Séance 11

Exercice 1.
Que vaut
$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{1}{10^n} \quad ?$$
(Rappel : H_n est le n-ième nombre harmonique.)

Exercice 2. (Examen janvier 2011.)
Calculer la somme de chacune des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{2^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} \frac{1}{10^n}$

Exercice 3. (Examen août 2011.)
Calculer la somme de chacune des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

Exercice 4.
Trouver les fonctions génératrices ordinaire et exponentielle de $(2^n+3^n)_{n\in\mathbb{N}}$, en forme close.

Ex 1 :

$$\frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n \rightarrow \text{formule}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{1}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \left(\frac{1}{10}\right)^n \Rightarrow \text{dans le cas-ci } x = \frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{10}{9} \ln \frac{10}{9}$$

Ex 2 :

① $$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-2} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2 \ln 2$$

---

② $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} \frac{1}{10^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n = \frac{x^2}{(1-x)^3}$$

FGO de $\binom{n}{2}_{n \in \mathbb{N}}$: $\dfrac{x^2}{(1-x)^3}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{10}\right)^3} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{9^3}{1000}} = \frac{10}{9^3} = \frac{10}{729}$$

Ex 3 :

① $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

$\hookrightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ FGO $\rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

---

② $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

car le cas pour $n=0$ vaut 0

FGO de $(0, 1, 2, 3, \ldots\ldots) \rightarrow$ Théorème 11

$A(x)$ FGO de $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$

$\frac{A(x)}{1-x}$ FGO de $(a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \ldots)$

On a $A(x)$ FGO de $(1,1,1,1,\ldots) \to \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \underbrace{\frac{A(x)}{(1-x)^2}}_{B(x)} \text{ FGO de } (1,2,3,\ldots\ldots)$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x \cdot B(x) \text{ FGO de } (0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

C'est ce qu'on cherchait car il manquait la valeur pour 0

→ on remplace x par $\frac{1}{2}$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

---

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$a_0 = 0$

$a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

$FGO\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$?

$A(x) \quad (a_0, a_1, a_2, \dots)$

$\int_0^x A(t)\,dt \quad \left(a_1, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots\right)$

$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt$

$= \int_0^x (1-t)^{-1}\,dt = -\ln(1-t)$

Rappel dérivat° : $(x^3)' = 3x^2$

$\int 3x^2\,dx = x^3 + \text{constante}$

• $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + cst$

$(\ln(1-t))' = \frac{1}{1-t} \cdot \underbrace{(1-t)'}_{-1} = \frac{-1}{1-t}$

$= -\ln(1-x) - (-\ln(1-0))$

$= -\ln(1-x)$

-> on remplace pour $x = \frac{1}{2}$ (énoncé)

$= -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$- \quad \cdot \quad - \quad -$

Ex 4 :

$$(\underbrace{2^n} + \underbrace{3^n})$$

FGO

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (x)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-2x}$$

$$= \frac{1-3x + 1-2x}{(1-2x)(1-3x)}$$

$$= \frac{2-5x}{(1-2x)(1-3x)}$$

FGE de a_n : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$

$\Rightarrow$ pour $2^n + 3^n$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ FGE de $(1, 1, 1, 1, \ldots)$

$$\Rightarrow = e^{2x} + e^{3x}$$

Exercice 5. (Examen Janvier [2018)
[Cet exercice sera abordé lors du dernier cours théorique]
Considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 4, a_1 = 7$ et pour $n \geq 2$,

$$a_n = 7a_{n-1} + 8a_{n-2} + 7n + 5/2.$$

1. Calculez a_n avec la méthode vue au chapitre sur les récurrences linéaires.

2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_0 = 4, b_1 = 7$ et, pour $n \geq 2$,

$$b_n = 7b_{n-1} + 8b_{n-2}.$$

   Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ la fonction génératrice ordinaire de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminez $f(x)$.

3. À l'aide de $f(x)$, retrouvez b_n pour $n \geq 2$.

Exercice 6.
Un collectionneur excentrique raffole des pavages de rectangles de largeur 2 et de longueur quelconque par des dominos verticaux 2×1 et horizontaux 1×2. Il paye sans hésiter 4€ par domino vertical et 1€ par domino horizontal. Pour combien de pavages sera-t-il prêt à payer n€ ?

