Calculabilité, logique et complexité

Chapitre 2

Concepts

UCLouvain

Chapitre 2 : Concepts

1. Démonstration et raisonnement
2. Ensembles, langages, relations et fonctions
3. Ensembles énumérables
4. Diagonalisation de Cantor

Acquis d'apprentissage

A l'issue de ce chapitre, les étudiants seront capables de

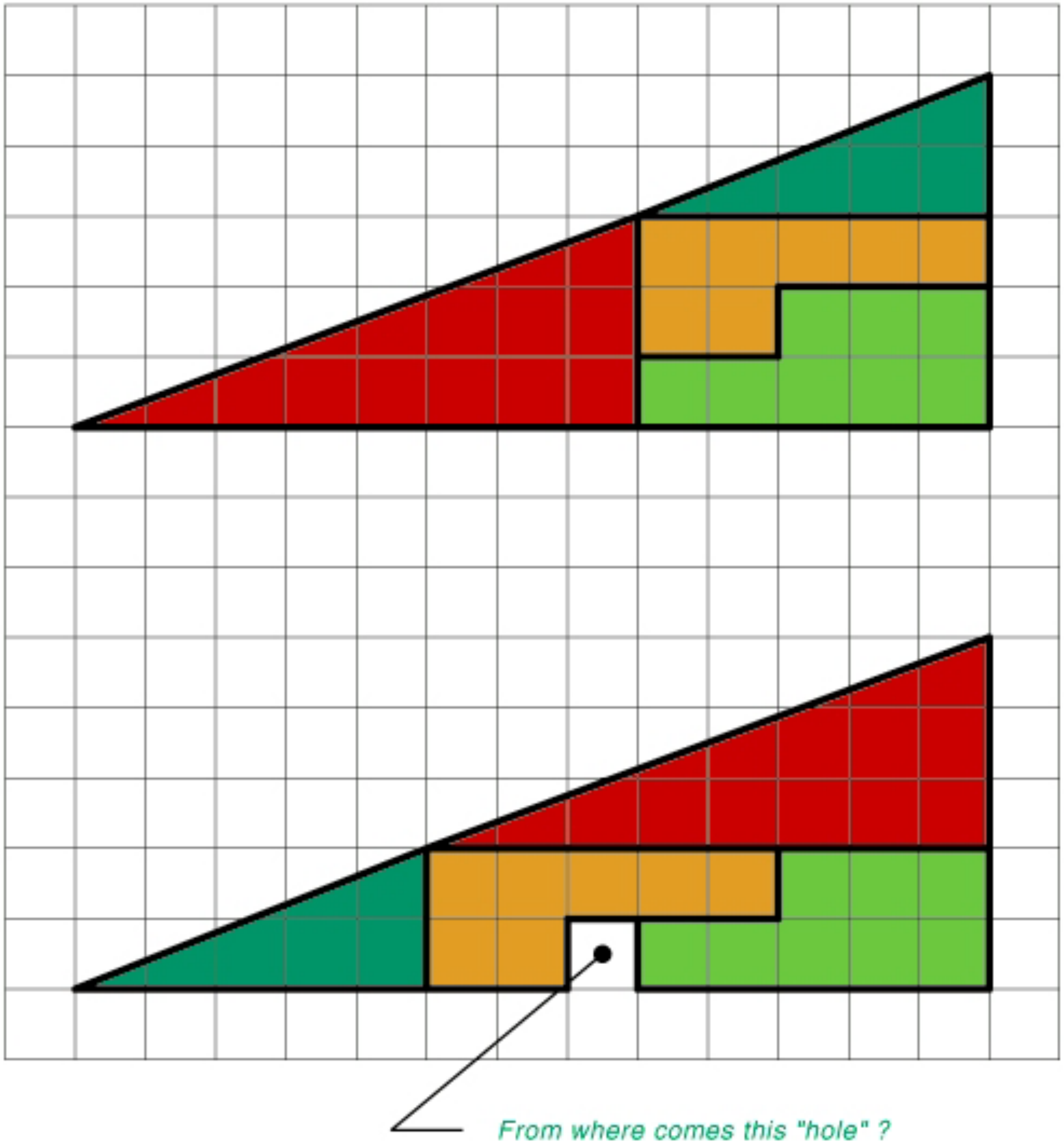
- Comprendre et maîtriser les concepts d'ensembles, langages, relations, fonction, ensemble énumérable
- Déterminer et justifier si un ensemble donné est énumérable ou non énumérable
- Démontrer que l'ensemble des réels est non énumérable
- Justifier que l'univers des programmes informatiques est énumérable tandis que l'univers des problèmes (fonctions) est non énumérable et en tirer les conséquences adéquates

1. Démonstration et raisonnement

Un exemple de démonstration …

Qu’est-ce qu’une « démonstration » ?

