Séance 3

⚠ TUYAU D'EXAMEN → possible de demander sol. sous forme d'un seul coeff. binomial

Exercice 1.
Trouver le nombre de solutions de l'équation $x + y + z + w = 15$ dans les naturels (0,1,2, ...).

Exercice 2.
Combien l'équation

$$x + y + z + t + u = 60$$

possède-t-elle de solutions entières (x, y, z, t, u) telles que

$$x > 0\ , \quad y \geqslant 9\ , \quad z > -2\ , \quad t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u > 10 \quad ?$$

Exercice 3.
Trouver le nombre de solutions de l'inéquation

$$x + y + z + t \leqslant 6$$

1. dans les naturels;
2. dans les entiers > 0;
3. dans les entiers, avec comme contraintes supplémentaires $x > 2$, $y > -2$, $z > 0$ et $t > -3$.

Exercice 4. Combien le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 415 \\ x + y + z + u &= 273 \end{cases}$$

possède-t-il de solutions (x, y, z, t, u) dans les entiers > 0 ?

Exercice 5.
Combien l'inéquation

$$x + y + z + t < 100$$

possède-t-elle de solutions (x, y, z, t) dans les entiers > 0 ?

Ex 1 :

Exemple de modélisat° :

$$\underbrace{\overset{\swarrow}{0}\,0\,0\,0\,0}_{x\,=\,5}\ \underbrace{|\ 0\,0\,0\ |\ 0\ |}_{4-1 \text{ symboles}}\ 0\,0\,0\,0\,0\,0$$

15 symboles

Combien de mots de ce type peut on écrire ?

$$\binom{15+4-1}{4-1} = \binom{15+4-1}{15} = \frac{18!}{15!\;3!} = \frac{\overset{\times 3}{\cancel{18}}\cdot 17\cdot 16}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 816$$

↳ on choisit les places des 4−1 symboles "+" parmi les posit° possible

↳ on choisit les places des 15 symb. "0" parmi les pos. possibles

Ex 2

$\underbrace{x > 0}$ $y \geq 9$ $z > -2$ $t \geq 0$ $u > 10$

$x \geq 1$ $z \geq -1$ $u \geq 11$

$x-1 \geq 0$ $y-9 \geq 0$ $z+1 \geq 0$ t $u-11 \geq 0$

$\overset{\shortparallel}{X}$ $\overset{\shortparallel}{Y}$ $\overset{\shortparallel}{Z}$ $\overset{\shortparallel}{T}$ $\overset{\shortparallel}{U}$

$$X+Y+Z+T+U$$
$$= x-1+y-9+z+1+t+u-11$$

$= x + y + z + t + w - 20$ → bijection parfaite avec l'équation de départ

$= 60 - 20 = 40$

$$\binom{40 + 5 - 1}{5 - 1} = \binom{44}{4}$$

→ nb de variables

Ex 3

① Dans les naturels → $K \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{cases}$

$x + y + z + t = K$

$$\binom{K + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{K+3}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{K+3}{3} = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \binom{8}{3} + \binom{9}{3}$$

$$= \binom{10}{4}$$

② Dans les entiers > 0

On effectue un chgt de variables : $X = x - 1 \geq 0$

$Y = y - 1$

$Z = z - 1$

$T = t - 1$

Alors $X + Y + Z + T = x + y + z + t - 4 \leq 2$

L'inégalité $x+y+z+t \leq 6$ a exactement le même nombre de sol. (x,y,z,t) que la nouvelle inégalité $X+Y+Z+T \leq 2$ $\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$

On trouve ce nombre :

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{k+4-1}{4-1} = \sum_{k=0}^{2} \binom{k+3}{3} = \binom{6}{4}$$

③ $\binom{9}{4}$ chgt de variable

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Ex 4

$\Rightarrow t-u = 415-273 = 142$

Une sol (x,y,z,u,t) de ce système correspond à une sol. (x,y,z,u) de $x+y+z+u=273$ avec $t=u+142$

Cb de sol. à $x+y+z+u=273$ avec $x,y,z,u \geq 0$ entiers ?

