INFO-F-302, Cours d'Informatique Fondamentale

Emmanuel Filiot
Département d'Informatique
Faculté des Sciences
Université Libre de Bruxelles

Année académique 2020-2021

La Logique des Prédicats

ou *logique du premier ordre*

3 Introduction

En logique des prédicats,

- on ajoute les quantificateurs
- on généralise les valeurs que peuvent prendre les variables (0,1 pour la logique propositionnelle, des valeurs sur un ensemble quelconque pour la logique des prédicats)
- on ajoute des relations (appelés prédicats) pour décrire certaines relations entre ces valeurs ($R(x, y)$ veut dire que x et y sont en relation)
- on ajoute des symboles de fonctions à la syntaxe

Exemple : $\forall x \forall y \cdot PremierEntreEux(x, y) \leftrightarrow \exists x' \exists y' \cdot x.x' + y.y' = 1$

- $PremierEntreEux$ est un prédicat à deux arguments,
- 1 est appelée *constante*
- $x.x' + y.y'$ est un *terme* formé avec les fonctions $\times$ et $.$

4 Langages du premier ordre

- on parle ici de langages car les objets syntaxiques qui seront à la base de la construction des formules sont déterminés par des vocabulaires qu'on fixera (symboles de relations, de fonctions, ...). Il existera donc une grande variété de langages du premier ordre selon le vocabulaire choisi.
- L'expression "premier ordre" différencie ces langages des langages "d'ordre supérieur", dans lesquels il est possible de quantifier sur d'autres objets que les variables (par ex. sur les fonctions, prédicats, ...)

5 Des exemples de formules

- $\forall x,\ p(x,x)$ "p est une relation réflexive"

Dans les entiers, si on interprète 'p' par la relation égalité, ou la relation $\mathbb{N}^2$, la formule est vraie.

RAPPEL SUR LES RELATIONS

Une relation n-aire sur un ensemble A, pour $n \geq 1$, est un sous-ensemble de n-uplets d'éléments de A.

Par exemple sur $\mathbb{N}$: $(3,5,7,2)$ est 4-uplet

On note A^n l'ensemble des n-uplets d'éléments de A.

Donc une relation $\mathcal{R}$ n-aire sur A est un sous-ensemble de A^n.

Par exemple :
- L'égalité sur A est une relation binaire.
- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une relation binaire sur $\mathbb{N}$
- $\text{Paire} = \{n \mid n \bmod 2 = 0\}$ est une relation unaire.
- $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=z\}$ est une relation ternaire sur $\mathbb{R}$.

5 Des exemples de formules

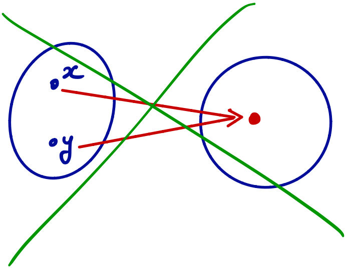
- $\forall x,\ p(x,x)$
- $\forall x \forall y,\ p(x,y) \rightarrow p(y,x)$ "la relation p est symétrique"

Par exemple: la relation d'adjacence dans un graphe non dirigé. La relation égalité dans un ensemble quelconque.

5 Des exemples de formules

- $\forall x,\ p(x, x)$
- $\forall x \forall y,\ p(x, y) \to p(y, x)$
- $\forall x \forall y,\ f(x) = f(y) \to x = y$

"la fonction f est injective"



5 Des exemples de formules

- $\forall x,\ p(x,x)$
- $\forall x \forall y,\ p(x,y) \rightarrow p(y,x)$
- $\forall x \forall y,\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y$
- $\forall x, [(p(x) \rightarrow \neg p(S(x))) \wedge (\neg p(x) \rightarrow p(S(x))]$

5 Des exemples de formules

- $\forall x,\ p(x,x)$
- $\forall x \forall y,\ p(x,y) \rightarrow p(y,x)$
- $\forall x \forall y,\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y$
- $\forall x, [(p(x) \rightarrow \neg p(S(x))) \land (\neg p(x) \rightarrow p(S(x))]$
- $\exists x \forall y,\ \neg(S(y) = x)$

