Chapitre V : Fonctions Génératrices

$$
\begin{aligned}
b &= a \\
ab &= a^2 \\
ab - b^2 &= a^2 - b^2 \\
b(a-b) &= (a+b)(a-b) \\
b &= a + b \\
b &= b + b \\
b &= 2b \\
1 &= 2
\end{aligned}
$$

"Une fonction génératrice est une corde à linge où on peut pendre les termes d'une suite."

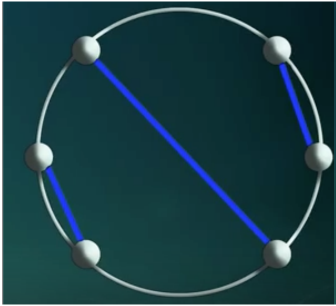
Exemple 1 (Question du jour :)

Lors d'une fête, tous les convives sont assis à une grande table ronde. Chaque invité souhaite se présenter simultanément à un autre invité en lui serrant la main. Nous rajoutons comme condition que les bras ne peuvent se croiser. De combien de manières peut-on le faire pour $2n$ *invités ?*

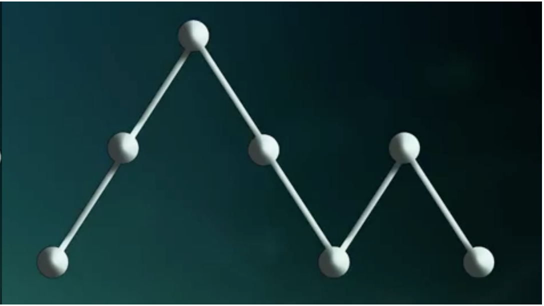
Exemple 2 (Question du jour :)

On aimerait dessiner des dessins de montagnes, avec le même nombre de segments croissants et décroissants. Nous rajoutons la condition que nous n'avons pas le droit de descendre sous l'horizon. De combien de manières peut-on dessiner avec $2n$ *segments ?*

$n=3$



$n = 3$

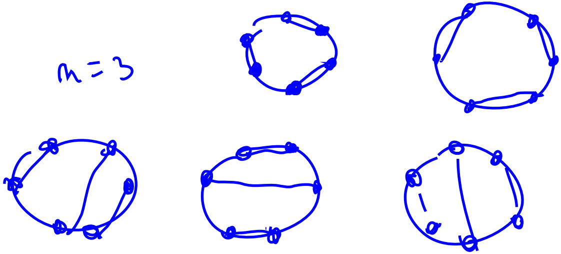


Fare ; $n = 1$

2

$n = 2$

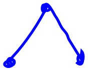
$n = 3$



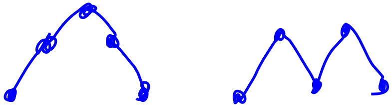
Montagnes :

2 n segments

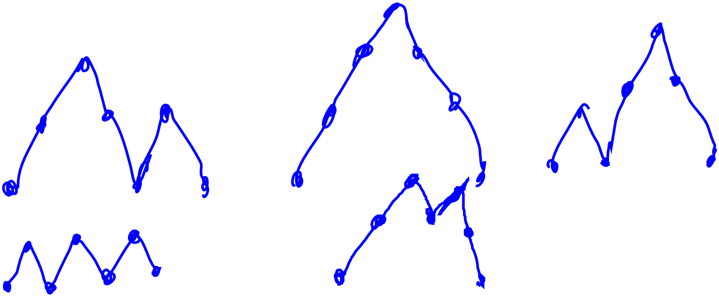
n = 1



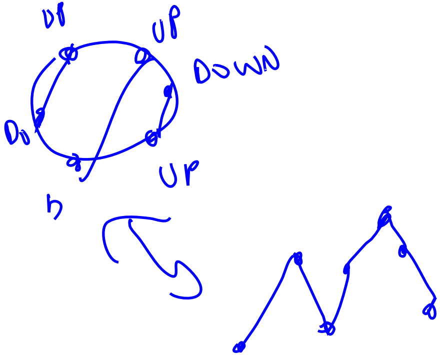
n = 2



n = 3



$\exists$ bijection



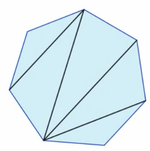
Exemples : Les nombres de Catalan

La réponse aux deux questions, est la réponses à de nombreuses questions dans divers domaines des mathématiques et sont appelés les **nombres de Catalan**. D'après le mathématicien Belge du 19ème siècle Eugène Catalan.

En 1751 **Euler** dans sa correspondance avec **Goldbach** cherche le nombre de triangulation d'un polygone. Il calcule à la main les 10 premiers et conjecture une formule. Il demande de l'aide à **Segner** pour la démonstration (voir exercice au TP).

$\Leftrightarrow$

Triangulariser un polygone ?



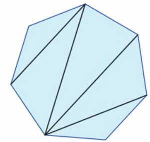
Exemples : Les nombres de Catalan : Un peu d'histoire

- Triangle : 1 triangularisation
- Carré : 2 triangularisations
- Pentagone : 5 triangularisations
- Hexagone : 14 triangularisations
- Heptagone : 42 triangularisations
- Octogone : 132 triangularisations
- Ennéagone : 429 triangularisations
- Décagone : 1430 triangularisations

Exemples : Les nombres de Catalan : Un peu d'histoire

((a×b)×c)×d
(a×b)×(c×d)
a×(b×(c×d))
a×((b×c)×d)
(a×(b×c))×d

$\Leftrightarrow$



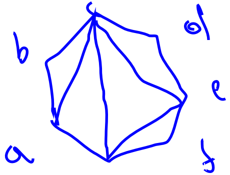
Catalan démontre le lien entre le nombre de manières de parenthéser n facteurs et le nombre de triangularisations d'un polygone à n + 1 cotés, en s'appuyant sur la formule récursive de Segner. La démonstration est calculatoire et ne montre pas un lien directe entre les 2 phénomènes. Il donne également une formule pour calculer le nombres de parenthésages pour n facteurs. La formule est belle, l'histoire garde son nom.

