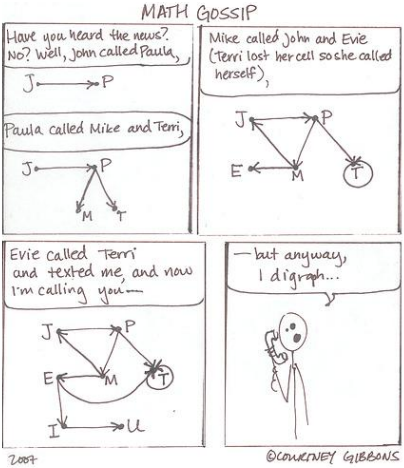
Chapitre II : Graphes



Graphes : Introduction

La théorie des graphes est (avec la combinatoire), une des pierres angulaires de ce qu'il est commun de désigner par mathématiques discrètes. Cependant, elle n'a reçu qu'assez tardivement une attention soutenue de la part de la communauté mathématique.

La théorie des graphes fut initié par Leonhard Euler. (mathématicien suisse 1707-1783). Il l'utilisa pour résoudre le problème connu des ponts de Königsberg.

Graphes : Introduction

On peut dire que les premiers développements majeurs en théorie des graphes datent du milieu de 20ième siècle (N. Biggs, C. Berge, W.T. Tutte, ...)

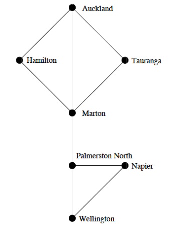
Ainsi, un des premiers ouvrages, si pas le premier, traitant de théorie des graphes “Theorie der endlichen und unendlichen Graphen” écrit par König remonte à 1936. Depuis cette époque, la théorie des graphes s’est largement développée et fait à présent partie du cursus standard.

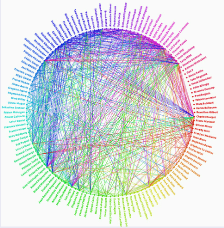
La théorie des graphes s’est avéré être un outil important pour résoudre des problèmes aussi complexes que variés : rechercher le plus court chemin, "networks" modellisés avec des graphes, graphes d’actionnariats en finance, biologie, sociologie, ...

Comme l'indique le titre de ce chapitre, nous nous intéressons aux graphes et on va vite s'apercevoir qu'il en existe de plusieurs types : simple, multi-graphe, di-graphe, hyper-graphe, arbre, ...

Un graphe est une structure discrète formé de points (appelé "sommets" ou "noeud") et de lignes (appelé "arêtes" ou "arcs") qui connecte les sommets entre eux.

Exemple 1





Définition 1

Le ***graphe*** $G = (V, E)$ ***simple*** *est la donnée du couple* (V, E)*, avec* V *un ensemble non vide (fini ou infini) et* E *un ensemble non-ordonné de paires d'éléments distinct de* V*.*

Les éléments de V *sont appelés les* ***sommets*** *(ou noeuds) de* G*.*
Les éléments de E *sont appelés les* ***arêtes*** *(ou arcs) de* G*.*

Si V *est fini, on parlera de graphe fini.*

Remarque :
Observons qu'il n'y a pas d'ordre au sein des paires appartenant à E. On dira parfois de **graphe non-orienté** ou de **graphe non-dirigé**.

Cette distinction va devenir rapidement indispensable, lorsqu'on introduira les graphes dirigés.

Définition 2

*Un **multi-graphe** $G = (V, E)$ consiste d'un ensemble de sommets V ; d'un ensemble E d'arêtes, et une fonction de E dans $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Les arêtes e_1 et e_2 sont appelés des arêtes multiples ou parallelles si $f(e_1) = f(e_2)$*

*Le multi-graphe $G = (V, E)$ est **fini** si V et E sont finis. (En effet, dans le cas des multi-graphes, supposer V fini n'implique pas que E soit fini.)*

En d'autres termes, c'est un graphe pour lequel il peut exister plus d'une arête reliant deux sommets donnés.

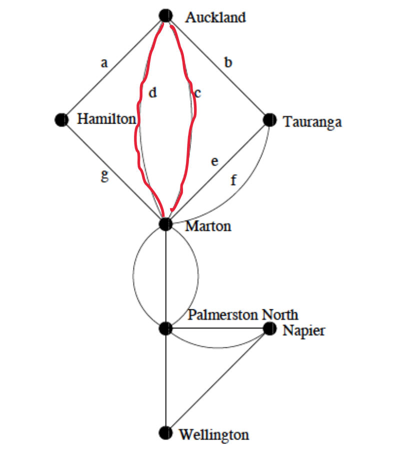
⚠ On ne peut donc pas utiliser une paire de sommet pour désigner une arête dans un graphe multiple.

Définition 3

*Soit $p \geq 1$. Un p-**graphe** est un multi-graphe $G = (V, E)$ pour lequel toute arête de E est répétée au plus p fois. En particulier, un 1-graphe est un graphe simple.*

Graphes : Introduction

Exemple 2 (multi-graphe)



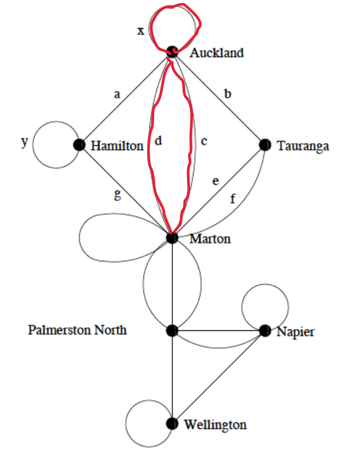
Un graphe peut contenir une ou des arêtes entre un sommet et lui-même. Elles sont appelées des boucles. Les définitions données pour graphe simple et multi-graphe n'acceptent pas de boucles, donc nous devons définir le "graphe".

Définition 4

Un ***graphe*** $G = (V, E)$ *(ou "pseudo-graphe") consiste en un ensemble de sommets* V *; un ensemble* E *d'arêtes, et une fonction de* E *dans* $\{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ *. Une arête est une* ***boucle*** *si* $f(e) = \{u, u\}$

pair non ordonnée de sommet

Exemple 3 (graphe)



En résumé :

- Le graphe(appelé parfois "pseudographe") est le type le plus général de graphes non-dirigés, parce qu'il peut contenir des boucles et des arêtes multiples.
- Le multi-graphe peut contenir des arêtes multiples mais pas de boucles.
- Le graphe simple est un graphe non-dirigé sans arêtes multiples, ni boucles.

Graphes : Introduction

Nous pouvons dire que $\{u, v\}$ représente une arête du graphe $G = (V, E)$ s'il existe un un e telle que $f(e) = \{u, v\}$. On interchangera souvent l'arête e et la paire (non-ordonnée) associée, sauf si l'identité des arêtes multiple est d'importance.

Graphes : Introduction

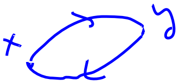
Définition 5

*Le **graphe dirigé** $G = (V, E)$ est la donnée du couple (V, E), avec V un ensemble (fini ou infini) et E une partie de $V \times V$ (i.e., une relation sur V).*

Si V est fini, on parlera de graphe dirigé fini (en particulier, E est alors fini et contient au plus $\mid V \mid^2$ arêtes).

Un couple est une paire ordonnée. On distingue d'ailleurs les notations (x, y) (couple) et $\{x, y\}$ (paire) .

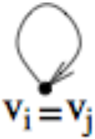
paire ordonnée



Graphes : Introduction

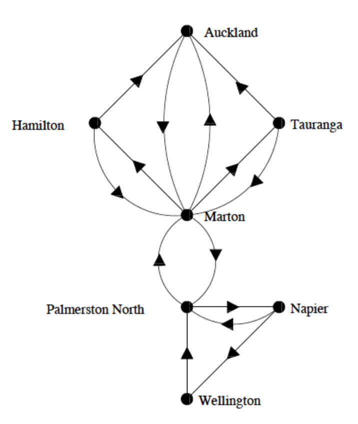
La définition d'un *p*-graphe est analogue à celle donnée dans le cas non-orienté.

Les boucles (un couple d'un élément avec le même élément) sont autorisées mais pas les arêtes multiples.



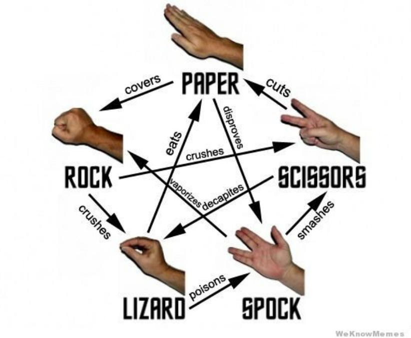
En anglais ils sont souvent appelés "di-graph".