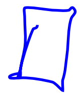
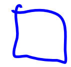
Exercice 7.
Pour $n \in \mathbb{N}$, désignons par a_n le nombre de manières de rendre n eurocents de monnaie avec des pièces de 1, 5 et 10 eurocents.

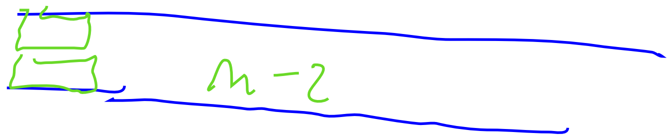
1. Déterminer a_n pour $n \in \{0, \ldots, 10\}$.

2. Trouver la fonction génératrice ordinaire $A(x)$ de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Déterminer a_n pour $n \in \{2010, 2011\}$.

Ex 6 :

4€   1€



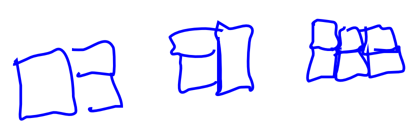
Cb de pavages, prix total en €

$$a_n = a_{n-4} + a_{n-2} \quad \forall n \geq 4$$

$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 0$

$a_4 = a_0 + a_2 = 2$

$a_5 = a_1 + a_3 = 0$

$a_6 = a_2 + a_4 = 1 + 2 = 3 \rightarrow$ 

FGO de (a_n)

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

$$= a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \sum_{n \geq 4} a_n x^n$$

$$= 1 + x^2 + \sum_{n \geq 4} a_n x^n$$

$$= 1 + x^2 + \sum_{n \geq 4} (a_{n-4} + a_{n-2}) x^n$$

$$= 1 + x^2 + \sum_{n \geq 4} a_{n-4} x^n + \sum_{n \geq 4} a_{n-2} x^n$$

$$= 1 + x^2 + x^4 \sum_{n \geq 4} a_{n-4} x^{n-4} + x^2 \sum_{n \geq 4} a_{n-2} x^{n-2}$$

$$= 1 + x^2 + x^4 \underbrace{\sum_{n \geq 0} a^n x^n}_{A(x)} + x^2 \underbrace{\sum_{n \geq 2} a_n x^n}_{A(x) - a_0 x^0 - a_1 x^1}$$

$$= 1 + x^2 + x^4 A(x) + x^2 (A(x) - 1)$$

$$A(x) = 1 + x^2 - x^2 + (x^2 + x^4) A(x)$$

$$(1 - x^2 - x^4) A(x) = 1$$

$$A(x) = \frac{1}{1 - x^2 - x^4}$$

$$\frac{t}{1 - t - t^2} \to \text{Fibonacci}$$

$$\frac{t}{1 - t - t^2} = \sum_{n \geq 0} F_n t^n$$

$$\frac{1}{1 - t - t^2} = \sum_{n \geq 0} F_{n+1} t^n$$

$$F_1 t^0 + F_2 t^1 + F_3 t^2 + \dots$$

$$t = x^2$$

$$\frac{1}{1 - x^2 - (x^2)^2}$$

$$\sum_{n \geq 0} F_{n+1} x^{2n} = \frac{1}{1 - x^2 - x^4}$$

$a_0 = F_1$

$a_1 = 0$

$a_2 = F_2$

$a_3 = 0$

$\vdots$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ F_{\frac{n}{2}+1} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Ex 7 :

a_n = # manières de rendre n cents avec 1, 5, 10 cents

① $a_0 = 1$

$a_1 = 1$ (1×1 cent)

$a_2 = 1$

$a_3 = 1$

$a_4 = 1$

$a_5 = 2$ (1×5 cents ou 5×1 cents)

$a_6 = ?$

$\vdots$

$a_{10} =$ (1x10 cents or 2x5cents or 10x1 cents or 1x5 et 5x1)

2) $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$

$$A(x) = \underbrace{\left(\sum_{n_1 \geq 0} x^{n_1}\right)}_{1+x+x^2+x^3+\dots} \underbrace{\left(\sum_{n_5 \geq 0} x^{5n_5}\right)}_{1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots} \underbrace{\left(\sum_{n_{10} \geq 0} x^{10 n_{10}}\right)}_{1+x^{10}+x^{20}+\dots}$$

$$\sum x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}}$$

$1+x+x^2+x^4 \dots + x^{10}$ $\cdot$ $1+x^5$ $\cdot$ $1+x^5$

$$= \sum_{k=0}^{y} x^{h}$$