Séance 2

Exercice 1.

1. Soit une rangée de 5 chaises dans une pièce. Il y a 7 personnes dans la pièce. De combien de manières peut-on assoir 5 personnes le long de la rangée?
2. De combien de manières peut-on distribuer 10 livres (tous différents) si Elisa reçoit 5 livres, Mathieu 3 livres et Julie 2 livres?
3. Trois pots de confiture et trois pots de miel doivent être placés sur une étagère. De combien de manières peut-on arranger les pots afin qu'il y ait deux pots de confiture aux deux extrémités de l'étagère?

Exercice 2. Dans un jeu non-standard de 40 cartes (10 cartes de valeurs différentes dans 4 couleurs), combien de mains de 4 cartes contiennent

1. 4 cartes d'une seule et même couleur?
2. 4 cartes de deux couleurs?
3. 4 cartes de trois couleurs?
4. 4 cartes de quatres couleurs?

Exercice 3. Une classe de 12 étudiants doit être divisée en groupes d'étude de chacun trois étudiants. De combien de manières cela peut-il être fait si

1. les groupes ont tous des sujets d'étude différents?
2. les groupes étudient le même sujet?

Exercice 4. Donner deux démonstrations de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ .$$

Exercice 5. Prouver, pour $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \ .$$

Exercice 6. Pour $n \geqslant 1$, que vaut la somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ avec k pair ?

Exercice 7. Dans le triangle de Pascal, montrer que le produit des 6 voisins d'un coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est toujours un carré parfait.

Exercice 8. Que vaut

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \quad ?$$

Exercice 9. Que vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \quad ?$$

Ex 1

① $\boxed{7}\ \boxed{6}\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3}$ → l'ordre compte !

$$7.6.5.4.3 = \frac{7!}{(7-5)!}$$

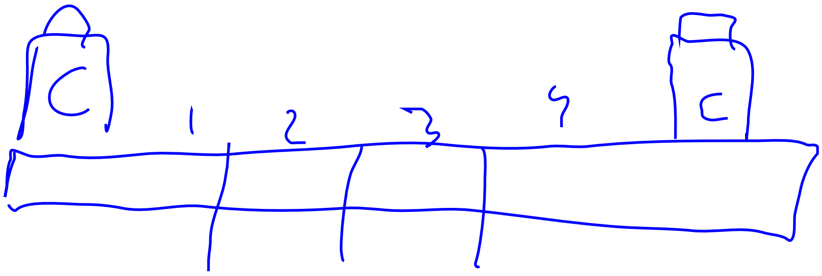
② Pour Elisa : $\binom{10}{5} = \dfrac{10!}{5!\,(10-5)!}$

$$\Rightarrow \binom{10}{5}\binom{5}{3}\binom{2}{2}$$

↳ on choisit 3 parmi 5

$$= \frac{\cancel{10}^{2} \cdot 9 \cdot \cancel{8}^{2} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{8} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2520$$

③



4 → car alors ce qu'il reste, on ne peut pas distinguer les pots de miel → 4 possibilités de placer le dernier pot de confiture

---

Ex 2

40 cartes, 4 couleurs, 10 cartes de chaque couleur

① $\binom{10}{4} 4$

(2) On peut avoir 1-3 (1 carte d'une couleur, 3 de l'autre)

ou 2-2

$\rightarrow$ 1-3 : $\binom{10}{1} \cdot 4 \cdot \binom{10}{3} \cdot 3$

$\rightarrow$ 2-2 : $\dfrac{\binom{10}{2} \cdot 4 \cdot \binom{10}{2} \cdot 3}{2}$ *

$\Rightarrow$ car avec 2-2 on aura des permutat°

$\Rightarrow$ = (1-3) + (2-2)

* On peut faire également $\binom{10}{2}\binom{10}{2}\binom{4}{2}$

(3) 4 cartes de 3 couleurs

2-1-1 : $4 \cdot \binom{10}{2} \cdot \dfrac{3\binom{10}{1} \cdot 2\binom{10}{1}}{2}$

ou $4 \cdot \binom{10}{2}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{3}{2}$

③ $\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$

$\Leftrightarrow \binom{10}{1}^4 = 10^4$

— . — — — — — —

Ex 7

① $\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} \to = 1$

② idem

4! $\to$ on retire les répétitions

— . — ——— —

Ex 9

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Rappel : 1ère méthode

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$ binôme de Newton

$\Rightarrow$ Pour $n=3$: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$$= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^k y^{3-k}$$

$$= \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^3 y^3$$

$$\frac{3!}{0!\,3!}$$

$\rightarrow$ avec $x, y = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underset{=1}{x^k} \underset{=1}{y^{n-k}} = (\underset{=1}{x} + \underset{=1}{y})^n$$

2e méthode :

Démontrons par double comptage :

on va compter le nb de manière de colorier n objets en bleu ou rouge

1ère manière :

pour chaque objet 2 possib. $\to$ 2^n possib.

2e manière :

Si k est le nb d'objets coloriés en bleu, on a $\binom{n}{k}$ manières de colorier nos objets parce qu'on a $\binom{n}{k}$ manière de choisir les objets bleus => on fait ça de 0 jusqu'à n objets bleus => donne 2^n

---

Ex 5

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k} = (x+y)^n$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & (x+y)^n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (-1) & 1 & (-1)+1 = 0 \end{array}$$

Ex 6

$$2\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

$\Rightarrow$ par les résultats des ex 4 et 5

$$=2^n+0=2^n$$

Donc $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$

— — — — — — — —

Ex 8 :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$ Le terme qui correspond à $k=0$ est nul

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{k}\, n!}{\cancel{k!}\,(n-k)!} \quad (k-1)!$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!} \qquad \frac{M!}{T!\,(M-T)!}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \qquad \sum_{i=0}^{M} \binom{M}{i} = 2^M$$

voir ex 4

$$= n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}$$

$i = k-1$

$$= n\, 2^{n-1}$$

Ex 9

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(k+1)! \quad ((n+1)-(k+1))!$$

on multiplie par $n+1$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$$

ceci varie de 1 à $n+1$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{a=1}^{n+1} \binom{n+1}{a}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \underbrace{\sum_{a=0}^{n+1} \binom{n+1}{a}}_{2^{n+1}} - 1 = \binom{n+1}{0}$$