INFO-F-302
Informatique Fondamentale
Logique du premier ordre

Prof. Emmanuel Filiot

Exercice 1

1. Soit un langage $\mathcal{L} = (p, q, r, s, t, f, g)$ où p, q sont des prédicats unaires, r, s, t sont des prédicats binaires, et f, g sont des fonctions unaires. Modélisez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :
   (a) La relation r modélise une fonction.
   (b) le prédicat s contient le produit cartésien de p et q.
   (c) le prédicat t est égal au produit cartésien de q et p.
   (d) La fonction f est surjective.
   (e) La fonction g est injective.
2. Soit un langage $\mathcal{L} = (p, f, g)$ où p est un prédicat binaire, f une fonctions binaire, et soit une formule φ de $\mathcal{L}$ telle que $\varphi \equiv \exists y \cdot p(z, f(x, y))$. La formule φ est-elle vraie dans la structure $\mathcal{M}$, en utilisant la valuation $\mathcal{V}$?
   (a) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{N}, p \equiv \geq, f \equiv +)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   (b) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}, p \equiv \geq, f \equiv +)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   (c) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{N}, p \equiv \geq, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   (d) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}, p \equiv =, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   (e) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}_6, p \equiv =, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   (f) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{N}, p \equiv \leq, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 2, z \mapsto 4)$
   (g) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}, p \equiv \leq, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 2, z \mapsto 4)$
3. Trouver un modèle non vide avec le moins d'éléments possibles qui satisfait la formule :
   (a) $\exists x \exists y \exists z \cdot x \neq y \wedge y \neq z$
   (b) $\forall x \cdot [f(x) \neq x]$
   (c) $\forall x \cdot [f(x) \neq x] \wedge \exists x \forall y \cdot [f(y) \neq x]$
   (d) $\forall x \cdot [f(x) \neq x] \wedge \forall x \forall y \forall z \cdot [(f(x) = z \wedge f(y) = z) \rightarrow x = y]$
   (e) $\forall x \cdot [f(x) \neq x] \wedge \exists x \forall y \cdot [f(y) \neq x] \wedge \forall x \forall y \forall z \cdot [(f(x) = z \wedge f(y) = z) \rightarrow x = y]$

Exercice 2 On s'intéresse à l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$, muni de la fonction unaire "successeur" s telle que $s(n) = n + 1$.

1. Donnez une formule φ_0 ouverte sur la variable x qui est validée si et seulement si x vaut 0.
   Attention, la constante 0 ne fait pas partie du vocabulaire.

2. Soient p et i deux prédicats unaires. Donnez une formule qui garantit que $p(n)$ est vrai exactement pour les n pairs, et $i(n)$ exactement pour les n impairs.
3. Soit d une fonction unaire. Donnez une formule qui garantit que $d(n) = 2n$ pour tout n.
4. On cherche à réinventer les symboles $+$, $\times$, et $\geqslant$. Seraient-ce des prédicats ? Des fonctions ? De quelle arité ? Donner une formule pour garantir leur bon fonctionnement.

Exercice 3 On s'intéresse maintenant au modèle qui contient à la fois les entiers et les listes d'entiers strictement positifs. Les entiers sont identifiés par le prédicat $N(x)$, et on peut appliquer sur eux le vocabulaire de l'Exercice 2 ($s, 0, p, i, d, +, \times, \geqslant$). Les listes sont identifiés par le prédicat $L(x)$, et on peut appliquer sur elles la fonction $e(x, y)$ qui retourne le $y^{\text{ème}}$ élément de x. Par convention si x n'a pas de $y^{\text{ème}}$ élément, $e(x, y) = 0$.

— On veut "typer" la fonction e et s'assurer qu'elle renvoie toujours un entier. Donner la formule qui doit être vraie dans ce cas.

— On veut s'assurer que si une liste a n éléments, alors tous les $e(x, y)$ avec $y > n$ valent 0. Donner la formule qui doit être vraie dans ce cas.

On s'intéresse maintenant à la conjecture de Syracuse. Soit une valeur n. On génère une liste de valeurs comme suit.

— Si n est pair, la prochaine valeur est $n/2$

— Si n est impair, la prochaine valeur est $3n + 1$

On s'arrête si on atteint 1. Par exemple, pour une valeur initiale de 13, la séquence serait :

$$13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

La conjecture de Syracuse dit que : quelque soit la valeur de départ, on atteint toujours 1.

Exprimer la conjecture de Syracuse en logique du premier ordre à l'aide de fonctions et prédicats de votre choix.