Exemple 3

Comment associer chaque triangularisation à un parenthésage ? Et inversément.

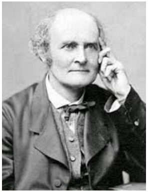
triangulat° → parenthésage

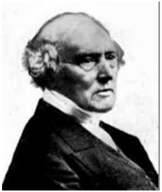
heptagone



Exemples : Les nombres de Catalan : Un peu d'histoire

En 1857 **Cayley** et **Kirkman** cherche le nombre d'arbres enracinés à n arêtes. (Vu au chapitre 3)

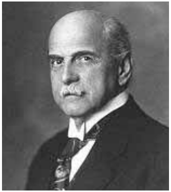




Ils ne reconnaissent pas du tout les nombres de Catalan. Ces nombres deviennent les nombres de Cayley-Kirkman. Ils étudient également le nombre d'arbres binaires entiers a $n + 1$ feuilles. Oui, le nombre est le même.....

Exemples : Les nombres de Catalan : Un peu d'histoire

Pour comprendre la formule de Catalan il faut s'intéresser au mots de **Dyck**.



Définition 1

Un mot de Dyck est un mot

- *de deux lettres : "A" et "B"*
- *contenant autant de "A" que de "B"*
- *aucun préfixe ne contient strictement plus de "B" que de "A".*

Exemple 4

Mot de Dyck : AAABBAABABBB
N'est pas un mot de Dyck : AABBBAAB

Il existe une manière plus visuelle de se représenter les mots de Dyck, c'est un mot :

- composé de : "(" et ")"
- contenant autant de "(" que de ")"
- aucun préfixe ne contient strictement plus de ")" que de "(".

Un mot de Dyck est donc une succession valide de parenthèses.

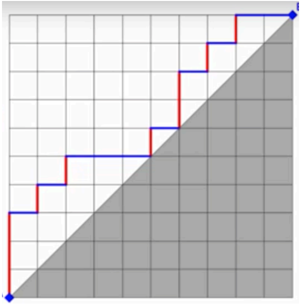
Exemple 5

Dénombrer les nombres de Dyck en fonction du nombre de paires de parenthèses.

Remarque :
Pour montrer que se sont les mêmes nombres que les nombres de Catalan on peut montrer qu'il existe autant de façon de disposer n paires de parenthèses que d'arbres enracinés à n arêtes.

On peut également le voir d'une manière plus géométrique en utilisant les **escaliers de Dyck**.

Pour un mot de Dyck donné un effectue le chemin de A à B ou A correspond à se déplacer d'une unité vers le haut et B d'une unité vers la droite.



On obtient un escalier de Dyck qui relie deux sommets opposés d'un carré sans jamais passer sous la diagonale.

Exemples : Les nombres de Catalan : Un peu d'histoire

Bien évidemment, il existe autant de mot de Dyck de longueur 2n que d'escaliers de Dyck de longueur 2n.

L'avantage, c'est que maintenant c'est facile à dénombrer (voir Chapitre 1 et petite astuce pour ne pas passer sous la diagonale).

Les nombres sont donc les nombres de :

Euler-Segner-Catalan-Cayley-Kirkman-von Dyck- ?

mais l'histoire ne retiendra que le nom de Catalan.

Exemples : Les nombres de Catalan

Définition 2

Quel est le nombre de manières c_n de parenthéser un produit de n facteurs $x_1, \ldots, x_n$ (on cherche un parenthésage complet) ? Ce nombre c_n s'appelle n-ème ***nombre de Catalan****.*

Exemples : Les nombres de Catalan

Exemple 6

Pour $n = 1$ et $n = 2$, on trouve les parenthésages triviaux

$$x_1 \quad et \quad x_1x_2 \ .$$

Pour $n = 3$, il y a 2 parenthésages :

$$(x_1x_2)x_3 \quad et \quad x_1(x_2x_3) \ .$$

Pour $n = 4$, il y a 5 parenthésages :

$$((x_1x_2)x_3)x_4 \ , \quad (x_1(x_2x_3))x_4 \ , \quad (x_1x_2)(x_3x_4) \ , \quad x_1((x_2x_3)x_4) \ ,$$

$$et \quad x_1(x_2(x_3x_4)) \ .$$

Exemples : Les nombres de Catalan

Remarque : Jusqu'ici, on a obtenu $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$ et $c_4 = 5$. Par convention, nous poserons $c_0 := 0$.

Une motivation pour chercher la valeur du n-ème nombre de Catalan c_n est par exemple le problème suivant : comment parenthéser un produit de n matrices (de tailles potentiellement différentes) pour minimiser le nombre de multiplications nécessaires pour évaluer le produit, avec un algorithme donné ?

Supposons qu'on utilise l'algorithme classique pour évaluer le produit. Une première chose à noter est que le nombre de multiplications de nombres réels dépend effectivement du parenthésage !

Exemple 7

Considérons un produit de $n = 4$ *matrices* M_1, M_2, M_3 *et* M_4 *de tailles respectives* 5×2, 2×3, 3×7 *et* 7×2. *Le produit est de taille* 5×2. *Le parenthésage* $M_1((M_2M_3)M_4)$ *requiert* $14 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 10 \cdot 2 = 90$ *multiplications, tandis que le parenthésage* $(M_1M_2)(M_3M_4)$ *requiert* $15 \cdot 2 + 6 \cdot 7 + 10 \cdot 3 = 102$ *multiplications.*

Exemples : Les nombres de Catalan

Il n'est pas immédiatement clair comment résoudre le problème de manière efficace. Quid de la solution consistant à essayer toutes les possibilités ? Comme il y a c_n parenthésages, l'algorithme sera de complexité $\Omega(c_n)$.

