# INFO-F-302
# **Informatique Fondamentale**
# **Exercices - Logique Propositionnelle** *

Prof. Emmanuel Filiot

**Exercice 1 – Tableaux Sémantiques** En utilisant la méthode des tableaux sémantiques, déterminez si les formules suivantes sont satisfaisables, valides, ou non-satisfaisables :

1. $\phi_1 \equiv a \wedge \neg(b \to a)$
2. $\phi_2 \equiv ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \to (\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))$
3. $\phi_3 \equiv \neg((a \to b) \to (\neg b \to \neg a))$
4. $\phi_4 \equiv ((a \to b) \wedge (b \to c)) \vee ((c \to b) \wedge (b \to a))$
5. $\phi_5 \equiv (a \to b) \to ((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$
6. $\phi_6 \equiv ((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$

**Exercice 2 - Déduction Naturelle** Démontrer les séquents suivants en déduction naturelle :

1. $\vdash p \to p$
2. $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$
3. $\vdash p \to (q \to p)$
4. $\vdash p \to ((p \to q) \to q)$
5. $p \wedge q \vdash p \vee r$
6. $p \wedge q \vdash r \to p$
7. $p \to q \to r \vdash (p \wedge q) \to r$
8. $p \to q \to r \vdash q \to p \to r$
9. $p \to q \vdash \neg(p \wedge \neg q)$
10. $p \to (q \vee r) \vdash \neg r \to (\neg q \to \neg p)$
11. $\vdash p \vee \neg p$ (sans utiliser la règle LEM !)

**Exercice 3 – Logique Minimale** On pose $\uparrow$ l'opérateur Booléen suivant : $\phi_1 \uparrow \phi_2$ est faux si et seulement si $\phi_1$ et $\phi_2$ sont toutes les deux vraies. Démontrer que pour toute formule de la logique propositionnelle, il existe une formule équivalente qui ne contient que l'opérateur $\uparrow$.

**Exercice 4 – Equivalences** Démontrer les équivalences $\phi_1 \vee (\phi_2 \wedge \phi_3) \equiv (\phi_1 \vee \phi_2) \wedge (\phi_1 \vee \phi_3)$ et $\phi_1 \to \phi_2 \equiv \neg\phi_2 \to \neg\phi_1$.

* http://www.ulb.ac.be/di/info-f-302/

# Formulaires

## Tableaux sémantiques

| $\alpha$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|---|---|---|
| $\neg\neg\phi$ | $\phi$ | $\phi$ |
| $\phi_1 \wedge \phi_2$ | $\phi_1$ | $\phi_2$ |
| $\neg(\phi_1 \vee \phi_2)$ | $\neg\phi_1$ | $\neg\phi_2$ |
| $\neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ | $\phi_1$ | $\neg\phi_2$ |
| $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ | $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ | $\phi_2 \rightarrow \phi_1$ |

fig. 1 - $\wedge$-règles

| $\beta$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|
| $\phi_1 \vee \phi_2$ | $\phi_1$ | $\phi_2$ |
| $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$ | $\neg\phi_1$ | $\neg\phi_2$ |
| $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ | $\neg\phi_1$ | $\phi_2$ |
| $\neg(\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$ | $\neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ | $\neg(\phi_2 \rightarrow \phi_1)$ |

fig. 2 - $\vee$-règles

## Règles de déduction

- Conjonction :

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\wedge_i \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\wedge_{e_1} \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\wedge_{e_2}$$

- Double négation :

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg_i \qquad \frac{\neg\neg\phi}{\phi}\neg\neg_e$$

- Implication :

$$\begin{array}{l} \phi \;\; hyp. \\ \vdots \\ \psi \;\; fin\, hyp. \\ \hline \quad \phi \rightarrow \psi \end{array}\rightarrow_i \qquad \frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow_e$$

- Disjonction :

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_1} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_2} \qquad \begin{array}{ccc} & \psi_1 \;\; hyp. & \psi_2 \;\; hyp. \\ & \vdots & \vdots \\ \psi_1 \vee \psi_2 & \phi \;\; fin\, hyp. & \phi \;\; fin\, hyp. \\ \hline & \phi & \end{array}\vee_e$$