5 Des exemples de formules

- $\forall x,\ p(x,x)$
- $\forall x \forall y,\ p(x,y) \rightarrow p(y,x)$
- $\forall x \forall y,\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y$
- $\forall x, [(p(x) \rightarrow \neg p(S(x))) \wedge (\neg p(x) \rightarrow p(S(x))]$
- $\exists x \forall y,\ \neg(S(y) = x)$
- $\forall y,\ \neg(S(y) = c)$

[Wooclap : 1]

5 Des exemples de formules

- $\forall x,\ p(x,x)$
- $\forall x \forall y,\ p(x,y) \rightarrow p(y,x)$
- $\forall x \forall y,\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y$
- $\forall x, [(p(x) \rightarrow \neg p(S(x))) \wedge (\neg p(x) \rightarrow p(S(x))]$
- $\exists x \forall y,\ \neg(S(y) = x)$
- $\forall y,\ \neg(S(y) = c)$
- $\forall x \forall y,\ [f(x,y) = f(y,x) \wedge f(x,S(y)) = S(f(x,y)) \wedge f(x,c) = x]$

Wooclap Exercice 1

p : symbole prédicat binaire

f : " fonction unaire

Quelles sont les formules bien formées ?

① $\forall x \; p(x, f(x))$ ✓

② $\exists x \; f(x)$ ✗ ($f(x)$ est un élément pas une valeur booléenne)

③ $\forall x \forall y \; p(x,y) = f(y)$ ✗ $p(x,y)$ est interprété par vrai / faux et $f(y)$ est un élément

④ $\forall x \forall y \; p(x,y) \wedge p(f(x), y)$ ✓

⑤ $\forall x \exists y \; f(x,y) = f(y,x)$ ✗ f est un symbole unaire

Wooclap Exercice 2 : On se place dans les entiers. On considère trois symboles de fonctions puiss(x,y), mult(x,y) et add (x,y) respectivement interprétés par x^y, $x.y$ et $x+y$. Quelles sont les formules valides ?

① $\forall x \forall y$ puiss(2, puiss(x,y)) = puiss(2, mult(x,y)) $\quad 2^{(x^y)} = 2^{xy}$ ✗

② $\forall x \forall y$ puiss(puiss(2,x), y) = puiss(2, mult(x,y)) $\quad (2^x)^y = 2^{xy}$ ✓

③ $\forall x \exists y$ x = puiss(2,y) $\quad x = 2^y$ ✗

④ $\exists x \exists y$ x = puiss(2,y) $\quad x = 2^y$ ✓ oui, prendre $x = 1$ et $y = 0$

⑤ $\forall x \exists y$ puiss(2,x) = y $\quad 2^x = y$ ✓

⑥ $\forall x \forall y$ mult(puiss(2,x), puiss(2,y)) = puiss(2, add(x,y)) $\quad 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$ ✓

⑦ $\forall x \forall y$ mult(puiss(2,x), puiss(2,y)) = puiss(2, mult(x,y)) $\quad 2^x \cdot 2^y = 2^{xy}$ ✗
prendre $x=1$ et $y=1$

$$\underbrace{\underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{x} \times \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{y}}_{x+y}$$

$$2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$$

5 Des exemples de formules

- $\forall x,\ p(x,x)$
- $\forall x \forall y,\ p(x,y) \rightarrow p(y,x)$
- $\forall x \forall y,\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y$
- $\forall x, [(p(x) \rightarrow \neg p(S(x))) \wedge (\neg p(x) \rightarrow p(S(x))]$
- $\exists x \forall y,\ \neg(S(y) = x)$
- $\forall y,\ \neg(S(y) = c)$
- $\forall x \forall y,\ [f(x,y) = f(y,x) \wedge f(x,S(y)) = S(f(x,y)) \wedge f(x,c) = x]$

Les ingrédients pour construire les formules sont : connecteurs Booléens, quantificateurs, symboles de relations, de fonctions, constantes, et termes.

