MATHF307 - Démonstrations à connaître

Laenen Maximilien

15 décembre 2021

1 Analyse combinatoire

Théorème 24 - Addition/induction *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n > k > 0$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration : Fixons un élément $e \in [n]$. Il y a deux types de sous-ensembles $S \subseteq [n]$ de taille k : ceux qui contiennent e, et ceux qui ne contiennet pas e. Cela donne une partition de l'ensemble des sous-ensembles de $[n]$ de taille k en deux ensembles disjoints :

$$\{S | S \subseteq [n], |S| = k\} = \{S | S \subseteq [n], |S| = k, e \in S\} \cup \{S | S \subseteq [n], |S| = k, e \notin S\}$$

Le premier de ces deux ensembles a $\binom{n-1}{k-1}$ éléments, et le second a $\binom{n-1}{k}$ éléments. On conclut en appliquant le principe d'addition. $\square$

Théorème 27 - Binôme de Newton *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Démonstration : Distribuons le produit

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y) \cdot ... \cdot (x+y)}_{n \text{ fois}}$$

Chaque terme de l'expression résultante s'obtient en choisissant pour chacun des n parenthèses le terme de gauche (c'est-à-dire x) ou le terme de droite (c'est-à-dire y). Chacun des termes du produit distribué correspond donc univoquement à un sous-ensemble $S \subseteq [n]$, à savoir l'ensemble des positions des parenthèses où le terme de droite (c'est-à-dire y) a été choisi pour former le produit. Donc nous aurons $i \in S$ ssi c'est y qui a été choisi dans la i-ème parenthèse. Le terme correspondant à un sous-ensemble S de taille k est $x^{n-k}y^k$. Ce monôme est obtenu exactement $\binom{n}{k}$ fois dans l'expression. Ceci monter le théorème. $\square$

Théorème 37 - Pigeonhole principle *Si les élément d'un ensemble de cardinalité N sont partitionnés en k sous-ensembles, alors l'un de ses sous-ensembles contient au moins $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ éléments. (Note $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier qui est plus grand ou égale à x.)*

Démonstration : Soit A un ensemble de cardinalité N, et A est partitionné en sous-ensembles $A_1, A_2, ..., A_k$ (donc disjoints et dont l'union forme l'ensemble A). Soit $x = \frac{N}{k}$. On suppose "par contradiction" que $|A_i| < x$ pour chaque i. Alors

$$N = \sum_{i=1}^{k} |A_i| < \sum_{i=1}^{k} x = kx = N$$

Cette contradiction montre qu'il doit y avoir au moins un i tel que $|A_i| \geq x$. Mais, comme $|A_i|$ est un entier, on obtient que $|A_i| \geq \lceil x \rceil$, ie $|A_i| \geq \lceil \frac{N}{k} \rceil$. □

2 Graphes

Théorème 16 *Un graphe (non dirigé) possède un nombre paire de sommets de degré impair.*

Démonstration : Soit $G = (V, E)$ un graphe non dirigé. Soient $N \subset V$ l'ensemble des sommets de degré impair et $M \subset v$ l'ensemble des sommets de degré pair. On sait que $V = M \cup N$.
Selon le théorème de la poignée de main, on sait que

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{n \in N} deg(n) + \sum_{m \in M} deg(m)$$

avec

$$\sum_{m \in M} deg(m) = 2p$$

pour un $p \in \mathbb{N}$. Donc

$$2(|E| - p) = \sum_{n \in N} deg(n$$

En d'autres termes : la somme des degrés des sommets d'ordre impair est paire.
Notons qu'une somme impaire de nombres impaires est toujours impaire et qu'une somme paire de nombres impaires est toujours paire. Ce qui implique que $|N| = 2q$ pour un $q \in \mathbb{N}$.□

Théorème 36 *Dans un graphe connexe et non-dirigé, il existe un chemin simple entre chaque paire de sommets distincts.*

Démonstration :
Par récurrence : Soit $P(n)$ = le fait qu'il existe un chemin simple entre chaque paire de sommets distincts dans tout graphe connexe non-dirigé à n sommets.