HOW CAN THIS BE TRUE ?



Below the four parts are moved around

The partitions are exactly the same, as those used above

From where comes this "hole" ?

2. Ensembles, langages, relations et fonctions

Ensembles

Un *ensemble* est une collection d'objets, sans répétition, appelés les *éléments* de l'ensemble

- {} ou Ø ensemble vide
- { 0, 1, 2, 3 }
- { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, … } ensemble infini
- { 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, …}
- { a, b, c }
- { a, aa, aaa, aaaa, … } ensemble infini
- { 00, 01, 10, 11 }
- { a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, … }

- A x B : produit cartésien
- 2^A, $\mathcal{P}(A)$: ensemble des sous ensembles de A
- $\bar{A}$: complément de A

2. Ensembles, langages, relations et fonctions

Langages

- Une *chaîne de caractères*, ou *mot*, est une séquence finie de symboles juxtaposés
  - 010110 , abccbcabcb
- ε : chaîne vide de caractères
- Un *alphabet* Σ est un ensemble de symboles
  - Σ = { 0, 1)   Σ = { a, b, c }
- Un *langage* est un ensemble de mots constitués de symboles d'un alphabet donné
  - palindromes sur {a, b}

    ε , a, b, aa, aaa, aba, babaabab, aababbbabaa

2. Ensembles, langages, relations et fonctions

Langages

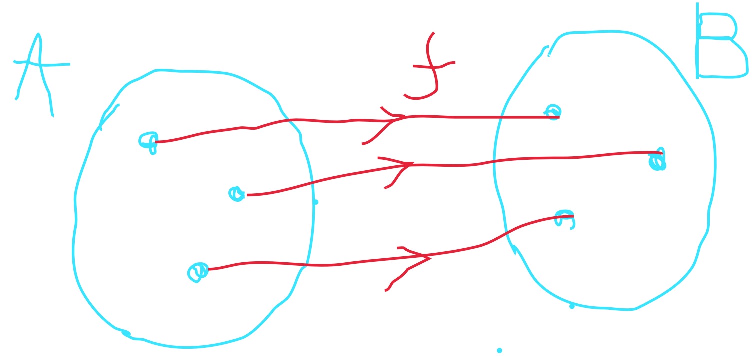
- Σ^* ensemble de *tous* les mots sur Σ
  - $\Sigma = \{\}$, $\Sigma^* = \{ \varepsilon \}$
  - $\Sigma = \{a\}$, $\Sigma^* = \{ \varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$
  - $\Sigma = \{0,1\}$, $\Sigma^* = \{ \varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, \ldots \}$

2. Ensembles, langages, relations et fonctions

Relations

- Soient A, B des ensembles
  - Une *relation* R (sur A ,B) est un sous-ensemble de A x B
  - Une relation est définie par sa table
  - $\langle a,b \rangle \in R$, aRb, R(a,b)

2. Ensembles, langages, relations et fonctions



Fonctions

- Soient A, B des ensembles
  - Une *fonction* f (de A dans B) est une relation telle que pour a $\in$ A, il existe au plus un b $\in$ B tel que <a,b> $\in$ f
  - f : A $\rightarrow$ B
  - f(a)=b , <a,b> $\in$ f
  - Si a $\in$ A et il n'existe pas de b $\in$ B tel que f(a)=b,

    alors f(a) est *indéfini*

    f(a) = $\perp$ (bottom)

2. Ensembles, langages, relations et fonctions

Propriétés des fonctions

- Soit $f : A \rightarrow B$
  - *domaine* de f : $dom(f) = \{ a \in A \mid f(a) \neq \perp \}$
  - *image* de f : $image(f) = \{ b \in B \mid \exists\ a \in A : b=f(a) \}$
  - f est fonction *totale* ssi $dom(f) = A$
  - f est fonction *partielle* ssi $dom(f) \subseteq A$
  - f est *surjective* ssi $image(f) = B$
  - f est *injective* ssi $\forall a, a' \in A : a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$
  - f est *bijective* ssi f est totale, injective et surjective

2. Ensembles, langages, relations et fonctions

Propriétés des fonctions

- Soient f, g : $A \rightarrow B$
  - f est une *extension* de g ssi

    $\forall x \in A : g(x) \neq \perp \Rightarrow f(x)=g(x)$

  - f a la même valeur que g partout où g est définie

2. Ensembles, langages, relations et fonctions

Définition d'une fonction

Une fonction est définie par sa table (peut-être infinie)

Comment définir (la table d') une fonction ?