Pour satisfaire une formule, il faudra définir une *interprétation* des symboles (relations, fonctions, constantes) dans un *domaine*. [wooclap : 2]

6 Langages du premier ordre : alphabet

L'alphabet d'un langage du premier ordre comporte d'abord les symboles suivants qui sont *communs à tous ces langages* :

- les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- les parenthèses $(,)$;
- le *quantificateurs universel* $\forall$ et le *quantificateur existentiel* $\exists$;
- un ensemble infini V de symboles de *variables* $x, y, z, \ldots$.

7 Langages du premier ordre : alphabet

Un *langage* $\mathcal{L}$ de la logique du premier ordre est caractérisé par :

- des *symboles de relations* ou *prédicats* , notés p, q, r, s... ;
- des *symboles de fonctions* , notés $f, g, h, \dots$;
- des *symboles de constantes* , notés $c, d, e, \dots$

A chaque prédicat p, respectivement fonction f, on associe un entier strictement positif appelé l'*arité* de p, respectivement de f, c'est-à-dire le nombre d'arguments de p, respectivement f. On notera parfois $p|_n$ ou $f|_n$ pour signifier que p (resp. f) est un symbole de relation (resp. de fonction) d'arité n.

7 Langages du premier ordre : alphabet

Un *langage* $\mathcal{L}$ de la logique du premier ordre est caractérisé par :

- des *symboles de relations* ou *prédicats* , notés $p, q, r, s \ldots$;
- des *symboles de fonctions* , notés $f, g, h, \ldots$;
- des *symboles de constantes* , notés $c, d, e, \ldots$

A chaque prédicat p, respectivement fonction f, on associe un entier strictement positif appelé l'*arité* de p, respectivement de f, c'est-à-dire le nombre d'arguments de p, respectivement f. On notera parfois $p|_n$ ou $f|_n$ pour signifier que p (resp. f) est un symbole de relation (resp. de fonction) d'arité n.
On utilise le prédicat "$=$" pour dénoter l'égalité. Si "$=$" fait partie du vocabulaire du langage $\mathcal{L}$, on dit que $\mathcal{L}$ est *égalitaire* .

8 Langages du premier ordre : alphabet

Exemples de langages :

- $\mathcal{L}_1 = \{r|_1, c\}$ contient un prédicat unaire r et une constante c ;
- $\mathcal{L}_2 = \{r|_2, f|_1, g|_2, h|_2, c, d\}$ contient un prédicat binaire r, une fonction unaire f, deux symboles de fonctions binaires g et h, et deux constantes c et d.

9 Langages du premier ordre : construction des termes

L'ensemble des *termes d'un langage* $\mathcal{L}$ est le plus petit ensemble qui contient les symboles de constantes et de variables et qui est clos par application des fonctions.
L'ensemble des termes, noté $\mathcal{T}$, est le plus petit ensemble satisfaisant :

1. tout symbole de constante ou variable est un terme ;
2. si f est un symbole de fonction d'arité n et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des termes alors $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un terme.

Remarque : les prédicats ne fournissent pas des termes ; ils serviront pour construire les formules.

10 Langages du premier ordre : construction des termes

Exemples :

- les seuls termes du langage $\mathcal{L}_1$ sont la constante c et les variables ;
- les expressions suivantes sont des termes du langage $\mathcal{L}_2$:
  - $f(c)$;
  - $f(h(f(c), d))$;
  - $f(y)$;
  - $f(h(f(x), f(d)))$.

Un terme est *clos* s'il est sans variable. Par exemple $f(c)$ est clos.

11 Langages du premier ordre : construction des formules

L'ensemble des *formules atomiques* d'un langage $\mathcal{L}$ est l'ensemble des formules de la forme :

- $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ou p est un prédicat d'arité n et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des termes du langage $\mathcal{L}$;
- $t_1 = t_2$ si $\mathcal{L}$ est égalitaire et t_1, t_2 sont des termes du langage $\mathcal{L}$.