Exemple 4



Graphes : Introduction

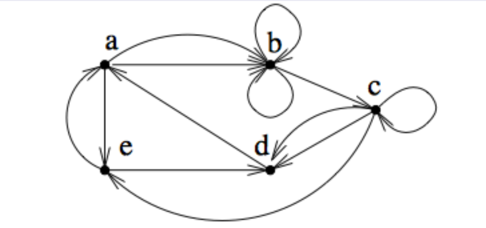
Exemple 5



Définition 6

*Un **multi-graphe dirigé** $G = (V, E)$ consiste en un ensemble de sommets V et l'ensemble d'arêtes E est un multi-ensemble. Autrement dit, il peut exister plus d'une arête reliant deux sommets donnés.*

Exemple 6

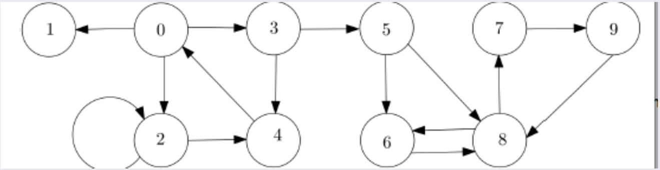


Exemple 7

Dessiner le graphe dirigé $G = (V, E)$ où
$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *et l'ensemble des arêtes (attention les paires sont "ordonnées")*
$\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 4)(3, 5)(4, 0), (5, 6)(5, 8),$
$(6, 8), (7, 9), (8, 6), (8, 7), (9, 8)\}$

Exemple 8

Dessiner le graphe dirigé $G = (V, E)$ *où* $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *et l'ensemble des arêtes (attention les paires sont "ordonnées")*
$\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 0), (5, 6), (5, 8), (6, 8), (7, 9), (8, 6), (8, 7), (9, 8)\}$



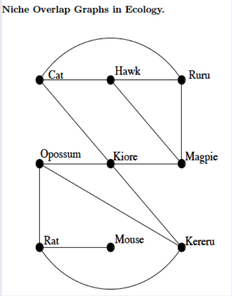
Résumé des différents types de graphes :

Type	Edges	Multiple Edges Allowed?	Loops Allowed?
Simple graph	Undirected	No	No
Multigraph	Undirected	Yes	No
Pseudograph	Undirected	Yes	Yes
Directed graph	Directed	No	Yes
Directed multigraph	Directed	Yes	Yes

La théorie des graphes et appliqué et développé dans une large variété des sujets et applications. La terminologie n'est donc pas totalement standard. Dans d'autres cours et sites il faut donc faire attention car les termes "graphes", "graphes simples", "multi-graphes", peuvent avoir des significations légèrement différentes.

Exemple 9 (compétition de différentes espèces dans un même écosystème)

Une arête non-dirigé connecte deux espèces en compétition pour la même alimentation. Ici c'est un écosystème dans une forêt Néo-zelandaise. On remarque que l'aigle et le chat sont en compétition, mais que l'opossum et la souris non.

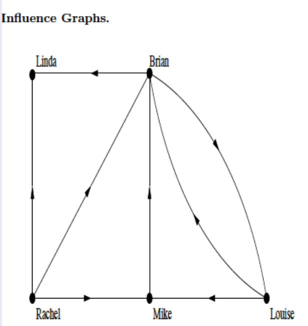


Graphes : Exemples

Exemple 10 (Graphe d'influence)

Lorsqu'on étudie les interactions d'un groupe on remarque que certains individus ont une influence sur d'autres. Dans l'exemple ci-dessous Rachel influence Brian, Mike et Linda, mais personne ne peut l'influencer. Aussi, Louise et Brian s'influencent mutuellement.

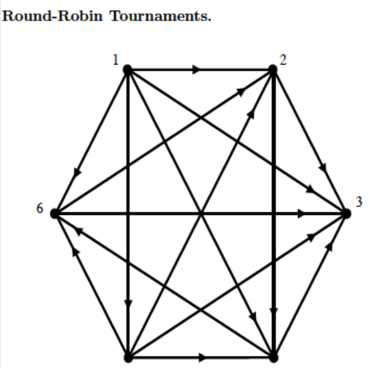
graphe
dirigé



Graphes : Exemples

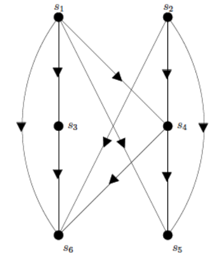
Exemple 11 (Round-Robin Tournaments)

Soit un tournoi ou chaque équipe joue une et une seule fois contre chaque autre équipe. Il peut être modélisé avec un graphe dirigé. Notons que l'équipe 1 est invaincue dans ce tournoi et que l'équipe 3 n'a aucune victoire a son actif.



Exemple 12 (Graphes de priorités)

Les programmes informatiques peuvent être exécutés plus vite en exécutant certaines tâches simultanément. Il est important de ne pas exécuter une tâche qui nécessite des résultats des tâches non encore exécutées. La dépendance de tâches sur les précédentes peuvent être représentées par un graphe orienté.
S1 : a=0 S2 : b=1 S3 : c=a+1 S4 : d=b+a S5 : e=d+1 S6 : f=c+d



Définition 7

*Deux sommets u et v d'un graphe (ou pseudo graphe) G non-dirigé sont appelé **adjacent** (ou "voisins") dans G si $\{u, v\}$ est une arête de E. L'ensemble des voisins de v se note $\nu(v)$. Deux arêtes sont **adjacentes** si elles ont au moins une extrémité en commun.*

*Une arête $e = \{u, v\}$ est appelée **incidente** aux sommets u et v. (on dit parfois que e "connecte" u et v). Les sommets u et v sont appelés les extremités de l'arête $\{u, v\}$.*

Graphes : Terminologie et familles de graphes

$\to$ degré = 3

Définition 8

*Dans un graphe le nombre d'arêtes incidentes au sommet v est le **degré** de v (noté $deg(v)$). On suppose en outre que les boucles apportent une double contribution au degré d'un sommet. L'ensemble des arêtes incidentes à v se note $\omega(v)$. Il est clair que, dans un graphe simple, $deg(v) = \mid \omega(v) \mid$.*

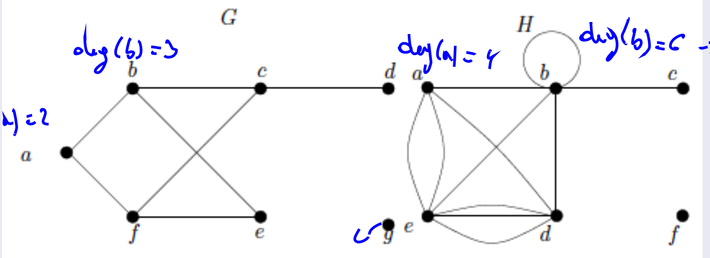
Ces notations sont bien évidemment transposable au cas orienté (voir plus tard).

Définition 9

*Un sommet de degré 0 est appelé **isolé**, car il n'est adjacent a aucun sommet.*

Exemple 13

Quels sont les degrés des sommets des graphes G et H ? Quels sont les sommets isolés ?



Sommet isolé

Le nom du théorème suivant vient du fait qu'une arête a deux extrémités tout comme une poignée de mains.

Théorème 14 (The Handshaking Theorem)

Soit un (multi) graphe $G = (V, E)$,alors

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Notons que le théorème reste valable s'il existe des arêtes multiples et/ou des boucles.

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

Démonstration Pour tout graphe $G = (V, E)$, chaque arête de E est incidente à deux sommets (parfois le même sommet deux fois). Chaque arête contribue donc doublement à la somme totale des degrés du graphe, une fois pour chacun des deux sommets. $\square$

On peut également faire la démonstration par récurrence.

Exemple 15

Combien d'arêtes y a-t-il dans un graphe qui possède 10 sommets chacun de degré 6 ?

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = 10.6 \Rightarrow |E| = 30$$

Théorème 16

Un graphe (non dirigé) possède une nombre paire de sommets de degré impair.

<u>Démonstration</u> Soit $G = (V, E)$ un graphe non dirigé. Soient $N \subset V$ l'ensemble des sommets de degré impair et $M \subset V$ l'ensemble des sommets de degré pair. On sait que $V = M \cup N$.

Selon le théorème de la poignée de main on sait que

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{n \in N} \deg(n) + \sum_{m \in M} \deg(m)$$

avec

$$\sum_{m \in M} \deg(m) = 2p$$

pour un $p \in \mathbb{N}$.
Donc

$$2(|E| - p) = \sum_{n \in N} \deg(n)$$

En d'autres termes : la somme des degrés des sommets d'ordre impair est paire.
Notons qu'une somme impaire de nombres impairs est toujours impaire et qu'une somme paire de nombres impairs est toujours paire. Ce qui implique que $\mid N \mid = 2q$ pour un $q \in \mathbb{N}$. $\square$

Graphes : Terminologie et familles de graphes

Voyons à présent la terminologie pour les graphes dirigés.

Définition 10

Soit $(u, v) \in E$ une arête d'un graphe dirigé $G = (V, E)$, on dit que u est adjacent à v et v est adjacent à u. arête = couple ordonné

On dit que e est une arête sortante de u ou encore que e est une arête incidente à u vers l'extérieur (resp. une arête entrante dans v ou encore que e est une arête incidente à v vers l'intérieur).

Définition 11

L'ensemble des arêtes sortantes de v *est noté* $\omega^+(v)$ *et l'ensemble des arêtes entrantes dans* v *est noté* $\omega^-(v)$.
L'ensemble des arêtes incidentes à un sommet v *est*
$\omega(v) := \omega^+(v) \cup \omega^-(v)$.
On définit le demi-degré entrant (resp. demi- degré sortant) d'un sommet v *par* $d^-(v)$*, c'est-à-dire le nombre d'arêtes dirigés "vers" le sommet* v*, (et du demi-degré sortant de ce sommet* $d^+(v)$*, c'est-à-dire le nombre d'arêtes "sortant" de* v*).*

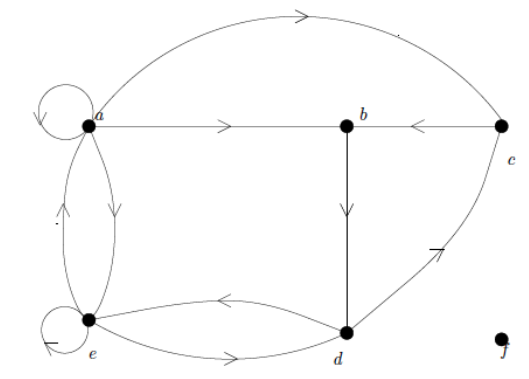
Définition 12

On a $\deg(v) = d^+(v) + d^-(v)$ *: le degré du sommet est la somme du degré sortant et du degré entrant.*
L'ensemble des successeurs d'un sommet v *est l'ensemble* $succ(v) = \{s_1, ..., s_k\}$ *des sommets* s_i *tels que* $(v, s_i) \in \omega^+(v)$*, i.e.,* $(v, s_i) \in E$*. De manière analogue, l'ensemble des prédécesseurs d'un sommet* v *est l'ensemble* $pred(v) = \{s_1, ..., s_k\}$ *des sommets* s_i *tels que* $(si, v) \in \omega^-(v)$*, i.e.,* $(s_i, v) \in E$*.*

Enfin, l'ensemble des voisins de v *est simplement* $\nu(v) = pred(v) \cup succ(v)$*. Si* u *appartient à* $\nu(v)$*, on dit que* u *et* v *sont des sommets voisins ou adjacents.*

Exemple 17

Trouver le degré entrant et sortant pour chaque sommet du graphe ci-dessous.

