MATH-F307 - Mathématiques discrètes 2020-2021

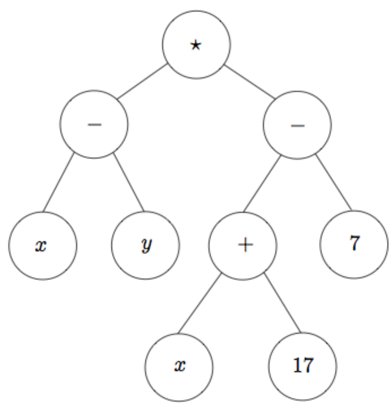
Séance 6

Exercice 1. Soit un arbre 3-aire entier et équilibré avec 521 feuilles. Combien de sommets contient cet arbre? Quelle est la hauteur de l'arbre? Combien de sommets internes contient-il? Combien de feuilles contient-il à chaque niveau?

Exercice 2. Construire l'arbre d'expression pour chacune des expressions suivantes:

1. $((x - y) + ((2 + z) \star y))$
2. $((((x \star y) + (a + b)) \star z) - 2)$.

Exercice 3. Soit l'arbre enraciné ci-dessous.

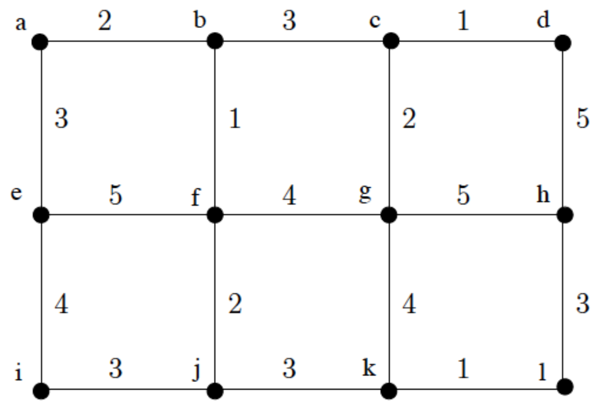


1. Lister les labels des sommets de l'arbre selon le "pre-order" algorithm.
2. Lister les labels des sommets de l'arbre selon le "post-order" algorithm.

Exercice 4. Combien d'arbres sous-tendants différents existe-t-il pour les graphes suivants?

(a) C_3 $(= K_3)$ (b) C_4 (c) C_5 (d) K_4.

Exercice 5. Trouver l'arbre sous-tendant minimal du graphe pondéré suivant.



Exercice 6. Soit W un graphe pondéré formé en prenant le graphe complet K_5 sur 5 sommets $1, 2, 3, 4, 5$. Le poids de l'arête $\{x, y\}$ est donné par

$$w(\{x, y\}) = |x - y| \mod 5.$$

Trouver l'arbre sous-tendant minimal de W.

Exercice 7. Soit F une forêt qui contient t arbres. Soit n le nombre de sommets dans F et m le nombre d'arêtes dans F. Utiliser la récurrence sur n pour montrer que $m = n - t$ pour $n \geq t$.

Exercice 8.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \quad ?$$

Donner deux démonstrations différentes du résultat.

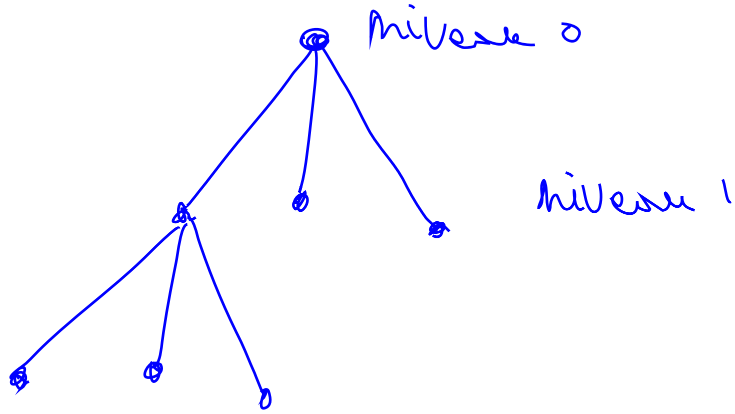
Exercice 9. Si $0 \leqslant m \leqslant n$, que vaut

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} \binom{n}{k} \quad ?$$

(Hint : essayer une preuve bijective.)