12 Langages du premier ordre : construction des formules

Définition

L'ensemble des *formules du langage* $\mathcal{L}$, que l'on désigne par $\mathcal{F}(\mathcal{L})$, est défini par la grammaire suivante :

$$\phi \ ::= \ p(t_1, \ldots, t_n) \mid \phi \wedge \phi \mid \phi \vee \phi \mid \neg \phi \mid \phi \rightarrow \phi \mid \phi \leftrightarrow \phi \mid \exists x \cdot \phi \mid \forall x \cdot \phi \mid (\phi)$$

- $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes
- p est un symbole de relation
- $\exists x$ est appelé *quantificateur existentiel*
- $\forall x$ est appelé *quantificateur universel*

13 Langages du premier ordre : exemples de formules

La formule $r(c) \vee \neg\exists x \cdot r(x)$ est une formule du langage $\mathcal{L}_1$.
Exemples de formules du langage $\mathcal{L}_2$:

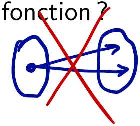
- $\forall x \cdot \exists y (g(x, y) = c \wedge g(y, x) = c)$
- $\forall x \cdot \neg(f(x) = c)$

Exemples de formules du langage $\mathcal{L}_3 = \{p\}$ où p est un symbole de prédicat binaire :

Wooclap 3

- $\forall x \cdot \forall y \cdot (p(x, y) \rightarrow p(y, x))$ → la relation est symétrique
- $\forall x \cdot p(x, x)$ → réflexive
- $\forall x \cdot \forall y \cdot (p(x, y) \vee p(y, x))$ → toute paire d'éléments ou sa permutation sont en relation
- $\forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot (p(x, y) \wedge p(y, z) \rightarrow p(x, z))$ → transitif
- Comment exprimer que p doit être interprétée par une fonction ?

$$\forall x \forall y \forall z \ (p(x,y) \wedge p(x,z)) \longrightarrow y = z$$



13 Langages du premier ordre : exemples de formules

La formule $r(c) \vee \neg\exists x \cdot r(x)$ est une formule du langage $\mathcal{L}_1$.
Exemples de formules du langage $\mathcal{L}_2$:

- $\forall x \cdot \exists y(g(x, y) = c \wedge g(y, x) = c)$
- $\forall x \cdot \neg(f(x) = c)$

Exemples de formules du langage $\mathcal{L}_3 = \{p\}$ où p est un symbole de prédicat binaire :

- $\forall x \cdot \forall y \cdot (p(x, y) \rightarrow p(y, x))$
- $\forall x \cdot p(x, x)$
- $\forall x \cdot \forall y \cdot (p(x, y) \vee p(y, x))$
- $\forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot (p(x, y) \wedge p(y, z) \rightarrow p(x, z))$
- Comment exprimer que p doit être interprétée par une fonction ?
- $\forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot (p(x, y) \wedge p(x, z) \rightarrow y = z)$, mais $\mathcal{L}_3$ doit être égalitaire.

14 Langages du premier ordre : règles de précédence

- pour les connecteurs Booléens, on garde les mêmes règles de précédence que dans la logique propositionnelle
- les quantificateurs ont la même priorité que la négation

Exemple :

- $\forall x \cdot \neg p(x,y) \vee p(y,x) \equiv (\forall x \cdot \neg(p(x,y))) \vee p(y,x)$

15 Langages du premier ordre : variables libres et liées

Une *occurrence d'une variable* dans une formule est un couple constitué de cette variable et d'une place effective, c'est-à-dire qui ne suit pas un quantificateur.
Par exemple, dans la formule

$$r(x,z) \rightarrow \forall z \cdot (r(y,z) \vee y = z)$$

la variable x possède une occurrence, la variable y deux et la variable z trois. [Wooclap 4]

libre

liée

$$\forall y \, (p(x,y) \wedge \forall x \, (p(y,x) \wedge \exists x \, p(f(x,z))))$$

PAUSE

16 Langages du premier ordre : variables libres et liées

Définition

- Une occurrence d'une variable x dans une formule ϕ est une *occurrence libre* si elle ne se trouve dans aucune sous-formule de ϕ, qui commence par une quantification $\forall x$ ou $\exists x$.
- Dans le cas contraire, l'occurrence est dite *liée*.
- Une variable est *libre* dans une formule si elle a au moins une occurrence libre dans cette formule.
- Une *formule close* est une formule sans variable libre.

