MATH-F307 - Mathématiques discrètes: 2021-2022

Séance 10

Exercice 1. Finir le TP 9

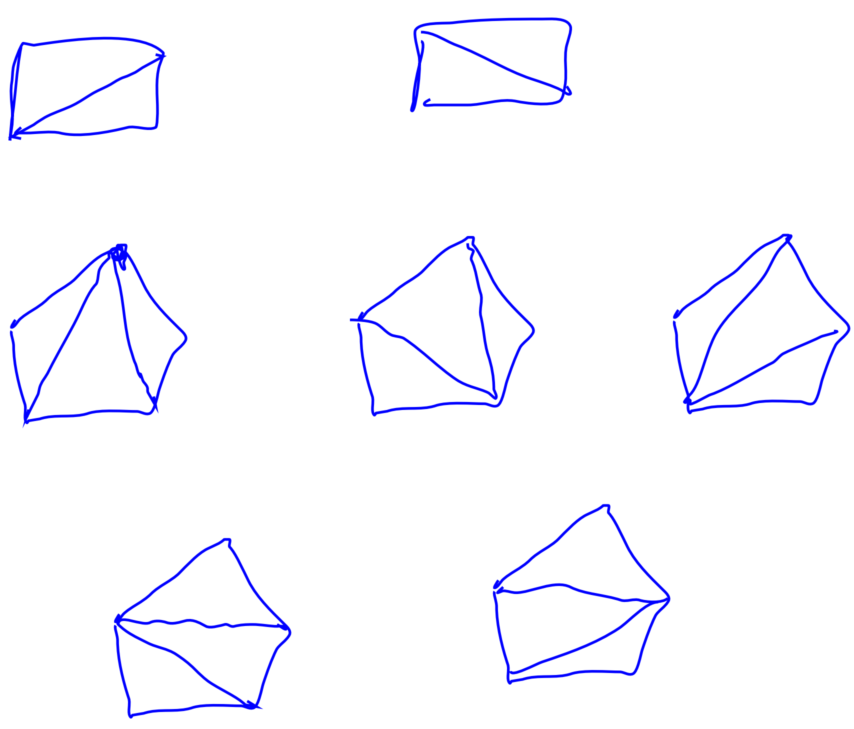
Exercice 2.

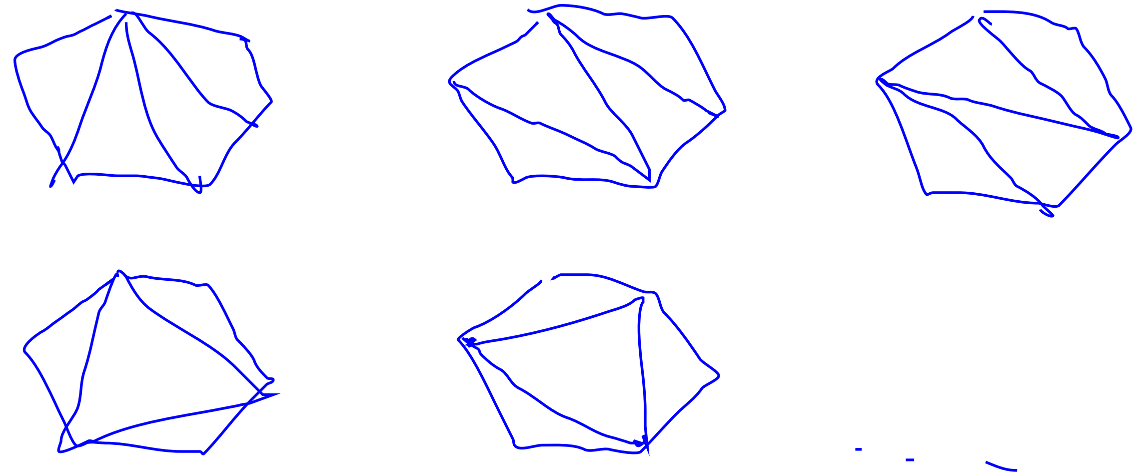
1. Dessiner toutes les triangularisations possibles pour un carré, un pentagone et un hexagone donné.

2. Trouver le nombre de triangularisations d'un polygone régulier à 11 côtés d'abord en utilisant la relation de récurrence qui donne les nombres de Catalan puis en utilisant la formule directe.

Exercice 3. Montrer comment associer tout escalier de Dyck à un parenthésage valide avec n paires de parenthèses et inversément.

1)





2) # triangulations d'un n-gone régulier = $(n-1)$ ième nb de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

$$\Rightarrow C_{10} = \frac{1}{10}\binom{18}{9} = \frac{1}{10}\,\frac{18!}{(18-9)!\,9!} = \frac{1}{10}\,\frac{\cancel{18}^{\,2}\cdot 17\cdot \cancel{16}^{\,2}\cdots 10}{\cancel{9}\cdot\cancel{8}\cdot 7\cdot 6\cdots 1}$$

$$= 4862$$

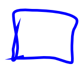
n-ième nb de Catalan :

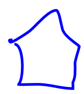
$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_k\, C_{n-k}$$

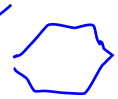
$$C_{10} = 2C_1C_9 + 2C_2C_8 + 2C_3C_7 + 2C_4C_6 + C_5C_5$$

$C_1 = 1$

$C_2 = 1$ ()

$C_3 = 2$ ()

$C_4 = 5$ ()

$C_5 = 14$ ()

$$C_6 = 2C_1C_5 + 2C_2C_4 + C_3C_3$$

$$= 2\cdot1\cdot14 + 2\cdot1\cdot5 + 2\cdot2$$

$$= 42$$

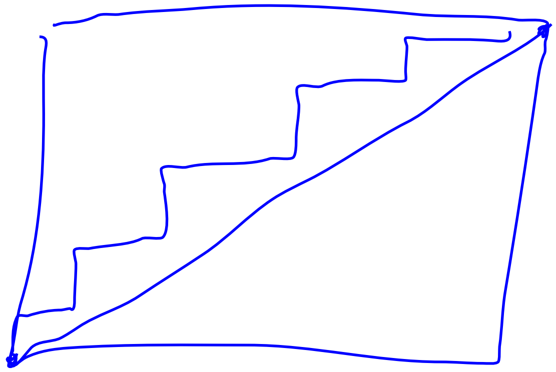
$C_7 = 132$

$C_8 = 429$

$C_9 = 1430$

$C_{10} = 4862$

Ex 3 :



1st move : $\uparrow$

Last move : $\rightarrow$

A tout moment, on doit avoir fait au moins autant $\uparrow$ que de $\rightarrow$

$\uparrow$ (

$\rightarrow$)

$\rightarrow$ [( ) ((((( )))))]