# Calculabilité

## TP8

Y. Deville
C-H. Bertrand Van Ouytsel - V. Coppé - A. Gerniers
N. Golenvaux - M. Parmentier

Avril 2021

# Questions du test

1. En logique des propositions, si on se limite à deux variables propositionnelles $A$ et $B$, il n'est possible de construire que 20 formules :
   $A$, $B$, $\neg A$, $\neg B$, $(A \vee A)$, $(B \vee B)$, $(A \vee B)$, $(B \vee A)$, $(A \wedge A)$, $(B \wedge B)$, $(A \wedge B)$, $(B \wedge A)$, $(A \Rightarrow A)$, $(B \Rightarrow B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(B \Rightarrow A)$, $(A \Leftrightarrow A)$, $(B \Leftrightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $(B \Leftrightarrow A)$

   **Réponse :** Faux, on peut construire les règles de création de formules sur des formules non atomiques pour créer des formules plus complexes. Exemple : $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

# Questions du test

2. Pour un choix fini et fixé de variables propositionnelles $A, B, C, D, E, F$, l'ensemble des chaînes de caractères construites à partir des symboles $A, B, C, D, E, F, (, ), \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ qui sont des formules de la logique des propositions est un ensemble récursif.

   **Réponse :** Vrai, voici un algorithme qui prend en entrée une chaîne de caractères et qui décide s'il s'agit d'une formule valable :

$$P(c) \equiv \left[\begin{array}{l} n = \text{longueur de la chaine de caractères } c \\ L = \text{liste qui contient toutes les formules d'une} \\ \qquad \text{longueur} < n \text{ qu'il est possible de construire} \\ \qquad \text{à partir des variables que l'on retrouve dans } c \\ \texttt{if } c \texttt{ in } L : \\ \quad \texttt{return } 1 \\ \texttt{else} : \\ \quad \texttt{return } 0 \end{array}\right.$$

# Questions du test

3. Avec l'interprétation ci-dessous, la formule $(((A \Rightarrow B)) \Rightarrow A)$ est fausse.

$$A \text{ : vrai, } B \text{ : faux}$$

**Réponse :** Faux, si $A$ est vrai et $B$ est faux, alors $(A \Rightarrow B)$ est faux, donc $(((A \Rightarrow B)) \Rightarrow A)$ est vrai.

# Questions du test

4. Une formule de la logique des propositions peut avoir une infinité de modèles différents.

   **Réponse :** Faux, un modèle d'une formule est une interprétation dans laquelle la formule est vraie. Or, pour une formule avec $n$ variables, il y a un nombre fini d'interprétations : $2^n$.

# Questions du test

5. Si une interprétation $I$ est un modèle pour une formule $p$ de logique des propositions, alors il existe nécessairement au moins une autre formule $q$ pour laquelle $I$ est également un modèle.

   **Réponse :** Vrai, si l'on construit une formule $q$ comme une disjonction dont l'une des propositions est la formule $p$, la formule $q$ sera également vraie pour l'interprétation $I$.

# Questions du test

6. Toute tautologie est satisfaisable.

   **Réponse :** Vrai, par définition : une formule est une tautologie lorsqu'elle est vraie dans toutes les interprétations. Elle est donc satisfaisable.

# Questions du test

7. Si une formule $p$ de la logique des propositions est satisfaisable, alors la formule $\neg p$ ne l'est pas.

   **Réponse :** Faux, la formule $A$ est satisfaisable avec l'interprétation $A$ : vrai. La formule $\neg A$ est également satisfaisable avec l'interprétation $A$ : faux.

# Questions du test

8. Si on a deux formules $p$ et $q$ de la logique des propositions, alors au moins une des affirmations suivantes doit être vraie :

- $p \models q$
- $q \models p$
- $\neg p \models q$
- $q \models \neg p$
- $p \models \neg q$
- $\neg q \models p$
- $\neg p \models \neg q$
- $\neg q \models \neg p$

**Réponse :** Faux, soient les variables $A$ et $B$, si l'on pose $p = A$ et $q = B$, on peut trouver pour chaque affirmation une interprétation qui la rend fausse.