En réfléchissant bien, on peut obtenir un algorithme de complexité $O(n^3)$ pour calculer le meilleur parenthésage, basé sur la programmation dynamique (ceci est un bon exercice). On verra plus loin que $c_n = \Omega((4 - \varepsilon)^n)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc c_n est "en gros" une exponentielle de base 4, qui grandit beaucoup plus vite qu'un polynôme de degré 3. On s'y attendait, mais on a ici la confirmation que la solution consistant à considérer toutes les possibilités est à proscrire.

Exemples : Les nombres de Catalan

On peut obtenir une équation de récurrence pour c_n, en se basant sur l'observation suivante : le dernier produit effectué (cas où il y a n facteurs) est constitué du produit des k premiers facteurs (déjà multipliés entre eux) et du produit des $n-k$ derniers facteurs (déjà multipliés entre eux), où $k = 1, \ldots, n-1$. Donc,

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \cdots + c_{n-1} c_1 \quad \forall n \geqslant 2; \quad c_1 = 1 \tag{1}$$

Exemples : Les nombres de Catalan

Théorème 8

Pour tout $n \geqslant 1$, le n-ème nombre de Catalan est

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\ .$$

Démonstration : Considérons la **fonction génératrice ordinaire** $C(x)$ des nombres de Catalan c_n, c'est-à-dire la fonction

$$C(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

sans s'occuper de convergence (pour le moment).

Exemples : Les nombres de Catalan

Alors

$$
\begin{aligned}
C(x) &= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots \\
&= x + (c_1 c_1) x + (c_1 c_2 + c_2 c_1) x^3 + \cdots \\
&\quad + (c_1 c_{n-1} + \cdots + c_{n-1} c_1) x^n + \cdots \\
&= x + \left(c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots \right) \\
&\quad \left(c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots \right) \ .
\end{aligned}
$$

Ces égalités sont justifiées du point de vue des séries formelles : quand on compare, pour un $n \in \mathbb{N}$ donné, le coefficient de x^n dans les deux membres, on a égalité. Nous obtenons l'équation fonctionnelle :

$$C(x) = x + [C(x)]^2 \ . \tag{2}$$

Exemples : Les nombres de Catalan

Résolvons cette équation du second degré :

$$[C(x)]^2 - [C(x)] + x = 0 \iff C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2} \; .$$

On trouve deux fonctions solution :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x} \; .$$

Une de ces solutions peut être éliminée. En effet, on a $C(0) = 0$ car la série définissant $C(x)$ n'a pas de terme indépendant (qui plus est, on a posé $c_0 := 0$). Donc,

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x} \; .$$

Exemples : Les nombres de Catalan

Par la formule de la série du binôme de Newton,

$$C(x) \quad = \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{1/2}{n}4^n x^n,$$

où $\binom{1/2}{0} := 1$ par convention, et

$$\binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$$

pour $n \geqslant 1$. On trouve

$$c_n \quad = \quad (-1)^{n+1}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}^{n \text{ facteurs}}}{n!}2^{2n}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{n+1}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1(1-2)\cdots(1-2n+2)}{n!}\,2^n\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{n!}\,2^n\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{n!\,n!}\,\underbrace{n!\,2^n}_{=2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n-2)!}{n!\,n!}\,2n\\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\,. \quad \square
\end{aligned}
$$

Exemples : Les nombres de Catalan

Voyons maintenant les premières valeurs de c_n et comparons-les aux premières valeurs de F_n (suite de Fibonacci).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
c_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

On observe que $c_n \gg F_n$. Les deux suites ont un comportement exponentiel, mais de base différente. Avec les comportements asymptotiques on peut voir que $c_n = \Omega((4-\varepsilon)^n)$ (pour tout $\varepsilon > 0$) et $F_n = \Theta(\varphi^n) = \Theta((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n = O((1.6181)^n)$.

Exemples : Les nombres de Catalan

Remarquons que pour tout $n \geqslant 2$ fixé, il existe une bijection entre :

(i) les parenthésages complets d'un produit de n facteurs, et

(ii) les arbres binaires enracinés à n feuilles (comptés à isomorphisme près).

On obtient le corollaire suivant (rappelons qu'il existe une bijection entre les arbres binaires enracinés et les triangulations d'un $(n+1)$-gone, voir Théorème 34 (Chapitre 3).

Exemples : Les nombres de Catalan

Théorème 9

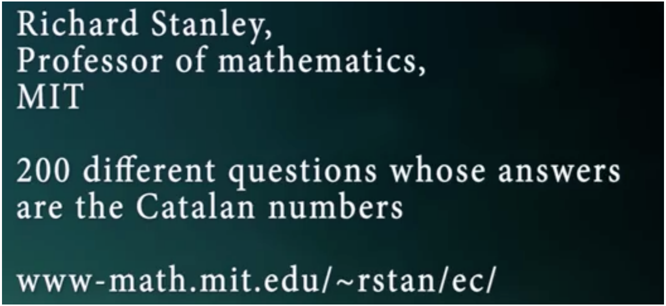
Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} &\#(\textit{arbres binaires enracinés à } n \textit{ feuilles}) \\ &\qquad = \#(\textit{triangulations d'un } (n+1)\textit{-gone}) \\ &\qquad = n\textit{-ème nombre de Catalan} \\ &\qquad = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

Exemples : Les nombres de Catalan

$$
\begin{aligned}
n+1\text{ - ème nombre de Catalan} \\
&= \#(\text{triangulations d'un } (n+2) \text{ - gone}) \\
&= \#(\text{parenthèsage d'un produit de } n+1 \text{ facteurs}) \\
&= \#(\text{arbres binaires enracinés à } n+1 \text{ feuilles}) \\
&= \#(\text{arbres enracinés à } n \text{ arêtes}) \\
&= \#(\text{manières de disposer } n \text{ paires de parenthèses}) \\
&= \#(\text{mot de Dyck de longueur } 2n) \\
&= \#(\text{d'escaliers de Dyck de longueur } 2n) \\
&= \ldots..
\end{aligned}
$$