Exercice 4 Soit un langage $\mathcal{L} = (t)$, où t est un prédicat binaire.

1. Modélisez en logique du premier ordre que t est une relation transitive (φ_1) et totale (φ_2).
2. Soit un graphe non-dirigé G, et $\mathcal{M}_G$ la structure définie par G où le domaine est l'ensemble des nœuds de G et t la présence d'un chemin entre deux nœuds. Est-ce que $\mathcal{M}_G$ est un modèle pour la propriété de transitivité sur t ? Sinon donnez un contre-exemple.
3. Est-ce qu'on a $\mathcal{M}_G \models \varphi_2$? Sinon donnez un contre-exemple.
4. Soit un graphe non-dirigé G tel que $\mathcal{M}_G \not\models (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$, que pouvez-vous dire de G ?
5. Soit a le prédicat binaire représentant les arêtes de G. Construire φ sur $\mathcal{L}$ telle que $\mathcal{M}_G \models \varphi$:
   (a) Si et seulement si G possède un élément qui est un successeur de tous les autres nœuds.
   (b) Si et seulement si G possède une clique de taille k.

Exercice 5 Soit le langage $\mathcal{L} = (p)$, où p est un prédicat binaire. Ecrire une formule φ telle que si $\mathcal{M} \models \varphi$, alors le domaine de $\mathcal{M}$ est infini. Si c'est le cas, montrer que $\mathbb{N} \models \varphi$ pour une certaine interprétation de p.

1 Solutions

Exercice 1

1. (a) La relation r modélise une fonction.
   $\forall x \forall y \forall z \cdot (r(x,y) \wedge r(x,z)) \rightarrow y = z$
   (b) le prédicat s contient le produit cartésien de p et q.
   $\forall x \forall y \cdot (p(x) \wedge q(y)) \rightarrow s(x,y)$
   (c) le prédicat t est égal au produit cartésien de q et p.
   $\forall x \forall y \cdot t(x,y) \leftrightarrow (q(x) \wedge p(y))$
   (d) La fonction f est surjective.
   $\forall y \exists x \cdot f(x) = y$
   (e) La fonction g est injective.
   $\forall x \forall y \cdot (x \neq y) \rightarrow \neg(f(x) = f(y))$

2. (a) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{N}, p \equiv \geq, f \equiv +)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   $\exists y \cdot 3 \geq 5 + y$ est faux dans $\mathbb{N}$
   (b) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}, p \equiv \geq, f \equiv +)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   $\exists y \cdot 3 \geq 5 + y$ est vrai dans $\mathbb{Z}$ (on prend $y = -2$)
   (c) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{N}, p \equiv \geq, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   $\exists y \cdot 3 \geq 5 \times y$ est vrai dans $\mathbb{N}$ (on prend $y = 0$)
   (d) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}, p \equiv =, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   $\exists y \cdot 3 = 5 \times y$ est faux dans $\mathbb{N}$
   (e) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}_6, p \equiv =, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 5, z \mapsto 3)$
   $\exists y \cdot 3 = 5 \times y$ est vrai dans $\mathbb{Z}_6$ (on prend $y = 3$, $5 \times 3 = 15 \equiv 3[6]$)
   (f) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{N}, p \equiv \leq, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 2, z \mapsto 4)$
   $\exists y \cdot 4 \leq 2 \times y$ est vrai dans $\mathbb{N}$ (on prend $y = 3$)
   (g) $\mathcal{M} = (D \equiv \mathbb{Z}, p \equiv \leq, f \equiv \times)$ et $\mathcal{V} \equiv (x \mapsto 2, z \mapsto 4)$
   $\exists y \cdot 4 \leq 2 \times y$ est vrai dans $\mathbb{Z}$ (on prend $y = 3$)

3. (a) $\exists x \exists y \exists z \cdot x \neq y \wedge y \neq z$
   On peut prendre le modèle $\{0, 1\}$ avec $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. La valuation qui valide la formule $\exists$ est $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$.
   Deux éléments au moins sont nécessaires pour avoir $x \neq y$.
   (b) $\forall x \cdot [f(x) \neq x]$
   On s'assure qu'aucun élément n'est sa propre image. On peut prendre le modèle $\{0, 1\}$ avec $f(0) = 1,\ f(1) = 0$.
   Deux éléments au moins sont nécessaires pour avoir $x \neq f(x)$.
   (c) $\forall x \cdot [f(x) \neq x] \wedge \exists x \forall y \cdot [f(y) \neq x]$
   On s'assure qu'aucun élément n'est sa propre image, et que f n'est pas surjective. On peut prendre le modèle $\{0, 1, 2\}$ avec $f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 1$.
   On a besoin de 3 éléments : 0 qui n'a aucun antécédent, $f(0)$ qui ne peut pas être 0 (car il n'a pas d'antécédents), et $f(f(0))$ qui ne peut être ni 0 (car il n'a pas d'antécédents), ni $f(0)$ (aucun élément n'est sa propre image).