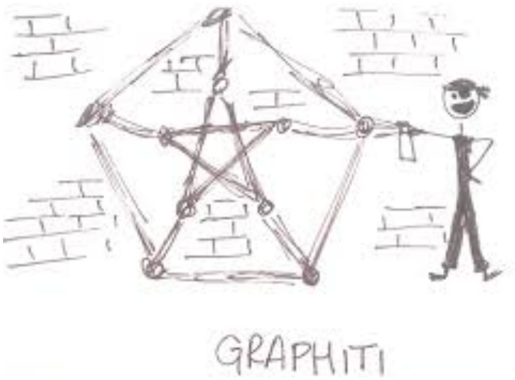


Théorème 18

Soit $G = (V, E)$ *un graphe dirigé, alors*

$$\sum_{v \in V} d^{+}(v) = \sum_{v \in V} d^{-}(v) = \mid E \mid .$$

Comme chaque arête à un sommet initial et terminal, la somme des degrés entrant et la somme des degrés sortant de tous les sommets du graphe sont égales. Chacune de ses deux sommes est égale au nombre d'arêtes dans le graphe.


GRAPHITI

Définition 13

*Un graphe **régulier** est un graphe où tous les sommets ont le même nombre de voisins (c'est-à-dire le même degré ou valence). Un graphe régulier dont les sommets sont de degré k est appelé un graphe k-**régulier** (ou graphe régulier de degré k).*

Définition 14

Le degré maximal d'un graphe G, noté $\Delta(G)$, et le degré minimal de ce graphe, noté $\delta(G)$, sont respectivement le maximum et le minimum des degrés de ses sommets. Dans un graphe régulier, tous les sommets ont le même degré, et on peut donc parler du degré du graphe.

Nous verrons que les graphes peuvent (en dehors des tours de magie) servir pour résoudre de nombreux problèmes, en voici quelques exemples supplémentaires :

- calculer le nombre de combinaisons possible entre deux villes dans un réseau aérien,
- déterminer si'l est possible de marcher le long de toutes les rue d'une ville sans devoir passer deux fois dans la même rue,
- trouver le nombre de couleurs nécessaire pour colorier une carte.
- ....

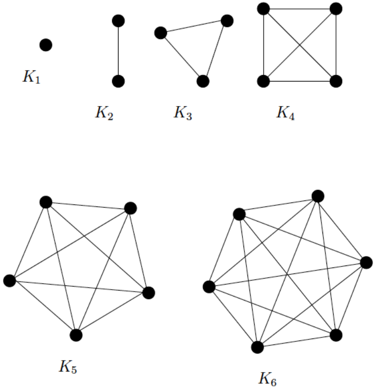
Beaucoup de propriété des graphes dirigés ne dépendent pas de la direction des arêtes, on peut dans ce cas les ignorer. Le graphe (non-dirigé) qui en résulte s'appelle le **graphe sous-jacent**. Un graphe et son graphe sous-jacent ont le même nombre d'arêtes.

Nous introduisons différentes classes de graphe simples. Ses graphes sont utilisés comme exemples et viennent d'applications diverses.

Graphes : Familles de graphes

Définition 15

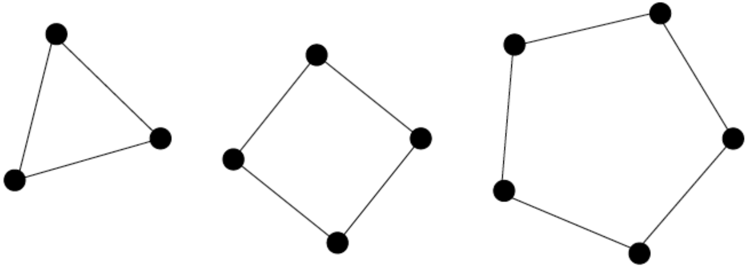
*Le **graphe complet** sur n sommets, noté K_n, est le graphique simple qui contient exactement une arête entre chaque paire de sommets distincts.*



Graphes : Familles de graphes

Définition 16

Le graphe de ***cyclique*** *C_n, $n \geq 3$, est constitué de n sommets $v_1, v_2, ..., v_n$ et arêtes $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, ..., \{v_{n-1}, v_n\}$ et $\{v_n, v_1\}$.*

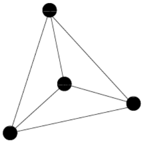


C_3 C_4 C_5

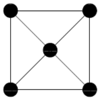
Graphes : Familles de graphes

Définition 17

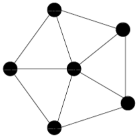
Nous obtenons le ***graphe roue*** *W_n en ajoutant un sommet au cyclique C_n, pour $n \geq 3$, et en connectant ce nouveau sommet à chacun des n sommets existant de C_n avec des nouvelles arêtes .*



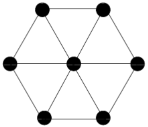
W_3



W_4



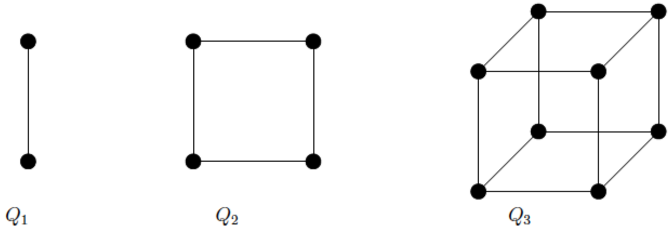
W_5



W_6

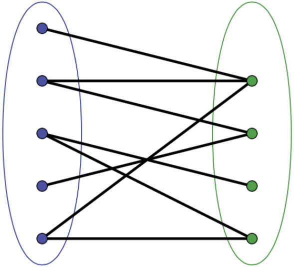
Définition 18

*Le n-**cube** noté Q_n avec $n \geq 1$, est le graphe qui a des sommets représentant les chaînes de 2^n bits de longueur n. Deux sommets sont adjacents si et seulement si les chaînes de bits qu'ils représentent diffèrent d'exactement un bit.*



Définition 19

Un graphe simple G est appelé ***graphe biparti*** *si son ensemble de sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints non-vide V_1 et V_2 de telle sorte que chaque arête du graphe connecte un sommet dans V_1 et un sommet dans V_2 (de sorte qu'aucune arête de G ne relie deux sommets du même sous-ensemble).*



Exemple 19

Montrer que C_6 est un graphe biparti.

Quels C_n sont des graphes biparti ? Expliquer pourquoi.

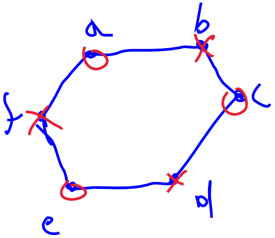
n pair

Exemple 20

Montrer que K_3 n'est pas un graphe biparti.

Quels K_n sont des graphes biparti ? Expliquer pourquoi.

C_6 graphe biparti



$V = \{a, b, c, d, e, f\}$

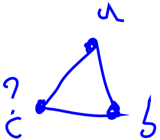
$V_1 = \{a, c, e\}$

$V_2 = \{b, d, f\}$

d'autres C_n qui sont des graphes bipartis

$\rightarrow \underbrace{C_n}_{\text{pair}}$ graphe biparti

K_3 pas biparti

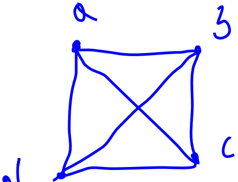


$V_1 = \{a, \to c \notin V_1$

$V_2 = \{b, \to c \notin V_2$

$\to$ pas biparti

? K_n



$V_1 = \{a, \to c, d \notin V_1$

$V_2 = \{b \to c, d \notin V_2$

$n \geq 3 \to$ pas graphe biparti

$n = 2$ K_2 a —— b

$\to K_2$ graphe biparti.

Exemple 21

Montrer que le graphe cyclique C_n est biparti si et seulement si n est pair.

$(\Leftarrow)$

$\Rightarrow$ <u>Démonstration</u> : Par l'absurde Montrons que si C_n est biparti alors n est pair. Supposons qu'un graphe cyclique C_n soit biparti avec n impair. On peut dés lors nommer les sommets de C_n comme $v_1, v_2; ..., v_n$ où v_{i-1} est adjacent à v_i pour $i = 2, 3, ..., n$ et v_n est adjacent à v_1. Comme C_n est biparti, on peut créer une partition des sommets en deux ensemble disjoints et non-vide U et V tel que chaque arête de C_n connecte un sommets de U et un sommet de V. On peut assumer, sans perte de généralité, que les sommets $v_1, v_3; ..., v_{n-2}$ sont dans U et les sommets $v_2, v_4, ..., v_{n-1}$ sont dans V, et il nous reste le sommet v_n.