Exercice 10. Si on jette simultanément n dés identiques, combien de résultats différents peut-on obtenir ? (Deux résultats sont considérés comme équivalents s'ils ont le même nombre de 1, le même nombre de 2, ..., le même nombre de 6.)

Ex 1 i



3-aire : 3 enfants au plus   entier et équilibré

3 enfants exactement

↳ toutes les feuilles se trouvent au dernier et avant-dernier niveau

Un arbre m-aire entier avec i sommets internes contient

$n = m.i + 1$ sommet

$l = (m-1).i + 1$ feuilles

équilibré alors sa hauteur est $h = \lceil \log_m l \rceil$

$\Rightarrow 521 = (m-1).i + 1 = (3-1)\,i + 1$

$\Leftrightarrow i = 260$

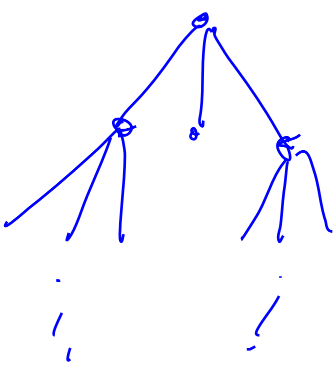
Nb de sommets: $521 + 260 = 781$

Hauteur $h = \lceil \log_3 521 \rceil$ OU calculer n^x et prendre

n^x dépasse nb sommet

$\Rightarrow 3^6 = 729$

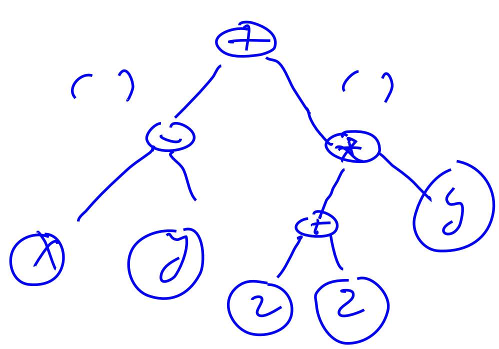
$\Rightarrow h = 6$



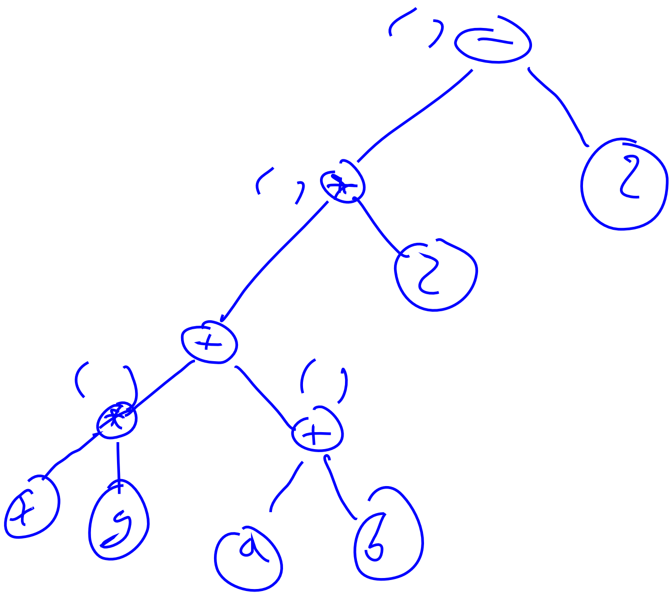
$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364 \rightarrow 781 - 364 = 417$

