MATHF307 – Mathématiques discrètes : Théorie

I. Comptage élémentaire

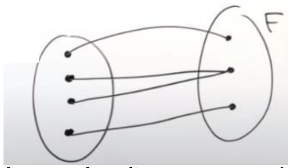
Types de démonstrations :

Un théorème est une affirmation mathématique vraie.
Une démonstration est un argument logique qui établit que le théorème est vrai.
- ➔ Théorème > Proposition
- ➔ Lemme (Sortir du théorème afin de rendre la démonstration + courte)
- ➔ Corollaire (Petite proposition qui suit le théorème)

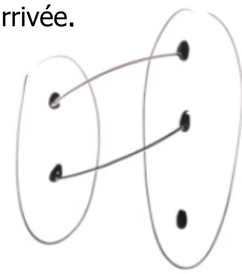
- **Démonstration directe**
  - A démontrer : P → Q
  - Méthode :
    - Si P est faux alors l'implication est toujours vérifiée, donc on peut assumer que P est vrai et en déduire Q
  - Exemples :
    - *« Un ensemble de n éléments contient 2^n sous-groupes »*
      n = 2
      $\{a,\ b\} => \emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\}$
    - *« Si n est un entier pair, alors n^2 est un entier pair »*
      n = pair et entier
      $\exists\ m\ entier => n = 2m$
      $n^2 = (2m).(2m) = 2(2m^2)$
    -
- **Démonstration par cas (combinaison de démonstrations directes)**
  - A démontrer : P ou Q → R
  - Méthode :
    - Démontrer que P → R & Q → R
    - On démontre tous les cas
  - Exemples :
    - *« Pour tout entier naturel a le produit $a(a^2-1)$ est un multiple de 3 »*
      $a(a^2-1) = a.(a-1).(a+1)$
      Ici nous avons 3 entier consécutifs donc il y en aura forcément 1 qui sera un multiple de 3.
      Si a est un multiple de 3 alors a peut s'écrire sous la forme a = 3a' pour un certain a', donc $a(a^2-1) = 3a'(a^2-1) = 3(a'(a^2-1))$ est un multiple de 3.
      Si a + 1 est un multiple de 3 alors il peut s'écrire sous la forme a + 1 = 3a', …
      Si a – 1 est un multiple de 3 alors il peut s'écrire sous la forme …
      Comme on est forcément dans un de ces 3 cas, le théorème est démontré pour tout a.
- **Démonstration par contraposition (démonstration directe après avoir « inversé »)**
  - A démontrer : p → q
  - Méthode :
    - Démontrer que $\neg q\ \rightarrow\ \neg p$
    - On suppose que la conclusion est fausse et on en conclut que l'un des hypothèses est fausse.
  - Exemples :
    - *« Soit n un entier et n² est pair alors n est pair »*
      On va montrer que si n est impair alors n² est impair
      $\neg(n\ pair) \rightarrow\ \neg(n^2\ pair)$
      n = impair & entier
      $\exists\ k => n = 2k+1$
      $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
      $4k^2 = pair\ /\ 4k = pair\ /{+1} = impair$

- **Démonstration par l'absurde (absurde sur une implication = contraposition)**
  - <u>A démontrer :</u> p → q
  - <u>Méthode :</u>
    - On va assumer le contraire de ce que l'on veut démontrer
      - → Afin d'aboutir à une CONTRADICTION
  - <u>Exemples :</u>
    - *« Il existe une infinité de nombres premiers »* (Euclide)
- **Démonstration par récurrence**
  - <u>Méthode (en 3 étapes) :</u>
    - P(0) : Démontrer que c'est vrai pour la première valeur
    - Hypothèse / P(n) = vrai : On considère que c'est vrai pour un certain n
    - Thèse : A part de P(n) = vrai on démontre pour P(n + 1)
  - On test donc toute l'infinité de possibilité
  - <u>Exemples :</u>
    - *« Pour tout entier n on a : 0 + 1 + … + n =* $\frac{n(n+1)}{2}$ *»*

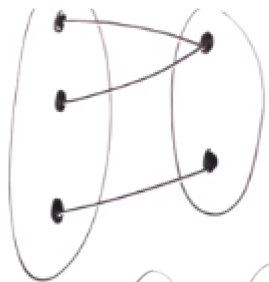
<u>Les fonctions :</u>



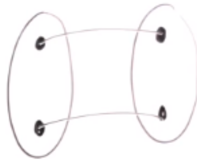
- **Définition d'une fonction (aussi appelée application) :**
  - Une élément a exactement 1 image
  - 1 input → 1 output
  - En ne prenant compte que de l'ensemble de départ. Il n'y a qu'un lien partant de chaque point.
  - Afin de savoir le type de celle-ci, il nous faut regarder l'ensemble d'arrivée.
- **Injective / Injection**
  - *« Une fonction f de A vers B est dites **injective** si les images par f de deux éléments distincts de A sont toujours distinctes. De manière équivalente, f : A → B est injective si :* $\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ *»*
  - Chaque élément dans l'ensemble d'arrivée a au maximum 1 relation