$U = \{v_1, v_3, ..., v_{n-2}\}$ $\quad V = \{v_2, v_4, ..., v_{n-1}\}$

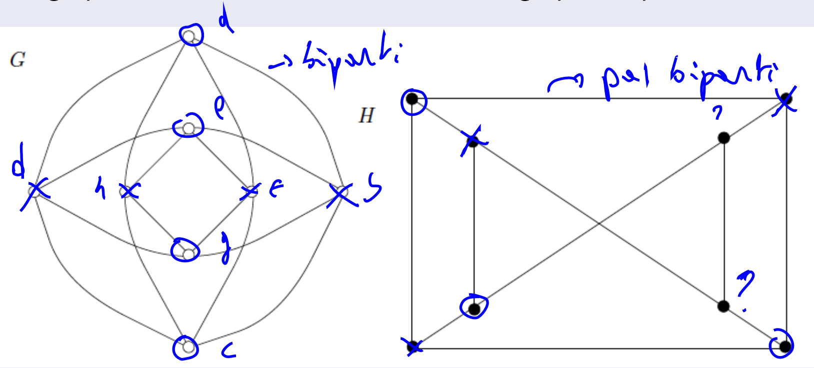
Graphes : Familles de graphes : Graphes bipartis

Ce sommet v_n est adjacent à v_1 et on sait que $v_1 \in U$, donc $v_n \notin U$. Mais en même temps, le sommet v_{n-1} est adjacent à v_n et on sait que $v_{n-1} \in V$, donc $v_n \notin V$. Ceci nous même à une contradiction et implique que si le graphe C_n est biparti, alors n est pair.

$\Leftarrow$ Montrons à présent que si n est pair, alors le graphe cyclique C_n est biparti. La démonstration est directe. Supposons que n est pair et nommons les sommets de C_n comme $v_1, v_2, ..., v_n$ où v_{i-1} est adjacent à v_i pour $i = 2, 3, ..., n$ et v_n est adjacent à v_1. On peut donc partitionner ces sommets en deux ensembles non-vide et distincts U et V, ou $U = \{v_1, v_3, ..., v_n\}$ et $V = \{v_2, v_4, ..., v_{n-1}\}$. On voit facilement (définition de C_n) que chaque arête de C_n connecte un sommets de U à un sommets de V, ce qui implique que C_n est biparti. $\square$

Exemple 22

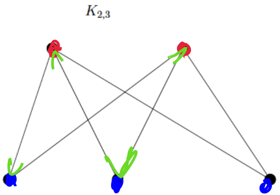
Les graphes G et H ci-dessous sont-ils des graphes bipartis ?

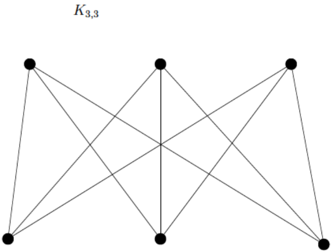


$V_1 = \{a, c, e, g\}$
$V_2 = \{b, d, f, h\}$

Définition 20

Le graphe biparti complet $K_{m,n}$ est le graphe qui a son ensemble de sommets partitionné en deux sous-ensembles de respectivement m et n sommets. Deux sommets sont adjacent si et seulement si l'un est dans le premier sous-ensemble et l'autre est dans le second sous-ensemble.





Parfois, nous n'avons besoin que d'une partie d'un graphe pour résoudre un problème. On peut alors éliminer les sommets non-nécessaire et les arêtes incidentes à ces sommets. Lorsque les arêtes et les sommets sont supprimés d'un graphe, sans supprimer les extrémités qui sont incidentes aux arêtes restantes, on obtient un graphe plus petit que le graphe d'origine.

Définition 21

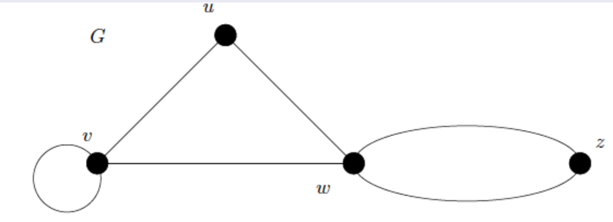
Un ***sous-graphe*** *d'un graphe* $G = (V, E)$ *est un graphe* $H = (W, F)$ *où* $W \subseteq V$ *et* $F \subseteq E$. *(Note :* $(u, v) \in F \Rightarrow \{u, v\} \subseteq W$*)*

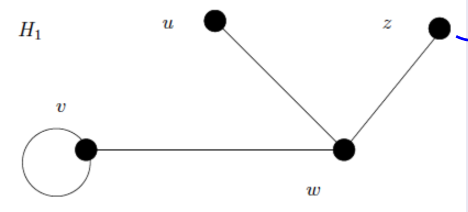
Remarque : Dans la définition du sous-graphe, on **doit** enlever toute arête dont un des sommets à été éliminé. Cela n'implique pas que d'autres arêtes pourraient ne pas être éliminé.

Par exemple pour graphe $G = (V, E)$ à pour sous-graphe $H = (V, \emptyset)$ (un graphe peu intéressant cela dit).

Exemple 23

Le(s)quel(s) des H_1, H_2 et H_3 sont des sous-graphes du graphe G ?

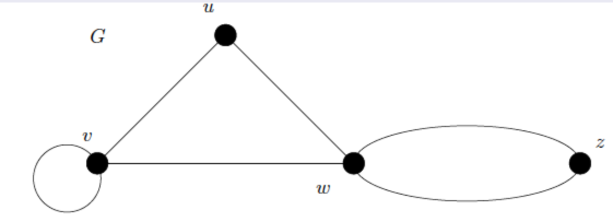


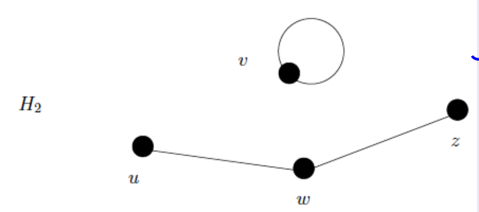


→ Sous-graphe

Exemple 24

Le(s)quel(s) des H_1, H_2 et H_3 sont des sous-graphes du graphe G ?

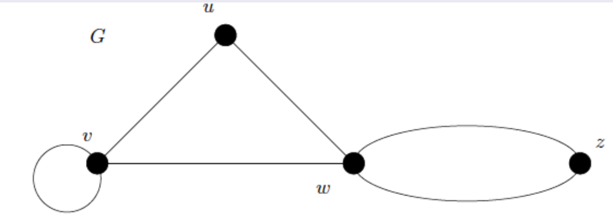


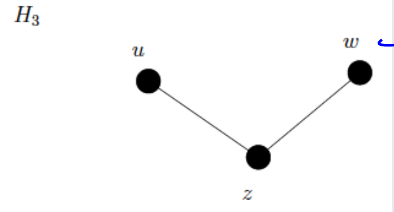


→ Sous-graphe

Exemple 25

Le(s)quel(s) des H_1, H_2 et H_3 sont des sous-graphes du graphe G ?





→ pas un sous-graphe (u-z)

Deux graphes ou plus peuvent être combinés de différentes manières. Le nouveau graphe qui contient tous les sommets et les arêtes de ces graphes est appelé l'union des graphes. On donne ici une définition formelle dans le cas de deux graphes simples.

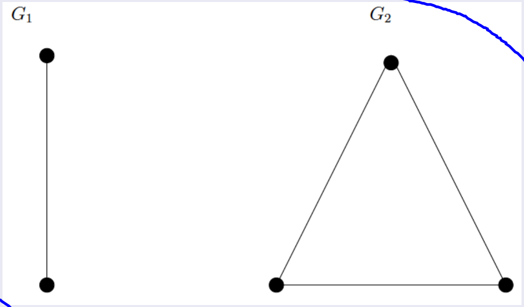
Définition 22

L'union de deux graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ *et* $G_2 = (V_2, E_2)$ *avec comme ensemble des sommets* $V_1 \cup V_2$ *et arêtes* $E_1 \cup E_2$*. L'union des deux graphes est noté* $G_1 \cup G_2$ *(On assume* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$*)*

Exemple 26

Quelle est l'union des deux graphes G_1 et G_2 ci-dessous ?

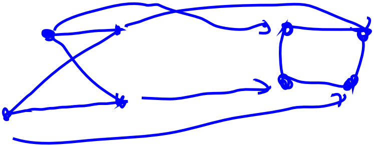
G



Représentation de graphes

On peut représenter des graphes de nombreuses manières. Il est important de trouver la représentation la plus utile pour le problème auquel on est confronté. On va voir plusieurs de ces représentations.

Il arrive que deux graphes aient exactement la même structure, en ce sens qu'il existe une bijection entre leurs ensembles de sommets, qui préserve les arêtes. Dans ce cas, on parlera d'isomorphisme. Déterminer si deux graphes sont isomorphes est un problème important de la théorie des graphes que nous étudierons dans cette section.



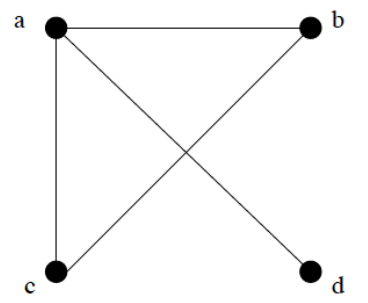
Une manière de représenter un graphe (sans arêtes multiples) créer une liste avec toutes les arêtes du graphe.

Une autre manière de représenter un graphe (sans arêtes multiples) consiste à utiliser une **liste d'adjacence**. C'est une liste qui spécifie les sommets et leur connection avec les tous autres sommets du graphe.

Représentation de graphes : Liste d'adjacente

Exemple 27

Utiliser la liste d'adjacence pour décrire le graphe simple ci-dessous.

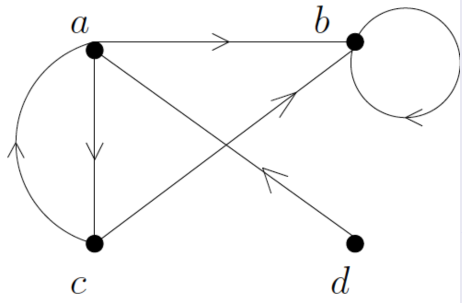


a	b c d
b	a c
c	a b
d	a

Représentation de graphes : Liste d'adjacente

Exemple 28

Représenter le graphe orienté ci-dessous en listant tous les sommets qui sont les sommets terminaux de des arêtes commençant dans chaque sommet du graphe.



terminaux

a	b c
b	b
c	a b
d	d

Sommet initial

Réaliser des algorithmes de graphes en utilisant la représentation des graphes par des listes d'arêtes, ou par des listes d'adjacences, peuvent être fastidieux s'il y a beaucoup d'arêtes dans le graphe. Afin de simplifier le calcul, les graphes peuvent être représentés en utilisant matrices.