- Contradiction :

$$\frac{\perp}{\phi} \perp_e$$

- Copie :

$$\frac{\phi}{\phi} copie$$

- Négation :

$$\begin{array}{l} \phi \;\; hyp. \\ \vdots \\ \perp fin\, hyp. \\ \hline \quad \neg\phi \end{array}\neg_i \qquad \frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp}\neg_e$$

- Règles dérivées :

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi} LEM \qquad \frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi} MT \qquad \begin{array}{l} \neg\phi \;\; hyp. \\ \vdots \\ \perp \;\; fin\, hyp. \\ \hline \quad \phi \end{array}_{RAA}$$

# 1 Solutions

**Exercice 1**

1. $\phi_1 \equiv a \wedge \neg(b \to a)$

$$\{\underline{a \wedge \neg(b \to a)}\}$$

$$\{a, \underline{\neg(b \to a)}\}$$

$$\{a, b, \neg a\}_F$$

L'arbre sémantique de $\phi_1$ est **fermé**, $\phi_1$ est donc **non-satisfaisable**.

2. $\phi_2 \equiv ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \to (\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))$

$$\{\underline{((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \to (\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))}\}$$

$$\{\underline{\neg((a \vee c) \wedge (b \vee c))}\} \qquad \{\underline{\neg b \to ((a \wedge b) \vee c)}\}$$

$$\{\underline{\neg(a \vee c)}\} \quad \{\underline{\neg(b \vee c)}\} \quad \{b\}_O \quad \{\underline{(a \wedge b) \vee c}\}$$

$$\{\neg a, \neg c\}_O \quad \{\neg b, \neg c\}_O \qquad \{\underline{a \wedge b}\} \quad \{c\}_O$$

$$\{a, b\}_O$$

L'arbre sémantique de $\phi_2$ est **ouvert**, $\phi_2$ est donc **satisfaisable**.

$$\{\underline{\neg(((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \to (\neg b \to ((a \wedge b) \vee c)))}\}$$

$$\{\underline{(a \vee c) \wedge (b \vee c)}, \neg(\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))\}$$

$$\{a \vee c, b \vee c, \underline{\neg(\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))}\}$$

$$\{a \vee c, b \vee c, \neg b, \underline{\neg((a \wedge b) \vee c)}\}$$

$$\{\underline{a \vee c}, b \vee c, \neg b, \neg(a \wedge b), \neg c\}$$

$$\{a, \underline{b \vee c}, \neg b, \neg(a \wedge b), \neg c\} \qquad \{c, \underline{b \vee c}, \neg b, \neg(a \wedge b), \neg c\}$$

$$\{a, b, \neg b, \underline{\neg(a \wedge b)}, \neg c\} \quad \{a, c, \neg b, \underline{\neg(a \wedge b)}, \neg c\} \quad \{a, b, \neg b, \underline{\neg(a \wedge b)}, \neg c\} \quad \{a, c, \neg b, \underline{\neg(a \wedge b)}, \neg c\}$$

$$\{a, b, \neg b, \neg a, \neg c\}_F \; \{a, b, \neg b, \neg b, \neg c\}_F \; \{a, c, \neg b, \neg a, \neg c\}_F \; \{a, c, \neg b, \neg b, \neg c\}_F \; \{a, b, \neg b, \neg a, \neg c\}_F \; \{a, b, \neg b, \neg b, \neg c\}_F \; \{a, c, \neg b, \neg a, \neg c\}_F \; \{a, c, \neg b, \neg b, \neg c\}_F$$

L'arbre sémantique de $\neg\phi_2$ est **fermé**, $\neg\phi_2$ est **non-satisfaisable** et donc $\phi_2$ est **valide**.

3. $\phi_3 \equiv \neg((a \to b) \to (\neg b \to \neg a))$

$$\{\underline{\neg((a \to b) \to (\neg b \to \neg a))}\}$$

$$\{a \to b, \underline{\neg(\neg b \to \neg a)}\}$$

$$\{\underline{a \to b}, \neg b, a)\}$$

$$\{\neg a, \neg b, a\}_F \qquad \{b, \neg b, a\}_F$$

L'arbre sémantique de $\phi_3$ est **fermé**, $\phi_3$ est donc **non-satisfaisable**.