# Questions du test

9. La formule de la logique des propositions suivante est sous forme normale conjonctive :

$$(\neg A \vee B) \wedge (B \vee \neg C \vee (D \wedge A)) \wedge \neg(A \vee E)$$

**Réponse :** Faux, une formule est en forme normale conjonctive si elle est une conjonction de disjonctions de variables ou de leur négation. Il y a donc deux problèmes avec la formule donnée :

- la deuxième clause comprend un élément qui n'est pas un litéral
- il y a une négation devant la troisième clause

# Questions du test

10. La formule suivante est-elle satisfaisable ?

    $$(\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (A \vee B \vee C \vee \neg D)$$

    **Réponse :** Vrai, une interprétation valide est la suivante. On choisit $A$ : faux pour que les deux premières disjonctions soient vraies. On choisit $B$ : faux pour que les deux disjonctions suivantes soient également vraies. Pour que la dernière disjonction soit vraie, il suffit de prendre $C$ : vrai ou $D$ : faux.

# Question 1 du TP

**Question :** Formalisez les raisonnements suivants à l'aide de la logique des propositions, puis déterminez s'ils sont valides en vérifiant si les conclusions sont bien des conséquences logiques des prémisses.

1. Si je suis coupable, je dois être puni. Or, je dois être puni.
   Donc je suis coupable.
2. Si je suis coupable, je dois être puni. Or, je ne dois pas être puni.
   Donc je ne suis pas coupable.
3. Si je suis coupable, je dois être puni. Or, je ne suis pas coupable.
   Donc je ne dois pas être puni.

## Question 1 du TP

1. Si je suis coupable, je dois être puni. Or, je dois être puni. Donc je suis coupable.

**Réponse :** Associons la variable propositionnelle $A$ à l'affirmation "je suis coupable" et la variable propositionnelle $B$ à l'affirmation "je dois être puni".
Le raisonnement proposé correspond à affirmer que :
$(A \Rightarrow B) \wedge B \models A$ Or, l'interprétation qui rend $A$ fausse et $B$ vraie est telle que :

1. La prémisse $(A \Rightarrow B) \wedge B$ est vraie car cette interprétation rend $(A \Rightarrow B)$ vraie et elle rend $B$ vraie.
2. La conclusion $A$ est fausse.

Conclusion : on n'a **pas** $(A \Rightarrow B) \wedge B \models A$ et le raisonnement n'est pas valide.

$$((C \Rightarrow P) \wedge P) \Rightarrow C$$

| $C$ | $P$ | $C \Rightarrow P$ |
| --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |

$\rightarrow$ dans cette interprétatio la prémisse vraie mais conclusion fausse $\Rightarrow$ $\not\models$

# Question 1 du TP

2. Si je suis coupable, je dois être puni. Or, je ne dois pas être puni.
   Donc je ne suis pas coupable.

**Réponse :** Associons la variable propositionnelle $A$ à l'affirmation "je suis coupable" et la variable propositionnelle $B$ à l'affirmation "je dois être puni".
Le raisonnement proposé correspond à affirmer que :
$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \models \neg A$. L'interprétation qui rend $A$ fausse et $B$ fausse est telle que :

1. La prémisse $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B$ est vraie car cette interprétation rend $(A \Rightarrow B)$ vraie et elle rend $\neg B$ vraie.
2. La conclusion $\neg A$ est vraie.

Toute autre interprétation rend la prémisse fausse ! Conclusion :
$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \models \neg A$ et le raisonnement est valide.

$(C \Rightarrow P) \wedge \neg P \Rightarrow \neg C$

$C \quad P \qquad\qquad \neg C$

$\qquad\qquad\qquad 1$

$\underbrace{0 \quad 0}$

cas ou prémisse vraie

# Question 1 du TP

3. Si je suis coupable, je dois être puni. Or, je ne suis pas coupable.
   Donc je ne dois pas être puni.

**Réponse :** Associons la variable propositionnelle $A$ à l'affirmation "je suis coupable" et la variable propositionnelle $B$ à l'affirmation "je dois être puni".
Le raisonnement proposé correspond à affirmer que :
$(A \Rightarrow B) \wedge \neg A \models \neg B$ Or, l'interprétation qui rend $A$ fausse et $B$ vraie est telle que :

1. La prémisse $(A \Rightarrow B) \wedge \neg A$ est vraie car cette interprétation rend $(A \Rightarrow B)$ vraie et elle rend $\neg A$ vraie.
2. La conclusion $\neg B$ est fausse.

