Задача 4.

Оценить энергию ионизации атома водорода и радиус орбиты электрона в основном состоянии

$$\langle E \rangle = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

Если электрон локализован в области размером порядка r, то $p \sim \hbar/r$ =>

$$\Rightarrow E \sim \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}$$

Из условия $\frac{dE}{dr} = 0$ находим боровский радиус

$$r_Б \sim \frac{\hbar^2}{me^2}$$

$$E \sim_0 - \frac{m \cdot e^4}{2\hbar^2}$$

Задача 5.

Оценить глубину проникновения a электрона с энергией E прямоугольный потенц. барьер высотой U.

Импульс частицы при ее нахождении под барьером является чисто мнимой величиной, по модулю равной.

$$|p| = \sqrt{2 \cdot m (U - E)}$$

$$a \sim \frac{\hbar}{\sqrt{m(U-E)}}$$

Задача 2

Фотон с импульсом p рассеялся на свободном электроне и стал обладать импульсом p'. Найти угол рассеяния

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi\hbar}{p}$$

После рассеяния импульс будет (из эффекта Комптона):

$$p' = \frac{2\pi\hbar}{\lambda'} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda + \lambda_c(1-\cos\theta)} = \frac{2\pi\hbar}{\frac{2\pi\hbar}{p} + \frac{2\pi\hbar}{mc}(1-\cos\theta)}$$

Находим θ:

$$p' = \frac{pmc}{mc + p\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{mc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{mc}{2}\cdot\frac{p-p'}{pp'}}$$

Задача 3

Найти температуру полностью ионизованной водородной плазмы плотностью ρ, при которой давление теплового излучения равно газокин.-му давлению частиц плазмы.

$p = u/3$; u - объемная плот. энергии

Дав. изл.

$$P_{rad} = \frac{u}{3} = \frac{4M_e}{3c} = \frac{4\sigma T^4}{3c}$$

σ - const Стефана-Больцмана, M_e - энерг. светимость; $P_{gas}V = \frac{m}{M}RT \Rightarrow P_{gas} = \frac{\rho RT}{M}$

$P_{rad} = P_{gas} \Rightarrow T = \sqrt[3]{\frac{3cR\rho}{4\sigma M}}$

$\rho = \frac{m}{V}$ - плотность

Задача 1.

Пусть $\langle A \rangle$ - среднее значение не зависящего явно от времени оператора A в состоянии ψ, которое меняется с течением времени.

Вычислить, как меняется $\langle A \rangle$ со временем

Решение: Скорость изменения среднего значения равна $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \int \psi^{*}(t) A \psi(t) d\tau$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \int (\dot{\psi}^{*} A \psi + \psi^{*} A \dot{\psi}) d\tau$$

Производные волн. функций ψ ψ^{*} по времени подчиняются уравнению Шредингера:

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{\psi} = H \psi, \quad \frac{\hbar}{i} \dot{\psi}^{*} = H^{+} \psi^{*}$$

где гамильтониан H эрмитов, так что $H = H^{+}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \int [\langle H\psi | A\psi \rangle - \langle \psi | AH\psi \rangle]$$

Преобразовав первое слагаемое $\Rightarrow$

$$\langle \Omega \psi | \varphi \rangle = \langle \psi | \Omega^{+} \varphi \rangle$$

имеем: $\langle H\psi | A\psi \rangle = \langle \psi | H^{+} A \psi \rangle = \langle \psi | HA\psi \rangle$