Exemples : Les nombres de Catalan



Exemples : Retour sur les nombres de Fibonacci

Pour rappel, la suite de Fibonacci est définie par la RLCC suivante :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geqslant 2; \quad F_0 = 0;\; F_1 = 1\ .$$

Posons maintenant

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n\ .$$

Exemples : Retour sur les nombres de Fibonacci

Alors on a :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{0 + x}_{\text{conditions initiales}} + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= x + \underbrace{x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1}}_{= x f(x)} + \underbrace{x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2}}_{= x^2 f(x)} .
\end{aligned}
$$

Exemples : Retour sur les nombres de Fibonacci

Comme pour les nombres de Catalan, on débouche sur une équation fonctionnelle :

$$(1 - x - x^2)f(x) = x \ .$$

En résolvant, on trouve

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \ .$$

Décomposons maintenant $f(x)$ en fractions simples :

$$f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \varphi x} + \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{1 - \bar{\varphi} x} \ .$$

* $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$

1) racine du dénominateur : $-x^2 - x + 1 = 0$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$1 - x - x^2 = (1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)$$

2) $\dfrac{x}{1-x-x^2} = \dfrac{A}{1-\alpha_1 x} + \dfrac{B}{1-\alpha_2 x}$? A, B calcul

$$= \frac{A(1-\alpha_2 x)}{1-\alpha_1 x} + \frac{B(1-\alpha_1 x)}{1-\alpha_2 x}$$

$$= \frac{A(1-\alpha_2 x) + B(1-\alpha_1 x)}{1-x-x^2}$$

3) Trouver A, B

$$\frac{0+1x}{1-\cancel{x}-x^2} = \frac{A(1-\alpha_1 x) + B(1-\alpha_1 x)}{1-\cancel{x}-x^2}$$

$$= (A+B) + (-\alpha_2 A - \alpha_1 B)x$$

$$\begin{cases} 0 = A+B \\ -1 = \alpha_2 A + \alpha_1 B \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = A+B \iff B = -A \\ -1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)A + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ -1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot 1 - \sqrt{5}\, A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1/\sqrt{5} \\ A = 1/\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1/\sqrt{5}}{1 - \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}_{\rightarrow \varphi} x} + \frac{-1/\sqrt{5}}{1 - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}_{\rightarrow \bar{\varphi}} x}$$

Exemples : Retour sur les nombres de Fibonacci

En utilisant l'identité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x)^n = \frac{1}{1-\lambda x} ,$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n x^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\varphi}^n x^n .$$

Finalement, en identifiant le coefficient de x^n dans l'expression de gauche avec le coefficient de x^n dans l'expression de droite, on retombe sur la *formule de Binet* :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \bar{\varphi}^n) .$$

Fonctions génératrices ordinaires : théorie de base

Définition 3 (Fonction génératrice ordinaire)

La fonction génératrice ordinaire (FGO) de la suite

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

est définie par

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

On note $[x^n]A(x)$ *le coefficient de* x^n *dans* $A(x)$*, c'est-à-dire*

$$[x^n]A(x) = a_n \ .$$

Fonctions génératrices ordinaires : théorie de base

Remarque :

La série définissant la FGO $A(x)$

- converge pour certains $x \in \mathbb{R}$;
- diverge pour d'autres $x \in \mathbb{R}$.

Pour le moment, on ignore les questions de convergence.

- Les manipulations effectuées sur les FGO sont bien définies si on les considère comme *séries formelles* ;
- Les séries auxquelles on s'intéresse ont typiquement de bonnes propriétés de convergence. En particulier, elles convergent la plupart du temps au moins pour

$$x \in \left]-r; r\right[$$

pour un certain choix de $r > 0$ (que l'on appelera le rayon de convergence).

Fonctions génératrices ordinaires : théorie de base

Exemple 10

La FGO de $(1, 1, 1, \ldots)$ *est*

$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{u_n}_{1} x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} .$$

De manière plus générale, la FGO de $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^n, \ldots)$ *est*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n = \frac{1}{1-\lambda x} .$$

Le résultat suivant va nous permettre d'obtenir la FGO d'une suite obtenue en faisant une opération simple (addition, multiplication, etc. . .) sur une ou plusieurs suite(s) dont on connaît la (les) FGO(s).

Fonctions génératrices ordinaires : théorie de base

Théorème 11

Soient $A(x)$ la FGO de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B(x)$ la FGO de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :

(i) $A(x)+B(x)$ *est la FGO de* $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $xA(x)$ *est la FGO de* $(0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots)$.

(iii) $\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$ *est la FGO de* $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n}, \ldots)$.

(iv) $\frac{A(x)-a_0}{x}$ *est la FGO de* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, \ldots)$.

(v) $A'(x)$ *est la FGO de* $(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, (n+1)a_{n+1}, \ldots)$.

(vi) $A(x)B(x)$ *est la FGO de* $(a_0b_0, a_0b_1+a_1b_0, a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0, \ldots)$.

(vii) $(1-x)A(x)$ *est la FGO de* $(a_0, a_1-a_0, a_2-a_1, \ldots, a_n-a_{n-1}, \ldots)$.

(viii) $\frac{A(x)}{1-x}$ *est la FGO de* $(a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \ldots, \sum_{k=0}^{n} a_k, \ldots)$.

Fonctions génératrices ordinaires : théorie de base

Démonstration :

(i) (exercice facile).

(ii)

coeff

$$xA(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \ .$$

(iii)

$$\int_0^x A(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t\right)$$

$$\int_0^x t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^n}{n} \ .$$

y décalé de 1

(i) $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\qquad$ $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

(iv) On a

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 x^0 = x \sum_{n=1} a_n x^{n-1}$

$$A(x) - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n \;.$$

$n=0$

Il suffit alors de diviser par x.