4. $\phi_4 \equiv ((a \to b) \wedge (b \to c)) \vee ((c \to b) \wedge (b \to a))$

$$\{\underline{((a \to b) \wedge (b \to c)) \vee ((c \to b) \wedge (b \to a))}\}$$

$$\{\underline{(a \to b) \wedge (b \to c)}\} \qquad \{\underline{(c \to b) \wedge (b \to a)}\}$$

$$\{\underline{a \to b}, b \to c\} \qquad \{\underline{c \to b}, b \to a\}$$

$$\{\neg a, \underline{b \to c}\} \qquad \{b, \underline{b \to c}\} \qquad \{\neg c, \underline{b \to a}\} \qquad \{b, \underline{b \to a}\}$$

$$\{\neg a, \neg b\}_O \quad \{\neg a, c\}_O \quad \{b, \neg b\}_F \quad \{b, c\}_O \quad \{\neg c, \neg b\}_O \quad \{\neg c, a\}_O \quad \{b, \neg b\}_F \quad \{b, a\}_O$$

L'arbre sémantique de $\phi_4$ est **ouvert**, $\phi_4$ est donc **satisfaisable**.

$$\{\underline{\neg(((a \to b) \wedge (b \to c)) \vee ((c \to b) \wedge (b \to a)))}\}$$

$$\{\underline{\neg((a \to b) \wedge (b \to c))}, \neg((c \to b) \wedge (b \to a))\}$$

$$\{\underline{\neg(a \to b)}, \neg((c \to b) \wedge (b \to a))\} \quad \{\underline{\neg(b \to c)}, \neg((c \to b) \wedge (b \to a))\}$$

$$\{a, \neg b, \underline{\neg((c \to b) \wedge (b \to a))}\} \qquad \{b, \neg c, \underline{\neg((c \to b) \wedge (b \to a))}\}$$

$$\{a, \neg b, \underline{\neg(c \to b)}\} \{a, \neg b, \underline{\neg(b \to a)}\} \quad \{b, \neg c, \underline{\neg(c \to b)}\} \; \{b, \neg c, \underline{\neg(b \to a)}\}$$

$$\{a, \neg b, c\}_O \qquad \{a, \neg b, b, \neg a\}_F \qquad \{b, \neg c, c, \neg b\}_F \qquad \{b, \neg c, \neg a\}_O$$

L'arbre sémantique de $\neg\phi_4$ est **ouvert**, $\neg\phi_4$ est **satisfaisable** et donc $\phi_4$ est **non-valide**.

5. $\phi_5 \equiv (a \to b) \to ((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$

- $\{\underline{(a \to b) \to ((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))}\}$
  - $\{\underline{\neg(a \to b)}\}$
    - $\{a, \neg b\}_O$
  - $\{\underline{(b \to c) \leftrightarrow (a \to c)}\}$
    - $\{\underline{(b \to c) \to (a \to c)}, (a \to c) \to (b \to c)\}$
      - $\{\underline{\neg(b \to c)}, (a \to c) \to (b \to c)\}$
        - $\{b, \neg c, \underline{(a \to c) \to (b \to c)}\}$
          - $\{b, \neg c, \underline{\neg(a \to c)}\}$
            - $\{b, \neg c, a\}_O$
          - $\{b, \neg c, \underline{b \to c}\}$
            - $\{b, \neg c, \neg b\}_F$
            - $\{b, \neg c, c\}_F$
      - $\{a \to c, \underline{(a \to c) \to (b \to c)}\}$
        - $\{a \to c, \underline{\neg(a \to c)}\}$
          - $\{\underline{a \to c}, a, \neg c\}$
            - $\{\neg a, a, \neg c\}_F$
            - $\{c, a, \neg c\}_F$
        - $\{\underline{a \to c}, b \to c\}$
          - $\{\neg a, \underline{b \to c}\}$
            - $\{\neg a, \neg b\}_O$
            - $\{\neg a, c\}_O$
          - $\{c, \underline{b \to c}\}$
            - $\{c, \neg b\}_O$
            - $\{c\}_O$

L'arbre sémantique de $\phi_5$ est **ouvert**, $\phi_5$ est donc **satisfaisable**.