Conclusion : on n'a **pas** $(A \Rightarrow B) \wedge \neg A \models \neg B$ et le raisonnement n'est pas valide.

$$((c \Rightarrow p) \wedge \neg c) \Rightarrow \neg p$$

| $c$ | $p$ | $\neg c \vee p$ | $(\neg c \vee p) \wedge \neg c$ | $\neg p$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$\Rightarrow$ pas de conséquence logique

# Question 2 du TP

**Question :** Voici quelques exemples de tautologies qui sont si importantes (d'une manière ou d'une autre) qu'elles portent un nom. En construisant les tables de vérités de ces formules, vérifiez qu'il s'agit bien de tautologies.

1. Principe du tiers exclu : $(A \vee \neg A)$
2. Loi de Morgan : $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
3. Contraposition : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
4. Syllogisme : $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

# Question 2 du TP

1. Principe du tiers exclu : $(A \vee \neg A)$

**Réponse :** Pour construire la table de vérité, on considère les différentes propositions impliquées dans la tautologie.

| $A$ | $\neg A$ | $(A \vee \neg A)$ |
|---|---|---|
| T | F | T |
| F | T | T |

Cette formule étant vraie dans toutes ces interprétations, il s'agit bien d'une tautologie.

# Question 2 du TP

2. Loi de Morgan : $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

**Réponse :**

| $A$ | $B$ | $(A \vee B)$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $(\neg A \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F | F | F |
| F | T | T | F | T | F | F |
| T | F | T | F | F | T | F |
| F | F | F | T | T | T | T |

| $\neg(A \vee B)$ | $(\neg A \wedge \neg B)$ | $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | F | T |
| F | F | T |
| T | T | T |

Cette formule étant vraie dans toutes ces interprétations, il s'agit bien d'une tautologie.

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) = g$$

| $A$ | $B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

↪ tautologie

# Question 2 du TP

3. Contraposition : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

**Réponse :**

| $A$ | $B$ | $(A \Rightarrow B)$ | $\neg B$ | $\neg A$ | $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F | T |
| F | T | T | F | T | T |
| T | F | F | T | F | F |
| F | F | T | T | T | T |

| $(A \Rightarrow B)$ | $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ | $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | T | T |
| F | F | T |
| T | T | T |

Cette formule étant vraie dans toutes ces interprétations, il s'agit bien d'une tautologie.

# Question 2 du TP

4. Syllogisme : $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

**Réponse :**

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \Rightarrow B)$ | $(B \Rightarrow C)$ | $(A \Rightarrow C)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T |
| F | T | T | T | T | T |
| T | F | T | F | T | T |
| F | F | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | F |
| F | T | F | T | F | T |
| T | F | F | F | T | F |
| F | F | F | T | T | T |

# Question 2 du TP

**Réponse (suite) :**

| $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ | $(A \Rightarrow C)$ | $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | T | T |
| F | T | T |
| T | T | T |
| F | F | T |
| F | T | T |
| F | F | T |
| T | T | T |

Cette formule étant vraie dans toutes ces interprétations, il s'agit bien d'une tautologie.

d) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

| A | B | C | $A \Rightarrow B$ | $\wedge$ | $B \Rightarrow C$ | $\Rightarrow$ | $A \Rightarrow C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Question 3 du TP

**Question :** Pour toute formule de la logique des propositions, il existe une formule équivalente sous forme normale conjonctive. La forme normale conjonctive n'utilise que trois opérateurs logiques : la conjonction, la disjonction et la négation. Est-il possible de sélectionner seulement deux opérateurs logiques de tel sorte que toute formule de la logique des propositions admette une formule équivalente qui ne fait intervenir que ces deux opérateurs logiques ? Justifier.

**Challenge :** est-il possible de s'en sortir avec un seul opérateur logique ? Sinon, serait-il possible de définir un nouveau opérateur logique qui conviendrait ?

# Question 3 du TP

**Question :** Pour toute formule de la logique des propositions, il existe une formule équivalente sous forme normale conjonctive. La forme normale conjonctive n'utilise que trois opérateurs logiques : la conjonction, la disjonction et la négation. Est-il possible de sélectionner seulement deux opérateurs logiques de tel sorte que toute formule de la logique des propositions admette une formule équivalente qui ne fait intervenir que ces deux opérateurs logiques ? Justifier.

