



Calculabilité, logique et complexité

Chapitre 5

Logique

Acquis d'apprentissage (1)

A l'issue de ce chapitre, les étudiants seront capables de

- Distinguer et décrire les composants d'une logique
- Comprendre les différentes formes d'une formule propositionnelle ; distinguer les formules propositionnelles syntaxiquement correctes
- Comprendre, expliquer et illustrer ce qu'est une interprétation et un modèle d'une formule propositionnelle
- Expliquer comment obtenir la valeur de vérité d'une formule propositionnelle pour une interprétation donnée ; appliquer sur de nouvelles situations
- Expliquer comment déterminer si une interprétation est un modèle d'une formule propositionnelle pour une interprétation donnée ; appliquer sur de nouvelles situations
- Comprendre et expliquer le concept d'équivalence de formules propositionnelles ; démontrer si deux formules propositionnelles données sont équivalentes
- Expliquer et illustrer l'ensemble SAT des formules propositionnelles satisfaisables
- Comprendre et expliquer pourquoi l'ensemble SAT est récursif

Acquis d'apprentissage (2)

A l'issue de ce chapitre, les étudiants seront capables de

- Comprendre et expliquer le concept de tautologie de formules propositionnelles ; démontrer si une formule propositionnelles donnée est une tautologie
- Comprendre et expliquer le concept de conséquences logiques
- Expliquer et démontrer le lien entre satisfiabilité et conséquence logique
- Modéliser au moyen de la logique propositionnelle un problème non élémentaire
- Expliquer et spécifier ce qu'est un solveur SAT ; décrire, expliquer et appliquer un algorithme élémentaire de solveur SAT
- Comprendre, expliquer et illustrer ce qu'est une formule propositionnelle sous forme normale conjonctive (CNF) ; transformer une formule propositionnelle donnée en une formule CNF équivalente
- Comprendre, expliquer et illustrer ce qu'est une règle d'inférence
- Comprendre, expliquer et illustrer la règle de résolution ; justifier l'exactitude de cette règle
- Comprendre, expliquer et illustrer le principe de résolution ; décrire le principe de fonctionnement et expliquer la signification du résultat ; appliquer le principe de résolution sur un exemple donné

Chapitre 5 : Logique

1. Logique des propositions
2. Sémantique
3. Satisfiabilité (SAT) et conséquence logique
4. Modélisation
5. Raisonnement
 - Model checking
 - Résolution

Chapitre 5 : Logique

1. **Logique des propositions**
2. Sémantique
3. Satisfiabilité (SAT) et conséquence logique
4. Modélisation
5. Raisonnement
 - Model checking
 - Résolution

Logique

- Représentation de connaissances
- Raisonnement automatisé sur la représentation des connaissances
- Il existe de multiples formes de logique
 - Logique des propositions
 - Logique des prédicats
 - Logique modale
 - Logique temporelle
 - Logique floue
 - ...

Composants d'une logique

- **Syntaxe** : détermine la forme des formules acceptées dans la logique
- **Sémantique** : définit le sens des formules de la logique
- **Raisonnement** : propose des méthodes permettant de manipuler les formules afin d'obtenir des informations pertinentes

Logique des propositions

- Logique « la plus simple » et la plus ancienne
- Basée sur le concept de **proposition**, c'est-à-dire une affirmation qui peut être vraie ou fausse
 - Le soleil brille
 - Le cours de calculabilité se donne le jeudi après-midi
 - Le sommet V_2 du graphe a la couleur rouge
 - La tâche T_3 doit être effectuée avant la tâche T_7

Logique des propositions

- Chaque proposition est représentée par un symbole, appelé variable propositionnelle (A, B, ...)
- Une formule permet de relier plusieurs propositions avec des connecteurs logiques tels que la négation, le ET ou le OU

Syntaxe : symboles

- Constantes : True et False
- Variables propositionnelles, représentées par des chaînes de caractères
- Connecteurs logiques : \neg (négation), \wedge (conjonction), \vee (disjonction), \Rightarrow (implication) et \Leftrightarrow (équivalence)
- Parenthèses

Syntax : formules propositionnelles

- Une constante logique ainsi qu'une variable propositionnelle sont des formules propositionnelles
- Si p et q sont des formules propositionnelles alors $(\neg p)$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \Rightarrow q)$ et $(p \Leftrightarrow q)$ sont des formules propositionnelles