(v)

$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

$$A'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \;.$$

(vi)

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n \;. \end{aligned}$$

(vii) Par (vi) : Si $B(x)$ est la FGO de $(1, -1, 0, 0, \ldots)$, alors $(1-x)A(x) = A(x)(1-x) = A(x)B(x)$ est la FGO de

$1 - x + 0 \cdot x \ldots$

a_0b_0 $\quad a_0b_1 + a_1b_0 \quad a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$

$$\left(a_0, \underbrace{a_0(-1) + a_1(1)}_{=a_1 - a_0}, \ldots, \underbrace{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots}_{=0} + \underbrace{a_{n-1}(-1) + a_n(1)}_{=a_n - a_{n-1}}, \ldots\right).$$

(viii) Par (vi), de manière similaire, si $B(x)$ est la FGO de $(1, 1, 1, \ldots)$, alors $\frac{1}{1-x}A(x) = A(x)\frac{1}{1-x} = A(x)B(x)$ est la FGO de

$$\left(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots, \sum_{k=0}^{n} a_k, \ldots\right). \qquad \square$$

Voyons quelques applications du théorème. Pour commencer, quelle est la FGO de la suite $(0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$?

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \dfrac{1}{1-x} & = & \text{FGO de } (1, 1, 1, 1, \ldots) \\
\underset{(viii)}{\Longrightarrow} & \dfrac{1}{1-x} \cdot \dfrac{1}{1-x} & = & \text{FGO de } (1, 1+1, 1+1+1, \ldots) \\
 & & = & (1, 2, 3, \ldots, n+1, \ldots) \\
\underset{(ii)}{\Longrightarrow} & \dfrac{x}{(1-x)^2} & = & \text{FGO de } (0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots) \; .
\end{array}
$$

En généralisant, on obtient le résultat suivant.

Théorème 12

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, la FGO de $\left(\binom{n}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $k \in \mathbb{N}$ fixé est égal à

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Démonstration : (Ne pas connaitre pour l'examen)
En effet, c'est vrai pour $k = 0$. Vérifions que si c'est vrai pour k, ça implique que ça l'est également pour $k + 1$. Supposons donc que $\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ est la FGO de $\left(\binom{n}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, $\frac{x}{1-x} \cdot \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ est la FGO de

$$\begin{aligned}
&\left(0, \binom{0}{k}, \binom{0}{k} + \binom{1}{k}, \binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \binom{2}{k}, \ldots\right) \\
= &\left(\binom{0}{k+1}, \binom{1}{k+1}, \binom{2}{k+1}, \binom{3}{k+1}, \ldots\right) \\
= &\left(\binom{n}{k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

Ci-dessus, on a utilisé l'identité de somme parallèle pour montrer la première égalité. □

Fonctions génératrices ordinaires : théorie de base

- Cherchons maintenant la FGO de $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$. Par (iii), c'est

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x = \Big[\ln\frac{1}{1-t}\Big]_0^x = \ln\frac{1}{1-x} - 0\ .$$

- Par (viii), la FGO de $\left(0, 1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots, 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \ldots\right)$ est donc

$$\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}$$

Définition 4 (Nombre harmonique)

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

est le n-ème ***nombre harmonique****. (Pour $n = 0$, on a $H_0 := 0$.)*

Théorème 13

La FGO de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres harmoniques est

$$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} \ .$$

Remarque :

Pour tout choix de *noyau* $N(x,n)$, on peut définir une fonction génératrice via la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot N(x,n) \ .$$

Si on prend $N(x,n) = x^n$ on obtient les FGO et si on prend $N(x,n) = \frac{x^n}{n!}$ on obtient les FGE (fonctions génératrices exponentielles, voir plus loin).

Fonctions génératrices ordinaires : récurrences linéaires

On peut résoudre des RLCC (récurrences linéaires à coefficients constants) homogènes ou non homogènes en utilisant les FGO.

Nous avons vu plus haut l'exemple des nombres de Fibonacci, dont la FGO est

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \ .$$

Voyons un autre exemple facile, mais avec une RLCC non homogène cette fois.

Exemple 14

Soit $A(x)$ la FGO de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad \forall n \geq 1; \quad a_0 = 0\ .$$

cs non homogène

Alors

$$A(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(2a_{n-1} + 1)}x^n = 0 + 2xA(x) + \underbrace{\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)}_{=\frac{x}{1-x}}\ .$$

$$= 0 + 2x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}}_{A(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} 1 x^n$$

Par conséquent,

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}\ .$$

Fonctions génératrices ordinaires : récurrences linéaires

Exemple 15 (suite)

En décomposant en fractions simples, on trouve

$$A(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) x^n \ .$$

Donc

$$a_n = [x^n]A(x) = 2^n - 1 \quad \forall n \geq 0.$$

Ceci se généralise à toutes les RLCC. La méthode de résolution est la suivante :

(i) Déterminer la FGO $A(x)$ de la suite inconnue $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Celle-ci sera toujours une fonction rationnelle du type $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, et $\deg P < \deg Q$.

(ii) Décomposer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fractions simples.

(iii) Extraire les coefficients en utilisant la décomposition.

(Ne pas connaitre le Quicksort pour l'examen)

Nous allons analyser l'algorithme *Quicksort* (Hoare, 1962) :

```
def partition(a, l, r, i):
  v := a[i]
  swap a[i] and a[r]
  s := l
  for k from l to r-1:
    if a[k] <= v:
      swap a[k] and a[s]
      s := s + 1
  swap a[s] and a[r]
  return s

def quicksort(a, l, r):
  if r > l:
    select a pivot index i
    new_i := partition(a, l, r, i)
    quicksort(a, l, new_i - 1)
    quicksort(a, new_i + 1, r)
```

Nos hypothèses seront les suivantes :

- Le vecteur à trier est une permutation des nombres de 1 à N.
- Le vecteur à trier est choisi uniformément aléatoirement parmi les $N!$ permutations de $1, \ldots, N$.
- On choisit le pivot i toujours, disons, tout à droite du vecteur ($i = r$). Ceci permet simplement de fixer les idées.

Soit X_N le nombre de comparaisons entre éléments du vecteur effectuées par quicksort sur un vecteur de taille N. Nous allons calculer l'espérance (moyenne) $E[X_N]$ de la variable aléatoire X_N.