16 Langages du premier ordre : variables libres et liées

Définition

- Une occurrence d'une variable x dans une formule ϕ est une *occurrence libre* si elle ne se trouve dans aucune sous-formule de ϕ, qui commence par une quantification $\forall x$ ou $\exists x$.
- Dans le cas contraire, l'occurrence est dite *liée*.
- Une variable est *libre* dans une formule si elle a au moins une occurrence libre dans cette formule.
- Une *formule close* est une formule sans variable libre.

Exemples :

- dans $\exists x \cdot p(x, y)$, l'occurrence de x est liée et celle de y est libre
- dans $r(x, z) \rightarrow \forall z \cdot (r(y, z) \vee y = z)$, la première occurrence de z est libre et les deux suivantes sont liées

16 Langages du premier ordre : variables libres et liées

Définition

- Une occurrence d'une variable x dans une formule ϕ est une *occurrence libre* si elle ne se trouve dans aucune sous-formule de ϕ, qui commence par une quantification $\forall x$ ou $\exists x$.
- Dans le cas contraire, l'occurrence est dite *liée*.
- Une variable est *libre* dans une formule si elle a au moins une occurrence libre dans cette formule.
- Une *formule close* est une formule sans variable libre.

Exemples :

- dans $\exists x \cdot p(x, y)$, l'occurrence de x est liée et celle de y est libre
- dans $r(x, z) \to \forall z \cdot (r(y, z) \vee y = z)$, la première occurrence de z est libre et les deux suivantes sont liées

On note souvent $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ pour indiquer que ϕ possède exactement $x_1, \ldots, x_n$ comme variables libres.

17 Interprétation des formules

- On va interpréter les formules dans des structures.
- Une structure $\mathcal{M}$ pour un langage $\mathcal{L}$ se compose d'un ensemble non vide M, appelé le *domaine* et d'une interprétation des symboles de prédicats par des relations sur M, des symboles de fonctions par des fonctions de M, et des constantes par des éléments de M.
- Plus précisément, une structure se aussi composée :
  - d'un sous-ensemble de M^n, noté $r^{\mathcal{M}}$, pour chaque symbole de prédicat r d'arité n dans $\mathcal{L}$;
  - d'une fonction de M^m dans M, notée $f^{\mathcal{M}}$, pour chaque symbole de fonction f d'arité m dans $\mathcal{L}$;
  - d'un élément de M, noté $c^{\mathcal{M}}$, pour chaque symbole de constante c dans $\mathcal{L}$.

18 Structures et langages : Exemples

- Pour $\mathcal{L}_1 = (r|_1, c)$, la structure $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}, r^{\mathcal{M}_1}, c^{\mathcal{M}_1})$ avec $r^{\mathcal{M}_1}$ l'ensemble des nombres premiers et $c^{\mathcal{M}_1} = 2$ est une interprétation de $\mathcal{L}_1$.

18 Structures et langages : Exemples

- Pour $\mathcal{L}_1 = (r|_1, c)$, la structure $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}, r^{\mathcal{M}_1}, c^{\mathcal{M}_1})$ avec $r^{\mathcal{M}_1}$ l'ensemble des nombres premiers et $c^{\mathcal{M}_1} = 2$ est une interprétation de $\mathcal{L}_1$.
- Parfois, on écrira directement les interprétations directement dans le n-uplet comme dans l'exemple suivant :
- Pour $\mathcal{L}_2 = (r|_2, f|_1, g|_2, h|_2, c, d)$, on peut prendre la structure sur les réels

$$\mathcal{M}_2 = (\mathbb{R}, \leq, +1, +, \times, 0, 1)$$

avec $+1$ la fonction qui a x associe $x + 1$

19 Interprétation des termes dans une structure

puiss (mult (x, y), z)

Etant donnés un ensemble de variables $\mathcal{V}$ et un domaine M, une *valuation* pour les variables de $\mathcal{V}$ dans M est une fonction $v : \mathcal{V} \to M$ qui attribue à chaque variable $x \in \mathcal{V}$, une valeur $v(x) \in M$.