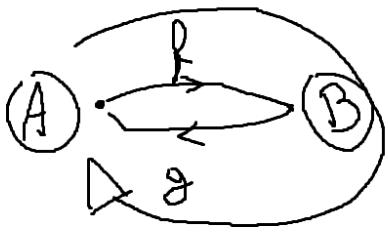
- **Surjective / Surjection**
  - *« Une fonction f de A vers B est dites surjective si tout élément de B est l'image par f d'au moins un élément de A. En d'autres termes, f : A → B est surjective si et seulement si :* $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$ *Cette condition se note également f(A) = B »*
  - Chaque élément dans l'ensemble d'arrivée a au minimum 1 relation



- **Bijective / Bijection**
  - *« Une fonction est dites bijective si elle est en même temps injective et surjective. »*
  - Chaque élément dans l'ensemble d'arrivée a exactement 1 relation
  - Possibilité de réaliser des paires de points



- **Réciprocité**
  - *« Soit f : A → B une fonction. Alors f est une bijection si et seulement si il existe une fonction g : B → A telle que g ∘ f est l'identité sur A et f ∘ g est l'identité sur B. »*



- L'ensemble des fonctions de A vers B est noté B^A. C'est-à-dire,
  - $B^A := \{f : A \to B\}$

<u>Cardinalité :</u>

- Cardinalité d'un ensemble = Le nombre d'élément dans un ensemble
- <u>Définition 1</u>
  - *« Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $[n] := \{1, \ldots, n\}$ »*
  - Donc $[1] = \{1\}$, $[2] = \{1, 2\}$, etc … De plus $[0] = \emptyset$
- <u>Définition 2</u>
  - *« Deux ensembles ont la même cardinalité, ou même taille (seulement pour les ensembles finis, s'il existe une bijection de l'un vers l'autre. Si A et B ont la même cardinalité, on écrit $|A| = |B|$. Un ensemble E est fini s'il a la même cardinalité que $[n]$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On note alors $|E| = n$, ou parfois $\#E = n$. »*
  - (Analogie 2 mains)
- Quelques questions :
  - Est-ce que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$?
    - Existe-t-il une bijection entre les deux ensembles ?
  - Est-ce que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$?
    - Oui
  - Est-ce qu'il existe un ensemble qui a une cardinalité + grande que $\mathbb{N}$?
    - Oui
  - Combien de nombres rationnels peut-on trouver entre deux nombres naturels consécutifs ?
    - Une infinité (L'infini dénombrable)
  - Peut-on construire une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$?
    - Comme ils ont la même cardinalité, OUI
- <u>Théorème de base</u>
  - *« Soient A, B deux ensembles finis, de même cardinalité, et $f : A \to B$ une fonction. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
    f est injective
    f est surjective
    f est bijective »
  -
- Principe d'addition

Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des ensembles finis disjoints, alors

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| .$$

- Produit cartésien

*Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des ensembles quelconques, alors leur **produit cartésien** est l'ensemble des k-uples $(a_1, \ldots, a_k)$ avec $a_i \in A_i$ pour $i \in [k]$. Il est noté $\prod_{i=1}^{k} A_i$, ou $A_1 \times \cdots \times A_k$. Donc,*

$$\prod_{i=1}^{k} A_i = A_1 \times \cdots \times A_k := \{(a_1, \ldots, a_k) \mid \forall i \in [k] : a_i \in A_i\} .$$

- Principe de multiplication

Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des ensembles finis, la cardinalité du produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_k$ est le produit des cardinalités des A_i pour $i \in [k]$:

$$\left|\prod_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i| .$$

- En fonction de l'énoncé, il faut choisir quel principe utilisé
  - ex. : Plats de restaurants
    - nb plats ? : Principe d'addition
    - nb combinaison plats ? : Principe de multiplication

Factorielles :

- Définition

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $n!$, la ***factorielle*** *de n, par*

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 .$$

  - $0! = 1$
- Proposition factorielles & bijections
  - *« Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n!$ donne le nombre de bijections d'un ensemble A vers un ensemble B, tous deux de taille n. (De même taille) »*