Syntaxe : Conventions

- Les parenthèses externes sont supprimées
- Précédences des operators permet de supprimer des parentheses. L'ordre des précédences est \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow et \Leftrightarrow , où \neg a la précedence la plus haute et \Leftrightarrow la plus basse
- Les règles de l'associativité définissent l'ordre de deux connecteurs identiques successifs.
Par convention, \wedge et \vee sont associatifs à gauche tandis que \Rightarrow et \Leftrightarrow sont associatifs à droite

Exemples

$$A \wedge B$$

$$\neg A \wedge B$$

$$A \wedge \neg B$$

$$A \wedge B \vee C$$

$$A \Rightarrow B \vee C$$

$$(A \Rightarrow B) \vee C$$

$$A \vee B \vee C$$

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C$$

$$(A \wedge B)$$

$$((\neg A) \wedge B)$$

$$(A \wedge (\neg B))$$

$$((A \wedge B) \vee C)$$

$$(A \Rightarrow (B \vee C))$$

$$((A \Rightarrow B) \vee C)$$

$$((A \vee B) \vee C)$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$$

Chapitre 5 : Logique

1. Logique des propositions
2. **Sémantique**
3. Satisfiabilité (SAT) et conséquence logique
4. Modélisation
5. Raisonnement
 - Model checking
 - Résolution

Sémantique

- La sémantique d'une formule vise à déterminer le sens de cette formule
- Le sens d'une formule dépend d'un contexte où certaines propositions sont considérées comme vraies et d'autres comme fausses

Interprétation

- Une interprétation définit un contexte possible pour une formule propositionnelle
- Une **interprétation** d'une formule est une assignation d'une valeur de vérité (*true* ou *false*) à chacune des variables propositionnelles de la formule
- Si une formule a n variables différentes, il y a donc 2^n interprétations possibles

Valeur de vérité d'une formule pour une interprétation (1)

Etant donné une interprétation I , la valeur de vérité d'une formule est dérivée selon les règles suivantes

- La valeur de vérité des constantes True et False sont respectivement *true* et *false*
- La valeur de vérité d'une variable propositionnelle A est la valeur de cette variable dans l'interprétation I

Valeur de vérité d'une formule pour une interprétation (2)

- La valeur de vérité d'une formule propositionnelle de la forme $(\neg p)$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \Rightarrow q)$ or $(p \Leftrightarrow q)$ dépend de la valeur de vérité des formules p et q dans I , selon la table suivante

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
true	true	false	true	true	true	true
true	false	false	false	true	false	false
false	true	true	false	true	true	false
false	false	true	false	false	true	true

Exemple

- Soit l'interprétation avec l'assignation $(A=true, B=false, C=false)$
- Valeur de vérité de la formule $(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow \neg C)$ dans cette interprétation ?
- $(true \vee false) \wedge (false \Rightarrow \neg false)$ qui se réduit à $true \wedge (false \Rightarrow true)$ qui se réduit à $true \wedge true$ qui se réduit à *true*

Modèles

- Une interprétation dans laquelle une formule est vraie est un **modèle** de cette formule
- Le sens d'une formule propositionnelle, c'est-à-dire sa sémantique, est défini par les différents modèles de cette formule

Formules équivalentes

- Deux formules (avec les mêmes variables propositionnelles) sont **équivalentes** si elles ont les mêmes modèles
- Une (sous-)formule peut toujours être remplacée par une (sous-)formule équivalente sans changer sa sémantique

Exemples de formules équivalentes

$\neg(\neg p)$	est équivalent à	p	(double négation)
$p \wedge q$	est équivalent à	$q \wedge p$	(commutativité de \wedge)
$p \vee q$	est équivalent à	$q \vee p$	(commutativité de \vee)
$p \Leftrightarrow q$	est équivalent à	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	(\Leftrightarrow élimination)
$p \Rightarrow q$	est équivalent à	$\neg p \vee q$	(\Rightarrow élimination)
$p \Rightarrow q$	est équivalent à	$\neg q \Rightarrow \neg p$	(contraposition)
$\neg(p \vee q)$	est équivalent à	$\neg p \wedge \neg q$	(de Morgan)
$\neg(p \wedge q)$	est équivalent à	$\neg p \vee \neg q$	(de Morgan)
$p \vee (q \wedge r)$	est équivalent à	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(distributivité)
$p \wedge (q \vee r)$	est équivalent à	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(distributivité)

$\neg(P \wedge Q)$ équivalent à $\neg P \vee \neg Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Chapitre 5 : Logique

1. Logique des propositions
2. Sémantique
- 3. Satisfiabilité (SAT) et conséquence logique**
4. Modélisation
5. Raisonnement
 - Model checking
 - Résolution

Que peut-on déduire d'une formule logique ?