Décomposons

$$X_N = Y_N + Z_N$$

où Y_N est le nombre de comparaisons effectuées pendant le partitionnement et Z_N est le nombre de comparaisons effectuées après le partitionnement, dans la partie récursive.
Notons que le nombre de comparaisons effectuées pendant le partitionnement est toujours $N-1$. Par conséquent, à N fixé, la variable aléatoire Y_N est constante, égale à $N-1$. Donc on a

$$E[Y_N] = N - 1 \ .$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E[X_N] &= E[Y_N] + E[Z_N] \\ &= (N-1) + E[Z_N] \end{aligned}$$

Fonctions génératrices ordinaires : applications : Quicksort

Pour chaque $k = 0, \ldots, N-1$, considérons l'événement "le rang du pivot est k". Ces N événements partitionnement l'espace fondamental. Par choix de la distribution initiale, ces événements ont tous la même probabilité, a savoir : $1/N$. La distribution conditionnelle sur chacun de ces évènements est de nouveau une distribution uniforme. Par ce qui précède, on peut calculer l'espérance de Z_N comme suit :

$$\begin{aligned}
E[Z_N] &= \sum_{k=0}^{N-1} P[\text{rang du pivot est } k] \cdot E[Z_N \mid \text{rang du pivot est } k] \\
&= (N-1) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \cdot \left(E[X_k] + E[X_{N-1-k}]\right) .
\end{aligned}$$

Fonctions génératrices ordinaires : applications : Quicksort

Posons maintenant $C_N := E[X_N]$. On trouve la récurrence

$$C_N = (N-1) + \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_k \quad \forall N \geq 1; \quad c_0 = 0\ .$$

Soit $C(x) := \sum_{N=0}^{\infty} c_N x^N$ la FGO de $(c_0, c_1, c_2, \ldots) = (0, c_1, c_2, \ldots)$. En multipliant l'équation de récurrence par N, on obtient :

$$NC_N = N(N-1) + 2\sum_{k=0}^{N-1} c_k \quad \forall N \in \mathbb{N}\ .$$

En sommant pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{N=0}^{\infty} NC_N x^N = \sum_{N=0}^{\infty} N(N-1)x^N + 2\sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k\right) x^N\ .$$

Nous allons maintenant utiliser les résulats de base sur les FGO obtenus précédemment, voir en particulier le Théorème 11, pour exprimer chacun des termes ci-dessus :

- $\sum_{N=0}^{\infty} NC_N x^N$ est la FGO de $(0c_0, 1c_1, 2c_2, \ldots)$, donc $xC'(x)$.
- $\sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{N-1} c_i\right) x^N$ est la FGO de $(0, c_0, c_0 + c_1, \ldots)$, donc $\frac{x}{1-x} C(x)$
- $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{N(N-1)}{x}^N$ est 2 *fois* la FGO de $\left(\binom{n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $2 \cdot \frac{x^2}{(1-x)^3}$.

En remplaçant dans l'équation ci-dessus, on trouve une équation différentielle linéaire ordinaire :

$$xC'(x) = 2\frac{x^2}{(1-x)^3} + 2\frac{x}{1-x}C(x) \ .$$

Résolvons cette équation différentielle par la méthode des facteurs intégrants :

$$
\begin{aligned}
xC'(x) &= 2\frac{x^2}{(1-x)^3} + 2\frac{x}{1-x}C(x) \\
&\underset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} C'(x) - \frac{2}{1-x}C(x) = 2\frac{x}{(1-x)^3} \\
&\Longleftrightarrow (1-x)^2C'(x) - 2(1-x)C(x) = 2\frac{x}{1-x} \\
&\Longleftrightarrow \left[(1-x)^2C(x)\right]' = 2\frac{x}{1-x} \\
&\Longleftrightarrow (1-x)^2C(x) = \int 2\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x \\
&\Longleftrightarrow (1-x)^2C(x) = 2\ln\frac{1}{1-x} - 2x + \mathrm{CST} \quad \text{avec CST} = 0 \\
&\qquad \text{car } C(0) = 0
\end{aligned}
$$

Fonctions génératrices ordinaires : applications : Quicksort

Finalement, on trouve

$$C(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \ln \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{(1-x)^2} \ .$$

Théorème 16

Le nombre moyen de comparaisons entre éléments effectuées par Quicksort pour trier une permutation aléatoire des nombres 1, ..., N est exactement :

$$C_N = [x^N]C(x) = 2(N+1)(H_{N+1}-1) - 2N \ .$$

<u>Démonstration :</u> Par la Proposition 13,

$$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$$

est la FGO de $(H_0, H_1, H_2, \ldots, H_N, \ldots)$, où $H_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}$ et $H_0 = 0$. Donc,

$$\frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1}{1-x}$$

est la FGO de $(H_0, H_0 + H_1, \ldots, H_0 + H_1 + \ldots + H_N, \ldots)$. Or,

Fonctions génératrices ordinaires : applications : Quicksort

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} H_k = \sum_{k=1}^{N} H_k &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} + \\
&\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} + \\
&\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} + \\
&\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
&\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} - N \\
&= (N+1)H_N - N \\
&= (N+1)(H_{N+1} - 1) .
\end{aligned}
$$

De plus,

$$\frac{x}{(1-x)^2}$$

est la FGO de $(0, 1, 2, 3, \ldots, N, \ldots)$. En sommant et multipliant par deux, on conclut de ce qui précède :

$$\begin{aligned} c_N = [x^N]C(x) &= [x^N]\frac{2}{(1-x)^2}\ln\frac{1}{1-x} - \frac{2x}{(1-x)^2} \\ &= 2(N+1)(H_{N+1}-1) - 2N\ . \end{aligned}$$