Deux types de matrices couramment utilisées pour représenter les graphiques seront présentés ici. L'un est basé sur l'adjacente des sommets, et l'autre est basé sur l'incidence des sommets et des arêtes.

Représentation de graphes : Matrice adjacente

Définition 23

*La **matrice d'adjacence** d'un graphe est une matrice A de taille $n \times n$ (avec n le nombre de sommets du graphe) telle que A_{ij} correspond au nombre d'arêtes qui sont associés au couple (v_i, v_j).*

- La matrice est basé sur l'ordre choisi des sommets. Il existe donc $n!$ matrices différentes pour un graphe avec n sommets. (le nombre de manière d'arranger les n sommets).

n sommets

$$\overbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & A_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}}^{n \text{ sommets}} \to v_i$$

$$\downarrow$$

$$v_j$$

Représentation de graphes : Matrice adjacente

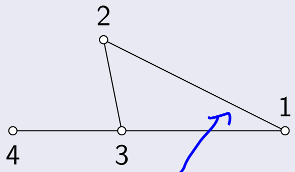
- Dans le cas d'un graphe non-dirigé on peut parler de paire $\{v_i, v_j\}$ pour l'entrée A_{ij} de la matrice. → pas de boucle
- Dans le cas d'un graphe simple, la matrice ne contient que des "0" et des "1" (des éléments de $\mathbb{Z}_2$). De plus comme un graphe simple ne contient pas de boucles chaque entrée $A_{ii} = 0$ pour tout $i = 1, 2, 3, ..., n$.

  $\{0,1\}$ " $\mathbb{Z}_2$ corps

- Pour tous les graphes non-dirigés (multi-graphes, simple, ...) la matrice d'adjacente est symétrique car $A_{ij} = A_{ji}$ pour tout i, j.

Exemple 29

Voici un graphe ainsi que sa matrice d'adjacence :



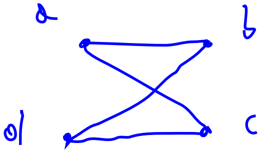
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Représentation de graphes : Matrice adjacente

Exemple 30

Dessiner un graphe qui à pour matrice d'adjacence la matrice suivante :

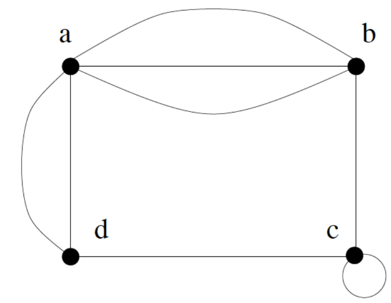
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Exemple 31

Utiliser la matrice d'adjacence pour représenter le graphe ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$(M_{ij}) \leftarrow v_i$

$\uparrow v_j$

Définition 24

*Pour un graphe (non-dirigé) donné ayant n sommets et m arêtes, sa **matrice d'incidence** M est une matrice $n \times m$ défine par :*

$$M_{ij} = 1 \text{ si l'arête } e_j \text{ contient le sommet } v_i$$

et

$$M_{ij} = 0 \text{ si l'arête } e_j \text{ ne contient pas le sommet } v_i \ .$$

Représentation de graphes : Matrice d'incidence

- Ainsi, la matrice d'incidence d'un graphe donné est une matrice à coefficients dans le corps fini $\mathbb{Z}_2$.

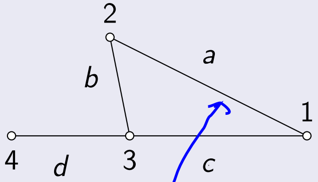
- On peut montrer que l'étude des propriétés des lignes de cette matrice (qui sont donc des vecteurs de $\mathbb{Z}_2^m$) fournit des informations sur le graphe en question.

- La matrice d'incidence peut également être utilisé pour représenter des graphes avec des arêtes multiples et des boucles. Les arêtes multiples sont représentées en utilisant des colonnes avec des entrées identiques, puisque ces arêtes sont incidentes avec la même paire des sommets. Les boucles sont représentées par une colonne avec exactement une entrée égale à 1, correspondant au sommet incident à cette boucle.

Représentation de graphes : Matrice d'incidence

Exemple 32

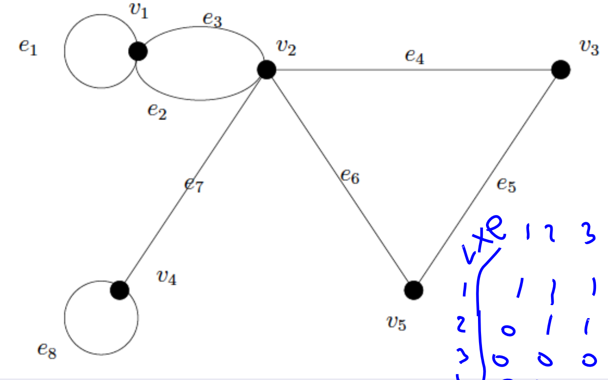
Voici un graphe ainsi que sa matrice d'incidence.



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 33

Représenter le graphe donné ci-dessous en utilisant sa matrice d'incidence.



$$\begin{array}{c|cccccccc} v \times e & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

De nombreux problèmes peuvent être modélisés avec des chemins, c'est à dire en se baladant le long des arêtes d'un graphe. Par exemple, déterminer si un message peut être envoyé entre deux ordinateurs utilisant des liens intermédiaires peut être étudié avec un modèle graphique. Problèmes de planification efficace des itinéraires de la distribution du courrier, le ramassage des ordures, les diagnostics dans les réseaux informatiques, etc. peuvent être résolus en utilisant modèles qui impliquent des chemins dans les graphes.

Chemins et circuits

Définition 25

*Dans un graphe non-orienté, un **chemin** de longueur n allant du sommet u au sommet v, où n est un entier positif, est une séquence des arêtes $e_1, \ldots, e_n$ du graphe tel que $f(e_1) = x_0, x_1, f(e_2) = x_1, x_2, \ldots, f(e_n) = x_{n-1}, x_n$, où $x_0 = u$ et $x_n = v$.*

l'ordre est important

Lorsque le graphe est simple, on note ce chemin par sa séquence de sommets $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (étant donné que l'énumération de ces sommets détermine un chemin unique).

Définition 26

*Le chemin est un **circuit (ou cycle)** s'il commence et se termine dans un même sommet, c'est-à-dire si $u = v$.*

On dit qu'un chemin ou circuit "passe par" ou "traverse" les sommets $x_1, ..., x_{n-1}$.

Définition 27

Un chemin ou un circuit est ***simple*** *s'il ne contient pas la même arête plus d'une fois.*

Définition 28

La longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes du chemin.

Un **arbre** est un graphe connexe non-orienté, sans circuits simples. Les arbres seront vu dans le chapitre suivant.

Lorsqu'il n'est pas nécessaire de faire la distinction entre des arêtes multiples, nous désignerons un chemin $e_1, e_2, ..., e_n$ où $f(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\}$ pour $i = 1, 2, ..., n$ par sa séquence de sommets $x_0, x_1, ..., x_n$. Cette notation identifie un chemin uniquement par les sommets qu'il traverse. Il peut y avoir plus d'un chemin qui traverse cette même séquence de sommets.

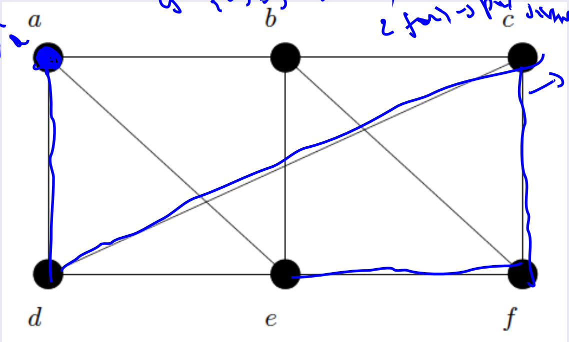
Chemins et circuits

Exemple 34

Dans le graphe simple ci-dessous, montrer que a, d, c, f, e est un chemin simple de longueur 4. Pourquoi d, e, c, a n'est pas un chemin ? Montrer que b, c, f, e, b est un circuit et quelle en est sa longueur ? Le chemin a, b, e, d, a, b est-il simple ? → circuit de longueur 4

→ {a,b} est traversé 2 fois → pas simple

il n'existe pas d'arête qui connecte c et a



→ chemin simple de longueur 4

Connectivité dans les graphes non-orientés

On peut se poser la question suivante :
"Est ce qu'il existe toujours un chemin entre 2 sommets d'un graphe ?"

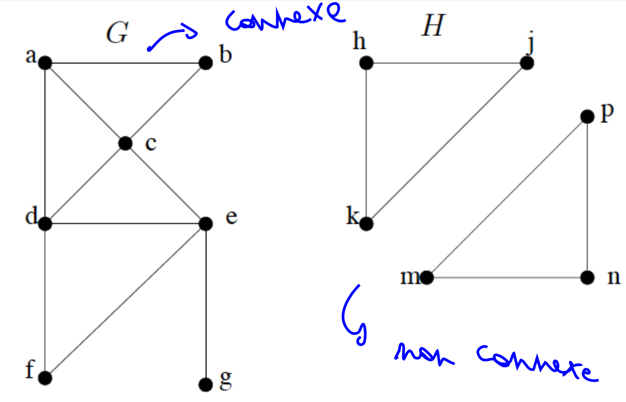
Définition 29

*Un graphe non-dirigé est appelé **connexe** s'il existe un chemin entre chaque paire de sommets distincts du graphe.*

Connectivité dans les graphes non-orientés

Exemple 35

Le graphe G ci-dessous est-il connexe ? Le graphe H ci-dessous est-il connexe ?