Démonstration : Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $A = B = [n]$. Construisons une bijection $f : [n] \to [n]$ en choisissant $f(1)$, puis $f(2)$, puis $f(3)$, etc.... Ayant déterminé $f(1), \ldots, f(i-1)$, nous pouvons choisir $f(i)$ arbitrairement dans l'ensemble $[n] \setminus \{f(1), \ldots, f(i-1)\}$. Cet ensemble ayant $n - i + 1$ éléments, il y a $n - i + 1$ façons de choisir $f(i)$ étant donné $f(1), \ldots, f(i-1)$. Par conséquent, les images de $1, \ldots, n$ par f peuvent être choisies de

$-(i-1)$

$f(1)$ = n possibilités

$f(2)$ = (n-1) poss.

$$\prod_{i=1}^{n} (n - i + 1) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$$

façons différentes. □

- Proposition factorielles & injections

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'injections d'un ensemble A de taille k vers un ensemble B de taille n, est égal à $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Notons qu'une injection f de $[k]$ dans $[n]$ peut s'interpréter comme une sélection ordonnée de k objets parmi n, sans répétition. Le i-ème objet sélectionné sera alors donné par $f(i)$.

- Ordres totaux
  - Le nombre d'ordres totaux sur un ensemble à n éléments est n!
  - (Nombre de possibilités sans répétition)
- La factorielle « explose » car même un ordinateur récent aura tout le mal du monde à énumérer tous les ordres totaux sur [n]. → Explosion combinatoire

Comptage :

- Nous allons considérer des problèmes qui implique le calcul du nombres de manières dont on peut choisir k objets parmi n. Il faut donc se poser les questions suivantes :
  - L'ordre dans lequel les objets sont choisi à de l'importance ou non ?
  - L'objet peut-il être choisi une seule fois ou plusieurs fois (avec ou sans répétition) ?

Arrangement :

- Avec répétition
  - Avec ordre et avec répétitions → n^k

Exemple 13

Considérons qu'on lance 4 fois un dé. Le premier lancé nous donne un des six nombres, tout comme le second lancé, le troisième, etc.... Donc le nombre de résultats est 6^4.

  - 6 == Nombre de possibilités
  - 4 == Nombre d'expériences
- Sans répétition
  - « Une arrangement simple de k objets parmi n, dans l'ordre et sans répétition des objets. Par le principe de multiplicité, il en existe n(n-1)(n-2)…(n-k+1) »

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

  - Si k = n alors il s'agit du nombre de permutations d'un ensemble à n éléments

<u>Permutations :</u>

Définition 9

Une bijection de $[1, n]$ dans lui-même est appelée une ***permutation*** *de $[1, n]$. L'ensemble des permutations de $[1, n]$ est notée S_n. C'est un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions de $[1, n]$ dans lui-même, il est donc fini.*
On note $n!$ le cardinal de S_n, c'est à dire le nombre de permutations de $[1, n]$.

- Cas particulier
  - Dans certains cas, on ne veut pas considérer toutes les permutations des éléments d'un ensemble X comme étant différentes.
  - Par exemple, si on regarde le mot « NON », on voit les deux « N » comme étant identique. Il existe donc seulement 3 manières d'arranger les lettres du mot NON au lieu de 3!

    Soient les éléments d'un ensemble X partitionnés en k sous-ensembles disjoints $X_1, X_2, \ldots, X_k$ avec $|X_i| = n_i$.

    - On souhaite compter le nombre de "types" de permutations des éléments de X, dans lesquelles 2 arrangements sont du même type si les termes correspondant viennent du même X_i.
    - On note A l'ensemble de toutes les permutations des éléments de X, et B l'ensemble de tous les différent "types" de permutations.
    - Si $\psi : A \to B$ est la fonction qui envoi toute permutation sur son type, alors $\forall b \in B : |\psi^{-1}(b)| = n_1!n_2! \cdots n_k!$
      On peut en déduire que :

$$|B| = \frac{|A|}{n_1!n_2! \cdots n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}.$$

- Exemple
  - Combien de permutations différentes peuvent être formées avec les lettres suivantes ? « WHANGAMOMONA »

12 lettres

WHANGAMOMONA

$$\frac{12!}{1!\,1!\,1!\,3!\,2!\,1!\,2!\,2!}$$

$$\Rightarrow \frac{12!}{3!\,2!\,2!\,2!}$$

<u>Coefficients binomiaux :</u>

- Définition et premières identités
  - Ici, l'ORDRE n'a PAS d'importance
  - → On choisit un sous-ensemble de k éléments

Définition 10

Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$, le ***coefficient binomial*** *$\binom{n}{k}$ (lire "n choose k") est égal au nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de n éléments. En particulier, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Théorème 22 (Symétrie)

Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Théorème 23 (Absorption/extraction)

Pour $n, k \in \mathbb{N}_0$ avec $k \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \, .$$

Théorème 24 (Addition/induction)

Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n > k > 0$, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \, .$$

Théorème 25 (Somme parallèle)

Pour $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geqslant k$:

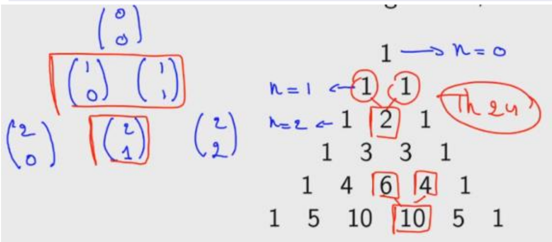
$$\sum_{n=k}^{m} \binom{n}{k} = \binom{m+1}{k+1} \, .$$

- Formule du binôme et Δ de Pascal

Théorème 27 (Formule du binôme de Newton)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \, .$$



  - Triangle infini qui affiche les coefficients binomiaux
  - Les différents théorèmes sont représentés dans ce triangle (th. 22, th. 24, …)
    - Les coefficients situés sur ses deux cotés sont tous égaux à 1
    - Chaque coefficient est la somme de deux coefficients situés juste au-dessus (th. 24)
    - Le triangle possède un axe de symétrie vertical passant par son milieu (th 22)
- Applications – Combinaisons avec répétitions

$$\binom{s+d-1}{d-1} = \binom{s+d-1}{s}$$

= nombre de manières de sélectionner s objets parmi d types d'objets

= nombre de manières de placer s objets (indistinguables) dans d cases

= nombre de manières d'arranger s objets et $d-1$ séparateurs

Coefficients multinomiaux :

- Définition et formule du multinôme

Définition 11

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k_1, \dots, k_t \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 + \cdots + k_t = n$, le ***coefficient multinomial***

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_t}$$

est le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble de taille n en t sous ensembles $S_1, \dots, S_t$ de tailles respectives $k_1, \dots, k_t$.

- « C'est le nombre de façons de répartir n objets (distinguables) dans t boites (distinguables) de telle sorte à placer k_i objets dans la $i^{\text{ème}}$ boite. »

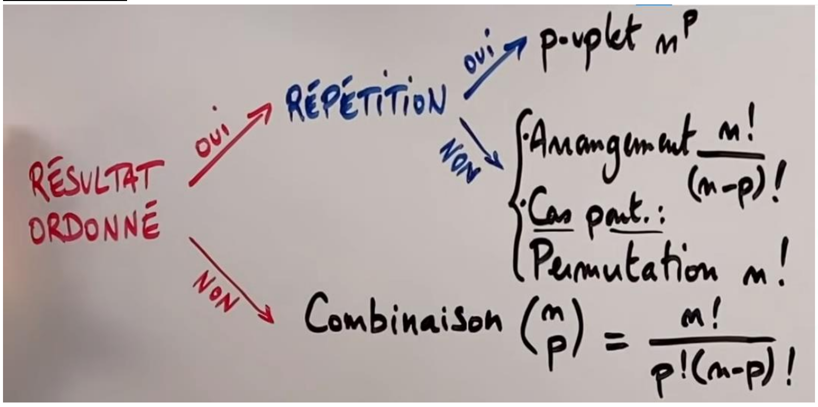
Théorème 33 (Formule du multinôme)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et tout $x_1, \dots, x_t \in \mathbb{R}$),

$$(x_1 + \cdots + x_t)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_t=n} \binom{n}{k_1, \dots, k_t} x_1^{k_1} \cdots x_t^{k_t},$$

où la somme est effectuée sur tous les tuples $(k_1, \dots, k_t) \in \mathbb{N}^t$ sommant à n.

Résumés :



sélection de k objets pris parmi n	ordonnée	non-ordonnée
sans répétition	$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$
avec répétition	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Exercice 1 : Combien de mots composés de 3 lettres de l'alphabet peut-on former ?
ORDRE COMPTE – RÉPÉTITION
NOMBRE DE TRIPLET d'un ensemble à 26 éléments **= 26^3**

Exercice 2 : On dispose de 26 jetons marqués des 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et sans remise 3 jetons. Combien de mots de 3 lettres peut-on former?
ORDRE COMPTE – PAS RÉPÉTITION
ARRANGEMENT de 3 éléments parmi 26 **= 26 x 25 x 24**

Exercice 3 : Quel est le nombre d'anagrammes du mot « MDR ».
ORDRE COMPTE – PAS RÉPÉTITION
ARRANGEMENT de 3 éléments parmi 3
= PERMUTATION à 3 éléments **= 3!**

Exercice 4 : On dispose de 6 jetons marqués des 6 couleurs différentes. On tire simultanément 3 jetons. Combien de possibilités existe-t-il ?
ORDRE NE COMPTE PAS
COMBINAISON de 3 éléments parmi 6 **= $\binom{6}{3}$**