417 feuilles niveau 6, $521 - 417 = 104$ feuilles de niveau 5

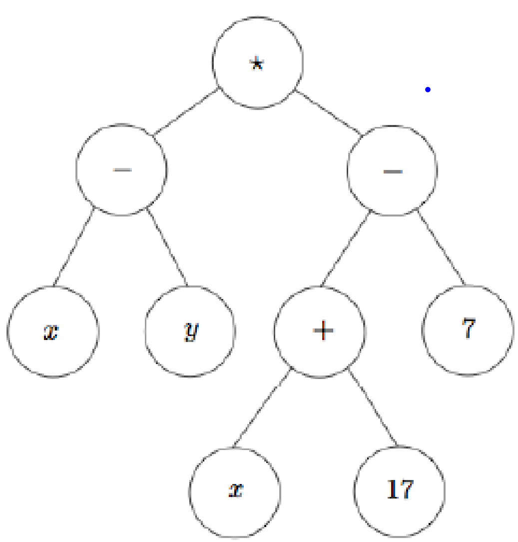
Ex 2 : $(x - y) + ((z + z) * y)$



2) $((((x * y) + (a+b)) * z) - 2)$



Ex 3.



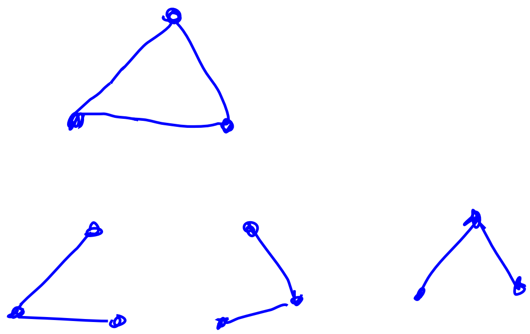
Expression: $(x - y) * ((x + 17) - 7)$

1. $* \; - \; x \; y \; - \; + \; x \; 17 \; 7$

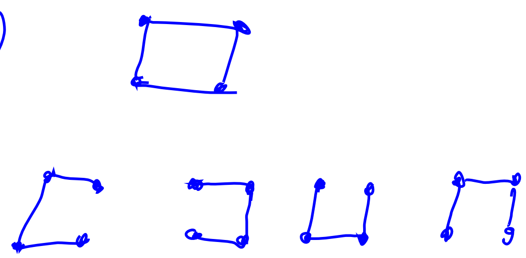
2. $x \; y \; - \; x \; 17 \; + \; 7 \; - \; *$

<u>Ex 4 :</u>

a)



b)



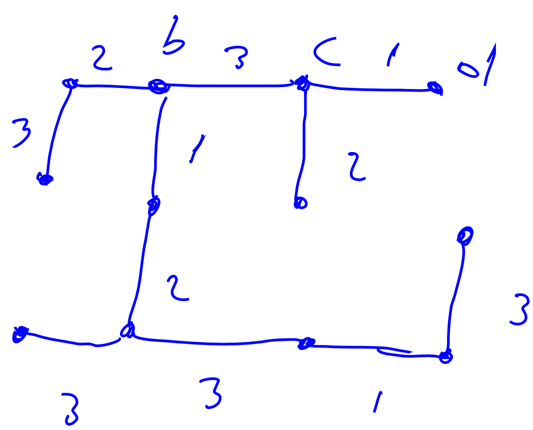
c) C_5

Voir théorème de Cayley

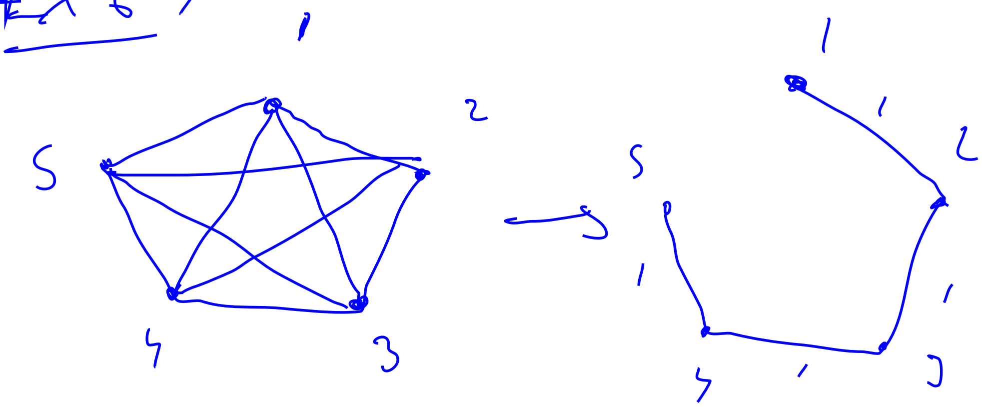
(ou graphe complet)