Problème de satisfiabilité

- La formule F a-t-elle un modèle ?
- Ce modèle est une « solution » de la formule F

Conséquence logique

- Etant donné une formule F , quelles sont les formules qui sont des conséquences de F ?
- Quelles sont les formules qui sont vraies lorsque F est vraie

Satisfiabilité

- Une formule propositionnelle est **satisfaisable** si elle possède au moins un modèle
- Si la formule ne possède aucun modèle elle est **non satisfaisable**

La formule est aussi appelé une *contradiction*

- SAT : ensemble des formules propositionnelles satisfaisables

Satisfiabilité

- Etant donné une interprétation et une formule propositionnelle, sa valeur de vérité peut être déterminée par un algorithme
- Pour une formule avec n variables propositionnelles, il existe 2^n interprétations possibles
- L'ensemble SAT est donc récursif

Exemple

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee C)$$

- non satisfaisable
- Pour chacune de ses 8 interprétations possibles, cette formule s'évalue à *false*

Tautologies

- Une formule est une **tautologie** lorsqu'elle est vraie dans toutes les interprétations
- $A \vee \neg A$ est une tautologie

Propriété

- p est une tautologie ssi $\neg p$ est non satisfaisable

Conséquence logique

- Une formule q est une **conséquence logique** d'une formule p si la formule $p \Rightarrow q$ est une tautologie
- Autres définitions équivalentes
 - Tous les modèles de p sont aussi des modèles de q
 - La formule q est vraie dans tous les modèles de p

Notation

- $p \models q$

Conséquence logique

Propriété

- $p \models q$ ssi $(p \wedge \neg q)$ est non satisfaisable

Preuve

- $p \models q$ ssi $p \Rightarrow q$ est une tautologie
- ssi $p \Rightarrow q$ est vrai dans toutes les interpretations
- ssi $\neg(p \Rightarrow q)$ est faux dans toutes les interpretations
- ssi $\neg(p \Rightarrow q)$ est non satisfaisable
- ssi $\neg(\neg p \vee q)$ est non satisfaisable
- ssi $(\neg \neg p \wedge \neg q)$ est non satisfaisable
- ssi $(p \wedge \neg q)$ est non satisfaisable

Conséquence logique

Attention

- Si q n'est pas une conséquence logique de p , on n'a pas nécessairement que $\neg q$ est une conséquence logique de p
- Il est donc possible d'avoir $p \not\models q$ et $p \not\models \neg q$, c'est-à-dire aucune des formules $(p \Rightarrow q)$ et $(p \Rightarrow \neg q)$ n'est une tautologie

Exemple

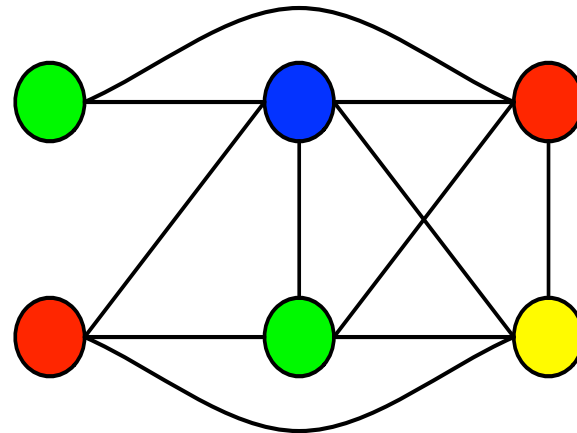
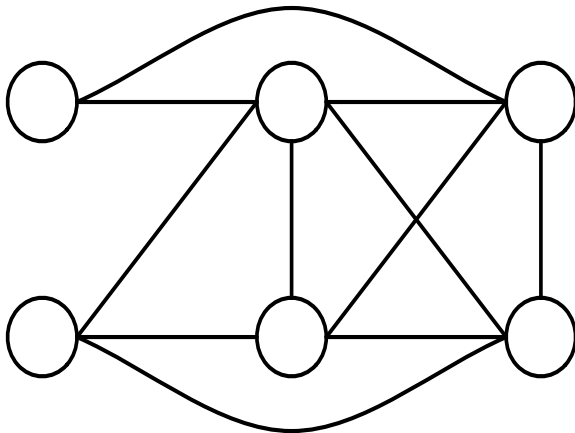
- $(A \vee B) \not\models A$ et $(A \vee B) \not\models \neg A$

Chapitre 5 : Logique

1. Logique des propositions
2. Sémantique
3. Satisfiabilité (SAT) et conséquence logique
- 4. Modélisation**
5. Raisonnement
 - Model checking
 - Résolution

Modélisation : coloration de graphe

- Comment colorier les noeuds d'un graphe de telle sorte que deux noeuds adjacents ont toujours des couleurs différentes ?