(d) $\forall x \cdot [f(x) \neq x] \wedge \forall x \forall y \forall z \cdot [(f(x) = z \wedge f(y) = z) \rightarrow x = y]$
On s'assure qu'aucun élément n'est sa propre image, et que f est injective. On peut prendre le modèle $\{0, 1\}$ avec $f(0) = 1,\ f(1) = 0$.
Deux éléments au moins sont nécessaires pour avoir $x \neq f(x)$. Ce modèle respecte l'injectivité en plus.

(e) $\forall x \cdot [f(x) \neq x] \wedge \exists x \forall y \cdot [f(y) \neq x] \wedge \forall x \forall y \forall z \cdot [(f(x) = z \wedge f(y) = z) \rightarrow x = y]$
On s'assure qu'aucun élément n'est sa propre image, que f n'est pas surjective, et que f est injective.
Il n'existe pas de modèle fini pour cette formule !
On nomme 0 un élément sans antécédent. $f(0)$ n'est pas 0 (car il n'a pas d'antécédents), $f(f(0))$ n'est pas 0 (car il n'a pas d'antécédents) ni $f(0)$ (par injectivité), $f(f(f(0)))$ n'est pas 0 (car il n'a pas d'antécédents) ni $f(0)$ ni $f(f(0))$ (par injectivité)...
Cela ne veut pas dire que la formule n'a pas de modèle : $\mathbb{N}$ avec $f(i) = i + 1$ convient.

Exercice 2

1. $\varphi_0(x)$ valide si et seulement si x vaut 0 :
   $\forall y \cdot s(y) \neq x.$
   0 est le seul élément qui n'est pas un successeur.
2. $p(n)$ vrai exactement pour les pairs, $i(n)$ exactement pour les impairs.

$$\begin{array}{lr} \forall x \cdot (p(x) \vee i(x)) \wedge \neg(p(x) \wedge i(x)) & p \text{ et } i \text{ sont disjoints mais d'union } \mathbb{N} \\ \wedge \forall x \cdot \varphi_0(x) \rightarrow p(x) & 0 \text{ est pair} \\ \wedge \forall x \cdot p(x) \rightarrow i(s(x)) & \text{Si } x \text{ est pair alors } x+1 \text{ est impair} \\ \wedge \forall x \cdot i(x) \rightarrow p(s(x)) & \text{Si } x \text{ est impair alors } x+1 \text{ est pair} \end{array}$$

3. $d(n) = 2n.$

$$\begin{array}{lr} \forall x \cdot \varphi_0(x) \rightarrow \varphi_0(d(x)) & 2 \times 0 = 0 \\ \cancel{\wedge \forall x \cdot d(s(x)) \rightarrow s(s(f(x)))} & 2 \times (x+1) = 2 \times x + 1 + 1 \end{array}$$

$\forall x \cdot\ d(s(x)) = s(s(d(x)))$

4. On cherche à réinventer les symboles $+$, $\times$, et $\geqslant$. Seraient-ce des prédicats ? Des fonctions ? De quelle arité ? Donner une formule pour garantir leur bon fonctionnement.
   $+$, $\times$ sont des fonctions binaires, $\geqslant$ un prédicat binaire.

$$\begin{array}{lr} \forall x, y \cdot \varphi_0(y) \rightarrow x + y = x & x + 0 = x \\ \wedge \forall x, y \cdot x + s(y) = s(x) + y & (x+1) + y = x + (y+1) \end{array}$$

   Cela suffit pour $+$. Par exemple, pour montrer que $5 + 3 = 8$:

$$\begin{aligned} 5 + 3 &= 5 + (2+1) = (5+1) + 2 = 6 + 2 \\ &= 6 + (1+1) = (6+1) + 1 = 7 + 1 \\ &= 7 + (0+1) = (7+1) + 0 = 8 + 0 = 8 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\forall x,\ y \cdot \varphi_0(y) \to x \times y = y && x \times 0 = 0 \\
\wedge&\forall x,\ y \cdot x \times s(y) = (x \times y) + x && (x+1) \times y = x \times y + x
\end{aligned}
$$