$$\{\underline{\neg((a \to b) \to ((b \to c) \leftrightarrow (a \to c)))}\}$$

$$\{a \to b, \underline{\neg((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))}\}$$

$$\{a \to b, \underline{\neg((b \to c) \to (a \to c))}\} \qquad \{a \to b, \underline{\neg((a \to c) \to (b \to c))}\}$$

$$\{a \to b, b \to c, \underline{\neg(a \to c)}\} \qquad \{a \to b, a \to c, \underline{\neg(b \to c)}\}$$

$$\{\underline{a \to b}, b \to c, a, \neg c\} \qquad \{\underline{a \to b}, a \to c, b, \neg c\}$$

$$\{\neg a, \underline{b \to c}, a, \neg c\} \quad \{b, \underline{b \to c}, a, \neg c\} \qquad \{\neg a, \underline{a \to c}, b, \neg c\} \quad \{b, \underline{a \to c}, \neg c\}$$

$$\{\neg a, \neg b, a, \neg c\}_F \; \{\neg a, c, a, \neg c\}_F \; \{b, \neg b, a, \neg c\}_F \; \{b, c, a, \neg c\}_F \qquad \{\neg a, b, \neg c\}_O \; \{\neg a, c, b, \neg c\}_F \; \{b, \neg a, \neg c\}_O \; \{b, c, \neg c\}_O$$

L'arbre sémantique de $\neg\phi_5$ est **ouvert**, $\neg\phi_5$ est **satisfaisable** et donc $\phi_5$ est **non-valide**.

6. $\phi_6 \equiv ((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$

$$\{\underline{((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)}\}$$

$$\{\underline{\neg((a \to b) \wedge (b \to c))}\} \qquad \{\underline{a \to c}\}$$

$$\{\underline{\neg(a \to b)}\} \quad \{\underline{\neg(b \to c)}\} \qquad \{\neg a\}_O \quad \{c\}_O$$

$$\{a, \neg b\}_O \quad \{b, \neg c\}_O$$

L'arbre sémantique de $\phi_6$ est **ouvert**, $\phi_6$ est donc **satisfaisable**.

$$\{\underline{\neg(((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c))}\}$$

$$\{\underline{(a \to b) \wedge (b \to c)}, \neg(a \to c)\}$$

$$\{a \to b, b \to c, \underline{\neg(a \to c)}\}$$

$$\{\underline{a \to b}, b \to c, a, \neg c\}$$

$$\{\neg a, \underline{b \to c}, a, \neg c\} \qquad \{b, \underline{b \to c}, a, \neg c\}$$

$$\{\neg a, \neg b, a, \neg c\}_F \quad \{\neg a, c, a, \neg c\}_F \quad \{b, \neg b, a, \neg c\}_F \quad \{b, c, a, \neg c\}_F$$

L'arbre sémantique de $\neg\phi_6$ est **fermé**, $\neg\phi_6$ est **non-satisfaisable** et donc $\phi_6$ est **valide**.

**Exercice 2**

1. $\vdash p \to p$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad p$ (hypothèse) | |
| 2 | $\quad p$ | R, 1 |
| 3 | $p \to p$ | $\Rightarrow$I, 1, 2 |

2. $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad (p \wedge \neg p)$ (hypothèse) | |
| 2 | $\quad p$ | $\wedge$E, 1 |
| 3 | $\quad \neg p$ | $\wedge$E, 1 |
| 4 | $\quad \bot$ | $\neg$E, 1, 2 |
| 5 | $\neg(p \wedge \neg p)$ | $\neg$I, 1–4 |

3. $\vdash p \to (q \to p)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad\quad p$ | |
| 2 | $\quad\quad\quad\quad q$ | |
| 3 | $\quad\quad\quad\quad p$ | R, 1 |
| 4 | $\quad\quad q \to p$ | ⇒I, 2–3 |
| 5 | $p \to (q \to p)$ | ⇒I, 1–4 |

4. $\vdash p \to ((p \to q) \to q)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad\quad p$ | |
| 2 | $\quad\quad\quad\quad p \to q$ | |
| 3 | $\quad\quad\quad\quad p$ | R, 1 |
| 4 | $\quad\quad\quad\quad p \to q$ | R, 2 |
| 5 | $\quad\quad\quad\quad q$ | ⇒E, 3, 4 |
| 6 | $\quad\quad (p \to q) \to q$ | ⇒I, 2–5 |
| 7 | $p \to ((p \to q) \to q)$ | ⇒I, 1–6 |

5. $p \wedge q \vdash p \vee r$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \wedge q$ | |
| 2 | $p \wedge q$ | R, 1 |
| 3 | $p$ | ∧E, 2 |
| 4 | $p \vee r$ | ∨I, 3 |