□

Fonctions génératrices ordinaires : applications : Quicksort

Remarque : On verra plus tard que $H_N \sim N \ln N$, donc en particulier

$$E[X_N] \sim 2N \ln N \ .$$

En déployant des efforts supplémentaires, Knuth a pu montrer

$$\mathrm{Var}[X_N] \sim N^2 \left(7 - \frac{2\pi^2}{3}\right) \ .$$

Rappelons l'*inégalité de Chebyshev* : $P[|X - E[X]| \geqslant a] \leqslant \frac{\mathrm{Var}[X]}{a^2}$.
En appliquant cette inégalité à la variable aléatoire X_N, on voit

$$P[|X_N - E[X_N]| \geq KN] \leqslant \frac{\mathrm{Var}[X_N]}{K^2 N^2} \sim \frac{7 - \frac{2\pi^2}{3}}{K^2} \ .$$

Donc la probabilité que X_N s'écarte fort de sa moyenne est extrêmement faible. Ceci explique pourquoi Quicksort se montre si rapide en pratique. (Alors que la complexité au pire cas est $\Omega(N^2)$.)

Fonctions génératrices ordinaires : applications : Un problème de monnaie

Nous terminons notre bref tour des applications des fonctions génératrices ordinaires avec le problème suivant, dû à **Pòlya** (1887-1985) :

De combien de manières peut-on rendre n eurocents de monnaie avec des pièces de 1, 2, 5 et 10 eurocents ?

Fonctions génératrices ordinaires : applications : Un problème de monnaie

Soit $A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la FGO de la suite recherchée. Alors

$$A(x) = \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} x^{n_1}\right)\left(\sum_{n_2=0}^{\infty} x^{2n_2}\right)\left(\sum_{n_5=0}^{\infty} x^{5n_5}\right)\left(\sum_{n_{10}=0}^{\infty} x^{10n_{10}}\right) ,$$

et donc

$$A(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \ !$$

Remarquez le peu d'efforts à fournir pour trouver une expression de la FGO $A(x)$. Maintenant, comme extraire les coefficients a_n ?

Fonctions génératrices ordinaires : applications : Un problème de monnaie

On a

$$A(x) = \frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^9}{1 - x^{10}} \cdot \frac{1 + x^2 + \ldots + x^8}{1 - x^{10}} \cdot \frac{1 + x^5}{1 - x^{10}} \cdot \frac{1}{1 - x^{10}} \ .$$

Maintenant, on peut allègrement effectuer le produit des numérateurs. Le numérateur résultant est un polynôme de degré 22, que nous noterons $\sum_{i=0}^{22} c_i x^i$. Reprenons :

$$A(x) = \frac{\sum_{i=0}^{22} c_i x^i}{(1 - x^{10})^4} = \sum_{i=0}^{22} c_i \frac{x^i}{(1 - x^{10})^4} \ ,$$

avec

$$c = (1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 8, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 1, 1) \ .$$

Fonctions génératrices ordinaires : applications : Un problème de monnaie

On sait que $\frac{x^3}{(1-x)^4}$ est la FGO de $\left(\binom{n}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir Proposition 12).
Donc $\frac{1}{(1-x)^4}$ est la FGO de $\left(\binom{n+3}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
On va se baser là-dessus pour extraire les coefficients :

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k \Longrightarrow \frac{1}{(1-x^{10})^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{10k} ,$$

donc

$$[x^{10k}]\frac{1}{(1-x^{10})^4} = \binom{k+3}{3}$$

puis

$$[x^n]\frac{1}{(1-x^{10})^4} = \begin{cases} \binom{\frac{n}{10}+3}{3} & \text{si } 10 \mid n \\ 0 & \text{si } 10 \nmid n \end{cases}$$

Fonctions génératrices ordinaires : applications : Un problème de monnaie

En posant $c_i = 0$ pour $i \in \{23, \ldots, 29\}$, et en utilisant le fait que $\binom{p}{3} = 0$ pour $p < 3$, on peut écrire la formule suivante pour a_n :

$$a_n = [x^n]A(x) = c_t \binom{\frac{n-t}{10} + 3}{3} + c_{t+10} \binom{\frac{n-t}{10} + 2}{3} + c_{t+20} \binom{\frac{n-t}{10} + 1}{3},$$

où t est le reste de la division de n par 10, c'est-à-dire $t \equiv n \pmod{10}$ et $t \in \{0, \ldots, 9\}$.

Exemple 17

Pour $n = 10$, la formule donne

$$a_{10} = \binom{4}{3} + 7 \cdot \binom{3}{3} + 0 = 4 + 7 = 11 \ ,$$

ce qui est bien correct (exercice : compter le nombre de manières de rendre 10 eurocents de monnaie avec des pièces de 1, 2, 5 et 10 et vérifier que c'est bien 11 comme le prédit notre formule.)

Définition 5 (Fonction génératrice exponentielle)

La fonction génératrice exponentielle (FGE) de la suite

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

est définie par

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \ .$$

On écrit :

$$n![x^n]A(x) = a_n \ .$$

Exemple 18 (Par calcul direct)

La FGE de $(1, 1, 1, \dots) = \left(\binom{n}{0}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ .$$

Généralisons : la FGE de $\left(\binom{n}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} e^x \ .$$

La FGE de $(1, 1, 2, 6, 24, \dots, n!, \dots) = (n!)_{n\in\mathbb{N}}$ *est*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x} \ .$$

Fonctions génératrices exponentielles : théorie de base

Remarquons que la FGO de la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$, contrairement à sa FGE, ne converge que pour $x = 0$. Ceci est un des avantages des FGE. Nous verrons plus loin que les FGE se prêtent mieux au comptage de structure étiquetées, alors que les FGO se prêtent mieux au comptage de structures non étiquetées.

Le résultat suivant est le pendant du Théorème 11, pour les fonctions génératrices exponentielles.