Connectivité dans les graphes non-dirigés

Théorème 36

Dans un graphe connexe et non-dirigé il existe un chemin simple entre chaque paire de sommets distincts.

<u>Démonstration :</u>

Par récurrence : Soit $P(n)$ = le fait qu'il existe un chemin simple entre chaque paire de sommets distincts dans tout graphe connexe non-dirigé à n sommets.

- $n = 2$. $P(2)$ est vraie, car sinon les 2 sommets (donc le graphe au complet) serait non-connexe, ce qui est en contradiction avec l'énoncé.
- Hypothèse : On suppose que $P(n)$ est vrai pour $n \geq 2$.

- Thèse : $P(n+1)$?
  Prenons un graphe connexe et non-dirigé de n sommets et on y rajoute un sommet , et au moins une arête (incidente à ce nouveau sommet). Selon l'hypothèse il existe un chemin simple entre chaque paire de sommets du graphe d'origine. La nouvelle arête est incidente au nouveau sommet mais également à un sommet du graphe d'origine. On peut en déduire qu'il existe un chemin simple entre le nouveau sommet et chaque ancien sommet. Nous avons donc un graphe connexe et non-dirigé de $n+1$ sommets ou il existe un chemin simple entre chaque paire de sommets. $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence on à montré $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq 2$. $\square$

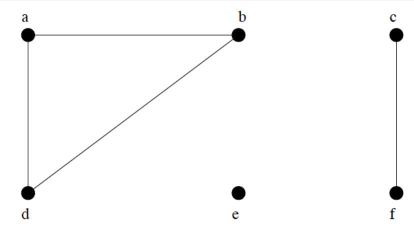
Connectivité dans les graphes non-dirigés

Définition 30

Un graphe non connexe est l'union de deux ou plus sous-graphes connectés, chaque paire de ses sous-graphes n'ayant aucun sommet en commun. Ces sous-graphes connectés disjoints sont appelés les ***composantes connexes*** *du graphe.*

Exemple 37

Quels sont les composantes connexes du graphe G ci-dessous ?



Connectivité dans les graphes non-dirigés

Certains sommets ou arêtes d'un graphe (ou d'une composante) connexe jouent un rôle particulier :

Définition 31

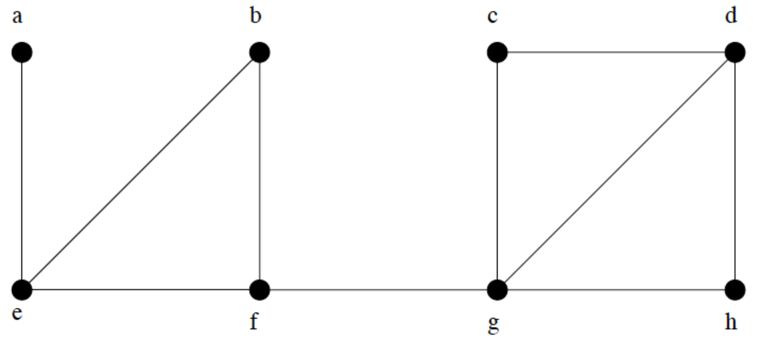
*Il arrive que la suppression d'un sommet et toutes les arêtes incidentes avec ce sommet crée un sous-graphe avec plus de composantes connexe que dans le graphe d'origine. Ces sommets sont appelés **points d'articulations**. L'enlèvement d'un point d'articulation d'un graphe connexe produit un sous-graphe ce n'est plus connexe.*

*De manière analogue, une arête dont la suppression produit un graphe avec plus de composantes connexes que le graphe d'origine est appelé un **pont**.*

Connectivité dans les graphes non-dirigés

Exemple 38

Quels sont les points d'articulation et les ponts du graphe ci-dessous ?



Chemins et circuits dans les multigraphes dirigés

Définition 32

Dans un multigraphe dirigé, un ***chemin*** *de longueur n, où n est un entier positif, de u à v est une séquence d'arêtes* $e_1, e_2, ..., e_n$ *du graphe tel que*
$f(e_1) = (x_0, x_1), f(e_2) = (x_1, x_2), ..., f(e_n) = (x_{n-1}, x_n)$, *où* $x_0 = u$ *et* $x_n = v$.

Quand il n'y a pas d'arêtes multiples dans le graphe, ce chemin est désigné par sa séquence de sommets $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$.

Définition 33

Le chemin est un ***circuit (ou cycle)*** *s'il commence et se termine dans un même sommet, c'est-à-dire si* $u = v$.

Définition 34

*Un chemin ou circuit est appelé **simple**, s'il ne contient pas plus d'une fois la même arête.*

Lorsqu'il n'est pas nécessaire de faire la distinction entre des arêtes multiples, nous désignerons un chemin $e_1, e_2, \ldots, e_n$ où $f(e_i) = (x_{i-1}, x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ par sa séquence de sommets $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Cette notation identifie un chemin uniquement par les sommets qu'il traverse. Il peut y avoir plus d'un chemin qui traverse cette même séquence de sommets.

Connectivité dans les graphes dirigés

Il existe deux notions de connectivité dans les graphes dirigés, en fonction du fait de considérer ou non l'orientation des arêtes.

Définition 35

*Un graphe dirigé est **fortement connexe** s'il existe un chemin de a vers b et de b vers a, pour tout sommet a et b du graphe.*

Pour qu'un graphe dirigé soit fortement connexe, il faut qu'il existe une séquence d'arêtes dirigées de tout sommet dans le graphe à tout autre sommet. Un graphe dirigé peut échouer être fortement connexe, mais toujours en "un seul morceau". Afin de préciser ceci, nous donnons la définition suivante :

Connectivité dans les graphes dirigés

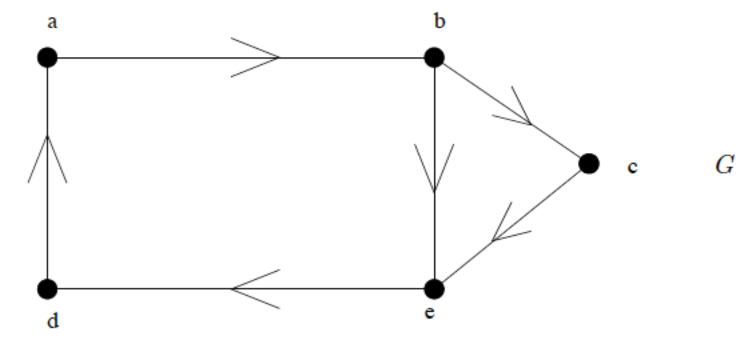
Définition 36

*Un graphe dirigé est **faiblement connexe** s'il existe un chemin entre deux sommets quelconques du graphe sous-jacent.*

C'est-à-dire qu'un graphe dirigé est faiblement connexe si et seulement s'il y a toujours un chemin entre deux sommets lorsque l'orientation des arêtes sont ignorées. Clairement, tout graphe dirigé fortement connexe est également faiblement connexe.

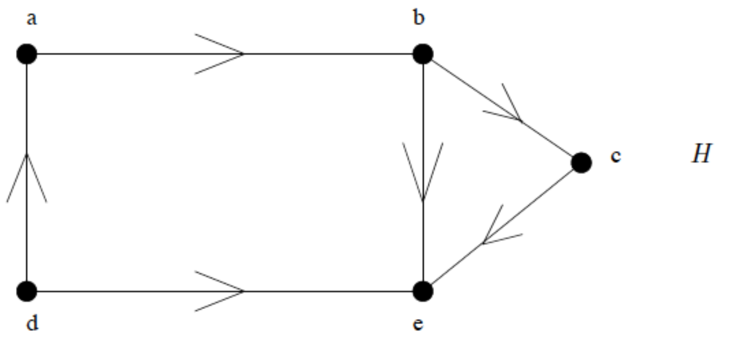
Exemple 39

Les graphes dirigés G et H ci-dessous sont ils fortement connexe ? faiblement connexe ?



Exemple 40

Les graphes dirigés G et H ci-dessous sont ils fortement connexe ? faiblement connexe ?



Connectivité dans les graphes dirigés

Théorème 41

Soit $G = (V, E)$ un graphe dirigé.

1. *Chaque sommet est fortement connexe à lui-même.*
2. *Soit $u, v \in V$. Si u est fortement connexe à v alors v est fortement connexe à u.*
3. *Soit $u, v, w \in V$. Si u est fortement connexe à v et v est fortement connexe à w alors u est fortement connexe à w.*

Compter les chemins

Compter les chemins entre deux sommets dans un graphe peut être déterminé en utilisant la matrice d'adjacence :

Théorème 42

Soit G un graphe avec A sa matrice d'adjacence avec les sommets ordonné comme suit $v_1, v_2, ..., v_n$ (graphes avec des arêtes dirigées ou non, des arêtes multiples et boucles)
Le nombre de chemins différents de longueur r de v_i à v_j, où r est un entier positif, égal à la (i, j) ème entrée de A^r.

Démonstration par récurrence. Soit G un graphe avec A sa matrice d'adjacence et ses n sommets $v_1, v_2, ..., v_n$.
Soit $P(r)$ le fait que le nombre de chemins différents de v_i à v_j de longueur r est égale à la (i, j) ème entrée de A^r.