- *$n = 2$. $P(2)$ est vraie, car sinon les 2 sommets (donc le graphe au complet) serait non-connexe, ce qui est en contradiction avec l'énoncé.*
- *Hypothèse : On suppose que $P(n)$ est vrai pour $n \geq 2$.*
- *Thèse : $P(n+1)$?*
  Prenons un graphe connexe et non-dirigé de n sommets et on y rajoute un sommet, et au moins une arête (incidente à ce nous sommets). Selon l'hypothèse il existe un chemon simple entre chaque paire de sommets du graphe d'origine. La nouvelle arête est incidente au nouveau sommet mais également à un sommet du graphe d'origine. On peut en déduire qu'il existe un chemin simple entre le nouveau sommet et chaque ancien sommet. Nous avons donc un graphe connexe et non-dirigé de $n+1$ sommets où il existe un chemin simple entre chaque paire de sommets. $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence on a montré $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq 2$. □

Théorème 42 *Soit G un graphe avec A sa matrice d'adjacence avec les sommets ordonné comme suit $v_1, v_2, ..., v_n$ (graphes avec des arêtes dirigées ou non, des arêtes multiples et boucles)*
Le nombre de chemins différents de longueur r de v_i à v_j, où r est un entier positif, égale à la (i,j)ème entrée de A^r.

Démonstration : par récurrence. Soit G un graphe avec A sa matrice d'adjacence et ses n sommets $v_1, v_2, ..., v_n$.
Soit $P(r)$, le fait que le nombre de chemins différents de v_i à v_j de longueur r est égale à la (i,j)ème entrée de A^r.

- *Soit $P(1)$ le fait que le nombres de chemins de longueur 1 de v_i à v_j de longueur 1 est égale à la (i,j)ème entrée de A, ce qui est vrai par définition de la matrice d'adjacence.*
- *Hypothèse : On suppose que $P(r)$ est vrai pour $r \geq 1$*
- *Thèse : $P(r+1)$?*
  Le nombre de chemins différent de longueur $r+1$ de v_i à v_j est égale au nombre de chemins différents de longueur 1 de v_i à un autre sommet v_k multiplié par le nombre de chemins différents de longueur r de v_k à v_j. Donc le nombre de chemins différents de longueur $r+1$ de v_i à v_j est $\sum_{k=1}^{n}(A_{(i,k)}.A^r_{(k,j)})$ ce qui est égale à (i,j)ème entrée de A^{r+1}, donc $P(r+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que l'affirmation est vraie $\forall r \geq 1$. □

3 Arbres

Théorème 12 *Un arbre à n sommets possède $n-1$ arêtes.*

Démonstration : par récurrence sur n.
Soit $P(n)$ le fait qu'un arbre à n sommets possède $n-1$ arêtes.

- *$P(1)$ établit le fait qu'un arbre à 1 sommet n'a aucune arête ce qui est vrai. Si un graphe à 1 sommet possède une arête il en découle qu'il doit contenir un circuit simple ce qui est en contradiction avec la définition d'un graphe simple.*
- *Hypothèse : Soit $P(n)$ vrai pour $n \geq 1$*
- *Thèse : $P(n+1)$?*
  Prenons un arbre à n sommets et $n-1$ arêtes, auquel on rajoute 1 sommet. Il faut dans ce cas rajouter également une arête sinon on perd la connectivité ce qui est en contradiction avec la définition d'un arbre. Selon la Théorème 4 on ne peut rajouter plus qu'une arête sans introduire un circuit simple dans le graphe, qui dés lors ne serait plus un arbre. Nous obtenons donc un arbre à $n+1$ sommets et $(n-1)+1$ arêtes. Ce qui implique que $P(n+1)$ est vrai.

Par récurrence nous avons montré que $P(n+1)$ est vrai pour tout $n \geq 1$. □

Théorème 20 *Il y a tout au plus m^h feuilles dans un arbre m-aire de hauteur h.*

Démonstration : par récurrence sur h.
Soit $P(h)$, le fait qu'il y a au plus m^h feuilles dans un arbre m-aire de hauteur h. On peut assumer que $h \geq 0$.

- *$P(0)$ est le fait qu'il y a au plus $m^0 = 1$ feuille dans un arbre m-aire de hauteur 0. Ce qui est vrai.*
- *Hypothèse : Soit $P(h)$ vrai pour un $h \geq 0$.*
- *Thèse : $P(h+1)$?*
  Soit un arbre m-aire de hauteur h. On augmente la hauteur de l'arbre de 1, toutes les feuilles deviennent des sommets internes en rajoutant m enfants à chacun d'entre eux. Ceci nous donne un arbre m-aire de hauteur $h+1$ avec au plus $m^h.m = m^{h+1}$ feuilles. Donc $P(h+1)$ est vrai.