$n^{n-2} = 4^{4-2} = 16$

<u>Ex 5 :</u>



Ex 6 :



Ex 8 :

→ binôme de Newton

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k} y^{n-k} = (x+y)^n$$

2e méthode : 1er décompte n boules, 3 couleurs

chaque boule peut prendre 3 couleurs 3 choix

Total : $3.3.3.\dots = 3^n$

2e décompte :

$$\sum \binom{n}{k} 2^k$$

On choisit k boules parmi les n (pour un k fixe entre 0 et n). On colorie les k boules choisies en 2 couleurs. 2^k possibilités.

Ensuite, on attribue la 3e couleur aux $n-k$ boules restantes. Total pour k fixé $\binom{n}{k}2^k$

On effectue ce procédé pour tout k entre 0 et n

Total : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ Donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$

— — — — — —

Ex 9 :

On a n boules on les colorie en rouge, bleu, vert. On colorie exactement m boules en rouge et le reste en vert ou bleu au choix

$$\to \underbrace{\binom{n}{m}}_{\text{choix m boules rouges}} \underbrace{2^{n-m}}_{\text{2 choix (bleu ou vert) pour ces } n-m \text{ boules restantes}}$$

→ Pour k fixé entre m et n. On choisit k boules parmi n. On colorie le restant en vert. Puis on choisit m boules parmi les k

On les colorie en rouge. On colorie les $k-m$ restantes en bleu.
On répète ce procédé pour tout k entre m et n

Donc $\sum \binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m} 2^{n-m}, k$

- - - - - - -

Ex 10 :

Soit x_i : le nb de objs qui montrent i points.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots = n$

$\binom{n+6-1}{6-1} = \binom{n+5}{5} \rightarrow$ voir TP précédents

- - - - -

Ex 7 :

Initialisat° : forêt n sommets, m arêtes, r arbres
chaque arbre est 1 sommet isolé

pas d'arête r $m = 0 = n - r$
$\Rightarrow n = r$

Hyp : Toute forêt à n sommets a un nb d'arêtes qui correspond à n − le nb d'arbres

Considérons une forêt à $(n+1)$ sommets

Soit r le nb d'arbre

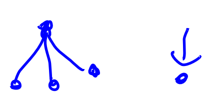
m " " d'arêtes

On enlève un sommet à F pour obtenir F' (et toutes les arêtes incidentes) une forêt (on ne peut pas avoir formé un cycle) à n sommets.

Par Hyp, $n - r' = m'$ où m' = nb d'arêtes de F' et r' = le nb d'arbres de F'

On distingue 3 cas :

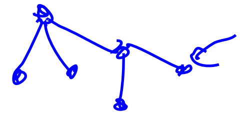
- Aucune arête incidente, le sommet est un arbre dans F :



$m' = m$

$r' = r - 1$ $\Rightarrow m = m' = n - r' = n - r - 1 = n - (r+1)$

$= (n+1) - r$

• 1 arête incidente : 

=> Le sommet était une feuille d'un arbre à au moins 2 sommets.

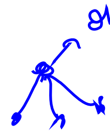
$n' = n - 1$

$r' = r \qquad n = n' + 1 =$

• 2 ou plus arêtes incidentes (v sommet interne)

Soit k le nb d'enfants de v

* v est racine

$n' = n - k$ → 

→ . . .

$r' = k - 1$

$n = n' + k = n - r' + k = n - (r+k-1) + k$

$= (n+1) - r$

* v n'est pas racine : $n' = n - (k+1)$

$r' = r - k$