MATH-F307 - Mathématiques discrètes 2021-2022

Séance 1

Exercice 1. Soient A et B deux ensembles finis avec $|A| = a$ et $|B| = b$ $(a, b \in \mathbb{N})$. Que valent:

1. $|A \times B|$,
2. $|B^A|$ où $B^A := \{f : A \to B\}$,
3. $|\{f : A \to B : f \text{ est une injection de } A \text{ dans } B\}|$,
4. $|\mathrm{S}(A)|$ où $\mathrm{S}(A)$ est l'ensemble de toutes les permutations de A.

Exercice 2. Quels sont les ensembles F non vides ayant la propriété suivante:

1. pour tout ensemble X, $|F^X| = 1$?
2. pour tout ensemble Y, $|Y^F| = 1$?

Exercice 3. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. Démontrer:

1. $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective;
2. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective;
3. $g \circ f$ bijective $\Rightarrow$ (f injective et g surjective).

Exercice 4.
Calculer $1 + 3 + 5 + ... + (2k + 1)$, la somme des $k + 1$ premiers nombres impairs, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Montrer que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont la même cardinalité. Donner une bijection explicite entre les deux ensembles.

Exercice 6. Montrer que si n est un entier, alors $n^3 - n$ est pair.

Exercice 7. Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationel.

Exercice 8. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers a et b telle que: $18a + 6b = 1$.

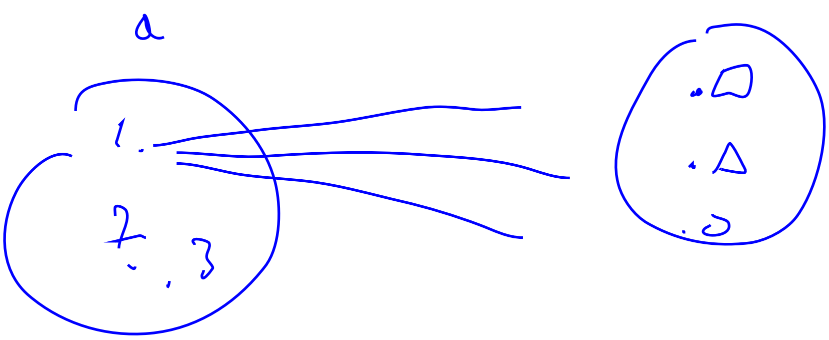
Ex 1.

1. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

2. $|B^A|$ où $B^A := \{ f : A \to B \}$

$= b^a$

Exemple



On a 3 choix dans ce cas-ci pour chaque élément de a

$\Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots = b^a$

3. $\dfrac{b!}{(b-a)!}$ $\to$ On retire des éléments de b qui ne seront pas liés à des él. de a

Si $a > b$ alors

$|\{ f : A \to B ; f \ldots \}| = 0$

sinon $\dfrac{b!}{(b-a)!}$

4. $|S(A)| = a!$

Ex 2 :

$|F^X| = 1$

$X \longrightarrow F$?

tous les choix   1 seul élém-

Si $|F| \geq 2$ et $X = \{1, 2\}$

on peut construire une fonct° f dans F^X telle que $f(1) = f_1 \in F$ et $f(2) = f_2$

mais on peut construire une seconde fonct° $g \in F^X$ telle que $g(1) = f_2$ et $g(2) = f_1$

alors $f \neq g$ et $|F^X| \geq 2$

conclus° : F doit être un singleton

2. Comme F est non-vide, $\exists$ au moins un élém- $h \in F$

Si on choisit $Y = \{1, 2\}$ on peut construire une fct f telle que $f(h) = 1$ MAIS on peut aussi construire une fonction g telle que $g(h) = 2$