① chgt de var $X = x-1 \geq 0$

$Y = \ldots$

$Z = \ldots$

② Formule $\rightarrow \binom{272}{269}$

Exercice 6. Avec les lettres du mot

H U M U H U M U N U K U N U K U A P U A A

("poisson" en hawaïen), combien peut-on écrire de mots différents de 21 lettres ne comprenant pas deux lettres U côte à côte ?

Exercice 7.
Combien de personnes doivent être sélectionnées dans une collection de 15 couples mariés afin d'être certain qu'au moins 2 personnes choisies soient mariées l'une à l'autre?

Exercice 8.
Montrer que dans une collection de $n^2 + 1$ objets, il en existe soit $n + 1$ identiques soit $n + 1$ qui sont tous différents.

Exercice 9.
Une boulangerie vend 8 variétés de muffins: pomme, banane, myrtille, fromage, chocolat, café , pêche et le préféré de tout le monde brocoli.
De combien de manières peut-on sélectionner:

1. 16 muffins?
2. 16 muffins avec au moins 1 de chaque type?
3. 16 muffins avec au moins 2 à la pêche et au moins 3 au chocolat?
4. 16 muffins avec au plus 2 brocoli?
5. 16 muffins avec au moins 2 fromage, au moins 3 chocolat et pas plus de 2 brocoli?

Exercice 10.
Soit un groupe de 6 personnes dans lequel chaque paire d'individus est soit deux amis soit deux ennemis. Montrer qu'il existe trois amis mutuels ou trois ennemis mutuels.

Exs ① Chgt de var :

$$x+y+z+T < 96$$

$=0, =1, \ldots, =95$

② Formule avec sommat° :

$$\sum_{k=0}^{95} \binom{k+4-1}{4-1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{95} \binom{k+3}{3}}_{\binom{3}{3}+\ldots+\binom{98}{3}} = \binom{99}{4}$$

Ex 6

H : 2 K : 2

U : 4 P : 1

M : 2 A : 3

N : 2

$$\Rightarrow \frac{21!}{2!2!2!2!3!4!}$$ Nb de mots avec les lettres sans contrainte sur le U

Mots sans U : $\frac{12!}{2!2!2!2!3!}$

H M N A H N A A M P K K

13 places

$\binom{13}{4}$ choix de places pour les U

Total de mots sans U côte à côte :

$$\frac{12!}{(2!)^4\, 3!} \cdot \frac{13!}{3!\,(13-3)!}$$

Ex 7

Pire scénario : 15 personne → 1 personne de chaque couple

+ 1 = 16

Ex 8

- Si les 2 prop sont fausses, on ne peut pas trouver n+1 objets différents parmi tous les objets, il y a donc au plus n types d'objets
- Mais on ne peut pas non plus trouver n+1 objets identiques parmi tous les objets, il y a donc au plus n objets de chaque type
- On a, au total, au plus n objets de chaque type (nb type = n)

⇒ n^2 objets

Ex 9

① banane

$$= \binom{16+8-1}{8-1} = \binom{23}{7}$$

② $x_1 + x_2 + \ldots = 16$

$\Rightarrow$ changem- de var $x_1 - 1 \geq 0 \ldots$

$X_1 + X_2 + \ldots = 8$

$$\binom{8+8-1}{8-1} = \binom{15}{7}$$

③ $$\binom{16-5+8-1}{8-1} = \binom{18}{7}$$

④ il faut que $x_{brocoli} \leq 2$

Au plus 2 brocolis $\Rightarrow$ 0, 1 ou 2 brocoli

0 brocoli : $\binom{16+7-1}{7-1} = \binom{22}{6}$ $\longrightarrow$ il y a tjs 16 muffins à choisir parmi 7 types

1 brocolis : $\binom{15+7-1}{7-1} = \binom{21}{6}$

2 brocolis : $\binom{14+7-1}{7-1} = \binom{20}{6}$

$$= \binom{22}{6} + \binom{21}{6} + \binom{20}{6}$$

(5) 2 fromages au moins } déjà 5 choisis
3 chocos au moins

restent 11 à choisir :

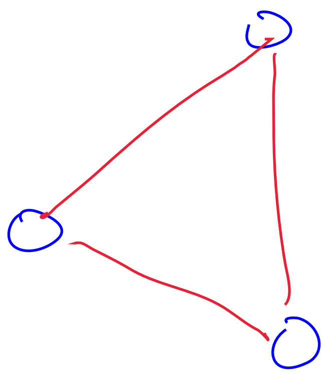
0 choco : ...