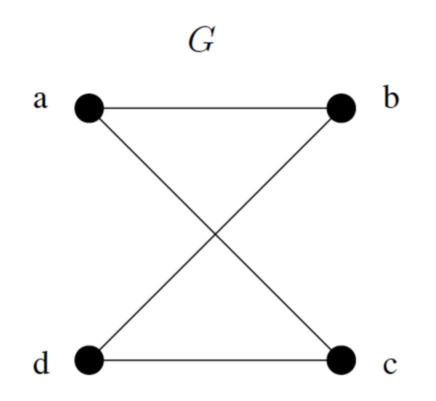
Compter les chemins

- Soit $P(1)$ le fait que le nombres de chemins de longueur 1 de v_i à v_j de longueur 1 est égale à la (i, j) ème entrée de A, ce qui est vrai par définition de la matrice d'adjacence.
- Hypothèse : On suppose que $P(r)$ est vrai pour $r \geq 1$.
- Thèse : $P(r+1)$?
  Le nombre de chemins différent de longueur $r+1$ de v_i à v_j est égale au nombre de chemins différents de longueur 1 de v_i à un autre sommet v_k multiplié par le nombre de chemins différents de longueur r de v_k à v_j. Donc le nombre de chemins différents de longueur $r+1$ de v_i à v_j est $\sum_{k=1}^{n} \left(A_{(i,k)} . A^r_{(k,j)} \right)$ ce qui est égale à (i, j) ème entrée de A^{r+1}, donc $P(r+1)$ est vraie.

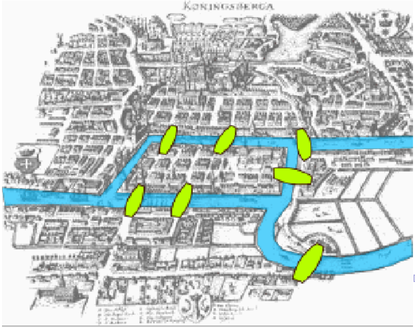
On a montré par récurrence que l'affirmation est vraie $\forall r \geq 1$. $\square$

Exemple 43

Combien de chemins de longueur 4 *existe-t-il de* a *à* d *dans le graphe simple ci-dessous.*

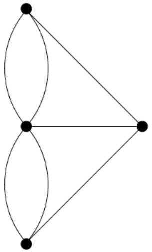


La ville de Königsberg, en Prusse (maintenant appelée Kaliningrad et une partie de la Russie), a été divisé en quatre sections par les bras de la rivière Pregel. Ces quatre sections comprenaient les deux régions situées sur des bancs de la Pregel, l'île de Kneiphof et la région située entre les deux bras du Pregel. Au 18ème siècle, sept ponts relient ces régions. La figure ci-dessous illustre ces régions et ponts.



Chemins et circuits d'Euler

Les habitants, qui faisaient de longues promenades dans la ville le dimanche, se demandaient s'il était possible de traverser chaque pont une seule fois et retourner au point de départ. Le mathématicien suisse **Leonhard Euler** a résolu ce problème problème. Sa solution, publiée en 1736, pourrait être la première utilisation de la théorie des graphes. Euler a étudié ce problème en utilisant le multigraphe obtenu lorsque les quatre régions sont représentés par les sommets et les ponts par les arêtes.



Chemins et circuits d'Euler

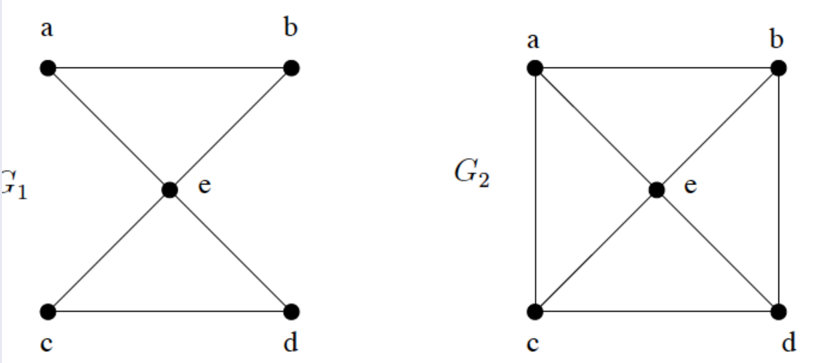
Le problème de traverser chaque pont sans traverser un pont plus d'une fois peut être reformulé en termes de ce modèle. La question devient : *y at-il un circuit simple dans ce multigraphe qui contient toutes les arêtes ?*

Définition 37

*Un **circuit d'Euler** dans un graphe G est un circuit simple contenant chaque arête de G. Un **chemin d'Euler** dans G est un chemin simple contenant chaque arête de G.*

Exemple 44

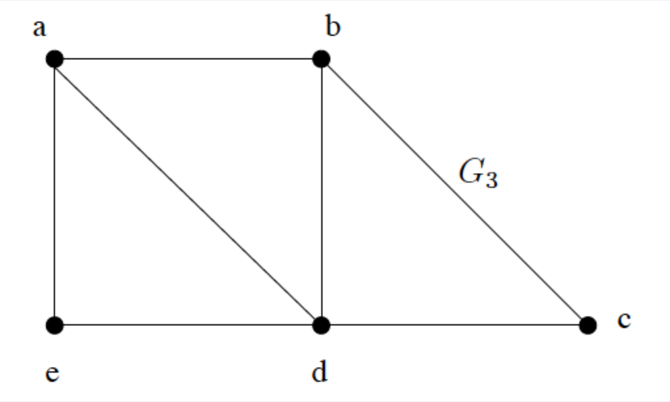
Le(s)quel(s) des graphes non-dirigés ci-dessous ont un circuit d'Euler ? Et pour ceux qui n'ont ont pas, un chemin d'Euler ?



Chemins et circuits d'Euler

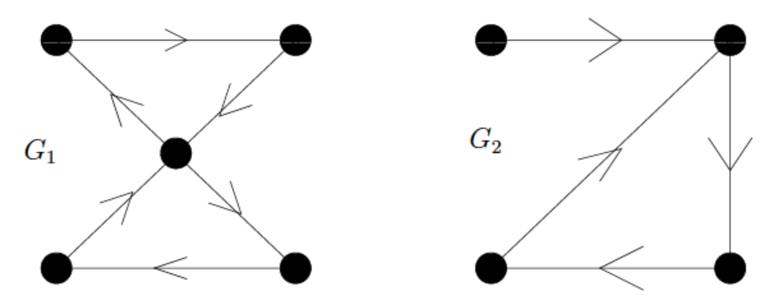
Exemple 45

Le(s)quel(s) des graphes non-dirigés ci-dessous ont un circuit d'Euler ? Et pour ceux qui n'ont ont pas, un chemin d'Euler ?



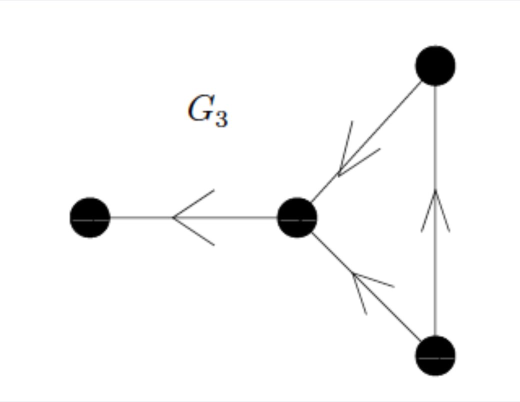
Exemple 46

Le(s)quel(s) des graphes dirigés ci-dessous ont un circuit d'Euler ? Et pour ceux qui n'ont ont pas, un chemin d'Euler ?



Exemple 47

Le(s)quel(s) des graphes dirigés ci-dessous ont un circuit d'Euler ? Et pour ceux qui n'ont ont pas, un chemin d'Euler ?



Chemins et circuits d'Euler

Il existe des critères simples pour déterminer si une multigraphe a un circuit Eulerien ou un chemin Eulerien. Euler les à découvert en résolvant le célèbre problème des ponts de Königsberg. Nous supposerons que tous les graphes dans cette section ont un nombre fini de sommets et d'arêtes.

Que pouvons-nous dire si un multigraphe connexe possède un circuit Eulerien ? Ce que nous pouvons montrer, c'est que chaque sommet doit avoir un degré pair. C'est la condition nécessaire.

Est-ce la condition nécessaire pour l'existence d'un circuit d'Euler est également suffisante ? C'est-à-dire, un circuit d'Euler doit exister dans un multigraphe connexe si tous les sommets sont de degré pair ?

Théorème 48

Un multigraphe connexe a un circuit d'Euler si et seulement si chacun de ses sommets est de degré pair.

<u>Démonstration</u> Condition nécessaire :

- Pour ce faire, notons d'abord qu'un circuit Euler commence avec un sommet a et continue avec une arête incidente à a, disons $\{a, b\}$. L'arête $\{a, b\}$ contribue une fois au $deg(a)$.
- Chaque fois que le circuit passe par un sommet, il contribue doublement au degré de ce sommet, puisque le circuit entre via une arête incidente au sommet et repart par une autre arête incidente à ce sommet.

Chemins et circuits d'Euler

- Enfin, le circuit se termine là où il avait commencé, contribuant une fois au $deg(a)$. Par conséquent, $deg(a)$ doit être pair, car le circuit contribue une fois quand il commence, une fois à la fin et deux fois à chaque passage à travers a (si cela devait arriver).
- Un sommet autre que a est de degré pair également parce que le circuit contribue deux fois à son degré à chaque fois il passe par ce sommet.
- On peut conclure que si un graphe connexe possède un circuit d'Euler, alors chaque sommet doit avoir un degré pair.

Chemins et circuits d'Euler

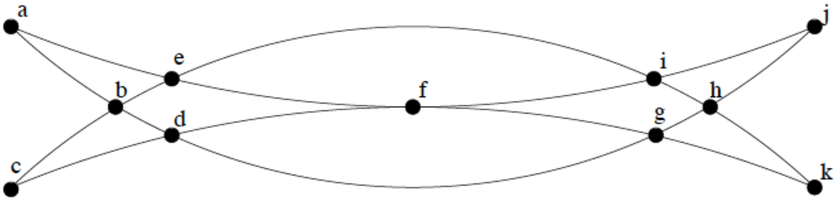
L'algorithme suivant donne une procédure constructive pour trouver des circuits d'Euler et démontre donc la condition suffisante :

- Soit G un multigraphe connexe dont tous les sommets ont un degré pair. Soit C un circuit dans G commençant dans un sommet arbitraire avec des arêtes ajoutés successivement afin de former un chemin qui revient vers ce sommet.
- Soit H le sous-graphe de G telle que les arêtes de C ont été enlevé. S'il reste des arêtes dans le sous-graphe H, alors trouver un circuit S dans H qui commence et termine dans un sommet de H qui est également un sommet de C.
- Maintenant enlever toutes les arêtes de S et les sommets isolés de H pour créer un nouveau graphe H^*. Insérer le circuit S au sommet approprié de C afin de créer un nouveau circuit C^*.
- Si H^* à des arêtes ...... continuer jusqu'à ce que le sous-graphe formé n'ait plus d'arêtes. $\square$

Beaucoup de puzzles vous demandent de dessiner une image dans un mouvement continu sans lever un crayon de sorte que pas une partie de l'image est retracée. Nous pouvons résoudre ces énigmes utilisant des circuits et des chemins d'Euler.