6. $p \wedge q \vdash r \to p$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \wedge q$ | |
| 2 | $\quad\quad r$ | |
| 3 | $\quad\quad p \wedge q$ | R, 1 |
| 4 | $\quad\quad p$ | ∧E, 2 |
| 5 | $r \to p$ | ⇒I, 2–4 |

7. $p \to q \to r \vdash (p \wedge q) \to r$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \to q \to r$ | |
| 2 | $\quad p \wedge q$ | |
| 3 | $\quad p \to q \to r$ | R, 1 |
| 4 | $\quad p \wedge q$ | R, 2 |
| 5 | $\quad p$ | $\wedge$E, 4 |
| 6 | $\quad q \to r$ | $\Rightarrow$E, 3, 5 |
| 7 | $\quad q$ | $\wedge$E, 4 |
| 8 | $\quad r$ | $\Rightarrow$E, 6, 7 |
| 9 | $(p \wedge q) \to r$ | $\Rightarrow$I, 2–8 |

8. $p \to q \to r \vdash q \to p \to r$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \to q \to r$ | |
| 2 | $\quad p \wedge q$ | |
| 3 | $\quad p \to q \to r$ | R, 1 |
| 4 | $\quad p \wedge q$ | R, 2 |
| 5 | $\quad p$ | $\wedge$E, 4 |
| 6 | $\quad q \to r$ | $\Rightarrow$E, 3, 5 |
| 7 | $\quad q$ | $\wedge$E, 4 |
| 8 | $\quad r$ | $\Rightarrow$E, 6, 7 |
| 9 | $(p \wedge q) \to r$ | $\Rightarrow$I, 2–8 |

9. $p \to q \vdash \neg(p \wedge \neg q)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \to q$ | |
| 2 | $\quad p \wedge \neg q$ | |
| 3 | $\quad p \to q$ | R, 1 |
| 4 | $\quad p \wedge \neg q$ | R, 2 |
| 5 | $\quad p$ | $\wedge$E, 4 |
| 6 | $\quad q$ | $\Rightarrow$E, 3, 5 |
| 7 | $\quad \neg q$ | $\wedge$E, 4 |
| 8 | $\quad \bot$ | $\neg$E, 6, 7 |
| 9 | $\neg(p \wedge \neg q)$ | $\neg$I, 2–8 |

10. $p \to (q \vee r) \vdash \neg r \to (\neg q \to \neg p)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \to (q \vee r)$ | |
| 2 | $\neg r$ | |
| 3 | $\neg q$ | |
| 4 | $p$ | |
| 5 | $p \to (q \vee r)$ | R, 1 |
| 6 | $q \vee r$ | ⇒E, 1, 4 |
| 7 | $q$ | |
| 8 | $\bot$ | ¬E, 7, 3 |
| 9 | $r$ | |
| 10 | $\bot$ | ¬E, 9, 2 |
| 11 | $\bot$ | ∨E, 6, 7–8, 9–10 |
| 12 | $\neg p$ | ¬I, 4–11 |
| 13 | $\neg q \to \neg p$ | ⇒I, 3–12 |
| 14 | $\neg r \to (\neg q \to \neg p)$ | ¬I, 2–13 |

11. $\vdash p \vee \neg p$ (sans utiliser la règle LEM !)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg(p \vee \neg p)$ | |
| 2 | $p$ | |
| 3 | $p \vee \neg p$ | ∨I, 2 |
| 4 | $\bot$ | ¬E, 1, 3 |
| 5 | $\neg p$ | ¬I, 2–4 |
| 6 | $p \vee \neg p$ | ∨I, 5 |
| 7 | $\bot$ | ¬E, 1, 6 |
| 8 | $\neg\neg(p \vee \neg p)$ | ¬I, 1–7 |
| 9 | $p \vee \neg p$ | ¬¬E, 8 |

# 2 FAQ

Q : “Est-ce que si toutes les feuilles de l’arbre sont ouvertes, on peut en déduire que la formule est valide ?”
R : Non ! Contre-exemple très simple : $\phi \equiv a$

$$\{a\}_O$$

L’arbre sémantique de $\phi$ est **ouvert**, $\phi$ est donc **satisfaisable**.

$$\{\neg a\}_O$$

L’abre sémantique de $\neg\phi$ est **ouvert**, $\neg\phi$ est **satisfaisable** et donc $\phi$ est **non-valide**.