Donc $|Y^F| \geq 2$

$\Rightarrow$ Aucun F ne convient

Ex 3

3. Si ① et ② sont vraies $g \circ f$ bijec°

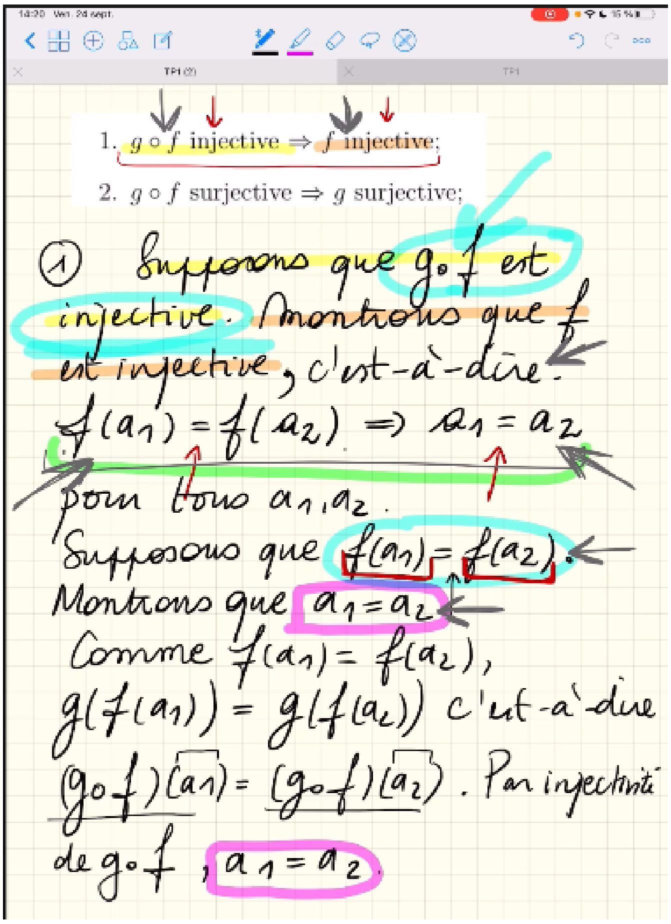
$\Rightarrow g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surj

$\Rightarrow g \circ f$ inj $\overset{①}{\Rightarrow} f$ inj

① Supposons $g \circ f$ est injective.

Montrons que f est injective

c-à-d que $\forall\, a_1, a_2 : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$



1. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective;
2. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective;

① Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective, c'est-à-dire

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

pour tous a_1, a_2.

Supposons que $f(a_1) = f(a_2)$.
Montrons que $\boxed{a_1 = a_2}$

Comme $f(a_1) = f(a_2)$,
$g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ c'est-à-dire
$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Par injectivité de $g \circ f$, $\boxed{a_1 = a_2}$.

② $g \circ f$ surj $\Rightarrow g$ surj

Supposons $g \circ f$ surjective

Montrons que g surjective, càd que

$\forall\, c \in C, \exists\, b \in B : g(b) = c$

Soit $c \in C$. On cherche $b \in B$ t.q. $g(b) = c$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}
$$

Par surjectivité de $g \circ f$, $\exists\, a \in A$ t.q.

$(g \circ f)(a) = c$

$g(f(a)) = c$

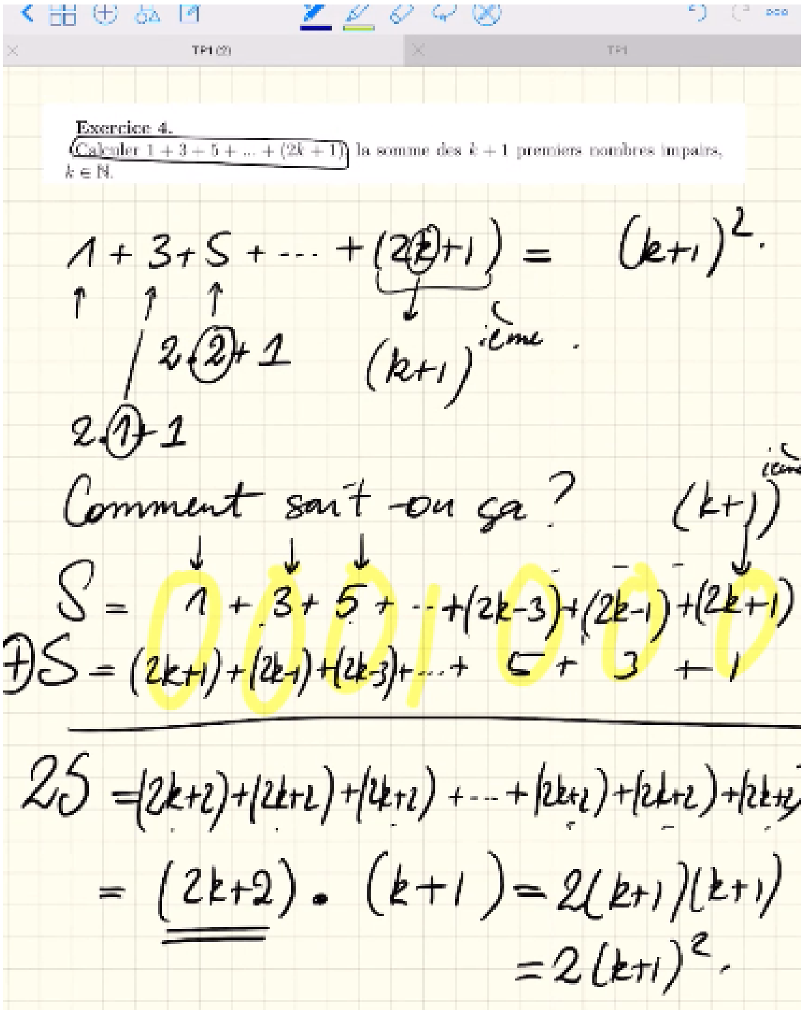
Donc si on choisit $b \underbrace{:=}_{\text{défini comme}} f(a)$