Exemple 49

Est-ce que Mathieu peut dessiner le graphe ci-dessous de cette manière, si il commence et termine dans le même sommet ?



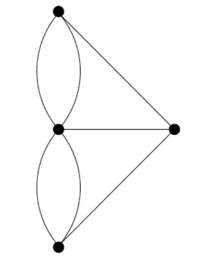
Condition nécessaire et suffisante pour un chemin d'Euler :

Théorème 50

Un multigraphe connexe possède un chemin d'Euler mais pas un circuit d'Euler si et seulement si il a exactement deux sommets de degré impair.

Exemple 51

Pour revenir à Königsberg, est-il possible de commencer une balade dans un endroit de la ville, de traverser exactement une fois chaque pont et de se retrouver dans un autre endroit de la ville ?



Isomorphismes de graphes

Nous avons souvent besoin de savoir s'il est possible ou non de dessiner deux graphes de la même manière.

Par exemple, en chimie, les graphes sont utilisés pour modéliser les composantes. Différentes composantes peuvent avoir la même formule moléculaire mais peuvent différer dans leur structure. Ces composantes seront représentés par des graphes qui ne peuvent pas être dessinés de la même manière. Les graphes représentant les composantes connues peuvent être utilisé pour déterminer si la composante supposée nouvelle a été étudié auparavant ou non.

Isomorphismes de graphes

Définition 38

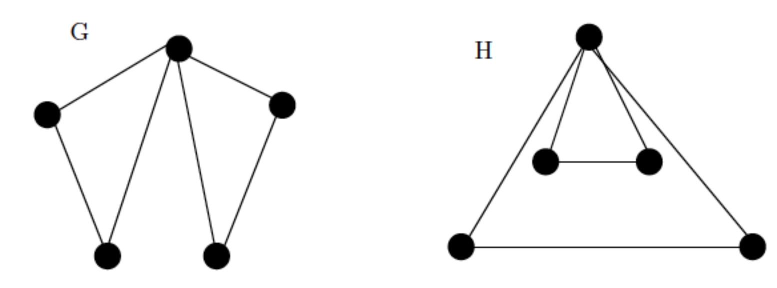
*Les graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont **isomorphes** s'il existe une fonction f bijective de V_1 à V_2 avec la propriété que pour tout sommets a et b dans V_1 les sommets sont adjacents dans G_1 si et seulement si $f(a)$ et $f(b)$ sont adjacent dans G_2. Une telle fonction f s'appelle un isomorphisme.*

En d'autres termes, lorsque deux graphes simples sont isomorphes, il existe une bijections entre les sommets des deux graphes qui préserve la relation d'adjacence.

Isomorphismes de graphes

Exemple 52

Montrer que les deux graphes $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$ ci-dessous sont isomorphes.



Il est souvent difficile de déterminer si deux graphes simples sont isomorphes. Il y a $n!$ bijections possibles entre les ensembles de sommets de deux graphes simples avec n sommets. Tester chaque correspondance pour voir si elle préserve l'adjacence ou non est irréaliste si n est large.

Cependant, on peut souvent montrer que deux graphes simples sont non-isomorphe en montrant qu'ils ne partagent pas une propriété que les graphes simples isomorphes doivent avoir tous les deux. Une telle propriété s'appelle une **invariante** en ce qui concerne l'isomorphisme de graphes simples.

Isomorphismes de graphes : Propriétés invariantes

Des graphes simples isomorphes doivent :

- avoir le même nombres des sommets, car il existe une bijection entre les ensembles de sommets des graphes.
- avoir le même nombres d'arêtes, parce que la bijection entre les sommets établit une bijection entre les arêtes.
- Les degrés des sommets correspondent doivent être les mêmes. C'est-à-dire un sommet v de degré d en G doit correspondre à un sommet $f(v)$ de degré d dans H, puisqu'un sommet w dans G est adjacent à v si et seulement si $f(v)$ et $f(w)$ sont adjacents dans H.

Est-ce qu'on peut en trouver d'autres ?

- après avoir renommé les sommets, la même matrice d'adjacence.
- des circuits simples de même longueur.

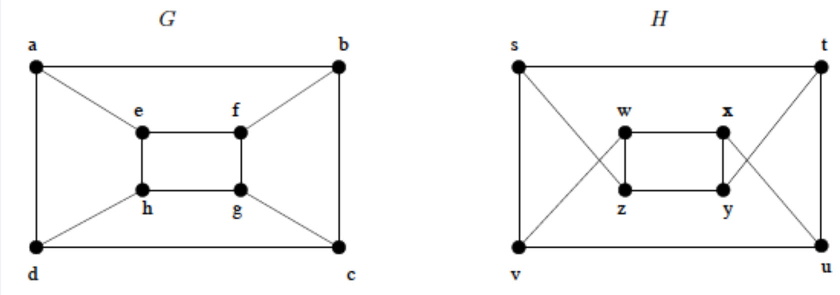
Nombres des sommets et arêtes dans des graphes isomorphes

Le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et les degrés des sommets sont toutes des propriétés invariantes sous isomorphisme. Si l'une de ces quantités diffère entre deux graphes simples, ces graphes ne peuvent pas être isomorphes.

Cependant, lorsque ces invariantes sont les mêmes, cela n'implique pas nécessairement que les deux graphes sont isomorphes. Il n'existe pas à ce jour d'ensemble d'invariant qui peut être utilisé pour déterminer si des graphes simples sont isomorphes.

Exemple 53

Déterminer si les graphes G et H sont isomorphes ou non.



Nombres des sommets et arêtes dans des graphes isomorphes

Pour montrer qu'une fonction f de l'ensemble de sommets d'un graphe G aux sommets d'un graphe H est un isomorphisme, nous devons montrer que f préserve les arêtes (l'adjacence). Un moyen utile est d'utiliser des matrices d'adjacences.

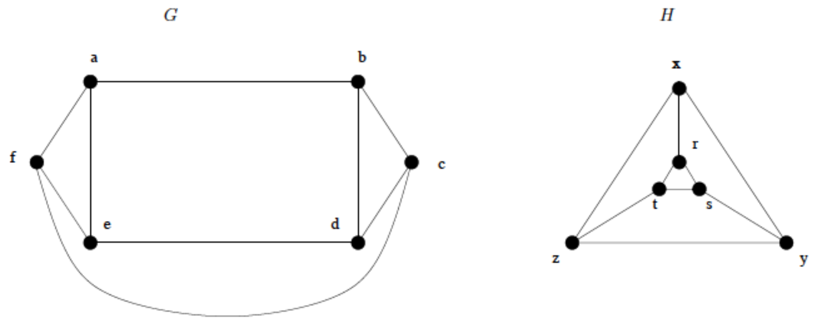
En particulier, pour montrer que f est un isomorphisme, on peut montrer que la matrice de G est la même que la matrice de H, lorsque les rangées et les colonnes ont été relabelisés pour correspondre aux images par la fonction f des sommets de G.

Chemins et isomorphismes

Les chemins et les circuits peuvent aider de différentes manières pour déterminer si deux graphes sont isomorphes. Par exemple, l'existence d'un circuit simple d'une longueur spécifique est un invariant utile qui peut être utilisé pour montrer que deux graphes ne sont pas isomorphes. De plus, des chemins peuvent être utilisé pour construire des fonctions qui peuvent être des isomorphismes.

Exemple 54

Déterminer si les graphes G et H sont isomorphes ou non.

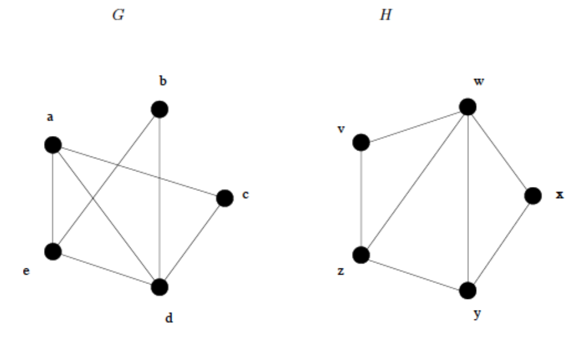


Chemins et isomorphismes

On peut également utiliser des chemins pour trouver des fonctions qui sont potentiellement des isomorphismes.

Exemple 55

Déterminer si les graphes G et H sont isomorphes ou non.



Résumé des points importants du chapitre

1. Graphes simples, multi-graphes, graphes, dirigés ou non-dirigé
2. Adjacence, incidence, degré, handshaking theorem,
3. Familles de graphes : graphes réguliers, complets, cycliques, roues, cubes, roues, bipartis
4. Sous-graphes et union de graphes
5. Représentation de graphes : liste d'adjacence, matrice d'adjacence, matrice d'incidence
6. Chemins, circuits, chemins simples

Résumé des points importants du chapitre

1. Connectivité, points d'articulations et ponts, fortement et faiblement connexe dans les graphes dirigés
2. Compter les chemins
3. Chemins et circuits d'Euler, condition nécessaire et suffisante
4. Isomorphismes de graphes : les propriétés invariantes