Modélisation : coloration de graphe

- Etant donné
 - un graphe $G=(V,E)$, où V est l'ensemble des noeuds et E l'ensemble des arcs
 - Un ensemble C de couleurs
- Définir les variables propositionnelles suivantes
 - $\text{couleur}[v,c]$, avec $v \in V$ et $c \in C$
 - La variable $\text{couleur}[v,c]$ est vraie si le noeud v est de couleur c . Elle est fausse sinon
 - Il y a donc $\#V \times \#C$ variables propositionnelles distinctes

Modélisation : coloration de graphe

Le modèle est composé d'une conjonction de formules

- Pour chaque arc $(v,w) \in E$, la formule $\neg(\text{couleur}[v,c] \wedge \text{couleur}[w,c])$ empêche les noeuds adjacents d'avoir la même couleur
- Pour chaque noeud $v \in V$, la disjonction $\text{couleur}[v,c]$ sur toutes les couleurs $c \in C$ assure que chaque noeud a au moins une couleur
- Pour chaque noeud $v \in V$, la conjonction $\neg(\text{couleur}[v,c1] \wedge \text{couleur}[v,c2])$ pour chaque paire de couleurs $(c1,c2)$ assure que chaque noeud n'a jamais plus d'une seule couleur

Modélisation : coloration de graphe

- Un modèle pour la formule de coloration d'un graphe représente une solution pour ce problème (valeur des variables propositionnelles)
- Si la formule est non satisfaisable, le problème n'a pas de solution
- Résoudre le problème de coloration du graphe revient donc à déterminer si la formule est satisfaisable (et retourner le modèle le cas échéant)

Chapitre 5 : Logique

1. Logique des propositions
2. Sémantique
3. Satisfiabilité (SAT) et conséquence logique
4. Modélisation
- 5. Raisonnement**
 - **Model checking**
 - Résolution

Raisonnement

Deux problèmes

- $p \models q$? Une formule q est-elle une **conséquence logique** d'une formule p ?
- $p \in SAT$? Une formule p est-elle satisfaisable ?

Le premier problème peut se réduire au second

- $p \models q$ ssi $(p \wedge \neg q) \notin SAT$

Raisonnement

Techniques de raisonnement

- Solveur SAT
 - Algorithmes de décision pour SAT
- Inférence
 - Méthodes formelles utilisant des règles d'inférence

Solveur SAT

Solveur SAT élémentaire basé sur le *model checking*

Donnée

- une formule p avec n variables propositionnelles

Algorithme

- Pour chaque interprétation I parmi les 2^n interprétations possibles de p
 - Si p est vraie dans cette interprétation I
 - Alors return $\langle \text{true}, I \rangle$ ($p \in \text{SAT}$)
- Return $\langle \text{false}, \emptyset \rangle$ ($p \notin \text{SAT}$)

Solveur SAT

La plupart des solveurs SAT travaillent sur une forme simplifiée des formules propositionnelles : les formules sous forme normale conjonctive (CNF)

- Négation uniquement devant une variable propositionnelle
- Que des disjonctions et des conjonctions
- La formule est une suite de conjonctions dont chaque élément est une disjonction de variables ou de négation de variables

$$(\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (A \vee B \vee C \vee \neg D)$$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- Un *literal* est une variable propositionnelle (A) ou sa négation ($\neg A$).
- Une *clause* is a disjonction de literaux
- Une formule sous forme normal conjonctive (CNF) est une conjonction de clauses

$$c_1 \vee \dots \vee c_n \quad c_1 \wedge \dots \wedge c_n$$

- Une formule sous forme CNF est habituellement représentée par l'ensemble $\{c_1, \dots, c_n\}$

Transformation en CNF

- Toute formule peut se représenter sous la forme d'une formule CNF équivalente
- Application des étapes suivantes
 - Eliminer les \Leftrightarrow et \Rightarrow en utilisant les équivalences présentées précédemment
 - Mettre les symboles de négation dans des littéraux en utilisant la double négation et les équivalences de Morgan
 - Utiliser la distributivité de \vee sur \wedge