Cela suffit pour $\times$. Par exemple, pour montrer que $5 \times 3 = 15$:

$$
\begin{aligned}
5 \times 3 &= 5 \times (2+1) = (5 \times 2) + 5 \\
&= (5 \times (1+1)) + 5 = ((5 \times 1) + 5) + 5 \\
&= ((5 \times (0+1)) + 5) + 5 = (((5 \times 0) + 5) + 5) + 5 = (((0) + 5) + 5) + 5 = 15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\forall x \cdot x \geqslant x \\
\wedge&\forall x,\ y \cdot x \geqslant y \to s(x) \geqslant y && \text{Si } x \geqslant y \text{ alors } x+1 \geqslant y \\
\wedge&\forall x,\ y \cdot x \geqslant y \wedge y \geqslant x \to x = y
\end{aligned}
$$

Cela suffit pour $\geqslant$. La dernière ligne est nécessaire pour que les interprétations trop permissives (par exemple “$x \geqslant y$ toujours vrai”) soient éliminées.

Exercice 3

— “Typer” la fonction e :
  $\forall x,\ y \cdot N(e(x,y))$
— Si une liste a n éléments, tous les $e(x,y)$ avec $y > n$ valent 0.
  $\forall x,\ y \cdot \varphi_0(e(x,y)) \to \varphi_0(e(x,s(y)))$
  Si on veut s'assurer que toute liste se termine (ce qui n'est pas forcément le cas dans cet exercice) :
  $\forall x \cdot L(x) \to \exists y \cdot N(y) \wedge \varphi_0(e(x,y))$

On s'intéresse maintenant à la conjecture de Syracuse. Soit une valeur n. On génère une liste de valeurs comme suit.

— Si n est pair, la prochaine valeur est $n/2$
— Si n est impair, la prochaine valeur est $3n+1$

Conjecture de Syracuse :

$$
\begin{aligned}
&\forall x \cdot [L(x) \wedge \forall y \cdot \\
&\qquad (N(y) \wedge p(e(x,y))) \to e(x,y) = 2 \times e(x,s(y)) && \text{Cas } e(x,y) \text{ pair} \\
&\qquad \wedge (N(y) \wedge i(e(x,y))) \to e(x,s(y)) = 3 \times e(x,y) + 1\ ] && \text{Cas } e(x,y) \text{ impair} \\
&\qquad \to \exists z \cdot N(z) \wedge e(x,z) = 1 && \text{On finit par trouver } 1
\end{aligned}
$$

Exercice 4

1. $\varphi_1 \equiv \forall a \forall b \forall c \cdot (t(a,b) \wedge t(b,c)) \to t(a,c)$ (t est transitive).
   $\varphi_2 \equiv \forall a \forall b \cdot a \neq b \to (t(a,b) \vee t(b,a))$ (t est totale).
2. t est transitive : considérons un graphe non-dirigé G quelconque, pour tout chemin entre les sommets a, b et b, c dans G on a un chemin entre a et c.
3. t n'est en général pas totale : contre-exemple, $G = (V, E)$: sommets $V = \{1, 2\}$, arrêtes $E = \emptyset$.

4. t est totale si tout sommet x a un chemin vers tout autre sommet y, i.e. G est connexe.
5.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_G \not\models (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \text{ ssi} && \\
&\mathcal{M}_G \models \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \text{ ssi} && \text{par sémantique de } \neg \\
&\mathcal{M}_G \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) && \text{par la loi de De Morgan}
\end{aligned}$$

Par la sémantique de $\wedge$ on obtient que $\mathcal{M}_G \models \varphi_1$ et $\mathcal{M}_G \models \varphi_2$. On a que t est totale et transitive sur $\mathcal{M}_G$. Finalement on conclut que G est connexe.

6. (a) G possède un élément qui est un successeur de tous les autres nœuds :
   $\exists y \cdot \forall x \cdot a(x, y)$
   (b) G possède une clique de taille k :
   $\exists x_1, \ldots, x_k \cdot \bigwedge_{i,j=1}^{k} a(x_i, x_j)$

Exercice 5 On peut se servir des autres exercices :

— On utilise 1.1.a pour garantir que p représente une fonction
— On utilise 1.1.d et 1.1.e pour garantir que cette fonction est injective et non surjective
— On a vu en 1.3.e que tout modèle d'une telle formule est infini

$\mathbb{N}$ est un modèle de cette formule pour $p(x, y) \equiv y = x + 1$.