On a bien $g(b) = g(f(a)) = c$

CQFD

Ex 4

$$1+3+5+\dots+(2k+1) = (k+1)^2$$



Exercice 4.
Calculer $1+3+5+\dots+(2k+1)$ la somme des $k+1$ premiers nombres impairs, $k \in \mathbb{N}$.

$$1+3+5+\dots+(2k+1) = (k+1)^2.$$

$2\cdot 2+1$ $\qquad (k+1)^{\text{ième}}$.

$2\cdot 1+1$

Comment sait-on ça ? $\qquad (k+1)^{\text{ième}}$

$$S = 1+3+5+\dots+(2k-3)+(2k-1)+(2k+1)$$
$$+\;S = (2k+1)+(2k-1)+(2k-3)+\dots+5+3+1$$

$$2S = (2k+2)+(2k+2)+(2k+2)+\dots+(2k+2)+(2k+2)+(2k+2)$$
$$= (2k+2)\cdot(k+1) = 2(k+1)(k+1)$$
$$= 2(k+1)^2.$$

$$= (k+1)^2$$

Démontrons que $1+3+5+\dots+(2k+1) = (k+1)^2$ par récurrence

① Initiation : $k=0$

$1 = (0+1)^2$? $\Rightarrow$ oui

② Hyp. de réc : Supposons

que $1+3+5+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$

pour un $n \in \mathbb{N}$

③ Etape de réc.

Montrons que

$1+3+5+\dots+2n+1+(2(n+1)+1)$

$1+3+5+\dots+(2n+1)+2(n+1)+1)$

$=(n+1)^2+2(n+1)+1$

$=n^2+2n+1+(2n+3)$

$=n^2+2n+1+2n+3$

$=n^2+4n+4$

$=(n+2)^2$

$=((n+1)+1)^2$

Ex 5

Il suffit d'associer chaque naturel pair à un nb négatif, et impair à un nb positif

$\mathbb{N}$:	0	1	2	3	4	5	6
	0	1	-1	2	-2	3	-3

"est envoyé sur"

Bijection : $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$: $\begin{cases} n \mapsto -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ n \mapsto \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

"dans"

Ex 6

$$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$$

Si n est pair : tout produit avec un facteur n est pair $\Rightarrow n^3 - n$ est pair

Si n impair : $n+1$ est pair $\Rightarrow n^3 - n$ est pair

Ex 7

Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel

Par l'absurde :

Supposons $\sqrt{3}$ rationnel, alors

$\exists\, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}_0 : \frac{a}{b} = \sqrt{3}$ avec a et b premiers entre eux

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 3b^2$$

$\underset{\text{divise}}{3 \mid} 3b^2 = a^2$ donc $3 \mid a$ (3 premier). Donc

$9 \mid a^2 = 3b^2$. Donc $3 \mid b^2$ donc $3 \mid b$

(3 premier) or fract° irréductible

Ex 8

$$18a + 6b = 1$$

Supposons par l'absurde qu'il existe bien a et $b \in \mathbb{Z}$ qui vérifie l'équation

$$\Rightarrow 6(3a+b) = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3a + b = \frac{1}{6}$$