L'interprétation d'un terme t (dont les variables sont dans $\mathcal{V}$) dans une structure de domain M et selon une valuation v est un élément $t^{\mathcal{M},v} \in M$, inductivement défini de la façon suivante :

- si $t = c$, alors $t^{\mathcal{M},v} = c^{\mathcal{M}}$;
- si $t = x$, alors $t^{\mathcal{M},v} = v(x)$ est $v(x)$;
- si $t = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ alors $t^{\mathcal{M},v} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},v}, \dots, t_n^{\mathcal{M},v})$;

20 Exemples

[Wooclap 5]

$+1 \quad + \quad \times \quad 0 \quad 1$

Soit $\mathcal{L}_2 = (r|_2, f|_1, g|_2, h|_2, c, d)$ et $\mathcal{M}_3 = (\mathbb{N}, \leq, +1, +, \times, 0, 1)$.
L'interprétation dans $\mathcal{M}_3$ du terme

$$t_1 \equiv g(y, h(c, x))$$

selon la valuation v telle que $v(x) = 3$, $v(y) = 4$, $v(z) = 6$ est :

$$t_1^{\mathcal{M}_3} = g^{\mathcal{M}_3}(v(y), h^{\mathcal{M}_3}(c^{\mathcal{M}_3}, v(x)))$$

$$= 4 + 0 \times 3$$

$$= 4$$

20 Exemples

Soit $\mathcal{L}_2 = (r|_2, f|_1, g|_2, h|_2, c, d)$ et $\mathcal{M}_3 = (\mathbb{N}, \leq, +1, +, \times, 0, 1)$.
L'interprétation dans $\mathcal{M}_3$ du terme

$$t_1 \equiv g(y, h(c, x))$$

selon la valuation v telle que $v(x) = 3$, $v(y) = 4$, $v(z) = 6$ est :

$$t_1^{\mathcal{M}_3, v} = 4 + (0 \times 3) = 4$$

L'interprétation du terme

$$t_2 \equiv f(g(d, h(y, z)))$$

[wooclap 6]

est :

$$t_2^{\mathcal{M}_3, v} = f^{\mathcal{M}_3}(g^{\mathcal{M}_3}(d^{\mathcal{M}_3}, h^{\mathcal{M}_3}(v(y), v(z))))$$

$$= (1 + 4 \times 6) + 1 = 26$$

20 Exemples

Soit $\mathcal{L}_2 = (r|_2, f|_1, g|_2, h|_2, c, d)$ et $\mathcal{M}_3 = (\mathbb{N}, \leq, +1, +, \times, 0, 1)$.
L'interprétation dans $\mathcal{M}_3$ du terme

$$t_1 \equiv g(y, h(c, x))$$

selon la valuation v telle que $v(x) = 3$, $v(y) = 4$, $v(z) = 6$ est :

$$t_1^{\mathcal{M}_3, v} = 4 + (0 \times 3) = 4$$

L'interprétation du terme

$$t_2 \equiv f(g(d, h(y, z)))$$

est :

$$t_2^{\mathcal{M}_3, v} = (1 + (4 \times 6)) + 1 = 26$$

21 Interprétation des formules

Une formule ϕ construite sur un langage $\mathcal{L}$ est satisfaite dans une structure $\mathcal{M}$ et pour une valuation v donnant une valeur aux variables de l'ensemble $\mathcal{V}$, noté $\mathcal{M}, v \models \phi$, si et seulement si :

- si $\mathcal{L}$ est égalitaire et $\phi \equiv t_1 = t_2$ alors ϕ est vrai ssi $t_1^{\mathcal{M},v} = t_2^{\mathcal{M},v}$;
- si $\phi \equiv r(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ et $t_i^{\mathcal{M},v} = b_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, alors ϕ est vraie ssi $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in r^{\mathcal{M}}$;