Par récurrence nous avons montré que $P(h)$ est vrai pour tout $i \geq 0$. □

4 Relations de récurrences

Théorème 1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de régions du plan délimitées par n droites en position générale ne dépend pas du choix de ces droites. En d'autre termes, $\Phi_2(n)$ est bien défini. De plus,*

$$\Phi_2(n) = \Phi_2(n-1) + n$$

pour $n \geq 1$, et $\Phi_2(0) = 1$.

Démonstration : *Le fait que $\Phi_2(0)$ est bien défini et vaut 1 est évident.*
Maintenant, supposons $n \geq 1$ et supposons $\Phi_2(n-1)$ bien défini. Numérotons les droits de l'arrangement $D_1, .., D_n$. Le nombre de régions délimitées par les droites $D_1, ..., D_{n-1}$ vaut $\Phi_2(n-1)$. Rajoutons la droite D_n à cet arrangement. Cette dernière droite coupe certaines des régions de l'arrangement $D_1, ..., D_{n-1}$ en deux. Le nombre de telles régions est égale au nombre d'intervalles de la droite D_n délimités par $D_1, ..., D_{n-1}$, c'est-à-dire n. Donc $\Phi_2(n)$ est bien définit et vaut $\Phi_2(n-1)+n$.
□

Théorème 7 *La récurrence*

$$x_n = x_n X_{n-1} + d_n \quad \forall n \geq 1 \quad x_0 = 0$$

a pour solution explicite

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} d_i \prod_{j=i+1}^{n} c_j = d_n + d_{n-1}c_n + d_{n-2}c_{n-1}c_n + ... + d_1 c_2 ... c_n$$

Démonstration : *par récurrence sur n. C'est vrai pour $n = 0$ (car une somme vide est par définition nulle). Supposons maintenant $n > 0$ et*

$$x_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} d_i \prod_{j=i+1}^{n-1} c_j$$

alors

$$\begin{aligned} x_n &= c_n x_{n-1} + d_n \\ &= c_n \sum_{i=1}^{n-1} d_i \prod_{j=i+1}^{n-1} c_j + d_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} d_i \prod_{j=i+1}^{n} c_j + d_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_i \prod_{j=i+1}^{n} c_j \end{aligned}$$

□

5 Fonctions génératrices

Théorème 11 *Soient $A(x)$ la FGO de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B(x)$ la FGO de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :*

1. $A(x)+B(x)$ *est la FGO de* $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $xA(x)$ *est la FGO de* $(0,a_0,a_1,a_2,...;a_{n-1},...)$
3. $\int_0^x A(t)dt$ *est la FGO de* $(0,a_0,\frac{a_1}{2},\frac{a_2}{3},...,\frac{a_{n-1}}{n},...)$
4. $\frac{A(x)-a_0}{x}$ *est la FGO de* $(a_1,a_2,a_3,...,a_{n+1},...)$
5. $A'(x)$ *est la FGO de* $(a_1,2a_2,3a_3,...,(n+1)a_{n+1},...)$
6. $A(x)B(x)$ *est la FGO de* $(a_0b_0,a_0b_1+a_1b_0,a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0,...)$
7. $(1-x)A(x)$ *est la FGO de* $(a_0,a_1-a_0,a_2-a_1,...,a_n-a_{n-1},...)$
8. $\frac{A(X)}{1-x}$ *est la FGO de* $(a_0,a_0+a_1,a_0+a_1+a_2,...,\sum_{k=0}^n a_k,...)$

Démonstration :

1.
$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$
$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$
$$A(x)+B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$$

2.
$$xA(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

3.
$$\int_0^x A(t)dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^x a_nt^ndt)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\frac{x^n}{n}$$

4.
$$A(x)-a_0=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=x\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n$$

5.
$$A'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

6.
$$A(x)B(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+...)(b_0+b_1x+b_2x^2+...)$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+...$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k})x^n$$

7. *Par 6. : Si* $B(x)$ *est la FGO de* $(1,-1,0,0,...)$*, alors* $(1-x)A(x)=A(x)(1-x)=A(x)B(x)$ *est la FGO de*
$$(a_0,a_0(-1)+a_1(1),...,a_0b_n+a_1b_{n-1}+...+a_{n-1}(-1)+a_n(1),...)=a_1-a_0$$

8. *Par 6. : de manière similaire, si $B(x)$ est la FGO de (1,1,1,...), alors $\frac{1}{1-x}A(x) = A(x)\frac{1}{1-x} = A(x)B(x)$ est la FGO de*

$$(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, ..., \sum_{k=0}^{n} a_k, ...) \quad \square$$