**Réponse :** oui, on peut par exemple se limiter aux opérateurs logiques $\neg$ et $\Rightarrow$. En effet, pour toute formules $p$ et $q$ :

- $(p \vee q)$ est équivalent à $(\neg p \Rightarrow q)$
- $(p \wedge q)$ est équivalent à $\neg(p \Rightarrow \neg q)$
- $(p \Leftrightarrow q)$ est équivalent à $\neg((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p))$

Possible avec $\vee$ et $\neg$ par exemple

$A \wedge B$ devient $\neg(\neg A \vee \neg B)$

$A \Rightarrow B$ devient $\neg A \vee B$

1 opérateur : XOR ou XAND

# Question 4 du TP

**Question :** La conséquence logique peut-elle être vue comme une relation d'ordre sur les formules de la logique des propositions ? Plus précisément, est-elle :

1. Réflexive : $p \models p$ est-il vrai pour toute formule $p$ ?
2. Transitive : $p \models q$ et $q \models r$ implique-t-il $p \models r$ pour toutes formules $p, q, r$ ?
3. Symétrique : $p \models q$ et $q \models p$ implique-t-il $p = q$ pour toutes formules $p, q$ ?

# Question 4 du TP

1. Réflexive : $p \models p$ est-il vrai pour toute formule $p$ ?

**Réponse :** oui, car cela revient à se demander si pour toute formule $p$, la formule $(p \Rightarrow p)$ est une tautologie. Or, cette formule a deux interprétations possibles :

- Si $p$ est vrai, alors $(p \Rightarrow p)$ est vrai.
- Si $p$ est faux, alors $(p \Rightarrow p)$ est vrai.

La formule $(p \Rightarrow p)$ est donc bien une tautologie.

# Question 4 du TP

2. Transitive : $p \models q$ et $q \models r$ implique-t-il $p \models r$ pour toutes formules $p, q, r$ ?

**Réponse :** oui, car cela revient à se demander si pour toutes formules $p, q, r$, si $(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)$ sont des tautologies, alors $(p \Rightarrow r)$ est une tautologie. Il faut donc juste montrer qu'il n'existe pas d'interprétation qui rende $p$ vrai et $r$ faux. Soit une interprétation qui rende $p$ vrai. Puisque $(p \Rightarrow q)$ est une tautologie, une telle interprétation rend nécessairement $q$ vrai. Or, $(q \Rightarrow r)$ est une tautologie, donc une interprétation qui rend $q$ vrai doit nécessairement rendre $r$ vrai également. En conclusion : toute interprétation qui rend $p$ vrai rend obligatoirement $r$ vrai et il n'existe donc pas d'interprétation qui rende $p$ vrai et $r$ faux.

# Question 4 du TP

3. Symétrique : $p \models q$ et $q \models p$ implique-t-il $p = q$ pour toutes formules $p, q$ ?

**Réponse :** non si on considère l'égalité stricte (l'égalité syntaxique). Contre-exemple : $A \models \neg\neg A$ et $\neg\neg A \models A$ mais $A \neq \neg\neg A$.

Oui si on considère l'égalité dans le sens « être équivalent à ». En effet, si $p \models q$ et $q \models p$ sont des tautologies pour deux formules $p, q$, alors toute interprétation qui rend $p$ vrai rend $q$ vrai et toute interprétation qui rend $q$ vrai rend $p$ vrai. Une interprétation rend donc $p$ vrai si et seulement si elle rend $q$ vrai, autrement dit $p$ et $q$ sont équivalentes.

# Question 5 du TP

**Question :** Trouvez des formules sous forme normale conjonctive équivalentes aux formules suivantes :

1. $(A \wedge B) \vee C$
2. $\neg(\neg A \vee B) \vee (C \Rightarrow \neg D)$
3. $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)$

# Question 5 du TP

1. $(A \wedge B) \vee C$

   **Réponse :**

   - $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$ (distributivité)

2. $\neg(\neg A \vee B) \vee (C \Rightarrow \neg D)$

   **Réponse :**

   - $\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg C \vee \neg D)$ (élimination des implications)
   - $(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee \neg D)$ (loi de Morgan)
   - $(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee \neg D)$ (double négation)
   - $(A \vee \neg C \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg D)$ (distributivité)