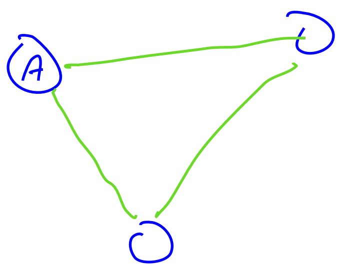
1 choco : ...

2 choco : ...

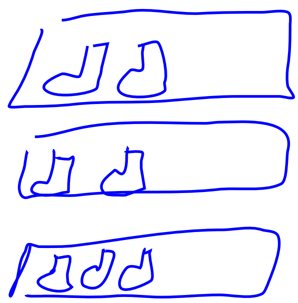
$$\binom{17}{6} + \binom{16}{6} + \binom{15}{6}$$

Ex 10





Pigeon hole principle :



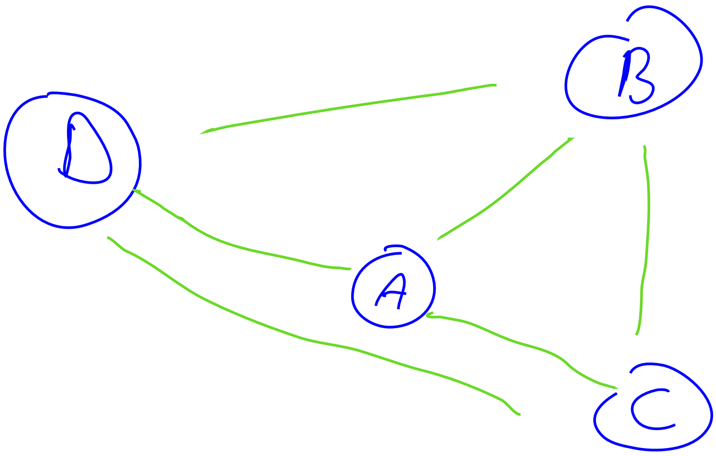
$\lceil \frac{7}{2} \rceil = 3$

- A est ami ou ennemi avec les 5 autres personnes

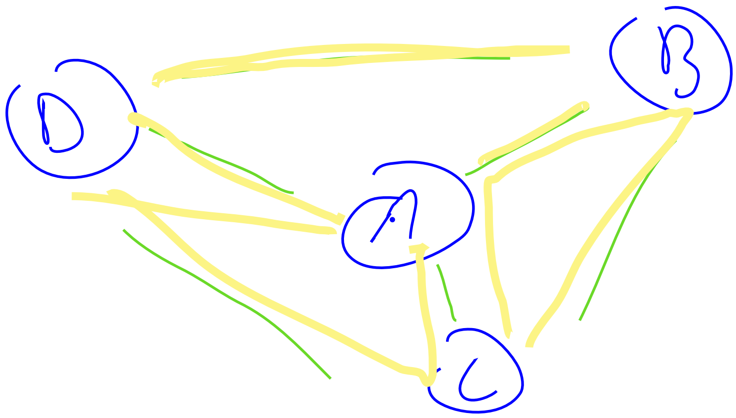
  → 5 personnes (chaussettes), 2 types de relat° (tiroirs)

⇒ au moins $\lceil \frac{5}{2} \rceil$ ami ou ennemi

- Sans perte de généralité, supposons que ces 3 personnes sont amies avec A



ou



Soit B, C, D ennemis mutuels,

Soit une paire → B, C
B, D
C, D

d'amis

et alors A, B, C amis

ou A, B, D amis

ou A, C, D amis