22 Interprétation des formules

- si $\phi \equiv \neg\psi_1$, $\phi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$, $\phi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$, $\phi \equiv \psi_1 \rightarrow \psi_2$, $\phi \equiv \psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ alors la valeur de ϕ est calculée à partir des valeurs de ψ_1 et ψ_2 comme dans le cas propositionnel ;
- si $\phi \equiv \exists x \cdot \psi$, alors ϕ est vraie ssi il existe $u \in M$ tel que $\mathcal{M}, v[x \mapsto u] \models \psi$; où

$$\begin{cases} v[x \mapsto u](y) = v(y) & \text{si } y \neq x \\ v[x \mapsto u](y) = u & \text{si } y = x \end{cases}$$

22 Interprétation des formules

- si $\phi \equiv \neg\psi_1$, $\phi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$, $\phi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$, $\phi \equiv \psi_1 \rightarrow \psi_2$, $\phi \equiv \psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ alors la valeur de ϕ est calculée à partir des valeurs de ψ_1 et ψ_2 comme dans le cas propositionnel ;
- si $\phi \equiv \exists x \cdot \psi$, alors ϕ est vraie ssi il existe $u \in M$ tel que $\mathcal{M}, v[x \mapsto u] \models \psi$; où

$$\begin{cases} v[x \mapsto u](y) = v(y) & \text{si } y \neq x \\ v[x \mapsto u](y) = u & \text{si } y = x \end{cases}$$

- si $\phi \equiv \cancel{\exists}\forall x \cdot \psi$, alors ϕ est vraie ssi **pour tout** $u \in M$, on a $\mathcal{M}, v[x \mapsto u] \models \psi$;

La *valeur* $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}}$ d'une formule ϕ dans une structure $\mathcal{M}$ est l'ensemble des valuations v telles $\mathcal{M}, v \models \phi$.

23 Structures et satisfaction des formules

Notons que, si ϕ est une formule close, alors sa valeur de vérité dans un couple $(\mathcal{M}, v)$, ne dépend pas de v.
Dans le cas où une formule close ϕ est vraie dans une structure $\mathcal{M}$, ce que l'on note,

$$\mathcal{M} \models \phi$$

On dit que $\mathcal{M}$ est un *modèle* pour ϕ, ou que ϕ est vraie dans $\mathcal{M}$.

24 Exemples

- Prenons $\mathcal{L}_1 = \{r|_2, c\}$. La formule close suivante

$$
\begin{array}{l}
\forall x \cdot r(x,x) \\
\wedge \forall x \cdot \forall y \cdot (r(x,y) \rightarrow r(y,x)) \\
\wedge \forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot (r(x,y) \wedge r(y,z) \rightarrow r(x,z))
\end{array}
$$

exprime qu'une structure (D, R, a) est un modèle de la formule si et seulement si R est une relation

24 Exemples

- Prenons $\mathcal{L}_1 = \{r|_2, c\}$. La formule close suivante

$$\begin{array}{l} \forall x \cdot r(x,x) \\ \wedge \forall x \cdot \forall y \cdot (r(x,y) \rightarrow r(y,x)) \\ \wedge \forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot (r(x,y) \wedge r(y,z) \rightarrow r(x,z)) \end{array}$$

  exprime qu'une structure (D, R, a) est un modèle de la formule si et seulement si R est une relation d'équivalence.
- la formule $\forall y \cdot r(x,y)$ est vraie dans la structure $(\mathbb{N}, \leq, +1, +, \times, 0, 1)$ et la valuation v ssi $v(x) = 0$ (Rappel : r est interprété par $\leq$)

25 Exemples

[Wooclap 7]

- est-ce que $\exists x \cdot \forall y \cdot r(x, y)$ est vraie dans $(\mathbb{N}, \leq)$?

25 Exemples

- est-ce que $\exists x \cdot \forall y \cdot r(x, y)$ est vraie dans $(\mathbb{N}, \leq)$? oui.
- Sur le langage $\mathcal{L}_2 = (r|_2, f|_1, g|_2, h|_2, c, d)$, prenons la formule close

$$\forall x \cdot \forall z \cdot \exists y \cdot (x = c \vee g(h(x, y), z) = c)$$

  - est-ce que $(\mathbb{R}, \leq, +1, +, \times, 0, 1)$ en est un modèle ?
  - est-ce que $(\mathbb{N}, \leq, +1, +, \times, 0, 1)$ en est un modèle ?