Principe d'inclusion et d'exclusion :

Théorème 34 (Principe d'inclusion et d'exclusion)

Soient des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ et $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Pour $1 \leq k \leq n$, soient $\mathcal{P}_k = \{ J \subseteq I : |J| = k \}$.
Alors

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \sum_{J \in \mathcal{P}_k} \left| \bigcap_{i \in J} A_i \right| \right].$$

Principe des tiroirs :

Théorème 37

Si les éléments d'un ensemble de cardinalité N sont partitionnés en k sous-ensembles, alors l'un de ses sous-ensemble contient au moins $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ elements.
(Note $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier qui est plus grand ou égale à x.)

II. Graphes

Introduction :

> *« Un graphe est une structure discrète formé de points (appelé sommets ou nœud) et de lignes (appelé arêtes ou arcs) qui connecte les sommets entre eux. »*

- Graphe simple

Définition 1

*Le **graphe** $G = (V, E)$ **simple** est la donnée du couple (V, E), avec V un ensemble non vide (fini ou infini) et E un ensemble non-ordonné de paires d'éléments distinct de V.*

*Les éléments de V sont appelés les **sommets** (ou noeuds) de G. Les éléments de E sont appelés les **arêtes** (ou arcs) de G.*

Si V est fini, on parlera de graphe fini.

  - → Graphe non-orienté / non-dirigé
  - Arrête $\{v_1, v_2\}$ → Arrête qui va de v1 à v2 ou de v2 à v1 (pas de distinction)

- Multi-graphe

Définition 2

*Un **multi-graphe** $G = (V, E)$ consiste d'un ensemble de sommets V ; d'un ensemble E d'arêtes, et une fonction de E dans $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Les arêtes e_1 et e_2 sont appelés des arêtes multiples ou parallelles si $f(e_1) = f(e_2)$*

*Le multi-graphe $G = (V, E)$ est **fini** si V et E sont finis. (En effet, dans le cas des multi-graphes, supposer V fini n'implique pas que E soit fini.)*

  - Si plusieurs arêtes relient les même sommets

- P-graphe

Définition 3

*Soit $p \geq 1$. Un **p-graphe** est un multi-graphe $G = (V, E)$ pour lequel toute arête de E est répétée au plus p fois. En particulier, un 1-graphe est un graphe simple.*

- Pseudo-graphe / boucle

Définition 4

*Un **graphe** $G = (V, E)$ (ou "pseudo-graphe") consiste en un ensemble de sommets V ; un ensemble E d'arêtes, et une fonction de E dans $\{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$. Une arête est une **boucle** si $f(e) = \{u, u\}$*

- RECAP
  - Graphe / pseudo-graphe = tout
  - Multi-graphe = graphe – boucle
  - Graphe simple = graphe – boucle – arêtes multiples

- Graphe dirigé

Définition 5

*Le **graphe dirigé** $G = (V, E)$ est la donnée du couple (V, E), avec V un ensemble (fini ou infini) et E une partie de $V \times V$ (i.e., une relation sur V).*

Si V est fini, on parlera de graphe dirigé fini (en particulier, E est alors fini et contient au plus $|V|^2$ arêtes).

Un couple est une paire ordonnée. On distingue d'ailleurs les notations (x, y) (couple) et $\{x, y\}$ (paire) .

  - Couple = Paire ordonnée
  - P-graphe dirigé = Pareil que non-dirigé (boucle mais pas arêtes multiples)
    - Pas deux arêtes dans la même direction

- Multi-graphe dirigé

Définition 6

*Un **multi-graphe dirigé** $G = (V, E)$ consiste en un ensemble de sommets V et l'ensemble d'arêtes E est un multi-ensemble. Autrement dit, il peut exister plus d'une arête reliant deux sommets donnés.*

Type	Edges	Multiple Edges Allowed?	Loops Allowed?
Simple graph	Undirected	No	No
Multigraph	Undirected	Yes	No
Pseudograph	Undirected	Yes	Yes
Directed graph	Directed	No	Yes
Directed multigraph	Directed	Yes	Yes

Terminologie et familles de graphes :

- Adjacence et incidence

Définition 7

Deux sommets u et v d'un graphe (ou pseudo graphe) G non-dirigé sont appelé ***adjacent*** *(ou "voisins") dans G si $\{u, v\}$ est une arête de E. L'ensemble des voisins de v se note $\nu(v)$. Deux arêtes sont* ***adjacentes*** *si elles ont au moins une extrémité en commun.*

Une arête $e = \{u, v\}$ est appelée ***incidente*** *aux sommets u et v. (on dit parfois que e "connecte" u et v). Les sommets u et v sont appelés les extremités de l'arête $\{u, v\}$.*

- Degré de sommet

Définition 8

Dans un graphe le nombre d'arêtes incidentes au sommet v est le ***degré*** *de v (noté $\deg(v)$). On suppose en outre que les boucles apportent une double contribution au degré d'un sommet.*
L'ensemble des arêtes incidentes à v se note $\omega(v)$. Il est clair que, dans un graphe simple, $\deg(v) = |\omega(v)|$.

