightarrow T(n) = T(0) + 1 + 2 + \dots + n$

$\Rightarrow T(0) + \dfrac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \dfrac{n^2+n}{2}$ → qd n^2 devient grand, il gagne

$\rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

Exercice 5. Résoudre la récurrence

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \quad \forall n \geqslant 2$$
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2$$

$$a_2 = \sqrt{1.2} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$a_3 = \sqrt{a_2 . a_1} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}} . 2^1} = \sqrt{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$a^n = 2^{b_n}$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}\, a_{n-2}} = (a_{n-1}\, a_{n-2})^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{b_n} = \left(2^{b_{n-1}} . 2^{b_{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$||$$

$$\left(2^{b_{n-1} + b_{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{b_n} = 2^{\frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n-2})}$$

$$b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n-2})$$

$$b_n - \frac{1}{2} b_{n-1} - \frac{1}{2} b_{n-2} = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$b_n = A \cdot 1^n + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= A + B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_n = 2^{b_n} = 2^{A+B\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$1 = a_0 = 2^{A+B} \quad \rightarrow \quad A + B = 0$$

$$2 = a_1 = 2^{A - \frac{1}{2}B}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - \frac{1}{2}B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$a_n = 2^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$