Exemple

- $(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg C \wedge D)$
- $(\neg(A \vee B) \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg(\neg C \wedge D) \vee (A \vee B))$
- $((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (C \vee \neg D \vee A \vee B)$
- $(\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (A \vee B \vee C \vee \neg D)$

Sous la forme d'un ensemble de clauses

- $\{\neg A \vee \neg C, \neg A \vee D, \neg B \vee \neg C, \neg B \vee D, A \vee B \vee C \vee \neg D\}$

Chapitre 5 : Logique

1. Logique des propositions
2. Sémantique
3. Satisfiabilité (SAT) et conséquence logique
4. Modélisation
- 5. Raisonnement**
 - Model checking
 - **Résolution**

Preuve par inference

- Transformations successives de formules propositionnelles
- Application à chaque étape d'une règle d'inférence
- Chaque règle d'inférence garantit l'équivalence de la formule résultante à la formule initiale

Exemples de règle d'inférence

Equivalence

$$\frac{\begin{array}{l} p \Leftrightarrow q \\ q \Leftrightarrow r \end{array}}{p \Leftrightarrow r}$$

Modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

prémices

conclusion

Soit un ensemble $F = \{p_1, \dots, p_n\}$ de formules propositionnelles représentant la formule $p_1 \wedge \dots \wedge p_n$

Si les prémices appartiennent à F ,

alors on transforme F en F' en lui ajoutant la conclusion

- F et F' sont équivalents

Résolution

- Règle d'inférence unique généralisant le modus ponens
- Son utilisation permet de décider si un ensemble F de clauses est satisfaisable ou non
- Forme la plus simple de la résolution :
- Une table de vérité montre que tout modèle des prémices est aussi un modèle de la conclusion

$$\frac{p \vee q \quad \neg p \vee r}{q \vee r}$$

Règle de résolution

- Deux clauses prémices C_1 et C_2 , la première contenant un littéral $L_1 = V$ et la seconde un littéral $L_2 = \neg V$
- Une clause conclusion contenant tous les littéraux de C_1 et de C_2 , sauf les littéraux L_1 et L_2

Exemples

 $A \vee B$ $\neg A$

 B $A \vee B \vee \neg C$ $\neg D \vee \neg B \vee F$

 $A \vee \neg C \vee \neg D \vee F$ $A \vee B$ $\neg A \vee C$

 $B \vee C$ A $\neg A$

false

Résolution

- Partir d'une formule CNF sous la forme d'un ensemble de clauses
- A chaque étape
 - Appliquer la règle de résolution sur deux clauses pour lesquelles la règle est applicable et dont la conclusion n'est pas une clause existante
 - Ajouter la clause conclusion à la formule CNF
- Si la clause *false* est ajoutée à une étape, alors **la formule n'est pas satisfaisable**
- Si la règle de résolution ne peut plus s'appliquer, alors **la formule est satisfaisable**


Exactitude de la résolution

- Chaque étape conduit à une formule CNF équivalente à la formule précédente
- Comme le nombre de clauses distinctes sur les variables de la formule est fini, la résolution se termine toujours
- Si une des clauses est la clause *false*, alors la formule n'est pas satisfaisable [évident]
- Si fin sans clause *false*, alors la formule est non satisfaisable [non prouvé ici]

Résolution : résultat

- La résolution nous indique si une formule CNF appartient ou n'appartient pas à SAT
- Si elle appartient à SAT, la résolution ne donne pas de modèle comme résultat
- Résolution utilisée comme technique pour prouver $p \models q$
 - Transformer $(p \wedge \neg q)$ en CNF
 - Si résolution déduit *false* ,
Alors $(p \wedge \neg q) \notin \text{SAT}$, donc $p \models q$
 - Si résolution se termine sans déduire *false* ,
Alors $(p \wedge \neg q) \in \text{SAT}$, donc $p \not\models q$

Résolution : exemple

- Soit la formule p sous forme CNF (ensemble de clauses)
 $\{A, \neg B, \neg A \vee \neg C \vee D, \neg E \vee C, B \vee C\}$
- Question $p \models D$?
- Appliquer la résolution à $p \cup \{\neg D\}$ 

$\neg A \vee \neg C \vee D$	$\neg A \vee \neg C$	$\neg C$	$\neg B$
$\neg D$	A	$B \vee C$	B
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
$\neg A \vee \neg C$	$\neg C$	B	<i>false</i>

- Donc $p \models D$