Définition 9

Un sommet de degré 0 est appelé ***isolé****, car il n'est adjacent a aucun sommet.*

Théorème 16

Un graphe (non dirigé) possède une nombre paire de sommets de degré impair.

- Handshaking theorem

Théorème 14 (The Handshaking Theorem)

Soit un (multi) graphe $G = (V, E)$,alors

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

- Adjacence et incidence dans les graphes dirigés

Définition 10

Soit $(u, v) \in E$ une arête d'un graphe dirigé $G = (V, E)$, on dit que u est adjacent à v et v est adjacent à u.

On dit que e est une arête sortante de u ou encore que e est une arête incidente à u vers l'extérieur (resp. une arête entrante dans v ou encore que e est une arête incidente à v vers l'intérieur).

- Degré de sommet dans les graphes dirigés

Définition 11

L'ensemble des arêtes sortantes de v est noté $\omega^+(v)$ et l'ensemble des arêtes entrantes dans v est noté $\omega^-(v)$.
L'ensemble des arêtes incidentes à un sommet v est $\omega(v) := \omega^+(v) \cup \omega^-(v)$.
On définit le demi-degré entrant (resp. demi- degré sortant) d'un sommet v par $d^-(v)$, c'est-à-dire le nombre d'arêtes dirigés "vers" le sommet v, (et du demi-degré sortant de ce sommet $d^+(v)$, c'est-à-dire le nombre d'arêtes "sortant" de v).

Définition 12

On a $\deg(v) = d^+(v) + d^-(v)$: le degré du sommet est la somme du degré sortant et du degré entrant.
L'ensemble des successeurs d'un sommet v est l'ensemble $succ(v) = \{s_1, ..., s_k\}$ des sommets s_i tels que $(v, s_i) \in \omega^+(v)$, i.e., $(v, s_i) \in E$. De manière analogue, l'ensemble des prédécesseurs d'un sommet v est l'ensemble $pred(v) = \{s_1, ..., s_k\}$ des sommets s_i tels que $(si, v) \in \omega^-(v)$, i.e., $(s_i, v) \in E$.

Enfin, l'ensemble des voisins de v est simplement $\nu(v) = pred(v) \cup succ(v)$. Si u appartient à $\nu(v)$, on dit que u et v sont des sommets voisins ou adjacents.

- Autres définitions

Théorème 18

Soit $G = (V, E)$ un graphe dirigé, alors

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = | E | .$$

Définition 13

*Un graphe **régulier** est un graphe où tous les sommets ont le même nombre de voisins (c'est-à-dire le même degré ou valence). Un graphe régulier dont les sommets sont de degré k est appelé un graphe k-**régulier** (ou graphe régulier de degré k).*

Définition 14

Le degré maximal d'un graphe G, noté $\Delta(G)$, et le degré minimal de ce graphe, noté $\delta(G)$, sont respectivement le maximum et le minimum des degrés de ses sommets. Dans un graphe régulier, tous les sommets ont le même degré, et on peut donc parler du degré du graphe.

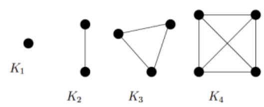
  - P-graphe → Au plus de degré p
  - K-régulier → Exactement de degré k

<u>Familles de graphes :</u>

- Graphe sous-jacent
  - Graphe dirigé mais on ignore les flèches
- Graphe complet

Définition 15

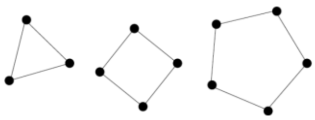
*Le **graphe complet** sur n sommets, noté K_n, est le graphique simple qui contient exactement une arête entre chaque paire de sommets distincts.*



  - $K_n = |v|$
  - Tous les sommets sont reliés entre eux.
- Graphe cyclique

Définition 16

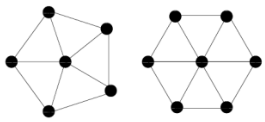
*Le graphe de **cyclique** C_n, $n \geq 3$, est constitué de n sommets $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et arêtes $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$ et $\{v_n, v_1\}$.*



