Calculabilité et complexité

Traveaux pratiques 8

Logique des propositions

Y. Deville
C. Bertrand Van Ouytsel & V. Coppé & A. Gerniers & N. Golenvaux & M. Parmentier
Avril, 2021

1. Formalisez les raisonnements suivants à l'aide de la logique des propositions, puis déterminez s'ils sont valides en vérifiant si les conclusions sont bien des conséquences logiques des prémisses.
   (a) Si je suis coupable, je dois être puni. Or, je dois être puni.
   Donc je suis coupable.
   (b) Si je suis coupable, je dois être puni. Or, je ne dois pas être puni.
   Donc je ne suis pas coupable.
   (c) Si je suis coupable, je dois être puni. Or, je ne suis pas coupable.
   Donc je ne dois pas être puni.

2. Voici quelques exemples de tautologies qui sont si importantes (d'une manière ou d'une autre) qu'elles portent un nom. En construisant les tables de vérités de ces formules, vérifiez qu'il s'agit bien de tautologies.
   (a) Principe du tiers exclu : $(A \vee \neg A)$
   (b) Loi de Morgan : $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
   (c) Contraposition : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
   (d) Syllogisme : $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

3. Pour toute formule de la logique des propositions, il existe une formule équivalente sous forme normale conjonctive. La forme normale conjonctive n'utilise que trois opérateurs logiques : la conjonction, la disjonction et la négation. Est-il possible de sélectionner seulement deux opérateurs logiques de tel sorte que toute formule de la logique des propositions admette une formule équivalente qui ne fait intervenir que ces deux opérateurs logiques ? Justifier.

   Challenge : est-il possible de s'en sortir avec un seul opérateur logique ? Sinon, serait-il possible de définir un nouveau opérateur logique qui conviendrait ?

4. La conséquence logique peut-elle être vue comme une relation d'ordre sur les formules de la logique des propositions ? Plus précisément, est-elle :
   (a) Réflexive : $p \models p$ est-il vrai pour toute formule p ?
   (b) Transitive : $p \models q$ et $q \models r$ implique-t-il $p \models r$ pour toutes formules p, q, r ?
   (c) Symétrique : $p \models q$ et $q \models p$ implique-t-il $p = q$ pour toutes formules p, q ?

5. Trouvez des formules sous forme normale conjonctive équivalentes aux formules suivantes :
   (a) $(A \wedge B) \vee C$
   (b) $\neg(\neg A \vee B) \vee (C \Rightarrow \neg D)$
   (c) $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)$

6. En utilisant la règle de résolution, déterminez si les formules suivantes (qui sont déjà sous forme normale conjonctive) sont satisfiables :
   (a) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge \neg B$
   (b) $A \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg C)$
   (c) $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

Challenge

Expliquez comment vous pourriez utiliser un solveur SAT pour trouver une solution au jeu de sudoku suivant :

		9				7		
	4		5		9		1	
3				1				2
	1			6			7	
		2	7		1	8		
	5			4			3	
7				3				4
	8		2		4		6	
		6				5		

Challenge [1]

Soit p une formule de la logique des propositions avec k variables sous forme normale conjonctive avec n clauses (sans répétition). Discutez de la satisfiabilité de p en fonction de k et de n, du nombre minimal et du nombre maximal de littéraux différents dans chaque clause.

1. Remarque : ce challenge est vraiment long et difficile !