3. $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)$

   **Réponse :**

   - $\neg(\neg\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee \neg C)$ (élimination des implications)
   - $\neg(A \vee B) \vee (\neg B \vee \neg C)$ (double négation)
   - $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \vee \neg C)$ (loi de Morgan)
   - $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C)$ (distributivité)

# Question 6 du TP

**Question :** En utilisant la règle de résolution, déterminez si les formules suivantes (qui sont déjà sous forme normale conjonctive) sont satisfiables :

1. $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge \neg B$
2. $A \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg C)$
3. $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

# Question 6 du TP

1. $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge \neg B$

**Réponse :**

- $$\frac{\begin{array}{c}(A \vee B)\\(\neg A \vee C)\end{array}}{(B \vee C)}$$
- $$\frac{\begin{array}{c}(\neg A \vee C)\\A\end{array}}{C}$$
- $$\frac{\begin{array}{c}(A \vee B)\\(\neg B)\end{array}}{A}$$
- $$\frac{\begin{array}{c}(\neg B)\\(B \vee C)\end{array}}{C}$$

Il n'y a plus d'application de la règle de résolution possible. La formule est donc satisfaisable.

# Question 6 du TP

2. $A \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg C)$

**Réponse :**

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ (\neg A \vee C) \end{array}}{C} \quad \frac{\begin{array}{c} (\neg A \vee C) \\ (\neg B \vee \neg C) \end{array}}{(\neg A \vee \neg B)} \quad \frac{\begin{array}{c} (\neg A \vee C) \\ (B \vee \neg C) \end{array}}{(\neg A \vee B)} \quad \frac{\begin{array}{c} (\neg B \vee \neg C) \\ (B \vee \neg C) \end{array}}{(\neg C \vee \neg C)}$$

On remarque à ce stade qu'on peut déjà obtenir une contradiction (une clause fausse) :

$$\frac{\begin{array}{c} C \\ (\neg C \vee \neg C) \end{array}}{\neg C} \quad \frac{\begin{array}{c} C \\ \neg C \end{array}}{\perp}$$

La formule n'est donc pas satisfaisable.

$$A \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg C)$$

$$\begin{array}{c} A \\ \neg A \vee C \\ \hline C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg B \vee \neg C \\ B \vee \neg C \\ \hline \neg C \vee \neg C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg A \vee C \\ \neg B \vee \neg C \\ \hline \neg A \vee \neg B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg A \vee C \\ B \vee \neg C \\ \hline \neg A \vee B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C \\ \neg C \vee \neg C \\ \hline \bot \end{array}$$

# Question 6 du TP

3. $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

**Réponse :**

$$\frac{\begin{array}{c}(A \vee B \vee C)\\(\neg A \vee \neg B \vee \neg C)\end{array}}{(B \vee C \vee \neg B \vee \neg C)} \quad \frac{\begin{array}{c}(A \vee B \vee C)\\(\neg A \vee \neg B \vee \neg C)\end{array}}{(A \vee C \vee \neg A \vee \neg C)} \quad \frac{\begin{array}{c}(A \vee B \vee C)\\(\neg A \vee \neg B \vee \neg C)\end{array}}{(A \vee B \vee \neg A \vee \neg B)}$$

Comme les trois clauses qu'il est possible de générer à partir de $(A \vee B \vee C)$ et $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$ sont des tautologies, on peut les ignorer.

Il n'y a alors plus d'application de la règle de résolution possible.

La formule est donc satisfaisable.

# Challenge

Expliquez comment vous pourriez utiliser un solveur SAT pour trouver une solution au jeu de sudoku suivant :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 9 | | | | 7 | | |
| | 4 | | 5 | | 9 | | 1 | |
| 3 | | | | 1 | | | | 2 |
| | 1 | | | 6 | | | 7 | |
| | | 2 | 7 | | 1 | 8 | | |
| | 5 | | | 4 | | | 3 | |
| 7 | | | | 3 | | | | 4 |
| | 8 | | 2 | | 4 | | 6 | |
| | | 6 | | | | 5 | | |

# Challenge

Soit $p$ une formule de la logique des propositions avec $k$ variables sous forme normale conjonctive avec $n$ clauses (sans répétition).

Discutez de la satisfiabilité de $p$ en fonction de $k$ et de $n$, du nombre minimal et du nombre maximal de littéraux différents dans chaque clause.