- Graphe roue

Définition 17

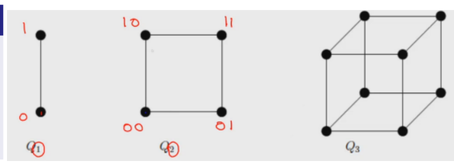
*Nous obtenons le **graphe roue** W_n en ajoutant un sommet au cyclique C_n, pour $n \geq 3$, et en connectant ce nouveau sommet à chacun des n sommets existant de C_n avec des nouvelles arêtes .*



- Graphe n-cube

Définition 18

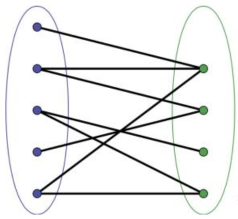
*Le n-**cube** noté Q_n avec $n \geq 1$, est le graphe qui a des sommets représentant les chaînes de 2^n bits de longueur n. Deux sommets sont adjacents si et seulement si les chaînes de bits qu'ils représentent diffèrent d'exactement un bit.*

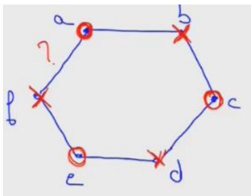


- Graphe biparti

Définition 19

*Un graphe simple G est appelé **graphe biparti** si son ensemble de sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints non-vide V_1 et V_2 de telle sorte que chaque arête du graphe connecte un sommet dans V_1 et un sommet dans V_2 (de sorte qu'aucune arête de G ne relie deux sommets du même sous-ensemble).*





- Graphe biparti complet

Définition 20

Le graphe biparti complet $K_{m,n}$ est le graphe qui a son ensemble de sommets partitionné en deux sous-ensembles de respectivement m et n sommets. Deux sommets sont adjacent si et seulement si l'un est dans le premier sous-ensemble et l'autre est dans le second sous-ensemble.

  - Graphe biparti avec chaque sommet de chaque côté qui se relie.

<u>Sous-graphes et union de graphes :</u>

- Sous-graphe

Définition 21

*Un **sous-graphe** d'un graphe $G = (V, E)$ est un graphe $H = (W, F)$ où $W \subseteq V$ et $F \subseteq E$. (Note : $(u, v) \in F \Rightarrow \{u, v\} \subseteq W$)*

  - Un sous-graphe est une « partie » du graphe

- Union de deux graphes

Définition 22

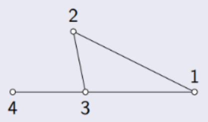
L'union de deux graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ avec comme ensemble des sommets $V_1 \cup V_2$ et arêtes $E_1 \cup E_2$. L'union des deux graphes est noté $G_1 \cup G_2$ (On assume $V_1 \cap V_2 = \emptyset$)

<u>Représentation de graphes :</u>

- Liste d'adjacences
  - *« Liste qui spécifie les sommets et leur connexion avec tout autre sommet du graphe »*

a	b c d
b	a c
c	a b
d	a

- Matrice d'adjacence



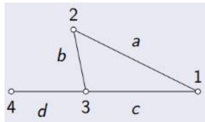
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Définition 23

*La **matrice d'adjacence** d'un graphe est une matrice A de taille $n \times n$ (avec n le nombre de sommets du graphe) telle que A_{ij} correspond au nombre d'arêtes qui sont associés au couple (v_i, v_j).*

  - i → ligne
  - j → Colonne
  - Graphes non-dirigés → Matrice symétrique
  - Graphe simple → Que des 0 & 1

- Matrice d'incidence



$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Définition 24

*Pour un graphe (non-dirigé) donné ayant n sommets et m arêtes, sa **matrice d'incidence** M est une matrice $n \times m$ défine par :*

$$M_{ij} = 1 \text{ si l'arête } e_j \text{ contient le sommet } v_i$$

et

$$M_{ij} = 0 \text{ si l'arête } e_j \text{ ne contient pas le sommet } v_i .$$

  - Seulement 0 & 1
  - Ligne = Un sommet
  - Colonne = Une arête

Chemins et circuits :

- Chemin

Définition 25

*Dans un graphe non-orienté, un **chemin** de longueur n allant du sommet u au sommet v, où n est un entier positif, est une séquence des arêtes $e_1, \ldots, e_n$ du graphe tel que $f(e_1) = x_0, x_1, f(e_2) = x_1, x_2, \ldots, f(e_n) = x_{n-1}, x_n$, où $x_0 = u$ et $x_n = v$.*

Lorsque le graphe est simple, on note ce chemin par sa séquence de sommets $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (étant donné que l'énumération de ces sommets détermine un chemin unique).