Fonctions génératrices exponentielles : théorie de base

Théorème 19

Soient $A(x)$ la FGE de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B(x)$ la FGE de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :

(i) $A(x)+B(x)$ *est la FGE de* $(a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n, \ldots)$

(ii) $\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$ *est la FGE de* $(0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots)$

(iii) $xA(x)$ *est la FGE de* $(0, a_0, 2a_1, 3a_2, \ldots, na_{n-1}, \ldots)$

(iv) $A'(x)$ *est la FGE de* $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n+1}, \ldots)$

(v) $\frac{A(x)-A(0)}{x}$ *est la FGE de* $(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{n+1}, \ldots)$

(vi) $A'(x)-A(x)$ *est la FGE de* $(a_1-a_0, a_2-a_1, \ldots, a_{n+1}-a_n, \ldots)$

(vii) $A(x)B(x)$ *est la FGE de* $(a_0b_0, a_0b_1+a_1b_0, a_0b_2+2a_1b_1+a_2b_0, \ldots, \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}, \ldots)$

(viii) $e^xA(x)$ *est la FGE de* $(a_0, a_0+a_1, a_0+2a_1+a_2, \ldots, \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k, \ldots)$

Fonctions génératrices exponentielles : application

Nous désirons calculer la somme

$$S_t(n) := \sum_{0 \leqslant k < n} k^t = 0^t + 1^t + \cdots + (n-1)^t$$

des puissances t-èmes des naturels de 0 à $n-1$, pour $t \in \mathbb{N}$.

Exemple 20

Pour $t = 0$,

$$S_0(n) = 0^0 + 1^0 + \ldots + (n-1)^0 = n$$

(on a posé $0^0 = 1$*). Pour* $t = 1$,

$$S_1(n) = 0^1 + 1^1 + \ldots + (n-1)^1 = \frac{n(n-1)}{2} \, .$$

Fonctions génératrices exponentielles : application

Nous allons obtenir une formule générale pour $S_t(n)$ qui fait intervenir les nombres de Bernouilli (Jacques Bernouilli, 1654-1705), voir Théorème 21 ci-dessous.

La suite des **nombres de Bernouilli** $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} = (B_0, B_1, B_2, \ldots)$ est définie comme l'unique suite vérifiant

$$x = \left(B_0 + B_1\frac{x}{1!} + B_2\frac{x^2}{2!} + B_3\frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right). \tag{3}$$

Fonctions génératrices exponentielles : application

En d'autres termes, cette suite est telle que sa FGE est

$$\frac{x}{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots} = \frac{x}{e^x - 1} \; .$$

Donc, pour $k \in \mathbb{N}$, le k-ème nombre de Bernouilli vérifie

$$B_k := k![x^k]\frac{x}{e^x - 1} \; .$$

On peut calculer B_k en identifiant les coefficients de x^{k+1} dans les deux membres de (3). Ce calcul fait intervenir $B_0, \dots, B_{k-1}$, que l'on suppose avoir calculé avant.

Fonctions génératrices exponentielles : application

Par exemple, pour $0 \leqslant k \leqslant 3$, on trouve

$$\begin{aligned} 1 &= B_0 \\ 0 &= \frac{1}{2}B_0 + B_1 \\ 0 &= \frac{1}{6}B_0 + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 \\ 0 &= \frac{1}{24}B_0 + \frac{1}{6}B_1 + \frac{1}{4}B_2 + \frac{1}{6}B_3 \ , \end{aligned}$$

ce qui donne $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$ et $B_3 = 0$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2\,730}$	0

Fonctions génératrices exponentielles : application

Théorème 21

Pour tous $t, n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\sum_{0 \leqslant k < n} k^t = \frac{1}{t+1} \sum_{k=0}^{t} \binom{t+1}{k} B_k n^{t+1-k} .$$

Fonctions génératrices exponentielles : application

Démonstration : (Ne pas connaitre pour l'examen)
A n fixé, la FGE de la suite $(S_0(n), S_1(n), S_2(n), \ldots) = (S_t(n))_{t\in\mathbb{N}}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty} S_t(n)\frac{x^t}{t!} &= \sum_{t=0}^{\infty}\left(\sum_{0\leqslant k<n} k^t\right)\frac{x^t}{t!} \\
&= \sum_{0\leqslant k<n}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(kx)^t}{t!} \\
&= \sum_{0\leqslant k<n} e^{kx} \\
&= 1 + e^x + (e^x)^2 + \ldots (e^x)^{n-1} \\
&= \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = \frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{e^{nx}-1}{x}\,.
\end{aligned}$$

Fonctions génératrices exponentielles : application

Dans cette dernière expression, le facteur de gauche est par définition la FGE de la suite des nombres de Bernouilli $(B_0, B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots)$.

Le facteur de droite, est quant à lui la FGE de la suite $(n, \frac{n^2}{2}, \frac{n^3}{3}, \ldots, \frac{n^{\ell+1}}{\ell+1}, \ldots)$.

La FGE de la suite recherchée étant le produit des FGE des deux suites $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{n^{\ell+1}}{\ell+1})_{\ell\in\mathbb{N}}$, la suite recherchée $(S_t(n))_{n\in\mathbb{N}}$ peut s'obtenir en calculant la convolution binomiale de ces deux suites (voir Théorème 19(vii)) :

Fonctions génératrices exponentielles : application

$$
\begin{aligned}
S_t(n) &= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} B_k \frac{n^{t+1-k}}{t+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{t} \frac{t!}{k!(t-k)!} B_k \frac{n^{t+1-k}}{t+1-k} \\
&= \frac{1}{t+1} \sum_{k=0}^{t} \binom{t+1}{k} B_k n^{t+1-k} . \quad \square
\end{aligned}
$$

Résumé des points importants du chapitre

1. Les nombres de Catalan et leur histoire multiple ; les mots et les escaliers de Dyck ;
2. Les nombres de Catalan et leur FGO ; Fibonacci et sa FGO ;
3. Les Fonctions Génératrices Ordinaires ;
4. Les nombres Harmoniques ;
5. Récurrences linéaires et FGO ;
6. Applications : Quicksort et Problèmes de monnaie ;
7. Les Fonctions Génératrices Exponentielles ;