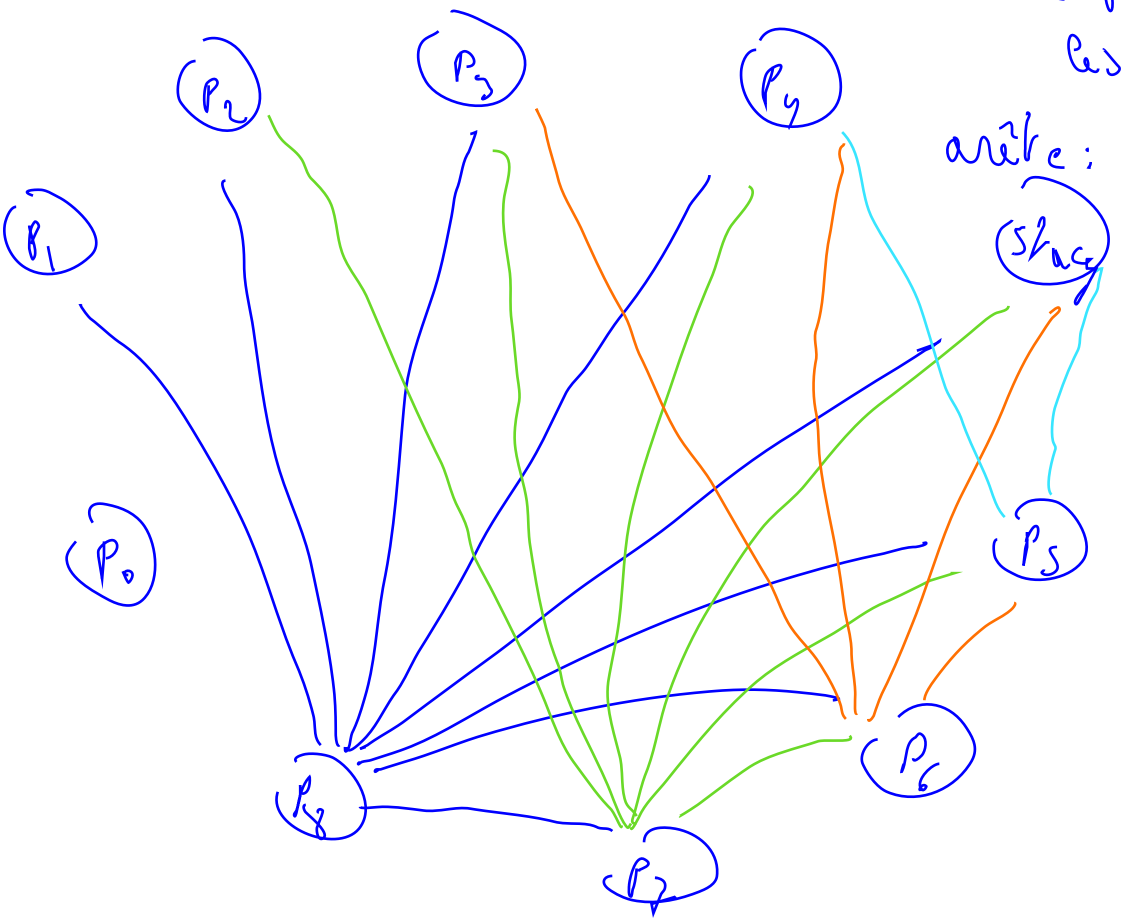
Comme $a, b \in \mathbb{Z}$, $3a + b \in \mathbb{Z}$

Exercice 9. Just for fun:

Stacy and Sam Smyth were known for throwing a heck of a good party. At one of their wild gatherings, five couples were present (this included the Smyth's, of course). The attendees were cordial, and some even shook hands with other guests. Although we have no idea who shook hands with whom, we do know that no one shook hands with themselves and no one shook hands with his or her spouse. Given these facts, a guest might not shake anyone's hand or might shake as many as eight other people's hands. At midnight, Sam Smyth gathered the crowd and asked the nine other people how many hands each of them had shaken. Much to Sam's amazement, each person gave a different answer. That is, someone didn't shake any hands, someone else shook one hand, someone else shook two hands, someone else shook three hands, and so forth, down to the last person, who shook eight hands. Given this outcome, determine the exact number of hands that Stacy Smyth shook.

Soit P_i personne (hors Stacy) les noeuds du graphe

arête : serrage de main



$\Rightarrow$ Stacy a serré 4 mains