- Circuit (ou cycle)

Définition 26

*Le chemin est un **circuit (ou cycle)** s'il commence et se termine dans un même sommet, c'est-à-dire si $u = v$.*

- Chemin et circuit simple

Définition 27

*Un chemin ou un circuit est **simple** s'il ne contient pas la même arête plus d'une fois.*

Définition 28

La longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes du chemin.

Connectivité :

- Graphe connexe

Définition 29

*Un graphe non-dirigé est appelé **connexe** s'il existe un chemin entre chaque paire de sommets distincts du graphe.*

Théorème 36

Dans un graphe connexe et non-dirigé il existe un chemin simple entre chaque paire de sommets distincts.

- Composantes connexes

Définition 30

*Un graphe non connexe est l'union de deux ou plus sous-graphes connectés, chaque paire de ses sous-graphes n'ayant aucun sommet en commun. Ces sous-graphes connectés disjoints sont appelés les **composantes connexes** du graphe.*

- Points d'articulations

Définition 31

*Il arrive que la suppression d'un sommet et toutes les arêtes incidentes avec ce sommet crée un sous-graphe avec plus de composantes connexe que dans le graphe d'origine. Ces sommets sont appelés **points d'articulations**. L'enlèvement d'un point d'articulation d'un graphe connexe produit un sous-graphe ce n'est plus connexe.*

*De manière analogue, une arête dont la suppression produit un graphe avec plus de composantes connexes que le graphe d'origine est appelé un **pont**.*

Multigraphe dirigé :

Définition 32

*Dans un multigraphe dirigé, un **chemin** de longueur n, où n est un entier positif, de u à v est une séquence d'arêtes $e_1, e_2, \ldots, e_n$ du graphe tel que $f(e_1) = (x_0, x_1), f(e_2) = (x_1, x_2), \ldots, f(e_n) = (x_{n-1}, x_n)$, où $x_0 = u$ et $x_n = v$.*

Quand il n'y a pas d'arêtes multiples dans le graphe, ce chemin est désigné par sa séquence de sommets $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- Circuit

Définition 33

*Le chemin est un **circuit (ou cycle)** s'il commence et se termine dans un même sommet, c'est-à-dire si $u = v$.*

- Chemin / circuit simple

Définition 34

*Un chemin ou circuit est appelé **simple**, s'il ne contient pas plus d'une fois la même arête.*

- Fortement connexe

Définition 35

*Un graphe dirigé est **fortement connexe** s'il existe un chemin de a vers b et de b vers a, pour tout sommet a et b du graphe.*

- Faiblement connexe

Définition 36

*Un graphe dirigé est **faiblement connexe** s'il existe un chemin entre deux sommets quelconques du graphe sous-jacent.*

Théorème 41

Soit $G = (V, E)$ un graphe dirigé.

1. *Chaque sommet est fortement connexe à lui-même.*
2. *Soit $u, v \in V$. Si u est fortement connexe à v alors v est fortement connexe à u.*
3. *Soit $u, v, w \in V$. Si u est fortement connexe à v et v est fortement connexe à w alors u est fortement connexe à w.*

Théorème 42

Soit G un graphe avec A sa matrice d'adjacence avec les sommets ordonné comme suit $v_1, v_2, \dots, v_n$ (graphes avec des arêtes dirigées ou non, des arêtes multiples et boucles)
Le nombre de chemins différents de longueur r de v_i à v_j, où r est un entier positif, égal à la (i, j) ème entrée de A^r.

Euler :

- Chemin et circuit d'Euler

Définition 37

*Un **circuit d'Euler** dans un graphe G est un circuit simple contenant chaque arête de G. Un **chemin d'Euler** dans G est un chemin simple contenant chaque arête de G.*

Théorème 48

Un multigraphe connexe a un circuit d'Euler si et seulement si chacun de ses sommets est de degré pair.

Théorème 50

Un multigraphe connexe possède un chemin d'Euler mais pas un circuit d'Euler si et seulement si il a exactement deux sommets de degré impair.

Isomorphismes de graphes :

Définition 38

*Les graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont **isomorphes** s'il existe une fonction f bijective de V_1 à V_2 avec la propriété que pour tout sommets a et b dans V_1 les sommets sont adjacents dans G_1 si et seulement si $f(a)$ et $f(b)$ sont adjacent dans G_2. Une telle fonction f s'appelle un isomorphisme.*

- Propriétés invariantes
  - Avoir le même nombre de sommet
  - Avoir le même nombre d'arêtes
  - Les degrés des sommets correspondent
  - Même matrice d'adjacence
  - Circuits simples de même longueur
  - ➔ ! Pas forcément isomorphes (cela élimine juste les non-isomorphe)
- Chemins et isomorphisme
  - Si bijection puis même matrice d'adjacence = WIN

III. Relations de récurrence

IV. Fonctions génératrices

V. Codes