- Définir une fonction *par un texte fini* déterminant sans contradiction ni ambiguïté le contenu de sa table
- Une définition peut prendre la forme d'un algorithme
  - $f(x) = 2x^3 - 35x + 7$
    Détermine la fonction *ainsi qu'*un moyen de la calculer
- Il n'est pas nécessaire de décrire ou de connaître un moyen de calculer la fonction pour pouvoir la définir sans ambiguïté ni contradiction
  - f(x) = 1 s'il y a de la vie autre part que sur la terre
    0 sinon

3. Ensembles énumérables

Définitions

- Deux ensembles A et *B* ont le même *cardinal* si il existe une bijection entre A et B
- Soit N l'ensemble des nombres naturels

  $N = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8, \dots \}$
- Un ensemble est ***énumérable*** ou ***dénombrable***

  ssi il est fini ou si il a le même cardinal que N
- Un ensemble infini est énumérable s'il existe une liste infinie (indicée par des entiers) de *tous* ses éléments

  $e_0, e_1, \dots , e_n , \dots$

3. Ensembles énumérables

Exemples

- L'ensemble des entiers Z = { 0, -1, 1, 2, -2, ...}
- L'ensemble des nombres pairs
- L'ensemble des paires d'entiers, des triplets, ...
- L'ensemble des rationnels
- L'ensemble des sous-ensembles finis d'entiers
- L'ensemble des chaînes finies de caractères sur un alphabet fini
- L'ensemble des programmes Java

3. Ensembles énumérables

Propriétés

- Tout sous-ensemble d'un ensemble énumérable est énumérable
- L'union et l'intersection de deux ensembles énumérables est énumérable
- L'union d'une infinité énumérable d'ensembles énumérables est énumérable

3. Ensembles énumérables

L'univers des programmes informatiques

- Un programme informatique est une chaine finie de caractères
- Quelque soit le langage de programmation, il y a une infinité énumérable de programmes informatiques
- L'informatique ne considère que des ensembles énumérables

4. Diagonalisation de Cantor

Existe-t-il des ensembles infinis non énumérables ?

Théorème : (Cantor 1874)

Soit E = { x réel | 0 < x ≤ 1 }

- E est non énumérable

Preuve :

Supposons E énumérable

Il existe donc une énumération des éléments de E : x_0, x_1, ... , x_k , ...

4. Diagonalisation de Cantor

1. Construction d'une table

0 – 9

$x_k = 0.\ x_{k0}\ x_{k1} \ldots x_{kk} \ldots$

	1 digit	2 digit	3 digit	…	k+1 digit	…
x_0	x_{00}	x_{01}	x_{02}	…	x_{0k}	…
x_1	x_{10}	x_{11}	x_{12}	…	x_{1k}	…
x_2	x_{20}	x_{21}	x_{22}	…	x_{2k}	…
:	:	:	:	:	:	:
x_k	x_{k0}	x_{k1}	x_{k2}	…	x_{kk}	…
:	:	:	:	:	:	:

4. Diagonalisation de Cantor

2. Sélection de la diagonale

   $d = 0 \,.\, x_{00}\ x_{11} \ldots x_{kk} \ldots$

3. Modification de cet élément

   - $x'_{ii} = 5$ si $x_{ii} \neq 5$

     $= 6$ si $x_{ii} = 5$
   - $d' = 0.\, x'_{00}\ x'_{11} \ldots x'_{kk} \ldots$
   - d' est un élément de E ($0 < d' \leq 1$)

4. Diagonalisation de Cantor

4. Contradiction

- d’ est dans l’énumération car E est énumérable
- d’ n’est pas dans l’énumération car si $d' = x_p$

alors $d' = 0.\ x_{p0}\ \ x_{p1} \ldots\ x_{pp} \ldots$

$= 0.\ x'_{00}\ x'_{11} \ldots\ x'_{pp} \ldots$

impossible car $x_{pp} \neq x'_{pp}$

5. Conclusion

- E n’est pas énumérable

On dit que E et *R* ont la *puissance du continu*

4. Diagonalisation de Cantor

Exemples d’ensembles non énumérables

- L’ensemble des réels *R*
- L’ensemble des sous-ensembles de *N*
- L’ensemble des chaînes infinies de caractères sur un alphabet fini
- L’ensemble des fonctions de *N* dans *N*

$0, f(0), f(1), \ldots$

$0 \ldots 9$

Existe-t-il des ensembles avec “plus d’éléments” que *R* ?

4. Diagonalisation de Cantor

L'univers des programmes informatiques

- Quelque soit le langage de programmation, il y a une infinité énumérable de programmes informatiques

L'univers des fonctions

- L'ensemble des fonctions de *N* dans *N* n'est pas énumérable

- Il y trop de fonctions par rapport aux programmes
- Impossible de représenter ou de calculer chaque fonction par un programme !