25 Exemples

- est-ce que $\exists x \cdot \forall y \cdot r(x, y)$ est vraie dans $(\mathbb{N}, \leq)$? oui.
- Sur le langage $\mathcal{L}_2 = (r|_2, f|_1, g|_2, h|_2, c, d)$, prenons la formule close

$$\forall x \cdot \forall z \cdot \exists y \cdot (x = c \vee g(h(x, y), z) = c)$$

  - est-ce que $(\mathbb{R}, \leq, +1, +, \times, 0, 1)$ en est un modèle ? oui.
  - est-ce que $(\mathbb{N}, \leq, +1, +, \times, 0, 1)$ en est un modèle ? non.

26 Formules satisfaisables, valides et équivalentes

- une formule ϕ close est **satisfaisable** s'il existe une structure $\mathcal{M}$ telle que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}} \neq \varnothing$
- elle est **valide** si pour toute structure $\mathcal{M}$ de domaine M, $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}} = X^M$ où X est l'ensemble des variables de ϕ (toute valuation la satisfait),
- deux formules ϕ et ψ sont *équivalentes* si, pour toute structure $\mathcal{M}$ et pour toute valuation v, on a $(\mathcal{M}, v) \models \phi$ ssi $(\mathcal{M}, v) \models \psi$.

27 Formules valides, formules équivalentes

Les couples de formules suivants sont des exemples de formules équivalentes :

- ϕ et $\forall x \cdot \phi$ si x n'est pas libre dans ϕ ;
- ϕ et $\exists x \cdot \phi$ si x n'est pas libre dans ϕ ;
- $\forall x \cdot (\phi \wedge \psi)$ et $(\forall x \cdot \phi) \wedge (\forall x \cdot \psi)$
- $\exists x \cdot (\phi \vee \psi)$ et $(\exists x \cdot \phi) \vee (\exists x \cdot \psi)$
- $\exists x \cdot (\phi \rightarrow \psi)$ et $\exists x \cdot (\neg\phi \vee \psi)$
- $\exists x \cdot \phi$ et $\exists y \cdot \phi(y/x)$ si x est libre dans ϕ et y n'apparaît pas dans ϕ
- $\forall x \cdot \phi$ et $\forall y \cdot \phi(y/x)$ si x est libre dans ϕ et y n'apparaît pas dans ϕ

Si x n'est pas libre dans ψ, on obtient les équivalences suivantes :

- $\forall x \cdot (\phi \wedge \psi)$ et $(\forall x \cdot \phi) \wedge \psi$
- $\exists x \cdot (\phi \wedge \psi)$ et $(\exists x \cdot \phi) \wedge \psi$

28 Formules valides, formules équivalentes

Les équivalences suivantes nous permettent de faire passer en tête de formule tous les quantificateurs. Soit ϕ une formule, x une variable et ψ une formule dans laquelle x n'est pas libre :

- $\neg\forall x \cdot \phi$ et $\exists x \cdot \neg\phi$
- $\neg\exists x \cdot \phi$ et $\forall x \cdot \neg\phi$
- $(\forall x \cdot \phi) \vee \psi$ et $\forall x \cdot (\phi \vee \psi)$
- $(\exists x \cdot \phi) \wedge \psi$ et $\exists x \cdot (\phi \wedge \psi)$
- $(\psi \rightarrow \forall x \cdot \phi)$ et $\forall x \cdot (\psi \rightarrow \phi)$
- $(\psi \rightarrow \exists x \cdot \phi)$ et $\exists x \cdot (\psi \rightarrow \phi)$
- $(\forall x \cdot \phi) \rightarrow \psi$ et $\exists x \cdot (\phi \rightarrow \psi)$
- $(\exists x \cdot \phi) \rightarrow \psi$ et $\forall x \cdot (\phi \rightarrow \psi)$

Notons également que les formules suivantes sont équivalentes :

- $\forall x \cdot \forall y \cdot \phi$ et $\forall y \cdot \forall x \cdot \phi$
- $\exists x \cdot \exists y \cdot \phi$ et $\exists y \cdot \exists x \cdot \phi$